



SAMUEL SAVINEAU

2000 PAGES
DE PHYSIQUE

ET UNE BONNE QUANTITÉ DE CHIMIE



JePublie

Samuel Savineau
et Pierre Siraut

2000 PAGES DE PHYSIQUE
ET UNE BONNE QUANTITÉ DE CHIMIE

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

Chaire de Physique de
la matière condensée

Pierre-Gilles de Gennes
Professeur

Préface

Ayant longtemps géré une (petite) « Grande Ecole » j'ai pu apprécier la formation solide que reçoivent nos étudiants dans les classes préparatoires. Et pourtant je ne suis pas un enthousiaste du système des concours

L'angoisse du candidat lui fait souvent apprendre par cœur des quantités d'exercices plutôt que de passer suffisamment de temps à réfléchir.

La plupart des grands pays scientifiques se passent très bien des concours. Mais en France ce système a la solidité d'un roc : il faut vivre avec. Et tant qu'à répéter des problèmes, il faut sélectionner avec soin ceux qui, justement, font réfléchir. Il faut aussi leur donner des solutions claires.

Le vaste livre de M. Samuel Savineau répond bien à ces deux objectifs. Je suis convaincu qu'il fournira un appui utile à beaucoup de futurs ingénieurs, et je lui souhaite tout le succès qu'il mérite.

P.-G. de Gennes

Prix Nobel de Physique
Ex Directeur de l'ESPCI de Paris
Professeur au Collège de France

Avertissement

Permettre aux étudiants de classes préparatoires de n'acheter qu'un **seul livre de problèmes corrigés** pendant les années passées en CPGE, sans risque d'impasses ou de dispersion, c'est l'objectif de la rédaction de cet ouvrage. La diffusion de la première édition à 12000 exemplaires montre que ce message a été reçu.

Les éditions Ellipses possèdent pourtant une riche collection d'annales. On peut les acheter toutes, ou seulement celles des écoles espérées, ou encore satisfaire à la mode des dernières parues ; on peut aussi chercher les problèmes illustrant un thème.

Mais le lecteur sait déjà ou saura rapidement qu'en première et deuxième année de C.P.G.E., une difficulté essentielle consiste en une répartition optimale des efforts sur les différentes possibilités de sujets et ce dans le temps imparti.

Ces corrigés ont été rédigés initialement pour mes élèves dont la collaboration critique et pertinente a permis le choix actuel et leur achèvement présent. Les problèmes retenus sont récents en général ; on y trouve aussi des classiques ; leur intérêt ne diminue pas quelles que soient les réformes ; tous contribuent à bien préparer les écrits et les oraux .

L'**efficacité** est indispensable : la sélection des énoncés a été réalisée dans ce but et constitue la possibilité d'un entraînement sûr pour l'étude et l'approfondissement de **TOUT LE PROGRAMME DES CONCOURS**, tout en recherchant la **motivation** par des sujets intéressants qui stimulent, par une analyse détaillée des **modèles** accompagnée des **calculs justificatifs intermédiaires** qui facilitent l'étude .

Au début de première année (et souvent encore au début de deuxième année) les élèves ne connaissent pas leur capacité réelle : ce livre propose différents sujets de niveau progressif, et ce pour chaque thème du programme. Il est logique de commencer par les plus simples et de ne travailler les plus difficiles qu'ultérieurement quand l'aisance le permet. L'ensemble de corrigés ainsi constitué peut être étudié par un élève de première année en ce qui concerne son programme, et continué quand il est en deuxième année. On peut travailler tout le programme de seconde année, revoir celui de première année, adapter le choix de ses problèmes aux concours. L'aisance de l'utilisateur le guidera d'ailleurs dans le choix des inscriptions aux concours envisagés. Ce livre peut être son **unique livre** de problèmes corrigés pendant toute la scolarité en classes préparatoires.

Les **350 énoncés corrigés** rassemblés ici autorisent **n'importe quelle orientation**. C'est une référence unique pour le travail personnel de l'étudiant, le complément, l'aide adaptée qu'il souhaite dans le travail organisé par son professeur : cet ouvrage contient **TOUS LES PRINCIPAUX TYPES DE SUJET** des différentes filières.

Ces solutions sont rédigées comme il est souhaitable de voir les copies rédigées aux concours : pas d'excès de commentaires mais le texte qui vise la note maximale dans le temps imparti. Une part a été réservée aux applications numériques, souvent délaissées au mois de mai. Elles donnent des ordres de grandeurs utiles.

Quelle que soit la nature du lecteur, étudiant ou curieux des sciences, ce livre est un instrument de formation, de culture scientifique et technique, indispensable pour la connaissance et la pleine compréhension de notre environnement quotidien (voir thèmes en 3^{ème} page de couverture) .

Je souhaite à l'utilisateur la pleine satisfaction, la pleine réussite, que ses efforts dans l'étude de cet ouvrage ne manqueront pas de lui apporter, et l'ultime conviction que la physique et la chimie sont fantastiques car elles permettent d' **EXPLIQUER LE MONDE**.

L'auteur.

Chapitre I – Mécanique du point

appartient au programme de MPSI, PCSI, PTSI, TSI1

1.1. Principe fondamental de la dynamique (P.F.D.)

appartient aussi au programme de BCPST1 et TPC1

1.1.1. Invariants, masse réduite de deux particules

Première partie

Dans le repère galiléen du laboratoire, rapporté à un système de coordonnées cartésiennes Oxyz (fig.1), les positions de deux particules, assimilables à deux points matériels P_1 et P_2 de masses m_1 et m_2 , sont définies par les vecteurs:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &\equiv \vec{OP}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z \\ \vec{r}_2 &\equiv \vec{OP}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z \end{aligned} \right\} [1]$$

où $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ désignent les vecteurs unitaires des axes.

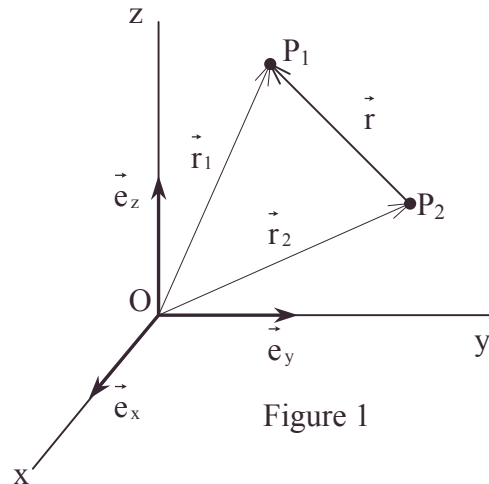


Figure 1

Le système physique constitué par ces deux particules est supposé isolé : P_1 et P_2 ne sont en interaction que l'une avec l'autre, non avec le reste de l'univers. L'énergie potentielle d'interaction est supposée indépendante des vitesses de P_1 et P_2 : a priori, c'est une certaine fonction U , définie, continue et dérivable, des positions de P_1 et P_2 ,

$$U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) [2]$$

sur laquelle on suppose, pour l'instant, ne rien savoir d'autre, sinon qu'elle ne dépend pas explicitement du temps t afin de mériter le nom d' "énergie" potentielle.

1.1. Exprimer, en fonction de U , les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 s'exerçant sur P_1 et P_2 .

2. En déduire les expressions correspondantes des variations élémentaires dT et $d\vec{p}$, pendant la durée infinitésimale $dt \neq 0$.

a. De l'énergie cinétique totale $T = T_1 + T_2$.

b. De la quantité de mouvement totale $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, du système.

3. La condition $U = \text{constante}$, se traduit mathématiquement par $\frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0$. Montrer que

cette "invariance de U par changement de l'origine des temps" entraîne une conséquence physique importante pour la grandeur $E = T + U$, appelée énergie du système.

4. A partir de maintenant, on supposera que l'énergie potentielle d'interaction ne dépend que de la position relative $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ des deux particules : $U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U(\vec{r})$ [3].

On fait subir au repère Oxyz la translation $\vec{\ell} \equiv \vec{OO'}$, de composantes ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z dans Oxyz (Figure 2).

Dans le repère déplacé $O'x'y'z'$, on appellera

$\vec{r}'_1 \equiv \vec{O'P}_1$ et $\vec{r}'_2 \equiv \vec{O'P}_2$ les vecteurs positions de P_1 et P_2 .

a. Vérifier que la valeur de U est la même dans $O'x'y'z'$ et dans $Oxyz$ et déduire de [3] une relation entre \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .

b. Montrer que cette "invariance de U par translation" entraîne une conséquence physique importante pour le vecteur \vec{p} .

5. Exprimer, en fonction de \vec{r} et de \vec{F}_1 :

a. Le moment résultant $\vec{\mathcal{M}}_O$ des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 en O .

b. La variation élémentaire $d\vec{J}$ pendant la durée infinitésimale $dt \neq 0$, du moment cinétique total en O , $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ du système.

Y a-t-il lieu de préciser le point par rapport auquel on calcule les moments \vec{M} et \vec{J} ? Pourquoi ?

6. A partir de maintenant, on supposera que l'énergie potentielle d'interaction ne dépend que de la distance entre les particules, c'est-à-dire du module $r \equiv |\vec{r}|$ de \vec{r} :

$$U = \left(U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \right) = U(|\vec{r}|) = U(r) \quad [4]$$

a. Vérifier que la valeur de U est la même dans $Oxyz$ et dans un repère $O'x'y'z'$ obtenu par une rotation quelconque du repère $Oxyz$ autour d'un axe quelconque passant par O . Déduire de [4] les orientations relatives de \vec{r} et des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .

b. Montrer que cette "invariance de U par rotation" entraîne une conséquence physique importante pour le vecteur \vec{J} .

Deuxième partie

2.1.a. Exprimer, en fonction de $\vec{r}_1, \vec{r}_2, m_1, m_2$ le vecteur $\vec{R} \equiv \vec{OO'}$ donnant la position, dans $Oxyz$, du centre de masse O' du système des deux particules.

b. On fait le changement de variables $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{R}, \vec{r})$. Déduire du principe fondamental de la dynamique newtonienne les équations différentielles auxquelles obéissent $\vec{R}(t)$ et $\vec{r}(t)$.

2. On suppose que le vecteur \vec{R} ci-dessus est celui qui définit la translation considérée à la question 1.4. Déduire de ce qui précède :

a. Que le repère "translaté" $O'x'y'z'$ est un repère galiléen.

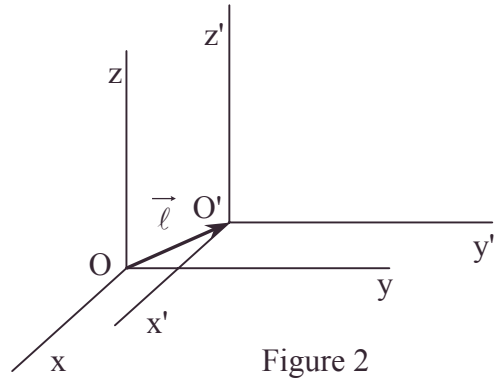
b. Que dans ce repère, dit "repère du centre de masse", le problème "à deux corps" P_1 et P_2 se réduit à l'étude du mouvement d'une particule fictive unique P , soumise à un champ de forces centrales dérivant de l'énergie potentielle [4], et ayant une certaine masse m , dite "masse réduite", que l'on exprimera en fonction de m_1 et m_2 .

3. En pratique, il arrive souvent, ou bien que les deux particules en interaction aient des masses égales ou très voisines (électron-positron, neutron-proton, molécule diatomique homonucléaire,...) ou bien au contraire que la masse de l'une, P_1 par exemple, soit beaucoup plus petite que celle de l'autre : $m_1 \ll m_2$ (électron-proton, proton-noyau lourd)

a. Dans les deux cas ci-dessus, exprimer la masse réduite en fonction de m_1 , et préciser la position correspondante du centre de masses du système.

b. On se place dans le cas $m_1 \ll m_2$, et l'on admet qu'il soit légitime "en pratique", de faire le passage à la limite $m_2 = \infty$. Montrer que, ce faisant, on supprime l'une des trois invariances considérées à la première partie, et qu'avec cette "symétrie brisée", l'une des

• *champ de forces centrales, masse réduite, principe fondamental de la dynamique*



trois grandeurs E, \vec{p}, \vec{J} , caractérisant le système isolé n'est plus conservée dans le mouvement.

CCP ; Durée 1h

Corrigé

$$1.1. dU = -\vec{F}_1 d\vec{r}_1 - \vec{F}_2 d\vec{r}_2 ; \text{ or } dU = \text{grad}_{p_1} U d\vec{r}_1 + \text{grad}_{p_2} U d\vec{r}_2 ; \forall d\vec{r}_1, d\vec{r}_2 ;$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = -\text{grad}_{p_1} U ; \vec{F}_2 = -\text{grad}_{p_2} U ;$$

$$\text{soit } \vec{F}_1 = \left(-\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial y_1}, -\frac{\partial U}{\partial z_1} \right) ; \vec{F}_2 = \left(-\frac{\partial U}{\partial x_2}, -\frac{\partial U}{\partial y_2}, -\frac{\partial U}{\partial z_2} \right).$$

2.a. Rappelons le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel :

$$dT = d\left(\frac{1}{2} m \vec{V}^2\right) = m \vec{a} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} d\vec{O}P \Rightarrow dT = dT_1 + dT_2 = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 \text{ pour le système}$$

des 2 points, soit $dT = -\text{grad}_{p_1} U \cdot d\vec{r}_1 - \text{grad}_{p_2} U \cdot d\vec{r}_2 = -dU$ (si U ne dépend pas explicitement de t) ; dT est exprimé ainsi en fonction de U (comme \vec{F}_i en 1.1.).

b. Rappelons le principe fondamental de la dynamique $\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_R = \vec{F}$ pour un point

$$\text{matériel, et pour le système de 2 points : } d\vec{p} = d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = \vec{F}_1 dt + \vec{F}_2 dt ;$$

$$d\vec{p} = -(\text{grad}_{p_1} U + \text{grad}_{p_2} U) dt .$$

3. U ne dépend donc pas explicitement du temps, est donc invariant par changement de l'origine des temps. On a alors : $\frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0$.

• Alors d'après 2.a., $dT = -dU$, d'où $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial t} = 0$: T ne dépend pas explicitement de $t \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = 0$; E ne dépend pas explicitement de t de même.

• En 2.a. on a remarqué que si $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, $dE = dT + dU = 0$;

mais alors que $\frac{dT}{dt}$ et $\frac{dU}{dt}$ ne sont pas nuls, on a : $\frac{dE}{dt} = 0$.

Conclusion :

T et U dépendent implicitement du temps par l'intermédiaire des positions, E n'en dépend pas.

$$4.a.\alpha. \vec{r}_1 = \vec{r}'_1 + \vec{\ell} ; \vec{r}_2 = \vec{r}'_2 + \vec{\ell} \Rightarrow \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 \Rightarrow U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) = U(\vec{r}) .$$

$$\beta. F_{1x} = -\frac{dU}{dx} \frac{\partial x}{\partial x_1} = -\frac{dU}{\partial x} \text{ avec } x = x_1 - x_2 ;$$

$$F_{2x} = -\frac{dU}{dx} \frac{\partial x}{\partial x_2} = +\frac{dU}{dx} \Rightarrow F_{1x} + F_{2x} = 0 .$$

De même pour les autres coordonnées $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. Le théorème de l'action et de la réaction est la conséquence de l'invariance de U par translation.

b. $U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ est indépendant de la translation du repère de représentation

• invariant, principe fondamental de la dynamique, théorème de l'action et de la réaction, théorème de l'énergie cinétique

(cf. **1.4.a.α.**) ; $d\vec{p} = -(\overrightarrow{\text{grad}}_{p_1} U + \overrightarrow{\text{grad}}_{p_2} U)dt = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)dt = \vec{0}$.

Conclusion : \vec{p} est constant ; la conservation de la quantité de mouvement est la conséquence de l'invariance de U par translation.

5.a. $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_1 = \vec{r} \wedge \vec{F}_1$.

b.α. O étant un point fixe du repère galiléen, puisque ses coordonnées nulles sont constantes.

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_R \Rightarrow d\vec{J} = \vec{\mathcal{M}}_O dt : d\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 dt.$$

β. $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{AO} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ pour l'ensemble des deux points. cf. champs de moment.

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_O \quad \forall A$: le point A n'intervient pas pour \vec{M} et $d\vec{J}$.

γ. Le point A peut intervenir pour $\vec{J} : \vec{J}_A = \vec{J}_O + \vec{AO} \wedge (m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2)$ et la quantité de mouvement totale n'est pas forcément nulle dans le repère Oxyz.

6.a.α. Par rotation qui est une isométrie, $r' = r$, $U(r) = U(r')$.

β. Vu la formule du gradient en polaires, $\vec{F}_1 = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r = -\vec{F}_2 \Rightarrow$ parallélisme de $\vec{r}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$.

b. $d\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 dt = \vec{0} \Rightarrow \vec{J} = \text{cste}$; L'invariance de U dans la rotation du repère entraîne la conservation du moment cinétique.

2.1.a. Par définition du barycentre : $(m_1 + m_2) \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$.

$$\vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2.$$

$$\text{b. } m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} U ; m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = +\overrightarrow{\text{grad}} U.$$

$$\text{α. } (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} U + \overrightarrow{\text{grad}} U = \vec{0} ; \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{0}.$$

$$\text{β. } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\left(\frac{1}{m_1} \overrightarrow{\text{grad}} U + \frac{1}{m_2} \overrightarrow{\text{grad}} U \right) ;$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \overrightarrow{\text{grad}} U.$$

2.a. Dans un mouvement de translation où $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega} = \vec{0}$, les forces d'inertie :

- d'entraînement : $\vec{f}_e = -m\vec{a} = \vec{0}$
- de Coriolis : $\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$ nulles, rendent le repère translaté galiléen.

b. L'équation différentielle en \vec{r} définit le mouvement d'un point P tel que $\vec{O'P} = \vec{r}$, de masse m telle que $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ soumis à une force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$ soit $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$;

• accélération, barycentre de masse, cinétique, conservation de la quantité de mouvement, conservation du moment cinétique, Coriolis, force, force d'inertie, masse réduite, mouvement d'entraînement

cette force est centrale car les positions angulaires de P_1P_2 n'intervenant pas physiquement dans U , on a $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r$ comme seule expression.

3.a.α. $m_1 = m_2 \Rightarrow m = \frac{m_1}{2}$, O' est au milieu de P_1P_2 .

β. $m_1 \ll m_2 \Rightarrow m = m_1$; $O' \equiv P_2$.

b. $m_1 \ll m_2$ le problème équivalent dans $O'x'y'z'$ se fait avec P de masse m_1 et $O' \equiv P_2$ fixe; et le cours nous rappelle qu'un mouvement à forces centrales se fait à moment cinétique constant, à énergie conservée mais pas à quantité de mouvement constante.

Le fait de considérer P_2 fixe, de quantité de mouvement nulle, empêche de considérer $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cste}$. On n'a plus un rôle équivalent pour les deux points (symétrie brisée) et cela se répercute sur la conservation de la quantité de mouvement.

1.1.2. Mouvement de point sur un support

Le problème fait intervenir un objet P quasi-ponctuel, de masse M , et une circonférence Γ de rayon R , homogène, linéique et indéformable, de masse m . Les configurations étudiées se situent dans le champ de pesanteur, d'accélération constante de module g , dirigée selon la verticale descendante. Le plan de la circonférence Γ contient la verticale ascendante Oz , le référentiel $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, étant orthonormé.

Les mouvements sont toujours sans frottements. Les éléments P et Γ ne sont jamais susceptibles de sortir du plan yOz .

I. L'objet P est mobile sur la circonférence Γ qui est fixe.

Le centre de la circonférence Γ est fixé au point O . On note A le point le plus bas de Γ , B le point le plus haut.

1. La liaison entre P et Γ est bilatérale (c'est à dire que l'on peut assimiler l'objet P à une perle enfilée sur Γ). A l'instant $t = 0$, l'objet P est lancé de A avec la vitesse v_0 parallèle à Oy , orientée selon \vec{j} .

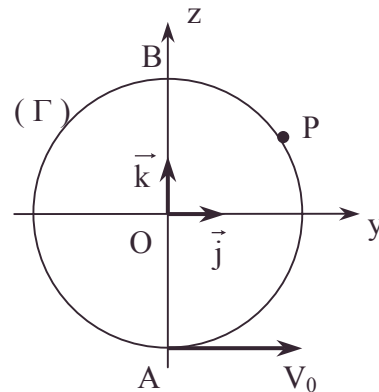
1. Calculer, pour les temps positifs, la vitesse $v(z)$ acquise par P à l'altitude z en fonction de z et des paramètres g , R et v_0 .

2. On note z_0 l'altitude du point (s'il existe) où la vitesse de P s'annule. Calculer z_0 , discuter de son existence et de la nature du mouvement correspondant en mettant en évidence une valeur critique v_{oc} de v_0 qu'on calculera en fonction de g et de R .

3. Calculer la réaction $N(z)$ de la circonférence Γ sur le point P à l'altitude z en fonction de z et des paramètres g , R , M et z_0 .

2. La liaison entre P et Γ est unilatérale (c'est-à-dire que l'objet P se déplace sur le cercle Γ mais peut le quitter).

1. A l'instant $t = 0$, l'objet P est situé du côté intérieur de la circonférence Γ et est lancé du point A avec la vitesse v_0 parallèle à Oy . Etudier à quelle(s) condition(s) le point P peut quitter Γ en mettant en évidence deux valeurs critiques v_{oc1} et v_{oc2} de v_0 qu'on calculera en fonction de g et R .



2. A l'instant $t = 0$, l'objet P est situé du côté extérieur de la circonférence Γ et est lancé du point B avec la vitesse v_o parallèle à Oy. Mettre en évidence et calculer une valeur maximale $v_{o\ell}$ de v_o autorisant P à glisser sur Γ . Calculer, pour $v_o < v_{o\ell}$, la distance δ parcourue par P sur Γ avant qu'il ne quitte la circonférence, en fonction de g , R et v_o .

3. Application numérique : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $R = 0,15 \text{ m}$; $M = 10^{-2} \text{ kg}$.

a. Dans la configuration de la question 2.1. :

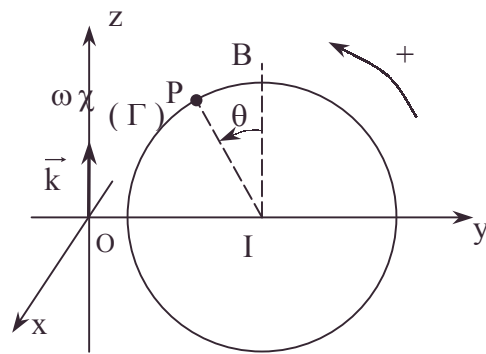
Calculer v_{oc1} et v_{oc2} .

Calculer l'altitude z_1 à laquelle P quitte Γ pour $v_o = \sqrt{v_{oc1} \cdot v_{oc2}}$.

b. Dans la configuration de la question 2.2.:

Calculer δ pour $v_o = \frac{v_{o\ell}}{\sqrt{2}}$.

II. L'objet P est mobile sur la circonférence Γ , l'ensemble étant animé d'un mouvement de rotation uniforme. La liaison entre P et Γ est à nouveau bilatérale. La circonférence Γ est centrée au point I de l'axe Oy à la distance d de l'origine, avec $d > R$. Le référentiel Oxyz est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, ω constante positive. La position de P sur Γ est repérée par l'angle $\theta = (\vec{k}, \vec{IP})$.



A l'instant $t = 0$, l'objet P est en B, le point le plus haut de Γ , sans vitesse initiale.

1. Etude du mouvement

1. Etablir à partir du principe fondamental de la dynamique, la relation $\ddot{\theta}(\theta)$ (en fonction de g , R, d et ω) liant l'accélération angulaire de P, $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, et sa position θ .

N.B. : le référentiel est ici non-galiléen. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à P s'écrit $M \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = \Sigma \vec{F}$ le second membre comprenant le poids, la réaction, les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2. Etablir, par intégration de l'expression précédente, la relation $\dot{\theta}^2(\theta)$ liant la vitesse angulaire relative de P, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, et sa position θ sur (Γ) pour les conditions initiales données.

3. Etablir l'existence de deux positions d'équilibre relatif. On conseille d'utiliser une méthode graphique dans l'espace X, Y où on aura posé $X = \sin \theta$ et $Y = \cos \theta$. Discuter de la stabilité des positions d'équilibre déterminées.

2. Etude d'un cas particulier : on envisage le cas $d = 2R$.

1. Calculer, en fonction de g et de R, la valeur ω_0 de ω pour laquelle $\theta_1 = 7\pi/6$ est position d'équilibre.

2. Calculer (en degrés ou en radians) la valeur θ_2 de θ pour la seconde position d'équilibre.

N.B. : des considérations géométriques dans l'espace X, Y de la question 3. permettent une première approche.

Autres concours ; Durée : 2h30

Corrigé

I.1.1. Ecrivons la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}MV^2 + Mgz = \text{cste} \quad (\text{que l'on calcule dans la position initiale}).$$

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - MgR = \text{cste} \Rightarrow \frac{1}{2}MV^2 + Mgz = \frac{1}{2}Mv_0^2 - MgR \Rightarrow V = (v_0^2 - 2g(z + R))^{\frac{1}{2}}.$$

$$2. z_0 \text{ est défini par } V = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} - R.$$

a. z_0 n'existe pour l'objet P mobile sur la circonférence de diamètre $2R$ que si $-R < z_0 < +R$; $z_0 \geq -R \Rightarrow \frac{1}{2}V_0^2 > 0$, ce qui est toujours réalisé.

$$z_0 < R \Rightarrow V_0^2 \leq 4gR.$$

- On définira $V_{oc} = \sqrt{4gR} : \exists z_0$ si $0 < V_0 < V_{oc}$. Dans ce cas, en z_0 l'objet retombe du même côté et retrouve en A la même vitesse en module mais en sens opposé, le mouvement continue jusqu'en z_0 mais sur l'autre branche symétrique, il y a oscillation entre les deux positions définies par z_0 , positions de vitesse nulle.

- Si $V_0 > V_{oc}$ il n'y a pas de point de retour, l'objet dépasse B et continue sa rotation indéfiniment.

- Si $V_0 = V_{oc}$ l'objet s'arrête en B et peut retomber à droite ou à gauche ou rester : on a un maximum de l'énergie potentielle (équilibre instable).

3. On prend les coordonnées polaires planes décrites en II. de sorte que les résultats continuent à servir.

Ecrivons le P.F.D. en P : $M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N}$, avec

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \frac{V^2}{R}\vec{u}_r,$$

et $\vec{N} = N\vec{u}_r$ vu l'absence de frottement.

En projection selon \vec{u}_r : $-M\frac{V^2}{R} = -Mg\cos\theta + N$,

or $\cos\theta = \frac{z}{R}$, $N = -\frac{M}{R}gz - \frac{M}{R}(v_0^2 - 2g(R + z)) = -\frac{M}{R}g(2z_0 - 3z)$.

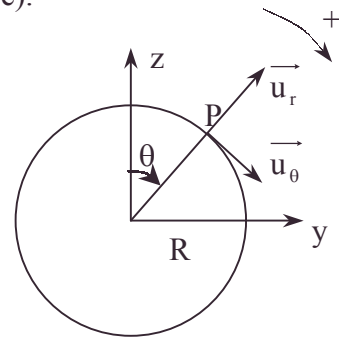
2.1. Pour ce cas le contact existe si $N \leq 0$.

Pour ce cas sans adhérence possible, $N \leq 0$ tant que $2z_0 \geq 3z$,

Soit le cas limite : $z_1 = \frac{2}{3}z_0 = \frac{v_0^2}{3g} - \frac{2R}{3}$.

z_1 n'existe pour l'objet P mobile sur Γ seulement si $0 < z_1 < +R$. On a 2 cas limites :

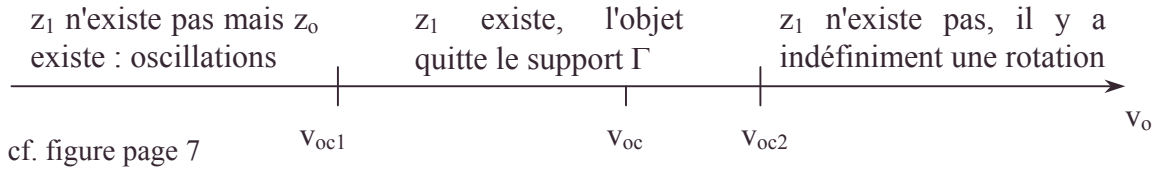
a. $0 < \frac{v_0^2}{3g} - \frac{2R}{3} \Rightarrow v_0^2 \geq 2gR$ définissant $v_{oc1} = (2Rg)^{\frac{1}{2}}$.



• condition initiale, équilibre, maximum, P.F.D.

$$\text{b. } \frac{v_o^2}{3g} - \frac{2R}{3} < R \Rightarrow v_o^2 \leq 5gR \text{ définissant } v_{oc2} = (5Rg)^{\frac{1}{2}}.$$

Récapitulation :



2. Le contact existe si $N > 0$ pour $0 < \theta < \pi$ (seules possibilités en θ pour l'objet extérieur à Γ et qui doit être supporté par Γ). cf. figure précédente.

La conservation de l'énergie s'écrit ici en tenant compte de la condition initiale :

$$\frac{1}{2}MV^2 + Mgz = \frac{1}{2}Mv_o^2 + MgR \Rightarrow V^2 = v_o^2 - 2g(z - R).$$

$$\text{or le P.F.D. donne toujours } N = -\frac{M}{R}(V^2 - gz) = \frac{M}{R}(-v_o^2 + 3gz - 2gR).$$

$$N = 0 \text{ pour } z_2 = \frac{2R}{3} + \frac{v_o^2}{3g}.$$

$$N > 0 \text{ si } z > \frac{2R}{3} + \frac{v_o^2}{3g}; \text{ or } 0 < z < R \text{ ici ; on tire } \frac{2R}{3} + \frac{v_o^2}{3g} < R \Rightarrow v_o^2 < gR.$$

On introduit une nouvelle vitesse limite $v_{ol} = (gR)^{\frac{1}{2}}$.

- en B où $z = R$, $N > 0$ si $v_o < v_{ol}$.

Le contact cesse d'exister en un point de côte z_2 où $N(z_2) = 0$ (et comme V^2 augmente, le contact ne pourra non plus exister après par exemple en $z_2 = 0$).

La distance parcourue δ à partir de B est $R\alpha$ avec

$$\cos \alpha = \frac{z_2}{R} = \frac{2}{3} + \frac{v_o^2}{3gR} \text{ aussi } \delta = R \arccos \left(\frac{2}{3} + \frac{v_o^2}{3gR} \right).$$

$$\text{N.B. : } v_o < v_{ol} : \text{ on vérifie que } \delta \text{ existe car } \frac{2}{3} + \frac{v_o^2}{3gR} < 1.$$

$$\text{3.a. } v_{oc1} = 1,72 \text{ m.s}^{-1} ; v_{oc2} = 2,71 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\text{Si } v_o^2 = v_{oc1} \cdot v_{oc2} : z_1 = \frac{v_{oc1} \cdot v_{oc2}}{3g} - \frac{2R}{3} ; \text{ AN : } z_1 = 5,85 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

$$\text{b. } v_{ol} = 1,21 \text{ m.s}^{-1} ; v_o < v_{ol} ; \text{ AN : } v_o = 0,86 \text{ m.s}^{-1} ; \delta = 8,78 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

II.1.1. Soit H la projection de P sur Oz.

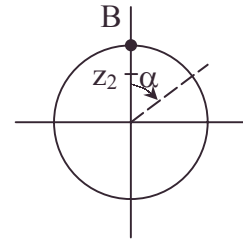
- Dans le mouvement de rotation uniforme autour de Oz où le point coïncidant décrit un cercle de rayon HP, l'accélération d'entraînement centripète vaut :

$$\vec{a}_e = \omega^2 \overline{HP} = \omega^2 (d - R \sin \theta) \vec{y}.$$

- L'accélération de Coriolis $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ est orthogonale à \vec{V}_r lui-même tangent à Γ .

- Le P.F.D. appliqué à P dans le repère tournant Oxyz s'écrit

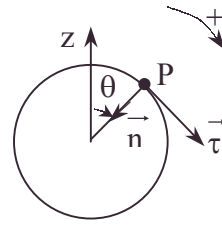
$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{N} - M\vec{a}_e - M\vec{a}_c \text{ avec } \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{\tau} - \frac{V^2}{R}\vec{n}.$$



- Projétons cette équation vectorielle sur $\vec{\tau}$:

$$MR \ddot{\theta} = Mg \sin \theta + 0 - M\omega^2 (d - R \sin \theta) \cos \theta + 0.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - \sin \theta \right) \cos \theta.$$



On vérifie la validité pour θ positif ou négatif.

2. Multiplions les deux membres par $\dot{\theta} dt = d\theta$ et intégrons :

$$\int_0^t \ddot{\theta} \dot{\theta} dt = \int_0^t \left[\frac{g}{R} \sin \theta - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - \sin \theta \right) \cos \theta \right] d\theta.$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - 0 = \frac{g}{R} (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \omega^2 \left[\left(\frac{d}{R} - \sin \theta \right)^2 - \left(\frac{d}{R} \right)^2 \right].$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta) - \omega^2 \sin \theta \left(2 \frac{d}{R} - \sin \theta \right), \quad \text{relation exprimant la}$$

conservation de l'énergie.

3. A l'équilibre $\ddot{\theta} = 0 = \frac{g}{R} \sin \theta - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - \sin \theta \right) \cos \theta$.

Faisons le changement de variable $X = \sin \theta$; $Y = \cos \theta$.

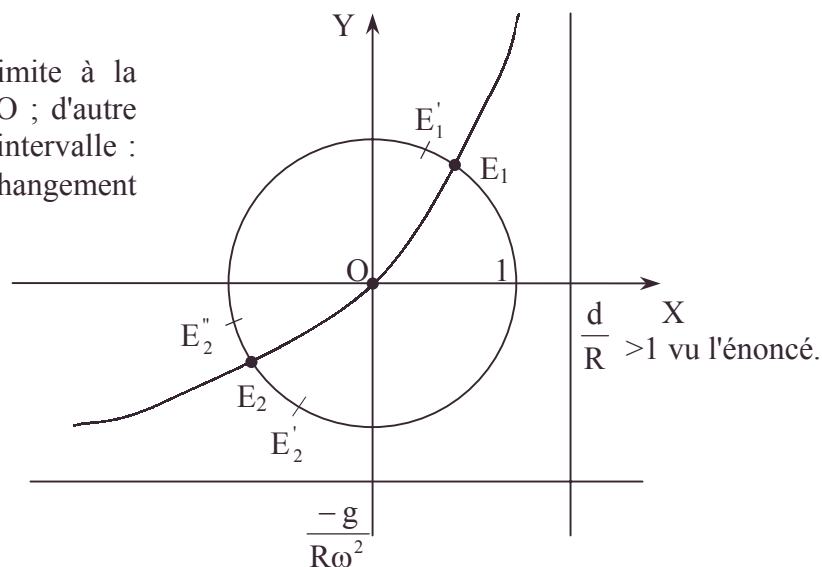
$$Y = \frac{gX}{R\omega^2 \left(\frac{d}{R} - X \right)} = \frac{g}{R\omega^2} \left[\frac{X - \frac{d}{R} + \frac{d}{R}}{\frac{d}{R} - X} \right] = -\frac{g}{R\omega^2} \left(1 - \frac{\frac{d}{R}}{\frac{d}{R} - X} \right).$$

$$\text{avec } Y' = Y + \frac{g}{R\omega^2} \text{ et } X' = \frac{d}{R} - X ; Y + \frac{g}{R\omega^2} = Y' = \frac{gd}{R^2 \omega^2 X'}.$$

$$X'Y' = \frac{gd}{R^2 \omega^2} \text{ est une hyperbole équilatère de centre } X' = 0, Y' = 0.$$

$$Y = \frac{gX}{R\omega^2 \left(-X + \frac{d}{R} \right)} \text{ est donc une hyperbole équilatère de centre } X = \frac{d}{R} ; Y = \frac{-g}{R\omega^2}.$$

D'une part, on se limite à la branche passant par O ; d'autre part, on se limite à l'intervalle : $X \in [-1, +1]$ vu le changement de variable.



- équilibre, solution graphique

Quelles que soient les valeurs choisies des paramètres R, ω , les 2 intersections existent dans les positions de cette figure.

- Vu le changement de variable, $X^2 + Y^2 = 1$: cercle centré en O de rayon 1.
- Les points d'équilibre satisfont à la fois à l'équation de l'hyperbole et à l'équation du cercle : on obtient 2 points E_1 et E_2 vu la géométrie.

Etude de la stabilité

On a $\ddot{\theta} = \frac{g}{R} X - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - X \right) Y$ quand on est hors équilibre, avec toujours $X^2 + Y^2 = 1$.

Or, $0 = \frac{g}{R} X_e - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - X_e \right) Y_e$ quand on est à l'équilibre.

Ecrivons un développement à l'ordre 1 à l'aide des différentielles :

$$X = X_e + dX ; Y = Y_e + dY ;$$

$$X = \sin \theta \Rightarrow dX = \cos \theta_e d\theta = Y_e d\theta ; Y = \cos \theta \Rightarrow dY = -\sin \theta_e d\theta \text{ et vu la relation à}$$

$$\text{l'équilibre, } \ddot{\theta} = \frac{g}{R} X_e + \frac{g}{R} dX - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - X_e \right) Y_e + \omega^2 dX Y_e - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - X_e \right) dY ;$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{g}{R\omega^2} + Y_e \right) \omega^2 dX - \omega^2 \left(\frac{d}{R} - X_e \right) dY \text{ au } 2^{\text{ème}} \text{ ordre près.}$$

$$\mathbf{a.} \text{ On voit sur la figure en } E_1, X_e > 0, Y_e > 0 ; \frac{g}{R\omega^2} + Y_e > 0 ; -\omega^2 \left(\frac{d}{R} - X_e \right) < 0 .$$

$$\text{En } E_1', dX_1' < 0, dY_1' > 0 \Rightarrow \ddot{\theta} < 0 .$$

$$\text{En partant de } \dot{\theta}_e = 0, \text{ la pesanteur donne } \dot{\theta} < 0 \Rightarrow d\theta < 0 ;$$

or $X = \sin \theta \Rightarrow dX = \cos \theta_e d\theta \Rightarrow dX < 0$. Il n'y a pas retour vers E , l'effet étudié en E_1' s'accroît, E_1 n'est pas stable.

$$\mathbf{b.} \text{ En } E_2, X_e < 0, Y_e < 0 ; \pi < \theta_e < \frac{3\pi}{2} . \text{ On a } \frac{g}{R\omega^2} + Y_e > 0 ; -\omega^2 \left(\frac{d}{R} - X_e \right) < 0 .$$

$$\text{En } E_2', dX_2' > 0, dY_2' < 0 \Rightarrow \ddot{\theta} > 0 ; \text{ en partant de } \dot{\theta}_e = 0, \dot{\theta} > 0 \Rightarrow d\theta > 0 .$$

Or $dX = Y_e d\theta < 0$. Il y a retour vers E_2 , de même en E_2'' ; E_2 position d'équilibre stable.

$$\mathbf{2.1.} d = 2R ; \theta_1 = \frac{7\pi}{6} \text{ équilibre stable. Vu } \mathbf{1.3.}, \text{ on a :}$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{R} \frac{X_1}{Y_1(2 - X_1)} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{2R \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{2g}{15R} \sqrt{3} .$$

$$\text{AN : si } g = 9,81 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } R = 0,15 \text{ m : } \omega = 3,89 \text{ rad.s}^{-1} .$$

$$\mathbf{2.} \text{ On trace l'intersection de l'hyperbole } Y = \frac{g}{R\omega^2} \frac{X}{(-X + 2)} ; \text{ AN : } Y = 4,33 \frac{X}{2 - X}$$

et du cercle centré en O de rayon 1 dans le 2^{ème} quadrant : $Y = \sqrt{1 - X^2}$.

On trouve : $X = 0,355$ et $Y = 0,935 \Rightarrow \theta_2 = 0,36 \text{ rad ou } 21^\circ$.

1.1.3. Dans une station spatiale en mouvement

Une station spatiale est assimilée à un tore, creux, engendré par un cercle de centre C , de rayon r , tournant autour d'un axe OZ , à une distance $OC = R$. (Figure 1).

On donne : $CP = r = 5\text{ m}$; $OC = R = 20\text{ m}$.

On suppose que toute la masse de la station est répartie sur la surface du tore avec une masse surfacique $\sigma = 15\text{ kg/m}^2$. On note P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et C quelques points caractéristiques de l'une des sections (S) du tore, prise pour référence et P un point courant de (S) repéré par l'angle polaire ϕ (figure 1).

Un occupant de la station, placé en P_3 , repère l'espace intérieur de la station par un système d'axes local P_3xyz , orthonormé (figure 2).

P_3x est dirigé vers le centre O de la station ;

P_3z est parallèle à l'axe OZ du tore ;

P_3y est perpendiculaire à la section (S) où se trouve l'observateur.

Le trièdre P_3xyz est de sens direct. Il constitue le "repère mobile".

La station est isolée dans l'espace. On pourra considérer le "repère fixe" ou "absolu" $OXYZ$ direct.

La station tourne avec la vitesse angulaire ω autour de OZ .

La pesanteur est supposée négligeable dans le repère fixe.

La vitesse angulaire de rotation de la station est constante et vaut $\omega = 0,5\text{ rad.s}$.

Dans cette partie, les étudiants sont expressément invités à ne pas utiliser les équations de la dynamique dans le repère mobile P_3xyz .

1.a. Etablir les relations :

$X = f(x, y, t)$; $Y = g(x, y, t)$ exprimant le passage du repère mobile P_3xy au repère fixe OXY . A $t = 0$, les supports de axes P_3x et OX sont confondus (figure 3).

b. Vérifier les expressions obtenues en étudiant la trajectoire dans P_3xy du point A fixe dans OXY ($X = R + r$, $Y = 0$, $Z = 0$) (figure 3).

2. Une particule animée dans l'espace d'une vitesse v parallèle à OZ pénètre dans la station en un point P de (S).

a. Décrire qualitativement sa trajectoire dans le repère $OXYZ$, dans le repère P_3xyz .

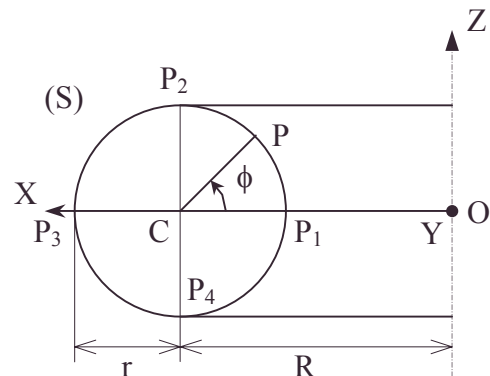


Figure 1

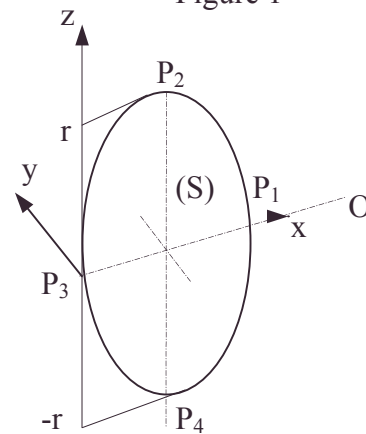


Figure 2

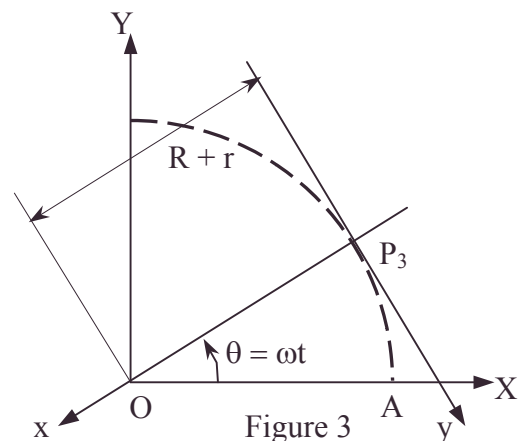


Figure 3

b. Donner les équations $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de la trajectoire dans P_3xyz si à $t = 0$ la particule arrive en P_2 ($x = r$, $y = 0$, $z = r$) (figure 1).

c. Déterminer la durée τ de la traversée de la station par la particule ainsi que les coordonnées de son point de sortie. A quelle(s) condition(s) ce point de sortie est-il le point $P_4(r, 0, -r)$ opposé à P_2 ?

d. Quelle est la longueur L apparente de la trajectoire dans la station ?

e. Vérifier pour $\omega \rightarrow 0$, la cohérence des résultats obtenus ci-dessus.

3. A l'intérieur de la station, un objet placé en P_1 est abandonné à $t = 0$ sans vitesse relative initiale.

a. Décrire qualitativement sa trajectoire dans le repère $OXYZ$, dans le repère P_3xyz .

b. Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire dans P_3xyz .

c. Déterminer littéralement, puis numériquement, la durée τ du mouvement à l'intérieur de la station (c'est-à-dire l'instant τ où l'objet touche la paroi de la station).

d. Quelles sont les coordonnées du point d'impact ? On demande l'expression littérale et l'application numérique.

e. Montrer qu'il serait possible de choisir ω , r et R de sorte que le point d'impact coïncide avec P_3 .

Mines ; Durée 1h30

Corrigé

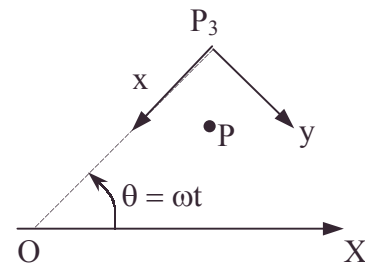
1.a. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{P_3P}$; $\overrightarrow{P_3P} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

avec les projections dans $OXYZ$:

$$\vec{x} : (-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0)$$

$$\vec{y} : (\sin \omega t, -\cos \omega t, 0)$$

$$\vec{z} : (0, 0, 1)$$

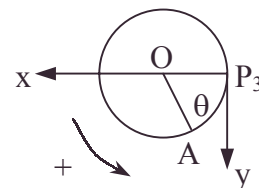


Projetons dans le repère $OXYZ$: $\overrightarrow{OP_3} : (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0)$

$$\overrightarrow{OP} \Big|_{OXYZ} \begin{cases} X = (R + r) \cos \omega t - x \cos \omega t + y \sin \omega t \\ Y = (R + r) \sin \omega t - x \sin \omega t - y \cos \omega t \\ Z = z \end{cases}$$

b. Vu $\overrightarrow{P_3A} = \overrightarrow{P_3O} + \overrightarrow{OA}$ projeté dans P_3xyz , A restant à la distance $R + r$ de O, décrit un cercle dans P_3xyz , d'équations paramétriques :

$$\overrightarrow{P_3A} \begin{cases} x_A = (R + r) - (R + r) \cos \omega t \\ y_A = (R + r) \sin \omega t \end{cases}$$



Vérifions en reportant dans les membres de droite de \overrightarrow{OP} dans $OXYZ$ de la question précédente.

$$x_A = (R + r) \cos \omega t - (R + r) \cos \omega t + (R + r) \cos^2 \omega t + (R + r) \sin^2 \omega t = (R + r) \quad \text{c.q.f.d.}$$

$$y_A = (R + r) \sin \omega t - (R + r) \sin \omega t + (R + r) \cos \omega t \sin \omega t - (R + r) \sin \omega t \cos \omega t = 0 \quad \text{c.q.f.d.}$$

2.a.α. Vu l'absence de pesanteur (et de toute autre action), la trajectoire est une droite parallèle à OZ parcourue avec la vitesse uniforme v .

β. La seule action dans P_3xyz est la force d'inertie dont un terme important est la force centrifuge ; la particule est déviée a priori vers l'extérieur et finit par ressortir dans son mouvement descendant.

• centrifuge, changement de base, équations paramétriques de trajectoires, force, pesanteur, trajectoire

b. On décrit d'abord la trajectoire la plus simple : celle dans OXYZ, vu la figure 1.

$$X = R ; Y = 0 ; Z = r + vt ; v < 0.$$

On obtient un système d'équations en x, y, z d'après **1.a.** :

$$R = (R + r) \cos \omega t - x \cos \omega t + y \sin \omega t ;$$

$$0 = (R + r) \sin \omega t - x \sin \omega t - y \cos \omega t ;$$

$$Z = z = r + vt = z ; \text{ on résout : } x(t) = (R + r) - R \cos \omega t ;$$

$$y(t) = R \sin \omega t$$

$$z(t) = r + vt$$

La trajectoire est une hélice.

On aurait pu paramétrer à l'aide de $v' = -v$ avec $v' > 0$.

$$\text{c. Point de sortie dans OXYZ d'après la figure 1 : } \begin{cases} X = R \\ Y = 0 \\ Z = -r \end{cases}$$

α. Durée de traversée : on résout $r + v\tau = -r$ soit $\tau = \frac{2r}{-v}$ cf. $v < 0$.

β. Point de sortie dans P_{3xyz} : on résout :

$$R = (R + r) \cos \omega \tau - x \cos \omega \tau + y \sin \omega \tau$$

$$0 = (R + r) \sin \omega \tau - x \sin \omega \tau - y \cos \omega \tau$$

$$-r = z$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} x = R + r - R \cos \frac{2\omega\tau}{v} \\ y = -R \sin \frac{2\omega\tau}{v} \\ z = -r \end{cases}$$

$$\gamma. \text{ L'identification à } P_4 \text{ donne : } \begin{cases} r = R + r - R \cos \frac{2\omega\tau}{v} \\ 0 = -R \sin \frac{2\omega\tau}{v} \\ -r = -r \end{cases}$$

$$\text{Il faut } \frac{2\omega\tau}{v} = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ soit } v = \frac{\omega\tau}{k\pi} \quad k \leq 0.$$

$$\text{d. } L = \int_0^\tau \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_0^\tau dt \sqrt{R^2 \omega^2 + v^2} = 2r \sqrt{1 + \frac{R^2 \omega^2}{v^2}}.$$

e. $\omega \rightarrow 0$; $k = 0$ est la seule possibilité ; $L = 2r$.

L'absence de rotation permet de ressortir en P_4 bien évidemment.

3.a.α. L'objet possède une vitesse absolue $\vec{V}_Y = \omega(R - r)\vec{Y}$; il n'y a pas de pesanteur, sa trajectoire est donc une portion de droite parallèle à \vec{Y} parcourue à la vitesse absolue \vec{V}_Y (à l'intérieur du tore).

β. L'objet est soumis à la force d'inertie partiellement centrifuge ; la trajectoire non rectiligne se termine sur la paroi la plus extérieure du tore.

b. On détermine la trajectoire la plus simple : la droite dans OXYZ :

$$X = R - r ; Y = \omega(R - r)t ; Z = 0.$$

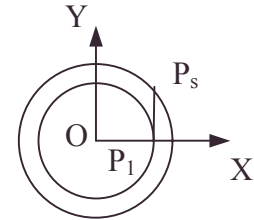
On résout : $R - r = (R + r) \cos \omega t - x \cos \omega t + y \sin \omega t ;$
 $\omega(R - r)t = (R + r) \sin \omega t - x \sin \omega t - y \cos \omega t ;$
 $0 = z ;$

On trouve : $x = (R + r) - (R - r)(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) ;$
 $y = (R - r)(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) ;$
 $z = 0 .$

c. Il faut déterminer la valeur τ qui est solution de l'intersection de la droite ($X = R - r ; Y = \omega(R - r)t$) et du cercle extérieur

$$X^2 + Y^2 = (R + r)^2, \text{ soit } \omega^2 (R - r)^2 \tau^2 = 4rR .$$

$$\tau = \frac{\sqrt{4rR}}{\omega(R - r)} ; \text{ AN : } \tau = 2,667 \text{ s.}$$



d. On exprime le point de la trajectoire pour $t = \tau$:

$$x = (R + r) - (R - r) \left(\cos \frac{\sqrt{4rR}}{R - r} + \frac{\sqrt{4rR}}{R - r} \sin \frac{\sqrt{4rR}}{R - r} \right) ;$$

$$y = (R - r) \left(\sin \frac{\sqrt{4rR}}{R - r} - \frac{\sqrt{4rR}}{R - r} \cos \frac{\sqrt{4rR}}{R - r} \right) ;$$

$$z = 0 .$$

$$\text{AN : } x_{P_s} = 2,033 \text{ m} ; y_{P_s} = 9,874 \text{ m} ; z = 0 .$$

$$\text{Sinon, dans OXYZ : } X = R - r ; Y = 2\sqrt{rR} ; Z = 0 ; \text{ AN : } X = 15 \text{ m} ; Y = 20 \text{ m.}$$

e. L'identification à $P_3(0, 0, 0)$ donne :

$$[1] \quad 0 = (R + r) - (R - r)(\cos \omega \tau + \omega \tau \sin \omega \tau) ;$$

$$[2] \quad 0 = (R - r)(\sin \omega \tau - \omega \tau \cos \omega \tau) ;$$

L'équation [2] est la plus simple :

il faut $\tan \omega \tau = \omega \tau$.

Les solutions graphiques existent.

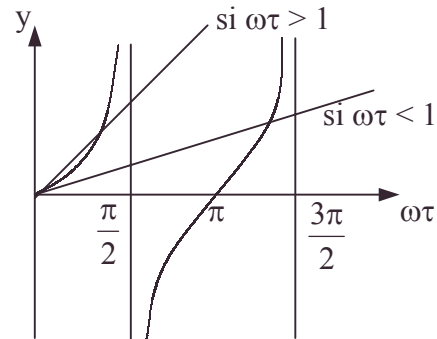
$$\text{On a alors : } \tan \omega \tau = \omega \tau = \frac{\sqrt{4rR}}{R - r} .$$

• fusée, graphe, satellite, trajectoire

$$\omega \tau \text{ étant trouvé, on résout } (\omega \tau)^2 = \frac{4rR}{(R - r)^2}, \text{ équation du second degré en } r \text{ pour } R \text{ fixé.}$$

On trouvera r pour R fixé arbitrairement. Si on fixe τ , on en déduira ω .

Conclusion : il est donc possible de choisir ω , r et R de sorte que le point d'impact coïncide avec P_3 (on pourra se donner arbitrairement 2 variables par exemple R et τ).



1.1.4. Fusées et satellites dans le champ de gravitation terrestre

N.B. : la troisième partie de l'épreuve est indépendante des deux premières.

• fusée, graphe, satellite, système de Cramer, trajectoire

Préliminaire : orbite circulaire

Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique \mathcal{R}_0 , supposé galiléen. On étudie le mouvement de fusées et de satellites dans le champ de gravitation terrestre. L'intensité de ce champ à la distance r du centre O de la Terre considérée comme sphérique de rayon R_0 est notée $G(r)$. Le vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre vers le point d'observation définissant la direction verticale, sera noté \vec{r} .

Ainsi, $\vec{G}(r) = -G(r)\vec{r}$.

On admettra $R_0 = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ et $G(R_0) = g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ = intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre.

1. Un satellite artificiel (S) de masse M_S est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre ; déterminer (ou rappeler) sa vitesse angulaire ω , sa vitesse v , sa période de révolution T et son énergie totale E_T en fonction de M_S , g_0 , R_0 et r ; commenter le signe du résultat obtenu pour l'énergie.

Première partie : fusée à un ou à deux étages

On souhaite mettre en orbite un satellite de masse M_S au moyen d'une fusée de masse à vide m_F . La fusée éjecte vers l'arrière les gaz produits par réaction chimique d'un comburant et d'un combustible. La vitesse d'éjection par rapport à la fusée est \vec{u} (u est constant), dirigée en sens contraire à la vitesse \vec{v} de la fusée ($\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$) ; on désigne par μ la masse de gaz éjectée par unité de temps.

Fusée à un étage

A l'instant t , la masse de l'engin $m_1(t)$, est la somme de trois termes :

$m_1(t) = M_S + m_c(t) + m_F$, où $m_c(t)$ est la masse du combustible et du comburant non encore utilisés (valeur initiale $m_c(0)$).

Le débit $\mu = -\frac{dm_1(t)}{dt} = -\frac{dm_c(t)}{dt}$ étant une constante positive, on définit aussi les

rapports : $\lambda = \frac{\mu}{m_1(0)}$

et $\sigma = \frac{m_1(0)}{M_S + m_F} = \frac{\text{masse initiale}}{\text{masse après épuisement du mélange comburant-combustible}}$

2. Considérer, dans \mathcal{R}_0 , le système fermé constitué de la fusée et du carburant éjecté et montrer en établissant un bilan dans l'intervalle de temps dt que l'on peut écrire la

relation (α) : $m_1(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dm_1(t)}{dt} = m_1(t) \vec{G}(r)$, où $dm_1(t)$ désigne la variation algébrique de la masse de la fusée pendant le temps dt .

3. A l'instant initial, la fusée part du sol avec une vitesse nulle ; elle se déplace selon un axe vertical.

On considère que pendant la phase de vol considérée ici, \vec{G} est uniforme et vaut \vec{g}_0 . Etablir, en fonction de μ , $m_1(0)$, g_0 et u , l'expression de la vitesse de la fusée à l'instant t , et celle de sa masse.

4. Le mélange comburant-combustible est épuisé à l'instant t_1 . Exprimer la vitesse $v(t_1)$ à cet instant, en fonction de u , σ , λ et g_0 .

Comment choisir σ et λ pour que $v(t_1)$ soit la plus grande possible ?

5. Déterminer, en fonction des mêmes grandeurs qu' en 4., l'expression de l'altitude atteinte, $h(t_1)$?

- fusée, gravitation, pesanteur, satellite sphérique, unité

6. Application numérique : $\sigma = 5$; $\lambda = 6.10^{-3}s^{-1}$ et $u = 3000 \text{ m.s}^{-1}$. calculer t_1 , $h(t_1)$ et $v(t_1)$. Comparer $v(t_1)$ à la vitesse d'un satellite en orbite circulaire à l'altitude $h(t_1)$, G ayant sa valeur théorique à l'altitude $h(t_1)$.

7. Si l'on ne se préoccupe pas de la modification de la direction de la vitesse, la vitesse atteinte permet-elle une satellisation en orbite circulaire à l'altitude $h(t_1)$?

Fusée à deux étages

Une fusée constituée de deux étages se déplace selon un axe vertical. Le premier étage fonctionne comme précédemment. On pose que lorsque, à l'instant t_1 , la vitesse $v(t_1)$ est atteinte, la structure du premier étage est larguée. La masse de la fusée s'écrit dans ces conditions : $M_2(t_1) = M_s + M_c(t_1) + M_F$, où $M_c(t_1)$ est la masse du carburant et du comburant du second étage, M_F la masse à vide du second étage et où M_s est toujours la masse du satellite (on aura remarqué que les notations de grandeurs spécifiques du second étage sont en majuscules). Pour $t \geq t_1$, on a donc $M_2(t) = M_s + M_c(t) + M_F$. De la même manière, la vitesse d'éjection des gaz du second étage est notée U .

Les rapports $\Lambda = \frac{M}{M_2(t_1)}$ (M - majuscule de μ - est la masse de gaz éjectée pendant

l'unité de temps) et $\Sigma = \frac{M_2(t_1)}{M_s + M_F}$ sont définis de la même manière que pour la fusée à

un étage et ont les mêmes valeurs numériques : $U = u$; $\Lambda = \lambda$ et $\Sigma = \sigma$.

Dans ces conditions, la durée de combustion est la même pour le premier et pour le second étage.

8. Donner, en fonction de U , Σ , g_0 et Λ la vitesse $v(t_2)$ atteinte, lorsque à l'instant t_2 , le mélange comburant-combustible est épuisé. Comparer $v(t_2)$ à $v(t_1)$.

9. Quelle est, en fonction de U , Σ , g_0 et Λ , l'altitude $h(t_2)$ atteinte ? Exprimer aussi ce résultat en fonction de $h(t_1)$, $v(t_1)$ et t_1 .

10. Application numérique : $\Sigma = \sigma = 5$, $\Lambda = \lambda = 6.10^{-3}s^{-1}$ et $U = u = 3000 \text{ m.s}^{-1}$.

Calculer $v(t_2)$ et $h(t_2)$. Commenter ce résultat, sachant que la vitesse d'un satellite en orbite circulaire à cette altitude est d'environ $7,5 \text{ km.s}^{-1}$.

2^{ème} partie : mise en orbite circulaire d'un engin spatial

On utilise la relation (α) et des résultats de la question 1.

La figure 1 représente la mise du satellite sur orbite circulaire de rayon R .

La fusée décolle au point A et arrive en orbite au point B.

L'engin est représenté par le gros point noir sur le point courant de la trajectoire, M .

On pose : $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta$ et $(\vec{Ox}, \vec{OB}) = \psi$

On souhaite mettre un engin spatial (E) sur l'orbite circulaire (Ω) de rayon R . L'engin est muni de propulseurs fonctionnant pendant la durée de la mise sur orbite.

L'origine O étant au centre de la Terre, l'équation polaire de la trajectoire (C) adoptée pour passer du point A de la surface de la Terre au point B de l'orbite (Ω) est :

$$r(\theta) = R \cos(\theta - \psi) = n R_0 \cos(\theta - \psi)$$

où ψ est constant et n un réel supérieur à 1 (figure 1).

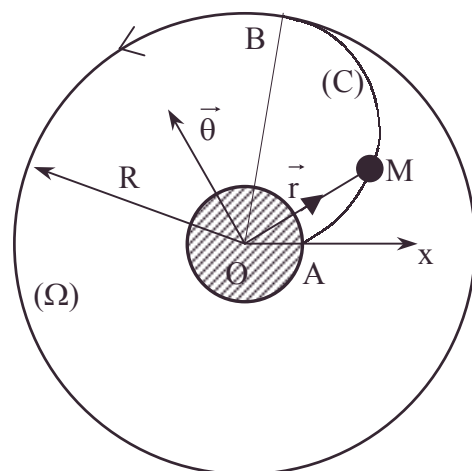


Figure 1

On convient que le point A correspond à $\theta = 0$, de sorte que $\cos \psi = \frac{1}{n}$.

On désignera dans ce qui suit par v_Ω la vitesse de (E) sur l'orbite (Ω).

11. Préciser (centre, rayon) les éléments de la trajectoire circulaire (C).

12. Donner (en fonction de R , ψ , $\dot{\theta}$ et θ) dans la base $(\vec{r}, \vec{\theta})$, l'expression de la vitesse \vec{v} de (E) ; donner la norme v de \vec{v} .

Du fait de la consommation de carburant, la masse $m(t)$ de l'engin varie pendant l'intervalle de temps dt selon la loi : $dm = -bm(t)dt$, où b est une constante positive.

Les gaz sont éjectés à la vitesse \vec{u} , constante par rapport à l'engin, parallèlement à la vitesse \vec{v} et en sens contraire de cette dernière.

13. En reprenant l'équation (α) de la question **2.**, trouver la relation (notée (β)) donnant v^2 en fonction de θ , sachant que, à $t = 0$, $\theta = 0$ et $v = 0$. En raison des grandes valeurs possibles de R , on ne devra pas, dans cette question, considérer G comme uniforme.

14. Application numérique : $n = 4$, $b = 10^{-2}s^{-1}$, $u = 3000 \text{ m.s}^{-1}$. Donner la valeur numérique de v_B vitesse de (E) lorsqu'il arrive en B. Comparer à la valeur de v de (E) sur l'orbite (Ω). Quelle est l'implication de l'inégalité obtenue ?

On procède donc en deux phases. Au cours de la première phase, les moteurs sont allumés. Lorsque (E) arrive en un certain point D, d'angle polaire θ_D , de la courbe (C), on éteint les moteurs. Commence alors la seconde phase. pendant la suite du trajet, (E) est maintenu sur la trajectoire (C) grâce à des moteurs de puissance négligeable.

15. Donner, dans ces conditions, l'expression du carré de la vitesse v'_B de (E) à l'arrivée sur l'orbite (Ω). Le résultat s'exprime en fonction de u , b , n , θ_D , R_0 et g_0 .

16. Déterminer θ_D , en fonction de g_0 , b , u et n , de telle manière que v'_B soit égale à la vitesse de (E) sur l'orbite (Ω), v_{sat} .

17. Application numérique : calculer θ_D avec les valeurs données à la question **14.**. Commenter ce résultat ; on pourra, par exemple, calculer la distance parcourue sur la Terre, correspondant à l'angle au centre θ_D .

On se propose maintenant de calculer la masse de l'engin (E) à l'arrivée sur (Ω) ; pour ce faire, on considère à nouveau l'équation (β) introduite à la question **13.**

18. Développer (β) au premier ordre par rapport à θ , considéré comme petit devant π et en déduire l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$;

il sera commode de poser $K = \sqrt{\frac{2}{n^2 R_0} (bun - g_0 \sqrt{n^2 - 1})}$.

19. En déduire l'expression de $\theta(t)$.

20. Donner, en fonction de b , K et θ_D l'expression du rapport $\frac{m_D}{m_0}$ des masses de l'engin à l'arrivée en D et au départ de A.

21. Application numérique : on donne le résultat $K = 1,26.10^{-3}$; calculer $\frac{m_D}{m_0}$ avec, comme indiqué à la question **14.**, $n = 4$, $b = 10^{-2}s^{-1}$ et $u = 3000 \text{ m.s}^{-1}$; vérifier au passage l'unité de K .

3^{ème} partie : freinage d'un satellite par l'atmosphère

(Indépendante de tout ce qui précède).

Un satellite (S) de vitesse \vec{V} sur une orbite circulaire basse (c'est-à-dire dont l'altitude z est très inférieure au rayon terrestre R_0) subit des frottements dus à l'atmosphère. Les molécules de l'atmosphère n'étant soumises qu'à l'agitation thermique, on pourra négliger leur vitesse, $v_{Th} = 500 \text{ m.s}^{-1}$, devant V .

22. On suppose que, après une collision entre le satellite de masse M et une molécule de masse m' , la vitesse relative des deux objets est nulle (choc mou). Montrer alors que la variation $\Delta \vec{P}$ de la quantité de mouvement de (S) est $\vec{P}_{\text{après}} - \vec{P}_{\text{avant}} = -m' \vec{V}$.

23. Montrer que l'effet des collisions équivaut à une force \vec{F} s'exerçant sur le satellite. ce dernier est sphérique, de rayon a . Déterminer \vec{F} en fonction de a , \vec{V} et μ , masse volumique de l'atmosphère (en considérant le nombre de chocs se produisant à l'intérieur d'un cylindre élémentaire, on trouve une expression du type $F = k(z)V^2$). Est-il indispensable que le satellite soit sphérique ?

On suppose qu'à l'altitude $z \ll R_0$, $\mu(z) = \mu(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, où $\mu(0)$ et H sont des constantes. On considère alors que, du fait de la force \vec{F} , (S) décrit une orbite circulaire autour de la Terre, le rayon de cette orbite étant lentement variable.

24. Donner sous ces hypothèses une loi approchée de variation de $z(t)$. Il sera avantageux d'introduire la quantité $\tau = \frac{MH}{2\pi a^2 \mu(0) R_0 \sqrt{g_0 R_0}}$, non sans avoir précisé sa dimension.

25. Application numérique : calculer la durée de chute du satellite depuis l'altitude $z_i = 180 \text{ km}$ jusqu'à $z_f = 0$; on donne : $\mu(0) = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, $H = 8500 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$ et $M = 10^3 \text{ kg}$. Vérifier enfin que la vitesse du satellite est effectivement grande devant la vitesse d'agitation thermique v_{Th} des molécules de l'atmosphère.

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

Préliminaire

1. • Calcul de $G(r)$, $r > R_0$

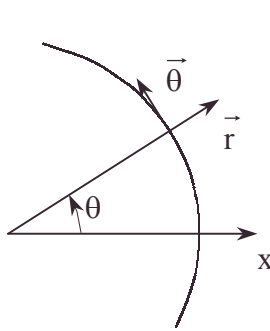
La Terre de masse M_T étant supposée sphérique, le champ \vec{G} est à symétrie sphérique. On applique le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 G(r) = -4\pi G M_T \Rightarrow G(r) = \frac{g M_T}{r^2} ; G(R_0) = g_0 = \frac{g M_T}{R_0^2} \text{ d'où :}$$

$$G(r) = g_0 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2.$$

• Appliquons le principe fondamental de la physique au satellite dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 : $m\vec{a} = m\vec{G}(r)$. Soit en projetant sur la base locale $(\vec{r}, \vec{\theta})$ et en tenant compte de la trajectoire circulaire ($r = \text{constante}$).

• analyse dimensionnelle, développement au premier ordre ou plus, dimension, force, Gauss [théorème de], gravitation, homogénéité d'une grandeur [analyse dimensionnelle], P.F.D., satellite sphérique, trajectoire, unité



$$r \ddot{\theta} = 0$$

$$-r \dot{\theta}^2 = -G(r) = -g_0 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2$$

Donc $\omega = \dot{\theta}$ est constante, et :

$$\omega = \sqrt{g_0 \frac{R_0^2}{r^3}}, \quad v = r\omega = \sqrt{g_0 \frac{R_0^2}{r}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{R_0 \sqrt{g_0}} r^{\frac{3}{2}}$$

(3^e loi de Kepler).

$$\bullet E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - mg_0 \frac{R_0^2}{r} = \frac{1}{2}mg \frac{R_0^2}{r} - mg_0 \frac{R_0^2}{r}.$$

$$E_T = -\frac{1}{2}mg_0 \frac{R_0^2}{r} \text{ avec la convention } E_p = 0 \text{ à l'infini.}$$

L'énergie totale est négative, cela traduit le fait que le satellite reste dans un domaine borné autour de la Terre. En effet, s'il pouvait partir à l'infini, on aurait $E = E_c \geq 0$, ce qui est impossible puisqu'il y a conservation de l'énergie et qu'elle est négative. On dit qu'il s'agit d'un état lié.

1^{ère} partie

2. Appliquons le principe fondamental dans \mathcal{R}_0 au système fermé :

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = m_1(t)(\vec{G}(r)).$$

$$\vec{P}(t+dt) = (m_c(t+dt) + M_s + m_F) \vec{v}(t+dt) + (-dm_c(t)(\vec{u}(t) + \vec{v}(t))).$$

Les gaz sont éjectés avec une vitesse relative \vec{u} donc une vitesse absolue $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\vec{P}(t) = m_1(t) \vec{v}(t).$$

Donc,

$$\begin{aligned} m_1(t)G(r) &= \left([M_s + m_F + m_c(t) + dm_c(t) - dm_c(t)] - dm_c(t)\vec{u} - m_1(t)\vec{v}(t)\vec{v}(t+dt) \right) / dt \\ &= m_1(t) \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} - \frac{dm_c(t)}{dt} \vec{u}; \quad m_1(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm_1(t)}{dt} \vec{u} = m_1(t) \vec{G}(r) (\alpha) \end{aligned}$$

$$3. m_1(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \vec{u} = m_1(t) \vec{g}_0.$$

En projection sur l'axe vertical : $\vec{v} = v\vec{r}$; $\vec{u} = -u\vec{r}$; $\vec{g}_0 = -g_0\vec{r}$.

$$m_1(t) \frac{dv}{dt} - \mu u + m_1(t)g_0 = 0.$$

$$\text{Or, } \frac{dm_1(t)}{dt} = -\mu \text{ constante donc : } m_1(t) = m_1(0) - \mu(t).$$

$$\text{Et : } \frac{dv}{dt} = -g_0 + \frac{\mu u}{m_1(0) - \mu t} \text{ tant qu'il reste du carburant.}$$

$$\text{D'où : } v = -g_0 t - u \ln(m_1(0) - \mu t) + \text{cste.}$$

$$\text{à } t = 0, v = 0 \text{ d'où : } v = -g_0 t - u \ln \left(\frac{m_1(0) - \mu t}{m_1(0)} \right); \quad v(t) = -g_0 t - u \ln(1 - \lambda t).$$

$$4. \text{ On a } m_1(t_1) = m_1(0) - \mu t_1 = M_s + m_F$$

$$\text{d'où } t_1 = \frac{m_1(0) - (M_s + m_F)}{\mu} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda\sigma} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right).$$

$$v(t_1) = -\frac{g_0}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) - u \ln \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\right) = -\frac{g_0}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) - u \ln \left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

$$v(t_1) = u \ln \sigma - \frac{g_0}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right).$$

Pour que $v(t_1)$ soit grande, il faut que σ soit le plus grand possible et λ élevé, c'est-à-dire un débit important, et une masse surtout constituée de combustible et comburant en proportion adaptée.

$$5. \text{ On a } \frac{dh}{dt} = v. \quad h(t) = -g_0 \frac{t^2}{2} + \frac{u}{\lambda} (1 - \lambda t) [\ln(1 - \lambda t) - 1] + \text{cste}.$$

$$\text{Or, } h(0) = 0. \quad h(t) = -g_0 \frac{t^2}{2} + \frac{u}{\lambda} [(1 - \lambda t) \ln(1 - \lambda t) + \lambda t].$$

$$\text{Donc, } h(t_1) = -g_0 \frac{1}{2\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)^2 + \frac{u}{\lambda} \left(\frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma} + 1 - \frac{1}{\sigma}\right);$$

$$h(t_1) = -g_0 \frac{1}{2\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)^2 + \frac{u}{\lambda\sigma} (\sigma - 1 - \ln \sigma).$$

$$6. \quad t_1 = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right); \quad t_1 = 133\text{s.}; \quad h(t_1) = 152 \text{ km.}$$

$$v(t_1) = 3520 \text{ m.s}^{-1} \text{ ou encore } v(t_1) = 11160 \text{ km/h.}$$

$$G(h(t_1)) = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + h(t_1))^2}; \quad \text{A.N. } G(h(t_1)) = 9,36 \text{ m.s}^{-2}; \quad \text{l'approximation } G = g_0 \text{ est moyennement vérifiée à 5\% près).}$$

$$v_{\text{orbite circulaire}} = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{R_0 + h(t_1)}}; \quad \text{A.N. : } v_{\text{orbite circulaire}} = 7830 \text{ m.s}^{-1} \text{ ou encore } 28000 \text{ km/h.}$$

7. $v(t_1)$ est très nettement inférieur d'environ 50 % à la vitesse de satellisation à l'altitude $h(t_1)$. La satellisation à cette altitude n'est pas possible.

Fusée à deux étages

8. On considère toujours $G(r) = g_0$ pendant le vol (cf. 3.).

Pour $t \geq t_1$, on a l'équation différentielle analogue à celle de 3. :

$$\frac{dv}{dt} = -g_0 + \frac{MU}{M_2(t_1) - Mt}.$$

$v(t)$ est continu à l'instant t_1 , d'où :

$$v(t_2) = v(t_1) + (-g_0(t_2 - t_1) - U \ln(1 - \Lambda(t_2 - t_1))).$$

$$v(t_2) = v(t_1) + U \ln \Sigma - \frac{g_0}{\Lambda} \left(1 - \frac{1}{\Sigma}\right); \quad M(t_2) = M_s + M_F = M_c(t_1) - M(t_2 - t_1);$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\Lambda} \left(1 - \frac{1}{\Sigma}\right) \text{ comme précédemment. Voir 6.}$$

Vu les notations, $v(t_1) = U \ln \Sigma - \frac{g_0}{\Lambda} \left(1 - \frac{1}{\Sigma}\right)$ car les 2 étages ont mêmes caractéristiques, donc $v(t_2) = 2v(t_1)$.

9. Pour $t \geq t_1$, $\frac{dh}{dt} = v$ or h continu en t_1 .

Soit comme en 5. :

$$h(t) = v(t_1)(t - t_1) - g_0 \frac{(t - t_1)^2}{2} + \frac{U}{\Lambda} [(1 - \Lambda(t - t_1)) \ln(1 - \Lambda(t - t_1)) + \Lambda(t - t_1)] + h(t_1).$$

$$\text{D'où, puisque } t_2 - t_1 = \frac{1}{\Lambda} \left(1 - \frac{1}{\Sigma}\right),$$

$$h(t_2) = h(t_1) + v(t_1) \frac{1}{\Lambda} \left(1 - \frac{1}{\Sigma}\right) - \frac{g_0}{2} \left(\frac{1}{\Lambda} \left(1 - \frac{1}{\Sigma}\right)\right)^2 + \frac{U}{\Lambda \Sigma} (\Sigma - 1 - \ln \Sigma).$$

Comme on considère que les moteurs ont même caractéristiques, le temps de combustion est le même : $t_2 - t_1 = t_1$; $h(t_2) = h(t_1) + t_1 v(t_1) + h(t_1)$ vu $h(t_1)$ en 5.

$$h(t_2) = 2h(t_1) + t_1 v(t_1).$$

10. A.N. : $v(t_2) = 7,04 \text{ km.s}^{-1}$; $h(t_2) = 773 \text{ km}$.

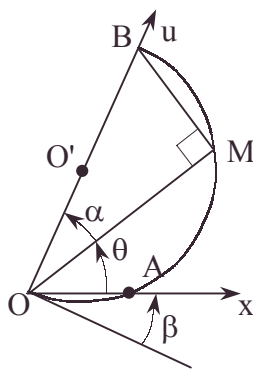
$v(t_2)$ est encore inférieur à la vitesse de satellisation mais relativement peu.

La satellisation sera sans doute possible moyennant une adaptation réduite.

L'hypothèse $G = g_0$ est mal vérifiée puisque à cette altitude $G = 7,8 \text{ m.s}^{-2}$.

2^{ème} partie

11. $r(\theta) = nR_0 \cos(\theta - \psi)$.



Le cercle passant par OAMB a pour équation polaire :

$$r = R \cos \alpha \text{ avec } \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta - \beta.$$

Il suffit pour identifier d'avoir $\beta = \frac{\pi}{2} - \psi$.

$$\text{Notons : } \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \psi = \psi.$$

La courbe $r(\theta) = R \cos(\theta - \psi)$ est l'équation polaire d'un cercle passant par O, de centre situé à la distance $R/2$ sur l'axe d'angle polaire ψ par rapport à Ox.

C'est donc une trajectoire de rayon $R/2$ de centre O' , milieu de OB.

12. $\overrightarrow{OM} = r(\theta) \vec{r}$;

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} \vec{r} + r(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{\theta} = -\dot{\theta} R \sin(\theta - \psi) \vec{r} + \dot{\theta} R \cos(\theta - \psi) \vec{\theta}.$$

$$v^2 = \dot{\theta}^2 R^2 (\sin^2(\theta - \psi) + \cos^2(\theta - \psi)) : v = R \left| \dot{\theta} \right|.$$

13. (α) : $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dm(t)}{dt} = m(t) \overrightarrow{G(r)}.$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + b\vec{u} = \overrightarrow{G(r)} = -g_0 \frac{R_0^2}{r^2} \vec{r} \text{ sachant que } \vec{u} = -u \frac{\vec{v}}{v}.$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + b\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{G(r)} \cdot \vec{v}.$$

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} - buv = g_0 \frac{R_0^2}{r^2} \dot{\theta} R \sin(\theta - \psi).$$

• équation polaire, identification, trajectoire

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = R \dot{\theta} \left[g_0 \frac{R_0^2}{r^2} \sin(\theta - \psi) + bu \right] \text{ vu } \mathbf{12.},$$

$$d'où : d(v^2) = 2R \left[g_0 \frac{R_0^2}{r^2} \sin(\theta - \psi) + bu \right] d\theta.$$

$$v^2(\theta) = 2Rbu\theta + g_0 2R \int_0^\theta \frac{\sin(\theta - \psi)}{R^2 \cos^2(\theta - \psi)} d\theta + 0.$$

$$v^2(\theta) = 2Rbu\theta + 2g_0 \frac{R_0^2}{R} \left(\frac{1}{\cos(\theta - \psi)} - \frac{1}{\cos \psi} \right) \text{ or } \cos \psi = \frac{1}{n} \text{ et } R = nR_0.$$

$$v^2(\theta) = 2R_0 \left[nbu\theta + \frac{g_0}{n} \left(\frac{1}{\cos(\theta - \psi)} - n \right) \right] \quad [\beta].$$

$$\mathbf{14.} \quad v_B = v(\psi) = \left[2R_0 \left(nbu\psi + \frac{g_0}{n} (1 - n) \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\psi = \arccos \frac{1}{n} = 75,5^\circ; \quad v_B = 43,9 \text{ km.s}^{-1}; \quad v_{\text{satellite}} = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{nR_0}} = 3,96 \text{ km.s}^{-1}.$$

Cette fois, l'engin va beaucoup trop vite, il ne restera pas sur l'orbite (Ω) mais il ira se placer sur une orbite de rayon supérieur.

$$\mathbf{15.} \quad v^2(\theta_D) = 2R_0 \left[nbu\theta_D + g_0 \left(\frac{R_0}{r(\theta_D)} - 1 \right) \right].$$

Deuxième phase, $u = 0$ (moteur coupé). reprenons l'intégration de dv^2 de la question **13**.

$$v'^2(\theta) = v^2(\theta_D) + 2R_0 g_0 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\cos(\theta - \psi)} - \frac{1}{\cos(\theta_D - \psi)} \right).$$

Remplaçons $v^2(\theta_D)$.

$$\begin{aligned} v_B'^2 &= 2Rn bu\theta_D + 2 \frac{R_0^2 g_0}{r(\theta_D)} - 2R_0 g_0 + 2R_0 g_0 \left(\frac{R_0}{r(\psi)} - \frac{R_0}{r(\theta_D)} \right) \\ &= 2R_0 nbu\theta_D + 2R_0 g_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right). \end{aligned}$$

$$v_B'^2 = 2R_0 \left[\underbrace{nbu\theta_D}_{\text{terme dû à la poussée des moteurs}} + \underbrace{g_0 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)}_{\text{terme dû à l'attraction terrestre}} \right].$$

$$\mathbf{16.} \quad \text{Vu } \mathbf{14.} \quad v_{\text{sat}}^2 = \frac{R_0 g_0}{n} = 2R_0 \left(nbu\theta_D + g_0 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right).$$

$$\theta_D = \frac{1}{nbu} \left(\frac{g_0}{2n} - g_0 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right) = \frac{g_0}{n^2 bu} \left(n - \frac{1}{2} \right).$$

$$\mathbf{17.} \quad \text{A.N. : } \theta_D = 0,071 \text{ rad} = 4,1^\circ.$$

Distance parcourue sur la Terre : $R_0 \theta_D = 450 \text{ km}$. Approximation de $\int_0^{\theta_D} v dt$ en confondant r et R_0 .

• orbite circulaire (mise en)

La fusée ne fonctionne que sur une petite portion de la trajectoire ; on a une solution beaucoup plus économique que précédemment.

$$18. 12. \text{ et } [\beta.] \Rightarrow R \frac{d\theta}{dt} = v = \sqrt{2R_0} \sqrt{nbu\theta + \frac{g_0}{n} \left(\frac{1}{\cos(\theta - \psi)} - n \right)}.$$

$$\text{Linéarisons } \cos(\theta - \psi) = \cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi = \frac{1}{n} + \theta \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} (1 + \theta \sqrt{n^2 - 1}) \quad \text{vu}$$

l'énoncé.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2R_0}}{nR_0} \sqrt{nbu\theta + g_0 \left(\frac{1}{1 + \theta(\sqrt{n^2 - 1})} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{2}{n^2 R_0}} (nbu - g_0 \sqrt{n^2 - 1}) \theta.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = K\sqrt{\theta} \quad \text{avec } K = \left[\frac{2}{n^2 R_0} (nbu - g_0 \sqrt{n^2 - 1}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$19. \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = K dt \quad \text{d'où } 2d(\sqrt{\theta}) = K dt.$$

$$\sqrt{\theta} = \frac{K}{2} t \quad \text{car } \theta = 0 \text{ à } t = 0. \quad \text{Finalement } \theta = \frac{K^2}{4} t^2 \Leftrightarrow t = \left(\frac{4\theta}{K^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$20. \frac{dm(t)}{dt} = -bm(t) \quad \text{donc } m(t) = m_0 e^{-bt}.$$

$$\text{Donc } \frac{m_D}{m_0} = e^{-bt_D} = \exp \left(-b \left(\frac{4\theta_D}{K^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$21.a. [K]^2 = m^{-1} (s^{-1} m s^{-1} - m s^{-2}) = m^{-1} m s^{-2} = s^{-2}.$$

$[K] = s^{-1}$; K est bien homogène à l'inverse d'un temps.

$$b. \text{ A.N. : } \frac{m_D}{m_0} = 1,4 \cdot 10^{-2} = 1,4\%.$$

3^{ème} partie

22. Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement totale lors du choc :

$$M \vec{V}_{\text{avant}} = M \vec{V}_{\text{après}} + m' \vec{V}_{\text{après}}.$$

En effet, la molécule est initialement immobile, puis après le choc mou, elle a la même vitesse que le satellite, donc : $\Delta \vec{P} = -m' \vec{V}$.

$$23. \text{ Considérons l'intervalle de temps } dt. \text{ On a } dt \vec{F} = \Delta \vec{P} = \sum_C -m' \vec{V}.$$

C est le cylindre en avant du satellite, qui contient les molécules que le satellite va heurter.

En notant σ la section efficace du satellite, le cylindre contient $\frac{\mu}{m'} \cdot \sigma v dt$ particules.

$$\text{Donc, } \vec{F} = -\frac{\mu}{m'} \sigma V m' \vec{V} = -\mu \sigma V \vec{V}.$$

Dans le cas où le satellite est sphérique, $\sigma = \pi a^2$; $F = \pi a^2 \mu(z) V^2$.

Si le satellite n'est pas sphérique, cela ne change rien. D'ailleurs on peut prendre une valeur de la section efficace σ différente de l'aire réelle du satellite afin de tenir compte des approximations (choc non rigoureusement mou par exemple).

24. Pour la trajectoire circulaire : $\frac{V^2}{R_0 + z} = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + z)^2} \Rightarrow V = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{R_0 + z}}$.

$$\sqrt{R_0 g_0} \left(1 - \frac{z}{2R_0} \right) \Rightarrow \frac{dV}{dz} = -\frac{\sqrt{R_0 g_0}}{2R_0}.$$

L'énergie totale d'une trajectoire dans le champ en $\frac{1}{r^2}$ s'écrit :

$$E_T = -\frac{M g_0 R_0^2}{2(R_0 + z)} = -\frac{1}{2} M V^2.$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{dE_T}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \Rightarrow -M V \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dt} = -\pi a^2 \mu(0) V^3 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{2\pi}{M} a^2 \frac{V^2 \mu_0}{\sqrt{R_0 g_0}} \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2\pi a^2 \mu(0)}{M \sqrt{R_0 g_0}} R_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) V^2 \# -\frac{2\pi a^2 R \mu(0)}{M \sqrt{R_0 g_0}} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) R_0 g_0, \text{ en négligeant les}$$

termes gênants pour une intégration rapide soit $z \ll R_0$ dans V^2 .

Posons $\tau = \frac{MH}{2\pi a^2 \mu(0) R_0 \sqrt{R_0 g_0}}$.

$$\exp \frac{z}{H} \frac{dz}{dt} = \frac{dt}{\tau} ; \exp \frac{z}{H} - \exp \frac{z_0}{H} = \frac{t}{\tau}.$$

Ecrivons l'équation aux dimensions de τ astucieusement :

$$[\tau] = \frac{[M][L]}{[L^3 \mu][L]^{\frac{1}{2}}[g]^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{L}{g} \right]^{\frac{1}{2}} = [T] \text{ cf. pendule simple. } \tau \text{ s'exprime en s.}$$

25. $t_i = \tau \left(e^{\frac{z_i}{H}} - 1 \right) \Rightarrow \text{A.N. : } t_i = 8181 \text{ s} = 2 \text{ h } 16 \text{ min.}$

Pour l'agitation thermique de l'air diatomique : $\frac{1}{2} m V^2 = \frac{5}{2} k T \Rightarrow V_{th} = \sqrt{\frac{5RT}{M}}$.

Pour le satellite : $V_{sat} = \sqrt{R_0 g_0}$ en négligeant z_i devant H .

A.N. : $V_{sat} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$, $V_{th} = 0,65 \text{ kms}^{-1}$. On vérifie $V_{sat} \gg V_{th}$.

1.1.5. Interaction de dipôles

Voir page 570.

1.1.6. Capteur d'accélération avec jauge de contrainte

Voir page 267.

1.2. Effets de \vec{E} et \vec{B}

appartient aussi au programme de TPC1

1.2.1. Mouvement de particules 1

N.B.: On aura soin d'établir d'abord toutes les formules littérales avant de passer aux applications numériques.

On donne : charge électrique élémentaire : $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb ;

masse de l'électron : $m = 0,9 \cdot 10^{-30}$ kg ; masse du proton : $M = 2000 m$.

I. Un faisceau d'électrons, ayant tous la même vitesse v_0 en grandeur et en direction, pénètre dans une région R_1 limitée par deux grilles G_1 et G_2 parallèles, portées respectivement aux potentiels 0 et V . On prendra un axe Ox perpendiculaire à G_1 et G_2 , définies alors par les plans $x = 0$ et $x = \ell$. Le plan Ox , v_0 sera le plan xOy et l'on posera

$$(Ox, v_0) = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

On précise que, dans la région R_1 , le champ électrique est le même que celui qu'on obtiendrait en remplaçant G_1 et G_2 par deux plateaux de condensateur plan.

1. Exprimer les composantes de la force f appliquée à un électron. Caractériser la nature du mouvement et celle de la trajectoire de cet électron.

2. Soit v_s la vitesse des électrons quand ils sortent de la région R_1 . On pose $(Ox, v_s) = \beta$. Etablir la relation qui existe entre v_0 , v_s , α et β . Quelle analogie suggère-t-elle?

3. Calculer pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ la valeur algébrique de la déviation totale du faisceau, à travers la région R_1 , la vitesse v_0 ayant été obtenue en accélérant le faisceau, à partir du repos, par une d.d.p. égale à la d.d.p. entre G_1 et G_2 .

II. Le même faisceau pénètre maintenant, avec la vitesse v_1 , dans une région R_2 où règne une induction magnétique B uniforme, perpendiculaire à la vitesse v_1 . La région R_2 est limitée par un plan P indéfini, parallèle à B . On prendra un axe Oz dirigé suivant B , Ox normal à P , $x > 0$ dans toute la région R_2 et l'on posera $(Ox, v_1) = \beta$.

1. Quelles sont les composantes sur Ox , Oy , Oz (trièdre direct), de la force F appliquée à un électron en un point quelconque de la région R_2 ? Quelle est la nature de sa trajectoire ? Préciser cette trajectoire lorsque $B = 0,3$ T, $\beta = \frac{\pi}{6}$, pour des électrons de vitesse $v_1 = 16000$ km/s. La tracer approximativement.

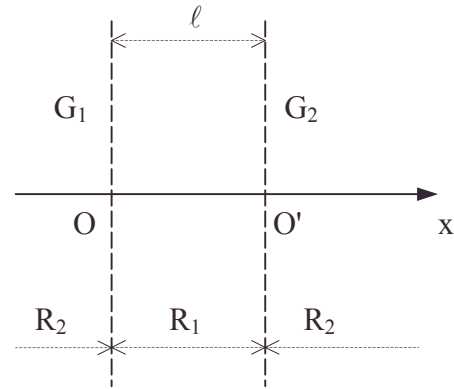
2. Même question dans le cas d'un faisceau de protons, pénétrant dans R_2 à la même vitesse $v_1 = 16000$ km/s, et sous le même angle $\beta = \frac{\pi}{6}$.

3. Un faisceau d'ions moléculaires H_2^+ de vitesse $v_1 = 16000$ km/s pénètre sous l'angle $\beta = \frac{\pi}{6}$ dans la région R_2 . Chaque fois qu'un tel ion passe par le point d'abscisse maximale de sa trajectoire dans R_2 , un dispositif le scinde en deux particules : un atome neutre d'hydrogène et un proton, ces deux particules ayant, au moment de la scission, chacune une vitesse égale en grandeur et en direction à la vitesse de la particule qui leur a donné naissance.

Que deviennent les protons ainsi formés ? Comparer ce résultat à celui de la question précédente. Faire figurer les résultats de ces questions **II.2.** et **II.3.** sur la même figure.

III. On suppose que la région R_2 s'étend à tout l'espace, excepté à une tranche comprise entre les grilles G_1 et G_2 d'abscisses $x = 0$ et $x = \ell$ qui n'est donc autre que la région R_1 de la première partie. Le sens des axes est le même dans R_1 et R_2 .

Un électron est abandonné, sans vitesse initiale, à partir de l'origine O .



1. Décrire sommairement sa trajectoire.

2. Montrer qu'il subit au total un déplacement moyen, dont on précisera le sens et la vitesse.

3. Mêmes questions pour un proton, initialement au repos en O' , les grilles G_1 et G_2 étant toujours respectivement aux potentiels 0 et V .

4. A.N. : on donne la distance $\ell = 8 \text{ mm}$, des deux grilles G_1 et G_2 ;
 $V = 720 \text{ volts}$, $B = 0,3 \text{ T}$.

IV. Dans tout l'espace règne maintenant à la fois l'induction B , dirigée suivant Oz , et un champ électrique E dirigé suivant Ox .

1. Quelles sont les composantes de la force qui s'exerce sur un électron ?

2. Ecrire les équations du mouvement d'un électron, partant de l'origine O avec une vitesse initiale nulle ; tracer la trajectoire de cet électron.

3. Montrer que ce mouvement peut être considéré comme résultant de la superposition de deux mouvements plus simples. L'un de ces mouvements correspond à un déplacement moyen de la particule (mouvement de dérive) analogue à celui de la question **III.2**. Préciser le sens de ce déplacement et la vitesse de dérive qui en résulte.

4. Un proton part de l'origine, sans vitesse initiale. Quel sera son mouvement ? Comparer les résultats à ceux de la question précédente. Etudier sommairement le déplacement moyen et comparer le résultat à celui de la question **III.3**.

Les valeurs numériques sont les mêmes que dans la partie **III**. et le champ E est celui qui régnait dans la région R_1 .

Autres concours ; Durée : 1h30

Corrigé

1. $E_x = \frac{-V}{\ell}$; on néglige la pesanteur.

$$\vec{f} = -q\vec{E} = q \frac{V}{\ell} \vec{x} = m\vec{a}.$$

Le mouvement est à accélération \vec{a} constante.

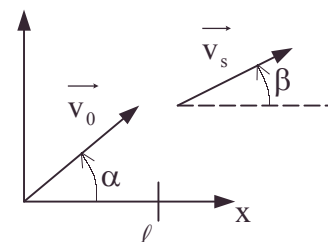
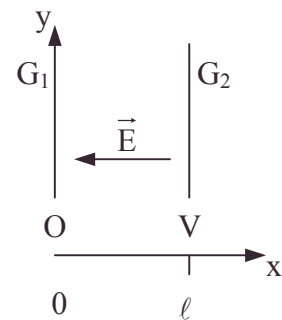
Le mouvement est plan uniformément accéléré.

La trajectoire est une parabole d'axe parallèle à Ox .

2.a. Le principe fondamental de la dynamique projeté sur Oy donne :

$$m \frac{dv_y}{dt} = 0 \Rightarrow v_y = \text{cste.}$$

$$\text{soit : } v_0 \sin \alpha = v_s \sin \beta.$$



• analogie, force, mouvement de dérive d'un point, parabole, pesanteur, principe fondamental de la dynamique, trajectoire

b. On pense à la loi de Descartes à la réfraction pour un dioptré (ou pour une couche d'épaisseur infinitésimale). cf. optique géométrique.

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta.$$

3. Ecrivons la conservation de l'énergie.

- entre l'émission décrite dans l'énoncé avec

$$\text{un branchement adapté à } G_1 : qV = \frac{1}{2} m_0^2 + 0.$$

- entre G_1 et G_2 :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_s^2 - qV \Rightarrow v_s^2 = \frac{4qV}{m} ; v_0^2 = \frac{2qV}{m}.$$

$$\sin \beta = \frac{v_0}{v_s} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} ; \text{AN} : \sin \beta = \frac{1}{2} ; \beta = 30^\circ.$$

- Déviation vers le bas (cf. prisme) : $D = \beta - \alpha = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}\right) - \alpha$

$$\text{A.N.} : D = -15^\circ.$$

II.1. $\vec{F} = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$ Vu $F_z = 0$ et $\vec{v}_1 \perp \vec{B}$, le mouvement est plan orthogonal à \vec{B} avec

$$\text{dans le trièdre de Frenet } \vec{v} = v \vec{\tau} \quad \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} ; \quad \vec{F} = qvB\vec{n}.$$

En projections sur le trièdre de Frenet, ($\vec{\tau}, \vec{n}$ local), $m \frac{v^2}{R} = qvB$; $m \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = v_1$.

Le rayon de courbure $R'_1 = \frac{mv_1}{qB}$ est constant, d'où la trajectoire est un cercle (un arc, en fait) tangent à \vec{v}_1 à l'origine (point d'émission) tel que la force soit centripète.

La sortie en A joue un rôle transposé de l'entrée en O

$$y_A = 2R'_1 \cos \beta, \quad v_A = v_1 ; \quad y_C = -R'_1 \cos \beta.$$

$$\text{AN} : R'_1 = 3.10^{-4} \text{ mm} ; \quad x_C = -R'_1 \sin \beta.$$

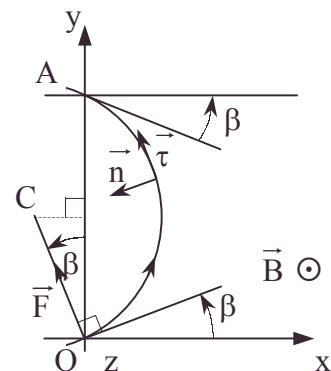
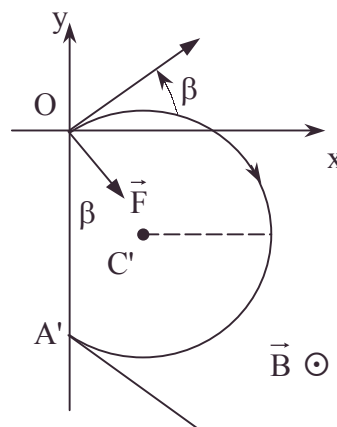
2. De même, la trajectoire est un cercle, (en fait, un arc).

$$R'_2 = \frac{Mv_1}{qB} ; \text{AN} : R'_2 = 0,6 \text{ mm}.$$

$$x_{C'} = R'_2 \sin \beta ;$$

$$y_{C'} = -R'_2 \cos \beta ;$$

$$y_{A'} = -2R'_2 \cos \beta.$$



- centripète, force, trajectoire

3. $M' \neq 2M$; $x_{C''} = 2R'_2 \sin \beta$
 $y_{C''} = y_{A'} = -2R'_2 \cos \beta$.
 $x_{D''} = x_{C''} + 2R'_2$.
 $y_{A''} = 2y_{A'}$.

L'atome poursuit une trajectoire rectiligne passant par D'' , orthogonale à Ox . Le proton reste dans R_2 sur une trajectoire circulaire de rayon R'_2 ; en II.2., le proton ressortait de R_2 après un parcours partiel d'un cercle de rayon R . On peut stocker (ou confiner) les protons dans cette zone.

III. Voir la figure suivante.

1.a. Le mouvement est uniformément accéléré.

L'électron parcourt le segment de droite OO' et en sort avec la vitesse $v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$ cf. II.3

b. puis un demi-cercle de rayon $R = \frac{mv}{qB}$ selon les y croissants à vitesse constante

(cf. II.1. vu \vec{F} centripète et \vec{B}).

c. L'électron rentre dans R_1 avec la même vitesse v et décrit un segment de droite selon un mouvement décéléré (inverse de a.). Il arrive en $x = 0$ avec une vitesse nulle ($y = 2R$). cf. inversion du temps.

d. Il subit en ce point une force qui le fait parcourir un segment analogue à a. décalé selon y de $2R$.

e. On retrouve un demi-cercle décalé selon y de $2R$.

f. On refait le parcours d. décalé de $2R$ en sens inverse.

On continue...

2. L'électron se déplace selon les y croissants. Il parcourt $2R$ pendant la durée nécessaire à parcourir successivement a(T_1), b(T_2), c(T_1).

Soit $T = 2T_1 + T_2$

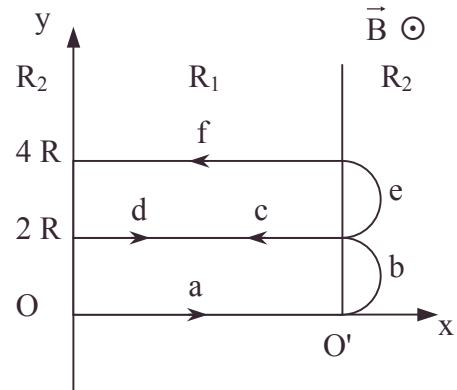
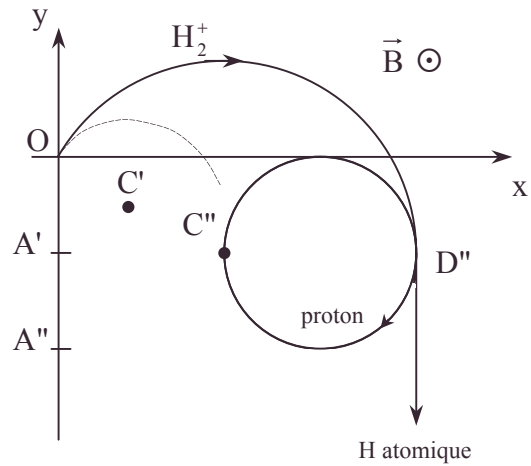
Dans un mouvement uniformément accéléré

d'accélération $a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{m\ell}$.

T_1 est tel que $v = aT_1 \Rightarrow T_1 = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \cdot \frac{1}{\frac{qV}{m\ell}} = \ell \sqrt{\frac{2m}{qV}}$

T_2 est tel que $\pi R = vT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{\pi m}{qB}$.

La vitesse moyenne de dérive $v_d = \frac{2R}{T} = \frac{\frac{2m}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{m}}}{2\sqrt{\frac{2m}{qV}} \ell + \frac{\pi m}{qB}}$.



3.a. Le proton parcourt le segment de droite O'O et en sort avec la vitesse $v' = \sqrt{\frac{2qV}{M}}$.

b. puis un demi-cercle de rayon $R' = \frac{Mv'}{qB}$ à vitesse constante selon les y décroissants (cf. II.2. \vec{F} centripète).

c. Le proton rentre dans R_1 , avec la même vitesse v' et parcourt un segment de droite décalé de $2R'$, avec une décélération qui le fait arriver en $x = \ell$ avec une vitesse nulle.

d. Le phénomène se reproduit tel qu'en **a.** Le proton se déplace selon les y décroissants avec une vitesse moyenne de dérive $v'_d = \frac{\frac{2M}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{M}}}{2 \sqrt{\frac{2M}{qV}} \ell + \frac{\pi M}{qB}}$.

4. A.N. : **a.** $v = 16.10^6 \text{ m.s}^{-1}$;

Conclusion : $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$; pas de nécessité de correction relativiste.

$v_d = 282958 \text{ m.s}^{-1}$.

b. $v' = 357771 \text{ m.s}^{-1}$; $v'_d = 129818 \text{ m.s}^{-1}$.

$$\text{IV.1. } \vec{f} = -q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \begin{vmatrix} -qE - qB\dot{y} \\ qBx \\ 0 \end{vmatrix}.$$

2. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\textcircled{1} \quad m\ddot{x} = -qE - qB\dot{y}.$$

$$\textcircled{2} \quad m\ddot{y} = qB\dot{x}.$$

$$\textcircled{3} \quad m\dot{z} = 0.$$

$\textcircled{3}$ s'intègre en $\dot{z} = \text{cste} = 0 \Rightarrow z = \text{cste} = 0$.

$\textcircled{2}$ s'intègre une fois en $\dot{y} = \frac{qB}{m}x + 0$. $\textcircled{2}'$ On reporte \dot{y} dans $\textcircled{1}$:

$$\ddot{x} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x = -\frac{q}{m}E \quad \textcircled{1}'.$$

On trouve la solution de l'équation $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \frac{qB}{m}$.

La solution particulière de $\textcircled{1}'$ est $x = \frac{-qE}{m} \cdot \frac{m^2}{q^2 B^2} = \frac{-mE}{qB^2}$.

La solution générale s'écrit :

$$x = \frac{-mE}{qB^2} (1 - \cos \omega t) \text{ car satisfait aussi à } x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0 \Rightarrow x < 0 \quad \forall t$$

$$\textcircled{2}' : \dot{y} = -\frac{E}{B}(1 - \cos \omega t) \Rightarrow y = -\frac{E}{B}t + \frac{Em}{qB^2} \sin \omega t.$$

- On a une cycloïde.

3. • On obtient un tel mouvement pour un point du bord d'une roue en roulement sans glissement sur un plan horizontal.

- On a en fait un mouvement relatif circulaire et un mouvement d'entraînement de translation uniforme.

- ω caractérise la rotation ; $\left\langle \dot{y} \right\rangle = -\frac{E}{B}$ est la vitesse moyenne de dérive selon les y décroissantes.

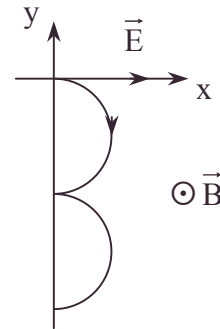
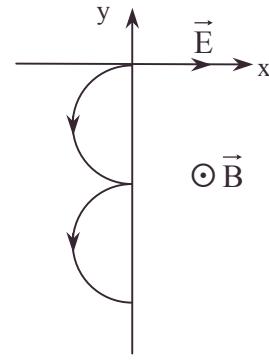
4. On change q en $-q$ et m en M ; posons $\omega' = \frac{qB}{M}$ soit ω' de même signe que ω .

$$x = \frac{ME}{qB^2}(1 - \cos \omega' t) ; y = \frac{-Et}{B} + \frac{E}{qB^2}M \sin \omega' t. \text{ On a une cycloïde.}$$

On a une même vitesse de dérive $-\frac{E}{B}$ négative.

A.N. : $v_d = v'_d = 3.10^5 \text{ m.s}^{-1}$ supérieure aux valeurs précédemment trouvées notamment pour les protons.

Conclusion : on distingue aussi la différence entre la séparation des champs dans deux zones voisines et la superposition des champs dans une seule zone.



1.2.2. Mouvement de particules 2

Dans tout ce problème, les vitesses des particules dont on étudie le mouvement sont supposées non relativistes. Les parties **A.** et **B.** sont indépendantes l'une de l'autre.

Toute formule demandée sera présentée sous forme littérale, l'application numérique sera ensuite faite selon les données.

A. Action d'un champ électrique uniforme sur une particule mobile chargée

I. Etude de la charge d'un ion

Un champ électrique uniforme vertical descendant peut être créé entre les armatures horizontales d'un condensateur plan. Entre ces armatures existe une atmosphère gazeuse dans laquelle sont introduites de très petites gouttes de glycérine, toutes identiques, obtenues par pulvérisation. Le mouvement vertical d'une de ces gouttes est observé au microscope.

Cette atmosphère gazeuse se comporte comme le vide au point de vue électrique, mais oppose à chaque goutte une résistance à l'avancement : $\vec{\varphi}$, dont l'intensité est proportionnelle au rayon r de la goutte et à la valeur de la vitesse de chute de la goutte, v . Cette force $\vec{\varphi}$ est donnée par la formule de Stokes : $\vec{\varphi} = -6\pi\eta r \vec{v}$ (η coefficient de viscosité du milieu = constante). On néglige la poussée d'Archimède.

Au temps initial de l'expérience, la goutte dont on suit le mouvement, part d'un point proche de l'armature supérieure du condensateur sans vitesse initiale (cf. figure 1).

Données numériques :

$$r = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

$$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}^{-1} \dots$$

$$g = \text{accélération de la pesanteur} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$\mu = \text{masse volumique de la glycérine} = 1,25 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}.$$

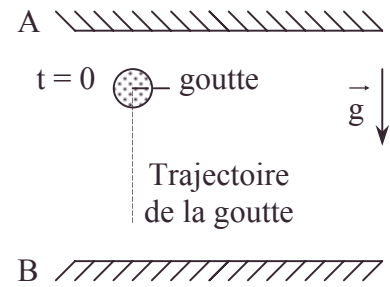


Figure 1

1. La goutte tombe sous la seule action de la pesanteur, le condensateur n'étant pas chargé.

a. Calculer littéralement la valeur de v à chaque instant t .

b. En déduire l'existence d'une vitesse limite \vec{v}_ℓ et calculer la valeur numérique de cette vitesse limite.

c. Au bout de combien de temps la vitesse a-t-elle atteint sa valeur limite à 1/1000 près de v_ℓ ? Peut-on en déduire qu'on mesure expérimentalement v_ℓ ?

2. On fait passer un faisceau de rayons X entre les gouttes, ce qui a pour effet de les charger électriquement, et on établit entre les armatures A et B du condensateur une d.d.p. $U = V_A - V_B$.

Données numériques : $U = 37445$ volts,

$e = \text{distance entre les deux armatures} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$

a. On observe une goutte immobile.

Quelle est la charge électrique q de cette goutte ?

b. Quelques instants après, sous l'effet ionisant des rayons X, la goutte observée prend un mouvement rectiligne uniforme vertical, dirigé vers le haut, et on peut mesurer un déplacement de $4,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ en 10 secondes.

Quelle est la nouvelle charge q' de la goutte ?

c. Ces valeurs de q et q' sont-elles satisfaisantes ? Expliquez pourquoi.

II. Mouvement rectiligne d'ions

Des ions H^+ ou protons sortent d'une fente (F) sans vitesse appréciable. Cette fente est tracée dans une armature de condensateur plan, armature qui est au potentiel V . L'autre armature, au potentiel nul, est aussi percée d'une fente (F_1) permettant ainsi aux ions H^+ de sortir du condensateur. Ce pinceau d'ions tombe entièrement dans un cylindre conducteur (D), soudé en (M) à une résistance de valeur R dont l'extrémité (N) est mise au potentiel zéro (cf. figure 2).

Tout ce montage fonctionne dans le vide.

Données numériques :

Masse d'une mole d'atome d'hydrogène = $10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$.

$V = 3000$ volts.

$N_A = \text{nombre d'Avogadro} = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

$R = 10^{10} \text{ ohms}$.

$e = \text{valeur absolue de la charge d'un électron,} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb.}$

$C = \text{capacité électrique du cylindre (D), supposé éloigné d'autres conducteurs}$
 $C = 10^{-12} \text{ farad.}$

1. Quelle est la vitesse des ions H^+ au passage de F_1 ?

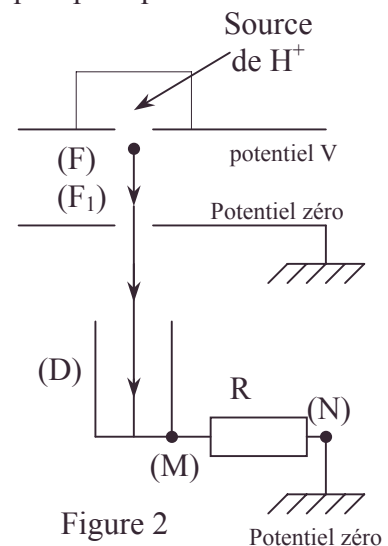


Figure 2

2. En régime permanent, on mesure la d.d.p. entre les points M et N.

$$(V_M - V_N) = U' = 10^{-3} \text{ volt.}$$

Combien d'ions H^+ arrive-t-il dans (D) par seconde ?

3. A l'instant $t = 0$, on a $(V_M - V_N) = U' = 0$, et l'on établit alors un courant ionique constant i_0 tel que $i_0 = 10^{-12} \text{ A}$. Trouver la relation liant U' au temps t .

Quelles approximations êtes-vous amené à faire ?

Tracer rapidement la représentation graphique de cette fonction.

Au bout de combien de temps la limite de U' sera-t-elle atteinte, à 1% de cette limite près ?

III. Trajectoire d'un électron : analogie optique

Dans les calculs suivants, on négligera l'action de la pesanteur.

Dans un espace où existe un champ électrique uniforme (P_0) , (P_1) et (P_2) sont trois plans verticaux parallèles équipotentiels. Le plan (P_0) est au potentiel V_0 , (P_1) au potentiel V_1 , et (P_2) au potentiel V_2 . On a $V_0 = 0$ et $V_2 > V_1 > V_0$.

Au temps initial de l'expérience, un électron traverse (P_0) en M_0 avec une vitesse \vec{u}_0 .

Soit \vec{n}_0 le vecteur unitaire de la normale à (P_0) en M_0 . L'angle $(\vec{n}_0, \vec{u}_0) = \alpha_0$.

Puis l'électron traverse le plan (P_1) en M_1 avec une vitesse \vec{u}_1 ; $(\vec{n}_1, \vec{u}_1) = \alpha_1$, avec les mêmes notations. Enfin, l'électron traverse (P_2) en M_2 et $(\vec{n}_2, \vec{u}_2) = \alpha_2$ (cf. figure 3).

On note : distance de (P_0) à $(P_1) = \ell_1$.

distance de (P_0) à $(P_2) = \ell_2$.

1. Démontrer qu'à la traversée de tout plan équipotentiel la projection sur ce plan de la vitesse de l'électron se conserve.

2. Trouver une relation littérale entre α_1 , u_0 , α_0 , les grandeurs caractéristiques de l'électron et celle de l'équipotentielle correspondant à α_1 .

3. Démontrer qu'en utilisant un électron à faible vitesse initiale \vec{u}_0 , la traversée de chaque équipotentielle (P) , au potentiel V , se fait suivant la loi :

$$\sqrt{V} \cdot \sin \alpha = \text{cste.}$$

avec $\alpha = (\vec{n}, \vec{u})$; \vec{n} vecteur unitaire de la normale à (P) ,
 \vec{u} vitesse de l'électron à la traversée de (P) .

4. Données numériques :

m = masse de l'électron = 9.10^{-31} kg .

$V_0 = 0$, $V_1 = 900 \text{ volts}$, $V_2 = 1800 \text{ volts}$.

$\ell_1 = 10^{-1} \text{ m}$, $\ell_2 = 2.10^{-1} \text{ m}$.

Energie cinétique de l'électron en $M_0 = 1 \text{ eV}$.

a. Calculer la valeur numérique de u_0 . Peut-on appliquer à ce cas, le résultat du 3. ?

b. Calculer en degrés la valeur de l'angle α_2 si $\alpha = 45^\circ$.

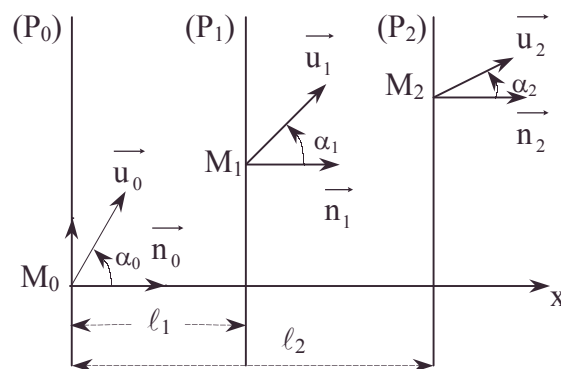


Figure 3

B. Action d'un champ magnétique uniforme sur une particule chargée mobile

Tous les phénomènes suivants seront étudiés dans le vide. On donne la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$.

Création d'un champ magnétique

1. Une bobine plate, circulaire, de N spires, de rayon moyen a est parcourue par un courant continu d'intensité I (cf. figure 4).

a. Donner toutes les caractéristiques du champ magnétique \vec{B} au centre de la bobine (c'est-à-dire module, direction et sens).
Données numériques : $a = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$, $I = 10 \text{ A}$, $N = 100$.

b. Même question en un point P de l'axe de symétrie Oz , tel que $OP = z$.

c. Représentation graphique de la valeur de B en fonction de $X = \frac{z}{a}$. Calculer B pour $\frac{z}{a} = 0$, $\frac{z}{a} = \frac{1}{2}$ et $\frac{z}{a} = 1$.

2. On dispose d'une deuxième bobine plate, identique à celle du 1. On place ces 2 bobines de Helmholtz dans 2 plans parallèles. Leur axe commun est O_1O_2z , si O_1 est le centre de l'une, O_2 le centre de l'autre. On choisit la distance O_1O_2 égale à a . Elles sont parcourues par le même courant continu, circulant dans le même sens, d'intensité $I = 10 \text{ A}$.

(cf. figure 5).

a. Calculer la valeur du champ magnétique ainsi créé, en O_1 , en O_2 et en S , point milieu du segment O_1O_2 .

b. En utilisant le résultat c. du 1., par addition graphique, trouver l'allure de la variation de B en fonction de la position d'un point sur le segment O_1O_2 .

c. Déterminer le taux de variation du champ magnétique c'est-à-dire $\frac{\Delta B}{B}$ lorsqu'on passe du point S au point O_1 , ou du point S au point O_2 .

On utilisera dans la suite du problème le champ magnétique ainsi créé au voisinage de S comme champ magnétique uniforme.

II. Trajectoire d'un électron

Soit un trièdre de référence, orthonormé $Oxyz$.

1. On envoie un pinceau d'électrons de vitesse initiale \vec{w}_0 suivant l'axe Oy , dans le champ magnétique uniforme \vec{B} dirigé suivant Oz .

a. Démontrer que la trajectoire des électrons est un cercle de rayon ρ ; en préciser la position.

b. Données numériques :

$$B = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ T} ; w_0 = 3,2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

Calculer ρ et la période du mouvement.

2. Le pinceau d'électrons est envoyé avec la vitesse \vec{w}_0 , située dans le plan yOz , et faisant un angle γ avec Oy . Le champ \vec{B} est toujours suivant Oz . (cf. figure 6).

a. Montrer que la trajectoire des électrons est une hélice qui s'enroule sur un cylindre de base circulaire. En préciser la position.

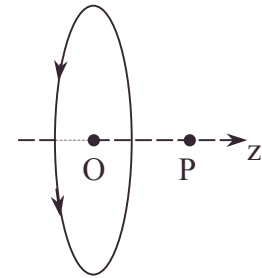


Figure 4

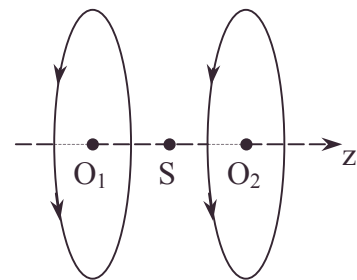


Figure 5

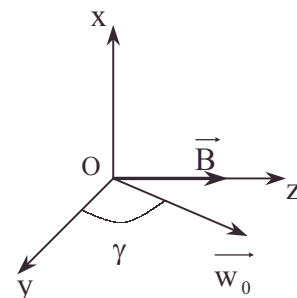


Figure 6

b. Avec les données numériques précédentes et la valeur de $\gamma = 10^\circ$, calculer le rayon ρ' du cercle de base du cylindre et le pas de l'hélice.

INA ; Durée : 1h30

Corrigé

I.1. Le P.F.D. s'écrit $m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = m\vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v}$.

a. Projetons sur l'axe des x orienté par \vec{g} :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta}{m}rv = g ; \text{ or } m = \mu \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow v = \frac{2\pi r^2 g}{9\eta} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{2\mu r^2}{9\eta}.$$

b. $t \rightarrow \infty ; v_\ell = \frac{2\mu r^2 g}{9\eta}$; A.N. : $v_\ell = 0,5 \text{ mm.s}^{-1}$, $\tau = 5.10^{-5} \text{ s}$.

c. $v = \frac{999}{1000} v_\ell$ pour $t_1 = \tau \ln 1000 = 6,91\tau$; AN : $t_1 = 3,45.10^{-4} \text{ s}$.

On mesure donc classiquement v_ℓ car on n'a pas accès à $v(t)$ sans capteur de vitesse lente de constante de temps inférieure à $t_1/10$ par exemple.

2. Le P.F.D. s'écrit : $m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = m\vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v} + q\vec{E}$ avec $E_x = \frac{U}{e}$; on obtient en projection : $\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta v}{2\pi r^2} = g + \frac{qU}{em}$.

a. La solution particulière peut être nulle si le second membre est nul, soit :

$$q = -\frac{mge}{U} = -\frac{4}{3} \frac{\mu\pi r^3}{U} ge ; \text{ AN : } q = -1,60.10^{-19} \text{ C}.$$

b. La vitesse limite

$$v'_\ell = \frac{2\mu r^2}{9\eta} g \left(1 + \frac{3q'U}{4\pi r^3 \mu ge}\right) = \tau g \left(1 + \frac{3q'U}{4\pi r^3 \mu ge}\right) \Rightarrow q' = \left(-\frac{v'_\ell e}{\tau g} + 1\right).q.$$

On prend $v'_\ell = -4,9.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ AN ; $q' = -3,20.10^{-19} \text{ C}$.

c. Il s'agit bien des multiples simples de la charge de l'électron : les rayons X ont arraché 1 ou 2 électrons selon le cas. L'expérience concorde avec la théorie de l'ionisation.

II.1. Ecrivons la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv^2 + q(0 - V) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} ; \text{ A.N. : } v = 7,6.10^5 \text{ m.s}^{-1}.$$

2. $U' = RI \Rightarrow I = \frac{U'}{R}$; AN : $I' = 10^{-13} \text{ A}$.

Les électrons vont de N à M pour neutraliser les charges des H^+ qui arrivent au nombre de $\frac{I'}{e} = 6,25.10^6$ particules/s.

3. Soit q la charge du conducteur D : $q = CV_M = CU'$ car $V_N = 0$. La charge se conserve : $\frac{dq}{dt} = i_0 - \frac{U'}{R} \Rightarrow C \frac{dU'}{dt} = i_0 - \frac{U'}{R}$ ainsi $\frac{dU'}{dt} + \frac{U'}{RC} = \frac{i_0}{C}$; $U' = R i_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

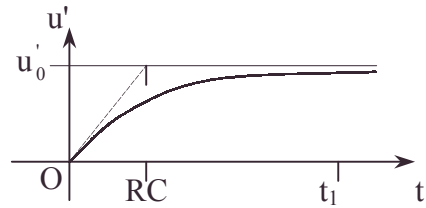
• conservation de la charge, conservation de l'énergie, graphe, P.F.D.

A.N. : $\tau = RC = 10^{-2} \text{ s}$; $U_0' = 10^{-2} \text{ V}$.

On ne tient pas compte d'un retard éventuel des électrons, appelés par l'arrivée des H^+ ; on fait un bilan dans l'approximation des régimes quasi stationnaires ARQS.

La limite est atteinte à 1% près quand

$$10^{-2} = e^{-\frac{t_1}{RC}} \Rightarrow t_1 = RC \ln 100 = 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$



III.1. $\vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}_0 = -q \frac{dV}{dx} \vec{x}$; multiplions par \vec{y} : $f_y = 0 = m \frac{dv_y}{dt}$.

v_y se conserve : $v_y = u \sin \alpha = u_0 \sin \alpha_0 \quad \forall \alpha(x)$.

2. Ecrivons la conservation de l'énergie mécanique :

$$E = \frac{1}{2} m u^2 - eV = \frac{1}{2} m u_0^2 - eV_0 \Rightarrow u = \sqrt{u_0^2 + \frac{2e}{m}(V - V_0)}.$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{u_0 \sin \alpha_0}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2e}{m}(V - V_0)}} \text{ et pour } V = V_1 \text{ et } V_0 = 0,$$

$$\text{on trouve } \sin \alpha_1 = \frac{u_0 \sin \alpha_0}{\sqrt{\frac{2e}{m} V_1 + u_0^2}}.$$

3. Dans la formule précédente de $\sin \alpha$: $u_0^2 + \frac{2e}{m}(V - V_0) \approx \frac{2e}{m}(V - 0)$ si $u_0^2 \ll \frac{2e}{m} V$,

cf. faible vitesse. Alors, $\sqrt{V} \sin \alpha = \sqrt{\frac{m}{2e}} u_0 \sin \alpha_0$.

4.a. Si $V_0 = 0$; $\frac{1}{2} m u_0^2 = E_0 = e "V_{-1}"$ avec $"V_{-1}" = 1 \text{ V} \Rightarrow u_0 = \sqrt{\frac{2e}{m} "V_{-1}"}$.

A.N. : $u_0 = 6 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$.

Il suffit de pouvoir négliger $\frac{1}{2} m u_0^2$ devant eV_1 , ce qu'on peut faire car on néglige légitimement 1 devant 900 (e étant le coefficient multiplicatif des potentiels).

b. $\sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{m u_0^2}{eV_2}} \sin \alpha_0$; AN : $\alpha_2 = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,96^\circ$.

L'angle est faible (cf. approximation de Gauss).

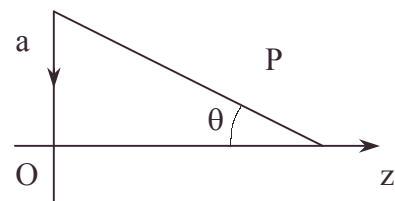
B.I.1. Appliquons la formule du champ créé par une

spire sur son axe : $B_z(P) = \frac{\mu_0 N I}{2a} \sin^3 \theta$.

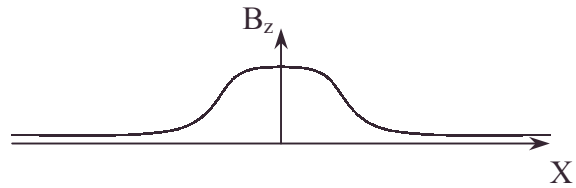
a. Si $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $P \rightarrow O$; $B_z(0) = \frac{\mu_0 N I}{2a}$.

AN : $B_z(0) = 3,14 \text{ mT}$.

b. $B_z(P) = \frac{\mu_0 N I}{2a} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$



b. $B_z(P) = \frac{B_z(0)}{(1+X^2)^{\frac{3}{2}}}$.



X	0	0,5	1
B _z	3,14.10 ⁻³ T	2,25.10 ⁻³ T	1,11.10 ⁻³ T

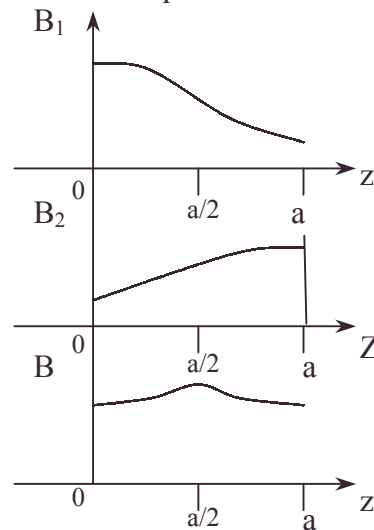
2. $B_z(P) = B_{1z}(P) + B_{2z}(P)$

a.c.

P	O ₁	S	O ₂
B ₁	3,14.10 ⁻³ T	2,25.10 ⁻³ T	1,11.10 ⁻³ T
B ₂	1,11.10 ⁻³ T	2,25.10 ⁻³ T	3,14.10 ⁻³ T
B	4,25.10 ⁻³ T	4,50.10 ⁻³ T	4,25.10 ⁻³ T
ΔB/B	-0,55	0	-0,55

B est constant à 5% près.

b.



II.1. Le P.F.D. s'écrit :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = q \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B} = m \overrightarrow{\tau} \frac{dv}{dt} + mn \frac{v^2}{R}.$$

$\overrightarrow{\tau}$ = vecteur unitaire tangent.

\overrightarrow{n} = vecteur unitaire normal.

R = rayon de courbure.

$$\overrightarrow{V} = v \overrightarrow{\tau}.$$

a. Multiplions par $\overrightarrow{\tau}$: $m \frac{dv}{dt} + 0 = q(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}) \frac{\overrightarrow{V}}{v} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = w_0.$

Multiplions par \overrightarrow{B} : $m \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{B} = q(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{B} = 0.$

\overrightarrow{a} reste dans le plan orthogonal à \overrightarrow{B} depuis l'instant $t = 0.$

\overrightarrow{V} reste donc dans le plan orthogonal à \overrightarrow{B} vu $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{w_0} + \int_0^t \overrightarrow{a} dt$ $\overrightarrow{w_0} \perp \overrightarrow{B}.$

\overrightarrow{OM} reste donc dans le plan orthogonal à \overrightarrow{B} car $\overrightarrow{OM} = \int_0^t \overrightarrow{V} dt.$

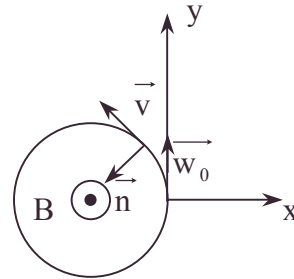
Multiplions par \vec{n} , appartenant au plan du mouvement, orthogonal à \vec{B} :

$$m \frac{v^2}{R} = q (\vec{V} \wedge \vec{B}) \vec{n} = -qVB \text{ vu la figure.}$$

$\rho = R = -\frac{mw_0}{qB}$: la trajectoire est un cercle de rayon ρ ,

(seule courbe plane de rayon de courbure constant).

Ce cercle est centré en $x = -\rho$ pour que \vec{f} soit centripète et \vec{w}_0 tangent.



b.α. AN : $\rho = 4.10^{-2} \text{ m}$.

$$\beta. T.w_0 = 2\pi\rho \Rightarrow T = \frac{2\pi\rho}{w_0} = \frac{2\pi m}{qB} \text{ AN : } T = 7,85.10^{-9} \text{ s.}$$

$$2. \text{ Le P.F.D. s'écrit d'une manière identique : } m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = q \vec{V} \wedge \vec{B} = m \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + m \vec{n} \frac{v^2}{R}.$$

a. Les projections seront donc les mêmes formellement qu'en **II.1.** : les conditions initiales de vitesse seules différentes, $v_{0y} = w_0, v_{0z} = 0$ remplacées par $v_{0y} = w_0 \cos \gamma, v_{0z} = w_0 \sin \gamma$.

Le mouvement en projections Oxy est un cercle de rayon $\rho' = \frac{-mw_0 \cos \gamma}{qB} = \rho \cos \gamma$ centré en O' avec $x_{O'} = -\rho'$.

Le mouvement selon Oz obéit à $m\ddot{z} = 0$ vu l'équation vectorielle $\dot{z} = w_0 \sin \gamma$ et $z = w_0 \sin \gamma t$. On a bien une hélice d'axe O'z, de pas $h' = w_0 \sin \gamma T'$ (T' la période)

$$h' = 2\pi\rho' \sin \gamma = -\frac{\pi m w_0}{qB} w_0 \sin 2\gamma.$$

b. AN : $\rho' = 0,0394 \text{ m}$; $h' = 0,043 \text{ m}$; h de l'ordre de ρ' et ρ .

1.2.3. Filtre de vitesse

Dans tout le problème les lois de la mécanique classique restent valables.

1. Action d'un champ électrique uniforme

Une particule de masse m , de charge q et de vitesse initiale nulle, issue d'un point O, est accélérée sous une différence de potentiel V établie entre deux grilles planes parallèles, distantes de ℓ (Figure 1).

Le point O est situé sur la grille au potentiel nul.

Calculer la vitesse v de la particule au moment de son passage en A à travers la deuxième grille et la durée θ du trajet entre O et A.

Quels sont les signes respectifs possibles de q et V ?

Application numérique :

Calculer v et θ dans les deux cas suivants :

a. $V = 100 \text{ V}$; $q = -1,60.10^{-19} \text{ C}$; $m = 9,11.10^{-31} \text{ kg}$.

b. $V = -3000 \text{ V}$; $q = 1,60.10^{-19} \text{ C}$; $m = 6,64.10^{-26} \text{ kg}$.

On prendra $\ell = 5,00.10^{-2} \text{ m}$.

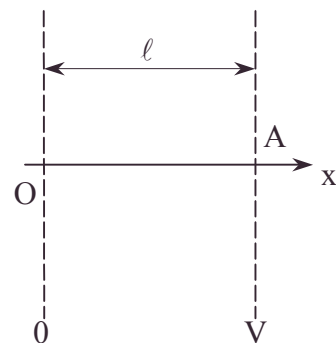


Figure 1

• développement au premier ordre ou plus, hélice, trajectoire

2. Action d'un champ électrique uniforme

Une particule de masse m et de charge q est lancée avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , en un point O situé entre les armatures d'un condensateur plan (Figure 2).

\vec{v}_0 est situé dans un plan perpendiculaire aux armatures et fait un angle α avec la direction du champ électrique \vec{E} .

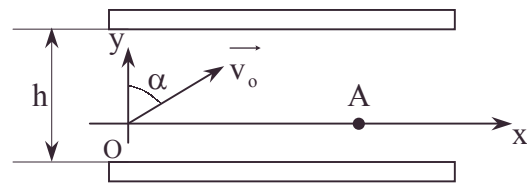


Figure 2

La totalité de la portion de trajectoire étudiée est située à l'intérieur du condensateur.

a. La différence de potentiel V et la distance h entre les armatures ont été choisies de manière que la trajectoire recoupe l'axe Ox , perpendiculaire à \vec{E} , en un point A . Calculer l'abscisse du point A . Indiquer les signes respectifs possibles de q et V .

b. Montrer que pour un pinceau de faible ouverture $\Delta\alpha$, constitué de particules identiques issues du même point O et lancées avec une vitesse de norme v_0 au voisinage d'une direction particulière $\alpha = \alpha_0$, les trajectoires se recoupent toutes en un même point d'abscisse x_0 . Calculer α_0 et x_0 .

c. Le pinceau de particules lancées en O , au voisinage de α_0 , est constitué maintenant de deux types de particules de masse m_1 et m_2 , de même charge q et de vitesses initiales de norme v_0 . Calculer v_0 pour que les intersections A_1 et A_2 soient distantes de 1 cm dans le cas où les particules sont des ions argon, portant tous la même charge $q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et obtenues à partir des deux isotopes de l'argon de nombre de masse 38 et 40. On donne $V = 1000 \text{ V}$, $h = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.

On rappelle la valeur du nombre d'Avogadro : $\mathcal{M} = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$.

3. Action d'un champ magnétique uniforme

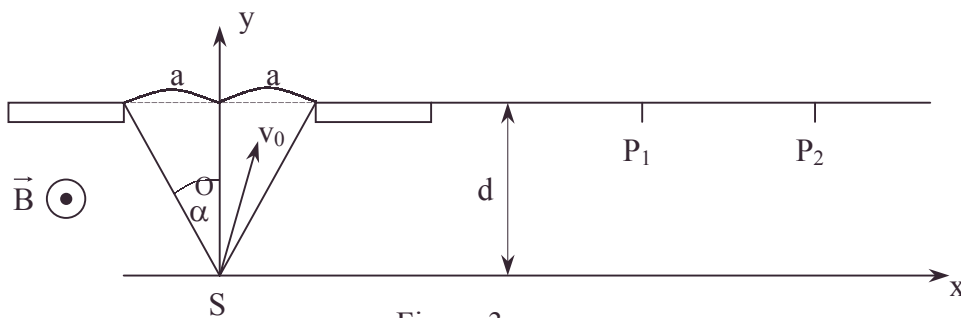


Figure 3

a. Une particule M de masse m et de charge q est lancée, en un point O , à l'instant d'origine, avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , dans une région où règne un champ magnétique constant et uniforme \vec{B} . On choisit un repère orthonormé $Oxyz$ tel que \vec{B} soit parallèle à Oz et on désigne par \dot{x}_0 , \dot{y}_0 et \dot{z}_0 les composantes de la vitesse initiale selon les trois axes. Déterminer les coordonnées x , y , z de la particule M en fonction du temps.

Donner l'équation explicite de la trajectoire de la projection de M sur le plan xOy et décrire la trajectoire de M . Calculer la distance p séparant O du point où la trajectoire recoupe l'axe Oz pour la première fois. On peut poser $\omega = \frac{qB}{m}$.

b. Soit une source filiforme rectiligne S , parallèle au champ magnétique \vec{B} uniforme et constant régnant dans tout l'espace. Cette source émet des particules identiques, de masse m et de charge q positive.

Les vitesses initiales sont perpendiculaires à \vec{B} et de mêmes normes v_0 (Figure 3). La fente source S est parallèle à la grande médiane d'une ouverture rectangulaire de largeur $2a$, équidistante de ses bords et située à la distance d de son plan. On désigne par 2α l'ouverture du pinceau utile.

Déterminer en fonction de d , α et $R = \frac{v_0}{\omega}$, la distance P_1P_2 séparant les deux droites parallèles à S entre lesquelles se trouvent les intersections, avec le plan de l'ouverture rectangulaire, des trajectoires de toutes les particules.

On pourra utiliser, soit une méthode analytique, soit une méthode géométrique.

Que devient la position de P_1P_2 lorsque l'angle α est petit et R très supérieur à d ?

Application numérique : calculer P_1P_2 dans le cas particulier suivant :

$$d = 2,00 \cdot 10^{-2} \text{ m} ; \quad m = 6,64 \cdot 10^{-26} \text{ C} ; \quad v_0 = 4,91 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$a = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; \quad q = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; \quad B = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ T}.$$

Le dispositif étudié permet de focaliser les particules émises par S .

En quoi consiste cette focalisation ?

c. Une source ponctuelle S émet des particules électrisées ayant toutes même masse m , même charge q mais des vecteurs vitesse différents, d'orientations différentes par rapport à un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant et de normes différentes (Figure 4).

Un écran P orthogonal à la direction de \vec{B} est placé à la distance d de S .

Cet écran est percé d'une fente F très fine, en forme de couronne circulaire de rayon r .

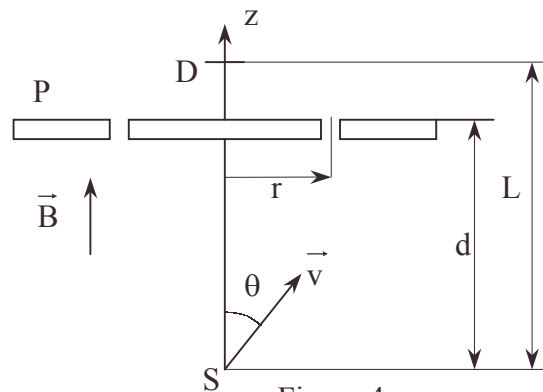


Figure 4

On place un détecteur de particules D , sur l'axe du dispositif, à la distance L de S . La partie active de ce détecteur est assimilée à un point porté par l'axe des x ($L > d$).

Montrer que ce dispositif permet de recueillir en D les particules émises en S , avec des vitesses de normes v déterminées, dans des directions θ déterminées.

Calculer les valeurs de v et θ en fonction de L , d , r , m , q et B et d'un entier positif n .

Application numérique : calculer v et θ pour $n = 1$ et :

$$d = 3,00 \cdot 10^{-1} \text{ m} ; \quad m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} ; \quad B = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$L = 4,50 \cdot 10^{-1} \text{ m} ; \quad q = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; \quad r = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

4. Action d'un champ électrique et d'un champ magnétique uniformes et parallèles

Un dispositif convenable crée, dans une région de l'espace localisée entre deux plans Π et Π' parallèles et distants de ℓ , un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} , uniformes et constants, parallèles à Π et Π' .

Un écran P également parallèle à Π et Π' est placé à la distance D de Π' (Figure 5).

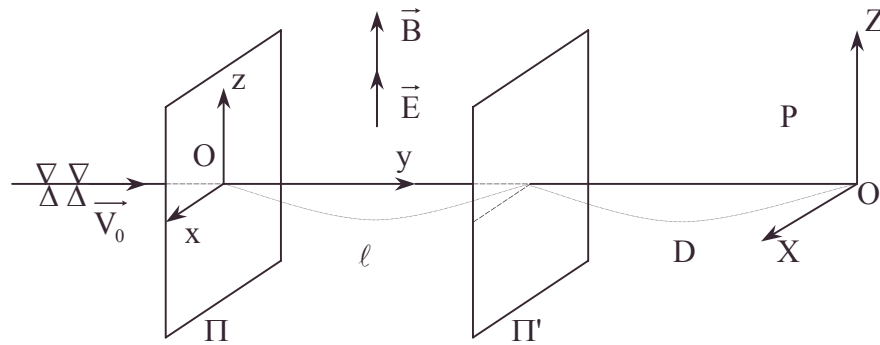


Figure 5

a. Un faisceau parallèle, très fin, de particules positives de même masse m , de même charge q et de même vitesse initiale \vec{v}_0 orthogonale à \vec{E} et \vec{B} pénètre entre Π et Π' .

On choisit un trièdre orthonormé $Oxyz$ dont l'origine O est l'intersection du faisceau avec Π , tel que Ox et Oz soient dans le plan Π et que Oz soit parallèle à la direction commune de \vec{E} et \vec{B} . Donner les expressions des coordonnées d'une particule ayant traversé le plan Π à l'instant $t = 0$, en fonction du temps, entre Π et Π' .

Quelles sont les coordonnées x_s et z_s de la particule et les composantes de son vecteur vitesse \dot{x}_s, \dot{y}_s et \dot{z}_s dans le plan Π' ?

Un système d'axes $(O'X, O'Z)$ dont l'origine O' est sur Oy , est tracé dans le plan de l'écran P , de telle manière que ces deux axes soient respectivement parallèles à Ox et Oy . Donner les coordonnées X et Z du point d'impact des particules dans le plan P .

On suppose que les deux inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\frac{mV_0}{qB} \gg \ell \text{ et } \frac{mV_0^2}{qE} \gg \ell$$

b. Le faisceau incident contient des particules de charges massiques différentes et de vitesses différentes. Montrer que les particules de même charge massique ont leurs points d'impact situés sur une parabole du plan P . Donner l'équation de la parabole. Montrer que les particules ayant des vitesses de même norme ont leurs points d'impact situés sur une droite du plan P .

Déterminer l'équation de cette droite.

5. Action d'un champ électrique et d'un champ magnétique uniformes et perpendiculaires

Une particule M de masse m et de charge q positive se trouve à l'instant $t = 0$ en un point O , dans une région où règne un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} uniformes constants et perpendiculaires entre eux. Pour décrire le mouvement de la particule on choisit un repère orthonormé $Oxyz$ tel que Ox soit parallèle à \vec{B} et de même sens et Oz soit parallèle à \vec{E} et de même sens (Figure 6).

a. La vitesse initiale de la particule est nulle.

Donner les coordonnées x, y, z de la particule en fonction du temps. Préciser le plan de la trajectoire et la représenter graphiquement.

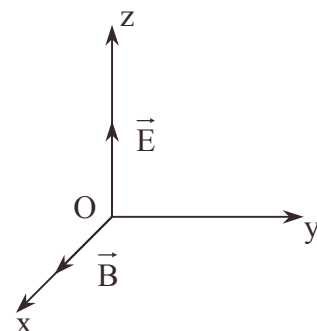


Figure 6

b. La particule est lancée avec une vitesse initiale \vec{v}_0 perpendiculaire à \vec{E} et à \vec{B} , dans le sens des y positifs. Pour quelle valeur particulière de la norme V_0 de \vec{v}_0 la particule décrira-t-elle une trajectoire rectiligne confondue avec l'axe des y ?

Expliquer comment ce dispositif peut servir de filtre de vitesse .

ENS ; Durée : 3h

Corrigé

1.a. Ecrivons la conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}mv^2 + qV = 0$.

$$v = \sqrt{-\frac{2qV}{m}} \Rightarrow -qV > 0 \text{ donc } q \text{ et } V \text{ de signes contraires.}$$

b. $E_x = -\frac{V}{\ell}$: le P.F.D. s'écrit : $m\ddot{x} = -\frac{qV}{\ell} \Rightarrow m\dot{x} = -\frac{q}{\ell}Vt$, et en intégrant une seconde fois, $mx = -\frac{qVt^2}{2\ell}$.

$$\text{Ainsi : } \theta = \sqrt{\frac{2m\ell^2}{-qV}} ; q \text{ et } V \text{ sont de signes contraires.}$$

c. AN : **a.** $v = 5,93.10^6 \text{ m/s} ; \theta = 1,69.10^{-8} \text{ s.}$

b. $v = 3,25.10^7 \text{ m/s} ; \theta = 3,08.10^{-9} \text{ s.}$

2.a. Le P.F.D. s'écrit : $m\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = q\vec{E}$, soit $m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = V_0 \sin \alpha \Rightarrow x = V_0 \sin \alpha t$

$$m\ddot{y} = -\frac{qV}{h} \Rightarrow m\dot{y} = -q\frac{Vt}{h} + mV_0 \cos \alpha \Rightarrow my = -\frac{qVt^2}{2h} + mV_0 \cos \alpha t ; \text{ on a } y = 0.$$

$$-\frac{qV}{2h}t\left(t - \frac{2mV_0h \cos \alpha}{qV}\right) ; t = 0 \text{ étant exclus, reste } t = \frac{2mV_0h \cos \alpha}{qV}, \text{ d'où :}$$

$$x_A = \frac{2mV_0^2h}{qV} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{mV_0^2}{qV} h \sin 2\alpha.$$

Il faut dans le système proposé où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pour qu'il y ait retour,

$$E_y < 0 \Rightarrow V > 0 \text{ et } q > 0 \text{ pour } x_A > 0.$$

b. De $x_A = \frac{mV_0^2}{qV} h \sin 2\alpha$, on tire $\Delta x_A = \frac{2mV_0^2h}{qV} \cos 2\Delta\alpha$ et $\Delta x_A = 0$ avec $\Delta\alpha \neq 0$

pour $\cos 2\alpha_0 = 0$ soit $2\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, soit $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{mV_0^2h}{qV}$.

c. De $x_0 = \frac{mV_0^2h}{qV}$ on tire $\Delta x_0 = \Delta m \frac{V_0^2h}{qV} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{qV\Delta x_0}{h\Delta m}}$.

A.N. : $\Delta m = \frac{2.10^{-3}}{6,02.10^{23}} \text{ kg} \Rightarrow V_0 = 69397 \text{ m.s}^{-1}.$

$$\text{3.a. } m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = q \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B} \quad \text{donne en projetant} \quad m \ddot{x} = q \dot{y} B \quad (1)$$

$$m \ddot{y} = -q \dot{x} B \quad (2)$$

$$m \ddot{z} = 0 \quad (3)$$

$$\alpha. \text{ Intégrons une fois : } (1') \quad m \dot{x} = qyB + m \dot{x}_0$$

$$(2') \quad m \dot{y} = -qx B + m \dot{y}_0$$

$$(3') \quad \dot{z} = \dot{z}_0 \Rightarrow z = \dot{z}_0 t$$

$$\text{Remplaçons } y \text{ tiré de } (1') \text{ dans } (2') : \frac{m^2}{qB} \ddot{x} = -qx B + m \dot{y}_0.$$

$$\text{Remplaçons } x \text{ tiré de } (2') \text{ dans } (1') : -\frac{m^2}{qB} \ddot{y} = qy B + m \dot{x}_0.$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega \dot{y}_0 ; \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -\omega \dot{x}_0 .$$

$$x = \frac{\dot{y}_0}{\omega} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t ; \quad y = -\frac{\dot{x}_0}{\omega} + A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t .$$

$$\dot{x} = -A_1 \omega \sin \omega t + B_1 \omega \cos \omega t ; \quad \dot{y} = -A_2 \omega \sin \omega t + B_2 \omega \cos \omega t .$$

Les conditions initiales de position et de vitesse s'écrivent :

$$0 = \frac{\dot{y}_0}{\omega} + A_1 ; \quad 0 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega} + A_2 .$$

$$\dot{x}_0 = B_1 \omega ; \quad \dot{y}_0 = B_2 \omega .$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} x = \frac{\dot{y}_0}{\omega} - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{\dot{y}_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t . \\ y = -\frac{\dot{x}_0}{\omega} + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t = -\frac{\dot{x}_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t . \\ z = \dot{z}_0 t . \end{cases}$$

β . Eliminons t grâce à $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$:

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} &= -\frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t . \\ y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} &= \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t . \end{aligned} \right\} \quad \text{système de Cramer en } \cos \omega t, \sin \omega t .$$

$$\Rightarrow \cos \omega t = - \frac{\omega^2 \begin{vmatrix} \dot{x} - \frac{\dot{y}_0}{\omega} & \dot{x}_0 \\ y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} & \dot{y}_0 \end{vmatrix}}{\dot{y}_0^2 + \dot{x}_0^2}; \quad \sin \omega t = - \frac{\omega^2 \begin{vmatrix} -\frac{\dot{y}_0}{\omega} & x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \\ \dot{x}_0 & y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{vmatrix}}{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}$$

$$\left[\frac{\dot{y}_0}{\omega} \left(x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \right) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \left(y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \right]^2 + \left[\frac{\dot{y}_0}{\omega} \left(y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \left(x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \right) \right]^2 = \left(\frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\omega^2} \right)^2$$

$$\left[\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2 \right]^2 = \left(x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2 \left[\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 \right] + \left(y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 \left[\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2 \right] + \dots$$

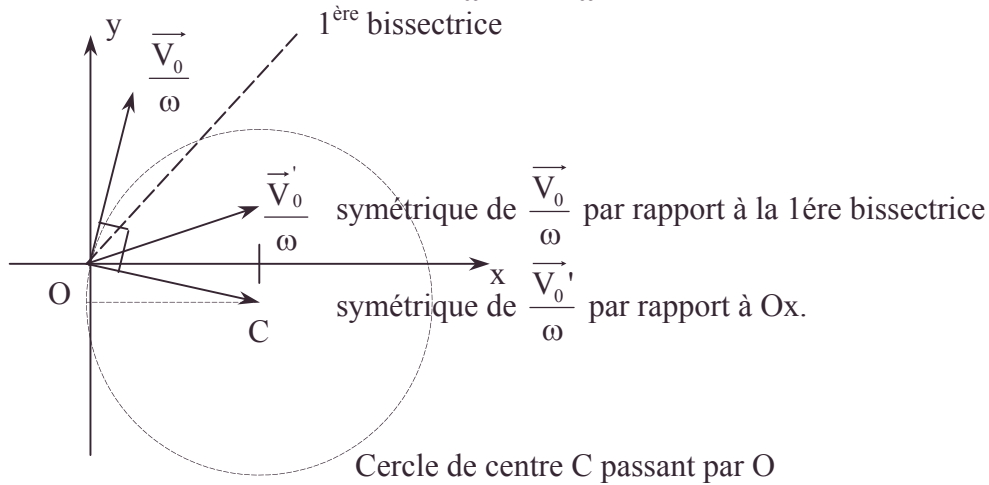
$$\dots 2 \left(x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \right) \left(y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \underbrace{\left[\frac{\dot{x}_0 \dot{y}_0}{\omega^2} - \frac{\dot{x}_0 \dot{y}_0}{\omega^2} \right]}_{=0}$$

Il reste, en posant $X = x - \frac{\dot{y}_0}{\omega}$; $Y = y + \frac{\dot{x}_0}{\omega}$, $X^2 + Y^2 = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2$,

c'est-à-dire un cercle de centre C :

$$x_c = \frac{\dot{y}_0}{\omega} ; y_c = -\frac{\dot{x}_0}{\omega} \text{ et de rayon } R = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2} = \frac{|\vec{V}_0|}{\omega}.$$

$$\vec{V}_0 \text{ est tangentiel en O : } \vec{OC} \cdot \vec{V}_0 = \frac{\dot{x}_0 \cdot \dot{y}_0}{\omega} - \frac{\dot{x}_0 \cdot \dot{y}_0}{\omega} = 0.$$



γ. La trajectoire coupe Oz si $x = 0$ et $y = 0$ soit après avoir décrit une circonférence entière, soit après une durée d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\Rightarrow p = z_0 \frac{2\pi}{\omega}$.

• trajectoire

Précisons les coordonnées :

$$\vec{V}_1 \begin{vmatrix} -V_0 \sin(\alpha + \beta) = \dot{x}_{0_1} \\ + V_0 \cos(\alpha + \beta) = \dot{y}_{0_1} \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{V}_2 \begin{vmatrix} V_0 \sin(\alpha - \beta) = \dot{x}_{0_2} \\ V_0 \cos(\alpha - \beta) = \dot{y}_{0_2} \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{SA}_1 \begin{vmatrix} -\alpha \tan \alpha \\ d \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{SA}_2 \begin{vmatrix} \alpha \tan \alpha \\ d \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ces cercles ont pour équations (cf. 3.a.) :

$$\textcircled{1} \quad \left(x - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) \right)^2 + \left(y - \frac{V_0}{\omega} \sin(\alpha + \beta) \right)^2 = R^2.$$

$$\textcircled{2} \quad \left(y - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha - \beta) \right)^2 + \left(x + \frac{V_0}{\omega} \sin(\alpha - \beta) \right)^2 = R^2.$$

A_1 et P_1 vérifient $\textcircled{1}$.

$$\textcircled{1} \quad \left(-d \tan \alpha - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) \right)^2 + \left(d - \frac{V_0}{\omega} \sin(\alpha + \beta) \right)^2 = R^2.$$

$$\Rightarrow \left(-d \tan \alpha - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) \right)^2 = \left(x_1 - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) \right)^2$$

$$\textcircled{1}'' \quad \left(x_1 - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) \right)^2 + \left(d - \frac{V_0}{\omega} \sin(\alpha + \beta) \right)^2 = R^2.$$

$$\Rightarrow x_1 - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) = \pm \left(-d \tan \alpha - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) \right).$$

Le signe + donnerait $x_1 = -d \tan \alpha$: impossible,

$$\Rightarrow x_1 = - \left(-d \tan \alpha - \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta) \right) + \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta);$$

$$x_1 = d \tan \alpha + 2 \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha + \beta).$$

De même, A_2 et P_2 vérifient $\textcircled{2}$; la même démarche permet d'obtenir :

$$x_2 = -d \tan \alpha + 2 \frac{V_0}{\omega} \cos(\alpha - \beta).$$

$$\text{Aussi } x_1 - x_2 = 2d \tan \alpha + 2 \frac{V_0}{\omega} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) ;$$

$$x_1 - x_2 = 2d \tan \alpha - 4 \frac{V_0}{\omega} \sin \alpha \sin \beta ;$$

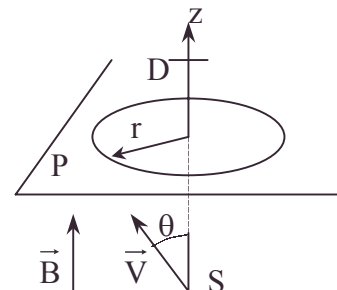
$$x_1 - x_2 = 2d \tan \alpha - 4 \frac{V_0}{\omega} \sin \alpha \frac{d}{2 \frac{V_0}{\omega} \cos \alpha} = 0.$$

Les particules émises en S en $y = 0$ passent toutes en P, où $y_p = d$ et $x_p = d \tan \alpha + 2R(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$.

Il y a focalisation.

$$x = d \tan \alpha + 2R \left(\cos \alpha \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2 \cos^2 \alpha}} - \frac{d}{R} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Si $R \gg A$ et $\alpha \rightarrow 0$: $x_p \rightarrow 2R$.



• focalisation de faisceaux de particules, hélice, trajectoire

$$\text{c. } m\vec{a} = q\vec{V} \wedge \vec{B} ; m a_z = 0 \Rightarrow V_z = \text{cste} = V \cos \theta .$$

$$m\vec{a} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m V^2(t) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \text{cste} .$$

Adoptons le repère R_1 en translation rectiligne uniforme de vitesse $V \cos \theta \vec{z}$ d'origine O ,

$$m\vec{a}_1 = q\vec{V}_1 \wedge \vec{B} \text{ avec } |\vec{V}_1| = v \sin \theta ; \vec{v}_1 \perp \vec{B} \forall t .$$

Soit dans le repère de Frenet :

$$m \frac{V_1^2}{R} \vec{n} + \underbrace{m \dot{V}_1}_{=0} \vec{\tau} = q \vec{V}_1 \wedge \vec{B} .$$

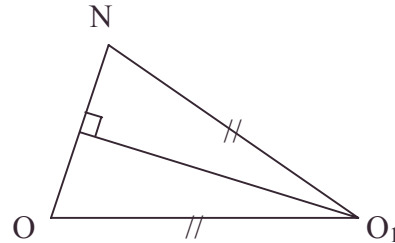
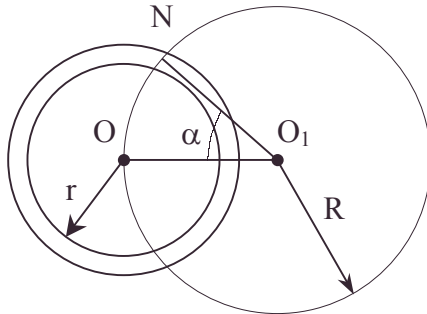
$$\text{Prenons le module : } m \frac{V_1^2}{R} = q |\vec{V}_1 \vec{B}| \Rightarrow R = \frac{m V_1}{|q \vec{B}|} = \frac{m V \sin \theta}{|q \vec{B}|} .$$

La trajectoire orthogonale à \vec{B} dans R_1 est le cercle de centre O_1 , rayon R et une vitesse angulaire $\omega = \frac{v_1}{R} = \frac{|q \vec{B}|}{m}$.

- Si la particule passe par la fente F , la particule venant de S atteindra D situé au-dessus de S par une trajectoire hélicoïdale régulière (cf. composition translation, rotation) à condition que L corresponde à un nombre entier de pas.

$$L = n \frac{v \cos \theta}{\omega} 2\pi = 2\pi n \frac{mv}{qB} \cos \theta . \quad \textcircled{1} \quad n \in \mathbb{N}^+ .$$

- Vue de dessus de la fente circulaire et de la trajectoire.



La particule passera par la fente circulaire en N si l'angle de rotation α est adapté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \pm \omega t \quad \text{avec } t = \frac{d}{v \cos \theta} \\ (\text{modulo } 2\pi \quad \text{et } v \cos \theta \text{ quantifié (cf.(1)).}) \end{array} \right\} \text{ soit } \alpha = \pm \frac{2\pi n d}{L} , \quad \text{modulo } 2\pi$$

$$\text{et si la distance } ON = 2R \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = r ;$$

$$\text{Finalement, } r = 2 \frac{m V \sin \theta}{|q \vec{B}|} \left| \sin \frac{\pi n d}{L} \right| \text{ et vu } \textcircled{1} \text{ on tire :}$$

$$v = \frac{|q| B}{2m} \sqrt{\frac{L^2}{\pi^2 n^2} + \frac{r^2}{\sin^2 \pi n \frac{d}{L}}} ; \tan \theta = \frac{n\pi}{\left| \sin n \pi \frac{d}{L} \right|} \frac{r}{L} .$$

$$AN : n = 1 \text{ ou } v = 6,6 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1} \ll c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} .$$

- condition initiale, développement au premier ordre ou plus, trajectoire

$$\theta = 17,9^\circ.$$

4.a. $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ s'écrit :

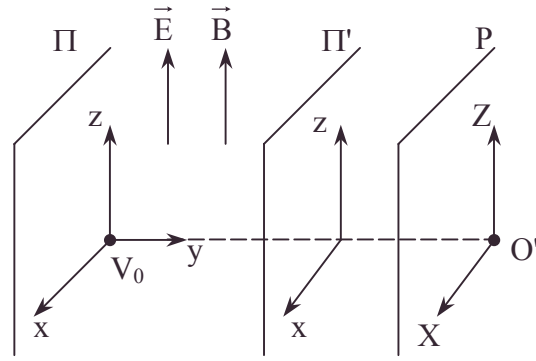
$$m\ddot{x} = q\dot{y}B ; m\ddot{y} = -q\dot{x}B ; m\ddot{z} = qE.$$

Posons $J = x + iy$:

$$\ddot{J} + i\frac{qB}{m}\dot{J} = 0 \Rightarrow \dot{J} = iv_0 e^{-i\frac{qB}{m}t},$$

$$\Rightarrow J = \frac{mV_0}{qB} \left(1 - e^{-i\frac{qB}{m}t} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{mV_0}{qB} \left(1 - \cos \frac{qB}{m}t \right) ; y = \frac{mV_0}{qB} \sin \frac{qB}{m}t ; z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2.$$



α. La particule atteint Π' soit $y = \ell$ pour $t = \frac{m}{qB} \arcsin \frac{qBm}{mV_0} \ell, \Rightarrow :$

$$x_s = \frac{mV_0}{qB} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q^2 B^2 \ell^2}{m^2 V_0^2}} \right) ; y_s = \frac{1}{2} \frac{mE}{qB^2} \left(\arcsin \frac{qB}{mV_0} \ell \right)^2.$$

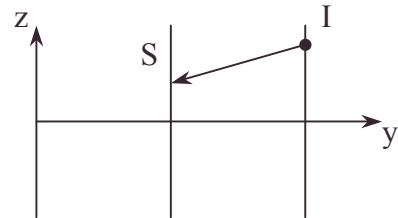
β. $\dot{x} = v_0 \sin \frac{qB}{m}t ; \dot{y} = v_0 \cos \frac{qB}{m}t ; \dot{z} = \frac{qE}{m}t, \Rightarrow$

$$\dot{x}_s = \frac{qB}{m} \ell ; \dot{y}_s = v_0 \sqrt{1 - \frac{q^2 B^2 \ell^2}{m^2 V_0^2}} ; \dot{z}_s = \frac{E}{B} \arcsin \frac{qB}{mV_0} \ell.$$

γ. La trajectoire entre Π' et P est une droite passant par le point (x_s, ℓ, z_s) et parallèle au vecteur vitesse $\left(\dot{x}_s, \dot{y}_s, \dot{z}_s \right)$; elle coupe le plan P, $y = D + \ell$ en :

$$Z - z_s = \frac{dz}{dy} D \text{ soit } Z = z_s + \frac{\dot{z}_s}{\dot{y}_s} D.$$

$$\text{De même, } X = x_s + \frac{\dot{x}_s}{\dot{y}_s} D.$$



On procède au développement limité des termes écrits en α et β vu $\frac{qB}{mV_0} \ell \ll 1$ (l'autre relation ne sert pas de fait) ;

$$X = \frac{qB}{mV_0} \ell \left(D + \frac{\ell}{2} \right) ; Z = \frac{qB}{mV_0^2} \ell \left(D + \frac{\ell}{2} \right).$$

b.α. La charge massique est $\frac{q}{m}$; éliminons V_0 en conservant $\frac{q}{m}$; il vient :

$$Z = \frac{E}{\frac{q}{m} B^2 \ell \left(D + \frac{\ell}{2} \right)} X^2 : \text{une parabole.}$$

β. Éliminons $\frac{q}{m}$ en conservant V_0 : $Z = \frac{E}{BV_0} X$: une droite.

$$5. m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B} \text{ soit } m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ qE \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$$m\ddot{x} = 0 ; m\ddot{y} = +qB\dot{z} ; m\ddot{z} = qE - qB\dot{y} ; \text{ on en tire :}$$

a. Vu les conditions initiales de position et de vitesse :

$$x = 0 ; \dot{y} = \omega z ; \text{ si } \omega = \frac{qB}{m} ; z = -\omega y + \frac{qE}{m} t : \text{ on reporte } z = \frac{\dot{y}}{\omega} ; \text{ on a :}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{qE}{m} \omega t ; y = \frac{qE}{\omega m} t + A \cos \omega t + B \sin \omega t ; \dot{y} = \frac{qE}{m\omega} - A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t.$$

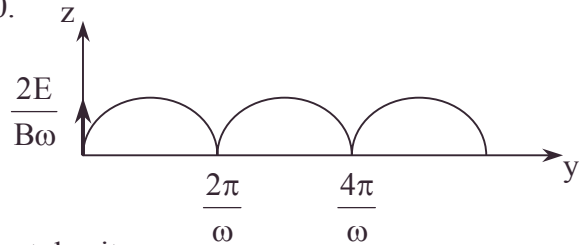
Les conditions initiales de position et de vitesse donnent :

$$0 = 0 + A ; 0 = \frac{qE}{m\omega} + 0 + B\omega \Rightarrow y = \frac{qE}{m\omega} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) \Rightarrow z = \frac{qE}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

On obtient une cycloïde dans le plan $x = 0$.

$$y = \frac{E}{B} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) ; z = \frac{E}{B\omega} (1 - \cos \omega t) ;$$

$$\dot{y} = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) ; \dot{z} = \frac{E\omega}{B} \sin \omega t.$$



b. Vu les conditions initiales de position et de vitesse :

$$x = 0 ; \dot{y} = \omega z + V_0 ; z = -\omega y + \frac{qE}{m} t ; \text{ on reporte } z = \frac{\dot{y} - V_0}{\omega} \text{ et on a :}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{qE}{m} \omega t ; y = \frac{qE}{\omega m} t + A \cos \omega t + B \sin \omega t ; \dot{y} = \frac{qE}{\omega m} - A\omega \sin \omega t + B\omega \sin \omega t.$$

Les conditions initiales de position et de vitesse donnent :

$$0 = 0 + A ; V_0 = \frac{qE}{\omega m} + 0 + B\omega \Rightarrow y = \frac{qE}{\omega m} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t,$$

$$\Rightarrow z = \frac{qE}{\omega^2 m} (1 - \cos \omega t) + \frac{V_0}{\omega} (\cos \omega t - 1).$$

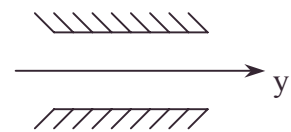
On obtient dans le plan $x = 0$:

$$y = \frac{E}{B} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) + \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{E}{B} t + \left(V_0 - \frac{E}{B} \right) \frac{\sin \omega t}{\omega} ; z = \left(\frac{1 - \cos \omega t}{\omega} \right) \left(\frac{E}{B} - V_0 \right).$$

si $V_0 = \frac{E}{B}$: $y = \frac{E}{B} t$; $z = 0$; la trajectoire est confondue avec l'axe des y .

Ce dispositif peut servir de filtre de vitesse.

Ainsi, un "cylindre" aux parois absorbantes pour ce type de particules ne laissera passer que les particules de vitesse selon Oy , à condition que $V_0 = \frac{E}{B}$.



1.2.4. Spectromètre à électrons

Etude d'un spectromètre cylindrique

Les étudiants sont expressément invités à lire l'ensemble du sujet avant d'aborder l'étude de la partie I dont la résolution est indispensable pour aborder la partie II.

La qualité et la clarté de la rédaction seront appréciées du correcteur. Le non respect des notations de l'énoncé sera pénalisé.

Le problème concerne un spectromètre cylindrique destiné à étudier la répartition en énergie d'électrons émis par une source ponctuelle S.

La figure 1 représente une demi coupe méridienne de l'appareil dont l'allure d'ensemble est représentée sur la figure 2. Les coordonnées cylindriques z et ρ sont comptées à partir de S qui est situé sur l'axe de révolution Sz de l'appareil.

Les électrons émis (masse m , charge $-e$) sont non relativistes. Après avoir traversé les fentes annulaires (O_1) et (O_2), ils sont détectés en un point I de l'axe de révolution ; les trajectoires sont supposées planes et donc méridiennes.

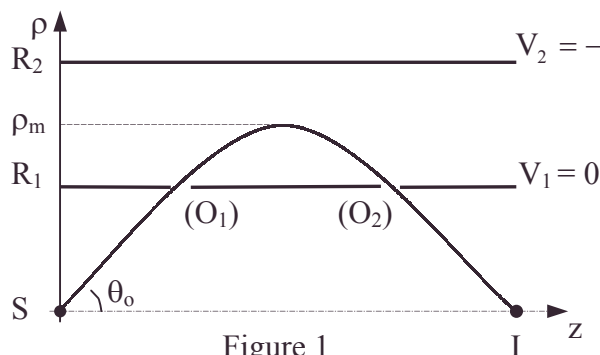


Figure 1

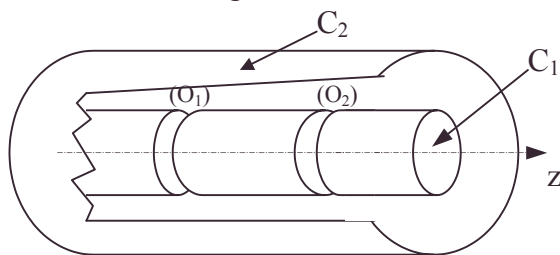


Figure 2

Le potentiel du cylindre C_1 (rayon R_1) est $V_1 = 0$. Le champ électrique est nul à l'intérieur de C_1 . Le cylindre C_1 est entouré par le cylindre C_2 (rayon $R_2 > R_1$) dont le potentiel est $V_2 = -|V_2|$. On néglige les effets perturbateurs des fentes (O_1) et (O_2) sur les champs électriques. Un électron quitte S avec l'énergie cinétique $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$; sa vitesse initiale, de module v_0 , fait avec Sz un angle θ . On appellera θ_0 l'angle correspondant à la partie centrale de la fente (O_1). La différence $|\theta - \theta_0|$ sera toujours considérée comme faible devant θ_0 .

Question préliminaire

Les étudiants sont priés, après une lecture attentive de l'énoncé, de répondre en 12 lignes maximum, à la question suivante, exclusivement qualitative (c.a.d. ne nécessitant aucun calcul) : comment fonctionne effectivement le spectromètre si l'on veut mesurer l'énergie des électrons émis par S ? Sur quels paramètres l'opérateur agit-il ? Quels sont les dispositifs mécaniques essentiels à prévoir pour faire varier les performances de l'appareil ?

I. Etude des trajectoires électroniques

I.1.a. Déterminer le champ électrique $E(\rho)$ et le potentiel $V(\rho)$ entre les cylindres 1 et 2 ; ρ désigne la distance à l'axe commun des deux cylindres : $R_1 \leq \rho \leq R_2$.

b. Vérifier que les valeurs de $V(R_1)$ et $V(R_2)$ sont bien conformes à celles imposées par l'énoncé et tracer le graphe de ces fonctions.

2.a. Ecrire la conservation de l'énergie en fonction de e , m , T_0 , $V(\rho)$, v_z et v_ρ , composantes de la vitesse v des électrons suivant z et suivant ρ .

b. Comment varie v_z en fonction du temps t ?

- conditions initiales, conservation de l'énergie, développement au premier ordre ou plus, focalisation, graphe, maximum, paramètre, tension, trajectoire

N.B. On mettra en évidence dans **a.** ci-dessus , puis ci-dessous partout où cela est possible, le paramètre positif sans dimension : $K = \frac{T_o}{e|V_2|} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

3.a. En tenant compte du **2.** et des conditions initiales, déterminer l'équation différentielle du premier ordre **(1)** vérifiée par $\rho(t)$.

b. En déduire l'équation différentielle **(2)** vérifiée par $\rho(z)$, ρ et z désignant les coordonnées de l'électron.

4.a. Comment est défini, dans **(1)** et dans **(2)**, le maximum ρ_m de la trajectoire ?

b. Montrer que ce maximum n'existe physiquement que pour des valeurs $|V_2|$ du potentiel du cylindre 2 supérieures à $|V_s|$. Que se passe-t-il pour des valeurs de $|V_2|$ inférieures à la tension de seuil $|V_s|$?

c. Interpréter de façon simple $|V_s(\theta)|$ et donner la valeur de θ correspondant au maximum de $V_s(\theta)$, dont on précisera l'expression.

5.a. Montrer, à partir de l'équation **(2)**, que $\rho'(z)$ est une fonction monotone de z .

b. En déduire que les trajectoires électroniques n'ont pas de point d'inflexion et tracer leur allure quand le potentiel V_2 varie, les autres paramètres restant fixes.

6.a. Déduire de l'équation **(1)** l'expression, intégrale, du temps τ pendant lequel l'électron se trouve dans l'espace compris entre les cylindres 1 et 2.

On mettra τ sous la forme **(3)** : $v_o \tau = \int_{R_1}^{\rho_m} f(\theta, \rho, K, R_1) d\rho$

b. Pour calculer explicitement τ , effectuer dans **(3)** le changement d'inconnue défini

par $f = \frac{2\sqrt{K}}{x}$, et poser $G = \left[\ln \frac{\rho_m}{R_1} \right]^{\frac{1}{2}}$.

c. Donner l'expression de τ en utilisant l'intégrale $P(u)$ définie par **(4)** :

$$(4) \quad P(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-x^2) dx ; \quad P(u) \rightarrow 1 \text{ quand } u \rightarrow \infty .$$

d. En déduire que la distance $z_o = SI$ entre la source S et l'image I se met sous la forme $z_o = 2R_1(1 + \phi(G)) \cotan \theta$. Donner $\phi(G)$.

e. Montrer physiquement et vérifier sur son expression mathématique que $\phi(G)$ augmente avec G (donc avec ρ_m).

Donner les expressions approchées de $\phi(G)$ quand $G \rightarrow 0$ et quand $G \rightarrow \infty$.

II. Propriétés du spectromètre

1. Focalisation

Dans toute la mesure du possible, la distance SI doit être indépendante des variations de l'angle d'émission de l'électron autour de la valeur moyenne θ_o (par exemple des variations de θ sont imposées par la largeur finie de la "fente d'entrée" O_1 du spectromètre.) On dit que l'on a réalisé une focalisation du 1^{er} ordre si la condition

$$\left[\frac{\partial z_o}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_o} = 0 \text{ est vérifiée.}$$

a. Montrer que cette condition impose une relation $\phi(G) = h(G, \theta_o)$ et donner l'expression de $h(G, \theta_o)$.

N.B. On commencera par établir séparément les expressions de $\frac{d\phi}{dG}$ et de $\frac{dG}{d\theta_o}$.

b. On impose $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

Montrer que l'équation $\phi(G) = \frac{1-G^2}{G^2 - \frac{1}{2}}$ admet une racine G_0 comprise entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1.

En prenant $G_0 = 0,75$, déterminer les rapports $\frac{\rho_m}{R_1}$ puis $\frac{z_0}{R_1}$.

c. Que serait une "focalisation du 2^{ème} ordre" ? Montrer sans faire de calcul, que cela imposerait simultanément, les valeurs de G et de θ_0 .

2. Dispersion en énergie

Par définition, la dispersion linéaire en énergie D est l'expression $D = E_0 \left[\frac{\partial z_0}{\partial E_0} \right]_{\theta=\theta_0}$ où

E_0 est identique à T_0 .

a. A-t-on intérêt, a priori, à avoir une dispersion D élevée ?

b. On se place dans le cas de la focalisation du 1^{er} ordre.

Quelle est l'expression de D en fonction de z_0 et θ_0 ?

c. Avec les valeurs indiquées ci-dessus, calculer $\frac{D}{R_1}$.

3. Pouvoir séparateur

Du fait de la largeur finie de la fente d'entrée, des électrons d'angle d'émission $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, voisin de θ_0 , peuvent converger en I avec des électrons d'énergie $E = E_0 + \Delta E$, voisine de E_0 .

On appelle R , pouvoir de résolution, la quantité $R = \frac{E_0}{2\Delta E}$.

a. Justifier physiquement l'expression de R et préciser son intérêt.

b. Donner dans le cas de la focalisation du 1^{er} ordre, l'expression de R qu'on exprimera en fonction de D , $\Delta\theta$ et $\frac{\partial^2 z_0}{\partial \theta_0^2}$.

c. Que se passe-t-il si on impose la "focalisation du 2^{ème} ordre" ?

Quelle sera alors la nouvelle expression de R ?

A-t-on intérêt, à votre avis, à imposer la focalisation du 2^{ème} ordre ?

4. Facteur de transmission

La source S est supposée isotrope et elle émet des électrons dans 4π stéradians.

a. Exprimer en fonction de θ_0 et $\Delta\theta$ la fraction x des électrons collectés par le spectromètre.

b. A-t-on intérêt, pour augmenter x , à prendre θ_0 petit ou voisin de $\frac{\pi}{2}$?

Cette augmentation de x est-elle antagoniste d'autre(s) performance(s) de l'appareil ?

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

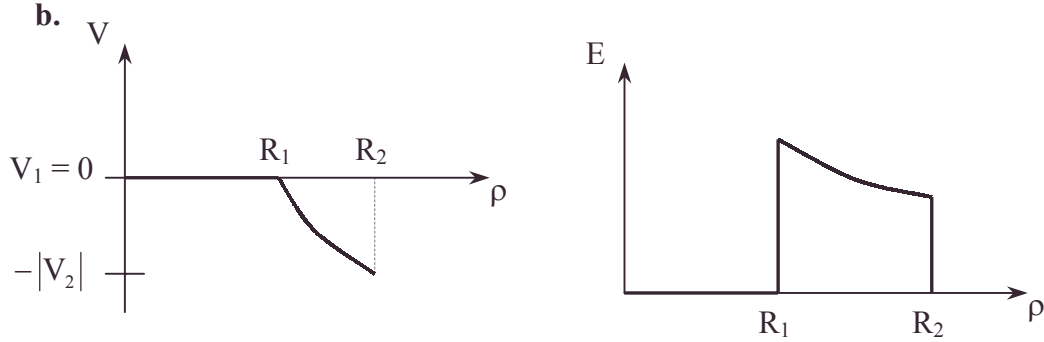
Question préliminaire : Il fonctionne comme un sélecteur de vitesse. Les positions de O_1 et I doivent pouvoir varier. On doit empêcher le passage direct de S à I sans sélection (écran non prévu par le système).

- Gauss [théorème de], graphe

1.1.a. Le théorème de Gauss appliqué à une surface de Gauss adaptée : cylindre d'axe Sz de hauteur h et de rayon ρ donne E ;

$$2\pi\rho h E_r = \frac{Ah}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{A}{2\pi\epsilon_0\rho} ; V_2 - V_1 = \int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_{V_1}^{V_2} E_r d\rho = - \frac{A}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Rightarrow A = \frac{|V_2| \cdot 2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \Rightarrow V(\rho) = -|V_2| \frac{\ln \frac{\rho}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \text{ et } E(\rho) = \frac{+|V_2|}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{\rho}.$$



2.a. $v^2 = v_\rho^2 + v_\alpha^2 + v_z^2$; $v_\alpha = 0$, $v_\rho = \dot{\rho}$; l'énergie vaut : $\frac{1}{2} m(v_z^2 + v_\rho^2) - eV = T_0$.

b. $F_z = e \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z = \text{cste} = v_0 \cdot \cos \theta$.

3.a. $v^2 = \dot{\rho}^2 + v_0^2 \cos^2 \theta \Rightarrow (1) \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 = T_0 \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{K} \ln \frac{\rho}{R_1} \right)$.

b. $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dz} \frac{dz}{dt} = v_0 \cos \theta \frac{d\rho}{dz} \Rightarrow \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 = \frac{\dot{\rho}^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = \tan^2 \theta - \frac{1}{K \cos^2 \theta} \ln \frac{\rho}{R_1} \quad (2)$.

4.a. $d\rho = 0 \Rightarrow \ln \frac{\rho_m}{R_1} = K \sin^2 \theta$; $\rho_m = R_1 \exp(K \sin^2 \theta)$;

$K \sin^2 \theta = \ln \frac{\rho_m}{R_1}$; vu **1.a.** : $V(\rho_m) = -|V_2| \frac{K \sin^2 \theta}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = -\frac{T_0 \sin^2 \theta}{e}$

b. $\rho_m < R_2$; $V(\rho_m) > -|V_2| \Rightarrow \frac{T_0}{e} \sin^2 \theta < |V_2|$; $|V_s| = \frac{T_0}{e} \sin^2 \theta$.

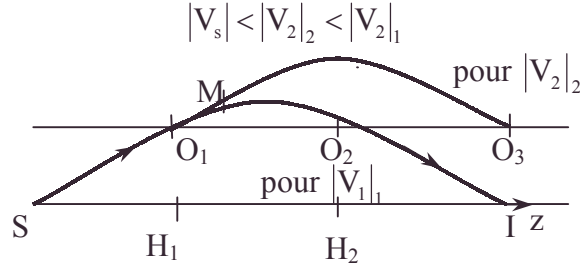
Si $|V_2| < |V_s|$, \vec{E} ne peut freiner radialement les électrons qui atteignent alors C_2 .

c. V_s permet d'arrêter "juste" les électrons arrivant sur C_2 . $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$; $|V_s|_{\max} = \frac{T_0}{e}$.

5.a. Dérivons (2) en z : $\frac{d^2 \rho}{dz^2} = \frac{-1}{2K\rho \cos^2 \theta} < 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dz}$ est monotone en z.

b. $\frac{d^2 \rho}{dz^2} \neq 0$, pas de point d'inflexion régulier.

Allure des trajectoires :



6.a. Soit $\frac{\tau}{2}$ la durée du trajet entre $\rho = R_1$ et $\rho = \rho_m$.

Vu la symétrie et des actions de la trajectoire.

Grâce à 4., simplifions l'équation (1) : $\dot{\rho}^2 = \frac{v_o^2}{K} \ln \frac{\rho_m}{\rho}$.

$$\frac{\tau}{2} = \int_0^{\frac{\tau}{2}} dt = \int_{R_1}^{\rho_m} \frac{dt}{d\rho} d\rho = \int_{R_1}^{\rho_m} \frac{\sqrt{K}}{v_o} \frac{d\rho}{\sqrt{\ln \frac{\rho_m}{\rho}}} \Rightarrow f = \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{\ln \frac{\rho_m}{\rho}}}.$$

b. Changement de variable : $x = \sqrt{\ln \frac{\rho_m}{\rho}}$; $x^2 = \ln \frac{\rho_m}{\rho}$, $\frac{\rho_m}{\rho} = e^{-x^2}$; $\rho = \rho_m e^{-x^2}$;

$d\rho = -\rho_m e^{-x^2} \cdot 2x dx$; bornes d'intégration : $R_1 = \rho_m e^{-G^2} \Rightarrow x = G$; pour $x = 0, \rho = \rho_m$;

$$v_o \tau = 4\rho_m \sqrt{K} \int_0^G e^{-x^2} dx = 4R_1 \sqrt{K} e^{G^2} \int_0^G e^{-x^2} dx.$$

c. $\tau v_o = 2\sqrt{\pi K} R_1 e^{G^2} P(G) = 2\rho_m \sqrt{\pi K} P(G)$.

d. $z_o = SH_1 + H_1H_2 + H_2I = 2R_1 \cotan \theta + v_o \cos \theta \tau$ car trajectoires rectilignes dans C_1 et vitesse $v_z = v_o \cos \theta$ constante entre O_1 et O_2 .

$$z_o = 2R_1 \left(1 + \frac{\rho_m}{R_1} \sin \theta \sqrt{\pi K} P(G) \right) \cotan \theta ; \text{ or } \frac{\rho_m}{R_1} = e^{G^2} \text{ et vu 4.a. } \sin \theta \sqrt{K} = G$$

$$\Rightarrow \phi(G) = \sqrt{\pi} G e^{G^2} P(G).$$

e.α. $G^2 = \frac{T_o}{e|V_2|} \ln \frac{R_2}{R_1} \sin^2 \theta$: quand T_o croît, G croît et H_1H_2 croît,

et donc z_o et $\phi(G)$ croissent physiquement avec G .

$\phi(G)$ est une fonction croissante de G et donc de $\rho_m = R_1 \exp G^2$, fonction croissante.

$$\beta. \frac{d\phi}{dG} = \sqrt{\pi} e^{G^2} \left(2G^2 P(G) + P(G) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-G^2} G \right) \text{ car } \frac{dP}{dG} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-G^2}.$$

$$G > 0 ; e^{-G^2} > 0 ; P(G) > 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dG} > 0.$$

$$\gamma. G \ll 0 \quad \frac{dP}{dG} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-G^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 - G^2) + o(G^4) ;$$

en intégrant le développement en série entière supposée uniformément convergente vu

$$P(0) = 0 : P(G) = \frac{2G}{\sqrt{\pi}} + o(G^3) \Rightarrow \phi(G) = 2G^2 + o(G^4) ;$$

$$\delta. G \gg 0 \quad P(G) \rightarrow 1 \text{ d'après l'énoncé } \Rightarrow \phi(G) \sim \sqrt{\pi} G e^{G^2}.$$

II.1.a. L'énoncé demande :

α. vu **I.6.e.β.** $\frac{d\phi}{dG} = \phi(G) \left[\frac{1}{G} + 2G \right] + 2G$.

β. vu **I.6.d.** : $G = \sin \theta \sqrt{K} \Rightarrow \frac{dG}{d\theta} = \sqrt{K} \cos \theta \Rightarrow \frac{dG}{d\theta} = G \cotan \theta$;

γ. vu **I.6.d.** , $\frac{\partial z_o}{\partial \theta} = 2R_1 \left[-\frac{1}{\sin^2 \theta} (1 + \phi) + \cotan \theta \frac{d\phi}{dG} \frac{dG}{d\theta} \right]$

$$\frac{\partial z_o}{\partial \theta} = \frac{2R_1}{\sin^2 \theta} \left(-1 - \phi + \cos^2 \theta G \left(\frac{1}{G} + 2G \right) \phi + 2G^2 \cos^2 \theta \right)$$

$$\frac{\partial z_o}{\partial \theta} = \frac{2R_1}{\sin^2 \theta} (\phi (\cos^2 \theta + 2G^2 \cos^2 \theta - 1) + 2G^2 \cos^2 \theta - 1).$$

$$\left(\frac{\partial z_o}{\partial \theta} \right)_{\theta_o} = 0 \Rightarrow \phi(G) = h(G, \theta_o) = \frac{1 - 2G^2 \cos^2 \theta_o}{(1 + 2G^2) \cos^2 \theta_o - 1}.$$

b. $\theta_o = \frac{\pi}{4}$; on vérifie $h(G, \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - G^2}{G^2 - \frac{1}{2}}$. On a le tableau de variation :

G	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	
$1 - G^2$	+		+	0 -
$G^2 - \frac{1}{2}$	-	0	+	+
$h\left(G, \frac{\pi}{4}\right)$	-	$-\infty$	$+\infty$	+
				0 -

- Une solution à $\phi(G) = h\left(G, \frac{\pi}{4}\right)$ ne peut exister que pour $\frac{\sqrt{2}}{2} < G < 1$ vu $\phi(G) > 0$.

- Dans cet intervalle, h variant de $+\infty$ à 0, il existe forcément une valeur commune avec $\theta(G)$ défini positif dans cet intervalle.

Soit G_o satisfaisant à $\phi(G_o) = h\left(G_o, \frac{\pi}{4}\right)$;

$$\frac{\rho_m}{R_1} = e^{G_o^2} ; \frac{\rho_m}{R_1} = e^{G_o^2} ; \phi(G_o) = h\left(G_o, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - G_o^2}{G_o^2 - \frac{1}{2}} ; \frac{z_o}{R_1} = 2 \cotan \theta_o (1 + \phi(G_o)) ; .$$

A.N. : $G_o = 0,75$ $\frac{\rho_m}{R_1} = 1,755$; $h\left(G_o, \frac{\pi}{4}\right) = 7$; $\frac{z_o}{R_1} = 2.8 = 16$.

c. une "focalisation" du 2^{ème} ordre est une focalisation plus exacte qu'au 1^{er} ordre.

$$\left(\frac{\partial z_o}{\partial \theta} \right)_{\theta_o} = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial^2 z_o}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_o} = 0.$$

Les inconnues G et θ_o devraient être trouvées par ces 2 relations simultanément vérifiées.

2.a. $D \# E_o \frac{\Delta z_o}{\Delta E_o}$; D doit être élevée pour permettre à Δz_o donné, $\frac{E_o}{2\Delta E_o}$ élevé soit un pouvoir de résolution élevé. $\Delta'E = 2\Delta E$ peut représenter l'écart énergétique maximum mesurable cf. pouvoir résolution d'un réseau : $R_1 = \frac{\lambda}{\Delta'\lambda}$ avec $\lambda = \frac{c}{v}$ soit $\ln \lambda = \ln c - \ln v$

• développement au premier ordre ou plus, incertitude, maximum, minimum

$$\frac{\Delta'\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta'v}{v} ; R_1 = \frac{v}{\Delta'v} = \frac{E}{\Delta'E}$$

$$\mathbf{b.} \left(\frac{\partial z_o}{\partial E_o} \right)_{\theta_o} = \left(\frac{\partial z_o}{\partial G} \right)_{\theta_o} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial E_o} \right)_{\theta_o} ;$$

$$\mathbf{\alpha.} z_o = 2R(1 + \phi(G)) \cotan \theta ;$$

$$\left(\frac{\partial z_o}{\partial G} \right)_{\theta_o} = 2R_1 \cotan \theta_o \left(\frac{d\phi}{dG} \right)_{\theta_o} = 2R \cotan \theta_o \left(\phi \left(\frac{1}{G} + 2G \right) + 2G \right) ;$$

$$\text{or vu } \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_o = 0, \left(\frac{\partial z_o}{\partial G} \right)_{\theta_o} = 2R_1 \frac{\cotan \theta_o}{G} \frac{1 + \phi}{\cos^2 \theta_o} = \frac{z_o}{G \cos^2 \theta_o} .$$

$$\mathbf{\beta.} E_o = T_o = \frac{G^2 e |V_2|}{\ln \frac{R_2}{R_1} \sin^2 \theta} \text{ vu la définition de K et de G.}$$

$$\ln E_o = 2 \ln G + \ln \left(\frac{e |V_2|}{\ln \frac{R_2}{R_1} \sin^2 \theta} \right) ; \frac{1}{E_o} = \frac{2}{G} \left(\frac{\partial G}{\partial E_o} \right)_o .$$

$$\mathbf{\gamma.} D = E_o \left(\frac{\partial z_o}{\partial G} \right)_{\theta_o} \left(\frac{\partial G}{\partial E} \right)_{\theta_o} = \frac{E_o z_o}{2G \cos^2 \theta_o} \cdot \frac{G}{E_o} = \frac{z_o}{2 \cos^2 \theta_o} .$$

$$\mathbf{c.} \frac{D}{R_1} = \left(\frac{z_o}{R_1} \right) \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \theta_o} \Rightarrow \text{A.N. : } \frac{D}{R_1} = 16 \text{ avec } \theta_o = \frac{\pi}{4} .$$

3.a. $\Delta'E = 2\Delta E$ représente l'intervalle des valeurs possibles de E_o ; $\Delta'E$ représente l'écart maximal d'énergies assimilées à E_o ; on le souhaite minimal et R élevé.

$$R = \frac{E_o}{\Delta'E} \text{ (inverse de l'incertitude relative } \frac{\Delta E}{E_o} \text{) ;}$$

On la compare à $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ du réseau optique. On souhaite donc ΔE le plus petit possible pour un $\Delta\theta$ infiniment petit. C'est le cas si ΔE est d'ordre supérieur à l'ordre de $\Delta\theta$.

$$\mathbf{b.} \left(\frac{\partial z_o}{\partial \theta} \right)_{\theta_o} = 0 \Rightarrow z_o(E_o + \delta E, \theta_o + \delta\theta) =$$

$$z_o(E_o, \theta_o) + \left(\frac{\partial z_o}{\partial E_o} \right) \delta E + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_o}{\partial \theta_o^2} \delta\theta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_o}{\partial E_o^2} \delta E^2 + \dots = z_o \text{ (car tous convergent en I).}$$

On a en valeur : $\delta E^2 \ll \delta E$; $\delta E \delta\theta \ll \delta E$. Il reste les termes de degrés équivalents de fait ;

$$0 = \left(\frac{\partial z_o}{\partial E_o} \right) \delta E + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_o}{\partial \theta_o^2} (\delta\theta)^2 \Rightarrow \frac{2\Delta E}{E_o} = \left| \frac{\partial^2 z_o}{\partial \theta_o^2} \right| \frac{\Delta\theta^2}{D} ; R = \frac{D}{\Delta\theta^2 \left| \frac{\partial^2 z}{\partial \theta_o^2} \right|} .$$

$$\mathbf{c.} \left(\frac{\partial z_o}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial^2 z_o}{\partial \theta^2} \right) = 0 ; \text{ il faut reprendre le développement limité.}$$

$$z_o(E_o + \delta E, \theta_o + \delta\theta) =$$

• développement au premier ordre ou plus, focalisation de faisceaux de particules

$$z_o(E_o, \theta_o) + \left(\frac{\partial z_o}{\partial E_o} \right) \delta E + 0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z_o}{\partial E_o^2} \delta E^2 + \frac{\partial^2 z_o}{\partial E_o \partial \theta} \delta \theta \delta E + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 z_o}{\partial \theta^3} \delta \theta^3 + o(\delta^3 \theta) = z_o$$

(cf. convergence en I).

On a en valeur : $\delta E \gg \delta E^2 \gg \delta E^3$ et $\delta E \gg \delta E \delta \theta$; il reste les termes de degrés équivalents, soit :

$$\frac{\partial z_o}{\partial E_o} \delta E + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 z_o}{\partial \theta^3} \delta \theta^3 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta E}{E_o} = \frac{1}{3} \frac{\Delta \theta^3}{D} \left| \frac{\partial^3 z_o}{\partial \theta_o^3} \right| ; R = \frac{3D}{|\Delta \theta|^3 \left| \frac{\partial^3 z_o}{\partial \theta_o^3} \right|}.$$

On a intérêt à R élevé : on a intérêt à imposer la focalisation plus poussée du 2^{ème} ordre car $\Delta \theta^3 \ll \Delta \theta^2$. On voit que ΔE est d'ordre 3 en $\Delta \theta$, ce qui est cohérent.

4.a. A $\theta_o \in \Omega_o = 2\pi(1 - \cos \theta_o)$, un angle solide ; de même,

$$\theta_o + \Delta \theta \in \Omega_o + \Delta \Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) + 2\pi \sin \theta_o \Delta \theta ;$$

$$\text{On collecte la fraction : } x = \frac{\Delta \Omega}{4\pi} = \frac{\sin \theta_o}{2} \Delta \theta.$$

$$\text{b. } x_{\max} \text{ est pour } \theta_o = \frac{\pi}{2} \text{ et non pour } \theta_o \neq 0.$$

Difficile à réaliser pour la focalisation car $I \equiv S$ ce qui est contraire à l'étude de dispersion en énergie.

1.2.5. Champ magnétique terrestre

Voir page 775.

1.2.6. Interaction laser ; jet d'ions

Voir page 605.

1.3. Oscillateurs mécaniques appartient au programme de BCPST1 et TPC1

1.3.1. Oscillations d'inertie dans un repère tournant

Une station spatiale est assimilée à un tore, creux, engendré par un cercle de centre C, de rayon r , tournant autour d'un axe OZ, à une distance $OC = R$ (Figure 1).

On donne : $CP = r = 5\text{m}$; $OC = R = 20\text{m}$.

On suppose que toute la masse de la station est répartie sur la surface du tore avec une masse surfacique $\sigma = 15\text{kg/m}^2$. On note P_1, P_2, P_3, P_4 et C quelques points caractéristiques de l'une des sections (S) du tore, prise pour référence et P un point courant de (S) repéré par l'angle polaire ϕ (figure 1). Le repère fixe est OXYZ.

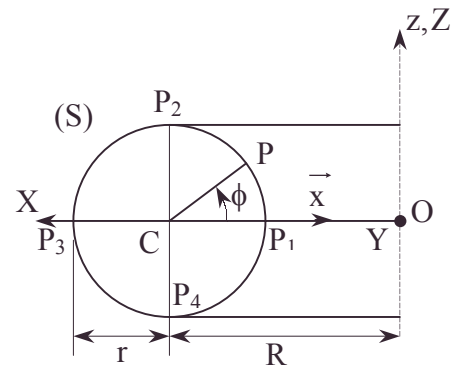


Figure 1

La station spatiale est animée d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω , autour de l'axe OZ ($\omega = 0,5 \text{ rad/s}$).

1. La gravité artificielle, créée dans le référentiel P_3xyz repère mobile (avec \vec{x} dirigé de P_3 vers O), est la force agissant sur les points immobiles de ce référentiel. Donner l'expression du champ de gravité artificiel \vec{g} en fonction des coordonnées x, y, z d'un point M. AN : quelle est la valeur de \vec{g} en C ?

2. Un point matériel Q de masse m est soumis à une force \vec{R} , dont les composantes, dans le repère P_3xyz , sont R_x, R_y, R_z .

a. Ecrire l'équation vectorielle de la dynamique qui régit le mouvement de Q dans le référentiel P_3xyz .

b. Ecrire les équations relatives à chacun des axes P_3x, P_3y, P_3z .

3. On considère un point immobile dans le repère fixe. Sa trajectoire dans P_3xyz est facile à paramétrer.

a. Vérifier les équations demandées en 2.b. ci-dessus.

b. Comparer, pour un tel mouvement, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis. faire les commentaires que suggère cette comparaison.

4. Le point matériel Q est assujéti à se déplacer sans frottement dans un plan $x = x_0$.

a. Quelle est la force \vec{R} (R_x, R_y, R_z) agissant sur Q ?

b. Déterminer l'expression générale des trajectoires dans le plan $x = x_0$.

c. Déterminer la solution quand Q est lâché sans vitesse initiale au point $(x_0, \varepsilon, 0)$.

5. Le point matériel Q est assujéti, comme ci-dessus, à se déplacer sans frottement dans le plan $x = x_0$. Il est, de plus, soumis à une force élastique de rappel $\vec{F} = -k.m.\vec{DQ}$, D étant le point $(x_0, 0, 0)$.

a. Déterminer les équations du mouvement et donner la nature de la trajectoire pour $\omega = 0$.

b. Discuter la nature des trajectoires en fonction du rapport k / ω^2 .

c. Indiquer brièvement ce qui se passe pour k / ω^2 très grand.

6. Cette question se propose de montrer que le mouvement étudié en 5. présente des analogies avec celui de l'extrémité d'un pendule simple, de masse m , de longueur ℓ ,

• Coriolis, force, mouvement d'entraînement, mouvement sans frottement, station spatiale, tore, trajectoire

accroché en P_1 . On supposera faibles les écarts du pendule avec l'axe P_3x ($y \gg \ell$, $z \ll \ell$, $x = x_0 = 2r - \ell$).

a. Déterminer en négligeant ses variations au voisinage de $(x_0 = 2r - \ell, 0, 0)$; le champ artificiel de pesanteur agissant sur le pendule.

b. En déduire, par application de 2., les équations du mouvement.

c. Donner les expressions littérales et les valeurs numériques de périodes T_1 , T_2 des oscillations dans le plan P_3xz d'une part, dans le plan P_3xy d'autre part. On donne $\ell = 1\text{m}$

Mines ; Durée 1h30

Corrigé

1.a. On rappelle l'expression d'une accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \vec{a}(P_3 / OXYZ) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{OXYZ} \wedge \vec{P_3M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{P_3M}) ; \text{ or } \vec{\Omega} = \omega \vec{z} ; \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0} .$$

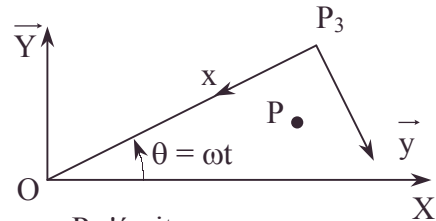
$$\vec{a}_e = \vec{a}_a(P_3) + \vec{0} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{P_3M}) .$$

$m\vec{g}$ étant défini ici comme la force d'inertie d'entraînement (la force de gravitation étant nulle) : $\vec{g} = -\vec{a}(P_3 / OXYZ) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{P_3M}) = -\omega^2(R+r)\vec{x} + \omega^2x\vec{x} + \omega^2y\vec{y}$.

b. $|\vec{g}_c| = \omega^2 R$; AN : $|\vec{g}_c| = 5 \text{ m.s}^{-2}$.

2.a. $m\vec{a}_r = \vec{R} + m\vec{g} - 2m\omega\vec{Z} \wedge \vec{V}_r$ avec $\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$.

$$\text{b. } \begin{cases} m\ddot{x} = R_x + \omega^2 m(x - (R+r)) + 2m\dot{y} \\ m\ddot{y} = R_y + m\omega^2 y - 2m\dot{x} \\ m\ddot{z} = R_z \end{cases}$$



3.a. Pour X, Y, Z constants, le changement de repère pour P s'écrit :

$$\begin{cases} x = (R+r) - X \cos \omega t - Y \sin \omega t \\ y = X \sin \omega t - Y \cos \omega t \\ z = Z \end{cases} ; X, Y, Z \text{ étant constants.}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega X \sin \omega t - Y \cos \omega t \\ \dot{y} = \omega X \cos \omega t + Y \sin \omega t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 X \cos \omega t + Y \omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{y} = -\omega^2 X \sin \omega t + Y \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

En reportant dans 2.b. avec $R_x = R_y = R_z = 0$ car le point P est fixe ici, on retrouve les identités $0 = 0$.

b. Exprimons $\vec{a}_e = -\vec{g}$ et $\vec{a}_c = 2\omega\vec{Z} \wedge \vec{V}_r$ en fonction de X, Y, t vu 1.a. et 2.b.

$$\vec{a}_e = \begin{pmatrix} -\omega^2 X \cos \omega t - Y \omega^2 \sin \omega t \\ \omega^2 X \sin \omega t - Y \omega^2 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = \begin{pmatrix} 2\omega^2 X \cos \omega t + 2Y \omega^2 \sin \omega t \\ -2X \omega^2 \sin \omega t + 2Y \omega^2 \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_c = -2\vec{a}_e \quad \text{cf.} \quad \vec{a}_c + \vec{a}_e = -\vec{a}_e ;$$

la force d'inertie de Coriolis l'emporte sur la force d'inertie d'entraînement.

4.a. Si le mouvement est sans frottement dans le plan $x = x_0$, la force est orthogonale au plan ; on a : $\vec{R}(R_x, 0, 0)$.

Il faut $R_y = 0$; $R_z = 0 \quad \forall t$

$$\text{b. On remplace } x \text{ par } x_0 \text{ dans 2.b. : } \begin{cases} 0 = R_x + \omega^2 m(x_0 - (R + r)) + 2m \dot{y} \\ m \ddot{y} = m\omega^2 y \\ m \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

d'où : $x = x_0$; $y = A \cosh(\omega t + \varphi)$; $z = at + b$ en paramétriques soit une chaînette

$$y = A \cosh\left(\frac{\omega z}{a} + \varphi\right).$$

c. $\vec{V}_r = (0, A\omega \sinh(\omega t + \varphi), a)$ avec $\vec{V}_r(0) = \vec{0} \Rightarrow \varphi = 0; a = 0$;

$\vec{P}_3 \vec{M}(O) = (x_0, \varepsilon, 0) \Rightarrow A = \varepsilon$ et $b = 0$ et il reste : $x = x_0$; $y = \varepsilon \cosh \omega t$; $z = 0$ soit une chaînette aplatie en une demi droite.

5.a. $\vec{F} = -km\vec{DQ} = (0, -kmy, -kmz)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= R_x + \omega^2 m(x_0 - (R + r)) + 2m \dot{y} ; \\ m \ddot{y} &= m(\omega^2 - k)y ; \\ m \ddot{z} &= -kmz ; \end{aligned}$$

Pour $\omega = 0$, $0 = R_x + 2m \dot{y}$, $\ddot{y} = -ky$, $\ddot{z} = -kz$

de la forme $m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -k' \vec{OM}$ avec $k' = km$. (cf. oscillateur harmonique spatial).

La trajectoire est elliptique.

$$\text{b. } \omega \neq 0 ; \ddot{y} = \omega^2 \left(1 - \frac{k}{\omega^2}\right) y ; \ddot{z} = -kz.$$

$$\alpha. \text{ Si } \frac{k}{\omega^2} < 1 , y = A \cosh\left(\omega \sqrt{1 - \frac{k}{\omega^2}} t + \varphi\right) ; z = B \cos(\sqrt{k} t + \psi) :$$

La trajectoire aura un point à l'infini.

$$\beta. \text{ Si } \frac{k}{\omega^2} > 1 , y = A \cos\left(\omega \sqrt{\frac{k}{\omega^2} - 1} t + \varphi\right) ; z = B \cos(\sqrt{k} t + \Psi) :$$

La trajectoire est une figure de Lissajoux sans point à l'infini.

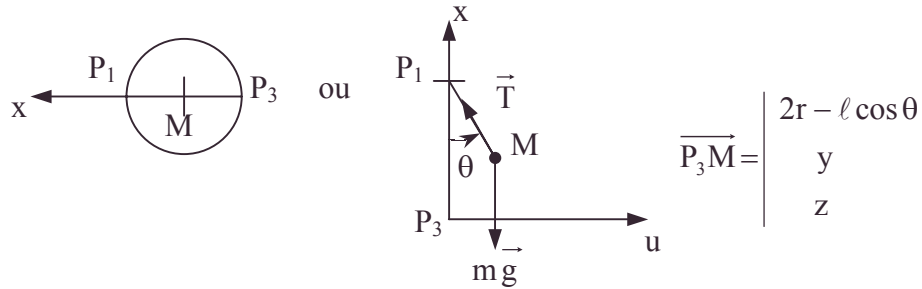
$$\gamma. \text{ Si } \frac{k}{\omega^2} = 1 , y = at + b ; z = B \cos(\sqrt{k} t + B) :$$

La trajectoire est une sinusoïde (avec point à l'infini).

$$\text{c. } \frac{k}{\omega^2} \gg 1 ; \ddot{y} = -ky ; y = A \cos(\sqrt{k} t + \varphi) ; z = B \cos(\sqrt{k} t + \Psi) :$$

La trajectoire est une ellipse.

6.


 a. $y \ll \ell$; $z \ll \ell$; $\cos \theta = 1$.

Dans les oscillations, x et \dot{x} sont des infiniment petits de même ordre (de même en y et z). On néglige ici les infiniment petits devant les termes finis.

$$m \left(\frac{d^2 \vec{P}_3 M}{dt^2} \right)_{P_3xyz} = m \vec{g} + \vec{T} - 2m\omega \vec{Z} \wedge \vec{V}_r \quad \text{avec} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} \omega^2(r - \ell - R) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{cf. II.1.a.}$$

 b. $0 = T_x + m\omega^2(r - R - \ell)$;

$$m\ddot{y} = T_y ;$$

$$m\ddot{z} = T_z .$$

 c.α. Dans le plan P_3zx , $T_y = 0$.

$$\vec{T} // \vec{P}_1 M \Rightarrow \tan \theta = -\frac{T_z}{T_x} = -\frac{z}{x - 2r} ;$$

$$T_z = \frac{zT_x}{x - 2r} \# m\omega^2(r - R - \ell) \frac{z}{\ell} ;$$

$$m\ddot{z} + m\omega^2(R + \ell - r) \frac{z}{\ell} = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\ell}{R + \ell - r}} .$$

 AN : $T_1 = 3,142$ s.

 β. Dans le plan P_3yx ,

$$\vec{T} // \vec{P}_1 M \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{T_y}{T_x} = \frac{-y}{x - 2r} ;$$

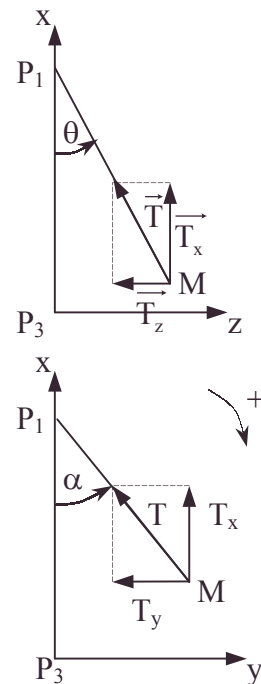
$$T_y \# m\omega^2(r - R - \ell) \frac{y}{\ell} ;$$

T_y est de l'ordre de y qu'on a négligé dans \vec{g} .

Il faut donc reprendre le terme $mg_y = m\omega^2 y$: cf. 1.a.

$$\text{alors, } m\ddot{y} + \omega^2 y \frac{(R - r)}{\ell} = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\ell}{R - r}} ; \text{ AN : } T_2 = 3,245 \text{ s.}$$

La différence est de l'ordre de 3%.



1.3.2. Oscillateur anharmonique Hystérésis mécanique

Problème I

Le corps P, assimilé à un point matériel de masse m , coulisse sans frottement sur la tige horizontale $x'Ox$. Deux ressorts identiques, de longueur au repos ℓ_0 , de raideur k , ont une de leurs extrémités reliée à P, l'autre respectivement aux deux points fixes B et B' de Oy, symétriques par rapport à la tige.

Notations et données :

$$\overline{OP} = x ; OB = OB' = b \geq \ell_0.$$

$$m = 0,264 \text{ kg} ; k = 3,80 \text{ N.m}^{-1} ; b = 18 \text{ cm}.$$

Tous les résultats demandés seront d'abord exprimés littéralement, à l'aide des seules notations de l'énoncé, avant une éventuelle application numérique.

Les réponses qualitatives seront concises et rédigées avec un langage correct.

1.a. Montrer que la valeur algébrique $F(x)$ de la force qui s'exerce sur P est une fonction impaire de x . Expliciter $F(x)$.

Le rapport x/b étant petit devant 1, donner une expression approchée de $F(x)$, au 5^e ordre négligé, de la forme : $F(x) = -m\omega_0^2 x - m\beta x^3$ en explicitant ω_0 et β en fonction des données.

Calculer numériquement ω_0 et β dans les deux cas : A : $\ell_0 = 18 \text{ cm}$; B : $\ell_0 = 14 \text{ cm}$.

b. Calculer l'expression approchée, au 6^e ordre négligé, de l'énergie potentielle $U(x)$ dont dérive cette force. (On prendra $U(0) = 0$).

Calculer numériquement les deux termes de $U(x)$ pour $\ell_0 = 14 \text{ cm}$ et $x = 4 \text{ cm}$. Commenter.

Dans toute la suite du problème, on n'utilisera que les expressions approchées trouvées en a. et b.

c. Quel(s) terme(s) prendriez-vous pour qualifier cet oscillateur parmi les vocables suivants : linéaire, non linéaire, harmonique, anharmonique ?

2. Etude du cas : $b = \ell_0$ ($= 18 \text{ cm}$)

Conditions initiales : à $t = 0$; $x(0) = A$; $\dot{x}(0) = 0$.

a. Justifier le fait que le mouvement de P est périodique.

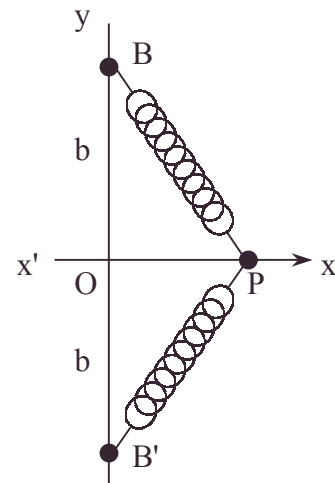
$$\text{On note } \alpha \text{ l'intégrale : } \alpha = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Calculer la période T_1 des oscillations en utilisant l'intégrale première énergie. Caractériser brièvement la dépendance de T_1 vis-à-vis de l'amplitude. Retrouver rapidement ce résultat fondamental par des considérations d'ordre dimensionnel. Comparer aux résultats analogues obtenus pour l'oscillateur harmonique et pour le mouvement dans un champ newtonien.

Application numérique : calculer T_1 pour $A = 1 \text{ cm}$. On donne $\alpha = 1,31$.

b. On cherche une approximation de $x(t)$ par une fonction sinusoïdale :

$$x = A \cos \frac{2\pi t}{T_1}.$$



Calculer littéralement, puis numériquement, l'énergie cinétique de ce mouvement sinusoïdal pour $x = 0$. Comparer avec la valeur numérique de $U(A)$. L'approximation vous paraît-elle justifiée ?

3. Etude du cas : $b > \ell_0$

Les conditions initiales sont les mêmes qu'au 2. On prendra $\ell_0 = 14$ cm.

a. Déterminer les positions d'équilibre de P et leur stabilité. Calculer numériquement la période T_0 des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable (approximation linéaire). Peut-on envisager un tel calcul pour la question 2.a. ?

b. On se place maintenant dans le cas où l'amplitude A des oscillations n'est pas petite. Ecrire l'équation différentielle du second ordre du mouvement de P.

On cherche une solution approchée de cette équation sous la forme :

$$x = (A - \delta A) \cos \omega t + \delta A \cos 3\omega t, \text{ avec } \omega = \omega_0 + \delta\omega_0.$$

En considérant $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}$, $\frac{\delta A}{A}$ et $\frac{\beta A^2}{\omega_0^2}$ comme des infiniment petits du premier ordre,

linéariser l'équation précédente et en déduire les expressions de $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}$ et $\frac{\delta A}{A}$ en fonction de A , ω_0 et β .

Application numérique : calculer $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0}$ et $\frac{\delta A}{A}$ pour $A = 4$ cm.

4. Oscillations forcées : ($b > \ell_0$)

On applique à P une force supplémentaire dont la projection sur $x'Ox$ vaut $F_0 \cos \Omega t$.

a. Rappeler l'allure des courbes d'amplitude en fonction de la pulsation excitatrice d'un oscillateur harmonique avec amortissement fluide en $-m\lambda \dot{x}$.

En quoi consiste, de façon précise, le phénomène de résonance d'amplitude ? Envisager également le cas de l'amortissement nul.

b. On cherche une solution approchée du régime permanent sans amortissement sous la forme : $x = A \cos \Omega t + \delta A \cos 3\Omega t$.

En considérant $\frac{\delta A}{A}$ comme un infiniment petit du premier ordre, linéariser l'équation du mouvement de P et en déduire l'expression de $\frac{\delta A}{A}$, ainsi que l'équation du 3^e degré vérifiée par A . Discuter l'approximation considérée.

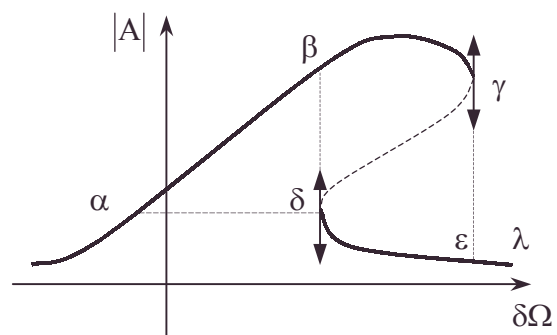
c. On pose : $\Omega = \omega_0 + \delta\Omega$ avec $\delta\Omega \ll \omega_0$.

Montrer que pour une valeur donnée de $|A|$ (valeur absolue de A), il existe deux valeurs distinctes $\delta\Omega_1$ et $\delta\Omega_2$ de $\delta\Omega$.

Donner l'allure de ces deux courbes sur un graphe où l'on portera $\delta\Omega$ en abscisse et $|A|$ en ordonnée. Tracer sur le même graphe la courbe correspondant aux oscillations libres $\delta\omega_0$ fonction de $|A|$ (cf. 3.b.)

d. Dans la réalité, l'amortissement n'est jamais tout à fait négligeable. La courbe de résonance obtenue expérimentalement a l'allure ci-contre.

La partie $\gamma\delta$ (en pointillés), n'a pas pu être tracée expérimentalement, car elle correspond à des oscillations "instables". (On ne demande pas de justifier ce résultat).

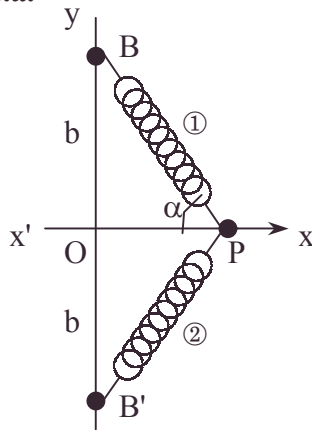


Interpréter l'allure de cette courbe, à la lumière des résultats du 4.a. et du 4.c. Décrire le phénomène observé quand, partant du point α , on fait croître Ω , et quand, partant du point λ , on fait décroître Ω .

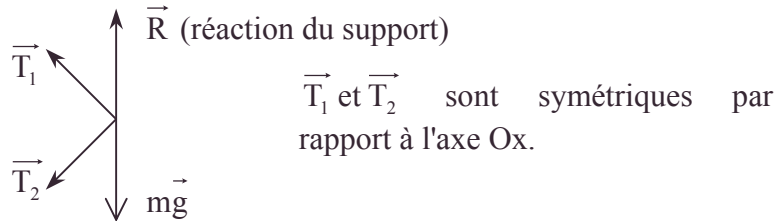
Centrale ; Durée : 2h30

Corrigé

1.a.



Analyse des forces :



- Ecriture vectorielle du PFD :

$$m \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_R = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2.$$

- Projections : $m \ddot{x} = T_{1x} + T_{2x} = 2T_{1x} = F(x).$
 $0 = R - mg.$

α . L'allongement des ressorts est le même en P et en P' point symétrique par rapport à Oy : $F(x) = -F(-x)$ car les actions sont opposées. Ainsi $F(x)$ est impaire.

β . $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = k(BP - \ell_o)$; $T_{1x} = \|\vec{T}_1\| \cos \alpha \Rightarrow F(x) = \frac{-2kx}{BP} (BP - \ell_o)$;

$$F(x) = -2kx \left(1 - \frac{\ell_o}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right).$$

γ . $b^2 + x^2 = b^2 \left(1 + \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right)$; $\frac{1}{b \left(1 + \frac{x^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{b} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{b^2} + o \left(\frac{x^4}{b^4} \right) \right].$

$$F(x) = -2k \left(1 - \frac{\ell_o}{b} \right) x - \frac{k\ell_o}{b^3} x^3 + o \left(\frac{x^5}{b^5} \right) \quad \text{d'où en identifiant : } \omega_o^2 = \frac{2k}{m} \left(1 - \frac{\ell_o}{b} \right) ;$$

$$\beta = \frac{k\ell_o}{mb^3}.$$

δ . AN : (A) : $\ell_o = 18 \text{ cm}$; $\omega_o = 0 \text{ rad.s}^{-1}$; $\beta = 444,26 \text{ m}^{-2}.\text{s}^{-2}$;
 (B) : $\ell_o = 14 \text{ cm}$; $\omega_o = 2,529 \text{ rad.s}^{-1}$; $\beta = 345,53 \text{ m}^{-2}.\text{s}^{-2}$.

b . $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2} m \omega_o^2 x^2 + \frac{1}{4} m \beta x^4 + c$; $c = 0$ vu $U(0) = 0$;

$$U(x) = k \left(1 - \frac{\ell_o}{b} \right) x^2 + \frac{1}{4} \frac{k\ell_o}{b^3} x^4 + o \left(\frac{x^6}{b^6} \right).$$

• développement au premier ordre ou plus, force, identification, P.F.D.

$$AN : \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = 1,351.10^{-3} \text{ J} ; \frac{1}{4} m \beta x^4 = 5,84.10^{-5} \text{ J} ; \frac{\frac{1}{4} m \beta x^4}{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2} \approx 4\% ;$$

Le terme en x^4 est un terme correctif du terme en x^2 .

c.α. Cet oscillateur est non linéaire et anharmonique ; le spectre n'est pas composé d'une seule harmonique car la force n'est pas linéaire par rapport à la déformation du ressort.

2.a.α. L'absence de frottement permet la conservation de l'énergie mécanique :

$$b = \ell_0 \Rightarrow U(x) = \beta x^4.$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(0) + U(A) = \frac{1}{4} m \beta A^4$$

$$U(x) = U(-x) \Rightarrow E_c(x) = E_c(-x).$$

On retrouve les mêmes conditions de vitesse en $x = A$ et $x = -A$: $\dot{x} = 0$.

Le mouvement se prolonge de la même manière de $x = -A$ à $x = A$; pour se reproduire finalement périodiquement.

β. Remarquons : $\frac{T}{4} = \int_{x=0}^{x=A} dt$ or vu **α.** :

$$\dot{x}^2 = \frac{\beta}{2} (A^4 - x^4) > 0 \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{\beta}{2} A^2 \sqrt{1 - \frac{x^4}{A^4}}}} \text{ pour } x \text{ croissant de } 0 \text{ à } A.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{T}{4} = \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \text{ soit } T = \frac{4\alpha}{A} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} ;$$

T est inversement proportionnel à A.

γ. Analyse dimensionnelle ; les paramètres sont : $\omega_0 = 0$; β , A.

β s'exprime en $\text{m}^{-2}\text{s}^{-2}$; A en m ; T en s ; découvrons T sous forme monôme :

soit $T = C \beta^a A^b$, C étant sans dimension et constant, l'identification des unités donne :

$$-2a + b = 0 ; -2a = 1 \quad \text{soit } a = -\frac{1}{2}, b = -1.$$

$$\text{Soit } T = \frac{C}{A \beta^{\frac{1}{2}}} ; \text{ la comparaison donne } C = 4\alpha\sqrt{2} \text{ (ce que ne peut pas trouver l'analyse}$$

dimensionnelle).

δ. Comparaison avec l'oscillateur harmonique : $m \ddot{x} + kx = 0$; $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$;

T est indépendant de A.

ε. Comparaison avec un mouvement newtonien : par exemple circulaire ;

$$\text{le P.F.D. donne : } m \frac{V^2}{R} = m \frac{k}{R^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi R^{\frac{3}{2}} k^{-\frac{1}{2}}, R \text{ étant la distance initiale,}$$

T est en $A^{\frac{3}{2}}$ cf. 3^{ème} loi de Képler :

φ. AN : $T_1 = 35,16 \text{ s.}$

$$\text{b. } E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi A}{T_1} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi t}{T_1} = \frac{\pi^2}{16\alpha^2} k \frac{A^4}{\ell_o^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi t}{T_1} \right) \text{ puisque on a}$$

l'expression et la valeur de T_1 ;

$$\text{On a pour } U(0) = 0 : E_{c \max} = 4,22 \cdot 10^{-7} \text{ J} ; U(A) = \frac{1}{4} m \beta A^4 : U(A) = 2,93 \cdot 10^{-7} \text{ J} ;$$

la loi de conservation exigerait $E_{c \max} = U(A)$

L'accord est approximatif. C'est une première approximation.

3.a.α. $F(x) = 0$ détermine les positions d'équilibre : seule solution réelle $x = 0$.

β. Stabilité : c'est le cas si le point écarté de sa position d'équilibre y revient sous l'effet d'une force de rappel.

Pour $x = \varepsilon$, $F(x) = F(0) + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial x} = -\varepsilon \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0$; or $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 = m\omega_o^2 > 0$; la force est de rappel : la position $x = 0$ est stable.

$$\gamma. \text{ L'approximation linéaire donne : } F(x) = -2k \left(1 - \frac{\ell_o}{b} \right) x = -\omega_o^2 m x = m \ddot{x}.$$

$$\text{Soit } T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k \left(1 - \frac{\ell_o}{b} \right)}} ; \text{ AN : } T_o = 2,48 \text{ s.}$$

δ. On ne peut envisager ce calcul en **2.a.** car $\ell_o = b \Rightarrow T_o \infty$.

b.α. On a l'équation du mouvement : $m \ddot{x} = F(x)$.

$$\text{Soit } \ddot{x} + \omega_o^2 x + \beta x^3 = 0 \text{ ou } \ddot{x} = -x(\omega_o^2 + \beta x^2) = -x\omega_o^2 \left(1 + \frac{\beta}{\omega_o^2} x^2 \right).$$

β. On cherche $x = (A - \delta A) \cos \omega t + \delta A \cos 3\omega t$ avec $\omega = \omega_o + \delta \omega_o$;

$$\text{Soit } \ddot{x} = -(A - \delta A)(\omega_o + \delta \omega_o)^2 \cos \omega t - 9(\omega_o + \delta \omega_o)^2 \delta A \cos 3\omega t.$$

Soit en ne conservant systématiquement que les termes finis d'ordre 0 et les termes d'ordre 1,

$$\ddot{x} = -A\omega_o^2 \cos \omega t + \delta A\omega_o^2 \cos \omega t - 2A\delta \omega_o \omega_o \cos \omega t - 9\omega_o^2 \delta A \cos 3\omega t.$$

De même,

$$\frac{\beta}{\omega_o^2} x^2 = \frac{\beta}{\omega_o^2} \left[(A - \delta A)^2 \cos^2 \omega t + \delta A^2 \cos^2 3\omega t + 2\delta A A \cos \omega t \cos 3\omega t + \dots \right]$$

comme le terme principal est déjà l'infiniment petit $\frac{\beta A^2}{\omega_o^2}$;

$$1 + \frac{\beta}{\omega_o^2} x^2 = 1 + \frac{\beta A^2}{\omega_o^2} \cos^2 \omega t + o \left(\left(\frac{\delta \omega_o}{\omega_o} \right)^2 \right), \text{ de même}$$

$$-\omega_o^2 x \left(1 + \frac{\beta x^2}{\omega_o^2} \right) = -\omega_o^2 A \cos \omega t + \omega_o^2 \delta A \cos \omega t - \omega_o^2 \delta A \cos 3\omega t \dots$$

$$\dots - \omega_o^2 A \cos^3 \omega t \cdot \frac{\beta A^2}{\omega_o^2} + o \left(\left(\frac{\delta \omega_o}{\omega_o} \right)^{2\dots} \right)$$

Or $\cos^3 \omega t = \frac{1}{4}(\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t)$ est en facteur devant $-\omega_0^2 \frac{\beta A^2}{\omega_0^2}$.

L'identification de $\ddot{x} = -\omega_0^2 x \left(1 + \frac{\beta x^2}{\omega_0^2}\right)$ pour les termes en $\cos \omega t$ et $\cos 3\omega t$ qui restent

donne : $-2A\delta\omega_0\omega_0 = -\frac{3\omega_0^2}{4} \frac{\beta A^2}{\omega_0^2}$; $-9\omega_0\delta A = -\frac{\omega_0^2}{4} \frac{\beta A^3}{\omega_0^2} - \omega_0^2\delta A$;

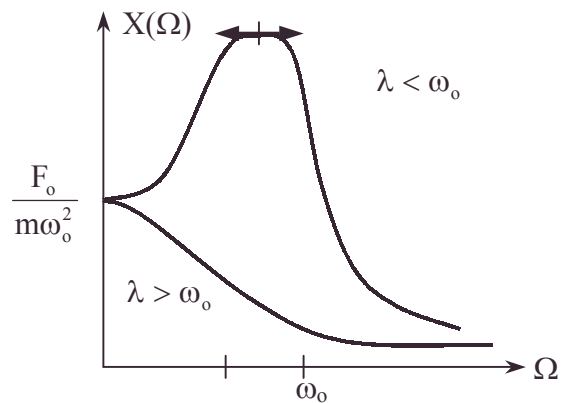
$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{3}{8} \frac{\beta A^2}{\omega_0^2}$ et $\frac{\delta A}{A} = \frac{1}{32} \frac{\beta A^2}{\omega_0^2}$; d'où : AN : $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = 0,0324$; $\frac{\delta A}{A} = 0,00271$:

A est quasi constant ; on peut même dire que ω aussi.

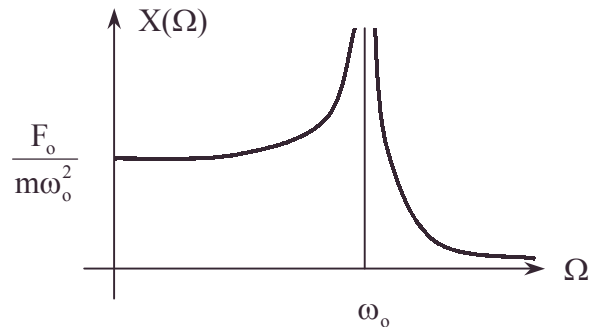
4.a. $m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + \frac{F_0}{m} \cos \Omega t - 2m\lambda \dot{x}$; la méthode complexe donne :

$$X(-\Omega^2 + 2\lambda j\Omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}$$

Le cas avec amortissement faible permet un accroissement notable de l'amplitude : c'est la résonance mécanique d'amplitude.



Pour $\lambda = 0$: $X(\Omega)$ peut même théoriquement devenir infini.



b. L'équation du mouvement est : $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$.

La même théorie qu'en 3. donne pour :

$$x = A \cos \Omega t + \delta A \cos 3\Omega t.$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \cos \Omega t - 9\Omega^2 \delta A \cos 3\Omega t.$$

$$x^3 = A^3 \cos^3 \Omega t + (\delta A)^3 \cos^3 \Omega t + 3A^2 \delta A \cos^2 \Omega t \cos 3\Omega t + 3A \delta A^2 \cos \Omega t \cos^2 3\Omega t ;$$

Comme $\cos^3 \Omega t = \frac{1}{4}(3 \cos \Omega t + \cos 3\Omega t)$ et vu 3.a.β. qui justifie le régime permanent,

en ne conservant que les termes d'ordre 0 et 1 ; $x^3 = A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \Omega t + \frac{\cos 3\Omega t}{4} \right)$.

L'identification des termes en $\cos \Omega t$ et $\cos 3\Omega t$, harmoniques pures, donne :

$$\frac{3}{4}\beta A^3 + (\omega_0^2 - \Omega^2)A - \frac{F_0}{m} = 0 \text{ et } \frac{\delta A}{A} = \frac{\beta A^2}{4(9\Omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Pour que $\frac{\delta A}{A}$ soit un infiniment petit du premier ordre, comme $\frac{\beta A^2}{\omega_0^2}$ est infiniment petit d'ordre 1, il faut Ω^2 de l'ordre de ω_0^2 ou même $\Omega^2 \ll \omega_0^2$.

Conclusion : ce n'est pas le cas si $\Omega^2 \gg \omega_0^2$.

c. On cherche une solution particulière sous la forme $x = A \cos(\omega_0 + \delta\Omega)t$, en reportant dans l'équation de **4.b.** :

$$-A(\omega_0 + \delta\Omega)^2 \cos \Omega t + A\omega_0^2 \cos \Omega t + \beta A^3 \cos^3 \Omega t = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t ;$$

$$\text{soit } \cos \Omega t \left[-A\cancel{\delta\Omega^2} - 2\omega_0 A \delta\Omega + \frac{3}{4}\beta A^3 \right] + \frac{\beta}{4} A^3 \cos 3\Omega t = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t . \text{ L'approximation à}$$

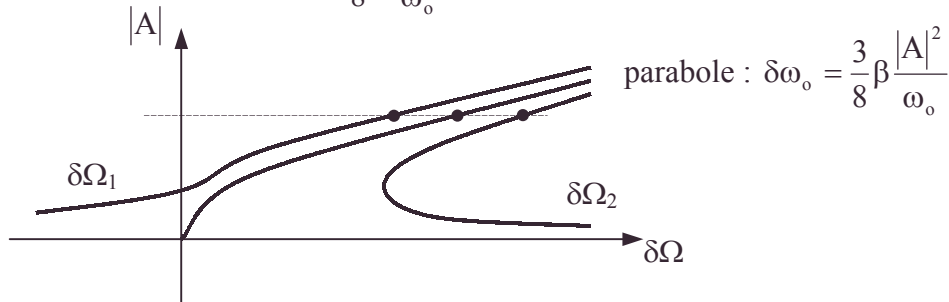
la seule pulsation Ω justifie l'identification des $\cos \Omega t$ qui donne :

$$2\omega_0 A \delta\Omega - \frac{3}{4}\beta A^3 + \frac{F_0}{m} = 0 .$$

$$\delta\Omega = \frac{\frac{3}{4}\beta A^3 - \frac{F_0}{m}}{2\omega_0 A} . \text{ Fixons } |A| : \delta\Omega_1 = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{3}{4}\beta |A|^2 - \frac{F_0}{m|A|} \right),$$

$$\text{ou } \delta\Omega_2 = \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{3}{4}\beta |A|^2 + \frac{F_0}{m|A|} \right) \text{ car } A = \pm |A| .$$

On rappelle le résultat **3.b.** : $\delta\omega_0 = \frac{3}{8}\beta \frac{|A|^2}{\omega_0}$, portion de parabole en $|A|$.



L'allure est obtenue par ordinateur pour des valeurs particulières de F_0 . On voit une modélisation plus élaborée.

d.α. On constate que la courbe donnée est un raccordement à distance finie de $\delta\Omega_1$ et $\delta\Omega_2$ selon une analogie formelle avec les deux branches de $X(\Omega)$ pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda < \omega_0$. La perturbation de l'amortissement a lieu principalement dans la partie $\beta\gamma\delta$ de la courbe donnée.

β. En partant du point α , si Ω croît, on décrit la courbe $\alpha\beta\gamma\epsilon\lambda$ avec saut de γ à ϵ vu l'impossibilité de continuité de γ à δ avec Ω croissant.

γ. En partant du point λ , si Ω décroît, on décrit la courbe $\lambda\epsilon\delta\beta\alpha$ avec saut de δ à β vu l'impossibilité de continuité par $\delta\gamma$ avec Ω décroissant. On a une hystérésis mécanique : la valeur de $|A|$ dépend du sens de variation de Ω , dans la zone $\beta\gamma\epsilon\delta$.

On a raisonné par continuité avec les autres cas d'hystérésis (comparateur, milieux magnétiques, etc.).

1.3.3. Résonance électromécanique

On considère une membrane métallique rigide de masse surfacique μ pouvant se déplacer sans frottement selon l'axe horizontal Ox , parallèlement à elle-même, dans un cylindre de longueur $2d$ et de section S qu'elle divise en deux compartiments de volume V_1 et V_2 contenant le même gaz parfait sous les pressions P_1 et P_2 .

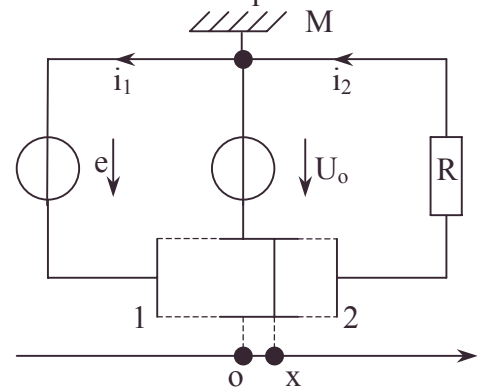
On repère la position de la membrane par la variable x et à l'équilibre, lorsque $x = 0$, on a $V_1 = V_2 = V_0$, $P_1 = P_2 = P_0$, et les deux gaz sont à la même température.

1. Sachant que le gaz de chaque compartiment subit à tout instant une transformation isentropique, quelle est la force F_m (orientée suivant Ox) s'exerçant sur la membrane lorsqu'elle effectue autour de sa position d'équilibre des mouvements d'oscillation de faible amplitude ? Quelle est la pulsation ω_m du mouvement correspondant ? La calculer avec les valeurs numériques suivantes :

$$\mu = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ g.cm}^{-2}, d = 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}, P_0 = 1,44 \cdot 10^3 \text{ Pa}, \gamma = 1,4.$$

La membrane et les extrémités métalliques 1 et 2 du cylindre, isolées entre elles et formant deux condensateurs plans, sont connectées à un circuit électrique extérieur comme il est indiqué sur le schéma suivant.

On appelle Q_0 la charge de chacune des faces de la membrane à l'équilibre et q_1 et q_2 les charges supplémentaires des faces en regard respectivement des extrémités 1 et 2 du cylindre lorsque x est différent de zéro. On appelle U_0 , u_1 et u_2 respectivement les potentiels de la membrane et des extrémités 1 et 2 du cylindre. (On prend M comme origine des potentiels et U_0 est un potentiel continu positif très supérieur aux potentiels variables u_1 et u_2).



Dans la branche 1 du circuit on peut éventuellement insérer un générateur de tension alternative e , d'amplitude E et de pulsation ω . Dans la branche 2 on a placé une résistance $R = 10^3 \Omega$.

2. On suppose $e = 0$ et on impose à la membrane un mouvement $x(t)$ avec $|x| \ll d$.

Montrer que, du point de vue électrique, tout se passe, au premier ordre en $\frac{x}{d}$ et $\frac{u_2}{U_0}$,

comme si l'on branchait aux bornes de la résistance R un générateur de tension de force électromotrice $f(t)$ que l'on calculera en fonction de $x(t)$, en série avec la capacité $C_0 = 10^{-10} \text{ F}$ d'un des condensateurs à l'équilibre ($x = 0$).

Sachant que l'on a affaire à un mouvement $x(t)$ sinusoïdal de pulsation $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ et d'amplitude X , donner l'expression de l'amplitude complexe I_2 du courant i_2 et l'amplitude complexe U_2 de la tension u_2 aux bornes de la résistance R . On pourra simplifier cette expression compte tenu des valeurs numériques données dans le problème. Que vaut I_1 ?

Lorsque $U_0 = 60 \text{ V}$ quelle est l'amplitude du mouvement sachant qu'à l'oscilloscope on mesure aux bornes de R une tension d'amplitude 6 mV ?

3. Le mouvement de la membrane n'est plus imposé mais il est déterminé par les forces qui lui sont appliquées. D'autre part, e n'est plus nul. Calculer la force d'origine

électrique F_e (orientée suivant Ox) à laquelle est soumise la membrane. On utilisera ensuite l'expression approchée de F_e au premier ordre en $\frac{x}{d}$, $\frac{u_1}{U_0}$, et $\frac{u_2}{U_0}$.

Discutez physiquement du signe de F_e dans les deux cas suivants :

a. $u_1 = u_2$; $x > 0$;

b. $x = 0$; $u_1 > u_2$.

4. Sachant qu'en plus de F_m et de F_e la membrane est soumise à une force de frottement :

$$F_f = -\mu S \omega_f \frac{dx}{dt} \text{ avec } \omega_f \ll \omega_m, \text{ on se propose d'établir l'équation du mouvement de la}$$

membrane. Pour cela on posera $\omega_e^2 = \frac{\epsilon_0 U_0^2}{\mu d^3}$ et on montrera que ω_e est bien homogène

à une pulsation.

Montrer aussi que l'approximation $\omega_e^2 \ll \omega_m^2$ est légitime et écrire dans ces conditions l'équation du mouvement à l'aide de e et u_2 . Quelle autre équation traduit le couplage entre x et u_2 en introduisant éventuellement la variable f déjà introduite au 2.?

Sachant que l'on étudie le régime forcé à la pulsation ω on passera en représentation complexe et on exprimera l'amplitude complexe U_2 de la tension aux bornes de la résistance R en fonction de E , ω , ω_e , ω_m , R et C_0 ; on simplifiera les calculs en tenant compte des valeurs numériques déjà données et en admettant que ω reste voisin de ω_m .

Pour $\omega = \omega_m$ on observe que $U_2 / E = 0,5$; en déduire ω_f . Tracer les courbes représentant les variations du module et de la phase de U_2 / E en fonction de ω .

ENS ; Durée 1h30

Corrigé

1.a. Calcul de F_{mx} : Paramétrons l'état thermodynamique de la position mécanique définie par x petit (x joue le rôle de dx car $dx = x - x_2 = x - 0$: à gauche $P_1 + dP_1$, $V_1 + dV_1$, $T_1 + dT_1$; à droite $P_2 + dP_2$, $V_2 + dV_2$, $T_2 + dT_2$.

– $F_{mx} = S((P_1 + dP_1) - (P_2 + dP_2))$; or à l'équilibre $x = 0$ $F_x = 0 = S(P_1 - P_2)$.

– $F_{mx} = S(dP_1 - dP_2)$.

– Appliquons la loi de Laplace caractéristique d'une transformation isentropique:

$$PV^\gamma = \text{cste} \text{ s'écrit } \quad \text{à gauche : } \frac{dP_1}{P_1} + \gamma \frac{dV_1}{V_1} = 0 ; \quad \text{à droite : } \frac{dP_2}{P_2} + \gamma \frac{dV_2}{V_2} = 0 ;$$

$$\text{or } V_1 = V_2 = Sd ; x \text{ joue le rôle de } dx ; \quad \frac{dV_1}{V_1} = \frac{xS}{dS} ; \frac{dV_2}{V_2} = \frac{-xS}{dS} ; P_1 = P_2 = P_0 ;$$

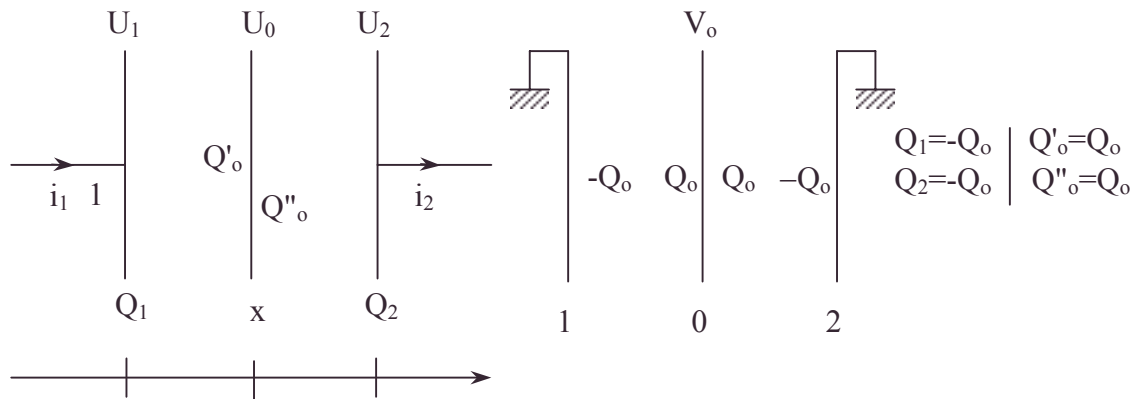
$$F_{mx} = \gamma S \left(\frac{P_2}{V_2} dV_2 - \frac{P_1}{V_1} dV_1 \right) ; F_{mx} = -2\gamma \frac{P_0 S}{d} x .$$

b. Appliquons le P.F.D. à la membrane : $ma_x = F_{mx}$;

$$\mu S \ddot{x} = \frac{-2\gamma P_0 S x}{d} \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_m^2 x = 0 \text{ avec } \omega_m = \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{\mu d}} ;$$

$$\text{AN : } d = 4.10^{-5} \text{ m} ; \mu = 2,8.10^{-2} \text{ kg.m}^{-2} ; \omega_m = 6.10^4 \text{ rad.s}^{-1} .$$

2.a. A l'équilibre, $x = 0$; on a :



D'après l'énoncé, $Q_1 = -Q_0 + q_1$; $Q_2 = -Q_0 + q_2$ et de par l'influence totale,

$$Q'_0 = -Q_1 ; Q''_0 = -Q_2 .$$

- $Q_1 = \sigma_1 S$ avec $E_{1x} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = -\frac{U_0 - u_1}{d + x}$; $Q_2 = \sigma_2 S$ avec $E_{2x} = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{U_0 - u_2}{d - x}$.

$$Q_1 = -\epsilon_0 S \frac{(U_0 - u_0)}{d + x} = -\frac{\epsilon_0 S U_0}{d} \left(1 - \frac{u_1}{U_0}\right) \left(1 - \frac{x}{d}\right) = -\epsilon_0 \frac{S V_0}{d} \left[1 - \frac{x}{d} - \frac{u_1}{U_0}\right] \text{ en se limitant au premier ordre.}$$

$$Q_2 = -\epsilon_0 S \frac{(U_0 - u_2)}{d - x} = -\epsilon_0 S \frac{U_0}{d} \left(1 - \frac{u_2}{V_0}\right) \left(1 + \frac{x}{d}\right) = -\epsilon_0 \frac{S V_0}{d} \left[1 + \frac{x}{d} - \frac{u_2}{U_0}\right] \text{ de même.}$$

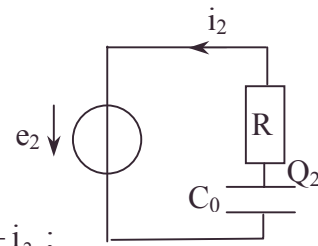
- D'autre part, la conservation de la charge permet d'écrire: $i_0 = \frac{dQ_1}{dt}$; $i_2 = -\frac{dQ_2}{dt}$.

- On obtient : $i_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{d}{dt} \left(U_0 \frac{x}{d} - u_2 \right)$; $i_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{d}{dt} \left(\frac{U_0 x}{d} + u_1 \right)$;

b. $u_2 = R i_2$; $u_1 = 0$; $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$;

$$i_2 + C_0 R \frac{di_2}{dt} = C_0 \frac{U_0}{d} \frac{dx}{dt} \text{ rappelle pour un circuit :}$$

$$e_2 = R i_2 - \frac{Q_2}{C_0} \text{ avec } i_2 = -\frac{dQ_2}{dt} \text{ soit } C_0 \frac{de_2}{dt} = R C_0 \frac{di_2}{dt} + i_2 ;$$



On identifie les deux expressions : $e_2 = f(t) = \frac{U_0}{d} x(t) + U_0$;

On ne confondra pas u_2 et e_2 .

c. La notation complexe permet de transformer les équations

$$\bar{I}_2 (1 + j\omega C_0 R) = C_0 \frac{U_0}{d} j\omega \vec{x} \Rightarrow \bar{I}_2 = \frac{U_0}{d} \frac{\vec{x}}{\left(r + \frac{1}{jC_0\omega}\right)} \text{ et } \bar{V}_2 = R \bar{I}_2 = \frac{R U_0 \vec{x}}{d \left(R + \frac{1}{jC_0\omega}\right)} ;$$

$$\bar{I}_1 = C_0 \frac{U_0}{d} j\omega \vec{x} .$$

• analyse dimensionnelle, dimension, homogénéité d'une grandeur [analyse dimensionnelle],
P.F.D., pression électrostatique, unité

Simplification numérique : $R = 10^3 \Omega$; $\frac{1}{C_0 \omega} = 10^6 \Omega$; $R \ll \frac{1}{C_0 \omega}$; $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \frac{jC_0 \omega U_0 \vec{x}}{d}$

$$\bar{u}_2 = jRC_0 \omega \frac{U_0}{d} \vec{x} ; |\vec{x}| = \frac{|\vec{U}_2| d}{RC_0 \omega U_0} ; \text{AN : } |x| = 4.10^{-6} \text{ m.}$$

3. Notons p_1, p_2 les pressions électrostatiques à gauche et à droite de la membrane:

$$F_{e_x} = -S(p_1 - p_2) ; \text{ or } p_1 = \frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon_0} ; p_2 = \frac{\sigma_2^2}{2\varepsilon_0} \text{ avec } \sigma_1 = -\varepsilon_0 \frac{(U_0 - u_1)}{d+x} ;$$

$$\text{soit } \sigma_1 = -\varepsilon_0 \frac{U_0}{d} \left(1 - \frac{u_1}{U_0} - \frac{x}{d}\right) \text{ de même, } \sigma_2 = -\varepsilon_0 \frac{U_0 - u_2}{d-x} = -\varepsilon_0 \frac{U_0}{d} \left(1 - \frac{u_2}{U_0} + \frac{x}{d}\right) ;$$

$$F_{e_x} = -\frac{S}{2} \varepsilon_0 \left[\left(\frac{U_0 - u_1}{d+x} \right)^2 - \left(\frac{U_0 - u_2}{d-x} \right)^2 \right].$$

$$F_{e_x} = -\frac{S}{2} \frac{U_0^2 \varepsilon_0}{d^2} \left[\left(1 - 2 \frac{u_1}{U_0} - 2 \frac{x}{d} \right) - \left(1 - 2 \frac{u_2}{U_0} + 2 \frac{x}{d} \right) \right] = -\frac{C_0 U_0^2}{2d} \left(2 \left(\frac{u_2 - u_1}{U_0} - \frac{2x}{d} \right) \right) ;$$

$$F_{e_x} = \frac{C_0 U_0}{d} \left[u_1 - u_2 + 2U_0 \frac{x}{d} \right].$$

Discussion : **a.** $u_1 = u_2$; $x > 0$; $F_e = 2C_0 U_0^2 \frac{x}{d^2} > 0$.

$$\text{b. } x = 0 ; u_1 > u_2 ; F_e = \frac{C_0 U_0}{d} (u_1 - u_2) > 0.$$

4.a. Ecrivons le P.F.D. pour la membrane : $ma_x = F_{m_x} + F_{e_x} + F_{f_x}$;

$$\mu S \ddot{x} = -2\gamma P_0 \frac{S}{d} x + S \varepsilon_0 \frac{U_0}{d^2} (u_1 - u_2) + 2S \varepsilon_0 U_0^2 \frac{x}{d^3} - \mu S \omega_f \frac{dx}{dt} ;$$

$$\ddot{x} + \omega_f \dot{x} + (\omega_m^2 - 2\omega_e^2)x = \frac{\varepsilon_0}{\mu} \frac{U_0}{d^2} (u_1 - u_2) = \omega_e^2 \frac{d}{U_0} (u_1 - u_2) ;$$

L'addition de ω_m^2 à $-2\omega_e^2$ montre l'homogénéité de ω_m^2 et de ω_e^2 ;
 ω_e est bien une pulsation.

AN : $\omega_m^2 = 3,6.10^9 \text{ s}^{-2}$; $\omega_e^2 = 1,776.10^7 \text{ s}^{-2}$; on a bien : $\omega_m^2 \gg 2\omega_e^2$ (cf. $100 \gg 1$).

$$u_1 = e : \ddot{x} + \omega_f \dot{x} + \omega_m^2 x = \omega_e^2 \frac{d}{U_0} (e - u_2) . \text{ Rappelons : } f(t) = \frac{U_0}{d} x(t) + U_0 .$$

$$\text{b. or } u_2 = Ri_2 ; \text{ avec } i_2 \text{ vérifiant } i_2 + RC_0 \frac{di_2}{dt} = \frac{C_0 U_0}{d} \dot{x} = C_0 \frac{df}{dt} ;$$

$$\text{soit } u_2 + RC_0 \frac{du_2}{dt} = \frac{RC_0 U_0}{d} \dot{x} = RC_0 \frac{df}{dt} .$$

$$\text{c. En notation complexe : } \bar{x}(-\omega^2 + j\omega\omega_f + \omega_m^2) = \omega_e^2 \frac{d}{U_0} (\bar{E} - \bar{u}_2) ;$$

$$\bar{U}_2(1 + jRC_0\omega) = j\omega RC_0 \frac{U_0}{d} \bar{x} ; \text{ d'où en éliminant } \bar{x} ,$$

$$\text{soit } \bar{u}_2 \frac{(1 + jRC_0\omega)}{jRC_0\omega \frac{U_0}{d}} (-\omega^2 + j\omega\omega_f + \omega_m^2) = \omega_e^2 \frac{d}{U_0} (\bar{E} - \bar{u}_2) ;$$

$$\frac{d}{U_0} \bar{u}_2 \left(\omega_e^2 + \frac{1+jRC_0\omega}{jRC_0\omega} (-\omega^2 + j\omega\omega_f + \omega_m^2) \right) = \omega_e^2 \frac{d}{U_0} \bar{E} \text{ permet d'obtenir } \bar{U}_2 \text{ sans}$$

approximation ;

$$\text{Simplifions : } \omega_m^2 = 3,6 \cdot 10^9 \text{ s}^{-2} ; \omega_m = 6 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1} ; RC_0\omega_m = 6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 1 + jRC_0\omega \neq 1.$$

$$\omega_e^2 \bar{u}_2 \left(1 - \frac{j}{RC_0\omega_e^2} \left(\frac{\omega_m^2}{\omega} - \frac{\omega^2}{\omega} + j \frac{\omega\omega_f}{\omega} \right) \right) = \omega_e^2 \bar{E} ;$$

$$\text{Simplifions : } \frac{\omega_m^2 - \omega^2}{\omega} = \frac{(\omega_m + \omega)(\omega_m - \omega)}{\omega} \neq 2(\omega_m - \omega) \text{ car } \omega \neq \omega_m ;$$

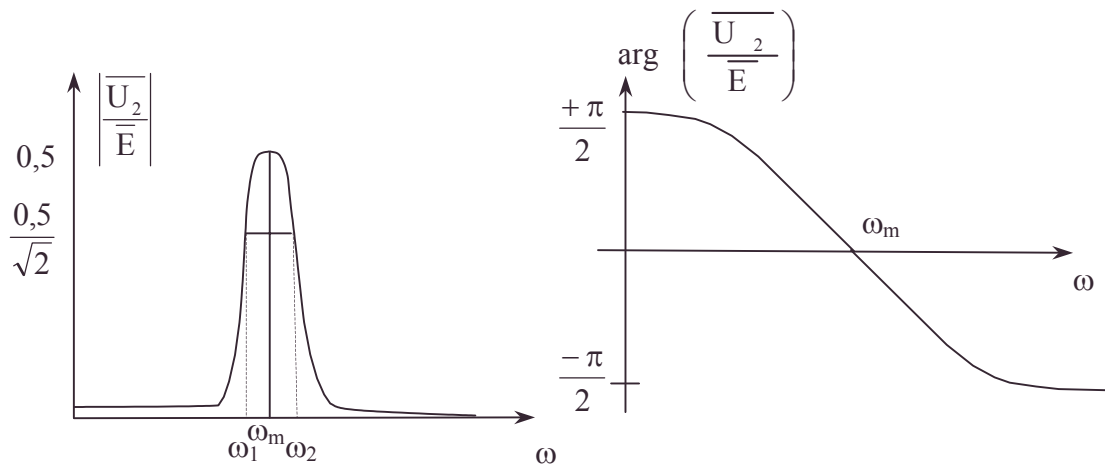
$$\bar{U}_2 = \frac{\bar{E}}{1 + \frac{\omega_f + 2j(\omega - \omega_m)}{RC_0\omega_e^2}}.$$

$$\text{d. } \left| \frac{\bar{U}_2}{\bar{E}} \right| = \frac{1}{2} \text{ pour } \omega = \omega_m \Leftrightarrow 1 + \frac{\omega_f}{RC_0\omega_e^2} = 2 \text{ soit } \omega_f = RC_0\omega_e^2 ;$$

$$\text{AN : } \omega_f = 1,776 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{e. En tenant compte de cette situation particulière : } \bar{U}_2 = \frac{\bar{E}}{2(1 + j \frac{\omega - \omega_m}{\omega_f})},$$

$$\text{soit } \left| \frac{\bar{U}_2}{\bar{E}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \omega_m}{\omega_f} \right)^2}} ; \arg \left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{E}} \right) = \arctan \left(\frac{\omega_m - \omega}{\omega_f} \right).$$



La bande passante est $\omega_2 - \omega_1 = 2\omega_f$.

$$\text{A.N.: } \omega_m = 60000 \text{ rad.s}^{-1} ; \omega_2 - \omega_1 = 3,6 \text{ rad.s}^{-1}.$$

On peut dire que le filtre est très sélectif.

1.3.4. Oscillations d'un satellite géostationnaire

Voir page 76.

1.3.5. Stabilisation d'un satellite

Voir page 275.

1.3.6. Système à ressorts

Voir page 224.

1.4. Champ newtonien

1.4.1. Atome de Bohr – Atome exotique Diffusion de Rutherford

1. L'atome d'hydrogène est constitué par un électron, de masse m_1 et de charge $-q_e$, en interaction supposée purement électrostatique avec un proton, de masse $m_2 = 1836 m_1$ et de charge $+q_e$, où q_e désigne la valeur absolue de la charge élémentaire ($1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)

a. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction $U(r)$, en posant, pour simplifier l'écriture : $e^2 \equiv \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$, où $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$ est la constante fondamentale de la loi de Coulomb en unités internationales ou S.I.

b. Pour la particule fictive de masse réduite m équivalente à ce système, un mouvement simple possible, est un mouvement circulaire de centre le barycentre des 2 particules ($r = a = \text{cste}$) uniforme ($|\vec{v}| = \text{cste}$). Exprimer a et l'énergie E du système en fonction de m , de e^2 et du carré J^2 du moment cinétique.

2. Dans ce qui précède, il subsiste une indétermination que Bohr, en 1913, a levée en postulant que les seuls mouvements physiquement possibles sont ceux pour lesquels le moment cinétique du système est égal à un multiple entier d'une constante fondamentale \hbar : $J = n \hbar$, avec $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

a. En déduire les expressions des rayons a_n et des énergies E_n (niveaux d'énergie) possibles.

b. Le positronium est un "atome" exotique tout-à-fait semblable à l'atome d'hydrogène, mais où le proton est remplacé par un électron positif ou positron (masse $= m_1$, charge $= +q_e$). Dans son état dit "fondamental" ($n = 1$) l'atome d'hydrogène a un rayon de 53 pm et une énergie de $-13,6 \text{ eV}$. Quels sont le rayon de l'orbite circulaire de l'électron et l'énergie du positronium dans son état fondamental ?

3. Une autre hypothèse de Bohr permet d'expliquer correctement le spectre lumineux de l'atome d'hydrogène : lorsque l'atome passe d'un niveau d'énergie E_n à un autre niveau $E_{n'} < E_n$, il émet une lumière monochromatique de longueur d'onde λ inversement proportionnelle à la différence d'énergie $\Delta E = E_n - E_{n'}$.

a. Quelle est la relation entre λ et la masse réduite m pour une "transition" $n \rightarrow n'$ donnée ? On donne $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et c la vitesse de la lumière.

b. Une des raies du spectre de l'hydrogène a une longueur d'onde de 486132,0 pm. En 1932, H. Urey a découvert que cette raie a une très proche voisine, de très faible intensité, et de longueur d'onde 485997,5 pm. On l'attribue à la même transition, non dans l'atome d'hydrogène, mais dans l'un de ses isotopes (deutérium) présent en très faible quantité (0,015 %) dans l'hydrogène naturel, et dont le noyau (deutéron) a une masse $m_2' \equiv \alpha m_2$ supérieure à celle du proton. Exprimer le rapport $\alpha \equiv \frac{m_2'}{m_2}$ des masses

du deutéron et du proton en fonction de $\frac{m_2}{m_1}$ et du rapport $\frac{\lambda}{\lambda'}$ des longueurs d'onde des

deux raies voisines. calculer la valeur numérique de α . C'est comme cela qu'a été découvert le deutérium...

c. Si l'on supposait le noyau fixe dans le laboratoire (Bohr), cela reviendrait à lui attribuer une masse infinie. Dans ces conditions, représenter sur un dessin la position de l'électron sur sa trajectoire à un certain instant, et après un demi-tour, et mettre en évidence la grandeur manifestement non conservée dans ce mouvement.

4. Un proton P_1 (masse m_1) venant de l'infini, s'approche d'un noyau lourd P_2 (masse m_2 , charge Zq_e), et passerait à la distance b de ce dernier (b = "paramètre d'impact") si l'interaction n'existait pas. En réalité, le noyau repousse le proton et, si l'on pose $m_2 = \infty$, la trajectoire du proton a l'allure représentée sur la figure 3.

a. La quantité de mouvement du système est-elle conservée ?

b. Exprimer le moment cinétique du système et son énergie, lorsque le proton est à l'infini (vitesse v_0), et lorsque le proton est en S (vitesse v_s).

c. En déduire une équation qui permettrait de calculer la distance minimum s entre le proton et le noyau, connaissant b et l'énergie cinétique initiale $T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$ du proton.

5. Si le proton a une énergie suffisante pour s'approcher à une distance du noyau égale au rayon a de ce dernier, il a de fortes chances d'entrer dans le noyau, et d'amorcer sa "cassure" (transmutation). Dans la question précédente, on supposera que $b = 0$. On assimilera le noyau à une sphère de rayon a , uniformément chargée en volume, et dont le volume est égal à environ A fois le volume d'un nucléon (proton ou neutron). On adoptera $a_0 = 1,44 \cdot 10^{-15}$ m comme "rayon" d'un nucléon isolé.

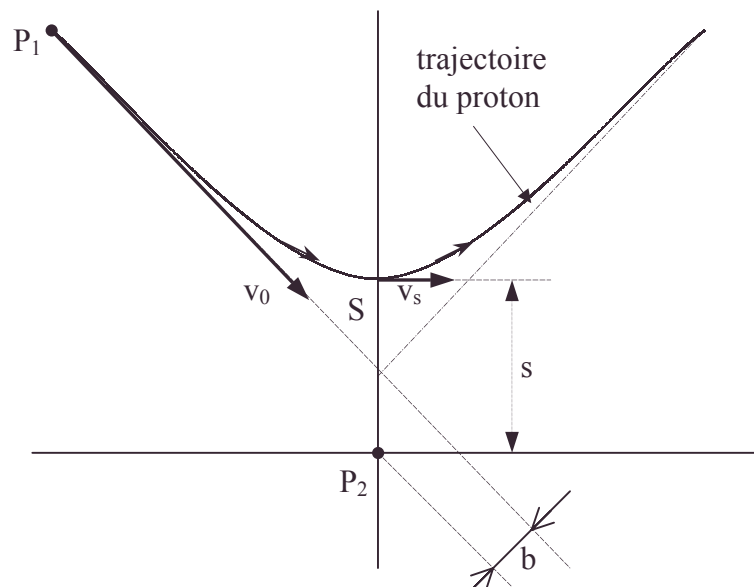


Figure 3

a. Calculer, en MeV, ($1 \text{ MeV} = 10^6$ électron volts), l'énergie $\frac{e^2}{a_0}$.

b. En déduire une formule simple donnant, en MeV, l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique qu'il faut communiquer à des protons, pour qu'ils puissent casser des noyaux de nombre atomique Z et de nombre de masse A .

c. Calculer cette énergie, en MeV, pour le noyau ${}_{13}^{27}\text{Al}$. On sait que $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J mais on ne fera pas cette conversion ici.

CCP ; Durée : 1h

Corrigé

$$1.a. dU = -\vec{F}d\vec{r} = \frac{-(-q_e^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r d\vec{r} = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr ; U = \frac{-q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + K ,$$

convention simplificatrice $U(\infty) = 0 = K$; $U = \frac{-e^2}{r}$.

b. $\vec{\text{grad}} U = \frac{e^2}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{e^2}{r^2} \vec{u}_r$; cette équation est satisfaite pour un mouvement circulaire uniforme de rayon a , de vitesse $v = \omega a$, si :

$$m \vec{a} = -m\omega^2 a \vec{u}_r = -\frac{e^2}{a^2} \vec{u}_r \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{e^2}{ma^3} \Leftrightarrow v^2 = \frac{e^2}{ma}.$$

Dans le nouveau repère d'origine O' barycentre des 2 particules : $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}$ et

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{m}{m_1} \vec{r} ; \vec{r}_2 = -\frac{m}{m_2} \vec{r} , \text{ et en dérivant : } \vec{v}_1 = \frac{m}{m_1} \vec{v} ; \vec{v}_2 = -\frac{m}{m_2} \vec{v} .$$

$$\alpha. \vec{J} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge m \vec{v} = \vec{r} \wedge m \vec{v} ;$$

$$J^2 = m^2 v^2 a^2 = me^2 a \text{ pour un mouvement circulaire. } a = \frac{J^2}{me^2} .$$

$$\beta. T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m^2 v^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a} .$$

$$U = -\frac{e^2}{a} \Rightarrow E = T + U = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{a} = \frac{-me^4}{2J^2} .$$

$$2.a. 1.b.. \alpha \Rightarrow a_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2} ; 1.b.\beta \Rightarrow E_n = \frac{-me^4}{2n^2 \hbar^2} .$$

b. Soit pour l'atome d'hydrogène :

$$m = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{1836m_1}} = \frac{1836}{1837} m_1 ; a_{1B} = \frac{\hbar^2}{\frac{1836}{1837} m_1 e^2} ; E_B = -\frac{1836}{1837} \frac{m_1}{2\hbar^2} e^4 .$$

Pour le positronium : $m = \frac{m_1}{2}$.

$$a_1 = \frac{\hbar^2}{\frac{m_1}{2} e^2} ; E_1 = -\frac{m_1}{4\hbar^2} e^4 ; \text{ par élimination, } a_1 = a_{1B} \cdot \frac{1837}{918} ; E_1 = E_B \cdot \frac{918}{1837} .$$

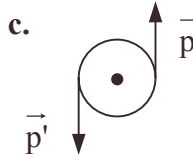
AN : $a_1 = 106,1 \text{ pm} = 1,061 \cdot 10^{-10} \text{ m} ; E_1 = -6,796 \text{ eV} .$

3.a. L'énergie du photon émis $h\nu$ assure la conservation de l'énergie :

$$E_n - E_{n'} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{-e^4}{2\hbar^2} m \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{-\hbar^3 4\pi c}{e^4 m \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)} ; n > n' \text{ car } \lambda > 0 .$$

$$b. \lambda' = -\hbar^3 \frac{c}{e^4 m'} \frac{4\pi}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)} ; \text{ or } m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ et } m' = \frac{\alpha m_1 m_2}{m_1 + \alpha m_2} ;$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{m'}{m} = \frac{\alpha(m_1 + m_2)}{m_1 + \alpha m_2}; \quad \alpha = \frac{\frac{\lambda}{\lambda'}}{1 + \frac{m_2}{m_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'}\right)}; \quad \text{AN : } \alpha = 2,034.$$



On voit $\vec{p}' = -\vec{p}$.

On n'a pas conservation de la quantité de mouvement (car on a négligé celle du proton).

4.a. $T + U = E$ (constante).

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1}; \quad U = \frac{Ze^2}{r}; \quad \text{on a : } \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{Ze^2}{r} = \text{constante.}$$

Conclusion : ni le module de \vec{p}_1 ni la direction de \vec{p}_1 vu la figure 3 ne sont conservés.

b.c.α. A l'infini, $J_\infty = -bm_1 v_0$; $E_\infty = T + U = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + 0$.

β. En S, $J_S = -sm_1 v_S$; $E_S = \frac{1}{2}m_1 v_S^2 + \frac{Ze^2}{s}$.

Exprimons la conservation de J et de E ;

$$\text{on a : } bv_0 = sv_S \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_S^2 + \frac{Ze^2}{s} \Rightarrow \frac{Ze^2}{s} = -\frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}m_1 \frac{b^2 v_0^2}{s^2}.$$

On obtient l'équation du second degré en $\frac{1}{s}$:

$$b^2 T_0 \left(\frac{1}{s}\right)^2 + Ze^2 \left(\frac{1}{s}\right) - T_0 = 0; \quad s = \frac{2b^2 T_0}{-Ze^2 + \sqrt{Z^2 e^4 + 4b^2 T_0^2}}.$$

On élimine l'autre racine négative.

5.a. A.N. : $a_0 = 1,44 \cdot 10^{-15} \text{ m}$; $e^2 = (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \Rightarrow \frac{e^2}{a_0} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1 \text{ MeV}$.

b. Faisons $b = 0$ dans 4.b.c.β. ; $s = \frac{Ze^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{Ze^2}{T_0}$.

Or le rayon d'un noyau de nombre de masse A est : $r = a_0 A^{\frac{1}{3}}$.

En effet, $Am_0 = \frac{4}{3}\pi a_0^3 A \mu_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu_0$; la condition $s \leq r \Rightarrow T_0 \geq \frac{Ze^2}{a_0 (A)^{\frac{1}{3}}}$;

En prenant le MeV pour unité, $T_0 \geq \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}}$.

c. A.N. : $Z = 27$; $A = 13$; $T_0 \geq 11,48 \text{ MeV}$.

1.4.2. Satellite géostationnaire Chocs avec des météorites

Le problème ci-après évoque diverses questions relatives au lancement et au comportement d'un satellite géostationnaire.

I. Un satellite géostationnaire est un engin G placé sur orbite circulaire de telle sorte qu'il reste sur la verticale d'un point fixe du sol et à une altitude constante.

On admettra comme repère galiléen $Oxyz$ orthonormé et tel que O soit le centre de la terre, Oz l'axe de rotation de la terre et que le plan xOz passe par le centre du soleil.

On supposera la terre sphérique de rayon R , Ω sa vitesse de rotation ; M la masse de l'engin ; ρ sa distance au centre de la terre ; $\frac{KM}{\rho^2}$ l'intensité de la force d'attraction de la

terre, seule force d'attraction considérée.

1. Montrer que pour être géostationnaire G doit être dans le plan équatorial xOy .

2. Donner la valeur ρ_1 de ρ et la vitesse absolue V_1 qui correspondent à la position d'équilibre.

3. Calculer l'énergie minimale nécessaire pour mettre G dans cette position en partant d'un équilibre au sol.

4. Application numérique avec $R = 6400$ km ; $M = 0,5$ tonne ; accélération de la pesanteur $g_0 = 9,8$ m/s².

II. On imagine, comme moyen de lancement du satellite, une fusée qui fonctionne dans les conditions suivantes : sa masse initiale, y compris charges transportées, est m_0 .

A partir de l'instant $t = 0$, elle éjecte à l'opposé de sa direction de marche des particules de vitesse moyenne relative W avec un débit massique constant μ .

A l'instant t_1 , fin de la phase propulsive, tout débit de particules cesse et la masse de la fusée n'est plus que m_1 .

On suppose dans toute la deuxième question que la résistance de l'air est négligeable et que la fusée s'élève à la verticale du point de lancement par rapport au sol.

1. Quelle approximation faut-il faire concernant le repère du mouvement pour respecter cette dernière hypothèse ?

2. On suppose g constant et égal à g_m pendant la phase de propulsion.

Montrer que la vitesse de la fusée est $v = -g_m t - W \ln \frac{m}{m_0}$.

3. En déduire la hauteur h_1 atteinte par la fusée à l'instant t_1 .

4. Dans la phase ultérieure, sans propulsion, on reprend $g = \frac{K}{\rho^2}$.

Calculer la hauteur maximale h_2 atteinte par la fusée en fonction de h_1 et $V_1 = V(t_1)$.

5. Applications numériques : $m_0 = 55$ tonnes ; $m_1 = 5$ tonnes ; $\mu = 400$ kg/s ; $W = 2,5$ km/s ; $g_m = 9,6$ m.s⁻².

III. Au cours de l'ascension de la fusée, celle-ci émet vers la terre avec une période τ très courte des signaux électromagnétiques (top-radars) qui se propagent à la vitesse de la lumière c . Grâce à leur réflexion sur la terre, la fusée reçoit leur écho.

Exprimer l'intervalle de temps qui s'écoule entre l'émission et la réception de l'écho, en fonction de l'altitude h de la fusée et de sa vitesse V supposée constante. Calculer la période τ' du signal écho. En déduire que l'on peut ainsi évaluer la vitesse et l'altitude de la fusée. Remarque : cette question ne fait intervenir aucun élément relativiste.

IV. Reprenant le satellite G en position d'équilibre géostationnaire, nous voulons aborder l'étude des conséquences d'un choc par météorite.

1. Nous supposons ce choc direct et élastique en assimilant satellite et météorite à des masses ponctuelles ; nous appelons m la masse du météorite et \vec{V} sa vitesse absolue, de composantes X sur la tangente à la trajectoire de G : Y sur \overrightarrow{GO} ; Z parallèlement à Oz .

Calculer les composantes de la vitesse absolue \vec{V}_1 de G après le choc en fonction de X , Y , Z , M , m , V_1 et les mettre sous la forme $(1 + \varepsilon)V_1$, ηV_1 et ξV_1 .

2. Pour déterminer la trajectoire de G après le choc, il faut reprendre le calcul du mouvement d'un point matériel de masse M soumis à la force centrale d'intensité $\frac{MK}{\rho^2}$.

Il est recommandé d'opérer comme suit :

a. Montrer que le mouvement est plan.

b. Ecrire les équations en coordonnées polaires ρ et θ .

Prendre comme constante la vitesse aréolaire A .

c. Poser $u = \frac{1}{\rho}$ et écrire l'équation différentielle en $u(\theta)$. Donner la solution générale

de cette équation différentielle sous la forme $u = \frac{1}{\rho} = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{p}$.

3. Calculer l'excentricité e de la trajectoire après choc en fonction de ε dans le cas où la vitesse du météorite au moment du choc est $(X, 0, 0)$.

4. Calculer l'excentricité e de la trajectoire après choc en fonction de η dans le cas où la vitesse du météorite au moment du choc est $(0, Y, 0)$.

5. Représenter par un croquis les trajectoires trouvées aux questions 3. et 4. précédentes.

V. Stabilisation par gravitation

Pour étudier le "balancement" du satellite, nous nous bornerons aux hypothèses suivantes :

le satellite est formé de deux points matériels A et B de même masse $M/2$ liés par une barre sans masse mais rigide de longueur 2ℓ .

1. Supposons tout d'abord A et B alignés avec O ; calculer la traction exercée par A et B sur la barre ; montrer que si l'on prend ℓ/ρ_1 comme infiniment petit et si l'on appelle

ρ'_1 la nouvelle distance OG, $\frac{\rho'_1 - \rho_1}{\rho_1}$ est un infiniment petit du second ordre.

Nous confondons désormais ρ'_1 et ρ_1 .

2. Dans le cas général où A et B ne sont pas forcément alignés avec O, montrer que le moment des forces de gravitation par rapport au point G s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{M\Omega^2\rho_1^3}{2} \left(\frac{1}{OA^3} - \frac{1}{OB^3} \right) (\vec{OG} \wedge \vec{GA}).$$

3. A partir de cette formule, que peut-on dire du mouvement du satellite autour de G ?

4. Donner la pulsation des petites oscillations.

Autres concours ; Durée : 4h

Corrigé

I.1. Le satellite G a ici une trajectoire plane circulaire de centre O.

• Binet [formule de], couple des forces de gravitation, développement au premier ordre ou plus, équilibre, excentricité d'une conique, force, linéarisation, météorite, oscillations d'un satellite, satellite, traction, trajectoire

Le repère mobile de centre O lié à G a $\vec{\Omega}_G$ perpendiculaire au plan de la trajectoire. Or l'absence de mouvement relatif de G par rapport à la terre signifie qu'ils ont même $\vec{\Omega}$ dans le repère barycentrique terrestre Oxyz (en translation). Le plan de la trajectoire est donc perpendiculaire en O à Oz // $\vec{\Omega}$; G est donc dans le plan équatorial xOy.

2. Ecrivons le P.F.D. dans Oxyz : $M\vec{a} = -\frac{KM}{\rho^2}\vec{u}_r$. On sait que $g_o = \frac{K}{R^2}$.

Or pour un mouvement circulaire $\vec{a} = -\rho\Omega^2\vec{u}_r + \rho\dot{\Omega}\vec{u}_\theta$.

On tire $\rho_1\Omega^2 = \frac{K}{\rho_1^2} \Rightarrow \rho_1 = \left(\frac{g_o R^2}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow V_1 = \rho_1\Omega = (g_o R^2 \Omega)^{\frac{1}{3}}$.

3. Comparons l'énergie mécanique en vol géostationnaire :

$E = \frac{1}{2}MV_1^2 - \frac{KM}{\rho_1} = -\frac{M}{2}(g_o R^2 \Omega)^{\frac{2}{3}}$, à l'énergie mécanique de l'équilibre au sol :

$E_0 = 0 - \frac{KM}{R} = -Mg_o R$. Il faut donc fournir $E - E_0 = Mg_o R \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R\Omega^2}{g_o}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$.

4. La rotation de la terre a pour $\Omega = \frac{2\pi}{24.60.60} \text{ rad.s}^{-1}$.

A.N. : $\rho_1 = 42,34.10^3 \text{ km}$; $V_1 = 3,08 \text{ km.s}^{-1}$; $E - E_0 = 2,9.10^{10} \text{ J}$.

II.1. Pour considérer le lancement vertical dans le repère local, il faut négliger la force de Coriolis, seule force à ne pas être verticale ; soit considérer le repère local comme galiléen.

2.a. Considérons le système fermé (fusée et gaz) de masse m(t).

Ecrivons $\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_R = m\vec{g}$; or à l'instant t : $\vec{p}(t) = m(t)\vec{V}(t)$ et à l'instant t + dt :

$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t) + d\vec{p} = m(t+dt)\vec{V}(t+dt) = m(t)\vec{V}(t) + dm(\vec{V} + \vec{W})$,

d'où $d\vec{p} = (m(t) + dm)(\vec{V}(t) + d\vec{V} - dm(\vec{V} + \vec{W}) - m(t)\vec{V}(t)) = m(t)d\vec{V} - dm\vec{W}$ à l'ordre 1.

Il reste $m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \frac{dm}{dt}\vec{W}$.

En projection : $\vec{W} = -W\vec{x}$; $\vec{g} = -g_m\vec{x}$; $\frac{dm}{dt} = -\mu$.

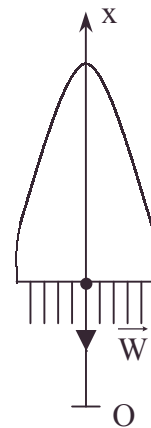
$m\frac{dV_x}{dt} = -mg_m + \mu W$.

b. $\frac{dm}{dt} = -\mu \Rightarrow m = m_0 - \mu t$.

c. $dV_x = -g_m dt + \frac{\mu W dt}{m_0 - \mu t} \Rightarrow V_x(t) = -g_m t - W \ln \frac{m}{m_0}$.

3. L'instant t_1 est déterminé par $m_0 - \mu t_1 = m_1$,

soit $t_1 = \frac{m_0 - m_1}{\mu}$; $\frac{dx}{dt} = V_x \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}g_m t^2 + Wt - \frac{W}{\mu}(m_0 - \mu t) \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$,



$$\text{d'où : } h_1 = -\frac{g_m}{2} \left(\frac{m_0 - m_1}{\mu} \right)^2 + \frac{W}{\mu} m_1 \left(\frac{m_0}{m_1} - 1 - \ln \frac{m_0}{m_1} \right).$$

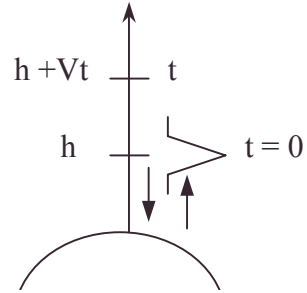
$$4. \text{ A } t = t_1, \text{ la vitesse atteinte est : } V_1 = -g_m \frac{m_0 - m_1}{\mu} + W \ln \frac{m_0}{m_1}.$$

L'énergie mécanique se conserve entre h_1 et h_2 (où $V_2 = 0$).

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{m_1 K}{R + h_1} = 0 - \frac{m_1 K}{R + h_2} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{\frac{1}{R + h_1} - \frac{V_1^2}{2g_0 R^2}} - R.$$

$$5. \text{ AN : } h_1 = 162,6 \text{ km ; } V_1 = 4795 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow h_2 = 1721 \text{ km}.$$

III.a. Considérons l'émission à $t = 0$ à l'altitude h d'un top-radar. A l'instant t de la réception de l'écho la fusée est en $z = h + Vt$, le top a parcouru $h + (h + Vt)$ à la célérité c pendant la durée t : $2h + Vt = ct \Rightarrow t = \frac{2h}{c - V}$.



b. Le top-radar suivant émis à l'instant τ en $z = h + V\tau$ a son écho reçu à l'instant t' en $z' = h + Vt'$. Il a parcouru $(h + V\tau) + (h + Vt')$ à la célérité c pendant la durée $t' - \tau$: $2h + v(\tau + t') = c(t' - \tau)$.

$t' = \frac{(V + c)\tau + 2h}{c - V}$, soit un retard après l'écho de **a** de $t' - t = \frac{V + c}{V - c} \tau = \tau'$ si le phénomène se renouvelle périodiquement avec la période τ .

c. $b \Rightarrow V = c \frac{\tau' - \tau}{\tau' + \tau}$; on a bien trouvé la vitesse de la fusée à partir de τ et τ' .

d. Vu **c.** $2h = (c - V)t = \frac{\tau \tau c}{\tau + \tau'}$; on a évalué h à partir de t , τ et τ' .

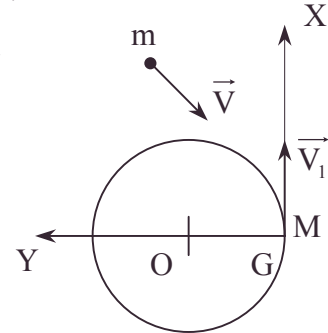
IV.1. Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement dans le repère absolu défini par X, Y, Z et G à l'instant t du choc [A] : $M\vec{V}_1 + m\vec{V} = M\vec{V}_1' + m\vec{V}'$, soit encore :

$$M(\vec{V}_1 - \vec{V}_1') = m(\vec{V} - \vec{V}'). \text{ Projétons [A]:}$$

$$① \quad MV_1 + mX = M(1 + \varepsilon) V_1 + mX'.$$

$$② \quad 0 + mY = M\eta V_1 + mY'.$$

$$③ \quad 0 + mZ = M\xi V_1 + mZ'.$$



La conservation de l'énergie cinétique s'écrit : $\frac{1}{2} M V_1^2 + \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} M V_1'^2 + \frac{1}{2} m V'^2$,

$$\text{ou encore } M(\vec{V}_1 - \vec{V}_1')(\vec{V}_1 + \vec{V}_1') = m(\vec{V} - \vec{V}')(\vec{V} + \vec{V}'),$$

soit en remplaçant $M(\vec{V}_1 - \vec{V}_1') = m(\vec{V} - \vec{V}')$:

$$m(\vec{V} - \vec{V}')[(\vec{V}_1 + \vec{V}_1') - \vec{V} - \vec{V}'] = \vec{0} \quad \forall \vec{V}, \vec{V}_1' \Rightarrow \vec{V} - \vec{V}_1' = -(\vec{V} - \vec{V}_1). \quad [\text{B}]$$

On voit l'inversion du signe de la vitesse relative du fait du choc élastique.

On obtient par projection de [B]:

$$\begin{aligned} X' - (1 + \varepsilon) V_1 &= V_1 - X & \textcircled{1}' \\ Y' - \eta V_1 &= 0 - Y & \textcircled{2}' \\ Z' - \xi V_1 &= 0 - Z & \textcircled{3}' \end{aligned}$$

Traisons les équations par la combinaison linéaire de la forme (i) + m(i') qui fait disparaître X', Y' et Z', composantes de la vitesse absolue \vec{V}' du météorite après le choc.

$$\begin{aligned} mX + V_1 (M - m(1 + \varepsilon)) &= M(1 + \varepsilon) V_1 - mX + mV_1, \\ mY - m\eta V_1 &= M\eta V_1 - mY, \\ mZ - m\xi V_1 &= M\xi V_1 - mZ. \end{aligned}$$

On tire : $1 + \varepsilon = \frac{2mX + (M - m)V_1}{(M + m)V_1}$; $\eta = \frac{2mY}{(M + m)V_1}$; $\xi = \frac{2mZ}{(M + m)V_1}$, et par là même

les composantes de la vitesse absolue \vec{V}' de G après le choc en multipliant par V_1 .

2.a. $\vec{f} = -\frac{MK}{\rho^2} \vec{u}_r \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{OG} \wedge \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_0 = \vec{OG} \wedge M\vec{V}_G = \vec{\sigma}_1$ vecteur constant

$\Rightarrow G \in \text{plan passant par O orthogonal à } \vec{\sigma}_1$; ainsi $M\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma_1$.

b. En coordonnées polaires : $\vec{OG} = \rho \vec{u}_r$; $\vec{V}_G = \dot{\rho} \vec{u}_r + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

$$\vec{a}_G = \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r + \left(2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} \right) \vec{u}_\theta.$$

Le P.F.D. s'écrit $M\vec{a}_G = \vec{f}$, soit en projections :

selon \vec{u}_r : $M \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 \right) = -\frac{MK}{\rho^2}$; selon \vec{u}_θ : $M \left(2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} \right) = 0$.

Introduisons la vitesse aréolaire :

$$\frac{dS}{dt} = A = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{car } d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{OG} \wedge d\vec{OG}) \Rightarrow dt = \frac{\rho^2 d\theta}{2A} = \frac{d\theta}{2Au^2} \text{ si } u = \frac{1}{\rho}.$$

c. Formule de Binet : $u = \frac{1}{\rho}$; $\frac{du}{d\theta} = -\frac{\frac{d\rho}{d\theta}}{\rho^2} = u^2 \frac{d\rho}{d\theta}$; $\dot{\theta} = 2Au^2$.

$$\vec{V} = \frac{d\rho}{\rho^2 d\theta} \vec{u}_r + \rho \frac{d\theta}{\rho^2 d\theta} 2Au_\theta \vec{u}_\theta = -2A \frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + 2Au \vec{u}_\theta ; \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt},$$

vu dt et $\frac{du_r}{d\theta} = u_\theta$, $\frac{du_\theta}{d\theta} = -u_r$

$$\vec{a} = -\frac{4A^2 u^2 d \left[\frac{du}{d\theta} \right]}{d\theta} \vec{u}_r - 2A \frac{du}{d\theta} 2Au^2 \vec{u}_\theta + 4A^2 u^2 \frac{du}{d\theta} \vec{u}_\theta - 2Au \cdot 2Au^2 \vec{u}_r.$$

$$\vec{a} = -4A^2 u^2 \vec{u}_r \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \frac{\vec{f}}{M} = -Ku^2 \vec{u}_r ;$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{4A^2} \Rightarrow u = \frac{1}{\rho} = \frac{K}{4A^2} + B \cos(\theta - \theta_0)$$

B une constante à déterminer (par les conditions initiales de position et de vitesse), u est donc de la forme $\frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{p}$ avec $p = \frac{4A^2}{K}$ et $e = \frac{4BA^2}{K}$, avec $K = g_0 R^2$.

On notera que $\frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{\rho} \sin(\theta - \theta_0)$.

3. On donne $Y = 0; Z = 0 \Rightarrow \eta = \xi = 0$,

G_0 est apogée ou périgée et $\theta_0 = 0(\text{modulo } \pi)$

Vu l'orthogonalité de \vec{V}_1 et \vec{OG}_0 ,

On prendra $\theta_0 = 0$ et on acceptera e

algébrique alors : $\rho_1 = \frac{p}{1+e}$

La vitesse aréolaire après le choc :

$$A = \frac{1}{2} \rho_1 V_1' = \frac{1}{2} \rho_1 V_1 (1 + \varepsilon) \text{ et vu p en 2.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_1} = \frac{1+e}{p} = \frac{K(1+e)}{4A^2} = \frac{K(1+e)}{\rho_1^2 V_1^2 (1+\varepsilon)^2}.$$

Or pour la même condition initiale de position la trajectoire circulaire $e = 0$ correspond à $\varepsilon = 0$ ce qui redonne ce que l'on sait bien :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{K}{\rho_1^2 V_1^2} \Rightarrow (1+\varepsilon)^2 = 1+e \Rightarrow e = (1+\varepsilon)^2 - 1.$$

4. On donne $X = 0, Z = 0 \Rightarrow \xi = 0$, $(1+\varepsilon)V_1 = \frac{(M-m)}{(M+m)}V_1$ d'après 1..

Vu les formules de **IV.2.c.**, $\vec{V}_1' = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)V_1 \vec{X} + \eta V_1 \vec{Y} = 2A_1 u_1 \vec{X} + 2A_1 \left(\frac{du}{d\theta}\right) \vec{Y}$ vu le choix des axes à $t = 0$, A_1 nouvelle vitesse aréolaire.

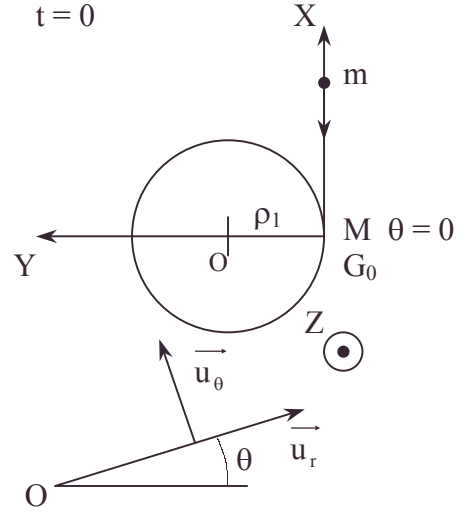
$A_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \left(\frac{M-m}{M+m}\right) V_1$ dans ce 4. ; les conditions initiales s'écrivent vu 2. avec $\theta = 0$;

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta_0 ; \eta V_1 = \rho_1 \left(\frac{M-m}{M+m}\right) V_1 \frac{e}{p} \sin \theta_0 \text{ or } \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 = 1.$$

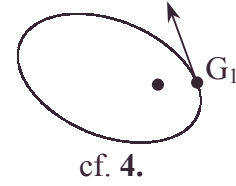
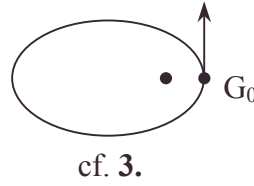
$$\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \left(\frac{p}{e \rho_1}\right)^2 + \frac{p^2}{e^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{p}\right)^2 = 1$$

or $p = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \frac{\rho_1^2 V_1^2}{K} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \frac{\rho_1^2 V_1^2}{\rho_1 V_1^2} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 \rho_1$ permet de remplacer

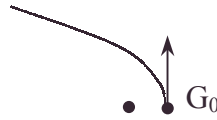
$$\frac{p}{\rho_1} \Rightarrow ; e^2 = \left[\eta^2 + \left(\frac{4Mm}{(M+m)^2} \right)^2 \right].$$



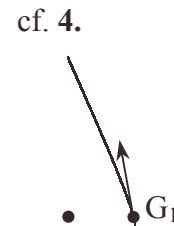
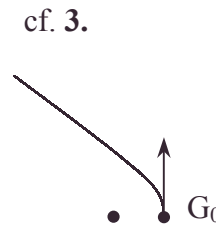
5. On aura une ellipse si $|e| < 1$:



On aura une parabole pour $|e| = 1$:

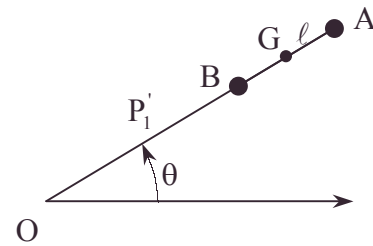
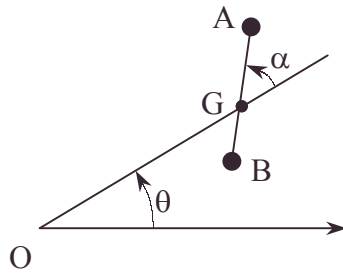


On aura une hyperbole pour $|e| > 1$:



L'action du foyer est toujours attractive.

V.



1. $\alpha \equiv 0$.

Appliquons le PFD à A : $\frac{M}{2} \vec{a}_A = \vec{T}_A + \frac{M}{2} \vec{g}_A$ [1].

avec $\vec{g}_A = -\vec{u}_r \frac{g_0 R^2}{OA^2}$ et $\vec{a}_A = -\vec{u}_r \|\vec{OA}\| \Omega^2$ avec $\Omega = \frac{V_1}{\rho_1}$;

g_0 valeur de g_A pour $OA = R$ le rayon terrestre.

Appliquons le PFD à B : $\frac{M}{2} \vec{a}_B = \vec{T}_B + \frac{M}{2} \vec{g}_B$ [2].

avec $\vec{g}_B = -\vec{u}_r \frac{g_0 R^2}{OB^2}$ et $\vec{a}_B = -\vec{u}_r \|\vec{OB}\| \Omega^2$;

Remarquons : la barre subit $-\vec{T}_A$ et $-\vec{T}_B$ et $-\vec{T}_A - \vec{T}_B = \vec{0}$ la barre étant sans masse.

a. Eliminons les termes en Ω^2 : [1]. \vec{OB} - [2]. \vec{OA} donne avec $\vec{T}_A = T_A \vec{u}_r$:

$0 = T_A (OB + OA) + \frac{M}{2} g_0 R^2 \left(\frac{OA}{OB^2} - \frac{OB}{OA^2} \right)$, soit en projection sur \vec{u}_r :

$$T_A = \frac{M}{2} \frac{g_0 R^2 (OB^3 - OA^3)}{OA^2 OB^2 (OA + OB)}.$$

• P.F.D., parabole

Faisons un développement limité : $OA = \rho_1' + \ell$; $OB = \rho_1' - \ell$.

Le seul terme intéressant est $OB^3 - OA^3 = \rho_1'^3 \left(1 - \frac{3\ell}{\rho_1'}\right) - \rho_1'^3 \left(1 + \frac{3\ell}{\rho_1'}\right) = 6\rho_1'^2 \ell$.

$$OA^2 OB^2 (OA + OB) \sim \rho_1'^2 \rho_1'^2 2\rho_1' .$$

$$\vec{T}_A = -\vec{T}_B = -\frac{3}{2} M g_0 R^2 \frac{\ell}{\rho_1'^3} \vec{u}_r .$$

b. Le PDF appliqué au système s'écrit : $-\frac{M}{2} g_0 R^2 \left(\frac{\vec{OA}}{OA^3} + \frac{\vec{OB}}{OB^3} \right) = -M \Omega^2 \vec{OG}$. [C]

Si la masse était concentrée en G : $OA = OB = OG = \rho_1$; on a : $\frac{g_0 R^2}{\rho_1^3} = \Omega^2$.

Remplaçons Ω^2 par cette valeur sur l'équation projetée sur \vec{u}_r :

$$\frac{M}{2} g_0 R^2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \right) = M g_0 \frac{R^2}{\rho_1^3} \rho_1' ; \text{ remplaçons } OA = \rho_1' + \ell ; OB = \rho_1' - \ell .$$

$$\frac{1}{OA^2} = \frac{1}{\rho_1'^2 \left(1 + \frac{\ell}{\rho_1'}\right)^2} = \frac{1}{\rho_1'^2} \left(1 - 2\frac{\ell}{\rho_1'} + 3\frac{\ell^2}{\rho_1'^2} + \dots\right) ;$$

$$\frac{1}{OB^2} = \frac{1}{\rho_1'^2 \left(1 - \frac{\ell}{\rho_1'}\right)^2} = \frac{1}{\rho_1'^2} \left(1 + 2\frac{\ell}{\rho_1'} + 3\frac{\ell^2}{\rho_1'^2} + \dots\right) .$$

$$[C] : \frac{M g_0 R^2}{2} \left(2 + \frac{6\ell^2}{\rho_1'^2} + \dots \right) = M g_0 R^2 \frac{\rho_1'^3}{\rho_1^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\rho_1'}{\rho_1} \right)^3 = 1 + 3\frac{\ell^2}{\rho_1'^2} \Rightarrow \frac{\rho_1'}{\rho_1} = 1 + \frac{\ell^2}{\rho_1'^2} \Rightarrow \frac{\rho_1' - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\ell^2}{\rho_1'^2} \text{ infiniment petit du 2}^{\text{ème}} \text{ ordre.}$$

2. $\alpha \neq 0$; écrivons $\vec{g}_A = -\frac{g_0 R^2}{OA^3} \vec{OA}$; $\vec{g}_B = -g_0 R^2 \frac{\vec{OB}}{OB^3}$.

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{GA} \wedge \frac{M}{2} \vec{g}_A + \vec{GB} \wedge \frac{M}{2} \vec{g}_B .$$

Substituons $\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA}$; $\vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB}$.

$$\vec{\mathcal{M}}_G = -\vec{GA} \wedge \frac{M}{2} \frac{g_0 R^2}{OA^3} \vec{OG} + \vec{0} - \vec{GB} \wedge \frac{M}{2} \frac{g_0 R^2}{OB^3} \vec{OG} + \vec{0} ; \text{ or } \vec{GB} = -\vec{GA} \Rightarrow$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{M}{2} g_0 R^2 \left(\frac{1}{OA^3} - \frac{1}{OB^3} \right) \vec{OG} \wedge \vec{GA} = \frac{M}{2} \Omega^2 \rho_1^3 \left(\frac{1}{OA^3} - \frac{1}{OB^3} \right) (\vec{OG} \wedge \vec{GA}) .$$

3. Soit $\alpha = (\vec{OG}, \vec{OA})$; $\vec{OG} \wedge \vec{GA} = \rho_1 \ell \sin \alpha \vec{k}$.

Faisons le développement limité en OA, OB :

$$OA^2 = \vec{OA}^2 = (\vec{OG} + \vec{GA})^2 = \rho_1^2 + \ell^2 + 2\rho_1 \ell \cos \alpha = \rho_1^2 \left(1 + \frac{2\ell \cos \alpha}{\rho_1} + \frac{\ell^2}{\rho_1^2} \right) ;$$

$$OA^{-3} = \frac{1}{\rho_1^3} \left(1 + 2 \frac{\ell}{\rho_1} \cos \alpha + \frac{\ell^2}{\rho_1^2} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\rho_1^3} \left(1 - 3 \frac{\ell}{\rho_1} \cos \alpha \right).$$

$$\overrightarrow{OB}^2 = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GB})^2 = \rho_1^2 + \ell^2 - 2\rho_1 \ell \cos \alpha.$$

$$OB^{-3} = \frac{1}{\rho_1^3} \left(1 - 2 \frac{\ell}{\rho_1} \cos \alpha + \frac{\ell^2}{\rho_1^2} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\rho_1^3} \left(1 + 3 \frac{\ell}{\rho_1} \cos \alpha \right).$$

$$\frac{1}{OA^3} - \frac{1}{OB^3} = -\frac{6}{\rho_1^3} \frac{\ell}{\rho_1} \cos \alpha \Rightarrow \mathcal{M}_{G_z} = -6M\Omega^2 \ell^2 \sin \alpha \cos \alpha = J \ddot{\alpha} \text{ avec } J = 2M\ell^2 \text{ car le}$$

moment cinétique $\sigma_G = 2M\ell^2 \dot{\alpha}$.

La masse la plus proche B est plus attirée par la terre et le couple de rappel constaté tend à faire retrouver $\alpha = 0$ à condition que des conditions énergétiques n'échangent pas le rôle de A et de B (cf. rotation) au lieu d'oscillations.

4. Cas des oscillations du satellite de faibles amplitudes

$$\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \alpha = 0 \text{ de pulsation } \omega = \Omega\sqrt{3}.$$

1.4.3. Vitesse de lancement et excentricité de satellite

Dans tout le problème, les influences perturbatrices dues à l'atmosphère, aux mouvements de la terre et à la présence d'autres astres sont négligées.

I. Un corps matériel de masse m est lancé verticalement vers le haut dans le champ de pesanteur créé par la terre supposée homogène, sphérique de rayon R . La loi d'attraction est inversement proportionnelle au carré de la distance du corps au centre de la terre ; à la surface de la terre, ce champ a pour valeur absolue g .

Ecrire la relation entre l'altitude atteinte H et la vitesse initiale V_0 .

A.N. : on donne pour tout le problème $g = 10 \text{ m/s}^2$ et $R = 6400 \text{ km}$.

Calculer V_0 pour $H = 500 \text{ km}$.

II. On suppose qu'un corps matériel de masse m a son centre d'inertie qui décrit autour de la terre une trajectoire circulaire de rayon $R + x$ à l'altitude x , le champ de pesanteur étant celui qui a été décrit à la question précédente.

a. Calculer la vitesse V_1 du centre d'inertie de ce corps en fonction de R , g , x .

b. Calculer le temps t_s mis par ce corps pour effectuer un tour complet sur sa trajectoire, en fonction de R , g , x .

c. Calculer numériquement V_1 et t_s lorsque $x = 600 \text{ km}$.

III. On souhaite placer un satellite sur orbite circulaire à l'altitude x mais les conditions techniques font qu'au moment de la mise sur orbite à l'altitude x le vecteur vitesse \overrightarrow{W} du centre d'inertie du satellite n'est pas rigoureusement orthogonal à la droite OM_0 joignant le centre O de la terre à la position M_0 du centre d'inertie du satellite ; de plus, la vitesse W est différente de la valeur V_1 calculée à la question précédente.

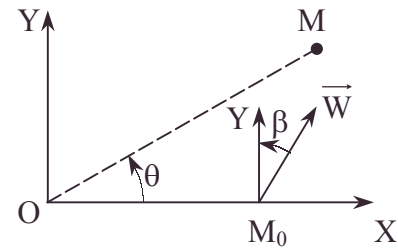
On se propose de déterminer les caractéristiques de la trajectoire, sur laquelle va se placer le satellite.

Pour préciser cette étude, on rapporte le plan de la trajectoire (orienté par le sens du mouvement du satellite) à un système de coordonnées polaires pour lequel :

- l'origine O est le centre d'inertie de la terre,
- l'axe polaire \overrightarrow{OX} a le sens et le support de $\overrightarrow{OM_0}$.

Dans cette partie du problème, on prendra comme origine du temps la date de mise sur orbite et l'on définira la position M du centre d'inertie du satellite à tout instant ultérieur par ses coordonnées polaires :

$r = OM$ (positif), $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$ défini à 2π près par l'orientation du plan de la trajectoire (θ est supposé nul à la date $t = 0$).



On appelle \overrightarrow{OY} l'axe déduit de \overrightarrow{OX} par la rotation $+\frac{\pi}{2}$ et l'on pose :

$$\beta = (M_0, \overrightarrow{W}, \overrightarrow{OY}) ; \left(\frac{W}{V_1} \right)^2 = \mu .$$

1. Ecrire les deux équations différentielles permettant de déterminer r et θ en fonction du temps t .

2. Montrer qu'il est possible d'écrire une équation du second ordre qui est une relation simple entre $\frac{1}{r}$ et sa dérivée seconde par rapport à θ .

3. Exprimer $\frac{1}{r}$ en fonction de θ , μ , β et en déduire que la trajectoire du centre d'inertie du satellite est une conique (E) dont on pourra écrire l'équation polaire sous la forme

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi)} \quad (e > 0).$$

4. Exprimer l'excentricité e de cette conique en fonction de μ et β .

5. Calculer $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ en fonction de μ et β .

6. Représenter graphiquement l'excentricité en fonction de μ lorsque β est fixe. On envisagera d'abord le cas où $\beta = 0$, puis l'ensemble des graphes correspondants à $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Caractériser le genre de la conique suivant la valeur de μ .

On supposera dans la suite que $0 < \mu < 2$.

7. Calculer le minimum r_p et le maximum r_a de r sur la trajectoire (E) en fonction de $(R + x)$, μ et β .

8. Application numérique : $\beta = 0$; $x = 600$ km pour les questions **b.**, **c.**.

a. Calculer r_p et r_a en fonction de $(R + x)$ et de μ lorsque μ est compris entre 0 et 1, ou lorsque μ est compris entre 1 et 2.

b. Dans le cas où μ est compris entre 0 et 1, déterminer la valeur au-dessus de laquelle doit se trouver μ pour que l'altitude ne devienne pas inférieure à $\frac{x}{2} = 300$ km.

Calculer la limite inférieure de W pour qu'il en soit ainsi.

c. Montrer que dans le cas où μ est inférieur à 1, il se peut que r_p soit inférieur à R . Qu'arrive-t-il alors ? Calculer la valeur au-dessus de laquelle doit se trouver μ pour que r_p soit supérieur à R . Calculer la limite inférieure de W pour qu'il en soit ainsi.

9. Application numérique : $\mu = 1$, $\beta = 2$ degrés, $x = 600$ km.

a. Calculer φ et l'excentricité de la trajectoire.

b. Calculer r_p et r_a . Interpréter la signification de φ .

c. Calculer les altitudes extrêmes x_a et x_p du satellite au-dessus de la terre.

d. Est-il possible de représenter par un diagramme simple les variations du rapport

$\frac{x_a}{x_p}$ lorsque β varie de 0 à 10 degrés ?

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

I. • $\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}$; pour $r = R$ $mg = \frac{k}{R^2} \Rightarrow k = mg R^2$.

• $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}mV_0^2 - mg \frac{R^2}{R} = 0 - \frac{mg R^2}{(R+H)}$.

$V_0 = \sqrt{2Rg \frac{H}{R+H}}$ AN : $V_0 = 3,05 \text{ km.s}^{-1}$.

II.a. Le principe fondamental s'écrit : $\frac{mV_1^2}{R+x} = \frac{mg R^2}{(R+x)^2} \Rightarrow V_1 = R \sqrt{\frac{g}{R+x}}$.

b. $t_s = \frac{2\pi(R+x)}{V_1} = 2\pi \frac{(R+x)^{\frac{3}{2}}}{Rg^{\frac{1}{2}}}$.

c. A.N. : $V_1 = 7,65 \text{ km.s}^{-1}$; $t_s = 5,75.10^3 \text{ s}$.

III.1. Le principe fondamental s'écrit :

sur \vec{u}_r : $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mg \frac{R^2}{r^2}$.

sur \vec{u}_θ : $m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$.

2. Posons $\psi = \frac{1}{r}$ ou $r = \frac{1}{\psi}$; $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\psi^2} \frac{d\psi}{d\theta} \dot{\theta}$. Or d'après la loi des aires :

$r^2 \dot{\theta} = C \Rightarrow \dot{\theta} = C\psi^2 \Rightarrow \dot{r} = -C \frac{d\psi}{d\theta} \Rightarrow \ddot{r} = -C \frac{d^2\psi}{d\theta^2} \dot{\theta} = -C^2 \psi^2 \frac{d^2\psi}{d\theta^2}$.

L'équation projetée sur \vec{u}_r du III.1. donne : $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{g R^2}{C^2}$

avec $C = r_0 (r_0 \dot{\theta}_0) = r_0 W \cos \beta$.

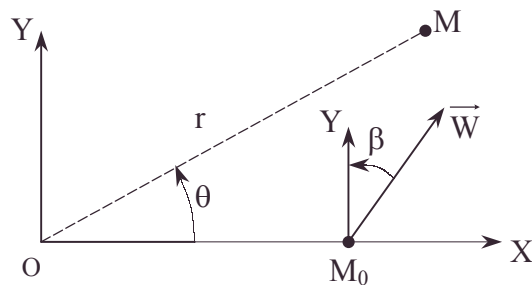
3. La solution est de la forme :

(a) $\frac{1}{r} = A \cos(\theta - \varphi) + \frac{g R^2}{C^2} = \frac{g R^2}{r_0^2 W^2 \cos^2 \beta} (1 + A_1 (\cos \theta - \varphi))$

$r = \frac{r_0^2 W^2 \cos^2 \beta}{g R^2}$ est l'équation polaire d'une conique avec $A_1 = e$.

Remplaçons : $W^2 = \mu V_1^2 = \mu \frac{g R^2}{r_0}$; $r = \frac{r_0 \mu \cos^2 \beta}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}$

La valeur positive de e imposant sa valeur à φ ; $p = \frac{r_0^2 \mu R^2 g \cos^2 \beta}{r_0 g R^2} = \mu r_0 \cos^2 \beta$.



• accélération en polaires, Binet [formule de], conique, conservation de l'énergie, énergie potentielle gravitationnelle, force, P.F.D., satellite

4. Dérivons (a) : $-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = -A \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}$ avec $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ soit $\dot{r} = CA \sin(\theta - \varphi)$ (b).

à $t = 0, \theta = 0, r_0 = W \sin \beta; r_0 \dot{\theta} = W \cos \beta$.

(b) s'écrit : $W \sin \beta = -Ar_0 W \cos \beta \sin \varphi$ soit $\tan \beta = -r_0 A \sin \varphi$.

(a) s'écrit : $\frac{1}{r_0} = A \cos \varphi + \frac{gR^2}{r_0^2 W^2 \cos^2 \beta} = A \cos \varphi + \frac{gR^2 r_0}{r_0^2 \mu R^2 g \cos^2 \beta}$.

Ainsi, $Ar_0 \cos \varphi = 1 - \frac{1}{\mu \cos^2 \beta}$ (a).

Éliminons φ par $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$: $A^2 r_0^2 = \left(1 - \frac{1}{\mu \cos^2 \beta}\right)^2 + \tan^2 \beta =$

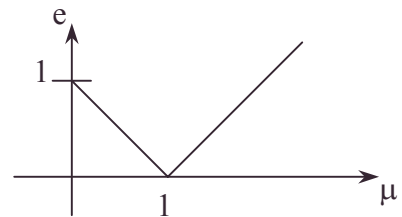
$$\frac{1 - 2\mu \cos^2 \beta + \mu^2 \cos^4 \beta}{\mu^2 \cos^4 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \frac{1 - 2\mu \cos^2 \beta + \mu^2 \cos^2 \beta}{\mu^2 \cos^4 \beta}.$$

Or d'après (a) $e = \frac{Ar_0^2 W^2 \cos^2 \beta}{gR^2} = Ar_0^2 \frac{\mu R^2 g}{r_0 g R^2} \cos^2 \beta = Ar_0 \mu \cos^2 \beta$, A étant du

signe de e ; $e = \sqrt{\mu^2 \cos^2 \beta - 2\mu \cos^2 \beta + 1} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \beta - 2\mu \cos^2 \beta + 1}}{r_0 \mu \cos^2 \beta}$.

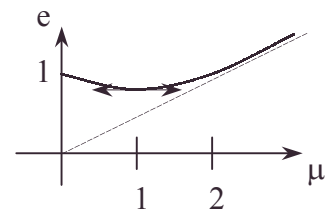
5. Si $e > 0$, $\cos \varphi = \frac{\mu \cos^2 \beta - 1}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \beta - 2\mu \cos^2 \beta + 1}}$; $\sin \varphi = -\frac{\mu \sin \beta \cos \beta}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \beta - 2\mu \cos^2 \beta + 1}}$

6.a. $\beta = 0$; $e = |\mu - 1|$.



b. $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$; $1 > \cos^2 \beta > \frac{1}{2}$.

$$\frac{de}{d\mu} = \frac{1}{2} \frac{2\mu \cos^2 \beta - 2 \cos^2 \beta}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \beta - 2\mu \cos^2 \beta + 1}} = \frac{(\mu - 1) \cos^2 \beta}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \beta - 2\mu \cos^2 \beta + 1}}$$



μ	0	1	2	$+\infty$
$\frac{de}{d\beta}$	$-\cos^2 \beta$	0	+	+
e	1	T $\sqrt{1 - \cos^2 \beta}$ P	1	P $+\infty$

asymptote : $e = \mu \cos \beta$.

c. $e = 1$; parabole pour $\mu = 1$ et $\mu = 2$.

$0 < e < 1$; ellipse pour $0 < \mu < 2$

cercle : $e = 0$; minimum de e : $\mu = 1$; $\cos^2 \beta = 1$; $\beta = 0$ ou π .

$e > 1$; hyperbole pour $\mu > 2$. Cas exclus dans la suite.

7. vu 3 ; $r_p = \frac{p}{1+e} = \frac{(R+x)\mu \cos^2 \beta}{1 + \sqrt{1 + \mu^2 \cos^2 \beta - 2\mu \cos^2 \beta}}$ $e > 0$.

$$r_a = \frac{p}{1-e} = \frac{(R+x)\mu \cos^2 \beta}{1 - \sqrt{1 + \mu^2 \cos^2 \beta} - 2\mu \cos^2 \beta}.$$

$$8. \cos \beta = 1 \Rightarrow r_p = \frac{(R+x)\mu}{1+|\mu-1|}; r_a = \frac{(R+x)\mu}{1-|\mu-1|}.$$

$$a.\alpha. 0 < \mu < 1 \quad |\mu-1| = 1-\mu; r_p = \frac{(R+x)\mu}{2-\mu}; r_a = R+x.$$

$$\beta. 1 < \mu < 2 \quad |\mu-1| = \mu-1; r_p = (R+x); r_a = \frac{(R+x)\mu}{2-\mu}.$$

$$b. \text{ On veut } r_p \geq R + \frac{x}{2} \Rightarrow \mu \geq \frac{4R+2x}{4R+3x}; \text{ AN : } \mu \geq 0,978.$$

$$W = V_1 \sqrt{\mu} \Rightarrow W \geq R \sqrt{\frac{g}{R+x} \cdot \frac{4R+2x}{4R+3x}}; W \geq 7,57 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$c.\alpha. r_p < R \Leftrightarrow \mu < \frac{2R}{2R+x}; \text{ AN : } \mu < 0,96; \text{ il y a choc avec la Terre.}$$

$$\beta. \text{ Pour éviter cela, il faut } \mu > \frac{2R}{2R+x}; \text{ A.N. : } \mu > 0,96.$$

$$\gamma. W = V_1 \sqrt{\mu} \Rightarrow W > R \sqrt{\frac{g}{R+x} \cdot \frac{2R}{2R+x}}; \text{ AN : } W > 7,48 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$9.a. \mu = 1 \Rightarrow e = \sin \beta; \cos \varphi = -\sin \beta; \varphi = -\frac{\pi}{2} - \beta \text{ vu } \cos \varphi < 0, \sin \varphi < 0;$$

$$\text{A.N. : } e = 0,0349; \varphi = -92^\circ.$$

$$b. \text{ Vu 7., } r_p = 6756 \text{ km}; r = 7244 \text{ km. } \theta - \varphi = 0 (\pi) \text{ définit l'axe AP.}$$

$$c. x_a = r_a - R; \text{ A.N. : } x_a = 845 \text{ km}; x_p = M_p - R_p; \text{ A.N. : } x_p = 355 \text{ km.}$$

$$d. \frac{x_a}{x_p} = \frac{r_a - R}{r_p - R} = \frac{(R+x)(1+e)(1-e^2) - R(1-e^2)}{(R+x)(1-e)(1-e^2) - R(1-e^2)} \text{ avec } e = \sin \beta.$$

$$\frac{x_a}{x_p} = \frac{x + (R+x)\sin \beta}{x - (R+x)\sin \beta},$$

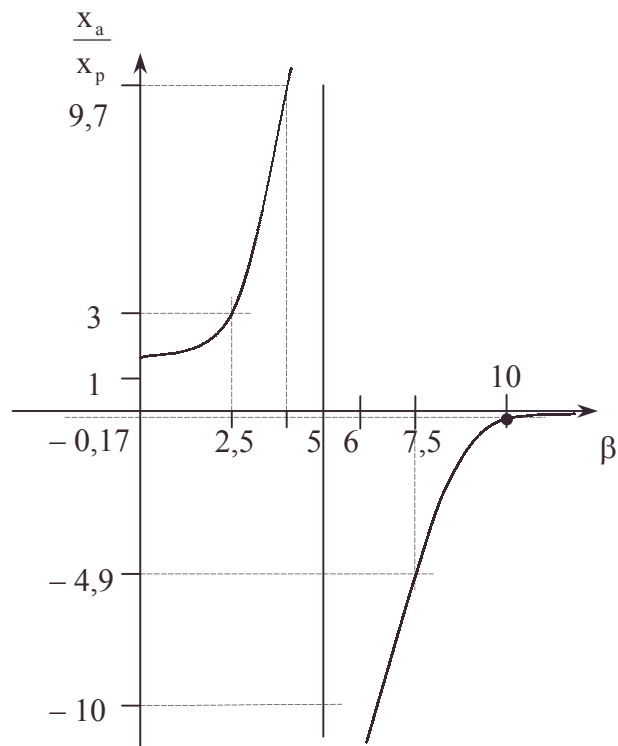
fonction homographique en $\sin \beta$.

$$\text{asymptote } \sin \beta = \frac{x}{R+x};$$

$$\text{AN : } \frac{x}{R+x} = 0,857; .$$

$$\beta_a = 4,9^\circ; \sin 10^\circ = 0,1736$$

Conclusion :
beaucoup de précision est
nécessaire.



1.4.4. Changement d'excentricité d'un satellite

Dans tout le problème, X désigne la norme $\sqrt{\vec{X} \cdot \vec{X}}$ du vecteur noté \vec{X} .

I. On considère une particule P de masse m , animée d'un mouvement non relativiste par rapport à un repère d'origine O . Ce mouvement est dû à un champ de forces $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\text{grad}}U(r)$ dérivant d'un potentiel central $U(r)$, où $\vec{r} = \vec{OP}$. A l'instant t , on note respectivement $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ et $\vec{p}(t)$ la vitesse, l'accélération et la quantité de mouvement de la particule P .

1. Montrer que la force \vec{F} est radiale.

2. Montrer que le vecteur moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ est conservé au cours du mouvement.

3. En déduire que la trajectoire de P est située dans un plan Π que l'on caractérisera.

4. Montrer que l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ est une constante du mouvement.

5. Calculer L à l'aide de coordonnées polaires r, θ dans le plan Π et en déduire la loi des aires.

6. Dans toute la suite du problème, le potentiel est de la forme $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ avec $\alpha > 0$.

On définit le vecteur de Lenz : $\vec{A} = \frac{1}{\alpha m} \vec{p} \wedge \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r}$.

a. Montrer que \vec{A} est un vecteur constant du plan Π .

b. Montrer que $A^2 = 1 + 2 \frac{L^2 E}{m \alpha^2}$.

En déduire, lorsque L est fixé, une borne inférieure pour l'énergie E .

c. Calculer $\vec{A} \cdot \vec{r}$ et obtenir l'équation polaire de la trajectoire sous la forme $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$.

Exprimer le paramètre p et l'excentricité e en fonction de m, α, L et E .

Placer le vecteur de Lenz \vec{A} par rapport à la trajectoire.

d. Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de E .

7. Dans toute la suite du problème, on se restreint au cas des états liés : $E < 0$. La trajectoire est alors une ellipse.

a. Déterminer son demi-grand axe a et son demi-petit axe b en fonction de m, α et E .

b. Pour une valeur fixée de l'énergie E , entre quelles limites le moment cinétique L reste-t-il compris ? Calculer sa limite supérieure L_0 en fonction de m, α et E .

c. Préciser la trajectoire pour $L = 0$ et pour $L = L_0$.

d. calculer la période T du mouvement en fonction de m, α et a .

II. Gravitation

Dans cette partie, le champ de forces est celui de la gravitation. On rappelle la valeur

$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ de la constante de Newton qui figure dans la loi de l'attraction universelle.

1. Un corps de masse m est attiré par un corps de masse $M \gg m$ supposé fixe et décrit autour de ce dernier une trajectoire elliptique.

Déterminer la constante α et le rapport $\frac{\alpha}{m}$.

2. Un satellite géostationnaire est en orbite circulaire autour de la Terre avec une période T que l'on prendra égale à 24 heures.

a. Calculer le rayon a de cette orbite et le comparer avec le rayon de la terre, dont la masse M est $5,974 \cdot 10^{24}$ kg.

b. Si la masse du satellite est de 1 tonne, calculer l'énergie de liaison E du système satellite - Terre.

3. Dans le lancement d'un satellite, il est difficile d'obtenir directement une orbite circulaire. En pratique, on arrondit la trajectoire initialement elliptique du satellite à l'aide de fusées exerçant une force de poussée orientable mais d'intensité f fixée. On admettra sans démonstration que la solution la plus économique en carburant pour cette correction de trajectoire consiste à orienter cette force de poussée perpendiculairement à \vec{r} dans le plan Π et à l'exercer pendant des temps très courts δt_1 et δt_2 lorsque r est respectivement minimum (périgée S_1 où $r = r_1$ et $p = p_1$) et maximum (apogée S_2 où $r = r_2$ et $p = p_2$). Dans ces conditions, chacune des interventions de la force d'intensité f modifie p , L , E et e proportionnellement au temps δt pendant lequel elle est exercée. En revanche, au point d'intervention de la force, r n'est modifié qu'au second ordre en δt .

a. Etablir une relation entre L , e et leurs variations δL_1 et δe_1 lors d'une telle correction de trajectoire pratiquée au sommet S_1 de l'ellipse.

b. Etablir de même une relation entre L , e et leurs variations δL_2 et δe_2 lors d'une correction pratiquée au sommet S_2 .

c. On suppose que le lancement initial a permis d'obtenir un mouvement elliptique ayant la période de révolution voulue de 24 heures, qu'on veut préserver. En déduire que les corrections en S_1 et S_2 doivent être combinées de telle sorte que l'énergie E reprenne sa valeur initiale au bout d'une révolution. En posant $\delta L = \delta L_1 + \delta L_2$ et $\delta e = \delta e_1 + \delta e_2$, trouver la relation entre δL et δe qui traduit cette invariance de E . Sachant que l'on désire que l'orbite devienne circulaire, trouver les signes de δe et δL .

d. Trouver la relation entre δL_1 et δL_2 traduisant l'invariance de E au bout d'une révolution ; en déduire une relation entre δt_1 et δt_2 . Le temps effectif d'action des fusées par révolution est $\delta \tau = \delta t_1 + \delta t_2$; calculer δt_1 et δt_2 en fonction de $\delta \tau$. Indiquer sur une figure le sens des poussées en S_1 et en S_2 en précisant le sens de parcours de la trajectoire.

e. Déterminer les relations entre δL et $\delta \tau$ puis entre δe et $\delta \tau$. On suppose $\delta \tau \ll T$ et on assimile les variations δ à des différentiations liant les fonctions L et e à la variable τ , temps d'activité des fusées. On obtient ainsi un système d'équations différentielles linéaires pour les fonctions L et e de la variable T . Résoudre ce système sachant que pour $\tau = 0$ l'orbite elliptique a une excentricité $e(0) = \cos \lambda$. Calculer le temps total d'activité τ_f au bout duquel l'orbite est devenue circulaire.

f. Calculer la quantité de mouvement totale \mathcal{P} fournie par les fusées au bout du temps τ_f et donner sa valeur numérique pour un satellite de 1 tonne dans les deux cas $e(0) = 0,9$ (orbite initiale aplatie) et $e(0) = 0,1$ (orbite initiale presque circulaire). Sachant que la vitesse d'éjection d'un mélange hydrogène-oxygène est de 4000 m.s^{-1} , quelle est, dans chacun des deux cas précédents, la masse m' de ce combustible consommée au bout du temps τ_f ? Discuter le résultat.

Ecole polytechnique ; Durée : 1h30

Corrigé

I.1. L'expression du gradient donne : $\vec{F} = -\frac{dU}{dr}\vec{u}_r$; la force est radiale.

2. Calculons $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{p} // \frac{d\vec{OM}}{dt}$ et $\vec{F} // \vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_0$

3. $\vec{r} \perp \vec{L}_0$; $\vec{r} \in$ plan Π orthogonal à \vec{L}_0 passant par le point O.

4. $m\vec{a} = \vec{F}$; multiplions par $\vec{v} dt = d\vec{OM}$.

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} d\vec{OM} = -dU \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = 0 ; \Rightarrow E = E_0.$$

5. $\vec{L} = mr\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$; or $d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{OM} \wedge d\vec{OM} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\vec{k}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} \text{ (loi des aires).}$$

6.a. $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{\alpha m} \vec{F} \wedge \vec{L} + \frac{1}{\alpha m} \vec{F} \wedge \vec{0} - \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{1}{\alpha m} \left(-\frac{dU}{dr}\right) mr^2 \dot{\theta} (\vec{u}_r \wedge \vec{k}) + \dot{\theta} \vec{u}_\theta =$

$$= \frac{\alpha}{\alpha r^2} r^2 \dot{\theta} (-\vec{u}_\theta) + \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_0 ;$$

$$\vec{L} \perp \Pi \Rightarrow \vec{p} \wedge \vec{L} \in \Pi ; \vec{r} \in \Pi \Rightarrow \vec{A}_0 \in \Pi.$$

b.α. $\vec{A} = \frac{1}{\alpha m} [m(v_r \vec{u}_r + \vec{u}_\theta v_\theta) \wedge L\vec{k}] - \vec{u}_r.$

$$\vec{A} = -\frac{v_r}{\alpha} L\vec{u}_\theta + \vec{u}_r \left(\frac{v_\theta L}{\alpha} - 1\right) ;$$

$$A^2 = \frac{v_r^2 L^2}{\alpha^2} + \frac{v_\theta^2 L^2}{\alpha^2} + 1 - \frac{2v_\alpha L}{\alpha} \text{ or } v_\alpha = r\dot{\theta} = \frac{L}{mr} ;$$

$$A^2 = L^2 \frac{v^2}{\alpha^2} - 2 \frac{L^2}{mr\alpha} + 1 \Rightarrow A^2 = \frac{2L^2}{m\alpha^2} \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r}\right) + 1 \Rightarrow A^2 = 1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}.$$

β. $A^2 > 0 \Rightarrow E \geq \frac{-m\alpha^2}{2L^2}.$

c. $\vec{A} \cdot \vec{r} = \left[\left(\frac{L}{\alpha} v_\theta - 1\right) \vec{u}_r - \frac{L v_r}{\alpha} \vec{u}_\theta\right] \cdot \vec{r} = \left(\frac{L}{\alpha} v_\theta - 1\right) r = \frac{L^2}{m\alpha} - r.$

Soit θ l'angle entre \vec{A} et \vec{r} :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = rA \cos \theta = \frac{L^2}{m\alpha} - r \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \text{ avec } e = A = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} ; \text{ en supposant } e \text{ et } A \text{ positifs pour ne pas compliquer la rédaction car sinon il faut changer de } \pi \text{ l'angle } \theta$$

dans le cas : $e < 0$; $p = \frac{L^2}{m\alpha}.$

On a : $e^2 - 1 = \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}.$

\vec{A} est selon l'axe polaire de référence ($\theta = 0$), axe des foyers



$$\text{d. } e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} ; \left. \begin{array}{l} e < 1 \\ E < 0 \end{array} \right\} \text{ ellipses ; } \left. \begin{array}{l} e > 1 \\ E > 0 \end{array} \right\} \text{ hyperboles ; } \left. \begin{array}{l} e = 1 \\ E = 0 \end{array} \right\} \text{ paraboles.}$$

7.a. Sur le grand axe de l'ellipse, on voit :

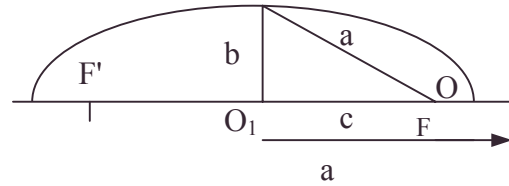
$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2} = -\frac{\alpha}{2E} \text{ vu 6.}$$

Vu la définition géométrique d'une ellipse $FM + F'M = 2a \forall M$, on voit dans la figure ci-contre : $b^2 + c^2 = a^2$ or $c = ea$;

$$b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow b = \sqrt{\frac{-L^2}{2mE}}.$$

b. Vu 6.c. on a $E < 0$ car pour les ellipses $|e| < 1$;

$$\text{on a aussi } -1 \leq e^2 - 1 \Rightarrow \frac{-m\alpha^2}{2E} \geq L^2 ;$$



on ne conserve physiquement que : $0 \leq \|\vec{L}\| \leq L_0$ avec $L_0 = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{-2E}}$.

c.α. $L = 0 \Rightarrow \vec{p} // \vec{r}$ caractérise parmi les ellipses le segment de droite passant par O de longueur $2a - 2c$ vu $e \neq 1$.

$$\beta. L = L_0 \Rightarrow e = 0 : \text{cercle de centre O, de rayon } \rho = a = \frac{\alpha}{-2E}.$$

$$\text{d. On intègre la loi des aires } \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow \pi ab = \frac{L}{2m} T ; \text{ on remplace } b = \sqrt{\frac{L^2}{-2mE}}$$

$$\text{et } E = \frac{-\alpha}{2a} \quad T = 2\pi \left(\frac{m}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}. \text{ (3}^{\text{ème}} \text{ loi de Képler).}$$

$$\text{II. } \vec{F} = -\frac{GM}{r^2} m \vec{u}_r ; U = -\frac{GM}{r} m.$$

$$1. \alpha = GMm ; \frac{\alpha}{m} = GM.$$

$$2.a. a = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} (GM)^{\frac{1}{3}} ; \text{AN : } a = 42,24 \cdot 10^6 \text{ m. ; } a \approx 6,6 R_T \text{ avec } R_T = 6400 \text{ km.}$$

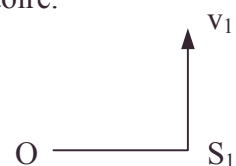
$$b. E = -\frac{GMm}{2a} ; \text{AN : } E = -4,718 \cdot 10^9 \text{ J.}$$

3.a. Action au périée. L'action en S_1 ne modifie pas la propriété d'orthogonalité de la vitesse $\vec{v}_1 \perp \vec{r}_1$, S_1 reste périée "par continuité" de la nouvelle trajectoire.

$$r_1 = \frac{L_1^2}{m\alpha(1+e)} \text{ or au 1}^{\text{er}} \text{ ordre : } \delta r_1 = 0 ,$$

on obtient par différentiation logarithmique de r_1 :

$$\frac{\delta e_1}{1+e} = 2 \frac{\delta L_1}{L}.$$



b. Action à l'apogée. L'action en S_2 ne modifie pas l'orthogonalité de la vitesse $\vec{v}_2 \perp \vec{r}_2$, S_2 reste apogée "par continuité" de la nouvelle trajectoire : $r_2 = \frac{L_2^2}{m\alpha(1-e)}$; or

au 1^{er} ordre, $\delta r_2 = 0$ et par différentiation logarithmique de r_2 , $-\frac{\delta e_2}{1-e} = \frac{2\delta L_2}{L}$.

c. On veut E constant soit a invariant $\delta a = 0$ avec $a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{L^2}{m\alpha(1-e^2)}$ soit en

différentiant logarithmiquement $\frac{2\delta L}{L} + 2e \frac{\delta e}{1-e^2} = 0$.

Pour que l'orbite devienne circulaire, $e \rightarrow 0 \Rightarrow \delta e < 0 \Rightarrow \delta L > 0$.

d.α. $L_1 = m_1 r_1 v_1$ et $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{\alpha}{r_1}$ en r_1 ; on a, vu $\delta r_1 = 0$:

$$\delta L_1 = m r_1 \delta v_1 \Rightarrow \delta E_1 = m v_1 \delta v_1 = \frac{m r_1 v_1}{m r_1} \frac{m r_1 \delta v_1}{r_1} = \frac{L \delta L_1}{m r_1^2} ;$$

de même $\delta E_2 = \frac{L \delta L_2}{m r_2^2}$.

$\delta E = 0 = \delta E_1 + \delta E_2 = L \left(\frac{\delta L_1}{m r_1^2} + \frac{\delta L_2}{m r_2^2} \right)$ et en remplaçant r_1 et r_2 on a :

$$(1+e)^2 \delta L_1 + (1-e)^2 \delta L_2 = 0 ; |\delta L_2| > \delta L_1.$$

$$\beta. \delta L_1 = r_1 f_{10} \delta t_1 = \frac{L^2}{m\alpha} \frac{f_{10} \delta t_1}{1+e} ; \text{ de même } \delta L_2 = \frac{L^2}{m\alpha} \frac{f_{20} \delta t_2}{1-e}.$$

On obtient $(1+e)f_{10}\delta t_1 + (1-e)f_{20}\delta t_2 = 0$;

les intensités f étant égales, et $\delta t_1 > 0, \delta t_2 > 0$; $\frac{f_{10}}{f_{20}} = -1 \Rightarrow (1+e)\delta t_1 = (1-e)\delta t_2$.

γ. De plus $d\tau = \delta t_1 + \delta t_2$, on résout deux équations en δt_1 et δt_2 .

$$\delta t_1 = \frac{1-e}{2} \delta \tau \text{ et } \delta t_2 = \frac{1+e}{2} \delta \tau.$$

Dans le but d'égaliser les vitesses, on aura un freinage au périhélie et une accélération à l'apogée. (cf. $r_1 v_1 = r_2 v_2$).

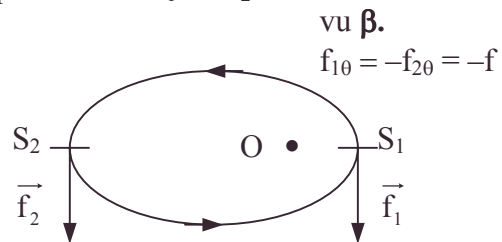
$$e. \text{ Vu I.6., } L^2 = \frac{(e^2 - 1)}{2E} m \alpha^2.$$

$$\text{Or, d'après d., } \delta L = \delta L_1 + \delta L_2 = \frac{L^2}{m\alpha} f \left(-\frac{\delta t_1}{1+e} + \frac{\delta t_2}{1-e} \right) = \frac{2L^2 f}{m\alpha} \delta \tau \frac{e}{1-e^2} = \frac{f\alpha}{-E} e \delta \tau$$

$$\text{mais en c., } \frac{e \delta e}{1-e^2} = \frac{-\delta L}{L} \Rightarrow \delta e = \frac{-2fL}{m\alpha} \delta \tau ;$$

$$\bullet \text{ Résolution de } \frac{dL}{d\tau} = \frac{f\alpha}{-E} e \text{ et } \frac{de}{d\tau} = \frac{-2f}{m\alpha} L \text{ avec } \frac{de}{d\tau} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 e}{d\tau^2} = \frac{-2f^2}{(-mE)} e,$$

$$\Rightarrow e(\tau) = e(0) \cos \omega \tau + \frac{\dot{e}(0)}{\omega} \sin \omega \tau \text{ avec } \omega^2 = -\frac{2f^2}{mE}.$$



$$e(0) = \cos \lambda \text{ et } \dot{e}(0) = \frac{-2f}{m\alpha} L_0 ; \text{ or d'après I.6.c. } L_0^2 = \left(\frac{e^2(0) - 1}{2E} \right) m\alpha^2$$

$$\Rightarrow \dot{e}(0) = -\frac{2f \sin \lambda m^{\frac{1}{2}} \alpha}{m\alpha(-2E)^{\frac{1}{2}}} = -\omega \sin \lambda \Rightarrow \text{en reportant dans } e(\tau)$$

$$e(\tau) = \cos \left(\lambda + \tau \sqrt{\frac{2f^2}{-mE}} \right) ; \Rightarrow L = \sqrt{\frac{m\alpha^2}{-2E}} \sin \left(\lambda + \tau \sqrt{\frac{2f^2}{-mE}} \right) \text{ vu } \frac{de}{d\tau} ;$$

$$e = 0 \text{ pour } \tau_f = \sqrt{\frac{-mE}{2f^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right).$$

f. $\mathcal{P} = \sum f_i \delta t_i = f \left(\sum \delta t_i \right) = f \tau_f$ en comptant de même signe les actions fournies en S_1 .

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{-mE}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \text{ or } \mathcal{P} = m'u \Rightarrow m' = \sqrt{\frac{-mE}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right)}{u}$$

AN : $\alpha. e(0) = 0,9 ; \mathcal{P} = 1,720.10^6 \text{ kg m s}^{-1} ; m' = 430,0 \text{ kg}.$

$\beta. e(0) = 0,1 ; \mathcal{P} = 1,538.10^6 \text{ kg m s}^{-1} ; m' = 38,46 \text{ kg avec } m = 10^3 \text{ kg} ;$

Conclusion : il est difficile, vu l'importance de m' , de transformer une ellipse aplatie en cercle. La supposition de masse constante est à revoir.

1.4.5. Quelques problèmes de navigation à voile solaire

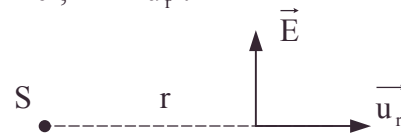
Les données nécessaires à la résolution de certaines applications numériques sont regroupées à la fin de l'énoncé. La formulation de l'énoncé permet l'ignorance des propriétés des ondes électromagnétiques et d'utiliser les résultats à démontrer.

1. Le soleil, considéré comme une source ponctuelle, émet des ondes sphériques. A grande distance, celles-ci ont la structure d'ondes planes se propageant radialement, mais l'amplitude E_0 du champ électrique est fonction de la distance au soleil r :

$$E = E_0(r) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u}_0 ; \vec{k} = k \vec{u}_r ; \vec{u}_r \cdot \vec{u}_0 = 0 ; \vec{r} = r \vec{u}_r .$$

On donne la puissance moyenne rayonnée \overline{P}_0 ;

$$\text{Démontrer que } E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \overline{P}_0}{2\pi k}} .$$



En remarquant que la puissance électromagnétique transportée par l'onde à travers une surface sphérique de rayon r centrée sur le soleil, doit être indépendante du rayon de celle-ci.

2. Au niveau de la Terre, à la distance r_0 du soleil, la puissance reçue en provenance du soleil est $\overline{p}_s = 0,15 \text{ W/cm}^2$. Calculer numériquement la force subie, du fait de la pression de radiation, par une voile parfaitement réfléchissante de 1 km^2 de surface, placée normalement aux rayons lumineux à la distance r_0 du soleil.

On donne $\langle \vec{dF} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 i \, d\vec{S}$, i étant l'angle d'incidence.

Comparer cette force à l'attraction gravitationnelle exercée par le soleil sur un engin de 1 tonne (voile comprise). Le rapport de ces deux forces dépend-il de la distance r_0 ?

3. Un engin muni d'une voile orientée normalement aux rayons lumineux est dans le champ de force $\vec{f} = \left(-G \frac{m.m_s}{r^2} + \frac{A}{r^2} \right) \vec{u}_r$ dû au soleil.

Montrer que sa trajectoire est plane : indiquer sans calcul la nature de cette trajectoire. Qu'arrive-t-il à l'engin si $A > G m.m_s$?

4. Un engin, lancé depuis la Terre à une distance telle que l'attraction gravitationnelle de celle-ci soit négligeable, mais se trouvant néanmoins pratiquement à la distance r_0 du soleil, annule sa vitesse et déploie sa voile, normalement aux rayons solaires. Il se trouve alors dans le champ décrit en **3**.

a. Quelle est sa trajectoire ?

b. Comment varie sa vitesse en fonction de sa distance r au soleil ?

L'engin est parti à destination de Jupiter situé à la distance $r_j > r_0$ du soleil.

Quelle surface minimale doit avoir sa voile pour qu'il rencontre effectivement l'orbite de Jupiter ?

Application numérique (avec les données du **2.**) : quelle est sa vitesse quand il rencontre celle-ci ?

c. Montrer que la distance r de l'engin au soleil suit, en fonction du temps t , la loi :

$$\left[\frac{r}{r_0} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} + \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right] = Kt \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Application numérique (avec les données du **2.**) : quelle est la durée du voyage Terre-orbite de Jupiter ?

d. Jupiter ayant une orbite pratiquement circulaire, où doit se trouver Jupiter sur son orbite lorsque l'engin déploie sa voile, pour qu'il rencontre la planète ?

5. L'engin, initialement au repos à la distance r_0 du soleil, oriente sa voile de façon à ce qu'elle soit frappée sous l'angle d'incidence i .

a. Quelle doit être, avec les valeurs numériques du **2.**, la valeur de l'angle i pour que la composante radiale de la force subie par l'engin soit nulle ?

b. Dans le cas général, à quelle condition le mouvement est-il plan ? Dans le plan du mouvement, on l'étudie en coordonnées polaires (r, θ) , l'origine étant prise sur le soleil. Faire une figure montrant la direction prise par l'engin selon l'orientation de la voile. Ecrire le système d'équations différentielles satisfaites par le mouvement.

c. On se propose de trouver la loi de démarrage du mouvement, c'est-à-dire les fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$ pour t faible. pour cela, on fait un développement limité au 4^{ème} ordre : $r = r_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$; $\theta = \theta_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4$

Montrer que par choix des conditions initiales, on a : $a_1 = 0$; $b_1 = 0$; $\theta_0 = 0$.

En injectant cette solution dans le système d'équations différentielles de **b**, montrer que

$$\text{l'on obtient } \begin{cases} r = r_0 + \frac{B}{2r_0^2} t^2 + \frac{1}{12} \frac{C^2 - B^2}{r_0^5} t^4 \\ \theta = \frac{C}{2r_0^3} t^2 - \frac{1}{24} \frac{7BC}{r_0^6} t^4 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} B = \frac{A \cos^3 i - G m.m_s}{m} \\ C = \frac{A \cos^2 i \sin i}{m} \end{cases}$$

Quelle est la nature de la trajectoire pour t très faible ? (Le 2^{ème} ordre suffit).

d. Etudier les cas particuliers suivants :

α. Voile presque normale au rayonnement solaire : $B \gg C$.

Si $C = B/10$, pendant combien de temps peut-on garder : $r - r_0 = \frac{B}{2r_0^2} t^2$ et $\theta = \frac{C}{2r_0^3} t^2$

avec une erreur relative inférieure à 10^{-2} ?

β. Vérifier que pour $C = 0$, le résultat obtenu est compatible avec celui de **4.c.**

γ. Cas $B = 0$: quelle est l'équation de la trajectoire ?

Au bout de combien de temps a-t-on $\frac{r - r_0}{r_0} = 10^{-4}$? Quelle est la vitesse alors atteinte

par l'engin ? Quelle a été la distance parcourue par l'engin ?

δ. Cas $B \ll C$ (mais $B \neq 0$) ; si $B = C/10$, même question qu'en **α.**

Données numériques

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{C.m}^{-1}.$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}.$

Constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}.$

Masse du Soleil : $m_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{kg}.$

Rayon de l'orbite terrestre : $r_0 = 1,49 \cdot 10^{11} \text{m}.$

Rayon de l'orbite de Jupiter : $r_j = 5,20 r_0.$

1 an : $3,16 \cdot 10^7 \text{s}.$

Autres concours ; Durée : 2h30

Corrigé

I.1. $P_{\text{rayonnée}} = \iint \vec{\pi} \cdot d\vec{S}$; localement, l'onde sphérique est assimilable à l'onde plane,

de $\vec{\pi} = \frac{E^2 \vec{k}}{\mu_0 \omega} \Rightarrow P_{\text{rayonnée}} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \iint_{\text{sphère } r} E_0^2(r) dS \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}).$

$\overline{P}_{\text{rayonnée moyenne}} = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2(r) \cdot 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}$, en remarquant que cette puissance rayonnée moyenne (en absence d'absorption) est indépendante de r .

$\overline{P}_0 = \frac{2\pi k}{\mu_0 \omega} r^2 E_0^2(r)$ soit $E_0(r) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\pi k} \overline{P}_0}.$

2.a. Vu l'énoncé sous incidence normale, on a la pression de radiation.

$\overline{\omega} = \epsilon_0 E_0^2$; $\overline{p}_s = \frac{\overline{P}_0}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ d'où $\overline{\omega} = 2 \frac{\overline{p}_s}{c}.$

$f_x = \int \overline{\omega} dS = \overline{\omega} \cdot S = 2 \frac{\overline{p}_s}{c} S.$

b. Attraction universelle : $G \frac{m_s \cdot m}{r_0^2}$; AN : 5,98 N. La force magnétique est supérieure.

c. L'attraction universelle dépend de r_0^2 (répartition sphérique supposée).
 $\overline{\omega}$ comme \overline{p}_s dépend aussi de r_0^2 .

• conditions initiales, conique, développement au premier ordre ou plus, force, linéarisation, sphérique, trajectoire

Le rapport des deux forces est donc indépendant de r_0 .

3.a. Le champ de force centrale (agissant sur un objet quasi ponctuel $\sqrt{S} \ll r_0$) lui donne une trajectoire plane.

b. Le champ de force étant en $\frac{1}{r^2}$, la trajectoire est une conique.

c. A étant supposé constant, si $A > G m m_s$ un champ de force répulsif engendre une hyperbole qui peut dégénérer en parties de droite cf. **4.**

4. On hisse la voile à l'arrêt.

a. La trajectoire avec départ arrêté et champ de force central répulsif newtonien est donc une portion de droite (radiale).

$$\begin{aligned} \text{b.}\alpha. \quad E &= E_c + E_p = E_{c_0} + E_{p_0} \text{ or } \vec{f} = \frac{A - G m m_s}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow E_p = \frac{A - G m m_s}{r} \text{ et} \\ E_{p_0} &= \frac{A - G m m_s}{r_0}; \quad \frac{1}{2} m v^2 + \frac{A - G m m_s}{r} = 0 + \frac{A - G m m_s}{r_0}; \\ \Rightarrow v &= \sqrt{2 \frac{(A - G m m_s)(r - r_0)}{m r_0 r}}. \end{aligned}$$

β. Pour partir en direction de Jupiter, il faut une force \vec{f} répulsive, soit :

$$A \geq G m m_s \text{ ou } \frac{2 \overline{p_s} S}{c} > \frac{G m m_s}{r_0^2}; \quad S = G \frac{m m_s c}{2 r_0^2 \overline{p_s}}; \quad \text{AN : } S = 0,598 \text{ km}^2.$$

$$\gamma. \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(A - G m m_s)}{m} \left(\frac{r_j - r_0}{r_0 r_j} \right)};$$

$$S = 10^4 \text{ m}^2; \quad \frac{A}{r_0^2} = \frac{2 \overline{p_s} S}{c} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{m} \left(2 \frac{\overline{p_s}}{c} S r_0^2 - G m m_s \right) \left(\frac{r_j - r_0}{r_0 r_j} \right)};$$

AN : $v_1 = 31504 \text{ m.s}^{-1}$. v_1 est comparable à la vitesse du centre de la Terre dans le repère de Copernic.

$$\begin{aligned} \text{c.} \quad v &= \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2 \left(2 \overline{p_s} S \frac{r_0^2}{c} - G m m_s \right)}{m r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)}; \\ dt &= \sqrt{\frac{m r_0}{2 \left(2 \frac{\overline{p_s}}{c} S r_0^2 - G m m_s \right)}} \left(\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right)^{-1} dr. \end{aligned}$$

$$\text{Posons } u = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \Rightarrow r = \frac{r_0}{1 - u^2}; \quad dr = \frac{2 r_0 u du}{(1 - u^2)^2}.$$

$$\int \left(\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right)^{-1} dr = \int u^{-1} \cdot \frac{2 r_0 u du}{(1 - u^2)^2} = 2 r_0 \int \frac{du}{(1 - u^2)^2};$$

$$\text{or, } \frac{1}{(1 - u^2)^2} = \frac{1 - u^2}{(1 - u^2)^2} + \frac{u^2}{(1 - u^2)^2} = \frac{1}{(1 - u^2)} + \frac{u^2}{(1 - u^2)^2}.$$

Intégrons par partie :

$$\int \frac{du}{(1-u^2)} = \frac{u}{1-u^2} - 2 \int \frac{u^2 du}{(1-u^2)^2} ; \text{ or } \frac{u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{(1-u^2)^2} - \frac{1}{1-u^2} ;$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{u}{1-u^2} + 2 \int \frac{du}{1-u^2} - 2 \int \frac{du}{(1-u^2)^2} \text{ aussi } 2 \int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{u}{1-u^2} + \operatorname{arctanh} u ,$$

$$\text{et finalement, } t = r_0 \sqrt{\frac{m r_0}{2 \left(\frac{2}{c} \bar{p}_s S r_0^2 - G m m_s \right)}} \left(\frac{u}{1-u^2} + \operatorname{arctanh} u \right) + C.$$

On a bien la forme de l'énoncé, C étant déterminé pour $t = 0$, $r = r_0$, $u = 0$; on a $C = 0$.

$$K t = \frac{r}{r_0} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} + \operatorname{arctanh} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) + 0 \text{ avec } K = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{2}{c} \bar{p}_s S r_0^2 - G m m_s \right)}{m r_0^3}}.$$

$$\text{AN : remarque : } \operatorname{arctanh} u = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right).$$

$$r = r_j ; t = 2,49 \cdot 10^7 \text{ s, soit } 288,6 \text{ jours.}$$

Durée comparable à la durée d'un tel voyage en fusée à propulsion.

$$\text{d. D'après la troisième loi de Kepler } T^2 = k r^3 \text{ soit } \frac{T_j}{T_T} = \left(\frac{r_j}{r_0} \right)^{\frac{3}{2}} ;$$

$$\text{or } \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = C \text{ soit } \theta = 2 C R^2 t.$$

$$\text{Pour Jupiter, si } \theta = 2\pi \quad t = T_j \quad 2 C r_j^2 T_j = 2\pi ,$$

$$\text{et pour } t, \quad \theta = \frac{2\pi}{T_j} t = \frac{2\pi}{T_T} \left(\frac{r_0}{r_j} \right)^{\frac{3}{2}} ;$$

AN : $\theta = 23,92^\circ$ selon la figure ci-contre.

5.a. Navigation à voile

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{gravitation}}.$$

$$F_r^{\text{total}} = 0 = F_p \cos i - \frac{G m m_s}{r_0^2} \text{ avec } F_p = 2 \frac{\bar{p}_s}{c} S \cos^2 i = S \bar{\omega}.$$

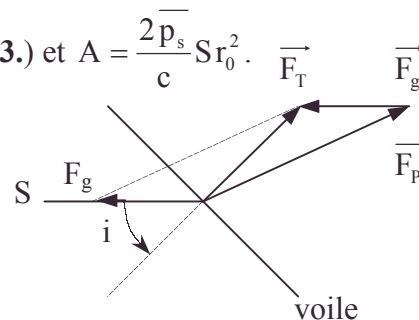
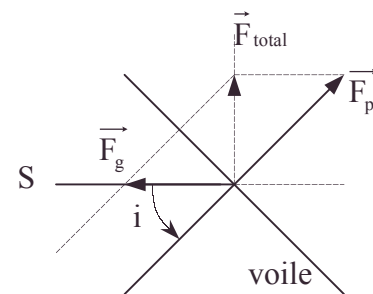
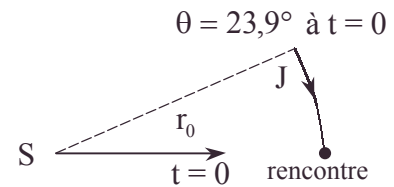
$$i = \arccos \left[\frac{G m m_s c}{2 r_0^2 \bar{p}_s S} \right]^{\frac{1}{3}} ; \text{ AN : } i = 32,6^\circ.$$

$$\text{b. } \vec{f}_{\text{total}} = \frac{-G m m_s}{r^2} \vec{u}_r + \frac{A_1}{r^2} \cos i \vec{u}_r + \frac{A_1}{r^2} \sin i \vec{u}_\theta ,$$

$$\text{avec } A_1 = S \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 i = 2 \frac{\bar{p}_s}{c} S r_0^2 \cos^2 i = A \cos^2 i \text{ (cf. 3.) et } A = \frac{2 \bar{p}_s}{c} S r_0^2.$$

α. Pour que le mouvement soit plan, il faut et il suffit que \vec{r} , \vec{V} et \vec{f}_{total} restent coplanaires à tout t et en particulier à $t = 0$.

β. Au point $\vec{V}_0 = \vec{0}$, la direction prise par l'engin



est celle de \vec{f}_{total} .

$$\gamma. m \vec{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_z + m(2\dot{r}\dot{\theta} + 2\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = \vec{f}_T.$$

$$[1]. \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{-\mathcal{G}m_s}{r^2} + \frac{A}{mr^2}\cos^3 i = \frac{K_1}{r^2},$$

$$\text{soit } r^2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = B \quad [1'] \text{ avec } B = K_1 = \frac{A\cos^3 i - \mathcal{G}mm_s}{m}.$$

$$[2]. 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{A\sin i \cos^2 i}{mr^2} = \frac{C}{r^2} \text{ avec } C = \frac{A\sin i \cos^2 i}{m}, \text{ soit } r^2(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = C \quad [2'].$$

$$c. \dot{r} = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3; \ddot{r} = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2.$$

$$\dot{\theta} = b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2 + 4b_4t^3; \ddot{\theta} = 2b_2 + 6b_3t + 12b_4t^2.$$

$$\alpha. \text{ Le choix en } t = 0, \text{ de } V_0 = 0 \text{ fait } r_0 \cdot \dot{\theta}_0 = r_0 b_1 = 0 \text{ et } \dot{r}_0 = a_1 = 0.$$

$\theta_0 = 0$ est une simplification normale à $t = 0$.

\beta. Remarque : comme on fait un développement en série entière de \ddot{r} limité à t^2 , il faudra limiter celui de $r\dot{\theta}^2$ au même ordre, pour la cohérence des calculs,

$$\text{et } [1] \text{ s'écrit : } \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2a_2 + 6a_3t + (12a_4 - 4r_0b_2^2)t^2 + \dots$$

[1'] pour la cohérence doit limiter le développement de r^2 au terme en t^2 , donc :

$$r^2 = r_0^2 + 2a_2r_0t^2 + \dots$$

$$\text{et } [1'] B = r^2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 2a_2r_0^2 + 6a_3r_0^2t + (12a_4r_0^2 - 4b_2^2r_0^3 + 4a_2^2r_0)t^2.$$

De même dans [2], $\ddot{\theta}$ est limité à t^2 , $r\ddot{\theta}$ de même, $\dot{r}\dot{\theta}$ de même : ainsi, $2\dot{r}\dot{\theta} = 8a_2b_2t^2$.

$$[2] \text{ devient : } 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2b_2r_0 + 6b_3r_0t + (12b_4r_0 + 10a_2b_2)t^2.$$

$$[2'] \text{ s'écrit : } C = r^2(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 2b_2r_0^3 + 6b_3r_0^3t + (12b_4r_0^3 + 14b_2a_2r_0^2)t^2$$

Identifions les deux membres d'abord dans [1'] puis dans [2'] :

$$B = 2a_2r_0^2; a_3 = 0; 12a_4r_0^2 - 4b_2^2r_0^3 + 4a_2^2r_0 = 0.$$

$$C = 2b_2r_0^3; b_3 = 0; 12b_4r_0 + 14a_2b_2 = 0.$$

Le remplacement de $a_2 = \frac{B}{2r_0^2}$ et $b_2 = \frac{C}{2r_0^3}$ permet d'obtenir :

$$a_4 = \frac{C^2 - B^2}{12r_0^5}; b_4 = \frac{-7BC}{24r_0^6}; \text{ on trouve bien les expressions de l'énoncé.}$$

$$\gamma. \text{ En limitant au } 2^{\text{ème}} \text{ ordre } r = r_0 + \frac{B}{2r_0^2}t^2 \text{ et } \theta = \frac{C}{2r_0^3}t^2, \text{ d'où } r = r_0 + \frac{Br_0\theta}{C}, \text{ on}$$

obtient le début d'une spirale d'Archimède autour du point de départ $(r_0, 0)$.

$$d.\alpha. r = r_0 + a_2t^2 + a_4t^4; \theta = b_2t^2 + b_4t^4.$$

Il faut déterminer la durée pour laquelle l'incertitude relative la plus grande est inférieure à 10^{-2} .

$$\frac{\Delta(r-r_0)}{|r-r_0|} = \left| \frac{a_4 t^4}{a_2 t^2} \right| = \frac{B^2 - C^2}{6Br_0^3} ; \frac{\Delta\theta}{|\theta|} = \left| \frac{b_4 t^4}{b_2 t^2} \right| = \frac{7B}{12r_0^3} t^2 ;$$

avec $B \gg C$ on voit $\left| \frac{\Delta(r-r_0)}{r-r_0} \right| < \frac{\Delta\theta}{|\theta|}$; on applique donc le critère à $\frac{\Delta\theta}{|\theta|}$,

D'après les équations paramétriques de la spirale :

$$t = \sqrt{\frac{12r_0^3}{B \cdot 700}} = \sqrt{\frac{12r_0^3 m}{\left(2 \frac{p_s}{C} Sr_0^2 - G m m_s\right) 700}} ; \text{AN : } \begin{cases} t = 796987 \text{ s} \\ t \# 9,22 \text{ jours} \end{cases}$$

β. $i = 0 \Rightarrow C = 0$; $\theta = 0$: trajectoire rectiligne, c'est le cas **II.4.c.**

γ. $B = 0$; $r = r_0 + \frac{C^2}{12r_0^5} t^4$; $\theta = \frac{C}{2r_0^3} t^2$ soit $r = r_0 + r_0 \frac{\theta^2}{3}$: spirale ;

$$\bullet \frac{r-r_0}{r_0} = \frac{\theta^2}{3} = \frac{C^2 t^4}{12r_0^6} = 10^{-4} \Rightarrow t = \sqrt[4]{\frac{12r_0^6}{C^2} \cdot 10^{-4}} .$$

$$B = 0 \Rightarrow \cos i = \sqrt[3]{\frac{G m m_s}{A}} \text{ soit } i = 32,6^\circ \Rightarrow C = 8,49 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\Rightarrow t = 1,162 \cdot 10^6 \text{ s} (\# 13,4 \text{ jours})$$

$$\bullet v = \underbrace{r_0 \dot{\theta}}_{\text{terme principal}} = \frac{C t}{r_0^2} ; \text{AN : } v = 4443 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

On peut vérifier la validité de l'approximation sur :

$$V^2 = (r_0 \dot{\theta})^2 + \dot{r}^2 = \frac{C^2 t^2}{r_0^6} + \frac{C^4}{16r_0^{10}} t^6 .$$

$$\bullet \text{ Distance parcourue : } r_0 \theta = \frac{C t^2}{2r_0^2} ; \text{AN : } r_0 \theta = 2,58 \cdot 10^9 \text{ m} .$$

$$\delta. C \gg B ; \frac{\Delta\theta}{|\theta|} < \frac{\Delta(r-r_0)}{(r-r_0)} \text{ vu d.}\alpha.$$

$$\text{Le terme déterminant est : } \frac{\Delta(r-r_0)}{|r-r_0|} = \left| \frac{a_4 t^4}{a_2 t^2} \right| \Rightarrow t = \sqrt{\frac{0,6r_0^3}{99C}} \text{ vu les équations}$$

paramétriques de la spirale.

A.N. : avec $C \# 8,5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (cf. **d.α.**) ; $t = 4,86 \cdot 10^5 \text{ s}$ (# 5,6 jours).

1.4.6. Points de Lagrange

Ce problème a pour but de retrouver quelques uns des résultats établis par Lagrange sur les positions d'équilibre et la stabilité d'un point matériel de masse négligeable soumis à l'attraction gravitationnelle de deux corps solides. Tel est un aspect du "problème restreint des trois corps".

La première partie concerne la dynamique d'un système binaire rigide et le potentiel créé par l'ensemble de ces deux corps ; la deuxième partie caractérise les points d'équilibre d'un point matériel soumis à l'action de ce système binaire et la troisième partie concerne une étude de stabilité, avec des applications en astronomie. On négligera la rotation propre de ces solides et on supposera que la distance entre leurs centres de

gravité respectifs, M_1 et M_2 , est d'une part fixe, d'autre part grande devant leurs dimensions caractéristiques. Ces hypothèses légitiment que l'on puisse modéliser le système, considéré comme isolé, par deux points matériels de masses m_1 et m_2 , situés respectivement en M_1 et M_2 , avec $M_1M_2 = R$, constant. Ce modèle est représenté à la figure 1.

On notera $\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ et $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Le centre d'inertie du système sera noté I et on posera, pour un point M quelconque, $M_1M = r_1$, $M_2M = r_2$ et $IM = r$. Le vecteur rotation du système dans le repère barycentrique supposé galiléen sera noté $\vec{\Omega}$ et son module sera désigné par Ω .

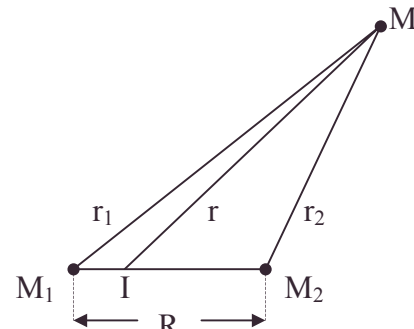


Figure 1

I. Dynamique d'un système binaire : potentiel Modélisation du système

1. Indiquer sans calcul l'allure des équipotentielle du champ de gravitation au voisinage de l'un ou l'autre des points matériels (c'est-à-dire pour $\frac{m_1}{r_1} \ll \frac{m_2}{r_2}$ ou

$\frac{m_1}{r_1} \gg \frac{m_2}{r_2}$). Indiquer de la même manière l'allure de ces équipotentielle très loin du

système ($r \gg R$). En déduire qu'il existe une surface limite au-delà de laquelle les surfaces équipotentielles entourent les deux points à la fois. Tracer au jugé la forme de cette surface limite.

2. Déterminer le mouvement relatif des points M_1 et M_2 .

3. Indiquer la nature et donner la taille des orbites respectives de M_1 et de M_2 dans le repère barycentrique ; déterminer l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ du système en fonction de R , m_1 , m_2 et G , constante de gravitation universelle.

Tous les calculs seront désormais effectués dans le repère synodique S défini comme suit :

$I\alpha$: axe dont le vecteur unitaire est $\vec{i} = \overrightarrow{M_1M_2} / M_1M_2$

$I\gamma$: axe dont le vecteur unitaire est $\vec{k} = \vec{\Omega} / \Omega$

$I\beta$: axe dont le vecteur unitaire est $\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$.

4. Montrer que dans le référentiel synodique l'ensemble des forces de gravitation et des forces d'inertie s'exerçant sur un point matériel fixe de masse m placé en un point M de coordonnées X , Y et Z dérive d'une énergie potentielle $mV(M)$.

Introduisant $x = \frac{X}{R}$, $y = \frac{Y}{R}$ et $z = \frac{Z}{R}$, coordonnées réduites du point considéré, on

donnera l'expression de $V(M)$ sous la forme : $V(M) = -\Omega^2 R^2 f(x, y, z)$.

II. Positions d'équilibre ou points de Lagrange

1. Montrer que toutes les positions d'équilibre d'un point matériel soumis à l'action du système binaire sont situées dans le plan $I\alpha\beta$.

2. Montrer qu'il existe trois positions d'équilibre et trois seulement sur l'axe $I\alpha$. On notera x_1 , x_2 et x_3 les abscisses respectives, rangées par valeurs croissantes, des points correspondants L_1 , L_2 et L_3 . Positionner qualitativement ces trois points sur un schéma lorsque $m_1 \ll m_2$.

3. Montrer qu'il existe deux autres positions d'équilibre, L_4 et L_5 , en dehors de l'axe $I\alpha$. Comment passe-t-on de L_4 à L_5 ? On notera L_4 le point d'ordonnée positive. Montrer

• développement au premier ordre ou plus, équilibre, matrice, points de Lagrange, stabilité

que les coordonnées réduites de ce point sont $x_0 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2}$ et $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Caractériser géométriquement la figure ($M_1 M_2 L_4$).

4. Pourquoi ne peut-on pas discuter la stabilité des positions d'équilibre à partir de la seule fonction f ?

III. Stabilité de l'équilibre

On se bornera ici à étudier le mouvement dans le plan $\alpha\beta$ d'une particule matérielle de masse m et de coordonnées réduites $(x, y, 0)$ se déplaçant au voisinage du point L_4 de la question II.3.

1. Introduisant les variables $\xi = x - x_0$ et $\eta = y - y_0$ et développant la fonction f jusqu'au 2^{ème} ordre en ξ et η , écrire l'équation du mouvement de la particule considérée.

2. On note : $x_1 = \xi$, $x_2 = \eta$, $x_3 = \frac{d\xi}{dt}$ et $x_4 = \frac{d\eta}{dt}$ et l'on considère ces quatre fonctions

comme les composantes d'un vecteur colonne \vec{X} ; écrire l'équation de la question III.1. sous la forme : $d\vec{X} / dt = (M)\vec{X}$ où (M) est une matrice (4 x 4) que l'on déterminera.

3. En déduire que la solution générale de ce système est de la forme :

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^4 \vec{X}_i^0 \exp(\Omega \lambda_i t), \text{ où les } \vec{X}_i^0 \text{ sont des vecteurs constants et les } \lambda_i \text{ solutions de}$$

$$\text{l'équation : } \lambda^4 + \lambda^2 + \left(\frac{27}{4}\right)\mu_1\mu_2 = 0.$$

4. En déduire la condition sur μ_2 pour que la solution $\vec{X}(t)$ reste toujours bornée. Qu'en est-il alors des stabilités de L_4 ou L_5 ?

5. La condition précédente étant vérifiée, montrer que $\xi(t)$ et $\eta(t)$ s'expriment sous forme de combinaisons linéaires des fonctions $\cos(s_1 \Omega t + \phi_1)$ et $\cos(s_2 \Omega t + \phi_2)$. Montrer que, lorsque $m_1 \ll m_2$ (ou, ce qui est équivalent, μ_2 est voisin de 1), alors $s_1 \ll s_2$; dans ce dernier cas, tracer sur un même schéma l'allure de s_1 et celle de s_2 en fonction de μ_2 .

6. Applications numériques : on donne les masses suivantes, rapportées à celle de la Terre.

Soleil	Jupiter	Terre	Lune
333000	318	1	1/80

Vérifier que les points L_4 et L_5 correspondant au système Soleil-Jupiter et au système Terre-Lune sont stables. Quelles conséquences peut-on en déduire ?

Mines ; Durée : 3h

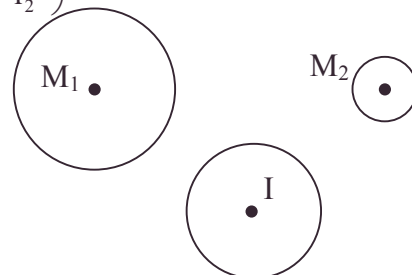
Corrigé

I.1. Le potentiel gravitationnel $V_1(M) = -Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right)$.

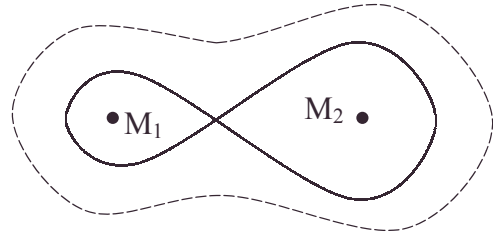
a. Au voisinage de M_1 , le terme $\frac{-Gmm_1}{r_1}$ est

prépondérant et les équipotentielle sont des sphères de centre M_1 , de même pour M_2 .

b. Loin de I, le système se confond avec son centre de masse $I(m_1 + m_2)$. Les équipotentielle sont des sphères de centre I de grands rayons.



c. Par continuité, entre un ensemble de 2 sphères entourant chaque point et une surface entourant les deux points, il existe une surface limite continue constituée de 2 sous ensembles tels que chacun entoure chaque point et que l'ensemble entoure les deux points.



2. M_2 décrit un cercle de centre M_1 et de rayon R , M_1 décrit un cercle de centre M_2 et de rayon R , dans des repères en translation d'origine respective M_1 et M_2 . On comprend ainsi la relativité des mouvements (cf. étoile double).

3.a. I satisfait à $m_1 \overrightarrow{IM_1} + m_2 \overrightarrow{IM_2} = \vec{0}$ et soit P tel que $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1}$, d'où :

$$\overrightarrow{IM_1} = \underbrace{\frac{-m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu_2} \overrightarrow{IP}; \quad \overrightarrow{IM_2} = \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{\mu_1} \overrightarrow{IP}.$$

La trajectoire de P est un cercle de centre I et de rayon R' . Par homothétie, on déduit : les trajectoires de M_1 et M_2 sont des cercles de centre I et de rayon $\mu_2 R$, $\mu_1 R$ respectivement. On en déduira dans S : $X_{M_1} = -\mu_1 R$ et $X_{M_2} = \mu_2 R$.

b. Dans le repère barycentrique (galiléen), on a :

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{IM_1}}{dt^2} = G m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{R^3}$$

$$\text{et } m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{IM_2}}{dt^2} = -G m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{R^3}.$$

$$- \text{Formons } \frac{d^2 \overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{IM_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \overrightarrow{IM_1}}{dt^2} = -G(m_1 + m_2) \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{R^3};$$

Pour le mouvement circulaire de P affecté d'une masse m_p non définie précisément ici (et par conséquent pour celui de M_1 et de M_2),

$$m_p \frac{d^2 \overrightarrow{IP}}{dt^2} = -G m_p (m_1 + m_2) \frac{\overrightarrow{IP}}{R^3} = -m_p \Omega^2 R \vec{i}.$$

$$\Omega = \sqrt{G \frac{(m_1 + m_2)}{R^3}}, \text{ avec } \vec{\Omega} = \Omega \vec{k}, \vec{k} \text{ orthogonal à la trajectoire de P, } M_1, M_2.$$

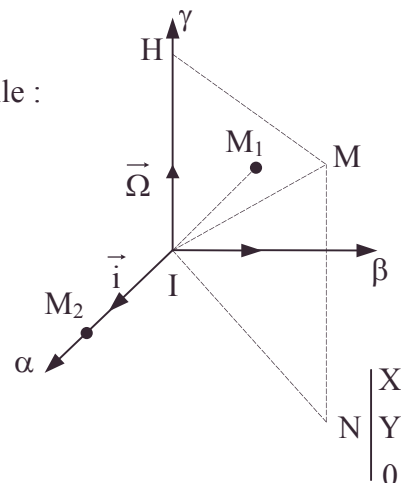
4. Soient N et H les projections de M sur $I\alpha\beta$ et $I\gamma$.

– La force de gravitation \vec{f}_G dérive de l'énergie potentielle :

$$V_1(M) = -G m \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right).$$

– Une force d'inertie d'entraînement :

$\vec{f}_{i_e} = m \Omega^2 \overrightarrow{HM} = m \Omega^2 (X \vec{i} + Y \vec{j})$ due au mouvement de S (dans le repère barycentrique) défini par $\vec{\Omega}$ où M a une trajectoire circulaire de centre H. On peut écrire :



$$\vec{f}_{i_e} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(m\Omega^2 \frac{X^2 + Y^2}{2}\right).$$

– Une force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{i_n} = -m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r = \vec{0}$ car M fixe dans S.

D'où $V = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \Omega^2 \frac{(X^2 + Y^2)}{2}$; ainsi $\vec{f}_G + \vec{f}_i = -\overrightarrow{\text{grad}}(mV)$.

– Rappelons $\|\overrightarrow{M_1M}\|^2 = r_1^2 = (X + \mu_2 R)^2 + Y^2 + Z^2$
et $\|\overrightarrow{M_2M}\|^2 = r_2^2 = (X - \mu_1 R)^2 + Y^2 + Z^2$.

Soit $r_1 = R[(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$ et $r_2 = R[(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$.

– On souhaite la formulation $V(M) = -\Omega^2 R^2 f(x, y, z)$ avec $\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}$, d'où :

$$f(x, y, z) = \frac{\mu_1}{[(x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu_2}{[(x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

II.1. Les positions d'équilibre correspondent à des minima de l'énergie potentielle donc à des minima de f.

$$\text{On a en particulier : } \frac{\partial f}{\partial z} = 0 = -\left[\frac{\mu_1}{((x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_2}{((x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] z ;$$

$\Rightarrow z = 0$; Conclusion : les positions d'équilibre sont situées dans $I\alpha\beta$.

2.a. On recherche les positions d'équilibre sur l'axe $I\alpha$ soit pour $y = 0, z = 0$.

$f(x, 0, 0) = \frac{\mu_1}{|x + \mu_2|} + \frac{\mu_2}{|x - \mu_1|} + \frac{1}{2}x^2$, expression plus simple de $f(x, y, z)$ qui n'influe pas sur la dérivée partielle en x car son calcul suppose y et z constants et accepte donc $y = z = 0$.

$$\text{Exprimons } \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0, 0) = 0 = -\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{(x + \mu_2)^2} - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{(x - \mu_1)^2} + x ,$$

avec $\varepsilon_1 = +1$ si $x + \mu_2 > 0$,
 $\varepsilon_1 = -1$ si $x + \mu_2 < 0$,
 $\varepsilon_2 = +1$ si $x - \mu_1 > 0$,
 $\varepsilon_2 = -1$ si $x - \mu_1 < 0$.

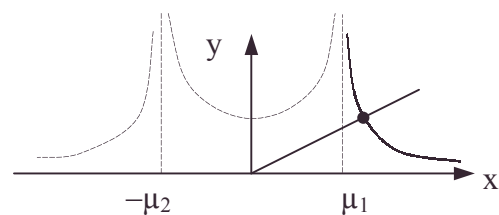
μ_1 et μ_2 ont des rôles équivalents, le signe – dépend de l'orientation de l'axe $I\alpha$.

On visualisera graphiquement l'équation $x = \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{(x + \mu_2)^2} + \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{(x - \mu_1)^2}$ par intersection de :

$$y = \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{(x + \mu_2)^2} + \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{(x - \mu_1)^2} \text{ et } y = x.$$

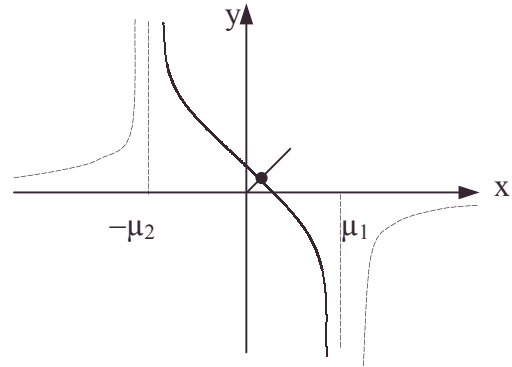
α . $\varepsilon_1 = 1 ; \varepsilon_2 = 1 \Rightarrow x_3 > \mu_1$;

1 solution positive x_3 .



graphe α

β. $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = -1$; $\Rightarrow -\mu_2 < x_2 < \mu_1$;
 $\mu_1 > \mu_2$; 1 solution positive x_2 .
 pour le graphe ici où μ_1 l'emporte.
 $\mu_1 < \mu_2$; 1 solution négative x_2 avec un graphe
 où μ_2 l'emporte.

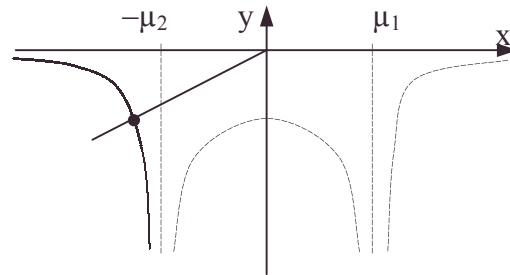


graphe β

γ. $\varepsilon_1 = -1$; $\varepsilon_2 = -1 \Rightarrow x_1 < -\mu_2$;
 1 solution négative x_1 .
 On obtient finalement 3 positions L_1, L_2, L_3
 indicées satisfaisant, vu l'énoncé, à :

$$\begin{aligned} x_1 &< -\mu_2 ; \\ -\mu_2 &< x_2 < \mu_1 ; \text{ (si } \mu_1 > \mu_2 \text{)} ; \\ x_3 &> \mu_1. \end{aligned}$$

b. si $m_1 \ll m_2$, $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 1$.



graphe γ

On doit résoudre à l'ordre zéro : $x = \frac{\varepsilon_2}{x^2}$.

On a : **α.** $\varepsilon_2 = 1$; $\frac{1}{x} = x \Rightarrow x_3 = 1$;

$$\text{β. } \varepsilon_2 = -1 ; -\frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x_2 = -1 ;$$

$$\text{γ. } \varepsilon_2 = -1 ; -\frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x_3 = -1.$$

• Résolvons autour de ces situations limites par synthèse de **a.** et **b.** en posant :

α. on a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$; $x_3 = 1 + \alpha_3$;

μ_1 étant l'infiniment petit, α est infiniment petit, supposé de même ordre comme cela sera confirmé à la fin, or $\mu_2 = 1 - \mu_1$

Etudions nos conclusions par continuité vu $\mu_1 < \mu_2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ s'écrit : } -\frac{\mu_1}{(2 + \alpha_3 - \mu_1)^2} - \frac{(1 - \mu_1)}{(1 + \alpha_3 - \mu_1)^2} + 1 + \alpha_3 = 0 \quad \text{d'où en développant,}$$

$$\text{on a } -\frac{\mu_1}{4} \left(1 - 2 \frac{(\alpha_3 - \mu_1)}{2} \right) - (1 - \mu_1)(1 - 2(\alpha_3 - \mu_1) + 1 + \alpha_3) = 0,$$

$$\text{et en se limitant aux ordres 1 on a : } -\frac{\mu_1}{4} + \mu_1 + 2\alpha_3 - 2\mu_1 + \alpha_3 = 0.$$

$$\alpha_3 = \frac{5\mu_1}{12} ; x_3 = 1 + \frac{5\mu_1}{12}. L_3 \text{ est voisin de } 1.$$

Remarque : $x_3 = 1 - \alpha$ avec $\alpha > 0$ est impossible. (cf. **2.a.α.**).

β. On a $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$; $x_2 = -1 + \alpha$, supposons $\alpha_2 \gg \mu_1$ qui permet de résoudre comme cela sera confirmé à la fin.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ s'écrit } \frac{-\mu_1}{(\mu_1 - \alpha_2)^2} + \frac{(1 - \mu_1)}{(1 - \alpha_2 + \mu_1)^2} - 1 + \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\mu_1}{\alpha_2^2} + (1-2\alpha_2)(1-\mu_1) - 1 + \alpha_2 = 0 \text{ soit } -\frac{\mu_1}{\alpha_2^2} + \alpha_2 = 0.$$

d'où $\alpha_2 = (\mu_1)^{\frac{1}{3}}$; $x_2 = -1 + (\mu_1)^{\frac{1}{3}}$. L'hypothèse $\alpha_2 \gg \mu_1$ est confirmée.

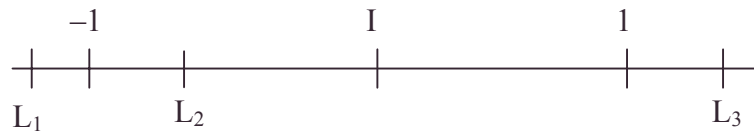
γ. On a $\varepsilon_1 = -1 = \varepsilon_2$; $x_1 = -1 - \alpha_1$, supposons $\alpha_1 \gg \mu_1$ qui permet de résoudre comme cela sera confirmé à la fin.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ s'écrit } \frac{\mu_1}{(\alpha_1 + \mu_1)^2} + \frac{(1-\mu_1)}{(1+\alpha_1 + \mu_1)^2} - 1 - \alpha_1 = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_1}{\alpha_1^2} + (1-\mu_1)(1-2\alpha_1) - 1 - \alpha_1 = 0 \text{ soit } \frac{\mu_1}{\alpha_1^2} - 3\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \left(\frac{\mu_1}{3}\right)^{\frac{1}{3}};$$

l'hypothèse est vérifiée (numériquement si besoin) ; $x_1 = -1 - \left(\frac{\mu_1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

δ. Conclusion :



3. I est caractérisé par $y = 0$ et $z = 0$

Cherchons à résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ **(1)** et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ **(2)** avec $y \neq 0$ et $z = 0$.

$$\text{On a : } \frac{-\mu_1(x+\mu_2)}{[(x+\mu_2)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2(x-\mu_1)}{[(x-\mu_1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + x = 0 ; \text{ (1)}$$

$$\frac{-\mu_1}{[(x+\mu_2)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2}{[(x-\mu_1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + 1 = 0 ; \text{ (2) car } y \neq 0.$$

a. Mettons x en facteur dans **(1)** ;

$$x \left(1 - \frac{\mu_1}{[(x+\mu_2)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_2}{[(x-\mu_1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} \right) +$$

cf $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$

$$\mu_1 \mu_2 \left(\frac{1}{[(x-\mu_1)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x+\mu_2)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (x+\mu_2)^2 + y^2 = (x-\mu_1)^2 + y^2;$$

$$\text{une seule possibilité } x+\mu_2 = -(x-\mu_1) \Rightarrow x_0 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} ;$$

$$\text{alors } (x+\mu_2)^2 = (x-\mu_1)^2 = \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ car } \mu_1 + \mu_2 = 1$$

$$\text{b. (2)} \Rightarrow 1 - \frac{\overbrace{\mu_1 + \mu_2}^1}{\left(y^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow y^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

on obtient donc 2 positions symétriques,

$$L_4 \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \text{ et } L_5 \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \text{ ce que l'on voulait démontrer.}$$

$$\text{Calculons } M_1 L_4^2 = \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} - \mu_1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1 ;$$

de même, $M_2 L_4^2 = 1$ et $M_1 M_2 L^2 = 1$. Le triangle $M_1 M_2 L$ est équilatéral.

4. L'étude de la stabilité exige l'étude du mouvement de retour vers la position d'équilibre ; or on n'a pas tenu compte de la force d'inertie de Coriolis dans le calcul de $f(x, y, z)$; ce qui rend impossible une étude dynamique de la stabilité à partir de $f(x, y, z)$.

III. Stabilité de l'équilibre.

1.a. Changement de variables dans $f(x, y, 0)$ vu $\mu_1 + \mu_2 = 1$: $x = \xi + x_0 = \xi + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}$

$$x + \mu_2 = \xi + x_0 + \mu_2 = \frac{1}{2} + \xi ; x - \mu_1 = \xi + x_0 - \mu_1 = \xi - \frac{1}{2} ; y = \eta + \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

b. c. Développements limités au deuxième ordre (qui permettra par dérivation d'obtenir les termes d'ordre 1 de la force).

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \equiv \frac{\left(\xi + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \eta \right)^2}{2} = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{8} + (\mu_1 + \mu_2) \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta + \frac{\eta^2}{2}$$

$$\left[(x + \mu_2)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \xi + \xi^2 + \eta\sqrt{3} + \eta^2 \right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}(\xi + \xi^2 + \eta\sqrt{3} + \eta^2) + \frac{3}{8}(\xi + \xi^2 + \eta\sqrt{3} + \eta^2)^2 \dots \right) \Rightarrow$$

$$\left[(x + \mu_2)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[(x - \mu_1)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\xi}{2} - \eta \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\xi^2}{8} + \frac{5}{8} \eta^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \xi \eta + o(\xi^3, \eta^3) ;$$

$$\left[(x - \mu_1)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 - \xi + \xi^2 + \eta\sqrt{3} + \eta^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\xi}{2} - \eta \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{8} \eta^2 - \frac{\xi^2}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \xi \eta + o(\xi^3, \eta^3) \text{ en ayant changé } \xi \text{ en } -\xi,$$

$$\Rightarrow f(x, y, 0) = \frac{1}{8}(\mu_1 - \mu_2)^2 + \frac{11}{8} + \frac{3}{8}(\xi^2 + 3\eta^2) + \frac{3\sqrt{3}}{4}(\mu_1 - \mu_2)\xi\eta + o(\xi^3, \eta^3) .$$

d. Réécrivons le principe fondamental en tenant compte des forces d'inertie notamment de Coriolis pour le point M.

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{IM}}{dt^2} = \underbrace{\overrightarrow{f_{G_1}} + \overrightarrow{f_{G_2}} + \overrightarrow{f_{i_c}}}_{\text{forces de pesanteur}} - 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}(M), \text{ soit } m \frac{d^2 \overrightarrow{IM}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad } V(M)} - 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} .$$

e. On obtient les équations en x et y :

$$m \ddot{x} = m\Omega^2 R^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2m\Omega \dot{y} \text{ et } m \ddot{y} = m\Omega^2 R^2 \frac{\partial f}{\partial y} - 2m\Omega \dot{x} .$$

f. On a finalement les équations en ξ et η ; $\ddot{\xi} = \Omega^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + 2\Omega \dot{\eta}$ et $\ddot{\eta} = \Omega^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} - 2\Omega \dot{\xi}$.

g. En remplaçant f par son développement d'ordre 2 nécessaire pour obtenir un terme d'ordre 1 par dérivation :

$$\ddot{\xi} = \Omega^2 \left[\frac{3}{4} \xi + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} (\mu_1 - \mu_2) \eta \right] + 2\Omega \dot{\eta} ; \ddot{\eta} = \Omega^2 \left[3 \frac{\sqrt{3}}{4} (\mu_1 - \mu_2) \xi + \frac{9}{4} \eta \right] - 2\Omega \dot{\xi}.$$

2. Posons $\vec{X} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}$, on a $\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix}$,

on a aussi : $\left(\frac{d\vec{X}}{dt} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} \Omega^2 & \frac{3\sqrt{3}}{4} (\mu_1 - \mu_2) \Omega^2 & 0 & 2\Omega \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} \Omega^2 (\mu_1 - \mu_2) & \frac{9}{4} \Omega^2 & -2\Omega & 0 \end{pmatrix} (\vec{X}).$

3.a. Supposons que cette matrice est diagonalisable de valeurs propres $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ et de vecteurs propres $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \vec{Y}_3, \vec{Y}_4$ associées. La suite permettra de trouver les solutions annoncées : la technique est heuristique.

• Dans cette base propre, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{pmatrix} (\vec{Z}) \text{ de solutions } \vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_1^0 e^{\delta_1 t} \\ Z_2^0 e^{\delta_2 t} \\ Z_3^0 e^{\delta_3 t} \\ Z_4^0 e^{\delta_4 t} \end{pmatrix}$$

• En revenant à la base où \mathbf{M} est non diagonale $\vec{X} = \mathbf{P}^{-1}(\vec{Z})$ avec $(\alpha_{ij}) = \mathbf{P}^{-1}$,

$$X_i = \sum_j \alpha_{ij} Z_j^0 e^{\delta_j t} \text{ avec } \alpha_{ij} \text{ et } Z_j^0 \text{ des constantes.}$$

$$\text{On a bien } \vec{X} = \sum_i \vec{X}_i^0 e^{\delta_i t} \text{ avec } X_i^0 = \alpha_{ij} Z_j^0 \text{ et } \delta_i = \Omega \lambda_i.$$

b. Equation caractéristique aux valeurs propres $\det |(\mathbf{M}) - \delta(\mathbf{I})| = 0$ soit (\mathbf{I}) la matrice unité ; soit en posant $\delta = \Omega \lambda$, on a alors :

$$\begin{vmatrix} -\lambda\Omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda\Omega & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} \Omega^2 & \frac{3\sqrt{3}}{4} (\mu_1 - \mu_2) \Omega^2 & -\lambda\Omega & 2\Omega \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} \Omega^2 (\mu_1 - \mu_2) & \frac{9}{4} \Omega^2 & -2\Omega & -\lambda\Omega \end{vmatrix} = 0 ;$$

Tout calcul fait, l'équation est bien : $\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu_1 \mu_2 = 0$. La technique est heuristique

4.a. \vec{X} reste borné si les valeurs λ_i ont des parties réelles nulles ou négatives.

• développement au premier ordre ou plus, matrice, valeurs propres

Posons $\beta = \lambda^2$; l'équation à résoudre s'écrit $\beta^2 + \beta + \frac{27}{4}\mu_1\mu_2 = 0$ de discriminant

$$\Delta = 1 - 27\mu_1\mu_2.$$

α. $\Delta \geq 0$, β est réel mais $\beta_1 + \beta_2 = -1$ et $\beta_1\beta_2 = -\frac{27}{4}\mu_1\mu_2 \Rightarrow \beta_1 < 0, \beta_2 < 0$.

λ_i est imaginaire pur : \vec{X} reste borné.

β. $\Delta < 0$, β est complexe et λ aussi ; $\lambda = \lambda' + j\lambda''$;

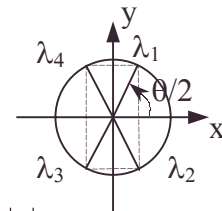
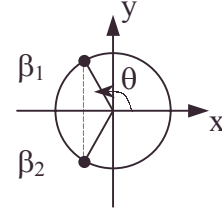
$$\beta^2 = \lambda^2 = \lambda'^2 - \lambda''^2 + 2j\lambda'\lambda''.$$

$$\beta = \frac{-1 \pm j\sqrt{27\mu_1\mu_2 - 1}}{2} ; \lambda'^2 - \lambda''^2 = -\frac{1}{2} ; 2\lambda'\lambda'' = \pm\sqrt{27\mu_1\mu_2 - 1}.$$

D'après les schémas ci-contre sur les β et les λ , il y a deux racines à parties réelles positives.

\vec{X} n'est alors pas borné ;

Conclusion : $|\vec{X}|$ tend en général vers l'infini ; il n'y a pas stabilité.



b. Quand λ est imaginaire pur (soit $\Delta \geq 0$), $\text{Re}(e^{(j\Omega|\lambda|t+\varphi)}) = \cos(\Omega|\lambda|t + \varphi)$;

l'oscillation prouve la stabilité d'une position.

Il faut $1 - 27\mu_1\mu_2 \geq 0$, or $\mu_1 + \mu_2 = 1$, soit $27\mu_2^2 - 27\mu_2 - 1 > 0$. Ce trinôme est positif si

μ_2 est extérieur à ses racines $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{23}{27}}\right)$; cela ne se traduit pas simplement.

A.N. : $\mu_2 \leq 0,03852$; $\mu_2 \geq 0,9615$, soit $\mu_1 \geq 0,9615$ et $\mu_1 \leq 0,0352$ vu la symétrie.

Alors L_4 et L_5 correspondent à des positions stables.

$$\text{5.a. } \lambda_{1\text{ou}2}^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 27\mu_1\mu_2}}{2} ; \lambda_{3\text{ou}4}^2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu_1\mu_2}}{2} ;$$

$$\text{Posons } s_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 27\mu_1\mu_2}}{2}} \text{ et } s_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 27\mu_1\mu_2}}{2}} ;$$

$$\lambda_1 = -js_1 ; \lambda_2 = js_1 ; \lambda_3 = -js_2 ; \lambda_4 = js_2.$$

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_1^0 e^{-j\Omega s_1 t} + \vec{X}_2^0 e^{j\Omega s_1 t} + \vec{X}_3^0 e^{-j\Omega s_2 t} + \vec{X}_4^0 e^{j\Omega s_2 t}.$$

$$\vec{X}(t) = (\vec{X}_1^0 + \vec{X}_2^0) \cos \Omega s_1 t + (\vec{X}_2^0 - \vec{X}_1^0) \sin \Omega s_1 t + (\vec{X}_3^0 + \vec{X}_4^0) \cos \Omega s_2 t + (\vec{X}_4^0 - \vec{X}_3^0) \sin \Omega s_2 t$$

et formellement il en est ainsi sur η et ξ , premières composantes de \vec{X} ,

or $\cos(\Omega s t + \phi) = \cos \Omega s t \cos \phi - \sin \Omega s t \sin \phi$, ϕ étant déterminé par $\tan \phi$:

$$\text{L'identification permet : } \tan \phi_{1i} = -\frac{X_{2i}^0 - X_{1i}^0}{X_{1i}^0 + X_{2i}^0}, \tan \phi_{2i} = -\frac{X_{3i}^0 - X_{4i}^0}{X_{3i}^0 + X_{4i}^0}, \text{ etc.}$$

\vec{X} (et par conséquent η et ξ) sont de la forme $A \cos(s_1 \Omega t + \phi_1) + B \cos(s_2 \Omega t + \phi_2)$.

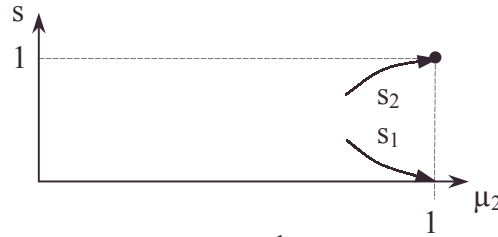
b. $m_1 \ll m_2$, $\mu_1 \neq \frac{m_1}{m_2}$, $\mu_2 = 1 - \mu_1$, $\mu_2 \neq 1$.

Développons s_1^2 et s_2^2 au 1^{er} ordre en μ_1 : $s_1^2 = \frac{1 - (1 - 27\mu_1)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{27\mu_1}{4} = \frac{27}{4}(1 - \mu_2)$

voisin de zéro ;

• développement au premier ordre ou plus, identification, stabilité

$$s_2^2 = \frac{1 + (1 - 27\mu_1)^2}{2} = 1 - \frac{27}{4}\mu_1 = 1 - \frac{27}{4}(1 - \mu_2) : s_2^2 \neq 1 \Rightarrow s_1^2 < s_2^2.$$



6.a.α. Pour le système Terre-Lune, $\mu_2 = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$; AN : $\mu_2 = 0,9876 > 0,9615$.

L_4 et L_5 sont donc stables.

β. Pour le système Soleil-Jupiter, $\mu_2 = \frac{1}{1 + \frac{m'_1}{m'_2}}$; AN : $\mu_2 = 0,9990 > 0,9615$.

L_4 et L_5 sont stables.

b. Cette stabilité permet à des fragments de matière plus ou moins importants (astéroïdes) de s'accumuler au cours du temps en L_4 ou L_5 pour le système Soleil-Jupiter aussi bien que pour le système Terre-Lune.

1.4.7. Avance du périhélie de Mercure

UN TRAITEMENT APPROCHE DES CONTRIBUTIONS NEWTONIENNE ET RELATIVISTE A LA PRECESSION DU PERIHELIE DE MERCURE

Le mouvement de chacune des planètes du système solaire est faiblement perturbé par la présence des autres planètes. Un des effets de ces perturbations est le suivant : les trajectoires restant planes, le grand axe de l'orbite est animé d'un mouvement périodique dans le plan de l'orbite ; c'est ce que l'on appelle la précession du périhélie. Les périodes de ces oscillations sont très élevées (de l'ordre de 10^5 années).

Il est donc légitime d'assimiler les trajectoires planétaires à des ellipses képlériennes dont les caractéristiques changent avec le temps.

L'objet de ce problème est un traitement élémentaire et partiel de ces effets ; on comparera les expressions ainsi obtenues à celles qui sont dues aux effets de relativité générale.

Dans tout le problème, on désigne par G la constante gravitationnelle :

($G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$), r la distance planète-Soleil, \vec{v} la vitesse de la planète,

\vec{u}_θ et $\vec{u}_r = -\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$ les vecteurs unitaires dans les directions croissantes, respectivement

de l'angle polaire θ et du rayon vecteur \vec{r} et par $\vec{k} (= \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$ le vecteur unitaire normal au plan de la trajectoire. On désigne enfin par \vec{J} le vecteur moment cinétique :

sa mesure algébrique est $J = mr^2 \dot{\theta}$.

On considère d'abord le mouvement elliptique d'une planète, assimilée ici à un objet ponctuel de masse m , dans le champ gravitationnel du Soleil, assimilé ici à un objet ponctuel de masse M_s . La loi newtonienne du mouvement d'une planète s'écrit ainsi

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{M_s m}{r^2} \vec{u}_r$; l'équation de la trajectoire est par suite : $r = a \frac{1-e^2}{1+e \cos \theta}$, où e

($0 < e < 1$) est l'excentricité et $a = \frac{J^2}{GM_s m^2 (1-e^2)}$, la longueur du demi grand axe de l'ellipse.

1. Montrer que le vecteur $\vec{e} = \frac{J}{GM_s m} \vec{v} - \vec{u}_\theta$ est une constante du mouvement newtonien.

2. Montrer que le vecteur \vec{e} est porté par le petit axe de l'ellipse, et déterminer sa longueur.

On suppose maintenant que l'on peut décrire l'influence des autres planètes sur la planète en question par un potentiel central additif ; l'équation du mouvement de cette planète peut dans ces conditions, s'écrire : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{M_s m}{r^2} [1 + g(r)] \vec{u}_r$, où $|g(r)| \ll 1$.

3.a. Supposons d'abord qu'il existe des trajectoires circulaires, de rayon \bar{R} et de vitesse angulaire de révolution Ω . Etablir alors deux relations :

α. Première relation entre G , \bar{R} , $g(\bar{R})$, M_s et Ω .

β. Seconde relation entre G , \bar{R} , $g(\bar{R})$, M_s , m et \vec{J} .

Dans ce qui suit, on suppose que la trajectoire reste fermée et très proche d'une trajectoire circulaire et on pose $\rho = |r - \bar{R}|$, avec $\rho \ll |\bar{R}|$.

b. Etablir, dans ces conditions, l'expression approchée de la pulsation ω des oscillations de $r(t)$ en fonction de Ω , \bar{R} , $g(\bar{R})$, et $g'(\bar{R}) = \left(\frac{dg}{dr} \right)_{r=\bar{R}}$.

4. Etablir la relation : $\frac{d\vec{e}}{dt} = -g(r) \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r$.

5. Montrer que la quantité $K = G \frac{M_s m^2}{2J^2} e^2 + \int_0^r \frac{g(u)}{u^2} du$ est une constante du

mouvement (On pourra, par exemple, considérer le produit scalaire $\vec{e} \frac{d\vec{e}}{dt}$). Que peut-on dire de la borne inférieure de l'intégrale ?

Dans ce qui suit, on désignera par e et ψ les coordonnées polaires du vecteur \vec{e} et par \vec{u}_e et \vec{u}_ψ les vecteurs unitaires associés.

6. Montrer que, si le mouvement de la planète reste périodique, alors la grandeur scalaire e est aussi une fonction périodique du temps ; montrer aussi que la variation $\Delta\psi$ de l'angle polaire ψ sur une période de révolution de la planète est :

$\Delta\psi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{J^2}{GM_s m^2 r} - 1 \right) \frac{g(r)}{e^2} d\theta$. Il est avantageux, pour établir ce dernier résultat, de

considérer le produit vectoriel $\vec{q} = \vec{e} \wedge \frac{d\vec{e}}{dt}$.

La fonction à intégrer dans l'expression de $\Delta\psi$ de la question 6. fait en principe intervenir la solution exacte du problème. Cependant, il est légitime, dans un traitement approché, de substituer à cette solution exacte $(r(\theta), e)$ la solution (non perturbée) du problème de Képler, telle qu'elle est rappelée dans le préambule.

7. Donner l'expression de $\Delta\psi$ dans le cadre de cette approximation. Cette grandeur sera dorénavant désignée comme l'angle de précession.

8. Montrer que, si l'excentricité de l'orbite est très faible, alors $\Delta\psi = -\pi\bar{R}\left(\frac{dg}{dr}\right)_{r=\bar{R}}$, où

\bar{R} désigne le rayon de l'orbite quasi circulaire. Cette approximation sera testée ultérieurement, dans un cas particulier.

Pour les applications numériques, on adoptera les données suivantes :

$$M_s = 2.10^{30} \text{ kg} ; G = 6,67.10^{-11} \text{ SI} ; \bar{R}_{\text{Mercure}} = 57,9.10^9 \text{ m} \\ \text{et } c, \text{ célérité de la lumière dans le vide, } 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Le tableau 1 résume quelques données relatives au système solaire : a_p , longueur du demi grand axe de l'orbite de la planète est en millions de kilomètres, P est la période de révolution sidérale de la planète, exprimée en années tropiques (365,256 jours) et α est le rapport entre la distance moyenne de la planète Mercure au Soleil et la quantité

analogue pour la planète considérée : $\alpha = \frac{\bar{R}_{\text{Mercure}}}{\bar{R}_p}$.

Planète P	a_p en Gm	e	P en année tropique	m / M_s	α
Mercure	69,7	0,2060	0,240	$0,18.10^{-6}$	1,000
Vénus	109,0	0,0070	0,615	$2,44.10^{-6}$	0,535
Terre	152,1	0,0167	1,000	$3,01.10^{-6}$	0,387
Mars	249,1	0,0390	1,880	$0,33.10^{-6}$	0,254

Tableau 1 : quelques caractéristiques orbitales de planètes du système solaire.

A titre documentaire, $\bar{R}_{\text{Terre}} = 149,6.10^9 \text{ m}$.

9. Commenter les écarts des données expérimentales du tableau 1 par rapport à la troisième loi de Képler.

On s'intéresse, pour la fin du problème, à la planète Mercure, en admettant les résultats théoriques suivants : la perturbation apportée au mouvement de la planète Mercure par une planète de masse m en orbite circulaire de rayon \bar{R}_p autour du soleil se laisse décrire en moyenne en Mécanique newtonienne par la fonction :

$$g_N(r) = -\left(\frac{m}{2M_s}\right) \frac{\left(\frac{r}{\bar{R}_p}\right)^3}{1 - \left(\frac{r}{\bar{R}_p}\right)^2}.$$

La considération de l'inertie et de la gravitation dans le cadre de la relativité générale conduit quant à elle à la correction supplémentaire : $g_{\text{RG}}(r) = \frac{3J^2}{m^2 c^2 r^2}$.

10. L'inégalité $|g(r)| \ll 1$ est-elle effectivement satisfaite pour l'une et l'autre (newtonienne et relativiste) de ces perturbations ? Que peut-on dire des trajectoires respectivement associées ? Du signe de la précession du périhélie ?

• analogie, année tropique, développement au premier ordre ou plus, excentricité d'une conique, grand axe, Képler [lois de], périhélie, précession, relativité

11. Calculer, en Mécanique newtonienne et à l'ordre le plus bas, (cf. relation de la question 8.) les contributions respectives de Vénus, de la Terre et de Mars à l'angle de précession de la planète Mercure. On exprimera le résultat d'une part en secondes d'arc par révolution de Mercure, d'autre part en secondes d'arc par siècle. La somme des contributions dans ce cas sera désignée par $\Delta\psi_{0,N}$.

12. Calculer $\Delta\psi$ relativiste à l'ordre le plus bas (cf. relation de la question 8.). On exprimera le résultat en secondes d'arc par siècle. La correction totale dans ce cas sera désignée par $\Delta\psi_{RG}$.

13. Comparer les résultats numériques de la question 11. à ceux qui résultent de l'application de l'expression établie en 7., laquelle se résout immédiatement ici par une quadrature élémentaire. La correction dans ce cas sera désignée par $(\Delta\psi)_{1,N}$.

14. Conclure en formulant un commentaire personnel sur les modèles considérés dans ce problème, et les vérifications théoriques et expérimentales de la relativité générale ; à titre documentaire, une donnée expérimentale récente fournit, pour la planète Mercure, un $(\Delta\psi)$ total de l'ordre de 532" par siècle.

Mines ; Durée 2h30

Corrigé

1. $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{M_s m}{r^2} \vec{u}_r$; or $J = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$.

Pour introduire \vec{u}_θ , remarquons $\vec{u}_r = -\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$.

Ainsi, $\frac{d\vec{v}}{dt} = G \frac{M_s}{r^2} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = G \frac{M_s}{r^2} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{\theta}} = G \frac{M_s}{r^2} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \frac{mr^2}{J}$.

En intégrant en t ; $\vec{v} = G \frac{M_s m}{J} [\vec{u}_\theta + \vec{e}]$, \vec{e} = vecteur constant.

$\Rightarrow \vec{e} = \frac{J\vec{v}}{GM_s m} - \vec{u}_\theta$ est une constante du mouvement newtonien.

2. • Vu r, pour $\theta = 0$, \vec{u}_{θ_0} selon le petit axe de l'ellipse, \vec{v}_{θ_0} aussi.

Pour ce cas particulier, $\vec{e} \wedge \vec{u}_{\theta_0} = \frac{J}{GM_s m} \underbrace{\vec{v}_{\theta_0} \wedge \vec{u}_{\theta_0}}_{=0} - \underbrace{\vec{u}_{\theta_0} \wedge \vec{u}_{\theta_0}}_{=0}$.

\vec{e} est donc porté par le petit axe de l'ellipse.

• Pour $\theta = 0$ $\vec{e} = \vec{e} \vec{u}_{\theta_0} = \left(\frac{J}{GM_s m} v_{\theta_0} - 1 \right) \vec{u}_{\theta_0}$; or $v_{\theta_0} = r_{\theta_0} \dot{\theta}_{\theta_0} = \frac{J}{mr_{\theta_0}}$;

or, $r_{\theta_0} = a \frac{1-e^2}{1+e} = a(1-e)$; $\vec{e} = \frac{J^2}{GM_s m^2 a(1-e)} - 1 = 1+e-1 = e$;

$\|\vec{e}\| = e$.

3.a. Pour un mouvement circulaire du type donné :

$\alpha. m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\Omega^2 R \vec{u}_r = -GM_s \frac{m}{R^2} (1+g) \vec{u}_r \Rightarrow \Omega^2 = \frac{GM_s}{R^3} (1+g(\bar{R}))$.

β. $J = m\bar{R}^2 \Omega$ s'écrit aussi au carré $J^2 = m^2 \bar{R} G M_s (1 + g(\bar{R}))$.

b. Le mouvement est à force centrale, projetons sur \vec{u}_r :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -GM_s \frac{m}{r^2} (1 + g(r)) ; \text{ Or, } J = mr^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{J^2}{m^2 r^4},$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - \frac{J^2}{m^2 r^3} = -G \frac{M_s}{r^2} (1 + g(r)).$$

$$r = \bar{R} + \rho_1 \text{ avec } |\rho_1| \ll |\bar{R}| ; \ddot{r} = \ddot{\rho}_1 ; \text{ linéarisons : } g(r) = g(\bar{R}) + \rho_1 g'(\bar{R}) ;$$

$$r^{-2} = \bar{R}^{-2} \left(1 - \frac{2\rho_1}{\bar{R}}\right) ; r^{-3} = \bar{R}^{-3} \left(1 - \frac{3\rho_1}{\bar{R}}\right), \frac{g(r)}{r^2} = \frac{g(\bar{R})}{\bar{R}^2} + \frac{\rho_1}{\bar{R}^2} g'(\bar{R}), \text{ d'où au 1^{er} ordre en}$$

ρ_1 et $\ddot{\rho}_1$:

$$\ddot{\rho}_1 + \rho_1 \left(\frac{3J^2}{m\bar{R}^4} - 2 \frac{GM_s}{\bar{R}^3} (1 + g(\bar{R})) + \frac{GM_s}{\bar{R}^2} g'(\bar{R}) \right) = \frac{J^2}{m^2 \bar{R}^3} - \frac{GM_s}{\bar{R}^2} (1 + g(\bar{R})).$$

Finalement en remplaçant $\frac{J^2}{m^2 \bar{R}^3} = \frac{GM_s}{\bar{R}^2} (1 + g(\bar{R}))$ obtenu pour $\dot{\rho} = 0$ cf. cercle :

$$\ddot{\rho}_1 + \frac{GM_s}{\bar{R}^3} (1 + g(\bar{R}) + \bar{R} g'(\bar{R})) \rho_1 = 0 ;$$

$$\omega^2 = \frac{GM_s}{(\bar{R})^3} (1 + g(\bar{R})) \left[1 + \frac{\bar{R} g'(\bar{R})}{1 + g(\bar{R})} \right] \text{ et vu } |g(r)| \ll 1, \omega^2 = \Omega^2 (1 + \bar{R} g'(\bar{R})).$$

$$4. \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{J}{GmM_s} \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{J}{GmM_s} \frac{GM_s}{r^2} (1 + g(r)) \vec{u}_r + \dot{\theta} \vec{u}_r ; \text{ or } J = mr^2 \dot{\theta} ;$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = -g(r) \dot{\theta} \vec{u}_r .$$

$$5. \text{ Formons } \vec{e} \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(e^2)}{dt} = - \left[\frac{J}{GM_s m} \left(\frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \right) - \vec{u}_\theta \right] g \dot{\theta} \vec{u}_r$$

$$\frac{1}{2} d(e^2) = -\frac{g(r) J^2}{GM_s m^2 r^2} dr \Rightarrow G \frac{M_s m^2}{J^2} e^2 + \int_0^r \frac{g(u)}{u^2} du = \text{constante} = K.$$

La borne inférieure est arbitraire, l'intégrale doit néanmoins converger.

6. Vu K, si g et r sont périodiques, e^2 l'est aussi : e est périodique.

$$\vec{q} = \vec{e} \wedge \frac{d\vec{e}}{dt} = - \left[\frac{J}{GM_s m} \left(\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \right) - \vec{u}_\theta \right] \wedge g \dot{\theta} \vec{u}_r ;$$

$$\vec{q} = \left(\frac{J}{GM_s m} r \dot{\theta} - 1 \right) g(r) \dot{\theta} \vec{k} ; \text{ or } J = mr^2 \dot{\theta} ; \vec{q} = \left(\frac{J^2}{GM_s m^2 r} - 1 \right) g(r) \dot{\theta} \vec{k} .$$

Exprimons \vec{q} en fonction de e et ψ :

$$\vec{q} = \vec{e} \wedge \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{e} u_e \wedge \left(\dot{e} \vec{u}_e + e \dot{\psi} \frac{d\vec{u}_e}{d\psi} \right) = e^2 \dot{\psi} \vec{u}_e \wedge \vec{u}_\psi = e^2 \dot{\psi} \vec{k}$$

$$\Rightarrow d\psi = \left(\frac{J^2}{GM_s m^2 r} - 1 \right) g(r) d\theta .$$

On intègre sur une période en θ : $\Delta\psi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{J^2}{GM_s m^2 r} - 1 \right) \frac{g(r)}{e^2} d\theta$.

7. $\frac{J^2}{GM_s m^2} \cdot \frac{1}{r} = a(1-e^2) \cdot \frac{(1+e\cos\theta)}{a(1-e^2)} \Rightarrow \Delta\psi = e \int_0^{2\pi} g(r) \cos\theta d\theta$ car e est sensiblement constant sur une période ($|g| \ll 1$).

8. Pour une trajectoire quasi circulaire $|e| \ll 1 \Rightarrow$ à l'ordre 1, $r = a(1 - e \cos\theta)$ avec $a = \bar{R}$ pour $e = 0$.

$r - \bar{R} = -e \bar{R} \cos\theta$; $g(r) = g(\bar{R}) + (r - \bar{R})g'(\bar{R}) = g(\bar{R}) - e \bar{R} g'(\bar{R}) \cos\theta$;

$$\Delta\psi = \frac{g(\bar{R})}{e} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta - \bar{R} g'(\bar{R}) \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = -\pi \bar{R} g'(\bar{R})$$

9.a. Rappelons la relation entre P^2 et a^3 :

pour une trajectoire circulaire : $-m \frac{V^2 \vec{u}_r}{R} = -G \frac{M_s m}{R^2} \vec{u}_r$; $P = \frac{2\pi R}{V} \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} R^3$

avec $R = a$.

et pour une trajectoire elliptique, la troisième loi de Képler s'écrit : $P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} a^3$.

b. AN : $\frac{4\pi^2}{GM_s} = 2,958 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$

P	Mercure	Vénus	Terre	Mars
Rappel e	0,206	0,007	0,0167	0,039
P^2 / a^3 en $\text{s}^2 \text{ m}^{-3}$	$1,694 \cdot 10^{-19}$	$2,909 \cdot 10^{-19}$	$2,830 \cdot 10^{-19}$	$2,277 \cdot 10^{-19}$

La loi de Képler est suivie par les planètes Vénus et Terre, moins par Mars et beaucoup moins encore par Mercure. La cause de l'anomalie semble être comparativement l'excentricité de Mercure.

10.a. $\alpha = \frac{\bar{R}}{R_p}$ fini et inférieur ou égal à 1 ; $\frac{\alpha^3}{1-\alpha^2}$ reste fini mais $\frac{m}{M_s}$ de l'ordre de

$10^{-6} \Rightarrow |g_N(\bar{R})| \ll 1$; AN : $g_N(\bar{R}) = -1,026 \cdot 10^{-7}$ pour la Terre.

b. $g_{RG}(\bar{R}) = \frac{3m^2 \bar{R}^4 \Omega^2}{m^2 c^2 \bar{R}^2} = 3\bar{R}^2 \frac{\Omega^2}{c^2}$, avec $\Omega^2 \neq \frac{GM_s}{\bar{R}^3}$; $g_{RG}(\bar{R}) = \frac{3GM_s}{\bar{R}c^2}$;

AN : $g_{RG}(\bar{R}) = 2,97 \cdot 10^{-8}$ pour la Terre ; $g_{RG}(\bar{R}) \ll 1$.

On peut donc négliger les perturbations et considérer les trajectoires comme des ellipses.

c. $\Delta\psi = -\pi \bar{R} g'(\bar{R})$;

$$\alpha. g'_N(r) = -\frac{m}{2M_s \bar{R}_p} \frac{3\left(\frac{r}{\bar{R}_p}\right)^2 - \left(\frac{r}{\bar{R}_p}\right)^4}{\left(1 - \left(\frac{r}{\bar{R}_p}\right)^2\right)^2} < 0 \text{ car } \frac{r}{\bar{R}_p} < 1, \text{ vu } \alpha_p \quad \Delta\psi_N > 0.$$

$$\beta. g'_{RG}(r) = -\frac{6J^2}{m^2 c^2 r^3} < 0, \Delta\psi_{RG} > 0 ;$$

$$\gamma. g' = g'_N + g'_{RG} \Rightarrow \Delta\psi = \Delta\psi_N + \Delta\psi_{RG} > 0 .$$

$$11. \Delta\psi = \frac{\pi m}{2M_s} \cdot \frac{\alpha^2 (3 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} \text{ en faisant } \frac{r}{R_p} = \alpha \text{ dans } g'_N(r) .$$

Planète \ $\Delta\psi$	en rad / tour	en secondes d'arc par révolution	en secondes d'arc par siècle
Vénus	$3,126 \cdot 10^{-6}$	0,6448	268,67
Terre	$1,081 \cdot 10^{-6}$	0,2230	92,92
Mars	$2,849 \cdot 10^{-8}$	0,0059	2,45

A.N. : rappelons : $2\pi \text{ rad} = 1,296 \cdot 10^6 \text{ secondes d'arc}$.

$\Delta\psi_{0,N} = 364 \text{ secondes d'arc par siècle}$;

$$12. J_i^2 = G M_s m_i^2 (1 - e_i^2) a \text{ or } \Delta\psi_{iRG} = -\pi \bar{R}_i g'_{iRG}(\bar{R}) \text{ avec } g'_{iRG} = -\frac{6J_i^2}{mc^2 \bar{R}_{\text{Mercure}}^2} .$$

$$\Delta\psi_{RG} = \sum_i \frac{6G \pi M_s a_i (1 - e_i^2)}{c^2 \bar{R}^2} ;$$

AN : $\Delta\psi_{RG} = 5,58 \cdot 10^{-7} \text{ rad / tour}$; $\Delta\psi_{RG} = 48 \text{ secondes d'arc par siècle}$.

13. En remplaçant $r = \frac{a_i (1 - e_i^2)}{1 + e_i \cos \theta}$ dans $g(r)$, on a :

$$\Delta\psi_i = -\frac{m_i a_i^3 (1 - e_i^2)^3}{2M_s \bar{R}_{Pi}^3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + e_i \cos \theta) \left[(1 + e_i \cos \theta)^2 - \frac{a_i^2}{\bar{R}_{Pi}^2} (1 - e_i^2)^2 \right]} .$$

$$\text{avec } \bar{R}_{Pi} = \frac{\bar{R}_{\text{Mercure}}}{\alpha_i} \text{ et } \bar{R}_{\text{Terre}} = \frac{\bar{R}_{\text{Mercure}}}{\alpha_3} \Rightarrow \bar{R}_{Pi} = \bar{R}_{\text{Terre}} \frac{\alpha_3}{\alpha_i} = a_i .$$

$$\Delta\psi_{IN} = \Delta\psi_V + \Delta\psi_T + \Delta\psi_M = \sum_i \Delta\psi_i ;$$

A.N. : $\Delta\psi_{IN} = 276 + 96 + 3 = 375 \text{ secondes d'arc par siècle}$.

14. La contribution newtonienne étudiée est prédominante. La somme des 2 contributions est assez éloignée du résultat expérimental. Cette analyse ne peut donc être une vérification de la relativité générale.

Le "décalage vers le rouge" des émissions lumineuses des astres de type naines blanches , des rayons γ dans l'effet Mössbauer ainsi que la déflexion de rayons lumineux par la masse du soleil (visible par éclipse totale) sont des vérifications théoriques et expérimentales de la relativité générale.

La théorie newtonienne doit être améliorée pour que l'avance du périhélie de Mercure confirme la relativité générale. On pourrait tenir compte de l'aplatissement des planètes et du soleil, des variables angulaires dans $g...$

1.4.8. Stabilisation de satellite

Voir page 275.

1.5. Chocs classiques

1.5.1. Chocs élastiques entre particules non relativistes Spectrométrie neutronique

Indications préliminaires

1. Les parties 1. et 2. sont indépendantes ; certaines notations de 1. sont cependant reprises dans 2. Les questions 3.1. sont, ou bien indépendantes de tout ce qui précède, ou bien nécessitent un résultat donné en 1.2.1. De même, les questions 3.2. sont indépendantes, ou nécessitent un résultat donné en 2.3.1.

2. Constantes physiques à utiliser :

Vitesse de la lumière dans le vide	c	3.10^8 m.s^{-1}
Constante de Planck	h	$6,63.10^{-34} \text{ J.s}$
Charge de l'électron	e	$-1,60.10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	m	$0,91.10^{-30} \text{ kg}$
Energie de masse au repos de l'électron	mc^2	$0,511 \text{ MeV}$

On considère un faisceau de neutrons dont on veut déterminer l'énergie à partir de l'étude cinématique du choc élastique (diffusion élastique) sur des noyaux d'hydrogène ou d'hélium. Le noyau cible (hydrogène ou hélium) est initialement au repos dans le système du laboratoire.

On notera (voir figure 2) : m = masse du neutron et M celle du noyau cible.

$E_0, \vec{P}_0, E_1, \vec{P}_1, E_2, \vec{P}_2$ l'énergie cinétique et la quantité de mouvement (ou impulsion) respectivement du neutron incident, du neutron diffusé et du noyau de recul (noyau cible après le choc) ;

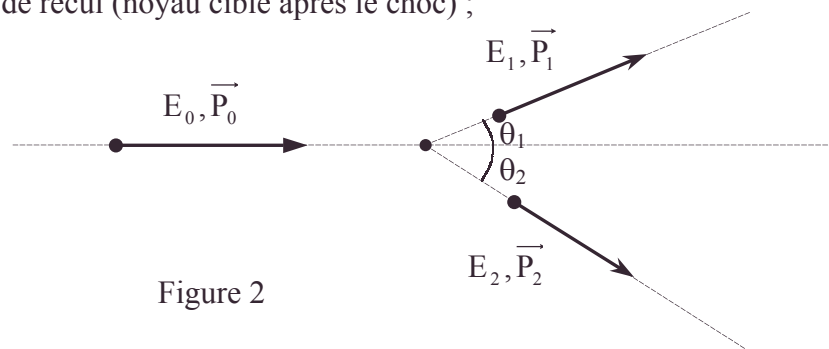


Figure 2

$\theta_1 = \text{angle } (\vec{P}_0, \vec{P}_1)$ et $\theta_2 = \text{angle } (\vec{P}_0, \vec{P}_2)$, tous deux compris au sens large entre 0 et π .

1. Rappeler, pour chacune des particules matérielles, les relations qui existent entre l'énergie cinétique et la quantité de mouvement. Ecrire les relations qui traduisent la conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie cinétique.

2.1. En déduire l'expression suivante de l'énergie cinétique E_2 transférée au noyau cible : $E_2 = E_0 \frac{4Mm}{(M+m)^2} \cos^2 \theta_2$.

2. Les noyaux cibles étant connus, montrer que la mesure de E_2 et θ_2 permet d'obtenir la valeur de l'énergie cinétique E_0 des neutrons incidents (spectrométrie neutronique).

3. On considère le cas $M > m$

- cinématique, cinétique, conservation de la quantité de mouvement, neutron, noyau

1. A partir des lois de conservation, montrer que $|\theta_2| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer la valeur maximale $E_{2 \max}$ de E_2 pour E_0 , M et m fixés. Préciser les valeurs correspondantes de E_1 , $|\vec{P}_1|$, $|\vec{P}_2|$, θ_2 et θ_1 .
3. Calculer la valeur minimale $E_{2 \min}$ de E_2 . Préciser les valeurs correspondantes de E_1 , $|\vec{P}_1|$, $|\vec{P}_2|$, θ_2 et θ_1 .
4. Donner l'allure des graphes de E_2 et E_1 en fonction de θ_2 pour E_0 , M et m donnés.
4. On considère le cas $M = m$
 1. Exprimer E_2 et E_1 en fonction de E_0 et θ_2 . Donner l'allure des courbes représentatives de E_2 et E_1 en fonction de θ_2 , E_0 étant fixé.
 2. Montrer que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

CCP ; Durée 1h.**Corrigé**

1.a. D'une manière générale classique $\vec{P} = m\vec{V}$; $E = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow E = \frac{P^2}{2m}$;

d'où : $E_0 = \frac{P_0^2}{2m}$; $E_1 = \frac{P_1^2}{2m}$; $E_2 = \frac{P_2^2}{2m}$.

b. Les relations de conservation : $\vec{P}_0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ [1]

et vu le choc élastique : $E_0 = E_1 + E_2$ [2]

2.1. Projetons [1] selon Ox et Oy : $P_0 = P_1 \cos \theta_1 + P_2 \cos \theta_2$ [1']

(P_0, P_1, P_2 désignant des modules) $0 = P_1 \sin \theta_1 - P_2 \sin \theta_2$ [1'']

Éliminons θ grâce à $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$, il reste : $P_1^2 = P_0^2 + P_2^2 - 2P_0P_2 \cos \theta_2$ [1''']

Transcrivons cette relation en énergie cinétique :

$$E_1 = E_0 + E_2 \frac{M}{m} - 2\sqrt{E_0 E_2} \frac{M}{m} \cos \theta_2 ; \text{ or } E_1 = E_0 - E_2 \Rightarrow E_2 = E_0 \frac{4Mm}{(M+m)^2} \cos^2 \theta_2.$$

2.2. $E_0 = \frac{E_2(m+M)^2}{4Mm \cos^2 \theta_2}$; la mesure de E_2 , θ_2 connaissant m et M permet d'obtenir la

valeur de E_0 .

3.1. Tirons de [1'''] : $\cos \theta_2 = \frac{P_0^2 + P_2^2 - P_1^2}{2P_0P_2}$;

transcrivons [2] en quantité de mouvement : $P_0^2 = P_1^2 + P_2^2 \frac{m}{M}$;

éliminons $P_1^2 = P_0^2 - P_2^2 \frac{m}{M}$ dans le but de simplifier $\cos \theta_2$:

$$\cos \theta_2 = \frac{P_2}{P_0} \frac{(m+M)}{2M} > 0 \Rightarrow |\theta_2| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

3.2.a.

$$\text{Max}(\cos^2 \theta_2) = 1 \Rightarrow E_{2\max} = \frac{4Mm}{(M+m)^2} E_0 \Rightarrow E_{1\min} = E_0 - E_{2\max} = E_0 \frac{(M-m)^2}{(M+m)^2}.$$

$$\text{b. } \cos \theta_2 = 1 \Rightarrow \theta_2 = 0 ; \text{ d'après 3.1., } |\vec{P}_2| = \frac{2M}{m+M} P_0.$$

$$\text{c. D'après [1'''], } |\vec{P}_1| = |P_0 - P_2| = \frac{M-m}{m+M} P_0.$$

$$\text{d. D'après [1'], } \cos \theta_1 = \frac{P_0 - P_2}{P_1} = -1 \Rightarrow \theta_1 = \pi.$$

$$\text{3.3.a. } E_{2\min} = 0 \Rightarrow E_1 = E_0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}(\pi).$$

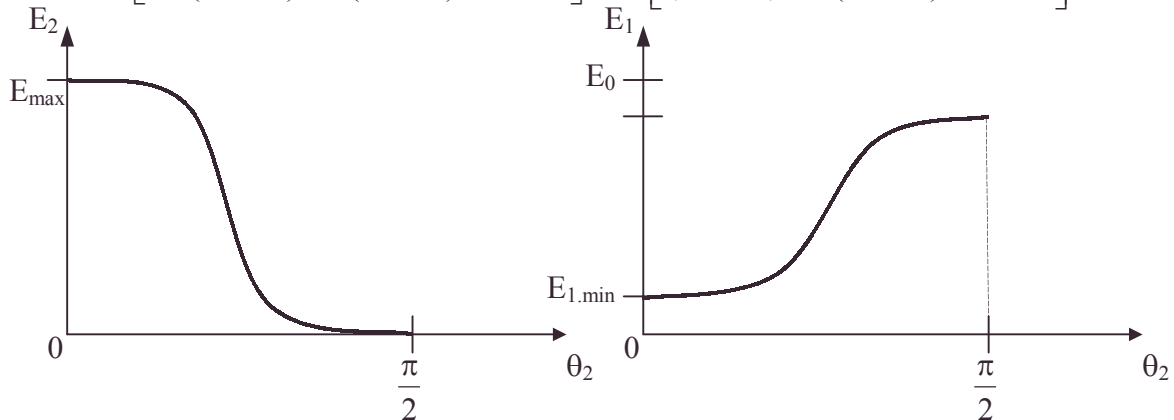
$$\text{b. Vu 3.1., } \theta_2 = 0 \Rightarrow |\vec{P}_2| = 0.$$

$$\text{c. D'après [1'''], } |\vec{P}_1| = P_0.$$

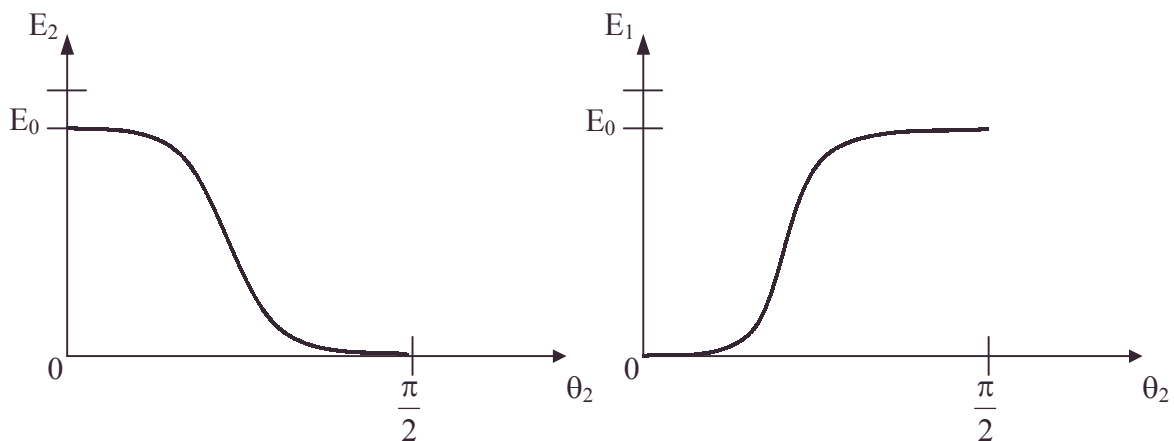
$$\text{d. D'après [1'], } \cos \theta_1 = 1 ; \theta_1 = 0.$$

$$\text{3.4. } E_2 = E_0 \frac{4Mm}{(m+M)^2} \cos^2 \theta_2 \Rightarrow E_1 = E_0 - E_2 ; \text{ or } \cos^2 \theta_2 = 1 - \sin^2 \theta_2 ;$$

$$E_1 = E_0 \left[1 - \frac{4Mm}{(M+m)^2} + \frac{4Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \theta_2 \right] = E_0 \left[\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2 + \frac{4Mm}{(M+m)^2} \sin^2 \theta_2 \right] :$$



$$\text{4.1. } M = m \Rightarrow E_2 = E_0 \cos^2 \theta_2 ; E_1 = E_0 \sin^2 \theta_2 :$$



4.2. $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$;

remplaçons $\cos \theta_1$ et $\sin \theta_1$ grâce à [1'] et [1''] ;

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{(P_0 - P_2 \cos \theta_2)}{P_1} \cos \theta_2 - \frac{P_2}{P_1} \sin^2 \theta_2 = \frac{P_0 \cos \theta_2 - P_2}{P_1} = 0 \text{ d'après 2.1. et}$$

3.1.

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} (\pi).$$

1.5.2. Croissance des gouttes de pluie par coalescence

Le mécanisme de condensation par changement d'état permet de transformer un noyau de condensation d'environ $0,1 \mu\text{m}$ en une gouttelette de rayon 1 à $30 \mu\text{m}$. Pour expliquer la formation de gouttes de taille supérieure, il est nécessaire d'invoquer un autre mécanisme.

Dans cette partie sera étudiée la croissance d'une goutte par coalescence, c'est-à-dire par collision avec des gouttes plus petites.

1. Considérons une goutte sphérique de rayon a et de masse m constante en chute libre verticale dans l'atmosphère supposée immobile. Elle subit une force de friction donnée par la loi de Stokes : $\vec{F}_s = -6\pi\eta a \vec{v}$, où η est la viscosité de l'air et \vec{v} la vitesse instantanée de la goutte.

Montrer que la goutte atteint une vitesse limite v_0 dont on donnera l'expression en fonction de a . Calculer v_0 pour une goutte de $30 \mu\text{m}$ de rayon.

Données numériques

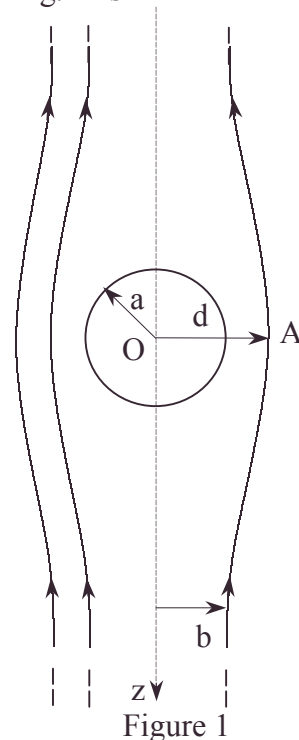
Module du champ de pesanteur :	$g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau :	$\rho_L = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
Viscosité de l'air :	$\eta = 1,7.10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$

2. La goutte de rayon a tombe dans un nuage de gouttelettes de rayon a' réparties uniformément avec la densité volumique n et tombant elles aussi avec leur vitesse limite $v_0(a')$ parallèle à Oz loin de la goutte.

Dans un référentiel lié à la goutte, les gouttelettes sont entraînées par le courant d'air et contournent la goutte (figure 1), la distance la plus faible étant à mi-contournement (point A de la figure 1). La symétrie de révolution de la situation est conservée.

a. Le centre d'une gouttelette de paramètre d'impact b se trouve à mi-contournement au point A, à la distance d du centre de la goutte. En supposant que la densité volumique et la vitesse relative des gouttelettes sont les mêmes en A qu'à grande distance, relier b et d en exprimant la conservation du flux de gouttelettes.

b. On suppose que la coalescence a lieu dès que la gouttelette entre en contact avec la goutte.



A quelle condition sur d cela se produit-il ? En déduire la condition sur b pour qu'il y ait coalescence.

3.a. Obtenir l'équation différentielle régissant la variation du rayon de la goutte en fonction du temps.

b. Quelle est la vitesse \dot{a} de croissance d'une goutte de $30 \mu\text{m}$ tombant dans un nuage contenant 1 g.m^{-3} d'eau liquide sous forme de gouttelettes de $3 \mu\text{m}$ de rayon uniformément réparties dans le nuage ?

4. Pour comparer les vitesses de croissance de la goutte associées aux deux mécanismes, tracer le graphe de \dot{a} en fonction de a (portrait de phase) dans les conditions suivantes :

- croissance par condensation : on prendra $C = 1.10^{10} \text{ s.m}^{-2}$ et $S-1 = 2.10^{-3}$.

On rappelle $\dot{a} = \frac{S-1}{C}$ pour la condensation.

- croissance par coalescence : on prendra les conditions de la question **3.b.**

A partir de quel rayon la croissance par coalescence prend-elle le relais de la croissance par condensation ?

Ecole Polytechnique

Corrigé

1. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 6\pi\eta a\vec{v}, \text{ avec } m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_L.$$

La solution particulière en \vec{v} correspond au régime limite à $\vec{a} = \vec{0}$.

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{2\rho_L a^2}{9\eta} \vec{g}. \text{ Les plus grosses tombent plus vite.}$$

A.N. : $a = 30 \mu\text{m}$; $v_0 = 11,5 \text{ cm.s}^{-1}$.

2.a. La conservation du flux de gouttelettes rencontrées par unité de temps s'écrit :

$$n_b v_{rb} \pi b^2 = n_A v_{rA} \pi (d^2 - a^2); \text{ or } n_b = n_A \text{ et } v_{rb} = v_{rA} \text{ d'après l'énoncé } \Rightarrow b^2 = d^2 - a^2$$

b.α. Il y a coalescence dès que $d_{\text{lim}} = a + a'$ et bien sûr si $d < a + a'$.

$$\beta. b_{\text{lim}}^2 = d_{\text{lim}}^2 - a^2 = (a + a')^2 - a^2 = a'(2a + a') \text{ soit } b^2 \leq a'(2a + a').$$

3.a.α. L'augmentation de volume de la grosse goutte due aux gouttelettes rencontrées pendant dt s'écrit :

$$dV = \frac{4}{3}\pi a'^3 n_A v_{rA} \pi (d_{\text{lim}}^2 - a^2) dt.$$

$$\beta. \vec{v}_{rA} = \vec{v}_{\text{lim}}(a) - \vec{v}_{\text{lim}}(a') = \frac{2\rho_L}{9\eta} (a^2 - a'^2) \vec{g} \text{ d'après 1.}$$

$$\gamma. \rho_A = 1 \text{ g.m}^{-3} = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}; \rho_A = \frac{4}{3}\pi a'^3 \rho_L n_A \Rightarrow n_A = \frac{\rho_A}{\frac{4}{3}\pi a'^3 \rho_L}.$$

$$\delta. dV = 4\pi a^2 da = \frac{\rho_A}{\rho_L \frac{4}{3}\pi a'^3} \cdot \frac{2\rho_L}{9\eta} (a^2 - a'^2) g \pi a' (2a + a') \cdot \frac{4}{3}\pi a'^3 dt.$$

- coalescence, graphe, paramètre, portrait de phase, principe fondamental de la dynamique

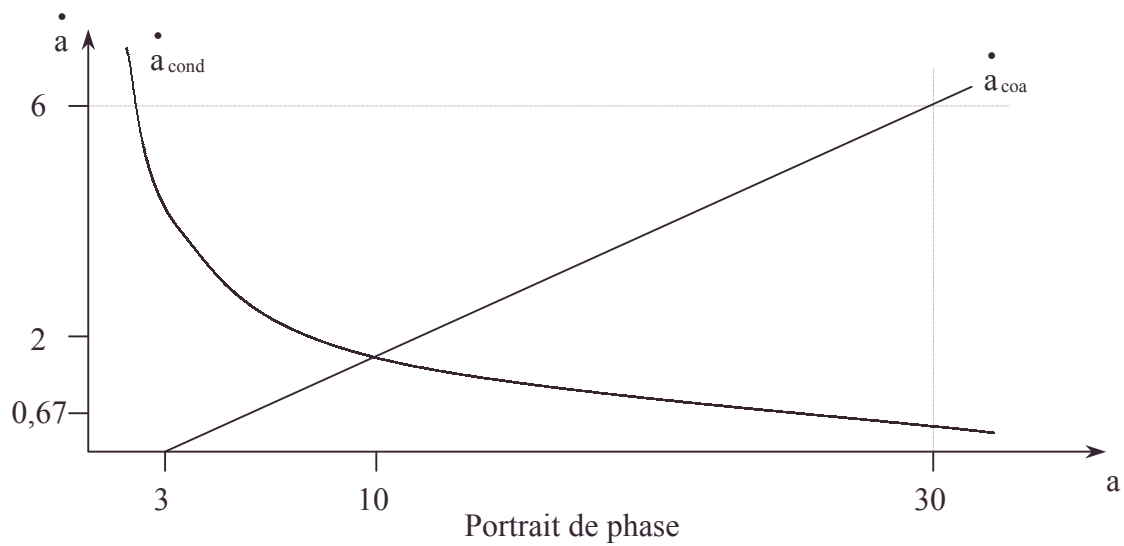
$$\frac{da}{dt} = \frac{\rho_A}{18\eta} g \left(1 - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) a' (2a + a').$$

b. A.N. : $a' = 3 \mu\text{m}$; $a = 30 \mu\text{m}$; $\frac{da}{dt} = 5,99 \text{ nm/s}$.

4.a. $\dot{a}_{\text{coa}} = 9,6 \cdot 10^{-11} \left(1 - \left(\frac{3}{a} \right)^2 \right) (2a + 3)$ avec a en μm et \dot{a} en nm.s^{-1} .

b. $\dot{a}_{\text{cond}} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{a}$ avec a en μm , \dot{a} en nm.s^{-1} . ; $\dot{a}_{\text{coa}} = \dot{a}_{\text{cond}}$ pour $a = 10 \mu\text{m}$.

La condensation voit son rôle devenir de plus en plus minoritaire quand on passe de 10 à 30 μm .



A.N. : $a = 30 \mu\text{m}$

$$\dot{a}_{\text{cond}} = \frac{11}{100} \dot{a}_{\text{coa}} = 0,11 \dot{a}_{\text{coa}}.$$

Pour $a > 30 \mu\text{m}$, on peut négliger \dot{a}_{cond} devant \dot{a}_{coa} .

1.5.3. Choc d'un satellite géostationnaire et de météorites

Voir page 75.

1.6. Relativité

N'appartient pas explicitement au programme des CPGE

1.6.1. Invariant relativiste, effet Compton Spectrométrie en chambre à traces

1. Choc élastique de deux particules relativistes

On considère un faisceau de particules relativistes incidentes interagissant avec des particules cibles supposées au repos dans le système du laboratoire. Soient A la particule incidente et B la particule cible : le choc élastique peut être représenté sous la forme de la réaction : $A + B \rightarrow A + B$.

Les notations $m, M, \vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \theta_1$ et θ_2 sont les mêmes que dans l'étude page 121. Toutefois E_0, E_1, E_2 désigneront désormais les énergies relativistes totales de A avant choc, de A après choc et de B après choc, respectivement. On utilisera les quadrivecteurs impulsion-énergie \vec{p}_0, \vec{p}'_0 des particules A et B avant les chocs et \vec{p}_1, \vec{p}_2 pour ces mêmes particules après le choc.

On rappelle que les coordonnées du quadrivecteur impulsion – énergie sont :

$$\vec{p} = \left(\vec{P}, \frac{E}{c} \right) = \left(P_x, P_y, P_z, \frac{E}{c} \right).$$

Les conventions suivantes pour la "norme" et le "produit scalaire" des quadrivecteurs sont imposées.

Soit \vec{a} et \vec{b} deux quadrivecteurs de coordonnées a_x, a_y, a_z, a_4 et b_x, b_y, b_z, b_4 :

$$\text{"norme"} : \vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_4^2 ;$$

$$\text{"produit scalaire"} : \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - a_4 b_4.$$

L'étude demandée ne sera pas traitée dans le cas général, mais uniquement dans le cas particulier de l'effet Compton, pour lequel la particule A est un photon soit une particule de masse nulle et d'énergie $h\nu$, ν étant la fréquence, et la particule B un électron.

1. Préciser les coordonnées des quatre quadrivecteurs $\vec{p}_0, \vec{p}'_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ à l'aide des quantités $E_0, M, E_1, E_2, \vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ et c . Exprimer la norme de chacun d'eux, et leurs six produits scalaires deux à deux.

2. Ecrire la loi de conservation du quadrivecteur impulsion-énergie dans le choc des particules.

3. Comme dans le cas non relativiste, l'étude cinématique permet d'obtenir des relations entre trois des paramètres E_0, E_1, E_2, θ_1 et θ_2 , les masses M et m étant données.

1. Exprimer \vec{p}_1^2 à partir de la loi de conservation 2. En déduire la relation suivante

$$E_2 = Mc^2 \frac{(E_0 + Mc^2)^2 + E_0^2 \cos^2 \theta_2}{(E_0 + Mc^2)^2 - E_0^2 \cos^2 \theta_2}.$$

2. Exprimer de même \vec{p}_2^2 et en déduire la relation suivante :

$$E_1 = Mc^2 \frac{E_0}{E_0(1 - \cos \theta_1) + Mc^2}.$$

4. On se propose de justifier l'approximation faite où l'électron est considéré comme libre et au repos. Soit $\lambda = 10$ pm pour le photon incident ; calculer, en joules et électron-

volts, l'énergie correspondante des photons incidents. Comparer ces valeurs à l'ordre de grandeur des énergies de liaison et cinétique des électrons atomiques. Conclure.

2. Etude expérimentale à l'aide d'une chambre à traces

L'étude expérimentale des chocs entre particules peut être effectuée à l'aide des chambres à traces. Il s'agit de détecteurs permettant de visualiser les trajectoires des particules directement ionisantes (électrons, protons...). Dans la chambre à "streamers", par exemple, les trajectoires sont matérialisées par des points lumineux (streamers). On photographie les événements avec plusieurs caméras. A partir des clichés d'un même événement, il est possible de reconstituer les trajectoires dans l'espace, et d'obtenir expérimentalement les différents paramètres cinématiques de l'interaction.

1. Spectrométrie neutronique : dans la chambre à streamers remplie d'hélium, on mesure les longueurs des traces des noyaux de recul (particules α) et leurs angles d'émission θ .

1. On obtient l'énergie cinétique E des α de recul à partir de la longueur des traces grâce à une relation parcours-énergie du type : $R = aE^b$, où $a = 1,8$ et $b = 1,5$ lorsque R est exprimé en cm (dans l'hélium) et E en MeV.

Calculer E pour $R = 20$ cm.

2. Compte tenu de la question 1.2., calculer en MeV l'énergie cinétique E_0 des neutrons incidents lorsque E_2 prend la valeur numérique obtenue ci-dessus pour $\theta_2 = 0$. Le calcul n'est pas relativiste. On pourra prendre $M/m = 4$. Expliquer ce choix.

3. Sachant qu'on obtient en moyenne 3 streamers par cm, quelle est l'incertitude

ΔR ? Exprimer l'incertitude relative $\frac{\Delta E_0}{E_0}$ due à cette seule cause d'erreur en fonction de

$\frac{\Delta R}{R}$ et de b . Quelle est la valeur de $\frac{\Delta E_0}{E_0}$ pour les valeurs numériques ci-dessus ?

2. Spectrométrie γ par effet Compton : la chambre à streamers est placée dans un champ magnétique et on mesure les rayons de courbure des traces d'électrons de recul et leurs angles d'émission θ_2 ; on en déduit l'énergie des photons γ incidents.

1. Rappeler la démonstration de la relation suivante entre la quantité de mouvement $|\vec{P}|$ d'une particule et le rayon r de la trajectoire circulaire dans l'induction magnétique \vec{B} : $|\vec{P}| = q|\vec{B}|r$, q étant la valeur absolue de la charge de la particule et l'induction magnétique \vec{B} étant perpendiculaire à \vec{P} et uniforme.

2. Pour $r = 0,3$ m et $B = 0,06$ T, exprimer la quantité $|\vec{P}|.c$ en joule puis en MeV pour les électrons. Quelle est l'énergie totale correspondante en MeV ?

3. A partir de la relation du 1.3.1., entre E_0 , E_2 et θ_2 , exprimer E_0 en fonction de E_2 pour $\theta_2 = 0$. Quelle est en MeV l'énergie E_0 des photons γ incidents correspondant à la valeur numérique ci-dessus de l'énergie totale E_2 des électrons de recul ?

CCP ; Durée 1h30

Corrigé

1.1. A est un photon de masse $m = 0$; B est un électron de masse M ici, d'énergie au repos $E_0 = Mc^2$. Les quadrivecteurs définis par l'énoncé sont :

a. Pour le photon $\overline{p}_0 = \left(\overrightarrow{P}_0, \frac{E_0}{c} \right)$; $\overline{p}_1 = \left(\overrightarrow{P}_1, \frac{E_1}{c} \right)$.

Pour l'électron $\overline{p'_0} = (0, Mc)$; $\overline{p_2} = \left(\overrightarrow{P_2}, \frac{E_2}{c} \right)$.

b. Normes : $\overline{p_0}^2 = P_0^2 - \frac{E_0^2}{c^2}$; $\overline{p_1}^2 = P_1^2 - \frac{E_1^2}{c^2}$; $\overline{p'_0}^2 = -M^2 c^2$; $\overline{p_2}^2 = P_2^2 - \frac{E_2^2}{c^2}$.

Or on a pour toute particule libre : $E^2 = P^2 c^2 + M^2 c^4$ (invariant relativiste).

$$\Rightarrow \overline{p_0}^2 = 0 ; \overline{p_1}^2 = 0 ; \overline{p'_0}^2 = -M^2 c^2 ; \overline{p_2}^2 = -M^2 c^2 ;$$

On constate la conservation de la norme du quadrivecteur impulsion-énergie.

c. Produits scalaires :

$$\overline{p_0} \overline{p_1} = \overrightarrow{P_0} \overrightarrow{P_1} - \frac{E_0 E_1}{c^2} ; \overline{p_0} \overline{p_2} = \overrightarrow{P_0} \overrightarrow{P_2} - \frac{E_0 E_2}{c^2} ; \overline{p'_0} \overline{p_0} = -M E_0 ; \overline{p'_0} \overline{p'_1} = -M E_1 ;$$

$$\overline{p'_0} \overline{p_2} = -M E_2 ; \overline{p_1} \overline{p_2} = \overrightarrow{P_1} \overrightarrow{P_2} - \frac{E_1 E_2}{c^2}.$$

2. La conversion du quadrivecteur impulsion-énergie s'écrit : $\overline{p_0} + \overline{p'_0} = \overline{p_1} + \overline{p_2}$,

soit sur les trois premières composantes : **[1]** $\overrightarrow{P_0} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}$,

et pour la quatrième, **[2]** $\frac{E_0}{c} + Mc = \frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c}$.

[2] ressemble à $E_0 = E_1 + E_2$ avec ajout formel de l'énergie de masse au repos Mc^2 .

3.1. $\overline{p_1} = \overline{p_0} + \overline{p'_0} - \overline{p_2}$, et pour utiliser **1**, élevons au carré :

$$\overline{p_1}^2 = \overline{p_0}^2 + \overline{p'_0}^2 + \overline{p_2}^2 + 2\overline{p_0} \overline{p'_0} - 2\overline{p_0} \overline{p_2} - 2\overline{p'_0} \overline{p_2} ;$$

$$\overline{p_1}^2 = -2M^2 c^2 - 2M E_0 + 2M E_2 - 2\overrightarrow{P_0} \overrightarrow{P_2} + \frac{2E_0 E_2}{c^2} ;$$

$$\overline{p_1}^2 = -2M c^2 \left(M + \frac{E_0}{c^2} \right) + 2E_2 \left(M + \frac{E_0}{c^2} \right) - 2P_0 P_2 \cos \theta_2 ; \text{ or } p_1^2 = 0 ;$$

$$P_0 P_2 \cos \theta_2 = \left(M + \frac{E_0}{c^2} \right) (E_2 - M c^2).$$

Elevons au carré, car cf. invariant relativiste : $P_0^2 = \frac{E_0^2}{c^2}$ et :

$$P_2^2 = \frac{E_2^2 - M^2 c^4}{c^2} = \left(\frac{E_2 - M^2 c^2}{c^2} \right) (E_2 + M^2 c^2) \Rightarrow$$

$$\cos^2 \theta_2 \cdot \frac{E_0^2}{c^2} \left[\frac{E_2 + M c^2}{c^2} \right] (E_2 - M c^2) = \left(M + \frac{E_0}{c^2} \right)^2 (E_2 - M c^2) (E_2 - M c^2) ;$$

simplifions par $E_2 - M c^2 \neq 0 \Rightarrow$ cqfd.

2. $\overline{p_2} = \overline{p_0} + \overline{p'_0} - \overline{p_1}$; pour utiliser **1**, élevons au carré :

$$\overline{p_2}^2 = \overline{p_0}^2 + \overline{p'_0}^2 + \overline{p_1}^2 - 2\overline{p_0} \overline{p'_0} - 2\overline{p_0} \overline{p_1} - 2\overline{p'_0} \overline{p_1} ;$$

$$\overline{p_2}^2 = 0 - M^2 c^2 + 0 + 2M E_0 - 2\overrightarrow{P_0} \overrightarrow{P_1} + 2 \frac{E_0 E_1}{c^2} + 2M E_1 = -M^2 c^2 \text{ cf, 1.}$$

$$\text{or, } P_0 = \frac{E_0}{c} \text{ et } P_1 = \frac{E_1}{c} ; \overrightarrow{P_0} \overrightarrow{P_1} = \frac{E_0 E_1}{c^2} \cos \theta_1 \Rightarrow E_1 = \frac{M c^2 E_0}{E_0 (1 - \cos \theta_1) + M c^2}.$$

4. $E_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$; AN : $E_0 = 1,989 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 1,243 \cdot 10^5 \text{ eV}$.

• Une énergie de liaison covalente de l'ordre de 4 eV vaut 350 kJ.mol^{-1} ; elle est négligeable devant celle du photon ; l'électron peut être considéré comme libre.

• L'énergie cinétique moyenne d'un électron $E_c = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$ (cf. théorie cinétique du gaz parfait d'électrons) vaut $4 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ pour $T = 308,5 \text{ K}$; elle est négligeable devant celle du photon. L'électron peut être considéré au repos.

2.1.1. $E_2 = \left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$; AN : $E_2 = 4,979 \text{ MeV}$.

2. A ces énergies (cf 1.6.2. page 126), on peut raisonner pour les nucléons en mécanique classique : $\frac{p_0^2}{2m} = E_0$; $\frac{p_1^2}{2m} = E_1$; $\frac{p_2^2}{2m} = E_2$.

La conservation de la quantité de mouvement pour $\theta = 0$ s'écrit :

$$p_0 = p_1 + p_2 \Rightarrow \sqrt{2mE_1} = p_1 = p_0 - p_2.$$

Or la conservation de l'énergie cinétique donne : $E_0 = E_1 + E_2$, d'où pour éliminer les quantités de mouvement :

$$2mE_1 = 2m(E_0 - E_2) = (p_0 - p_2)^2 = \left(\sqrt{2mE_0} - \sqrt{2mE_2}\right)^2 ;$$

$$2mE_0 + 2mE_2 - 2\sqrt{4mME_0E_2} = 2mE_0 - 2mE_2 \Rightarrow 2\sqrt{4mME_0E_2} = 2(m + m)E_2.$$

En élevant au carré :

$$E_0 = \frac{(m + M)^2}{4Mm} E_2 ; \text{ AN : } E_0 = \frac{25}{16} E_2 ; E_0 = 7,780 \text{ MeV}.$$

Ce choix correspond pour m à 1 neutron ou un proton car le noyau d'hélium de masse M contient 4 nucléons.

3.a. En prenant pour incertitude ΔR , la moitié de la distance moyenne entre 2 streamers : A.N. : $\Delta R = \frac{1}{6} \text{ cm} = 0,167 \text{ cm} \# 0,2 \text{ cm}$ cf. 1 chiffre significatif crédible pour une incertitude.

$$\text{b. a et b étant connus vu 1. : } \ln E_2 = \frac{\ln R}{b} - \frac{\ln a}{b} ; \frac{\Delta E_2}{E_2} = \frac{1}{b} \frac{\Delta R}{R} ;$$

$$\text{vu 2. : } \ln E_0 = \ln E_2 + \ln \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{\Delta E_0}{E_0} = \frac{\Delta E_2}{E_2} ;$$

$$\frac{\Delta E_0}{E_0} = \frac{1}{b} \frac{\Delta R}{R} ; \text{ AN : } \frac{\Delta E_0}{E_0} = 6,67 \cdot 10^{-3} \# 7 \cdot 10^{-3} ; E_0 = (7,78 \pm 0,05) \text{ MeV}.$$

2. Vu les valeurs numériques et l'usage de la chambre à "streamers" utilisée précédemment, les électrons procèdent de la mécanique relativiste.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -q\vec{V} \wedge \vec{B} \text{ avec } \vec{P} = M\gamma\vec{v}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ } (-q = \text{charge de l'électron}).$$

1. Multiplions par $m\gamma\vec{v} : \vec{P} d\vec{P} = 0 \Rightarrow P^2 = P_0^2$, P est de module constant donc \vec{v} aussi. On est ici dans le cas \vec{B} uniforme, et \vec{B} orthogonal à \vec{P} et à \vec{v} soit dans le cas d'une trajectoire plane : soit $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent et s l'abscisse curviligne :

• énergie cinétique, incertitude, neutron, noyau, photon, trajectoire

$$\frac{d(\vec{M} \gamma \vec{v} \vec{\tau})}{dt} = M \gamma \vec{v} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} + \underbrace{\vec{\tau} \frac{d}{dt}}_0 (M \gamma \vec{v}) \text{ et d'après la formule de Frenet : } \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}, R \text{ étant}$$

$$\text{le rayon de courbure ; } \frac{d\vec{P}}{dt} = M \gamma v^2 \frac{\vec{n}}{R} = -q \vec{V} \wedge \vec{B},$$

$$\text{et en module } M \frac{\gamma v^2}{R} = q v |\vec{B}| \Rightarrow R = \frac{M \gamma v}{q |\vec{B}|} \text{ constant.}$$

$$\text{La trajectoire est donc un cercle de rayon } r = \frac{|\vec{P}|}{q |\vec{B}|}.$$

$$2. \quad |\vec{P}| c = r q c |\vec{B}| ; \text{ AN : } P c = 8,64.10^{-13} \text{ J.} = 5,4000 \text{ MeV.}$$

$$\text{Vu l'invariant relativiste, } E = \sqrt{p^2 c^2 + M^2 c^4} ; \text{ AN : } E = 5,424 \text{ MeV.}$$

$$\text{L'énoncé donne } M c^2 = 0,511 \text{ MeV.}$$

$$3. \quad \theta_2 = 0 ; \text{ adaptons 2.3.1. } \Rightarrow E_2 M c^2 (M c^2 + 2 E_0) = M c^2 ((E_0 + M c^2)^2 + E_0^2).$$

Simplifions par $M c^2$; on obtient :

$$E_0^2 - E_0 (E_2 - M c^2) - \frac{M c^2}{2} (E_2 - M c^2) = 0. \text{ Equation du second degré en } E_0 \text{ ayant une}$$

seule racine positive acceptable (vu somme positive et produit négatif).

$$E_0 = \frac{(E_2 - M c^2) + \sqrt{(E_2 - M c^2)^2 + 2(E_2 - M c^2) M c^2}}{2} ;$$

$$E_0 = \frac{(E_2 - M c^2) + \sqrt{(E_2 - M c^2)(E_2 + M c^2)}}{2}.$$

$$\text{AN : } M c^2 = 0,511 \text{ MeV ; } E_2 = 5,424 \text{ MeV cf. 3.2. } \Rightarrow E_0 = 5,1564 \text{ MeV.}$$

$$E_2 - M c^2 = 4,913 \text{ MeV ; l'énergie cinétique de l'électron de recul constitue 95,3 \% de l'énergie de l'électron.}$$

1.6.2. Diffusion de neutrons dans un réacteur à uranium enrichi

Le problème étudie de façon simplifiée quelques aspects de physique neutronique intervenant dans un réacteur nucléaire à uranium enrichi, dans lequel la fission de ^{235}U est provoquée par des neutrons "lents".

Les trois parties sont largement indépendantes.

Données numériques

$$\text{Nombre d'Avogadro : } N_A = 6,022.10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

$$\text{Volume molaire des gaz parfaits dans l'état (0°C, } 10^5 \text{ Pa) : } 22,4.10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$\text{Unité de masse atomique : } 1 \text{ u} = \frac{1}{N_A} \text{ g.}$$

$$\text{Equivalence énergétique de l'unité de masse atomique : } 931,5 \text{ MeV.}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602.10^{-19} \text{ J.}$$

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2.$$

$$\text{Constante de Boltzmann : } k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.s.}$$

- énergie cinétique, fission nucléaire, neutron, neutronique, noyau, photon, physique nucléaire, réacteur à uranium enrichi, relativité, section efficace [Thermodynamique statistique], uranium

Notations

n = nombre de neutrons par unité de volume.

Si \vec{v} est la vitesse d'un neutron, alors :

- pour un jet monocinétique de neutrons :

$\vec{I} = n\vec{v}$ est l'intensité (vectorielle) du jet.

- pour un "gaz" de neutrons : $\Phi = nv$ est le flux scalaire de neutrons.

σ = section efficace de collision (en m^2) entre un neutron animé de la vitesse \vec{v} et un noyau cible immobile.

N = nombre de noyaux cible par unité de volume.

A. Fission de l'uranium**1. Rappel de cours**

On note en relativité $E_0 = mc^2$ l'énergie au repos d'une particule, T son énergie cinétique, E son énergie totale, v sa vitesse, p sa quantité de mouvement.

On rappelle $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

a. Rappeler les expressions de E , T , p . Contrôler que $E^2 = p^2c^2 + E_0^2$. Commenter le cas du photon de masse nulle.

b. Quelle est la relation entre T , E_0 , et le produit pc ?

c. Pour une réaction nucléaire la variation de masse (2^{ème} membre – 1^{er} membre) vaut Δm . Quelle est l'énergie dégagée par cette réaction ?

2. Energie dégagée

La fission de ^{235}U par un neutron produit 2 ou 3 neutrons et 2 noyaux fragments, suivant un grand nombre de possibilités, la variation de masse lors de la réaction de fission étant en moyenne : $\Delta m = -0,21 \text{ u}$.

a. Quelle est, en MeV, l'énergie dégagée par la fission d'un noyau de ^{235}U ?

Quelle est, en joules, l'énergie dégagée par la fission d'un gramme de ^{235}U ?

b. Une centrale électronucléaire de puissance électrique d'un gigawatt fonctionne avec de l'uranium ^{238}U (non fissile) enrichi, de fraction molaire 5% en ^{235}U .

Le rendement global de la conversion d'énergie nucléaire en énergie électrique est 25%. Quelle est (en principe) la masse d'uranium enrichi annuellement consommée par cette centrale ?

3. Emission de photons γ : radioactivité γ .

La fission de l'uranium s'accompagne de l'émission de rayonnement γ . En effet, un fragment de fission est produit en général dans un état excité, et il revient à son état fondamental en émettant un photon γ : $X^* \rightarrow X + \gamma$.

On se place dans le référentiel (R) propre au noyau excité X^* ; on note M_0c^2 l'énergie de masse du noyau X , et $M_0c^2 + \Delta E$ celle du noyau X^* .

a. Etudier par un calcul relativiste dans (R) de conservation de l'énergie totale la désintégration de X^* : calculer exactement l'énergie du photon γ en fonction de ΔE et de M_0c^2 .

b. Sachant que $\Delta E \ll M_0c^2$, faire un développement limité à deux termes de cette énergie. Quelle est l'énergie cinétique emportée par le noyau X ?

• énergie de masse en relativité, équilibre, fission nucléaire, neutron, noyau, photon, physique nucléaire, radioactivité, réacteur à uranium enrichi, relativité, rendement, section efficace [Thermodynamique statistique], uranium [Physique Nucléaire], variation de masse [relativité]

c. Application numérique

$$M_0 = 95 \text{ u} ; \Delta E = 0,9 \text{ MeV} .$$

Donner, en MeV, l'énergie du photon γ et l'énergie cinétique du noyau X.

Comparer les valeurs : quel résultat qualitatif simple de mécanique retrouve-t-on ?

Ralentissement des neutrons de fission

La section efficace de la réaction ($n, {}^{235}\text{U}$) est élevée pour des neutrons "lents" (ou "thermiques") ayant pour énergie cinétique T_0 , celle d'une particule en équilibre thermique avec le milieu de température absolue θ . Il faut donc ralentir les neutrons de fission, d'énergie cinétique T , par une suite de collisions avec les noyaux du matériau modérateur, supposés au repos.

On montre que chaque collision fait passer en moyenne l'énergie cinétique du neutron

de la valeur T_k à la valeur T_{k+1} avec $p = \left\langle \ln \frac{T_k}{T_{k+1}} \right\rangle$, p = paramètre de ralentissement.

a. Quel est le nombre moyen q de collisions pour ramener un neutron à l'état "thermique" ?

b. Préciser la valeur de T_0 , en eV, pour $\theta = 350 \text{ K}$.

c. Le modérateur étant de l'eau (ordinaire) pour laquelle $p = 1,01$, donner la valeur de q pour $T = 2,2 \text{ MeV}$.

B. Détection des neutrons lents

Pour contrôler l'activité du réacteur, on mesure le flux de neutrons lents. Pour cela on place à la périphérie du réacteur des compteurs de neutrons. Dans cette partie on étudie le principe de fonctionnement d'un compteur proportionnel contenant du trifluorure de bore gazeux BF_3 , à 0° C sous une pression partielle de $2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ et de l'azote gazeux. Les neutrons lents présentent une réaction nucléaire avec le noyau de l'isotope ${}^{10}\text{B}$:

$${}^{10}\text{B} + n \rightarrow {}^7\text{Li} + \alpha .$$

La particule α chargée produite ionise le gaz du compteur, ce qui provoque une impulsion électrique sur une électrode du compteur.

On donne (en u) les masses atomiques :

$${}_0^1n = 1,008665 ; {}_2^4\text{He} = 4,002603 ; {}_3^7\text{Li} = 7,016004 ; {}_5^{10}\text{B} = 10,012939 .$$

1. Un faisceau parallèle monocinétique de neutrons

a pour intensité $\vec{I}_0 = I_0 \vec{u}_1$ à l'entrée ($x = 0$) du compteur. A l'abscisse x l'intensité est $I(x)$.

a. Etablir par un raisonnement clair la relation

$$I(x) = I_0 e^{-N\sigma x} , \text{ avec } N = \text{nombre de noyaux de } {}^{10}\text{B} \text{ par m}^3 \text{ dans le compteur.}$$

σ = section efficace de la réaction ($n, {}^{10}\text{B}$).

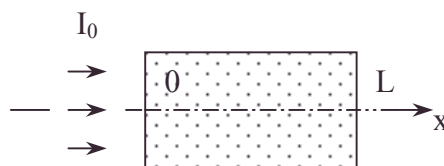
b. Application numérique

Pour des neutrons d'énergie cinétique 5 eV, σ vaut 284 barns.

Déterminer la valeur de N à la pression considérée, sachant que le bore naturel a été enrichi de façon à comporter 90% de ${}^{10}\text{B}$ (on assimilera le fluorure de bore à un gaz parfait). Quelle est la proportion des neutrons incidents qui a été détectée par un compteur de longueur $L = 12 \text{ cm}$?

2. On néglige l'énergie cinétique du neutron et du noyau ${}^{10}\text{B}$. Le noyau de lithium peut être produit soit dans son état fondamental, soit dans un état excité à $\Delta E = 0,48 \text{ MeV}$ au-dessus de l'état fondamental.

a. Déterminer, pour les deux états possibles, l'énergie cinétique (en MeV) des produits de la réaction nucléaire.



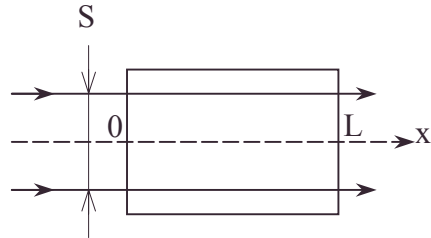
b. On admettra que toute cette énergie cinétique sert à ioniser le gaz azote du compteur. L'énergie d'ionisation d'un atome A ($A \rightarrow A^+ + e^-$) est en moyenne $e_0 = 29 \text{ eV}$; il se produit ensuite une "avalanche" multiplicatrice d'électrons, avec un coefficient multiplicatif $\beta = 40$. Le compteur est, sur le plan électrique, équivalent à une capacité $C = 25 \text{ pF}$.

Quelles sont, dans les deux cas envisagés, les amplitudes des impulsions électriques (en volts) recueillies sur l'anode du compteur lors d'une réaction nucléaire ?

c. Quelle est la grandeur mesurée qui renseigne sur l'intensité du faisceau de neutrons ?

3. Les neutrons ont maintenant des vitesses toujours

colinéaires à \vec{Ox} , mais dont la norme est variable : on note $n(x, v) dv$ le nombre de neutrons par unité de volume ayant à l'abscisse x une vitesse v , à dv près. La section efficace de collision est une fonction $\sigma(v)$ de la vitesse des neutrons.



$S = \text{section droite du faisceau de neutrons}$

a. Quel est, pour des neutrons de vitesse v à dv près, le nombre de réactions se produisant par unité de temps entre les abscisses x et $x + dx$?

b. $\sigma(v)$ est inversement proportionnel à v dans un domaine d'énergie cinétique allant de 1 eV à 500 eV environ : $\sigma(v) = \frac{\sigma_0 v_0}{v}$.

La dépendance de $n(x, v)$ avec x est négligée (ceci est justifié par les résultats numériques de la question 1.).

Montrer, par un raisonnement clair et précis, que le nombre total B d'impulsions délivrées par unité de temps par le compteur vaut : $B = kn$, avec :

$$k = SLN \sigma_0 v_0 ;$$

n = nombre total de neutrons par unité de volume du faisceau incident.

c. Application numérique

Calculer k pour $S = 2 \text{ cm}^2$. Les autres valeurs numériques ont été précisées plus haut.

C. Diffusion des neutrons lents

Dans cette troisième partie on s'intéresse à la diffusion d'un "gaz" de neutrons au sein du matériau du réacteur. On supposera pour simplifier que tous les neutrons sont des neutrons "thermiques" (cf. A.4.) ayant des vitesses de même module v . Certaines notations sont précisées en début d'épreuve.

$\Phi(M, t) = n(M, t) v$ est le flux de neutrons au point M à l'instant t par unité de surface.

$\vec{J}(M, t)$ est le vecteur densité de courant de neutrons au point M à l'instant t .

$S(M, t)$ est le nombre de neutrons créés, par suite de la fission de l'uranium 235, par unité de temps et de volume, au point M à l'instant t .

σ_a est la section efficace d'absorption d'un neutron par un noyau cible, N étant le nombre de ces noyaux par unité de volume.

1. On pose $\lambda_a = \frac{1}{N\sigma_a}$. rappeler le nom et la signification de λ_a .

2. Etablir par un raisonnement clair l'équation de diffusion en un point :

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial n}{\partial t} = S - \frac{\Phi}{\lambda_a}.$$

3. On montre, en théorie de la diffusion, que la composante du vecteur \vec{J} suivant un axe (Ox par exemple) comporte deux termes :

– un terme $J_{x-} = \frac{\Phi}{4} + \frac{\lambda_T}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$, représentant les neutrons circulant dans le sens négatif de Ox :

– un terme $J_{x+} = \frac{\Phi}{4} - \frac{\lambda_T}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$ représentant les neutrons circulant dans le sens positif de Ox.

λ_T est le libre parcours moyen de transport.

En déduire la loi de Fick de la diffusion : $\vec{J} = -\frac{\lambda_T}{3} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$.

4. On s'intéresse (sauf à la question 5.c.) dans la suite du problème au régime stationnaire de fonctionnement d'un réacteur nucléaire.

Dans une théorie simplifiée on admet que le taux de création de neutrons s'écrit

$S = \frac{K\Phi}{\lambda_a}$ où K est le nombre moyen de neutrons obtenus par neutron thermique capturé,

en tenant compte des diverses pertes entre la fission et l'état thermique ($K > 1$).

Montrer que le régime stationnaire est caractérisé par l'équation $\Delta\Phi + B^2\Phi = 0$, dans laquelle B^2 s'exprime en fonction de K, λ_a , λ_T .

5. Le milieu réacteur est une lame (L) de dimension transversale prise infiniment grande afin de simplifier les calculs, s'étendant entre les plans $x = \pm a$.

Le milieu extérieur ne diffuse pas les neutrons.

On peut montrer que la fonction $\Phi(x)$, toujours positive bien sûr, ne s'annule pas en $x = \pm a$, mais en $x = \pm a'$, où $a' = a + 0,7\lambda_T$.

a. Déterminer $\Phi(x)$ pour la lame (L), le réacteur étant en régime stable de fonctionnement. On notera $\Phi_0 = \Phi(0)$.

Donner la valeur critique B_c correspondante de B, et celle K_c de K en fonction de λ_a , λ_T et a.

b. Quel est, dans ce régime, le flux de neutrons ψ s'échappant du réacteur par unité de surface ?

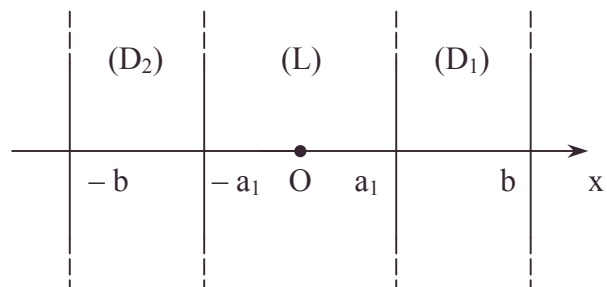
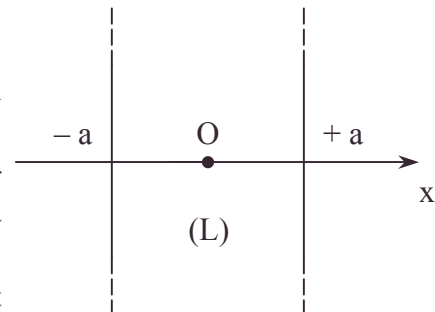
c. Prévoir qualitativement l'évolution en fonction du temps du flux de neutrons Φ lorsque K est supérieur ou inférieur à la valeur critique K_c . Quelle technique emploie-t-on dans un réacteur nucléaire pour contrôler la valeur de K ?

6. Afin de diminuer les fuites de neutrons hors du réacteur, on entoure la lame (L) de deux lames (D_1) et (D_2) formées d'un matériau (D) diffuseur et absorbeur de neutrons (valeurs caractéristiques λ'_T et λ'_a), ne comportant par d'uranium 235.

On pose $N_T^2 = \frac{3}{\lambda'_a \lambda'_T}$ et $b' = b + 0,7\lambda'_T$.

a. Ecrire les équations de diffusion dans les milieux (L) et (D) en régime stationnaire.

• absorbeur, diffuseur, physique nucléaire, réacteur à uranium enrichi, stabilité, uranium



b. Déterminer $\Phi(x)$ dans les milieux (L) et (D₁). On tiendra compte pour cela de la continuité de Φ , de celle de J_x et de celle de J_{x+} , à l'abscisse $x = a_1$.

c. En déduire que le régime stationnaire est régi par la condition :

$$B\lambda_T \tan Ba_1 = N_T \lambda'_T \coth N(b'-a_1).$$

d. Pour comparer les dimensions du milieu réacteur lorsqu'il est nu (question 5.) et lorsqu'il est entouré du milieu diffuseur (D) (question 6.), on pose $\delta = a'-a_1$.

Le facteur B est supposé le même dans les deux cas.

Etablir la relation $\tan B\delta = \frac{B\lambda_T}{N_T \lambda'_T} \tanh N_T e'$, avec $e' = b'-a_1$.

(On constate ainsi que pour un même régime B de fonctionnement, le volume du milieu réacteur est moins grand en présence d'un diffuseur qui joue le rôle d'un réflecteur de neutrons).

Concours MT ; Durée 3h

Corrigé

$$\text{A.1.a. } E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; T = E - E_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right); \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$\text{Vérifions : } p^2 c^2 + E_0^2 = \frac{m^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m^2 c^4 = \frac{m^2 v^2 + m^2 c^4 - m^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = E^2.$$

Le photon particule de masse nulle et d'énergie totale $h\nu = \hbar\omega$ est pourvu d'une quantité de mouvement satisfaisant à la relation du 1.a. : $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \hbar \frac{\omega}{c} = \hbar k$.

b. On veut utiliser les paramètres p , T et E_0 : exprimons E en fonction de T et E_0 et éliminons E par substitution dans la relation précédente : $E = T + E_0$,

$$\Rightarrow E^2 = T^2 + 2TE_0 + E_0^2 \text{ or } E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \Rightarrow p^2 c^2 = T(T + 2E_0).$$

$$\text{On a aussi } T = E - E_0 = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - E_0.$$

c. Vu la conservation de l'énergie totale dans le repère barycentrique, la réaction nucléaire transforme l'énergie de masse qui disparaît : $E_{\text{dégagée}} = -\Delta mc^2$ en énergie de photons de masse nulle.

$$\text{2.a.}\alpha. E_{\text{deg}} = 0,21 \text{uc}^2 = 0,21.931,5.9.10^{16} = 195,6 \text{MeV par noyau.}$$

$$\beta. 1\text{eV} = 1,6.10^{-19} \text{J}; 1\text{MeV} = 10^6 \text{eV}; 1\text{MeV} = 1,6.10^{-13} \text{J}.$$

$$E_{\text{deg}} = 0,21 \frac{\text{uc}^2 N_A}{M_{235(\text{eng})}}; A.N. : E'_{\text{deg}} = 8.10^{10} \text{J.g}^{-1}.$$

$$\text{b. Energie fournie par an : } E_1 = 1000 \text{MW}.365.86400 = 3,15.10^{16} \text{J}.$$

$$\text{Energie nucléaire potentielle à fournir : } E_2 = 4E_1 = 1,26.10^{17} \text{J}.$$

$$\text{Masse d'uranium 235 nécessaire : } m_{235} = \frac{E_2}{E_{\text{deg}}} = 1,5710^6 \text{g} = 1,57.10^3 \text{kg}.$$

$$\text{Avec } M_{235} = 0,235 \text{kg.mol}^{-1} \text{ et } 5\% = 1/20; 19/20 = 95\%.$$

Le pourcentage est molaire, $19n_{235} = 19 \frac{1,57.10^3}{0,235}$ représente le nombre de moles d'uranium 238 annuellement consommée d'où la masse totale utilisée sous les deux formes : $\frac{95}{100} \cdot \frac{238}{235} \cdot 1,57.10^3 + 1,57.10^3 = 33,4.10^3 \text{ kg.an}^{-1}$.

3. La conservation de l'énergie totale s'écrit pour la réaction $X^* \rightarrow X + \gamma$ dans le repère barycentrique, lié à X^* donc $M_0c^2 + \Delta E = M_0c^2 + T + hv$ soit $\Delta E = T + hv$.

La conservation de la quantité de mouvement dans le même repère s'écrit $0 = \vec{p} + \frac{hv}{c} \vec{i}$, les deux vecteurs sont opposés donc de même support.

a. Remplaçons p^2c^2 par h^2v^2 et T par $\Delta E - hv$, il vient de la relation **A.1.b.**
 $T^2 + 2TE_0 = p^2c^2$.

$$(\Delta E - hv)^2 + 2M_0c^2(\Delta E - hv) = h^2v^2 \Rightarrow \Delta E(\Delta E + 2M_0c^2) = 2hv(\Delta E + M_0c^2)$$

$$\Rightarrow hv = \frac{\Delta E}{2} \frac{\Delta E + 2M_0c^2}{\Delta E + M_0c^2}.$$

$$\text{b.}\alpha. \quad hv = \frac{\Delta E}{2} \frac{2M_0c^2}{M_0c^2} \frac{\left(1 + \frac{\Delta E}{2M_0c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\Delta E}{M_0c^2}\right)} = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2M_0c^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta E}{M_0c^2}\right) = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2M_0c^2}\right).$$

$$\text{b.}\beta. \quad T = \Delta E - hv = \frac{\Delta E^2}{2M_0c^2}.$$

$$\text{c.} \quad \frac{\Delta E}{2M_0c^2} = 5.10^{-6} \Rightarrow hv = 0,9 \text{ MeV} ; T = 4,6 \text{ eV} \text{ terme négligeable devant l'autre ;}$$

la particule γ nouvelle emporte la "totalité" de l'énergie disponible dans le repère barycentrique.

$$\text{4.a.} \bullet \text{ Vu } p : T_{k+1} = T_k e^{-p} \Rightarrow T_1 = T e^{-p} ; T_2 = T e^{-2p} \dots ; T_q = T e^{-pq}.$$

• Le neutron a 3 degrés de liberté et se trouve en équilibre thermique à la fin :

$$T_0 = T_q = \frac{3}{2} k\theta = \frac{3}{2} \frac{R\theta}{N_A} ; \left(k_B = \frac{R}{N_A} \right) \text{ d'après l'équipartition de l'énergie cinétique}$$

selon les divers degrés de liberté pour un gaz parfait de neutrons.

$$q = \frac{1}{p} \ln \frac{T}{T_0} = \frac{1}{p} \ln \frac{2T}{3k\theta}.$$

$$\text{b.} \text{ Dans le gaz de neutrons, } T_0 = \frac{3}{2} k\theta ; AN : \text{l'énergie cinétique } T_0 = 4,52.10^{-2} \text{ eV}.$$

$$\text{c.} \quad q = \frac{1}{1,1} \ln \frac{2,2.10^6}{4,5.10^{-2}} = 17,5 ; \text{ on est sûr du ralentissement voulu après 18 collisions.}$$

B.1.a.α. Volume balayé par un neutron de section (efficace) σ pendant la durée dt nécessaire pour parcourir dx (quand il n'est pas absorbé) : σdx .

β. I_x représente le vecteur densité de "courant" des neutrons soit le nombre de neutrons qui passe à travers l'unité de surface pendant l'unité de temps.

• degrés de liberté, énergie de masse en relativité, neutron, physique nucléaire

$I_x(x)dt$ représente le nombre de neutrons qui passent en x , pour une section unité pendant dt .

γ. Le nombre de chocs pour un neutron dit "moyen" pendant dt est $N\sigma dx$ car c'est le nombre de ^{10}B présents dans le volume concerné ; vu la petitesse de σ , ce nombre est inférieur à 1 ; c'est, à un coefficient multiplicatif près, une probabilité.

δ. Le nombre de neutrons absorbés parmi les $I_x(x)dt$ étudiés est $N\sigma dx I_x(x)dt$ pendant dt .

ε. En $x + dx$, le nombre de neutrons restant à passer pendant dt (par bilan) est :
 $I_x(x + dx)dt = I_x(x)dt - N\sigma dx I_x(x)dt$; $\frac{dI}{I} = -N\sigma dx \Rightarrow I = I_0 \exp(-N\sigma x)$. (loi de Lambert Beer).

$$\text{b.}\alpha. P_B = 2.10^4 \text{ Pa} \Rightarrow \frac{n_B}{V} = \frac{P_B}{RT} \Rightarrow N = 0,9 \frac{n_B}{V} = 0,9 \frac{P_B}{RT} ;$$

AN : $N = 4,78.10^{24}$ noyaux ^{10}B par m^3 .

β. La proportion non absorbée après un parcours de L est $\frac{I(L)}{I(0)} = \exp(-N\sigma L)$;

la proportion détectée après un parcours de L est donc $1 - \frac{I(L)}{I(0)}$;

$$\text{AN : } 1 - \frac{\exp(-N\sigma L)}{I} = 1,6\% .$$

2.a.α. L'énergie totale est donc initialement une énergie de masse ; l'énergie cinétique totale est donc issue, après la réaction nucléaire, de la disparition de masse :

$T = -[(m_{\text{Li}} + m_{\alpha}) - (m_{\text{B}} + m_{\text{n}})]c^2$; AN : $T = 2,79 \text{ MeV}$ dans le cas où la transformation d'énergie est totale.

β. Dans le cas où une partie de l'énergie est stockée sous forme d'énergie d'excitation ΔE , l'énergie cinétique est amoindrie ; $T^* = T - \Delta E$; AN : $T^* = 2,31 \text{ MeV}$.

b.α. Nombre d'atomes N ionisés par une réaction nucléaire : $\frac{T}{e_0}$ ou $\frac{T^*}{e_0}$ selon que

Li ou Li^* est produit.

β. Quantités de charge (électronique) produites $\frac{eT}{e_0}$ ou $\frac{eT^*}{e_0}$.

γ. Charge finale $\beta \frac{eT}{e_0}$ ou $\beta \frac{eT^*}{e_0}$ sur une armature de condensateur.

δ. Amplitude de l'impulsion résultant de la réaction nucléaire $|u| = \left| C\beta \frac{eT}{e_0} \right|$ ou

$$|u^*| = \left| C\beta \frac{eT^*}{e_0} \right| ; \text{AN : } |u| = 24,8 \text{ mV} ; |u^*| = 20,4 \text{ mV} .$$

c. L'intensité traversant le condensateur est en

$$\beta [I(0) - I(L)] \frac{eT}{e_0} S = \beta I(0) \frac{eT}{e_0} [1 - e^{-N\sigma L}] S \text{ en supposant récupérer l'ionisation due à } \Delta E$$

de T^* , qui se désexcite sans délai, S étant la surface mise en cause ; on peut en déduire $I(0)$.

3.a. Le raisonnement détaillé en **B.1.a.** donne :

• *absorption, Lambert-Beer, neutron, physique nucléaire*

α. Pour un neutron "moyen" un nombre de chocs de $N\sigma dx$ sur la distance balayée dx .

β. Pour la surface S et pour un nombre $n(x, v) dv$ de neutrons de vitesse v :

$$N\sigma dx \underbrace{n(x, v) dv v S dt}_{\text{flux}} \text{ chocs pendant } dt.$$

Le nombre de réactions qui se produisent entre x et $x + dx$ par unité de temps avec les neutrons de vitesse v est :

$$Nv\sigma(v)n(x, v)dvSdx.$$

b. $\sigma(v) = \frac{\sigma_0 v_0}{v}$; $\frac{\partial n}{\partial x} = 0$; le nombre total B des réactions dans l'intervalle

$$[1\text{eV}, 500\text{eV}] \text{ s'écrit : } B = \int_{v_1}^{v_2} \int_0^L Nv\sigma n(v)Sdv dx \text{ or } n = \int_{v_1}^{v_2} n(v)dv, \text{ et } \sigma v = \sigma_0 v_0.$$

$$B = L N \sigma_0 v_0 S \int_{v_1}^{v_2} n(v)dv = kn \text{ avec } k = SLN\sigma_0 v_0.$$

On suppose que l'intervalle d'intégration représente la quasi totalité des réactions.

$$\text{c. } v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m_n}} \text{ avec } m_n c^2 = 931,5 \text{ MeV} ;$$

$$\text{A.N.: } v_0 = \sqrt{\frac{2,5}{931,5 \cdot 10^6}} v_0 = 31083 \text{ m.s}^{-1} ; L = 0,12 \text{ cm} ; S = 2 \text{ cm}^2 ; N = 4,78 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}.$$

$$k = 0,101 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

C.1. Vu **B.1.α.γ.** $\lambda_a = \frac{dx}{N\sigma_a dx}$ représente la distance entre 2 chocs ; c'est le libre parcours moyen.

2. Pour une surface fermée Σ , faisons le bilan du nombre de neutrons N entre t et $t + dt$; il y a :

- ceux qui traversent Σ : $dt \left[\oint \vec{J} d\vec{S} \right] = \left[\iiint \text{div} \vec{J} d\tau \right] dt.$
- ceux qui sont créés : $dt \iiint S d\tau.$
- ceux qui sont absorbés : $\iiint N n \sigma_a v dt d\tau = dt \iiint \frac{\phi}{\lambda_a} d\tau.$

$$dN_n = \iiint \frac{\partial n}{\partial t} d\tau dt = -dt \left[\iiint \text{div} \vec{J} d\tau + \iiint S d\tau - \iiint \frac{\phi}{\lambda_a} d\tau \right];$$

$$\text{soit } \iiint_{V_E} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{J} - S + \frac{\phi}{\lambda_a} \right] d\tau = 0 \quad \forall \Sigma \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{J} - S + \frac{\phi}{\lambda_a} = 0.$$

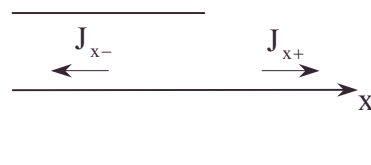
$$\text{3. } J_{x_{\text{total}}} = J_{x+} - J_{x-}.$$

$$J_{x_{\text{total}}} = -\frac{\lambda_T}{6} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\lambda_T}{6} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\lambda_T}{3} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

On a bien la loi de Fick :

$$\vec{J} = -\frac{\lambda_T}{3} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \text{ (de la forme } -D \overrightarrow{\text{grad}} n \text{) avec } D = \frac{\lambda_T}{3} v.$$

4. En remplaçant $J, S, \frac{\partial n}{\partial t}$ dans **C.2.**, on a :



$$0 - \frac{\lambda_T}{3} \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{K\phi}{\lambda_a} - \frac{\phi}{\lambda_a} \Rightarrow \Delta\phi + 3\phi \frac{(K-1)}{\lambda_T \lambda_a} = 0; \text{ on voit } B^2 = \frac{3(K-1)}{\lambda_a \lambda_T}.$$

5.a. L'équation s'écrit pour ce modèle unidimensionnel : $\frac{d^2\phi}{dx^2} + B^2\phi = 0$:

$$\phi = A \cos(Bx + \varphi).$$

L'énoncé informe que $\phi(a') = 0 = A \cos(Ba' + \varphi) = A \cos(-Ba' + \varphi) = \phi(-a')$,
 $\Rightarrow 0 = \cos(Ba' + \varphi) - \cos(-Ba' + \varphi) = -2 \sin \varphi \sin Ba' \Rightarrow \varphi = 0(\pi)$ car $\sin Ba' \neq 0$
 cf. plus loin.

On a : $\phi = A \cos Bx$ or $\phi(0)$ est donné $\Rightarrow A = \phi_0$.

La valeur d'annulation de ϕ impose $\cos Ba' = 0$ soit $B_m a' = \frac{\pi}{2} + p\pi$, $p \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow B_n = \frac{\pi}{2a'} + \frac{p\pi}{a'} \Rightarrow K_n = 1 + \frac{\lambda_a \lambda_T}{3} \left[\frac{\pi}{2a'} + \frac{p\pi}{a'} \right]^2.$$

La valeur minimale du crochet est obtenue pour $p = 0$ et $p = -1$.

$$K_c = 1 + \frac{\lambda_a \lambda_T}{12} \frac{\pi^2}{(a + 0,7\lambda_T)^2} \Rightarrow B_c = \left[\frac{\pi}{2(a + 0,7\lambda_T)} \right] \text{ minimale également.}$$

b. Le flux des neutrons par unité de surface s'échappant du réacteur est :

$$\psi = J(a) - J(-a) = 2J(a) = \frac{2\lambda_T}{3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=a} = \frac{2}{3} \lambda_T \phi_0 B_c \sin(B_c a).$$

c. L'équation **C.2.** permet d'écrire pour ce problème unidimensionnel :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\lambda_T}{3} \frac{d^2\phi}{dx^2} + (K-1) \frac{\phi}{\lambda_a} = \frac{\lambda_T}{3} \left[\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{3(K-1)}{\lambda_a \lambda_T} \phi \right].$$

En partant de $K = K_c$ où $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, $\phi(x)$ étant connu,

- si K croît, $\frac{\partial n}{\partial t} > 0$: emballement du réacteur (avec incertitude de

l'établissement d'un autre régime stationnaire à $K_n > K_c$).

- si K décroît, $\frac{\partial n}{\partial t} < 0$: il n'y a pas d'autre régime stationnaire possible. Le

régime transitoire doit aboutir à l'arrêt.

La partie **B.** a décrit le compteur de contrôle de l'activité du réacteur. Il suffit de contrôler la constance du compteur pour que K reste constant.

6.a. On a toujours dans (L) : $\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{3(K-1)}{\lambda_a \lambda_T} \phi = 0$ et dans (D) où (S) = 0,

c'est-à-dire $K = 0$, $\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{3\phi}{\lambda_a \lambda_T} = 0$, soit $\frac{d^2\phi}{dx^2} - N_T^2 \phi = 0$.

b. On a toujours dans (L) $\phi(x) = \phi_0 \cos Bx$, fonction paire.

Vu la symétrie, on ne prendra pas, dans (D), $\phi(x) = \alpha \cosh N_T x$ car il y a un trou topologique dû à (L) ; on prendra $\phi(x) = \alpha \cosh N_T x + \beta \sinh N_T x$ pour $b \geq x \geq a_1$.

La continuité de ϕ en $x = a_1$ s'écrit : $\phi_0 \cos Ba_1 = \alpha \cosh N_T a_1 + \beta \sinh N_T a_1$ [1].

La continuité de $J_x = -\lambda_T \frac{d\phi}{dx}$ en $x = a_1$,

- analogie, incertitude, réacteur à uranium enrichi

$$\lambda_T \phi_0 B \sin Ba_1 = -\lambda'_T \alpha N_T \sinh N_T a_1 - \lambda'_T \beta N_T \cosh N_T a_1 \quad [2]$$

c. L'introduction de b' , analogue de a' , suppose $\phi(\pm b') = 0$, soit :

$$\alpha \cosh N_T b' + \beta \sinh N_T b' = 0 \quad [3].$$

Considérons la division terme à terme de [2] par [1] :

$$\lambda_T B \tan Ba_1 = -\lambda'_T N \frac{(\alpha \sinh N_T a_1 + \beta \cosh N_T a_1)}{(\alpha \cosh N_T a_1 + \beta \sinh N_T a_1)}.$$

$$\text{Introduisons } \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\cosh N_T b'}{\sinh N_T b'} \text{ vu [3] :}$$

$$\lambda_T B \tan Ba_1 = -\lambda'_T N \left(\frac{\sinh N_T a_1 - \cosh N_T a_1 \frac{\cosh N_T b'}{\sinh N_T b'}}{\cosh N_T a_1 - \sinh N_T a_1 \frac{\cosh N_T b'}{\sinh N_T b'}} \right);$$

Il reste :

$$-\lambda'_T N \frac{(\sinh N_T b' \sinh N_T a_1 - \cosh N_T b' \cosh N_T a_1)}{(\sinh N_T b' \cosh N_T a_1 - \cosh N_T b' \sinh N_T a_1)} = \lambda'_T N \frac{\cosh N_T (b' - a_1)}{\sinh N_T (b' - a_1)}.$$

$$\text{Ainsi, } \lambda_T B \tan Ba_1 = \lambda'_T N_0 \coth N_T (b' - a_1).$$

d. Rappelons que C.5. assure $B_c a' = \frac{\pi}{2}$; B a la même valeur B_c partout.

$$\tan B_c \delta = \tan (B_c a' - B_c a_1) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - B_c a_1 \right) = \cotan Ba_1.$$

$$\Rightarrow \text{6.c. s'écrit alors } \lambda_T B \tanh N_T e' = \lambda'_T N_T \tan B_c \delta, \text{ soit : } \tan B_c \delta = \frac{B \lambda_T}{N \lambda'_T} \tanh N_T e' > 0,$$

$$\Rightarrow \delta = a' - a_1 > 0 \text{ si on pense évident } b' - a_1 > 0 \text{ vu } b' > b > a_1.$$

Conclusion : le volume du milieu réacteur est moins grand en présence d'un diffuseur (qui joue sans doute le rôle de réflecteur de neutrons).

1.6.3. Transformation du champ électromagnétique dans un changement de base de Lorentz

I. Transformation de Lorentz

On rappelle qu'une transformation de Lorentz est celle qui permet de passer des coordonnées (x, y, z, t) d'un événement dans un repère galiléen (S) à ses coordonnées (x', y', z', t') dans un repère galiléen (S') tel que :

- les axes $O'x', O'y', O'z'$ orthonormés soient parallèles aux axes Ox, Oy, Oz de (S)
- $O'x'$ et Ox coïncident
- (S') ait, parallèlement à Ox ou $O'x'$, la vitesse v par rapport à (S) .

On prendra de plus O et O' coïncidant pour $t = t' = 0$.

On a alors :

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) ; y' = y ; z' = z ; t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$; $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

Mettre (1) sous forme d'une relation matricielle permettant de passer du vecteur

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ T = ct \end{pmatrix} \text{ au vecteur } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ T' = ct' \end{pmatrix} \text{ et inversement.}$$

II. Transformations du champ électromagnétique dans un changement de repère

On se propose de déterminer les relations qui doivent exister entre les composantes (E_x, E_y, E_z) ; (B_x, B_y, B_z) dans (S), (E'_x, E'_y, E'_z) , (B'_x, B'_y, B'_z) dans (S') des champs électrique et magnétique, où (S) et (S') sont deux repères galiléens liés par une transformation de Lorentz (cf. I.1.) en s'imposant l'invariance des équations de Maxwell dans le passage de (S) à (S') ou dans le passage inverse.

1. Reprenant les notations de I., exprimer $\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial T'}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial T}$.

2.a. Ecrire, dans (S) et (S'), l'équation de Maxwell – Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

b. Projeter les équations sur les axes Oy et O'y' en les écrivant de manière à ne faire intervenir que les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial T}$. Identifier les termes en $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}$, et $\frac{\partial}{\partial T}$ dans les équations en (\vec{E}, \vec{B}) d'une part et (\vec{E}', \vec{B}') de l'autre et en tirer les expressions de E_x, E_z et B_y en fonction des composantes de \vec{E}' et \vec{B}' .

c. Montrer que, de la série d'équations ainsi obtenues, on peut en déduire une autre série par la transformation $A_y \zeta A_z$; $A_z \zeta -A_y$; $A_x \zeta A_x$ où \vec{A} est un vecteur quelconque. En déduire les expressions de E_y et B_z en fonction des composantes de \vec{E}' et \vec{B}' .

d. Reprendre une procédure analogue pour obtenir l'expression de B_x, B_y, E_z en fonction des composants de \vec{E}' et \vec{B}' , en partant maintenant de l'équation de Maxwell –

Ampère en absence de courant : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

3. Exprimer les composantes de \vec{E}' et \vec{B}' en fonction des composantes de \vec{E} et \vec{B} .

4. Désignant par $\vec{A}_{//}$ et \vec{A}_{\perp} les composantes d'un vecteur \vec{A} respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction Ox du mouvement relatif des deux repères, montrer que les relations obtenues au 3. peuvent se condenser sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{//} &= \vec{E}_{//} & \vec{B}'_{//} &= \vec{B}_{//} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \wedge \vec{B}) & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Centrale ; Durée : 2h

Corrigé

I. Introduisons les nouvelles variables $T = ct, T' = ct'$ homogènes à une distance ;

- analogie, dérivée partielle, invariance, matrice

On remplace : $t = \frac{T}{c}$; $t' = \frac{T'}{c}$.

$$x' = \gamma(x - \beta T) \quad (1) ; \quad T' = \gamma(T - \beta x) \quad (2).$$

L'écriture matricielle dans \mathbb{R}^4 est :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ T \end{bmatrix}.$$

On peut résoudre le système des équations (1), (2) pour trouver x , T en fonction de x' , T' .
On peut aussi remarquer que l'opérateur inverse revient à changer v en $-v$ soit β en $-\beta$, γ restant identique.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ T' \end{bmatrix}.$$

II.1. Sachant que x' et T' s'expriment à l'aide des 2 variables x et T , que y' est identique à y , de même que z' et z , les dérivées partielles d'une fonction $f(x', y', z', T')$ s'expriment en physique (car on pourrait changer le nom de la fonction quand on fait le changement de variables) par :

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x'} = \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \beta\gamma \frac{\partial f}{\partial T}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} ; \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z} ; \quad \frac{\partial f}{\partial T'} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T'} + \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T'} = \beta\gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial f}{\partial T} ;$$

On peut donc écrire les opérateurs de dérivation partielle ;

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \beta\gamma \frac{\partial}{\partial T} ; \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} ; \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} ; \quad \frac{\partial}{\partial T'} = \beta\gamma \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial T}.$$

On peut inverser l'opération en changeant β en $-\beta$.

2.a.α. Dans S , $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial T}$ s'écrit avec les nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -c \frac{\partial B_x}{\partial T} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -c \frac{\partial B_y}{\partial T} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -c \frac{\partial B_z}{\partial T} \end{cases} \quad (2)$$

β. Dans S' , $\vec{\text{rot}} \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$ s'écrit avec les nouvelles coordonnées :

$$\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = -c \frac{\partial B'_{x'}}{\partial T'} \quad (1')$$

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial E'_{z'}}{\partial x'} = -c \frac{\partial B'_{y'}}{\partial T'} \quad (2')$$

$$\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E'_{x'}}{\partial y'} = -c \frac{\partial B'_{z'}}{\partial T'}$$

b. Réécrivons (2') en tenant compte de **II.1.** ; on a :

$$(2'') \quad \frac{\partial E'_{x'}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial E'_{z'}}{\partial x} - \beta \gamma \frac{\partial E'_{z'}}{\partial T} = -c \beta \gamma \frac{\partial B'_{y'}}{\partial x} - c \gamma \frac{\partial B'_{y'}}{\partial T}.$$

Rassemblons les termes pour que la forme de 2'' et de 2 soit identique :

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} [\gamma E'_{z'} - \beta \gamma c B'_{y'}] = -c \frac{\partial}{\partial T} \left[\gamma B'_{y'} - \frac{\beta \gamma}{c} E'_{z'} \right].$$

L'identité des champs et des opérateurs permet d'écrire formellement :

$$E_x = E'_{x'} ; E_z = \gamma (E'_{z'} - \beta c B'_{y'}) ; B_y = \gamma \left(B'_{y'} - \frac{\beta}{c} E'_{z'} \right).$$

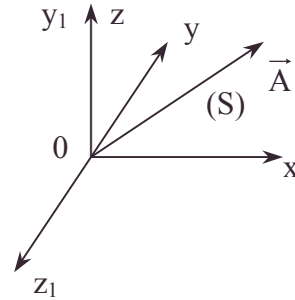
c. La rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de Ox, permet de transformer les composantes exprimées

dans S :

$$\vec{A} \begin{vmatrix} A_x \\ A_z \\ A_z \end{vmatrix} \text{ en } \vec{A}_1 \begin{vmatrix} A_x \\ -A_z \\ A_y \end{vmatrix}$$

Ce changement de repère se prolonge pour (S').

$$\vec{A}' \begin{vmatrix} A'_{x'} \\ A'_{y'} \\ A'_{z'} \end{vmatrix} \rightarrow \vec{A}'_1 \begin{vmatrix} A'_{x'} \\ -A'_{z'} \\ A'_{y'} \end{vmatrix}$$



Les identités de **2.b.** permettent d'écrire cette isométrie, aussi bien pour \vec{E} , \vec{B} que \vec{E}' , \vec{B}'

$$-E_y = \gamma (-E'_{y'} - \beta c B'_{z'}) ; -B_z = \gamma \left(-B'_{z'} - \frac{\beta}{c} E'_{y'} \right) \text{ d'où :}$$

$$E_y = \gamma (E'_{y'} + \beta c B'_{z'}) ; B_z = \gamma \left(B'_{z'} + \frac{\beta}{c} E'_{y'} \right).$$

d.α. $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ s'écrit dans (S) avec les nouvelles coordonnées :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial T} ; \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial T} ; \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial T}.$$

β. $\vec{\text{rot}} \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}$ s'écrit dans (S') avec les nouvelles coordonnées :

$$\frac{\partial B'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E'_{x'}}{\partial T'} ; \frac{\partial B'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial B'_{z'}}{\partial x'} = \frac{1}{c} \frac{\partial E'_{y'}}{\partial T'} ; \frac{\partial B'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial B'_{x'}}{\partial y'} = \frac{1}{c} \frac{\partial E'_{z'}}{\partial T'}.$$

La même procédure qu'en **2.** peut être appliquée à la projection sur Oy :

$$\frac{\partial' B'_{x'}}{\partial z} - \gamma \frac{\partial B'_{z'}}{\partial x} - \beta \gamma \frac{\partial B'_{z'}}{\partial T} = \frac{1}{c} \left[\beta \gamma \frac{\partial E'_{y'}}{\partial x} + \gamma \frac{\partial E'_{y'}}{\partial T} \right].$$

Rassemblons les termes pour que des analogies apparaissent entre (S) et (S') selon cette projection :

$$\frac{\partial B'_{x'}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma B'_{z'} + \frac{\beta \gamma}{c} E'_{y'} \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial T} [\gamma E'_{y'} + \beta \gamma c B'_{z'}].$$

L'identité des champs et des opérateurs permet d'écrire formellement :

$$B_x = B'_x ; B_z = \gamma \left(B'_z + \frac{\beta}{c} E'_{y'} \right) ; E_y = \gamma (E'_{y'} + \beta c B'_z)$$

3. La même rotation de $\pi / 2$ autour de Ox permet d'écrire :

$$B_y = \gamma \left(B'_{y'} - \frac{\beta}{c} E'_{z'} \right) ; E_z = \gamma (E'_{z'} - \beta c B'_{y'})$$

Récapitulons :

$E_x = E'_x$	$B_x = B'_x$
$E_y = \gamma (E'_{y'} + \beta c B'_z)$	$B_y = \gamma \left(B'_{y'} - \frac{\beta}{c} E'_{z'} \right)$
$E_z = \gamma (E'_{z'} - \beta c B'_{y'})$	$B_z = \gamma \left(B'_{z'} + \frac{\beta}{c} E'_{y'} \right)$

La transformation inverse s'écrit en changeant v en $-v$, soit donc :

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \gamma (E_y - \beta c B_z)$	$B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right)$
$E'_z = \gamma (E_z + \beta c B_y)$	$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right)$

4. On a : $\vec{E}_{//} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(S)} ; \vec{E}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}_{(S)} ; \vec{E}'_{//} = \begin{pmatrix} E'_{x'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(S')} ; \vec{E}'_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ E'_{y'} \\ E'_{z'} \end{pmatrix}_{(S')}$; de même en \vec{B}

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V = \beta c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\substack{(S) \\ \text{et } (S')}} .$$

a. Il est évident que : $\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} ; \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}$.

b. On vérifie que les expressions vectorielles s'identifient avec les relations de 2.3. :

Remarque importante : si $\beta \rightarrow 0$ sans que $\beta = 0$, on vérifie $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$ et $\vec{B}' = \vec{B}$ au 2^{ème} ordre près en β , que l'on peut obtenir par un calcul non relativiste.

Chapitre 2 : Mécanique du solide

Appartient au programme de MP, PC, TSI, TPC2

2.1. Introduction classique à la dynamique du solide

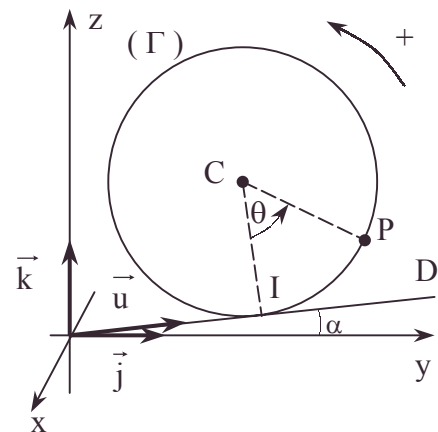
2.1.1. Equilibre d'une roue lestée sur un plan incliné

Le problème fait intervenir un objet P quasi-ponctuel, de masse M, et une circonférence Γ de rayon R, homogène, linéique et indéformable, de masse m.

Les configurations étudiées se situent dans le champ de pesanteur, d'accélération constante de module g, dirigée selon la verticale descendante. Le plan de la circonférence Γ contient la verticale ascendante Oz, le référentiel Oxyz, de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, étant orthonormé.

Les mouvements sont toujours sans frottements. Les éléments P et Γ ne sont jamais susceptibles de sortir du plan yOz.

L'objet P est fixe sur la circonférence Γ qui est mobile sur une droite D. L'ensemble P, Γ est susceptible de rouler sans glisser sur une droite D du plan yOz passant par O de vecteur unitaire \vec{u} , repérée par son angle $\alpha = (\vec{j}, \vec{u})$ avec l'horizontale. On note I le point de contact de Γ et D, C le centre de Γ , $\theta = (\vec{CI}, \vec{CP})$ la position de P, et $\mu = \frac{M}{m}$.



1. La droite D est horizontale ($\alpha = 0$). A l'instant $t = 0$, l'objet P est au contact de D et le point C animé de la vitesse v_0 parallèle à D, orientée selon \vec{u} .

1. Calculer l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U du système (P, Γ) en fonction de g, R, m, M, θ , et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

2. En déduire la relation $\ddot{\theta}(\theta)$ (en fonction de g, R, v_0 et μ) liant la vitesse angulaire de P, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, et sa position θ sur (Γ) pour les conditions initiales données.

3. Discuter de la nature du mouvement en mettant en évidence une valeur critique v_{oc} de v_0 qu'on exprimera en fonction de g, R et μ .

2. La droite D est inclinée (α est un angle aigu positif non nul).

1. Montrer qu'il n'y a d'équilibre que si α est inférieur à une valeur limite α_ℓ qu'on exprimera en fonction de μ .

2. On suppose que α est inférieur à α_ℓ . Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre θ_1 et θ_2 dont on étudiera la stabilité. Il pourra être utile d'utiliser la variable φ définie par $\sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_\ell}$.

3. Application numérique

On donne $M = m$. En déduire la valeur de α_ℓ .

• conditions initiales, dynamique du solide, énergie cinétique, énergie potentielle, roulement sans glissement

On donne en outre $\alpha = \arcsin \frac{1}{4}$. Calculer les angles θ_1 et θ_2 des positions d'équilibre (les résultats seront donnés en degrés).

Autres concours ; Durée : 1h

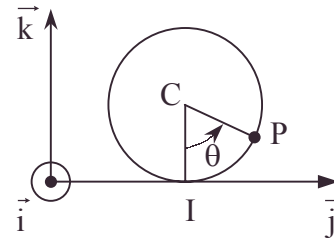
Corrigé

$$1.1. \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{i} ; \quad \text{soit } \vec{IP} \begin{vmatrix} 0 \\ R \sin \theta \\ R(1 - \cos \theta) \end{vmatrix}$$

$$\bullet \vec{V}(P) = \underbrace{\vec{V}(I)}_0 + \vec{\Omega} \wedge \vec{IP} \text{ on a : } \vec{IP} = \vec{IC} + \vec{CP} ;$$

$$\Rightarrow \vec{V}(P) = R \dot{\theta} (\cos \theta - 1) \vec{j} + R \dot{\theta} \sin \theta \vec{k} .$$

$$\bullet \vec{V}(C) = \underbrace{\vec{V}(I)}_0 + \vec{\Omega} \wedge \vec{IC} = -R \dot{\theta} \vec{j} .$$



a. On a $T = E_c(\Gamma) + E_c(P)$ avec $E_c(P) = \frac{1}{2} M \vec{V}(P)^2 = MR^2 \dot{\theta}^2 (1 - \cos \theta)$.

$$E_c(\Gamma) = \frac{1}{2} m V^2(C) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \text{ avec } J = mR^2 .$$

$$E_c(\Gamma) = \frac{1}{2} (mR^2 + J) \dot{\theta}^2 = mR^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow T = R^2 \dot{\theta}^2 (m + M(1 - \cos \theta)) .$$

b. $U = E_p(\Gamma) + E_p(P) = K - MgR \cos \theta$ avec $K = C + Mgz_c + mgz_c$. On peut prendre $K = 0$ de suite si on le souhaite.

2. On a : $T + U = \text{constante}$ car $P_{\text{contact}} = 0$ et le système (Terre, Γ , P) est isolé.

$$R^2 \dot{\theta}^2 [m + M(1 - \cos \theta)] - MgR \cos \theta = R^2 \dot{\theta}_0^2 [m + M(1 - \cos \theta_0)] - MgR \cos \theta_0 .$$

Or, $v_o = -R \dot{\theta}_0$ et $\theta_0 = 0$ à $t = 0$;

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mv_o^2 - MgR(1 - \cos \theta)}{R^2 [m + M(1 - \cos \theta)]} = \frac{v_o^2 - \mu gR(1 - \cos \theta)}{R^2 (1 + \mu(1 - \cos \theta))} .$$

$$3. \dot{\theta}^2 > 0 \Rightarrow \mu gR(1 - \cos \theta) < v_o^2 .$$

$$\bullet \text{ Etudions } \theta_1 \text{ tel que } \mu gR(1 - \cos \theta_1) = v_o^2 \text{ soit } \cos \theta_1 = 1 - \frac{v_o^2}{\mu gR} .$$

Pour que θ_1 existe, il est nécessaire que $-1 < \cos \theta_1 < 1$; soit $\frac{v_o^2}{\mu gR} > 0$ évident et

$$\frac{v_o^2}{\mu gR} < 2 ; \text{ il faut satisfaire } v_o^2 < v_{oc}^2 \text{ avec } v_{oc} = \sqrt{2\mu gR} .$$

Discussion

a. Si $v_o < v_{oc} \exists \theta_1$ tel que $\dot{\theta}^2 = 0$ point d'arrêt momentané du système à partir duquel (tout en satisfaisant à la relation du 2.) le système repart avec un changement de signe de $\dot{\theta}$: le système oscille.

b. Si $v_o > v_{oc} \nexists \theta_1$ tel que $\dot{\theta} = 0$ il n'y a pas de changement de signe de $\dot{\theta}$ (par passage par zéro, ou par l'infini d'ailleurs), le système roule dans le même sens $\forall t$.

c. Si $v_o = v_{oc}$; pour $\theta_1 = \pi$, $\dot{\theta}^2 = 0$: cet arrêt est instable. La date du redémarrage et la direction sont aléatoires.

2.1. Les positions d'équilibre correspondent à des extrema de U.

- $U = mgz_C + Mgz_P + K$.

- Or $z_C = u_C \sin \alpha + R \cos \alpha$;

$$z_P = z_C - R \cos(\alpha + \theta).$$

- Or en intégrant la condition de roulement sans glissement : $\vec{v}_I = \vec{0} = \vec{V}(C) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI}$;

$$\vec{V}(C) \cdot \vec{u} + R \dot{\theta} \vec{u} = 0,$$

on obtient $u_C + R\theta = \text{cste}$ supposée nulle si l'origine angulaire est bien choisie à $t = 0$.

- $U = (M + m)gR(\cos \alpha - \theta \sin \alpha) - MgR \cos(\alpha + \theta) + C$.

- $\frac{dU}{d\theta} = -R(M + m)\sin \alpha + MgR \sin(\alpha + \theta) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \theta) = \frac{M + m}{M} \sin \alpha = \frac{1 + \mu}{\mu} \sin \alpha ; \exists \theta_1 \text{ tel que } \frac{dU}{d\theta} = 0 \text{ si } -1 < \sin(\alpha + \theta) < 1,$$

soit $\frac{-\mu}{1 + \mu} < \sin \alpha$ toujours réalisé et $\sin \alpha < \frac{\mu}{1 + \mu}$.

La valeur θ_1 d'équilibre n'existe que si $\sin \alpha < \sin \alpha_\ell$ avec $\sin \alpha_\ell = \frac{\mu}{1 + \mu}$.

2.a. La résolution de $\sin(\alpha + \theta) = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_\ell} = \sin \varphi$ donne $\theta + \alpha = \varphi$ ou $\theta + \alpha = \pi - \varphi$.

On obtient ainsi 2 solutions : $\theta_1 = \varphi - \alpha$ et $\theta_2 = \pi - \varphi - \alpha$ avec $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_\ell}\right)$

($0 < \varphi < \pi$) (Contrainte imposée cf. b.)

b. On a une situation stable pour un minimum de U, instable pour un maximum.

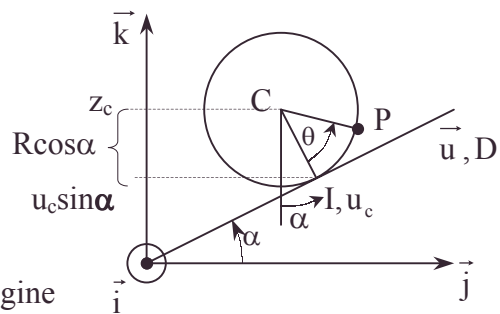
- Un minimum de U est caractérisé par $\frac{dU}{d\theta} = 0$ et $\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0$: la dérivée $\frac{dU}{d\theta}$ est négative puis positive.

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = MgR \cos(\alpha + \theta) \quad \text{pour } \theta = \theta_1 : \frac{d^2U}{d\theta^2} = MgR \cos \varphi > 0 \quad \theta_1 \text{ est stable.}$$

$$\text{pour } \theta = \theta_2 : \frac{d^2U}{d\theta^2} = MgR \cos(\pi - \varphi) < 0 \quad \theta_2 \text{ est instable.}$$

3. $\theta_1 = 15,5^\circ$; $\theta_2 = 135,5^\circ$.

- énergie potentielle, équilibre, instabilité, roulement sans glissement, stabilité



2.1.2. Coulisseau vibrant

Pendules couplés

Oscillations forcées

L'espace est rapporté au repère galiléen orthonormé direct $Oxyz$ tel que les axes Ox et Oy soient contenus dans un plan horizontal et que Oz soit dirigé suivant la verticale descendante. On note $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivement les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz . L'accélération de la pesanteur notée g est supposée uniforme.

On étudie le mouvement dans le plan vertical Oxz d'un coulisseau considéré comme solide rigide ; celui-ci est constitué d'un bloc principal et de deux tiges T et T' (Fig.1). Ce coulisseau de masse totale M , de centre d'inertie G est en translation horizontale dans sa glissière, parallèlement à Ox (Figure 2). Les deux tiges T et T' restent horizontales, parallèles à Ox . La position de ce coulisseau est repérée par la distance $\overrightarrow{OG} \cdot \vec{i} = d(t)$.

A l'extrémité C' de la tige T' est fixé un ressort sans masse, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 (Figure 2) ; l'autre extrémité du ressort est solidaire de la glissière. Ce ressort reste horizontal d'axe $C'x$.

La tige T est en liaison en son extrémité C avec un pendule simple.

- Le pendule simple est constitué d'une masse m_1 ponctuelle, située en A sur une tige sans masse ; cette barre est articulée en O (liaison pivot permettant une rotation autour de l'axe Oy). On note L_1 la distance OA . Le mouvement du pendule simple est caractérisé par l'angle orienté $\alpha(t) = (\vec{k}, \overrightarrow{OA})$ compté positivement dans le sens direct relativement à l'orientation du référentiel $Oxyz$.

- La liaison en C entre la tige T et le pendule simple (Figure 2) autorise le libre débattement du pendule et le maintien horizontal de la tige T ; la distance OB entre l'axe Ox et l'axe Cx de la tige T reste donc constante et égale à ℓ_1 .

Hypothèses générales

- Les points O, A, B, C, C' et G appartiennent tous au plan Oxz ;
- Toutes les liaisons et contacts seront supposés sans frottement ;
- On néglige les masses des éléments autres que la masse ponctuelle m_1 et la masse totale du coulisseau M .

Notations

Le temps est noté t ; soit $x(t)$ un paramètre du mouvement ; on note $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ les dérivées première et seconde par rapport au temps, x_0, \dot{x}_0 et \ddot{x}_0 les valeurs initiales au temps $t = 0$ du paramètre et de ses dérivées.

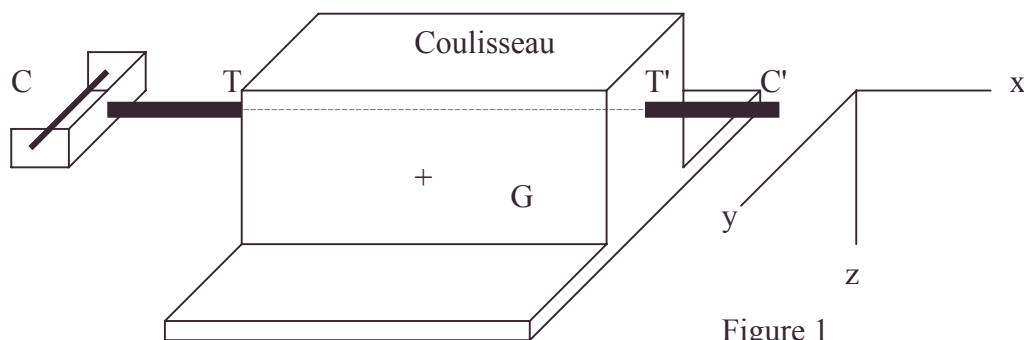


Figure 1

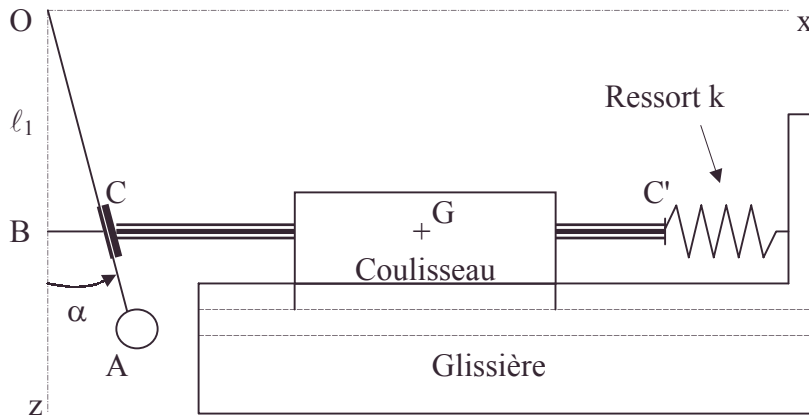


Figure 2

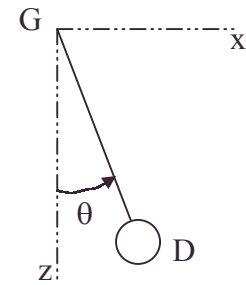


Figure 3

I. Première partie

Dans les cinq premières questions de cette première partie, on ne fait aucune hypothèse sur l'amplitude des mouvements.

A l'instant initial ($t = 0$), le pendule est au repos, vertical ($\alpha = 0$), la longueur du ressort est la longueur à vide l_0 (allongement nul) et la distance \overrightarrow{OG} est notée d_0 .

On pose : $d(t) = d_0 + x(t)$.

I.1. Etablir la relation entre x , ℓ_1 et α .

2. Exprimer dans le repère galiléen Oxyz la vitesse et l'accélération de la masse ponctuelle m_1 par rapport à ce même repère (en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$, et L_1).

3. Calculer dans le repère Oxyz au point O, le moment cinétique et sa dérivée par rapport au temps (moment dynamique) de la masse ponctuelle m_1 dans son mouvement par rapport à ce repère.

4. L'action en C de la tige T sur le pendule simple est une force notée \vec{R} . On note respectivement R_x et R_z les composantes de \vec{R} suivant \vec{i} et \vec{k} .

a. Préciser, en la justifiant, l'orientation de \vec{R} .

b. On isole le système constitué par le pendule simple (masse ponctuelle m_1 et tige OA) appliquer le théorème du moment cinétique en O, en projection sur \vec{j} .

c. En déduire l'expression de R_x en fonction de $m_1, L_1, \ell_1, g, \alpha$ et $\ddot{\alpha}$.

5. Le système étudié est à présent le coulisseau.

a. Appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{i} .

b. En déduire l'équation de mouvement du pendule simple, équation différentielle en α (ou des fonctions trigonométriques de α), $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$, où interviennent m_1, M, g, k, L_1 et ℓ_1 .

6. Dans cette question, on restreint l'étude au cas des petites oscillations du pendule simple (les termes en $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ sont des infiniment petits de même ordre).

A partir de l'équation de mouvement du pendule simple établie en **I.5.**, montrer que l'équation du mouvement du coulisseau s'écrit simplement :

$$\ddot{x} \left(m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2} + M \right) + x \left(\frac{m_1 L_1}{\ell_1^2} g + k \right) = 0.$$

II. Deuxième partie

Dans cette deuxième partie, on restreint l'étude au cas des hypothèses de **I.6.** (petites oscillations du pendule simple). De plus, une tige GD de masse négligeable est en

rotation en G autour de l'axe Gy (Figure 3) ; sur cette tige est fixée en D une masse ponctuelle m_2 . La distance GD est notée ℓ_2 . La position de la masse m_2 est caractérisée par l'angle orienté $\theta(t) = (\vec{k}, \overrightarrow{GD})$ compté positivement dans le sens direct relativement à l'orientation du référentiel Oxyz. Un moteur (non représenté) de masse et d'inertie négligeables applique à la tige GD un couple $C(t)$ variable tel que la vitesse de rotation θ soit constante. cette vitesse est notée Ω et l'on choisit θ_0 nul de telle façon que le mouvement de m_2 par rapport au coulisseau soit défini par $\theta = \Omega t$.

1. Exprimer dans le repère galiléen Oxyz la vitesse et l'accélération de la masse ponctuelle m_2 par rapport à ce même repère.

2. On a montré que – dans l'hypothèse des petites oscillations du pendule simple OA,
– en l'absence de la masse m_2 ,

l'application au coulisseau noté Σ du théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{i} conduisait à l'équation :

$$\sum (\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow \Sigma) . \vec{i} = M \vec{a}(G) . \vec{i} \Leftrightarrow \ddot{x} m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2} - x \left(\frac{m_1 L_1}{\ell_1^2} g + k \right) = M \ddot{x} ;$$

On considère le système Σ' constitué du coulisseau Σ et de la masse m_2 . Ecrire pour ce système le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{i} .

3. L'équation établie à la question précédente est une équation différentielle avec second membre. On s'intéresse à la solution générale de l'équation sans second membre.

a. Montrer qu'elle est de la forme : $x_g(t) = X_M \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

b. Déterminer ω_0 .

4. On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme : $x_p(t) = B \sin(\Omega t + \phi)$. On pose $A = \frac{m_2 \ell_2 \Omega^2}{M + m_2 + m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2}}$.

a. Déterminer B et ϕ en fonction de A, ω_0 et Ω . On prendra $B > 0$.

b. La distance L_1 est réglable. On désire pouvoir donner à ω_0 la valeur $\varepsilon \Omega$, ε étant fixé. Ecrire l'équation permettant de déterminer la distance L_1 pour que $\omega_0 = \varepsilon \Omega$.

c. Application numérique : calculer L_1 et B.

$\Omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$; $k = 10^5 \text{ N.m}^{-1}$; $\ell_1 = 0,1 \text{ m}$; $\ell_2 = 0,1 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$;

$\varepsilon = 0,1$; $M = 90 \text{ kg}$; $m_1 = 10 \text{ kg}$; $m_2 = 10 \text{ kg}$.

5. On ne s'intéresse qu'à la solution particulière : $x_p(t) = B \sin(\Omega t + \phi)$:

a. Calculer les énergies cinétique et potentielle du système complet constitué du coulisseau, du ressort, du pendule simple et de la masse m_2 en rotation par rapport au coulisseau ; on exprimera ces énergies E_c et E_p en fonction de B, M, m_1 , m_2 , L_1 , ℓ_1 , ℓ_2 , g, k, Ω et t.

Le zéro d'énergie potentielle est fixé à $z = 0$. On se placera dans le cas $\Omega > \omega_0$.

b. En déduire le couple $C(t)$ que doit fournir le moteur à la tige GD pour assurer une vitesse de rotation Ω constante.

CCP ; Durée 2h

Corrigé

I.1. $BC = x = \ell_1 \tan \alpha$.

• énergie cinétique, énergie potentielle, linéarisation, méthode complexe, oscillations forcées, théorème de la résultante dynamique

$$\begin{aligned}
 2. \overrightarrow{OA} \begin{vmatrix} L_1 \sin \alpha \\ 0 \\ -L_1 \cos \alpha \end{vmatrix} &\Rightarrow \overrightarrow{V_A} \begin{vmatrix} L_1 \dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \\ -L_1 \dot{\alpha} \sin \alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{a_A} \begin{vmatrix} L_1 (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 \\ -L_1 (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \end{vmatrix} \\
 3. \overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{OA} \wedge m_1 \overrightarrow{V_A} &= \begin{vmatrix} 0 \\ m_1 L_1^2 \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix} ; \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_0}}{dt} \right)_{Oxyz} = \begin{vmatrix} 0 \\ m_1 L_1^2 \ddot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

4.a. Par raison de symétrie, $R_y = 0$.

OC n'est pas constant au cours du mouvement ; pour que la liaison soit parfaite par exemple dans le repère lié au pendule, il faut $\overrightarrow{V_c} \cdot \overrightarrow{R} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{R}$ orthogonal à \overrightarrow{OA} , ainsi : $R_z = -R_x \tan \alpha$

b. Prenons le pendule simple comme système (qui n'est pas pour autant isolé mécaniquement).

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_0}}{dt} \right)_{Oxy} = \overrightarrow{OA} \wedge m_1 \vec{g} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{R} + \vec{\Gamma}_0 \text{ forces liaisons en O ;}$$

projetons sur \vec{j} ;

$$m_1 L_1^2 \ddot{\alpha} = -L_1 m_1 g \sin \alpha + \ell_1 R_x - \ell_1 R_z \tan \alpha + 0 \text{ (liaison parfaite en O).}$$

$$\text{c. Or, } R_z = -R_x \tan \alpha \Rightarrow R_x = \frac{\cos^2 \alpha}{\ell_1} (m_1 L_1^2 \ddot{\alpha} + m_1 L_1 g \sin \alpha).$$

$$5.a. M \left(\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} \right)_{Oxyz} = M \vec{g} + (-\vec{R}) + \vec{N}_{\text{glissière} \rightarrow \text{coulisseau}} + \vec{F}_{\text{ressort}} ;$$

Projetons sur \vec{i} : $M \ddot{x} = 0 - R_x + 0 - kx$.

$$\text{b. Remplaçons : } x = \ell_1 \tan \alpha \Rightarrow \dot{x} = \frac{\ell_1 \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\ell_1}{\cos^2 \alpha} (\ddot{\alpha} + 2 \dot{\alpha}^2 \tan \alpha), \text{ en}$$

remplaçant \ddot{x} et R_x vu I.4.c. ,

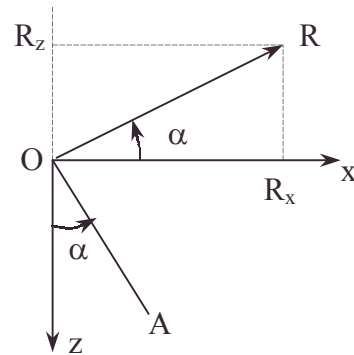
$$0 = \ddot{\alpha} \left(\frac{M \ell_1}{\cos^2 \alpha} + \frac{m_1 L_1^2}{\ell_1} \cos^2 \alpha \right) + 2M \ell_1 \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 + (k \ell_1 \tan \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\ell_1} m_1 L_1 g \sin \alpha)$$

6. Linéarisons $\tan \alpha = \alpha$; $\sin \alpha = \alpha$; $\cos \alpha = 1$; $x = \ell_1 \alpha \Rightarrow \ddot{x} = \ell_1 \ddot{\alpha}$; de plus, α étant supposé de l'ordre de $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$, α^2 est négligeable devant α supposé petit. (cf. oscillation sinusoïdale).

$$\ddot{x} \left(M + m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2} \right) + x \left(k + \frac{m_1 L_1}{\ell_1^2} g \right) = 0.$$

II.1. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD}$;

• moment cinétique, P.F.D., T.M.C.



$$\overrightarrow{OD} \begin{vmatrix} d_0 + x + \ell_2 \sin \theta \\ 0 \\ \ell_1 + \ell_2 \cos \theta \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{V_D} \begin{vmatrix} \dot{x} + \ell_2 \dot{\theta} \cos \theta = \dot{x} + \ell_2 \Omega \cos \theta \\ 0 \\ -\ell_2 \dot{\theta} \sin \theta = -\ell_2 \Omega \sin \theta \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{a_D} \begin{vmatrix} \ddot{x} - \ell_2 \Omega^2 \sin \theta \\ 0 \\ -\ell_2 \Omega^2 \cos \theta \end{vmatrix}$$

2. Pour le système Σ' (incluant le moteur et la tige GD), le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$M \left(\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} \right)_{Oxyz} + m_2 \left(\frac{d\overrightarrow{V_D}}{dt} \right)_{Oxyz} = \underbrace{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma'}}_{\text{autre que } m_2} + m_2 \vec{g} + \underbrace{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow m_2}}_{\text{autre que } \Sigma'}$$

Projetons sur \vec{i} :

$$M \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - \ell_2 \Omega^2 \sin \Omega t) = -R_x - kx + 0 + 0.$$

Exprimons R_x (cf. I.4.) en fonction de x ; vu $x = \ell_1 \alpha$ en linéarisant :

$$R_x = \frac{m_1}{\ell_1^2} (L_1^2 \ddot{x} + L_1 g x).$$

$$\text{Finalement, } \left(M + m_2 + m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2} \right) \ddot{x} + \left(k + m_1 \frac{L_1 g}{\ell_1^2} \right) x = m_2 \ell_2 \Omega^2 \sin \Omega t.$$

On est conforté par la formule de l'énoncé quand $m_2 = 0$.

3. L'équation sans second membre est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k + m_1 \frac{L_1 g}{\ell_1^2}}{M + m_2 + \frac{m_1 L_1^2}{\ell_1^2}}} \Rightarrow x_g = X_M \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

4. Utilisons la méthode complexe : l'équation complexe associée à II.2. est :

$\ddot{z} + \omega_0^2 z = A e^{j\Omega t}$ de solution particulière $z_p = \overline{X}_p e^{j\Omega t}$ avec $\overline{X}_p = B e^{j\phi}$ de sorte que la solution particulière réelle est $x_p = B \sin(\Omega t + \phi)$ ($B \in \mathbb{R}^+$ est imposé par l'énoncé).

$$\text{a. } \overline{X}_p (\omega_0^2 - \Omega^2) = A :$$

$$\text{si } \omega_0 > \Omega \quad B = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2} \text{ et } \phi = 0.$$

$$\text{Si } \omega_0 < \Omega ; B = \frac{A}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad \phi = \pi, \text{ c'est le cas de l'AN.}$$

$$\text{b. } \omega_0^2 = \varepsilon^2 \Omega^2 = \frac{k + m_1 \frac{L_1 g}{\ell_1^2}}{M + m_2 + \frac{m_1 L_1^2}{\ell_1^2}} \text{ d'où l'équation du 2}^{\text{ème}} \text{ degré en } L_1,$$

$$L_1^2 \varepsilon^2 \Omega^2 \frac{m_1}{\ell_1^2} - L_1 \frac{m_1 g}{\ell_1^2} + (\varepsilon^2 \Omega^2 (M + m_2) - k) = 0.$$

$$\text{c. } L_1 = 1 \text{ m (on rejette } L_1 < 0) ; B = 0,92 \cdot 10^{-3} \text{ m. } (\phi = \pi \text{ car } \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}).$$

5. Ne s'intéresser qu'à la solution particulière signifie que la solution générale de l'équation sans second membre a été atténuée par un amortissement non considéré jusqu'à présent et de valeur faible pour ne pas avoir à intervenir dans B.

• linéarisation, méthode complexe, théorème de la résultante dynamique

a. L'énergie cinétique totale $E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 V_A^2 + \frac{1}{2} m_2 V_D^2$.

On linéarise : $x = \ell \alpha$.

Or, $x_p = B \sin(\Omega t + \phi)$ avec $\phi = \pi$ soit $x_p = -B \sin \Omega t$,

et $\dot{x}_p = -\Omega B \cos \Omega t$.

avec $B = \frac{m_2 \ell_2 \Omega^2}{M + m_2 + m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2}} \frac{1}{\Omega^2 - \omega_0^2}$.

$$\vec{V}_D = \vec{V}_G + \ell_2 \Omega \vec{u}_\theta \Rightarrow V_D^2 = \dot{x}^2 + \ell_2^2 \Omega^2 + 2 \dot{x} \ell_2 \Omega \cos \Omega t.$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\left(M + m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2} + m_2 \right) \dot{x}^2 + 2 \ell_2 \Omega m_2 \dot{x} \cos \Omega t + m_2 \ell_2^2 \Omega^2 \right].$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\left(M + m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2} + m_2 \right) B^2 \Omega^2 \cos^2 \Omega t - \underline{2 \ell_2 \Omega^2 m_2 B \cos^2 \Omega t} + m_2 \ell_2^2 \Omega^2 \right].$$

L'énergie potentielle totale E_p :

$$E_p = \underbrace{-Mg\ell_1}_{\text{coulisseau}} - \underbrace{m_1 g L_1 \cos \alpha}_{\text{pendule } m_1} - \underbrace{m_2 g(\ell_1 + \ell_2 \cos \theta)}_{\text{pendule } m_2} + \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}_{\text{ressort}}.$$

Conservons les termes variables en $\cos^2 \Omega t$ comme dans E_c (soit conservons α^2 dans $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$).

$$E_p = -Mg\ell_1 - m_1 g \ell_1 - m_2 g \ell_1 + \frac{1}{2} m_1 g \frac{L_1^2}{\ell_1^2} x^2 + \frac{1}{2} k x^2 - \underline{m_2 g \ell_2 \cos \Omega t}.$$

$$E_p = -(Mg\ell_1 + m_1 g L_1 + m_2 g \ell_1) + \frac{1}{2} m_1 g \frac{L_1^2}{\ell_1^2} B^2 \sin^2 \Omega t + \frac{1}{2} k B^2 \sin^2 \Omega t - m_2 g \ell_2 \cos \Omega t.$$

b. $E_c + E_p = \mathcal{E}_{\text{moteur}}$ et en dérivant : $\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = P_{\text{moteur}} = C\Omega$. ①

Théorème de la puissance cinétique.

Or, II.2. nous permet l'écriture après multiplication par $dx = \dot{x} dt$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(M + m_2 + m_1 \frac{L_1^2}{\ell_1^2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(k + m_1 \frac{L_1 g}{\ell_1^2} \right) x^2 \right] = m_2 \ell_2 \dot{x} \Omega^2 \sin \Omega t \quad \text{②},$$

$$= -m_2 \ell_2 B \Omega^3 \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{1}{2} m_2 \ell_2 B \Omega^2 \frac{d}{dt} (\cos^2 \Omega t).$$

$$\text{①} - \text{②} \Rightarrow C\Omega = \frac{d}{dt} \left[-\frac{1}{2} \ell_2 \Omega^2 m_2 B \cos^2 \Omega t - m_2 g \ell_2 \cos \Omega t \right]$$

d'où $C = m_2 \ell_2 \sin \Omega t (g + \frac{1}{2} B \Omega^2 \cos \Omega t)$. Il y a 2 pulsations d'excitation : Ω et 2Ω

nécessaires pour une vitesse de rotation Ω constante.

2.1.3. Traîneau

Un traîneau à glace comporte un patin à couteau A et deux patins à sabots B et C, disposés comme l'indiquent les figures ci-contre.

• énergie cinétique, énergie potentielle, théorème de la puissance cinétique

Le traîneau se déplace sur une surface plane et horizontale (lac gelé). Les patins B et C assurent un contact sans frottement avec la glace.

Le patin à couteau A réalise la liaison suivante : la vitesse du point A est assujettie à être dirigée suivant Ax.

Cette liaison est parfaite, c'est-à-dire qu'elle ne s'accompagne d'aucune dissipation d'énergie.

Soient m la masse du traîneau, I son moment d'inertie par rapport à l'axe vertical Gz passant par le centre d'inertie G , et $\ell = GA$.

On étudie le mouvement du traîneau lancé à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale quelconque compatible avec les liaisons.

Pour cela on utilisera un repère fixe OXY du plan, l'angle $\alpha = (OX, Gx)$, et les composantes u et v de la vitesse absolue de G sur les axes Gx et Gy , constituant un repère de projection.

1. Ecrire la relation de liaison en A, ainsi que les équations permettant de déterminer le mouvement du traîneau. Préciser la direction de la composante horizontale de la réaction du plan en A. Soit \vec{R} cette composante.

2. Donner une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une relation entre u , v et $\dot{\alpha}$ et indiquer si possible comment la déduire des équations précédentes.

3. Calculer $\ddot{\alpha}$ en fonction de u et $\dot{\alpha}$, puis montrer que $u(t)$ vérifie une équation différentielle du second ordre qu'on peut écrire : $\ddot{u} + \frac{2}{L} u \dot{u} = 0$.

AN : le traîneau est une plaque homogène de côtés $c = 2$ m, $b = 1$ m, de masse $m = 100$ kg. On néglige la masse des patins et on prend $\ell = 0,8$ m. Calculer I et L .

4. Intégrer une première fois l'équation différentielle en $u(t)$: on posera $a^2 = u_0^2 + L \dot{u}_0$ et on montrera que $a^2 \geq u_0^2$.

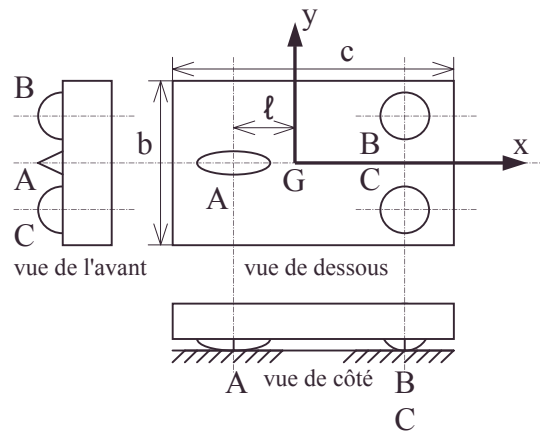
5. Intégrer une seconde fois cette équation, de manière à obtenir la fonction $t = f(u)$ dont on tracera la courbe représentative.

6. Montrer que quand t tend vers l'infini, u tend vers une limite finie positive, et que v et $\dot{\alpha}$ tendent vers zéro. Montrer que v et $\dot{\alpha}$ gardent un signe constant au cours du mouvement. Calculer la limite de l'énergie cinétique du traîneau lorsque t tend vers l'infini, en fonction de u_0 , v_0 et $\dot{\alpha}_0$.

7. La courbe $t = f(u)$ possède un point d'inflexion. Montrer qu'en ce point $u = 0$ et indiquer à quelle condition sur la vitesse initiale on passe effectivement par ce point.

Montrer que α tend vers une limite finie lorsque t tend vers l'infini, et calculer cette limite dans le cas particulier $u_0 = 0$.

8. A l'aide des résultats précédents, décrire qualitativement le mouvement du traîneau. Ce traîneau peut également être considéré comme le modèle d'un avion qui atterrit avec la roue avant rigidement liée dans l'axe du fuselage. Que risque-t-il de se passer ?



Autres concours ; Durée 2h

- énergie cinétique, graphe, intégrale première du mouvement, moment d'inertie, traîneau

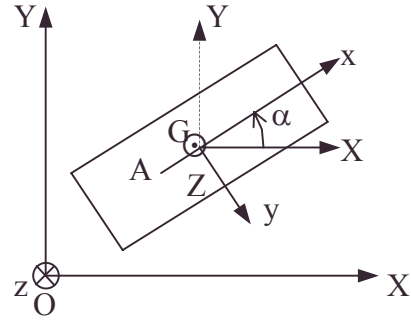
Corrigé

1. Vue de dessus (cf. vue de dessous de l'énoncé).

a. $\vec{\Omega}(S/OXYZ) = \dot{\alpha} \vec{Z} = -\dot{\alpha} \vec{z}$;

$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GA}$; projetons dans Gxyz :

$$\vec{V}_A = \begin{vmatrix} u \\ v + \ell \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{Gxyz} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{vmatrix}_{Gxyz} \wedge \begin{vmatrix} -\ell \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{Gxyz} = \begin{vmatrix} u \\ v + \ell \dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}_{Gxyz}$$



La liaison est telle que \vec{V}_A et \vec{Gx} sont parallèles $\Rightarrow v + \ell \dot{\alpha} = 0$.

b.α. Analyse des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$; $\vec{R}_C = R_C \vec{Z}$; $\vec{R}_B = R_B \vec{Z}$; $\vec{R}_A = R'_A \vec{Z} + \vec{R}$.

β. Liaison parfaite en A : $P_A = \vec{R}_A \vec{V}_A = 0 \Rightarrow \vec{R} \perp \vec{Gx}$ soit $\vec{R} // \vec{Gy}$.

γ. Théorème du mouvement du centre de masse :

$$\left[m \frac{d\vec{V}_G}{dt} \right]_{OXYZ} = \vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_C ; \text{ or } \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt} \right)_{OXYZ} = \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt} \right)_{Gxyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_G.$$

Soient les 3 équations : $m(u + \dot{\alpha} v) = 0$; ①

$m(\dot{v} - \dot{\alpha} u) = R$; ②

$0 = -mg + R_C + R_B + R'_A$. ③

δ. Théorème du moment cinétique : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{Gxyz} = \vec{GA} \wedge \vec{R}_A + \vec{0}$;

$-I\ddot{\alpha} = -\ell R \Rightarrow I\ddot{\alpha} = \ell R$. ④

2.a. L'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement pour l'ensemble non dissipatif terre-traîneau. Le mouvement étant horizontal, l'énergie potentielle est constante.

$E_C = \text{constante}$ s'écrit : $\frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m(u^2 + v^2) = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2} m(u_0^2 + v_0^2)$. ⑤

b. Eliminons R entre ② et ④ : $I\ddot{\alpha} = \ell m(\dot{v} - \dot{\alpha} u)$;

multiplions par $\dot{\alpha} dt$: $I\ddot{\alpha} \dot{\alpha} dt = \ell m \dot{v} \dot{\alpha} dt - \ell m \dot{\alpha}^2 u dt$;

remplaçons $\ell \dot{\alpha} = -v$ vu ① et $\ell \dot{\alpha}^2 = -v \dot{\alpha} = \dot{u}$ vu ① ;

$$\left[\frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 \right]_0^t = -\int_0^t m \dot{v} v dt - \int_0^t m u \dot{u} dt ;$$

on retrouve l'intégrale première $\frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 = -\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m u^2 + \text{cste}$.

3.a. Afin d'éliminer v, remplaçons dans ⑤ :

$v = -\ell \dot{\alpha}$, on obtient : $\frac{1}{2} (I + m\ell^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m u^2 = \text{cste}$.

Par dérivation, $(I + m\ell^2)\ddot{\alpha} + m\ell\dot{u} = 0$ ⑤'; or $\dot{u} = \ell\dot{\alpha}^2$; il reste : $\ddot{\alpha} = -\frac{m\ell u}{I + m\ell^2}\dot{\alpha}$.

b. $\dot{u} = \ell\dot{\alpha}^2 \Rightarrow \ddot{u} = 2\ell\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$; l'élimination de $\ddot{\alpha}\dot{\alpha}$ dans ⑤' donne :

$$\ddot{u} + 2\frac{u\dot{u}}{L} = 0 \text{ avec } L = \frac{I + m\ell^2}{m\ell}.$$

c. $I = \sigma \iint (x^2 + y^2) dx dy = \sigma \frac{bc}{12} (b^2 + c^2) = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$; AN : $I = 41,67 \text{ kg.m}^2$.

d. $L = 1,321 \text{ m}$.

4.a. Intégrons l'équation de l'énoncé : $\dot{u} + \frac{u^2}{L} = \dot{u}_0 + \frac{u_0^2}{L} = \frac{a^2}{L}$.

b. $\dot{u} = \ell\dot{\alpha}^2 > 0 \Rightarrow \dot{u}_0 > 0 \Rightarrow u_0^2 + \dot{u}_0 L > u_0^2 \Rightarrow a^2 > u_0^2$.

5.a. L'équation s'écrit : $\frac{du}{dt} = \frac{a^2 - u^2}{L}$ ou $\frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{dt}{L}$,

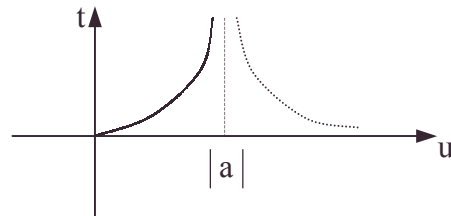
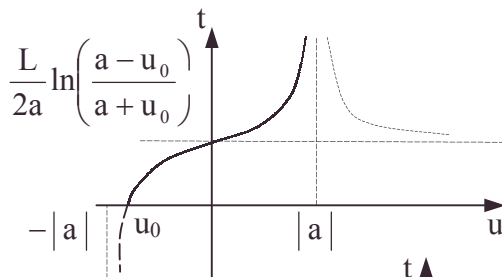
$$\text{ou } \frac{1}{2a} \left[\frac{du}{a-u} + \frac{du}{a+u} \right] = \frac{dt}{L} \Rightarrow t = \frac{L}{2a} \ln \left[\frac{a+u}{a+u_0} \cdot \frac{a-u_0}{a-u} \right].$$

$$\text{Autre expression : } t = \frac{L}{a} \left[\operatorname{argtanh} \frac{u}{a} - \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right].$$

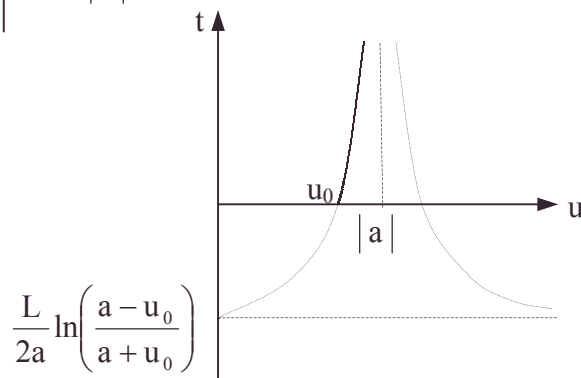
b. u_0 est la valeur de u la plus basse ; $|a| > |u_0|$; $u_\infty = |a|$: A est à l'arrière.

α. $u_0 < 0$:

β. $u_0 = 0$:



γ. $u_0 > 0$:



On n'a conservé que la partie $t \in [0; +\infty[$ obtenue par continuité après $t = 0$; $u = u_0$.

6.a. $t \rightarrow \infty$; $u \rightarrow |a|$ vu les graphes.

b. $v^2 = \ell^2 \dot{\alpha}^2 = \ell \dot{u} = \frac{\ell}{L} (a^2 - u^2) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} v^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell}{L} (a^2 - u^2) = 0$.

$$\text{c. } \dot{\alpha}^2 = \frac{\dot{u}}{\ell} = \frac{1}{\ell L} (a^2 - u^2) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\alpha}^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell L} (a^2 - u^2) = 0.$$

Remarque : $\dot{u} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

d. Dans l'intervalle où t varie continûment de 0 à $+\infty$, on a : $-|a| < u_0 \leq u < |a|$,
(cf. graphes). On a donc $a^2 - u^2 > 0$ et donc $v^2 \neq 0$ et $\dot{\alpha}^2 \neq 0$ pour $t \neq +\infty$; or v et $\dot{\alpha}$
étant continues (comme $\dot{u}^{\frac{1}{2}}$) changent de signe en s'annulant, ce qui est impossible :
 v et $\dot{\alpha}$ gardent un signe constant.

$$\text{e. } E_c = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2} m(u_0^2 + v_0^2) \quad \forall t \text{ et en particulier si } t \rightarrow +\infty.$$

$$7.\text{a. } \frac{d^2 t}{du^2} = \frac{2uL}{(a^2 - u^2)^2} ; \text{ on a } \frac{d^2 t}{du^2} = 0 \text{ pour } u = 0.$$

b. $t \geq 0$ et $u = 0$ impliquent, vu les courbes $u_0 \leq 0$.

$$\text{c. } \frac{at}{L} + \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} = \operatorname{argtanh} \frac{u}{a} \Rightarrow u = \tanh \left[\frac{at}{L} + \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right] ;$$

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{\dot{u}}{\ell} = \frac{a^2 - u^2}{\ell L} = \frac{a^2}{\ell L} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{at}{L} + \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right) \right] = \frac{a^2}{\ell L \cosh^2 \left[\frac{at}{L} + \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right]} ;$$

$$\text{Choisissons } \dot{\alpha} = + \frac{a}{\sqrt{\ell L} \cosh \left[\frac{at}{L} + \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right]} ;$$

$$\text{or } \int \frac{dt}{\cosh t} = 2 \operatorname{argtanh} e^t + \text{cste}$$

$$\alpha = 2 \sqrt{\frac{L}{\ell}} \left[\operatorname{argtanh} \exp \left(\frac{at}{L} + \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right) - \operatorname{argtanh} \exp \left(\operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right) \right] ;$$

$$t \rightarrow \infty ; \exp \left(\frac{at}{L} + \operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right) \rightarrow \infty ; \operatorname{argtanh} \infty = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = 2 \sqrt{\frac{L}{\ell}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{argtanh} \exp \left(\operatorname{argtanh} \frac{u_0}{a} \right) \right), \text{ fini si } u_0 \neq a.$$

$$\text{d. } u_0 = 0 ; \arctan 1 = \frac{\pi}{4} ; \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{\ell}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I + m\ell^2}{m\ell^2}} ; \text{AN : } \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = 2,018 \text{ rad.}$$

8.a.α. $u_0 = 0$; le mouvement tend vers un mouvement de translation ($\dot{\alpha}_\infty = 0$)
rectiligne uniforme ($u_\infty = a = \sqrt{u_0^2 + \dot{u}_0 L}$, $v_\infty = 0$) dans la direction $\alpha_\infty = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{\ell}}$.

$$\text{β. } u_0 > 0, v = \sqrt{\frac{\ell}{L} (a^2 - u^2)}, \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{\ell L} (a^2 - u^2) \text{ sont des fonctions décroissantes ; le}$$

traîneau tourne et dérape mais de moins en moins et tend à un mouvement de translation plus rapidement (avec une variation de u moins grande que précédemment).

γ. $u_0 < 0$; le traîneau part en arrière, tourne sur lui-même pour repartir à $u = 0$ comme précédemment.

b. L'avion comme le traîneau ne s'arrêtera pas ($E_C = \text{cste}$). Pour l'avion, A est à l'avant, $u_0 < 0$, l'avion fera un tête-à-queue pour retrouver $u > 0$ et avancera à l'envers de l'ordinaire, ce qui est peu pratique pour se diriger à vue : c'est un modèle à éviter.

2.1.4. Régulateur de Watt

Dans ce problème, on se propose d'étudier le mouvement d'un système mécanique symétrique en forme de losange déformable, constitué de plusieurs solides en rotation autour d'un axe fixe de symétrie. Le dispositif, connu sous le nom de "régulateur de Watt", peut être utilisé pour asservir la vitesse de rotation d'un arbre sur lequel il est accouplé. C'est cette utilisation à des fins de régulation qu'on se propose de discuter.

L'étude est divisée en quatre parties (de I à IV). Les questions III.2., III.3. et toute la partie IV sont indépendantes du début du problème.

L'espace fixe est repéré par le trièdre orthonormé : $T_1 \equiv \{Ox_1y_1z_1\}$

Les vecteurs unitaires des axes Ox_1 , Oy_1 et Oz_1 sont respectivement \vec{i}_1, \vec{j}_1 et \vec{k}_1 ; le vecteur \vec{i}_1 est orienté suivant la verticale, dirigé vers le bas (figure 1). L'accélération du champ de la pesanteur, uniforme, est $\vec{g} = g\vec{i}_1$, g étant une constante positive.

On introduit le repère $T \equiv \{Oxyz\}$ dont \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires respectifs de Ox , Oy et Oz . Ce repère est en rotation par rapport au trièdre T_1 de même origine O ; la rotation est définie par l'axe de rotation Ox_1 (les vecteurs \vec{i} et \vec{i}_1 , de même que les axes fixes Ox et Ox_1 , restent confondus dans tout le cours du mouvement), et par le vecteur vitesse instantanée de rotation de T par rapport à T_1 , qui peut dépendre du temps t : $\vec{\omega}(T/T_1) = -\Omega(t)\vec{i}$; $\Omega(t) > 0$.

On définit le système mécanique (S) dans le repère T . Ce système est composé de :

- Un dispositif articulé en forme de losange OAEBO dont on ne retient que la représentation schématisée par quatre tiges identiques (OA, AE, OB et BE), solides cylindriques homogènes de section négligeable ; chaque tige est caractérisée par sa longueur ℓ et sa masse m . Les points A et B se déplacent dans le plan xOy . Le point E se déplace le long de l'axe Ox .
- Deux sphères solides identiques, fixées respectivement aux points d'articulation A et B, de même masse m_1 et de rayon négligeable.

• *régulation, tête-à-queue*

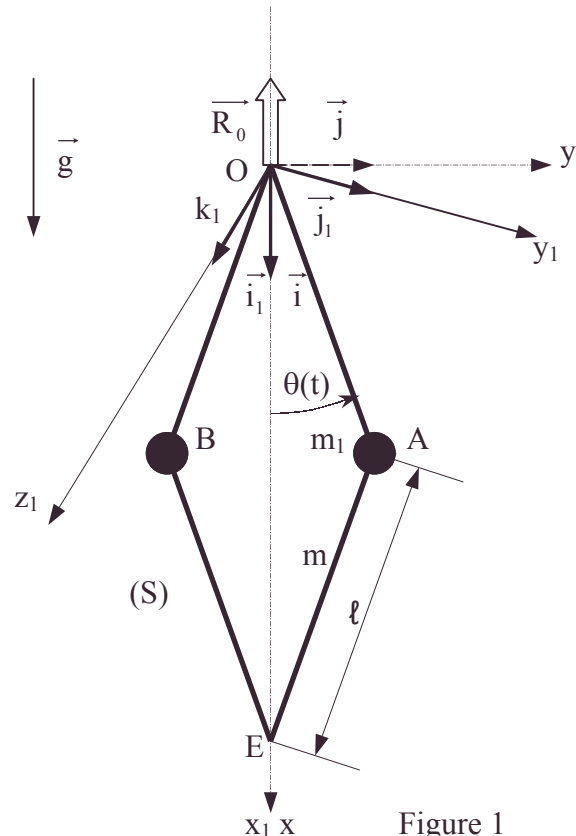


Figure 1

L'état du système (S) dans le repère T est défini en fonction du temps t par l'angle $\theta(t) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ orienté par \vec{k} . La liaison en O est réalisée de telle sorte que le point E peut indifféremment se déplacer vers les x positifs ou les x négatifs.

Les liaisons en A, E, O et B sont telles que θ peut prendre des valeurs positives ou négatives. Toutes ces liaisons sont considérées comme des liaisons sans frottement.

Le système (S) est soumis aux forces extérieures suivantes :

- La gravité, déjà mentionnée ;
- Au point O, une force $\overrightarrow{R_0}$ qu'on admettra colinéaire à \vec{i} , et un couple inconnu $\Gamma(t)$. \vec{i} . Le couple $\Gamma(t)$, qu'on ne demande pas de déterminer, impose, dans les trois dernières parties du problème, la vitesse de rotation $\Omega(t)$;
- L'action de liaison en E, assimilée à une force unique $\overrightarrow{R_E}$.

I. Dans cette partie seulement, on suppose que le vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\omega}(T/T_1)$ est nul : $\Omega = 0$; le trièdre T, fixe, est adopté comme trièdre repère de l'espace fixe.

1. Quelle information relative à l'action de liaison $\overrightarrow{R_E}$ peut-on tirer du fait du glissement sans frottement de l'articulation E le long de l'axe Ox ?

2. Calculer en fonction des données (\vec{i} , ℓ , θ et ses dérivées) l'accélération $\vec{a}_T(G)$, définie dans le repère T, du centre d'inertie G du système (S).

3. En déduire, par application du principe fondamental de la dynamique, que l'action de liaison $\overrightarrow{R_E}$ est nulle. Calculer $\overrightarrow{R_0}$ en fonction des données (\vec{i} , ℓ , g , m , m_1 , θ et ses dérivées).

4. Calculer les énergies cinétiques respectives de la tige OA, de la tige AE et celle de la sphère placée en A. (En ce qui concerne les tiges, il est commode de considérer leur décomposition en éléments massiques, puis d'intégrer). Vérifier que l'énergie cinétique

du système (S) s'exprime par : $E_c(S) = \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{4}{3} + 4 \sin^2 \theta \right] m + 2m_1$.

5. Formuler, par application du théorème de l'énergie cinétique, une intégrale première du mouvement sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre en θ . On adopte comme conditions initiales à l'instant $t = 0$: $\theta(0) = \theta_0$; $\dot{\theta}(0) = 0$

6. Montrer que, si on néglige la masse m des quatre tiges, le système obéit à la même équation de mouvement qu'un pendule simple de longueur ℓ .

II. Dans toute la suite du problème, on prend en compte la rotation $\vec{\omega}(T/T_1)$, de sorte que le repère T n'est plus galiléen. La suite de l'étude consiste à évaluer comment les résultats de la partie I sont modifiés par la rotation. On continuera à exprimer toutes les quantités relativement au repère T.

Dans cette partie, on impose que la vitesse de rotation soit constante : $\Omega(t) = \text{cte} = \Omega$.

On rappelle que l'expression du principe fondamental de la dynamique dans le repère non galiléen T conduit à adjoindre aux termes qui correspondent aux forces extérieures appliquées à toute partie élémentaire de masse dm , de centre d'inertie M, du système (S), deux termes de forces appelés :

- L'un, terme de force d'entraînement, égal à :

$$-\left(\frac{d\vec{\omega}(T/T_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}(T/T_1) \wedge \left(\vec{\omega}(T/T_1) \wedge \overrightarrow{OM} \right) \right) dm$$

- L'autre, terme de force de Coriolis, égal à : $-2\left(\vec{\omega}(T/T_1) \wedge \vec{V}_T(M)\right) dm$,

où $\vec{V}_T(M)$ est la vitesse de M relativement au repère T.

1. Montrer que la résultante globale des forces d'entraînement appliquée au système (S) est nulle. Montrer que la résultante globale des forces de Coriolis appliquées au système (S) est nulle. En déduire que la force \vec{R}_E est toujours nulle.

2.a. Montrer que, pour l'élément de masse dm de (S), la variation élémentaire, pendant un intervalle de temps dt , de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}dmV_T^2(M)$ définie relativement au repère T, est égale au travail élémentaire effectué dans le repère T par les forces de gravité, les forces intérieures au système (S) et les forces d'entraînement.

b. Montrer que le travail de toutes les forces intérieures au système (S) est nul.

c. Montrer que, pour le système (S), la variation de l'énergie cinétique définie relativement au repère T entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme du travail effectué dans le repère T par les forces de gravité et les forces d'entraînement.

3. Calculer le travail effectué dans le repère T entre les instants t_1 et t_2 par les forces d'entraînement appliquées à la tige OA. Calculer le travail défini de la même manière pour la sphère de masse m_1 placée en A. Montrer que le travail des forces d'entraînement appliquées à la tige AE est égal à celui qui correspond à la tige OA. Exprimer le travail total d'entraînement entre les instants t_1 et t_2 pour le système (S). [Dans cette question, on pourra exploiter utilement les propriétés de symétrie de (S)].

4. En déduire une intégrale première du mouvement de (S) sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre en θ . On adopte toujours comme conditions initiales à l'instant $t = 0$: $\theta(0) = \theta_0$; $\dot{\theta}(0) = 0$.

III. Comme dans la partie II., on prend en compte la rotation, de vitesse angulaire Ω , que l'on considère comme constante. On suppose en outre, que la masse m de chaque tige est petite par rapport à la masse m_1 de chaque sphère, et peut être négligée ($m = 0$).

1. Dériver par rapport au temps l'équation différentielle obtenue en II.4. et mettre le résultat sous la forme : $\dot{\theta}.F(\theta, \ddot{\theta}) = 0$, dans laquelle $F(\theta, \ddot{\theta}) = \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2 \cos \theta\right) \sin \theta$.

2. On admettra, sans chercher à le justifier ici, que le mouvement du système (S) est régi par l'équation : $F(\theta, \ddot{\theta}) = 0$.

On suppose, pour cette question seulement, que l'angle θ exprimé en radians est petit par rapport à 1. En se limitant à un développement en série de Taylor limité à l'ordre un par rapport à θ , établir une équation différentielle approchée pour θ que l'on intégrera en prenant les mêmes conditions initiales que précédemment : $\theta(0) = \theta_0$; $\dot{\theta}(0) = 0$.

Quelle condition doit satisfaire le paramètre $\frac{\Omega^2 \ell}{g}$ pour que l'angle θ reste petit ?

Application numérique : on donne $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ et $\ell = 0,25 \text{ m}$. Calculer la vitesse angulaire Ω critique au-delà de laquelle cette condition n'est plus satisfaite.

3. On suppose dans cette question que $\frac{\Omega^2 \ell}{g}$ est supérieur à 1. Soit θ_e un angle compris

entre 0 et $\pi/2$ tel que $\cos \theta_e = \frac{g}{\ell \Omega^2}$; en supposant que $\theta - \theta_e$ est petit par rapport à 1, établir l'expression de $\theta - \theta_e$ en fonction du temps.

IV. Dans cette partie, on prend en compte les variations de la vitesse de rotation $\Omega(t)$ qui n'est plus constante en fonction du temps. On suppose toujours $m = 0$. La vitesse de rotation satisfait à l'équation différentielle [1] : $\dot{\Omega} = K(\cos\theta - \cos\theta_p)$ dans laquelle K est une constante positive et $\theta_p \neq 0$ un angle compris entre 0 et $\pi/4$.

En se limitant à de petites variations de Ω , on admettra que l'équation différentielle établie pour θ en **III.2.** est encore satisfaite avec une approximation acceptable :

$F(\theta, \ddot{\theta}) = 0$; on considère maintenant que, dans cette équation, Ω dépend du temps.

1. Déterminer, en fonction des données (g , ℓ , θ_p), la vitesse de rotation Ω_p correspondant au fonctionnement non perturbé, c'est-à-dire tel que : $\dot{\Omega} = 0$; $\ddot{\theta} = 0$.

2. Discuter qualitativement l'utilisation du système (S) pour réguler la vitesse Ω .

3. On suppose que $\theta - \theta_p = \delta\theta$ est petit par rapport à 1. On suppose aussi que $\frac{\Omega - \Omega_p}{\Omega_p} = \alpha$ est petit par rapport à un. A l'aide de développements de Taylor limités à l'ordre un par rapport aux variables α et $\delta\theta$, établir l'équation différentielle linéaire du 3^e ordre satisfaite par α .

4. Montrer que cette équation admet trois solutions $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$, $e^{r_3 t}$, pour lesquelles r_1 est un nombre réel négatif, et r_2 et r_3 deux nombres complexes conjugués. Montrer que la partie réelle de r_2 et r_3 est positive. Qu'en conclut-on pour le fonctionnement du système (S) ?

CCP ; Durée 3h

Corrigé

I.1. La liaison y est parfaite et assurée par une force unique :

$$\mathcal{P} \left(\overrightarrow{R_E} / \overrightarrow{T} \right) = \overrightarrow{R_E} \cdot \overrightarrow{V_E} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{R_E} \perp \vec{i}.$$

2. G est le centre du losange : $\overrightarrow{OG} = \ell \cos\theta \vec{i}$; $\vec{V}(G/T) = -\ell \dot{\theta} \sin\theta \vec{i}$.

$$\vec{a}_T(G) = \vec{a}(G/T) = -\ell \left(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta \right) \vec{i}.$$

3.a. Le théorème du centre de masse permet :

$$(4m + 2m_1) \vec{a}_T(G) = (4m + 2m_1) \vec{g} + \overrightarrow{R_0} + \overrightarrow{R_E}.$$

Multiplions par $\overrightarrow{R_E}$, on a : $0 = 0 + 0 + R_E^2 \Rightarrow \overrightarrow{R_E} = \vec{0}$.

$$\text{b. } \overrightarrow{R_0} = (4m + 2m_1) (\vec{a}_T(G) - \vec{g}) \Rightarrow \overrightarrow{R_0} = -(4m + 2m_1) (\ell \ddot{\theta} \sin\theta + \ell \dot{\theta}^2 \cos\theta + g) \vec{i}.$$

$$\text{4.a. } J_{Oz} = \int_0^\ell \lambda \xi^2 d\xi = \frac{\lambda \ell^3}{3} = \frac{m \ell^2}{3} ; E_c^{OA} = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{3} \dot{\theta}^2 \text{ (ici } \Omega = 0).$$

$$\text{b. } E_c^{AE} = \frac{m}{2} \overrightarrow{V_{G_1}}^2 + \frac{1}{2} J_{G_1Z} \dot{\theta}^2 ; G_1 \text{ centre d'inertie de AE.}$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{3\ell}{2} \cos\theta \vec{i} + \frac{\ell}{2} \sin\theta \vec{j} ; \overrightarrow{V_{G_1}} = -\frac{3\ell}{2} \sin\theta \dot{\theta} \vec{i} + \frac{\ell}{2} \cos\theta \dot{\theta} \vec{j}.$$

$$E_c^{AE} = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 (2 \sin^2 \theta + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{12} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 (2 \sin^2 \theta + \frac{1}{3}).$$

• développement au premier ordre ou plus, instabilité

$$\text{c. } E_c^A = \frac{1}{2} m_1 \overrightarrow{V_A}^2 \text{ avec } V_A^2 = \ell^2 \dot{\theta}^2 ; E_c^A = \frac{1}{2} m_1 \ell^2 \dot{\theta}^2 .$$

$$\text{d. } E_c(S) = 2E_c^{OA} + 2E_c^{AE} + 2E_c^{SA} = \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{2m}{3} + 4m \sin^2 \theta + \frac{2}{3} m + 2m_1 \right) ;$$

$$E_c(S) = \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \left[\left(\frac{4}{3} + 4 \sin^2 \theta \right) m + 2m_1 \right] .$$

$$\text{5. } dE_c = d\mathcal{E}_{\text{poids}} + \underbrace{d\mathcal{E}_{\text{liaison}}}_{=0} = -dE_p \Rightarrow E_c + E_p = \text{cste} .$$

car liaison parfaite

$$E_p = 2E_p(OA) + 2E_p(AE) + 2E_p(A) = -2m \frac{\ell g}{2} \cos \theta - 2m \left(\frac{3}{2} \ell g \cos \theta \right) - 2m_1 \ell g \cos \theta .$$

$$E_p = -(4m + 2m_1) g \ell \cos \theta .$$

$$\frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \left[\left(\frac{4}{3} + 4 \sin^2 \theta \right) m + 2m_1 \right] - (4m + 2m_1) g \ell \cos \theta = -(4m + 2m_1) g \ell \cos \theta_0 + 0 ,$$

Equation différentielle du premier ordre en θ .

6. Avec $4m \ll 2m_1$, en ne retenant que les termes d'ordre 2, l'équation devient :

$$\ell^2 \dot{\theta}^2 m_1 + m_1 g \ell \theta^2 = \text{cste} .$$

Dérivons : $2m_1 \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + 2m_1 g \ell \theta \dot{\theta} = 0$; on retrouve bien la même équation de mouvement qu'un pendule simple de masse m_1 et longueur ℓ : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$.

II. $\Omega = \Omega_0$.

1.a. L'expression donnée par l'énoncé s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{\text{entraînement}}^{\text{inertie}} = - \int_S \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \, dm - \int_S \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \, dm ;$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{entraînement}}^{\text{inertie}} = - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \int_S \overrightarrow{OM} \, dm - \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \int_S \overrightarrow{OM} \, dm \right) ;$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{entraînement}}^{\text{inertie}} = - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (4m + 2m_1) \overrightarrow{OG} - \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge (4m + 2m_1) \overrightarrow{OG} \right) .$$

$$\text{Or } \vec{\omega} // \overrightarrow{OG} // \vec{i} ; \frac{d\vec{\omega}}{dt} // \vec{i} // \overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{F}_{\text{entraînement}}^{\text{inertie}} = \vec{0} .$$

$$\text{b. } \vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2 \int_S \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r} \right) dm = -2 \vec{\omega} \wedge \int_S \overrightarrow{V_r} dm = -2 \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_T}(G) (4m + 2m_1) ;$$

$$\overrightarrow{OG} // \vec{i} // \vec{\omega} \Rightarrow \overrightarrow{V_T}(G) // \vec{\omega} \Rightarrow \vec{F}_{\text{Coriolis}} = \vec{0} .$$

c. Appliquons le théorème du centre de masse :

$$(4m + 2m_1) \overrightarrow{a_T}(G) = (4m + 2m_1) \vec{g} + \overrightarrow{R_E} + \overrightarrow{R_0} + \overrightarrow{F}_{\text{inertie}} = \vec{0} .$$

C'est la même équation qu'en I.3.a. et en multipliant par $\overrightarrow{R_E}$ vu $\overrightarrow{R_E} \perp \vec{i}$, on obtient :

$$\overrightarrow{R_E} = \vec{0} .$$

2.a. Ecrivons pour un point matériel M de masse dm le principe fondamental :

$$\overrightarrow{a_T}(M) dm = \vec{g} dm + d\overrightarrow{F}_{\text{int}} + d\overrightarrow{F}_{\text{entraînement}} + d\overrightarrow{F}_{\text{Coriolis}} ; \text{ multiplions par } d\overrightarrow{OM} :$$

$$\overrightarrow{a_T} \cdot \overrightarrow{V_T} dm dt = \vec{g} dm d\overrightarrow{OM} + d\overrightarrow{F}_{\text{int}} d\overrightarrow{OM} + d\overrightarrow{F}_{\text{entraînement}} d\overrightarrow{OM} + d\overrightarrow{F}_{\text{Coriolis}} d\overrightarrow{OM} ;$$

$$d\left(\frac{1}{2}dmV_T^2\right) = d\mathcal{E}_{T\text{gravité}} + d\mathcal{E}_{T\text{int}} + d\mathcal{E}_{T\text{entraînement}} - \underbrace{2(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_T) \cdot \vec{V}_T}_0 dt dm.$$

$$\text{b. } \mathcal{E}_{T\text{int}} = \int d\mathcal{E}_{T\text{int}} = \sum_i (\mathcal{E}_{\text{int}} + \mathcal{E}_{T_i \text{ liaison}}) = 0 + 0 = 0.$$

c. Intégrons a. sur dm et dt ;

$$E_{c_T}(t_2) - E_{c_T}(t_1) = \mathcal{E}_{T\text{gravité}} + 0 + \mathcal{E}_{T\text{entraînement}}.$$

$$\text{3.a. } d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{OA}} = -\int_{\text{OA}} \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} \right) d\vec{OM} dm - \left[\int_{\text{OA}} (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})) \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_T dm \right] dt.$$

$$\text{ici, } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} ; \vec{\omega} = -\Omega \vec{i} ; \vec{OM} = r \vec{u}_r ; \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_T = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta (M \in \text{tige OA}).$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{OM} = -\Omega r \sin \theta \vec{k} ; \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = -\Omega^2 r \sin \theta \vec{j} ;$$

$$(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})) \cdot \vec{V}_T = -\Omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}.$$

$$d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{OA}} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} dt \int_{\text{OA}} r^2 dm = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{3} m \ell^2 dt.$$

$$\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{OA}} = \int_{t_1}^{t_2} d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{OA}} = \left[\frac{1}{3} m \ell^2 \Omega^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{6} m \ell^2 \Omega^2 (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1).$$

$$\text{b. } d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{SA}} = -\left(\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \wedge \vec{OA} \right) d\vec{OA} m_1 - \left[(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OA})) \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_T m_1 \right] dt ;$$

$$\text{ici, } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} ; \vec{\omega} = -\Omega \vec{i} ; \vec{OA} = \ell \vec{u}_r ; \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_T = \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

$$\text{Par analogie, } d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{SA}} = \Omega^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \ell^2 m_1.$$

$$\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{SA}} = \int_{t_1}^{t_2} d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{SA}} = \frac{1}{2} m_1 \Omega^2 \ell^2 (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1).$$

$$\text{c. } d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{AE}} = -\int_{\text{AE}} \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} \right) d\vec{OM} dm - \left[\int_{\text{AE}} (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})) \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_T dm \right] dt.$$

$$\text{ici, } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} ; \vec{OM} = \vec{OE} + \vec{EM} ; \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_T = \left(\frac{d\vec{OE}}{dt} \right)_T + \left(\frac{d\vec{EM}}{dt} \right)_T,$$

$$\text{avec } \vec{OE} = 2\ell \cos \theta \vec{i} ; \vec{V}_T(E) = -2\ell \sin \theta \dot{\theta} \vec{i}, \text{ d'où :}$$

$$d\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{AE}} = -\left[\int_{\text{AE}} \left(\vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{OE}}_{\vec{0}} \right) \right) \frac{d\vec{OM}}{dt} dm \right] dt - \int_{\text{AE}} (\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{EM})) \left(\frac{d\vec{EM}}{dt} \right)_T dt dm - \left[\int_{\text{AE}} \underbrace{\left(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{EM}) \right)}_{// \vec{j}} \left(\underbrace{\left(\frac{d\vec{OE}}{dt} \right)_T}_{// \vec{i}} \right) dm \right] dt = 0$$

• *théorème du centre de masse, théorème du mouvement du centre de masse*

$$d \mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{AE}} - \left[\int_{\text{AE}} \left(\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\text{EM}} \right) \right) \left(\frac{d\overrightarrow{\text{EM}}}{dt} \right)_T dm \right] dt ,$$

$$\text{même intégrale formelle que } - \left[\int_{\text{OA}} \left(\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\text{OM}} \right) \right) \left(\frac{d\overrightarrow{\text{OM}}}{dt} \right) dm \right] dt .$$

$$d \mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{AE}} = d \mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{OA}} .$$

$$\text{d. } \mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{total}} = 4 \mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{OA}} + 2 \mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{SA}} = \ell^2 \Omega^2 [\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1] \left[\frac{2}{3} m + m_1 \right] .$$

4. On applique **II.2.c.** : on a $\mathcal{E}_{\text{entraînement}}^{\text{total}} = E_c(t_2) - E_c(t_1) - \mathcal{E}_{\text{gravité}}$

$$E_{c_T} = \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \left[\left(\frac{4}{3} + 4 \sin^2 \theta \right) m + 2m_1 \right] \text{ cf. I.4.d.}$$

$$\mathcal{E}_{\text{gravité}} = -[E_{T_P}]_{t_1}^{t_2} = (4m + 2m_1) g \ell (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \text{ cf. I.5.}$$

Finalement, on obtient l'intégrale première du mouvement avec $\theta_2 = \theta$; la constante est obtenue à $t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \left[\left(\frac{4}{3} + 4 \sin^2 \theta \right) m + 2m_1 \right] - (4m + 2m_1) g \ell \cos \theta - \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2}{3} m + m_1 \right) = \\ - (4m + 2m_1) g \ell \cos \theta_0 - \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \theta_0 \left(\frac{2}{3} m + m_1 \right) ; \end{aligned}$$

équation différentielle du 1^{er} ordre en θ .

III. On a $\Omega = \Omega_0$, $m \ll m_1$.

1. Ecrivons alors l'intégrale première de **II.4.**

$$\ell^2 \dot{\theta}^2 m_1 - 2m_1 g \ell \cos \theta - m_1 \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \theta = -2m_1 g \ell \cos \theta_0 - m_1 \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \theta_0 .$$

$$\text{Soit : } \ell \dot{\theta}^2 - 2g \cos \theta - \ell \Omega^2 \sin^2 \theta = -2g \cos \theta_0 - \ell \Omega^2 \sin^2 \theta_0 ;$$

$$\text{En dérivant, } \dot{\theta} \ell \left[2\ddot{\theta} + \frac{2g}{\ell} \sin \theta - 2\Omega^2 \sin \theta \cos \theta \right] = 0 .$$

$$\text{On a bien } \dot{\theta} F(\theta, \ddot{\theta}) = 0 \text{ avec } F(\theta, \ddot{\theta}) = \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 .$$

$$\text{2. Linéarisons } \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2 \right) \theta = 0 ;$$

$$\text{a. Si } \frac{g}{\ell} - \Omega^2 > 0, \theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{\ell} - \Omega^2} t, \text{ vu les conditions initiales.}$$

$$\text{b. Si } \frac{g}{\ell} - \Omega^2 < 0, \theta = \theta_0 \cosh \sqrt{\Omega^2 - \frac{g}{\ell}} t, \text{ vu les conditions initiales.}$$

$$\text{Pour que } \theta \text{ reste petit, on voit qu'il faut } \frac{g}{\ell} - \Omega^2 > 0, \text{ soit } \frac{\Omega^2 \ell}{g} < 1 .$$

$$\text{AN : } \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{\ell}} ; \Omega_c = 6,261 \text{ rad.s}^{-1}, \text{ alors } f_c \# 1\text{Hz}, T_c \# 1\text{s} .$$

$$\text{3. Il ne faut pas conclure de } \Omega^2 \frac{\ell}{g} > 1 \text{ qu'il n'y a pas de position d'équilibre.}$$

Posons $\eta = \theta - \theta_e$; on a $\theta = \theta_e + \eta$ avec $\cos \theta_e = \frac{g}{\ell \Omega^2}$.

Reprenons

$$F(\theta, \ddot{\theta}) = 0 ; \sin \theta = \sin \theta_e \cos \eta + \cos \theta_e \sin \eta \text{ et } \cos \theta = \cos \eta \cos \theta_e - \sin \eta \sin \theta_e.$$

$$\text{Linéarisons en } \eta : \quad \sin \theta = \sin \theta_e + \eta \cos \theta_e \text{ et } \cos \theta = \cos \theta_e - \eta \sin \theta_e$$

On obtient par remplacement :

$$0 = \ddot{\eta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta_e + \frac{g}{\ell} \eta \cos \theta_e - \Omega^2 (\sin \theta_e \cos \theta_e - \eta^2 \sin \theta_e \cos \theta_e + \eta (\cos^2 \theta_e - \sin^2 \theta_e)),$$

$$\text{Soit en linéarisant : } 0 = \ddot{\eta} + \eta \left(\frac{g}{\ell} \cos \theta_e - \Omega^2 (2 \cos^2 \theta_e - 1) \right) + 0 ;$$

$$0 = \ddot{\eta} + \Omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{\ell^2 \Omega^4} \right) \eta ; \text{ or, } \eta_0 = \theta_0 - \theta_e \text{ et } \dot{\eta}_0 = 0 - 0 \Rightarrow \eta = \eta_0 \cos \Omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{\ell^2 \Omega^4}} t ;$$

$$\text{Soit } \theta - \theta_e = (\theta_0 - \theta_e) \cos \left[\Omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{\ell^2 \Omega^4}} t \right].$$

IV. $\Omega = \Omega(t)$; $m = 0$ et $\dot{\Omega} = K(\cos \theta - \cos \theta_p)$ (admis).

$$F(\theta, \ddot{\theta}) = 0 \text{ avec } \Omega(t) \text{ quand } \Omega \text{ varie peu.}$$

$$1. \text{ On a : } \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} - \Omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \text{ et } \dot{\Omega} = K(\cos \theta - \cos \theta_p) ;$$

$$\text{Faisons } \ddot{\theta} = 0 \text{ et } \dot{\Omega} = 0 \text{ avec } \Omega = \Omega_p ; \cos \theta = \cos \theta_p \Rightarrow \Omega_p = \left(\frac{g}{\ell \cos \theta_p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Quand Ω augmente à partir de Ω_p , $\ddot{\theta} = -(\Omega_p^2 \cos \theta_p - \Omega^2 \cos \theta) \sin \theta > 0$. θ étant dans le voisinage de θ_p . θ augmente et $\dot{\Omega} < 0$ (cf $\dot{\Omega} = K(\cos \theta - \cos \theta_p)$) ; l'effet (conséquence) s'oppose à la cause. Il y a régulation, soit une stabilité en vitesse de rotation : les effets d'une perturbation ramènent à la vitesse angulaire stable.

3. On a $\Omega = (1 + \alpha) \Omega_p$ et $\theta = \theta_p + \delta \theta$; alors vu l'énoncé qui néglige les α^2 , $\Omega^2 = (1 + 2\alpha) \Omega_p^2$;

$$\cos \theta = \cos \theta_p \cos \delta \theta - \sin \theta_p \sin \delta \theta ; \sin \theta = \sin \theta_p \cos \delta \theta + \cos \theta_p \sin \delta \theta.$$

$$\text{En linéarisant, } \cos \theta = \cos \theta_p - \sin \theta_p \delta \theta ; \sin \theta = \sin \theta_p + \cos \theta_p \delta \theta ;$$

$$\dot{\Omega} = K(\cos \theta - \cos \theta_p) \Rightarrow -K \sin \theta_p \delta \theta = \dot{\alpha} \Omega_p ; \dot{\alpha} \text{ et } \delta \theta \text{ sont de même ordre.}$$

$$F(\theta, \ddot{\theta}) = 0 \text{ s'écrit, vu } \frac{g}{\ell} = \Omega_p^2 \cos \theta_p :$$

$$\ddot{\theta} = -(\Omega_p^2 \cos \theta_p - (1 + 2\alpha) \Omega_p^2 (\cos \theta_p - \sin \theta_p \delta \theta)) (\sin \theta_p + \cos \theta_p \delta \theta) ;$$

on garde l'équation à l'ordre 1 :

$$\ddot{\theta} = 2\alpha \Omega_p^2 \cos \theta_p \sin \theta_p - \delta \theta \Omega_p^2 (\cos^2 \theta_p - \sin^2 \theta_p).$$

$$\text{Eliminons } \delta \theta \text{ grâce à } \delta \theta = -\dot{\alpha} \frac{\Omega_p}{K \sin \theta_p}, \text{ il vient vu la linéarisation en } \alpha \text{ et } \delta \theta, \text{ qui sont}$$

$$\text{de même ordre, } \ddot{\alpha} + \Omega_p^2 \cos 2\theta_p \dot{\alpha} + 2K \Omega_p \cos \theta_p \sin^2 \theta_p \alpha = 0.$$

• conditions initiales, linéarisation

4.a.α. L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants obtenue en cherchant $\alpha = Ae^{rt}$ est :

$r^3 + \Omega_p^2 \cos 2\theta_p r + 2K\Omega_p \cos \theta_p \sin^2 \theta_p = 0$ soit $\mathcal{P}_3(r) = 0$, \mathcal{P}_3 polynôme d'ordre 3.

β. Le polynôme $\mathcal{P}_3(0) > 0$ or, $\mathcal{P}_3(-\infty) < 0$.

Par continuité, Il existe donc au moins une solution réelle négative r_1 .

γ. $\frac{d\mathcal{P}_3}{dr} = 3r^2 + \Omega_p^2 \cos 2\theta_p > 0 \quad \forall r$, la courbe étant croissante ne coupe qu'une fois

l'axe $y = 0$, il n'y a qu'une solution, elle est négative.

δ. $\mathcal{P}_3 = (r - r_1)\mathcal{P}_2$; \mathcal{P}_2 ayant deux racines complexes conjuguées, car :

$\mathcal{P}_2 = r^2 + ar + b$; $r = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}$; $4b - a^2 > 0$ car sinon il y aurait 3 racines réelles

ce qui est impossible vu **γ**.

b. $(r - r_1)(r^2 + ar + b) = r^3 + r^2(a - r_1) + r(-ar_1 + b) - br_1 = 0 = \mathcal{P}_3$.

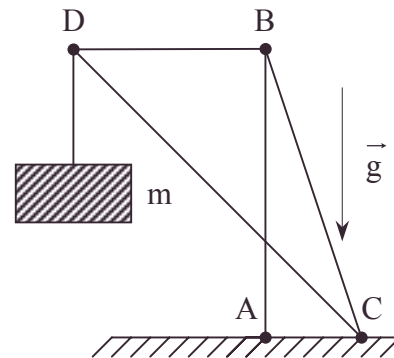
En identifiant les polynômes $a = r_1 < 0$, la partie réelle des solutions complexes est positive.

c. La solution générale est une combinaison de solutions indépendantes.

$\alpha = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{-at} e^{i\sqrt{4b-a^2}t} + A_3 e^{-at} e^{-i\sqrt{4b-a^2}t}$; la croissance exponentielle assure l'instabilité; la régulation n'est pas assurée.

2.1.5. Statique et dynamique d'un système de levage

Un système de levage est constitué par des barres indéformables rectilignes, de masse négligeable : AB, CD, DB, articulées en A, B, C, D et par un câble de masse négligeable tendu entre B et C. On désigne par a la distance AC entre les articulations des barres sur le socle horizontal. La barre AB est verticale et sa longueur est $3a$. La barre DB est horizontale et sa longueur est $2a$. En D, on suspend une masse m .



1. Quelle est la direction de la force exercée par une barre (sans masse) en équilibre à chacune de ses extrémités ?

2. Calculer les forces qui s'exercent sur chacune des barres et sur le câble BC, aux divers points A, B, C et D d'articulation ou de jonction.

Préciser dans chaque cas s'il s'agit de forces de traction ou de compression.

Calculer les efforts qui s'exercent sur le socle.

3. On remplace par une barre le câble BC, la barre DB étant horizontale.

On dispose en D et B deux petites poulies et en C un tambour de rayon R petit et d'axe perpendiculaire au plan de la figure.

La masse m , au lieu d'être fixée en D, est attachée à un câble de masse négligeable, qui passe sur les poulies D et B pour venir s'enrouler sur le tambour placé en C. Au voisinage des barres BC et BD, le câble est parallèle à ces barres.

Le tambour restant fixe et la masse m ne touchant pas le sol, calculer les efforts sur les différentes barres.

4. La masse m repose sur le sol et le câble est juste tendu.

• *instabilité, linéarisation, régulation, statique du solide, système de levage*

Le tambour de rayon R est entraîné par un moteur qui est supposé lui fournir un couple de moment Γ constant.

L'ensemble tambour-moteur a, par rapport à l'axe de rotation du tambour, un moment d'inertie I ; les poulies ont des moments d'inertie négligeables par rapport à leurs axes respectifs D et B.

On demande l'expression de la tension du câble.

Commenter.

Ecole Polytechnique ; Durée : 1h30

Corrigé

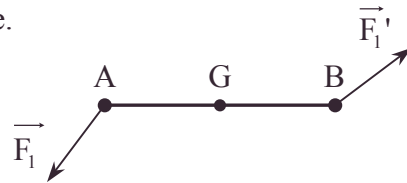
1. Les actions sont subies aux extrémités d'une barre.

L'équilibre s'écrit :

a. $\vec{F}_1 + \vec{F}_1' = 0$: les deux forces sont opposées.

b. $\vec{GA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{GB} \wedge (-\vec{F}_1) = \vec{0}$.

$\Rightarrow (\vec{GA} - \vec{GB}) \wedge \vec{F}_1 = \vec{0} = \vec{BA} \wedge \vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_1 // \vec{AB}$.



La force exercée en A est $-\vec{F}_1$ et est colinéaire à la barre AB de poids nul.

Remarque : le fil ne peut qu'être étiré ; la barre peut être étirée ou comprimée.

2.a. Géométrie du système

α. Les triangles rectangles DBK et CAK sont semblables.

$$\frac{DB}{AC} = \frac{2a}{a} = 2 = \frac{BK}{AK}, \text{ or } AK + BK = 3a ;$$

$$\Rightarrow BK = 2a, AK = a.$$

Les triangles rectangles sont isocèles.

Les angles aigus sont de $\frac{\pi}{4}$ rad.

$$DC = DK + KC = 2a\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}.$$

β. $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$ d'après le théorème de Pythagore.

$$\sin \theta = \frac{a}{a\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} ; \cos \theta = \frac{3a}{a\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

b. Analyse de la nature des forces

- Le fil BC tire le système avec une force F_2 (de traction) en B pour l'empêcher de basculer sous l'action du poids mg .
- Le sol empêche la pénétration de la barre AB et la repousse vers le haut en A ; cette action \vec{F}_1 (due à la compression du sol) est retransmise par la barre en B (cf. action-réaction).

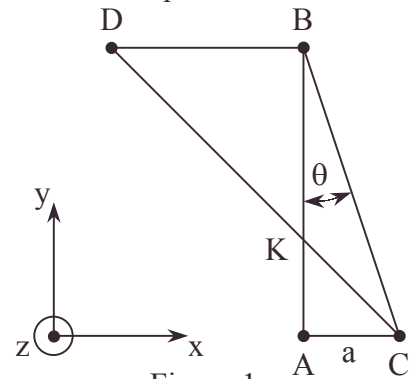


Figure 1

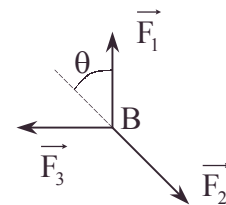


Figure 2

- L'équilibre de B (selon la direction horizontale) nécessite d'être tiré par DB avec une force \vec{F}_3 (de traction comme par un fil).
- L'équilibre de D nécessite d'être repoussée par DC avec une force \vec{F}_4 due à la compression de DC.
- C, point d'ancrage, doit être retenu par le sol avec une force \vec{F}_5 de traction pour empêcher le système de basculer (voir figure 4).

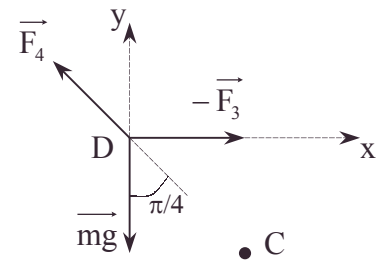


Figure 3

c. Traduisons sur les axes l'équilibre de l'articulation D (point matériel pour simplifier).

$$F_{4y} = mg ; \text{ or } F_{4y} = -F_{4x} \text{ car } \vec{F}_4 \text{ selon } \vec{DC}.$$

$$-F_{4x} = -F_{3x} = -mg.$$

$$\text{Conclusion : } \|\vec{F}_3\| = mg ; \|\vec{F}_4\| = mg\sqrt{2}.$$

d. Traduisons l'équilibre du système complet en C.

$$\vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_C = \vec{CD} \wedge mg + \vec{CA} \wedge \vec{F}_1 \Rightarrow 0 = 3amg - aF_{1y} \Rightarrow F_{1y} = 3mg.$$

L'action de la barre AB sur le sol étant selon $-\vec{Oy}$, l'action du sol par réaction est seulement selon Oy ; $F_{1x} = 0$.

e. Ecrivons l'équilibre de l'articulation B (point matériel).

Projetons sur l'axe de F_2 .

$$0 = F_2 - \|\vec{F}_3\| \sin \theta - \|\vec{F}_1\| \cos \theta.$$

$$F_2 = \frac{mg}{\sqrt{10}} + 3mg \frac{3}{\sqrt{10}} = mg\sqrt{10}.$$

f. Ecrivons l'équilibre de l'articulation C (point matériel).

Projetons sur les axes.

$$\alpha. \|F_2\| \cos \theta = \|F_4\| \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{5y}$$

$$\Rightarrow F_{5y} = \sqrt{10} mg \frac{3}{\sqrt{10}} - mg\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2mg.$$

Le sol retient le système.

$$\beta. \|F_2\| \sin \theta = \|F_4\| \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{5x} \Rightarrow F_{5x} = \sqrt{10} mg \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - mg\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

3. Les segments BC et DB sont doubles désormais : câble et barre.

Les équations d'équilibre restent les mêmes pour les points A, B, C et D.

L'équilibre des poulies s'accompagne de l'égalité des tensions avant et après chaque poulie : $0 = (T - T')R$; la tension du câble est donc partout $T = mg$, force de traction.

Les résultats obtenus en z pour les segments BC et DB sont à modifier pour que la somme des forces soit la même :

$$F'_2 = mg(\sqrt{10} - 1) \text{ pour la force de traction de la barre BC ;}$$

$$F'_3 = mg - mg = 0 \text{ pour la force de traction de la barre BD.}$$

Les forces F_1, F_4, F_5 restent les mêmes. L'ensemble des relations est conservé.

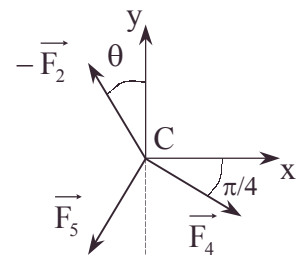


Figure 4

4. Appliquons le théorème de la puissance cinétique à l'ensemble du système :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right) = \Gamma \dot{\theta} - mg \dot{y}.$$

Or la condition de non-glissement du câble sur le tambour peut s'écrire $\dot{y} = R \dot{\theta}$ en prenant les signes positifs d'orientation de manière compatible,

$$\Rightarrow \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{y} = \left(\frac{\Gamma}{R} - mg \right) \dot{y} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\left(\frac{\Gamma}{R} - mg \right)}{\left(m + \frac{J}{R^2} \right)} \text{ quand } \frac{\Gamma}{R} > mg ; \text{ sinon l'arrêt se}$$

maintient.

$$\text{Le PFD appliqué à } m \text{ s'écrit : } m \ddot{y} = T - mg \Rightarrow T = m(g + \ddot{y}) = m \left(g + \frac{\frac{\Gamma}{R} - mg}{m + \frac{J}{R^2}} \right),$$

la nouvelle tension, supérieure à mg puisque $\frac{\Gamma}{R} > mg$, et l'action Γ du tambour perturbent toutes les contraintes trouvées à l'équilibre.

La mise en mouvement provoque des contraintes supérieures (avec des risques de rupture prévus par l'ingénieur) et des vibrations dues à la transition d'adaptation à la nouvelle situation ; on n'envisage pas la mise en instabilité du système.

2.1.6. Interaction de dipôles

Voir pages 593.

2.1.7. Barrage parallélépipédique

Voir page 327.

2.1.8. Barrages prismatiques et voûte

Voir page 331.

2.1.9. Jouet à réaction

Voir page 350.

2.2. Rotation d'un solide autour d'un axe

Appartient aussi au programme de PCSI, PT, TPC2

2.2.1. Tige et disque en rotation

Oscillation par entraînement

Un disque plein, circulaire homogène de masse M et de rayon R tourne autour de son diamètre vertical Oz (O centre du disque, Oz vertical ascendant). une tige homogène AB de masse m et de longueur $2R$ a son centre d'inertie fixé en O . Cette tige est assujettie à rester en contact sans frottement avec le disque, la tige restant dans le plan du disque. On considère le référentiel orthonormé galiléen $Oxyz$, le référentiel Ox_1y_1z lié au disque, orthonormé, Ox_1 étant normal au plan du disque et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox_1}) = \psi$.

Si A et B sont les extrémités de la tige, on pose $(\overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{AB}) = \theta$.

1. Calculer le moment d'inertie du disque par rapport à Ox_1 , par rapport à Oz .

Calculer les moments d'inertie de la tige par rapport à Ox_1 et Oz .

2. Calculer l'énergie cinétique du système disque-tige.

3. Calculer le moment cinétique par rapport à Oz du système constitué par le disque et la tige.

4. Les liaisons imposant au disque une rotation autour de Oz sont des liaisons sans frottement. Trouver deux intégrales premières des équations du mouvement.

On prendra $m = \frac{3M}{8}$.

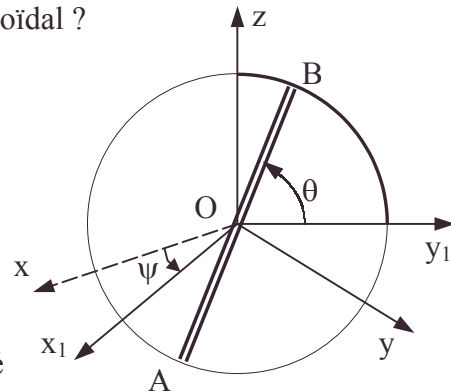
En déduire l'équation différentielle en θ . A quelle condition le mouvement relatif de la tige par rapport au disque est-il oscillatoire non sinusoïdal ?

Application : à $t = 0$, $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$; $\theta = 0$.

Entre quelles valeurs varie θ ?

5. En l'absence de tout frottement, calculer la résultante générale et le moment résultant en O du torseur des réactions exercées par le disque sur la tige en fonction de θ , φ et de leurs dérivées.

On utilisera le repère direct de projection orthonormé $(\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$



Autres concours ; Durée : 1h30

Corrigé

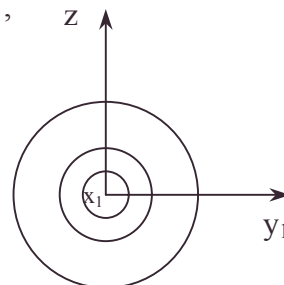
1.a. Disque :

$$\alpha. I_{Ox_1}^D = \int_D r^2 dm \text{ avec } dm = \sigma 2\pi r dr \text{ sachant } m = \pi R^2 \sigma,$$

$$I_{Ox_1}^D = \frac{MR^2}{2}.$$

$$\beta. I_{Ox_1}^D = \int_D (y_1^2 + z^2) dm = I_{Oz}^D + I_{Oy_1}^D ; \text{ or } I_{Oz}^D = I_{Oy_1}^D.$$

$$\text{cf. symétrie} \Rightarrow I_{Oz}^D = \frac{MR^2}{4}.$$

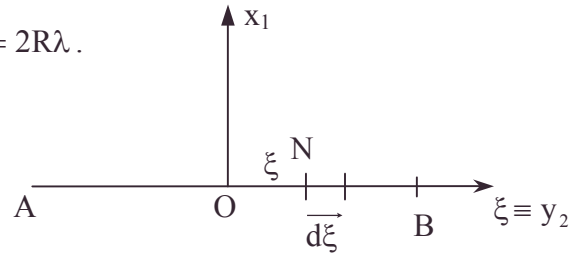


- centre d'inertie, énergie cinétique, intégrale première du mouvement, moment cinétique, moment d'inertie, mouvement sans frottement, projections, symétrie, torseur

b. tige

α. $I_{Ox_1}^D = \int_T \xi^2 dm$ avec $dm = \lambda d\xi$ et $m = 2R\lambda$.

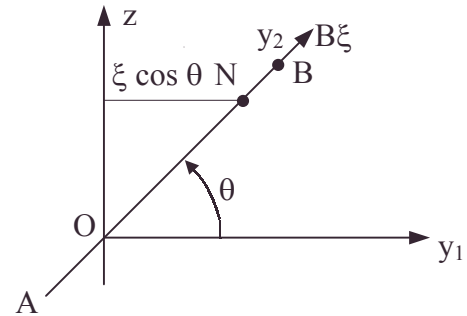
$$I_{Ox_1}^T = \frac{mR^2}{3}.$$



β. $I_{Oz}^T = \int_T y_1^2 dm$ avec $dm = \lambda d\xi$ et $m = 2R\lambda$;

or, $y_1 = \xi \cos \theta$:

$$\Rightarrow I_{Oz}^T = \cos^2 \theta \int_T \xi^2 dm = \frac{mR^2}{3} \cos^2 \theta.$$



$$2. E_c = E_c^D + E_c^T = \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma_0^D} \cdot \overrightarrow{\Omega^D} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma_0^T} \cdot \overrightarrow{\Omega^T} ;$$

$$\overrightarrow{\Omega^D} = \dot{\psi} \vec{z} ; \overrightarrow{\sigma_0^D} = I_{Oz}^D \overrightarrow{\Omega^D} = \frac{MR^2}{4} \dot{\psi} \vec{z} ; E_c^D = \frac{1}{2} I_{Oz}^D \dot{\psi}^2 = \frac{MR^2}{8} \dot{\psi}^2 ;$$

$$\overrightarrow{\Omega^T} = \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{x}_1 ; \overrightarrow{\sigma_0^T} = \int_T \overrightarrow{ON} \wedge (\overrightarrow{\Omega^T} \wedge \overrightarrow{ON}) dm ; E_c^T = \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma_0^T} \cdot \overrightarrow{\Omega^T}.$$

Utilisons le repère de projection $(\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$ imposé par l'énoncé et notons-le :

$$Ox_1, y_2, z_2 \quad \forall u \quad \vec{z} = \sin \theta \vec{y}_2 + \cos \theta \vec{z}_2 \quad \text{et} \quad dm = \lambda d\xi = \frac{m}{2R} d\xi.$$

$$\text{avec } \overrightarrow{ON} \begin{vmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \end{vmatrix}_{Ox_1 y_2 z_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega_T} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{vmatrix}_{Ox_1 y_2 z_2} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\sigma_0^T} = \int_T \overrightarrow{ON} \wedge (\overrightarrow{\Omega^T} \wedge \overrightarrow{ON}) dm = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \frac{mR^2}{2} \\ 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta \frac{mR^2}{3} \end{vmatrix}_{Ox_1 y_2 z_2}.$$

$$E_c^T = \frac{1}{2} \left[\frac{mR^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{3} \cos^2 \theta \dot{\psi}^2 \right] ; E_{c_{\text{total}}} = \frac{MR^2}{8} \dot{\psi}^2 + \frac{mR^2}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{6} \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta.$$

$$3. \overrightarrow{\sigma_0^T} \cdot \vec{z} = \overrightarrow{\sigma_0^D} \cdot \vec{z} + \overrightarrow{\sigma_0^T} \cdot \vec{z} = \frac{MR^2}{4} \dot{\psi} + \frac{mR^2}{3} \cos^2 \theta \dot{\psi} = (I_{Oz}^D + I_{Oz}^T) \dot{\psi}.$$

4.a. Aucune force ne travaille : $dE_c = 0 \Rightarrow E_c = \text{constante} = C_1$.

$$C_1 = \frac{MR^2}{4} \dot{\psi}^2 + \frac{mR^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{3} \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta ; \text{ avec } m = \frac{3M}{8} ;$$

cela aboutit à : $C_1' = \dot{\psi}^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \dot{\psi}_0^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \theta_0}{2} \right) + \frac{\dot{\theta}_0^2}{2}$.

Remarque : dans le repère relatif $E_{C_r}^T = \frac{1}{2} \frac{mR^2}{3} \dot{\theta}^2$; le système étant conservatif dans le repère relatif : $E_{C_r}^T + U_{\text{pot}}^T = \text{cste}$.

$$U_{\text{pot}}^T = \frac{mR^2}{4} \dot{\psi}^2 + \frac{mR^2}{6} \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta \quad \text{joue le rôle d'énergie potentielle des forces}$$

d'entraînement ; on a un minimum pour $\dot{\psi} = 0$, $\theta = 0$, équilibre stable.

b. Rotation autour de Oz de l'ensemble disque + tige avec liaison parfaite :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right) \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{z} = C_2 \quad \forall t.$$

$$\frac{MR^2}{4} \dot{\psi} + \frac{mR^2}{3} \cos^2 \theta \dot{\psi} = C_2 \quad \text{s'écrit avec } m = \frac{3M}{8};$$

$$C_2' = \dot{\psi} + \frac{\dot{\psi}}{2} \cos^2 \theta = \dot{\psi}_0 \left(1 + \frac{\cos^2 \theta_0}{2} \right).$$

c. Eliminons $\dot{\psi} = \frac{C_2'}{1 + \frac{\cos^2 \theta}{2}}$ entre C_1' et C_2' : $C_1' = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{C_2'^2}{\left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right)^2} \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right)$;

$$C_1' = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{C_2'^2}{1 + \frac{\cos^2 \theta}{2}} \quad \text{et par dérivation, } 0 = \ddot{\theta} + \frac{C_2'^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right)^2}.$$

d. $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = C_1' - C_2' \dot{\psi} = C_1' - \frac{C_2'^2}{1 + \frac{\cos^2 \theta}{2}}$;

Le mouvement est oscillatoire s'il existe, d'extremum θ_m tel que $\dot{\theta}_m = 0$; ce θ_m est solution de :

$$1 + \frac{\cos^2 \theta_m}{2} = \frac{C_2'^2}{C_1'} = \frac{\dot{\psi}_0^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \theta_0}{2} \right)^2}{\dot{\psi}_0^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \theta_0}{2} \right) + \frac{\dot{\theta}_0^2}{2}}.$$

e. $C_1' = 2\omega_0^2$; $C_2' = \frac{3}{2}\omega_0$;

$$\cos^2 \theta_m = 2 \left(\frac{9}{4} \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2} - 1 \right) = \frac{1}{4} ; \cos \theta_m = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_m = \pm \frac{\pi}{3} \text{ rad modulo } \pi.$$

$|\theta|$ ne peut avoir de valeur supérieure à $|\theta_m|$.

θ varie entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ autour de la position stable $\theta = 0$ par force d'inertie.

5.a. O est le centre de masse fixe de la tige, le théorème du centre de masse pour T donne : $\vec{0} = \vec{R}_{D \rightarrow T} + m\vec{g} \Rightarrow \vec{R}_{D \rightarrow T} = -m\vec{g}\vec{z}$

b. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}}_{D \rightarrow T} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_0^T}{dt} \right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_0^T}{dt} \right)_{Ox_1y_1z_2} + \vec{\Omega}^T \wedge \vec{\sigma}_0^T = \begin{vmatrix} \frac{mR^2}{3} \left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \cos \theta \sin \theta \right) \\ \frac{mR^2}{3} \left(\dot{\psi} \cos \theta - 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \right) \\ 0 \end{vmatrix}_{Ox_1y_1z_2}$$

Ceci est l'action, cause de l'oscillation dans le repère absolu, même si le repère de représentation est tournant.

2.2.2. Anémomètre modèle à jet fin, à jet large

Dans un anémomètre, l'ensemble mobile (S), en rotation autour de l'axe vertical ascendant Oz_0 du repère galiléen orthonormé direct R_0 (O, x_0 , y_0 , z_0), est constitué d'un rotor et de trois pales identiques numérotées $i = 1, 2, 3$ et disposées à 120° l'une de l'autre (figures 1 et 2).

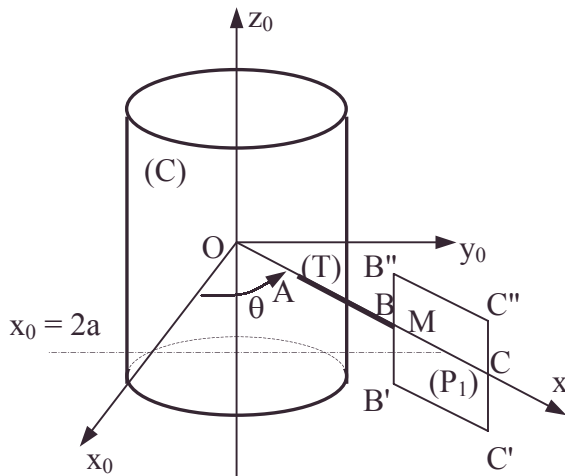


Figure 1

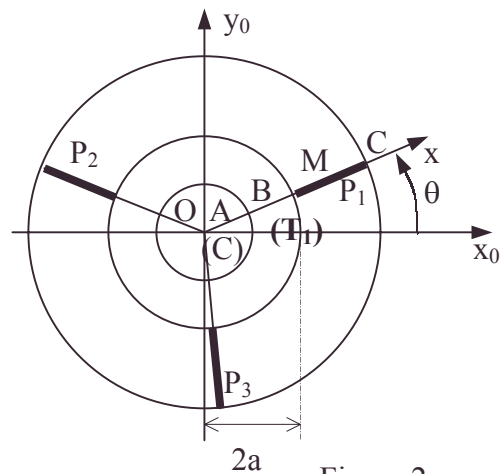


Figure 2

Le rotor (C) est un cylindre, de rayon a , de hauteur h et de centre d'inertie O. Chaque pale (i) est constituée d'une tige (T_i) et d'une plaque (P_i). La tige $T_1 = AB$, de longueur a , est soudée en A à (C) et se déplace dans le plan horizontal Ox_0y_0 . Dans ce plan, on note $\vec{OA} = \vec{AB} = a\vec{x}$.

La plaque verticale (P_1) est un rectangle $B'B''C''C'$, de dimensions $2b$ suivant \vec{z}_0 , $2a$ suivant \vec{x} , soudé à T_1 en B, milieu du côté $B'B''$ (Figure 1).

On note : m la masse de l'ensemble mobile (S).

$\vec{g} = -g\vec{z}_0$ l'accélération de la pesanteur (g constante positive).

$R(O, x, y, z_0)$ le repère orthonormé direct lié à l'ensemble mobile (S).

$\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$ l'angle définissant la position de la plaque (P_1) par rapport à R_0

I le moment d'inertie de l'ensemble mobile (S) par rapport à l'axe Oz_0 .

- anémomètre, centre de masse, centre d'inertie, moment d'inertie, repère de représentation

Tout point M de la plaque (P_1) est repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x, 0, z)$ dans le repère R.

I. Dans un premier modèle mathématique, la rotation de l'ensemble mobile est assurée par un jet sélectionné de fluide situé sur la droite $x_0 = 2a$ du plan Ox_0y_0 et orienté vers les y_0 croissants. L'action de ce jet sur la plaque P_1 est représentée, pour $-\frac{\pi}{3} < \theta \leq +\frac{\pi}{3}$,

par une force aérodynamique $\vec{F} = \lambda F_0 \sin \theta \vec{x} + F_0 \cos \theta \vec{y}$, s'appliquant au point M d'impact du jet sur cette plaque. F_0 et λ sont des constantes positives (Figure 2).

Il est tenu compte du frottement de (S) sur l'axe Oz_0 selon 4 schémas :

(H₁) : pas de frottement.

(H₂) : frottement solide :

l'axe Oz_0 exerce sur (C) un moment résistant (à ne pas démontrer)

$$\vec{M}_{FS} = -f \cdot \frac{a}{2} \cdot \lambda \cdot F_0 \cdot |\sin \theta| \vec{z}_0 ;$$

f est une constante positive (coefficient de frottement solide).

(H₃) : frottement visqueux :

l'axe Oz_0 exerce sur (C) un moment résistant $\vec{M}_{FF} = -\alpha \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0$; α est une constante positive (coefficient de frottement visqueux).

(H₄) : Frottement solide (H₂) et frottement visqueux (H₃).

1. Montrer que le moment \vec{M} de la force aérodynamique, calculé en O est indépendant de la position de l'ensemble mobile (S).

2. Déterminer la force \vec{R} de réaction de l'axe Oz_0 sur (C) pour $-\frac{\pi}{3} < \theta \leq +\frac{\pi}{3}$.

Représenter graphiquement la variation de la composante \mathcal{R}_x de \vec{R} sur \vec{x} , en fonction de θ pour une rotation de (S) d'un tour complet.

3. On suppose le frottement solide négligeable (schéma H₃). Déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ en prenant comme condition initiale $\dot{\theta}(0) = 0$.

4. On se place dans le schéma (H₄) (Frottements solide et visqueux). Établir, en fonction de λ et θ_0 , la condition que doit satisfaire le coefficient de frottement f pour qu'il y ait mise en mouvement du rotor (S) à partir d'une position immobile définie par les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$.

Discuter cette condition quand θ_0 varie de $-\frac{\pi}{3}$ à $+\frac{\pi}{3}$.

5. Calculer la variation de $\dot{\theta}^2$ pour une rotation d'un tour complet de l'ensemble mobile (S),

a. Dans le schéma (H₁) (pas de frottement).

b. Dans le schéma (H₂) (frottement solide seul).

II. Dans un deuxième modèle mathématique, la rotation du rotor (S) est assurée par un jet fluide de direction \vec{y}_0 de section droite rectangulaire définie par : $-b \leq z_0 \leq b$; $2a \leq x_0 \leq 4a$ (figure 3).

L'action aérodynamique de ce jet sur la plaque P_1 est représentée, pour $-\frac{\pi}{3} < \theta \leq +\frac{\pi}{3}$, par une distribution surfacique de force de densité uniforme : $\vec{P}(M) = \lambda P_0 \sin \theta \vec{x} + P_0 \cos \theta \vec{y}$, et s'appliquant sur les points M de la plaque P_1 situés dans la zone d'impact du jet sur celle-ci..

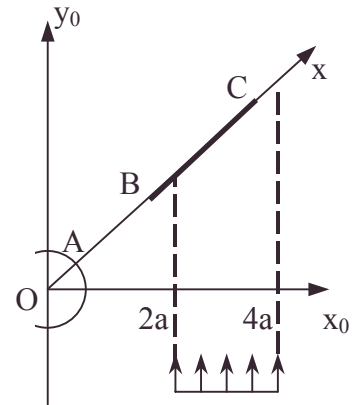


Figure 3

λ est la constante précédemment définie au I. ; $P_0 = \frac{F_0}{4ab} > 0$.

1. Exprimer en fonction de F_0 , a , θ , le moment \vec{M} résultant en O de cette distribution de force.

2. Déterminer, pour $-\frac{\pi}{3} < \theta \leq +\frac{\pi}{3}$, la force \vec{R} de réaction de l'axe Oz_0 sur l'élément (C) ; représenter graphiquement la variation de sa composante R_x en fonction de θ pour une rotation d'un tour de (C).

Comparer avec les résultats obtenus à la question I.2. et conclure.

3. Donner la signification physique du coefficient λ introduit dans l'ensemble du problème.

CCP ; Durée 1h30

Corrigé

I.1. $\vec{M}_0 = \vec{OM} \wedge \lambda F_0 \sin \theta \vec{x} + \vec{OM} \wedge F_0 \cos \theta \vec{y}$; or $\vec{OM} = \frac{2a}{\cos \theta} \vec{x}$;

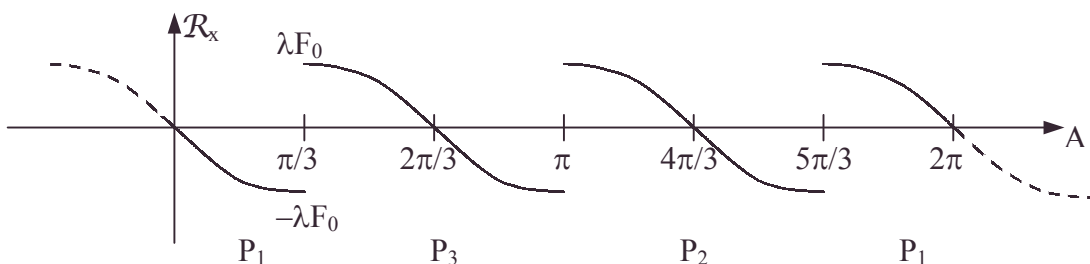
$\vec{M}_0 = \vec{0} + \frac{2a}{\cos \theta} \vec{x} \wedge F_0 \cos \theta \vec{y} = 2a F_0 \vec{z}_0$ indépendant de θ et positif selon \vec{z}_0 .

Une seule plaque est soumise au jet. \vec{M}_0 est le moment résultant

2.a. Le barycentre de S est sur l'axe et est immobile :

$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -m\vec{g} - \vec{F}$; $\vec{R} = -\lambda F_0 \sin \theta \vec{x} - F_0 \cos \theta \vec{y} + m\vec{g}$.

b. $R_x = -\lambda F_0 \sin \theta$; au cours d'un tour, les trois plaques sont soumises successivement au jet et jouent un rôle analogue. Le fait de $x_0 = 2a$ permet le passage immédiat de P_1 à P_3 quand $\theta = \frac{\pi}{3}$.



\mathcal{R}_x subit une discontinuité à chaque tiers de tour.

3. Appliquons le théorème du moment cinétique pour le solide (S) en rotation autour de Oz_0 :

$$I\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} + 2aF_0 \text{ de la forme } \dot{\theta} + \frac{\alpha}{I}\dot{\theta} = \frac{2aF_0}{I} \text{ de solution particulière : } \dot{\theta}_1 = \frac{2aF_0}{\alpha}.$$

L'équation sans second membre a pour solution : $\dot{\theta} = Ae^{-\frac{\alpha}{I}t}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{2aF_0}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{I}t})$

qui satisfait la condition initiale.

4.a. Appliquons le même théorème dans le cadre de (H_4) :

$$I\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - f\frac{a}{2}\lambda F_0 |\sin \theta| + 2aF_0.$$

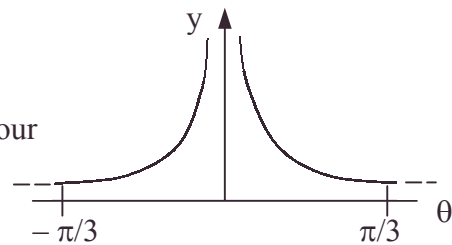
à $t = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$ et pour démarrer sous l'action du jet, il faut $\ddot{\theta}_0 > 0$, ou :

$$I\ddot{\theta}_0 = -f\frac{a}{2}\lambda F_0 |\sin \theta_0| + 2aF_0 > 0, \text{ soit } \frac{4}{\lambda |\sin \theta_0|} > f.$$

b. Graphe de $\frac{4}{|\sin \theta_0|}$.

Remarque : si la condition est satisfaite pour

$$\theta_0 = \pm \frac{\pi}{3}, \text{ elle est satisfaite } \forall \theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right].$$



La discussion se réduit à $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, soit $\frac{8\sqrt{3}}{3\lambda} > f$, qui assure tous les démarrages.

(avec $\dot{\theta}_0 = 0$).

5.a. Le théorème du moment cinétique s'écrit : $I\ddot{\theta} = 2aF_0$. Multiplions les deux membres par $d\theta = \dot{\theta} dt$ et intégrons sur un tour : $I \int_t^{t+T} \ddot{\theta} \dot{\theta} dt = 2aF_0 \int_0^{2\pi} d\theta$ soit :

$$\dot{\theta}^2(t+T) - \dot{\theta}^2(t) = \frac{8a\pi F_0}{I}. \text{ Le travail de frottement pour un tour vaut } 4a\pi F_0.$$

b. Le théorème du moment cinétique s'écrit : $I\ddot{\theta} = 2aF_0 - f\frac{a}{2}\lambda F_0 |\sin \theta|$.

Multiplions par $d\theta = \dot{\theta} dt$ et intégrons sur un tour soit sur 6 domaines d'amplitude $\frac{\pi}{3}$.

$$I \int_t^{t+T} \ddot{\theta} \dot{\theta} dt = 2aF_0 \int_0^{2\pi} d\theta - f\frac{a}{2}\lambda F_0 \cdot 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta, \text{ soit :}$$

$$\dot{\theta}^2(t+T) - \dot{\theta}^2(t) = \frac{8a\pi F_0}{I} - 3af \cdot \frac{\lambda F_0}{I} = \frac{aF_0}{I} (8\pi - 3f\lambda).$$

$$\text{II.1. } \overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = \iint \overrightarrow{OM} \wedge \lambda P_0 \sin \theta \vec{x} dx dy + \iint \overrightarrow{OM} \wedge P_0 \cos \theta \vec{y} dx dy ;$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = \vec{0} + \vec{x} \wedge \vec{y} \cdot P_0 \cos \theta \int_{\frac{2a}{\cos \theta}}^{4a} x \cdot 2b dx ; \text{ on vérifiera que les bornes correspondent aux}$$

limites de l'impact du jet.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = P_0 \vec{z}_0 \cos \theta \cdot 2b \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{2a}{\cos \theta}}^{4a} = \frac{F_0}{4ab} \cdot \frac{2b}{2} \vec{z}_0 \cos \theta \left[16a^2 - \frac{4a^2}{\cos^2 \theta} \right].$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = F_0 a \frac{(2 \cos \theta + 1)}{\cos \theta} (2 \cos \theta - 1) \vec{z}_0 ; \text{ remarquons : } \vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{0} \text{ pour } \theta = \pm \frac{\pi}{3} (\text{modulo } \pi).$$

2.a. Comme pour **I.**, $\vec{\mathcal{R}} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$,

$$\text{avec } \vec{F} = \iint \lambda P_0 \sin \theta \vec{x} dx dy + \iint P_0 \cos \theta \vec{y} dx dy$$

$$\vec{F} = \lambda P_0 \sin \theta \vec{x} . 2b \int_{\frac{2a}{\cos \theta}}^{\frac{4a}{\cos \theta}} dx + P_0 \cos \theta \vec{y} . 2b \int_{\frac{2a}{\cos \theta}}^{\frac{4a}{\cos \theta}} dx ;$$

$$\vec{F} = \frac{\lambda F_0}{4ab} \sin \theta \vec{x} . 2b . 2a \frac{(2 \cos \theta - 1)}{\cos \theta} + \frac{F_0}{4ab} \cos \theta \vec{y} . 2b . 2a \frac{(2 \cos \theta - 1)}{\cos \theta} ;$$

$$\vec{F} = \lambda F_0 \sin \theta \frac{(2 \cos \theta - 1)}{\cos \theta} \vec{x} + F_0 (2 \cos \theta - 1) \vec{y} . \text{ Remarquons : } \vec{F} = \vec{0} \text{ pour } \theta = \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$\vec{\mathcal{R}} = -\lambda F_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (2 \cos \theta - 1) \vec{x} - F_0 (2 \cos \theta - 1) \vec{y} + m g \vec{z}_0 .$$

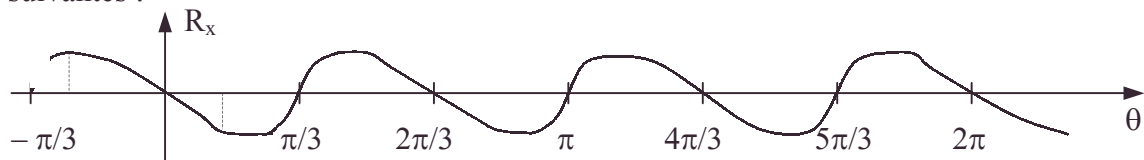
$$\text{b. } \mathcal{R}_x = -\lambda F_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (2 \cos \theta - 1) ; \mathcal{R}_x = 0 \text{ pour } \theta = 0 , \theta = \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{d\mathcal{R}_x}{d\theta} = -\lambda F_0 \left[\frac{2 \cos \theta - 1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (-2 \sin \theta) \right] = \frac{-\lambda F_0}{\cos^2 \theta} [2 \cos \theta - 1 - 2 \sin^2 \theta \cos \theta] ;$$

$$\frac{d\mathcal{R}_x}{d\theta} = \frac{-\lambda F_0}{\cos^2 \theta} [2 \cos^3 \theta - 1] = 0 \text{ pour } \theta = \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{1}{2}} ; \text{ AN : } \theta = \pm 0,654 \text{ rad (modulo } \pi).$$

Rappelons $\frac{\pi}{3} = 1,047 \text{ rad}.$

On fait le graphe sur $\left[-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}\right]$ et on reproduit la même arche pour les périodes suivantes :



\mathcal{R}_x ne subit plus de discontinuité et c'est mieux pour éviter la fatigue du matériau de l'axe.

3. λ intervient sur la composante tangentielle de F et donc correspond à un frottement entre plaque et jet (éventuellement dû à la viscosité du fluide, ou (et) à la rugosité de la plaque).

2.2.3. Oscillations d'une plaque à suspension trifilaire

On considère une plaque plane (P) homogène, d'épaisseur négligeable, en forme de triangle équilatéral ABC, de côté a et de hauteur h , de masse M . On note \vec{z} la verticale descendante (figure1). On donne $M = 300 \text{ g}$; $a = 15 \text{ cm}$.

Le but du problème sera d'étudier deux mouvements de cette plaque :

- Une rotation autour d'un axe porté par un côté du triangle.
- Une rotation autour d'un axe Gz .

I. Etude préliminaire

1. Déterminer la position du centre d'inertie G de la plaque (P) en donnant l'ordonnée de G en fonction de h .

2. Déterminer en fonction de h , le moment d'inertie $I(Ax)$ de (P) par rapport à l'axe Ax , parallèle au côté BC et passant par A .

3. Déterminer en fonction de h , le moment d'inertie $J(AB)$ de (P) par rapport à l'axe AB . Application numérique.

4. Déterminer en fonction de h , le moment d'inertie $K(Gz)$ de (P) par rapport à l'axe Gz passant par G et perpendiculaire au plan de la plaque. Application numérique.

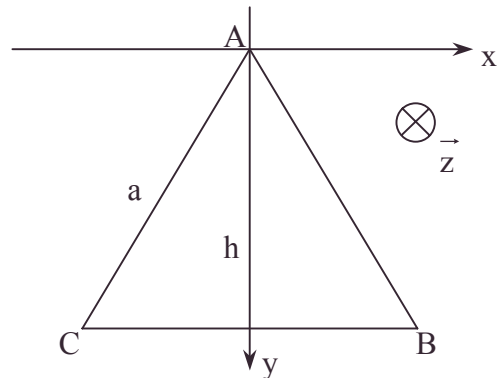


Figure 1

II. Rotation autour d'un côté du triangle

On suppose que la plaque est horizontale, suspendue par trois câbles verticaux de longueur L constante (figure 2) reliés respectivement aux trois sommets du triangle, et supposés de masse négligeable et sans torsion. $L = 10$ cm.

A l'instant $t = 0$, le câble relié à C est rompu de sorte que le triangle se met à tourner autour de l'axe AB que l'on supposera immobile et assurant une liaison parfaite. On note α l'angle du plan de (P) avec la verticale \vec{z} et \vec{g} l'accélération de la pesanteur supposée uniforme. Trouver la relation entre la vitesse

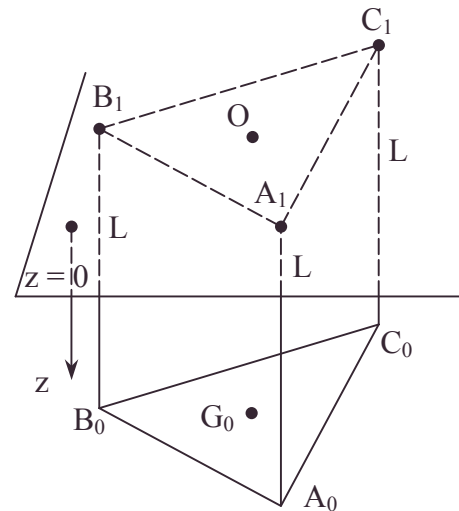


Figure 2

angulaire $\dot{\alpha}$ et l'angle α à tout instant.

Calculer le module de l'accélération de G quand la plaque passe à la position verticale. Application numérique ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$).

III. Mouvement de "vissage"

On revient au montage de la figure 2 : à partir de la position verticale des câbles, on effectue un mouvement de "vissage" d'axe Gz c'est-à-dire que le triangle reste à tout moment dans un plan horizontal, le point G se déplaçant sur l'axe Gz vertical fixe, et que toute droite liée à (P) tourne d'un même angle. Ce mouvement correspond à une rotation autour d'un axe Gz .

On note A_0, B_0, C_0, G_0 les positions initiales des points A, B, C, G ; on note $z = 0$ le plan d'attache des câbles ($z(G_0) = L$) ; O est la projection de G_0 sur le plan $z = 0$ et on note θ l'angle $(\vec{G_0A_0}, \vec{GA})$ compté positivement autour de Oz .

1. Ecrire la relation entre $z(G)$ et l'angle θ traduisant que les fils ont une longueur constante.

2. Ecrire l'énergie cinétique de (P) en fonction de $\dot{z}, \dot{\theta}$ et des constantes.

3. Ecrire l'équation différentielle du mouvement dans l'hypothèse de petits mouvements et la résoudre. Application numérique : calculer la période.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. Soit le triangle équilatéral :

$$\overrightarrow{MAG} = \int_S \overrightarrow{AM} dm.$$

par symétrie, $G \in Ay$; projetons sur Ay :

$$My_G = \int_S y dm = \sigma \iint y dS \text{ avec } M = \sigma \frac{a}{2} h.$$

• L'élément d'intégration le plus grand où y est constant est le rectangle de largeur dy et de longueur a' telle que $\frac{a'}{a} = \frac{y}{h}$ (cf. triangles semblables) ;

$$dS = a' dy = \frac{a}{h} y dy.$$

$$My_G = \sigma \frac{a}{h} \int_0^h y^2 dy = \sigma \frac{ah^2}{3} \Rightarrow y_G = \frac{2}{3} h.$$

Ce calcul n'est pas utile si on connaît ce résultat classique pour un triangle.

2. $I_{Ax} = \int_S y^2 dm = \sigma \iint y^2 dS$ avec la même remarque qu'en **1.** pour dS .

$$I_{Ax} = \sigma \frac{a}{h} \int_0^h y^3 dy = \sigma a \frac{h^3}{4} = M \frac{h^2}{2}$$

3. Vu les rôles identiques de AB , BC , CA : $J(AB) = J(BC)$.

$$d(M, BC) = h - y ; J(BC) = \sigma \iint (h - y)^2 dS = \frac{\sigma a}{h} \int_0^h (h - y)^2 y dy = \frac{\sigma a h^3}{12}.$$

$$J(AB) = M \frac{h^2}{6} ; \text{AN} : J(AB) = 8,437 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2.$$

4. Chaque rectangle élémentaire a un moment d'inertie (cf. tige).

$$dK_{Nz} = dm \frac{a'^2}{12} = \frac{\sigma dS}{12} y^2 \frac{a^2}{h^2} \text{ et par rapport à } Gz \text{ (cf. Théorème de Huygens) :}$$

$$dK_{Gz} = dK_{Nz} + dm \left(\frac{2}{3} h - y \right)^2 \text{ car N est le barycentre du rectangle élémentaire.}$$

$$K_{Gz} = \int_0^h \left(\frac{\sigma}{12} \frac{a^2}{h^2} y^2 \frac{a}{h} + \sigma \frac{a}{h} \left(\frac{4h^2}{9} + y^2 - \frac{4hy}{3} \right) \right) y dy = M \frac{h^2}{9}.$$

$$\text{A.N} : K_{Gz} = 5,625 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2.$$

II.a. L'angle α est le seul paramètre descriptif de ce mouvement non dissipatif.

On utilise donc une méthode énergétique : $E_C + E_p = \text{cste}$.

$$\frac{1}{2} J_{AB} \dot{\alpha}^2 - M \frac{h}{3} g \cos \alpha = \text{cste} = 0.$$

$$\dot{\alpha}^2 = 4 \frac{g}{h} \cos \alpha ; \ddot{\alpha} = -2 \frac{g}{h} \sin \alpha.$$

$$\text{b. G a une trajectoire circulaire : } \vec{a}_G = -\frac{h}{3} \ddot{\alpha} \vec{y} + \frac{h}{3} \dot{\alpha}^2 \vec{u}_\alpha.$$

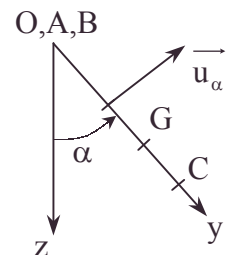
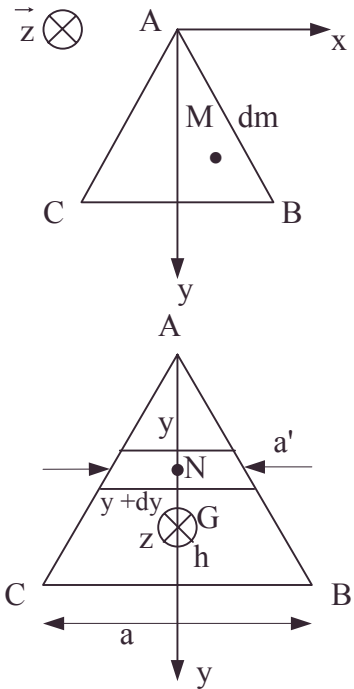


Figure en vue de bout

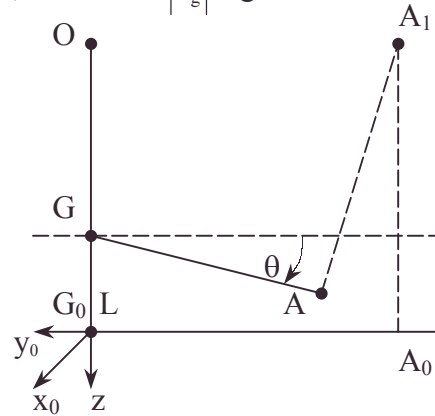
Pour la position verticale de la plaque :

$$\alpha = 0, \quad \dot{\alpha}^2 = \frac{4g}{h}; \quad \ddot{\alpha} = 0; \quad \vec{a}_g = -4\frac{g}{3}\vec{z}; \quad \text{AN : } |\vec{a}_G| = 13,08 \text{ m.s}^{-2}. \quad |\vec{a}_g| > g.$$

$$\text{III.1. } A_1A = A_1A_0 = L; \quad GA = G_0A_0 = \frac{2h}{3}.$$

Dans le repère (O, x_0, y_0, z_0) :

$$\vec{OA}_0 \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{2h}{3} \\ L \end{vmatrix}; \quad \vec{OA}_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{2h}{3} \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{OA} \begin{vmatrix} +\frac{2h}{3}\sin\theta \\ -\frac{2h}{3}\cos\theta \\ z \end{vmatrix}$$



$$\vec{A_1A} \begin{vmatrix} \frac{2h}{3}\sin\theta \\ -\frac{2h}{3}(\cos\theta - 1) \\ z \end{vmatrix} \Rightarrow A_1A^2 = \frac{4h^2}{9}\sin^2\theta + \frac{4h^2}{9}(\cos\theta - 1)^2 + z^2 = \frac{8h^2}{9}(1 - \cos\theta) + z^2.$$

$$A_1A^2 = \frac{16h^2}{9}\sin^2\frac{\theta}{2} + z^2 = L^2 \Rightarrow z^2 = L^2 - \frac{16h^2}{9}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Il existe une méthode trigonométrique concurrente.

$$2. E_c = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}K_{Gz}\dot{\theta}^2.$$

3. L'énergie mécanique se conserve.

$E_c + E_p = \text{cste}$ s'écrit $\frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}K_{Gz}\dot{\theta}^2 - Mgz = \text{cste}$ dans l'approximation des petits angles.

Comme $z^2 = L^2\left(1 - \frac{4h^2}{9L^2}\theta^2\right)$, $z = L\left(1 - \frac{2h^2\theta^2}{9L^2}\right)$ si θ petit ; on sait que si

$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$, $\dot{\theta} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$, soit θ et $\dot{\theta}$ du même ordre.

$$\dot{z} = -\frac{4h^2}{9L}\dot{\theta}\theta \Rightarrow \dot{z}^2 = \frac{16h^4}{81L^2}\dot{\theta}^2\theta^2 \text{ est d'ordre 4.}$$

Pour obtenir l'équation linéaire des oscillations, on ne retient que les termes d'ordre 2 dans l'équation énergétique. $E_c + E_p = \text{cste}$ s'écrit : $\frac{1}{2}K_{Gz}\dot{\theta}^2 + \frac{2Mg}{9L}h^2\theta^2 = \text{cste}$, soit

$$\ddot{\theta} + \frac{4Mgh^2}{9LK_{Gz}}\theta = 0, \text{ de solution } \theta = \theta_0 \cos\omega t \text{ si } \dot{\theta}(0) = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{4Mgh^2}{9LK_{Gz}} = \frac{4g}{L};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}; \quad \text{AN : } T = 0,317 \text{ s.}$$

2.2.4. Freinage moteur de la rotation d'une station spatiale

Une station spatiale est assimilée à un tore, creux, engendré par un cercle de centre C , de rayon r , tournant autour d'un axe OZ , à une distance $OC = R$ (Figure 1).

On donne : $CP = r = 5\text{m}$; $OC = R = 20\text{m}$.

On suppose que toute la masse de la station est répartie sur la surface du tore avec une masse surfacique $\sigma = 15\text{kg/m}^2$. On note P_1, P_2, P_3, P_4 et C quelques points caractéristiques de l'une des sections (S) du tore, prise pour référence et P un point courant de (S) repéré par l'angle polaire ϕ (figure 1).

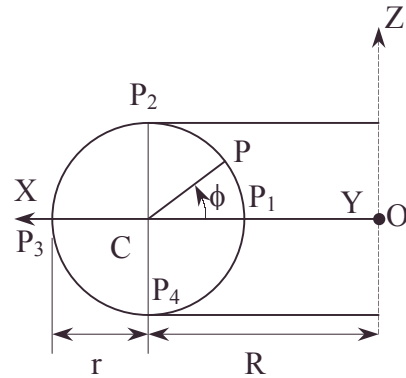


Figure 1

1. Déterminer littéralement, puis numériquement :

a. La masse M de la station.

b. Le moment d'inertie I de la station par rapport à l'axe OZ .

2. La station spatiale est complétée par une plate-forme cylindrique centrale portant des antennes de télécommunications.

Cette plate-forme peut tourner librement, sans frottement par rapport au corps principal de la station ; station et plate-forme ont même axe. On note J le moment d'inertie de la plate-forme ; ω et Ω sont les vitesses angulaires, dans le repère $OXYZ$, de la station et de la plate-forme (figure 4).

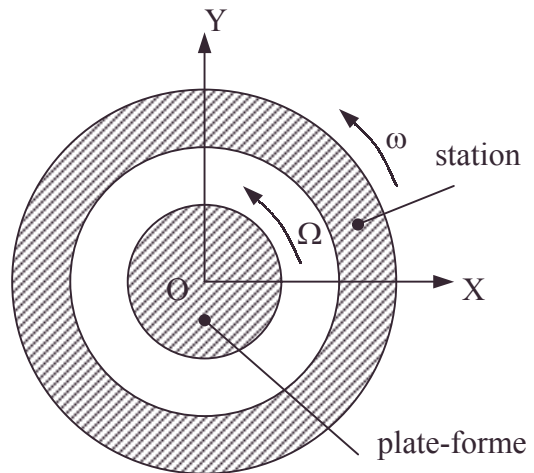


Figure 4

La plate-forme est mue par un moteur électrique fixé sur le tore et pouvant créer un couple constant C . A $t = 0$, plate-forme et station tournent ensemble avec la vitesse angulaire ω_0 positive, on met en route le moteur afin d'immobiliser la plate-forme dans le repère fixe $OXYZ$.

a. Déterminer les lois $\omega(t)$ et $\Omega(t)$.

b. Quelle est la puissance fournie par le moteur ? Pendant quelle durée τ doit-on le laisser branché ? Soit $\Omega(t = \tau) = 0$. On donne $\frac{I}{J} = 10$ et $|C| = 10^4 \text{ N.m}$.

On prendra $\omega_0 = 0,5 \text{ rad.s}^{-1}$; $I = 26 \cdot 10^6 \text{ kg.m}^2$.

3. Déterminer, pendant la phase d'immobilisation de la plate-forme (de durée τ), les composantes radiales a_{ER} et tangentielle a_{ET} de l'accélération d'entraînement d'un point de la station situé à la distance ℓ de l'axe OZ . Montrer que $|a_{ET}| \ll |a_{ER}|$.

4. Dans cette phase d'immobilisation, quelles sont les équations différentielles décrivant, dans P_3xyz , (repère lié au solide de directions coïncidant avec celles de $OXYZ$ à $t = 0$), le mouvement d'un point matériel Q assujéti à se déplacer sans frottement dans un plan $x = x_0$.

Mines ; Durée 1h

Corrigé

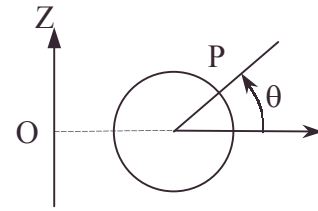
1.a. D'après le théorème de Guldin, $S = 4\pi^2 rR$;
 $M = \sigma S = 4\pi^2 \sigma rR$; AN : $M = 59218 \text{ kg}$.

b. $d(OZ, P) = R + r \cos \theta$

$I_{OZ} = \sigma \int (R + r \cos \theta)^2 dS$ avec $dS = 2\pi(R + r \cos \theta) r d\theta$;

$$I_{OZ} = 2\pi r \sigma \int_0^{2\pi} (R + r \cos \theta)^3 d\theta = 2\pi r \sigma (2\pi R^3 + 3\pi R r^2) ;$$

$$I = M \left(R^2 + \frac{3}{2} r^2 \right) ; \text{AN : } I = 25,91.10^6 \text{ kg.m}^2.$$



2.a.α. Appliquons le théorème du moment cinétique au solide plate-forme en rotation autour de l'axe fixe OZ.

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right)_{OXYZ} = \vec{C}_0 + \vec{\mathcal{M}}_0^{\text{liaison}} \text{ soit } J\dot{\Omega} = -C + 0 \text{ car couple de freinage avec } C > 0 \text{ et}$$

liaison parfaite en tenant compte de la condition initiale $\Omega = \omega_0$. $\Omega = \frac{-Ct}{J} + \omega_0$.

β. Appliquons le théorème du moment cinétique au solide station en rotation autour de l'axe fixe OZ.

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right)_{OXYZ} = -\vec{C}_0 - \vec{\mathcal{M}}_0^{\text{liaison}} \text{ d'après le théorème de l'action et de la réaction.}$$

$$I\dot{\omega} = C + 0 \text{ (cf. } \alpha.) \quad \omega = \frac{C}{I}t + \omega_0 \text{ avec } C > 0.$$

$$\mathbf{b.} \quad \vec{\Omega}' (\text{plate-forme / Tore}) = \vec{\Omega} - \vec{\omega} = -Ct \left(\frac{1}{J} + \frac{1}{I} \right).$$

$$\alpha. \quad P = -\vec{C}_0 \cdot \vec{\Omega}' = C^2 t \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{J} \right).$$

$$\beta. \quad \Omega_\tau = 0 = \frac{-C\tau}{J} + \omega_0 \Rightarrow \tau = \frac{\omega_0 J}{C} ; \text{AN : } \tau = 130 \text{ s. Alors } \omega(\tau) = \omega_0 \left(1 + \frac{J}{I} \right)$$

$$\mathbf{3.a.} \quad \text{Rappelons ; } \vec{a} (M^* \in \text{station} / OXYZ) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}^*) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{OXYZ} \wedge \vec{OM}^* :$$

projetons dans OXYZ :

$$\vec{a}_e = \begin{pmatrix} -\omega^2 X \\ -\omega^2 Y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\omega} Y \\ \dot{\omega} X \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{OM}^* = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{ER} = -\omega^2 \vec{OM}^* = \begin{pmatrix} -\omega^2 X \\ -\omega^2 Y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_{ET} = \begin{pmatrix} -\dot{\omega} Y \\ \dot{\omega} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C}{I} Y \\ \frac{C}{I} X \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• conditions initiales, couple, freinage, Guldin [théorème de], moment d'inertie, projections, théorème de l'action et de la réaction, théorème du moment cinétique

$$\mathbf{b.} \quad |\mathbf{a}_{ET}| = \frac{C}{I} \ell.$$

$$|\mathbf{a}_{ER}| = \omega^2 \ell ; \text{ or } \omega_0 < \omega < \omega_0 \left(1 + \frac{J}{I}\right) \Rightarrow \frac{|\mathbf{a}_{ET}|}{|\mathbf{a}_{ER}|} < \frac{C}{I\omega_0^2} ; \text{ AN : } \frac{C}{I\omega_0^2} = 1,5 \cdot 10^{-3} ;$$

$$|\mathbf{a}_E| \ll |\mathbf{a}_{ER}|.$$

$$4. \quad m\vec{\mathbf{a}}_r = \vec{\mathbf{R}} - m\vec{\mathbf{a}}_e - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{V}}_r.$$

Vu l'absence de frottement : $R_y = R_z = 0$.

$$\vec{\mathbf{a}}_e = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{P}}_3\vec{\mathbf{M}}) + \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}\right) \wedge \vec{\mathbf{P}}_3\vec{\mathbf{M}} \text{ et vu 3.a., } \vec{\mathbf{a}}_e \left| \begin{array}{l} -\omega^2(x_0 - R - r) - \frac{C}{I}y \\ -\omega^2y + \frac{C}{I}x \\ 0 \end{array} \right|_{P_3xyz}$$

$$\text{Vu la contrainte } x = x_0 ; \dot{x} = 0 ; \ddot{x} = 0 : -2\vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{V}}_r \left| \begin{array}{l} 2m\omega\dot{y} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right|_{P_3xyz}$$

et finalement en projection dans P_3xyz , le P.F.D. donne :

$$0 = m \left(\omega_0 + \frac{Ct}{I} \right)^2 (x_0 - R - r) + \frac{C}{I} my + R_x + 2 \left(\frac{Ct}{I} + \omega_0 \right) \dot{y} m ;$$

$$m\ddot{y} = m \left(\omega_0 + \frac{Ct}{I} \right)^2 y - m \frac{C}{I} x_0 ; \quad m\ddot{z} = 0.$$

Les objets doivent être fixés.

2.2.5. Rotation d'un dipôle dans un champ Stabilité, hystérésis

On considère le pendule de torsion dont la figure 1 donne un schéma d'ensemble et la figure 2, le détail. L'ensemble mobile se compose de deux sphères métalliques identiques (rayon = R ; distance entre les centres : D) réunies par une tige isolante. L'ensemble peut tourner autour de l'axe Oz en restant dans le plan xOy ; il est soumis à un couple de rappel $-k\phi$ dû aux fils de torsion (ϕ est défini dans la figure 2).

Les sphères peuvent recevoir des charges opposées $+Q$ et $-Q$ de manière à former un dipôle électrique de moment p .

On étudiera l'effet d'un champ électrique uniforme et statique de composantes cartésiennes $(-E, 0, 0)$ et d'un deuxième champ $(0, E_1(t), 0)$ également uniforme, mais variable dans le temps.

Dans toutes les applications numériques, on prendra $R = 0,9$ mm et $D = 1$ cm.

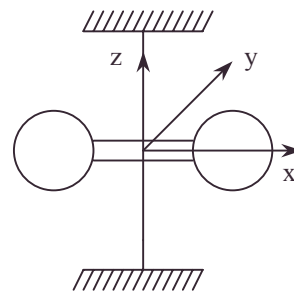


Figure 1

Partie I

1. Calculer le moment d'inertie I de système par rapport à l'axe Oz en fonction de D et de la masse M d'une sphère. On négligera la masse de la tige et on admettra que toute la masse des sphères est concentrée en leurs centres.
2. Calculer la période d'oscillation T_0 du pendule en fonction de k et de I lorsqu'on annule les champs électriques.
3. Application numérique : les sphères sont homogènes et leur métal a une densité de 9. On mesure $T_0 = 10$ secondes. Calculer I et k . (On rappelle aux étudiants que la valeur numérique d'une grandeur se compose d'un nombre et de l'indication de l'unité employée ; la réponse "unité S.I." est interdite).

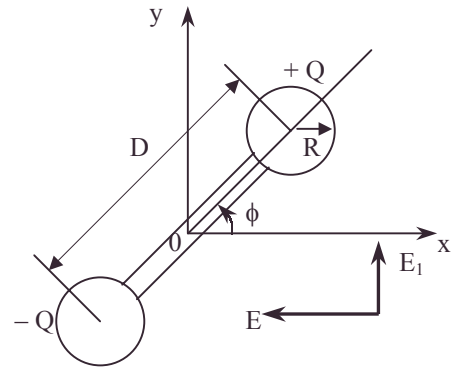


Figure 2

Partie II

On applique maintenant le champ E ; on garde $E_1 = 0$ dans cette partie. On admettra que les sphères chargées se comportent comme un dipôle de moment $p = 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ Cm}$, pointant dans la direction d'angle ϕ . On considérera dans toute la suite du problème que cet angle est limité à l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

1. Calculer le couple Γ qui s'exerce sur le système en fonction de k, ϕ, p, E .
2. Etudier les positions d'équilibre en fonction de E . On notera ϕ_0 l'angle d'équilibre, et on étudiera successivement les points suivants:
 - a. Montrer l'existence d'un champ critique E_c dont on donnera l'expression en fonction de p et de k ; pour $E < E_c$ il y a une position d'équilibre ; pour $E > E_c$ il y en a trois.
 - b.α. Calculer le développement limité au premier ordre en $(\phi - \phi_0)$ du couple Γ au voisinage d'une position d'équilibre.
 - β. Conclure sur la stabilité des différents équilibres .
3. Tracer un graphe qualitatif des angles d'équilibre stable en fonction de E .
4. Calculer la valeur numérique de E_c dans notre cas particulier.
5. Calculer l'énergie potentielle totale du système W en fonction de ϕ, E, E_c, p . On choisira une détermination telle que $W = 0$ pour $\phi = 0$. Donner l'allure des graphes de W en fonction de ϕ pour $E > E_c$ et $E < E_c$.
6. On étudie les petits mouvements du système autour des positions d'équilibre stable. On néglige les forces de frottements.
 - a. Montrer que pour $E \neq E_c$ ces mouvements sont sinusoïdaux, de période T . Exprimer T / T_0 (T_0 est la période étudiée en 1.) en fonction de E / E_c et de ϕ_0 .
 - b. Donner une valeur approchée de T / T_0 quand E / E_c est grand devant 1.
 - c. Tracer qualitativement le graphe de T / T_0 en fonction de E .
 - d. Que se passe-t-il pour $E = E_c$?
7. On étudie maintenant des mouvements de grande amplitude. On appelle W_1 l'énergie cinétique du système lorsqu'on passe par la position d'équilibre stable.
 - a. Montrer, à partir des graphes de la question 3., comment on peut obtenir graphiquement les élongations minimum ϕ_1 et maximum ϕ_2 . Faire un schéma dans les différents cas.
 - b. Montrer qu'en général le mouvement est périodique, de période T telle que

$$\pi \frac{T}{T_0} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left[\phi_1^2 - \phi^2 + 2 \frac{E}{E_c} (\cos \phi_1 - \cos \phi) \right]^{\frac{1}{2}} d\phi .$$

• couple, développement au premier ordre ou plus, énergie cinétique, équilibre, graphe,, maximum, minimum, moment d'inertie, stabilité, unité

c. Que se passe-t-il quand $E > E_c$ et que W_1 est égal et opposé à l'énergie potentielle minimum ?

Partie III

On laisse le champ E à une valeur fixe supérieure à E_c et on applique le champ variable $E_1(t)$ selon l'axe Oy . On suppose qu'il y a un frottement visqueux et que les variations de $E_1(t)$ sont très lentes de telle sorte qu'à tout instant le pendule est dans une position de quasi équilibre stable (couple Γ nul, énergie potentielle minimum). De plus, pour simplifier les calculs, on supposera que $(E - E_c) / E_c$ est un infiniment petit, ainsi que E_1 / E_c et l'angle ϕ .

1. Calculer l'angle $\phi \neq 0$ pour $E_1 = 0$ en fonction de $(E - E_c) / E_c$; on ne gardera dans le développement des lignes trigonométriques de ϕ que le premier terme permettant d'obtenir une telle solution.

2.a. Ecrire l'équation de quasi-équilibre donnant ϕ en fonction de E , E_c , E_1 , sans faire d'approximation sur le couple créé par E_1 .

b. Quel doit être l'ordre minimum de E_1 / E_c pour que E_1 agisse sur l'équilibre ? On prend pour infiniment petit principal $(E - E_c) / E_c$.

c. On donne cet ordre à E_1 / E_c . Ecrire l'équation algébrique en ϕ dont les solutions donnent les positions d'équilibre.

d. Faire une étude graphique rapide de cette équation. Distinguer les équilibres stables des équilibres instables.

3. Tracer le graphe de ϕ en fonction de E_1 . Indiquer dans quels sens les différents arcs composant ce graphe peuvent être parcourus.

4.a. On impose à E_1 une variation sinusoïdale de la forme $E_1 = A \sin \omega t$. Montrer graphiquement que le travail fourni par E_1 au cours d'une période est nul si l'amplitude A est inférieure à une valeur critique A_c , dont on donnera l'expression en fonction de E et E_c .

b. Donner une évaluation graphique de ce travail pour $A > A_c$.

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

$$\text{I.1. } I = M \left(\frac{D}{2} \right)^2 + M \left(\frac{D}{2} \right)^2 = M \frac{D^2}{2}.$$

2. Le cours de la rotation d'un solide autour d'un axe fixé donne :

$$I \ddot{\phi} = -k\phi \Rightarrow \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{I} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}.$$

3. Soit $\rho_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ pour l'eau ; $M = \frac{4}{3} \pi R^3 d\rho_0$; $I = \frac{2}{3} \pi R^3 d\rho_0 . D^2$;

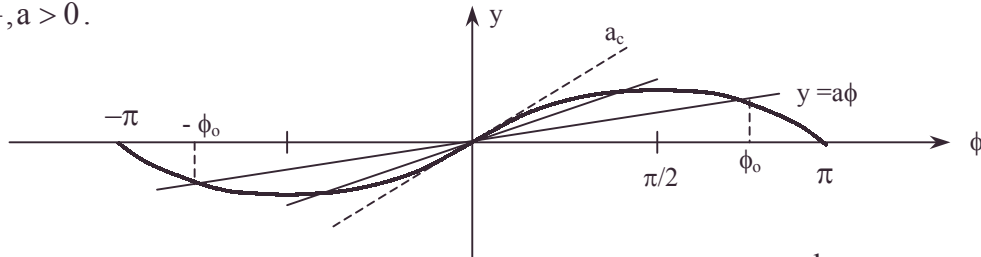
$$k = \frac{4\pi^2 I}{T_0^2} = \frac{8\pi^3 R^3 d\rho_0 D^2}{3T_0^2}$$

AN : $I = 1,37.10^{-9} \text{ kg.m}^2$; $k = 5,414.10^{-10} \text{ N.m}$.

II.1. En plus du couple de rappel précédent, le dipôle subit le couple :

$$\vec{\Gamma}_{\text{es}} = \vec{p} \wedge \vec{E} = pE \sin \phi \vec{z} ; \vec{\Gamma}_{\text{total}} = (-k\phi + pE \sin \phi) \vec{z}.$$

2.a. L'équilibre est défini pour $\vec{\Gamma}_{\text{total}} = \vec{0}$ soit $\frac{k}{pE}\phi = \sin \phi$ dont la résolution graphique classique étudie l'intersection d'une droite $y = a\phi$ et de $y = \sin \phi$ avec $a = \frac{k}{pE}, a > 0$.



La pente limite $a_c = 1$ correspond à une droite tangente en 0 soit $E_c = \frac{k}{p}$.

pour $a > a_c$, soit $E < E_c$ il y a seulement une position d'équilibre : $\phi = 0$;

pour $a < a_c$ soit $E > E_c$, il y a trois positions d'équilibre : $\phi = 0$; $\phi = \pm\phi_0$.

b.α. Position $\phi = 0$: $\sin \phi = \phi + o(\phi^3)$; $\Gamma_z = -k\phi + pE\phi = p\phi(E - E_c)$;

On a un couple total de rappel si $\Gamma_z < 0$ soit $E < E_c$: équilibre stable.

On n'a pas un couple de rappel si $\Gamma_z > 0$ soit $E > E_c$: équilibre instable.

β. Position $\phi = \phi_0 \neq 0$: $\sin \phi = \sin \phi_0 + (\phi - \phi_0)\cos \phi_0 + o(\phi - \phi_0)^2$;

or, $\Gamma_z = pE(\sin \phi - a\phi) = pE[\sin \phi_0 + (\phi - \phi_0)\cos \phi_0 - a\phi_0 - a(\phi - \phi_0)]$;

$\Gamma_z = pE(0 + (\phi - \phi_0)(\cos \phi_0 - a))$;

Γ_z est de rappel si $\cos \phi_0 - a < 0$ cf. $\Gamma = -k(\phi - \phi_0)$

$[\cos \phi_0 = \text{pente de } \sin \phi \text{ en } \phi = \phi_0] \text{ et } [a = \text{pente de la droite}]$;

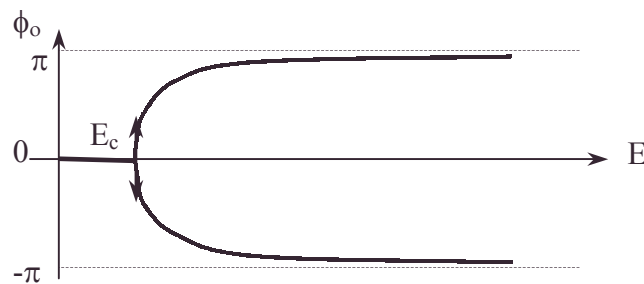
$\phi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vu le graphique $\cos \phi_0 - a < 0$;

$\phi_0 \in \left[+\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$: $\cos \phi_0 < 0$, $\cos \phi_0 - a < 0$,

Le couple total est de rappel : les équilibres ϕ_0 et $-\phi_0$ sont stables.

c. $0 < E < E_c$ $\phi_{\text{stable}} = 0$.

et $E > E_c$ ϕ_{stable} est solution de $a\phi = \sin \phi$.



Etude du voisinage : $E = E_c + 0$: $\phi_0 \neq 0$: $\sin \phi_0 = \phi_0 - \frac{\phi_0^3}{6}$; $\Gamma_z = 0 \Rightarrow$ vu **II.1.**

$$E_c \phi_0 = E \sin \phi_0 = E \phi_0 - \frac{E \phi_0^3}{6} \Rightarrow E - E_c = \frac{E \phi_0^2}{6} \text{ soit } \phi_0 = \pm \sqrt{\frac{6(E - E_c)}{E}}.$$

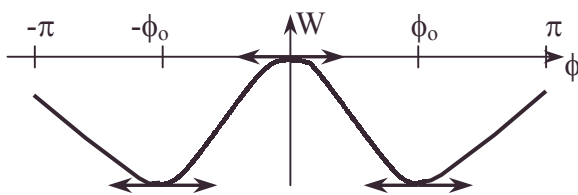
$$\frac{d\phi_0}{dE} = \pm \frac{\frac{E_c}{E^2}}{\sqrt{\frac{6(E-E_c)}{E}}} \rightarrow \pm \infty \text{ quand } E \rightarrow E_c + 0.$$

$$\text{d. } E_c = \frac{k}{p} = \frac{8\pi^3 R^3 d\rho_0 D^2}{3T_0^2 p} : \text{AN} : E_c = 4,92 \text{ V.m}^{-1}.$$

$$\text{3.a. } dW = -d\mathcal{E} = -\Gamma_z d\phi = [-k\phi + pE \sin\phi] d\phi ; W = \frac{1}{2} k\phi^2 + pE \cos\phi + k_1 ;$$

$$\text{or } W(0) = 0 \Rightarrow k_1 = -pE ; W = \frac{1}{2} k\phi^2 + pE(\cos\phi - 1) \text{ fonction paire en } \phi.$$

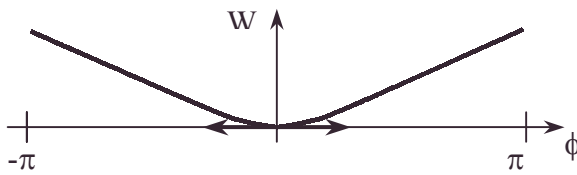
$$\text{b. } E > E_c \quad \frac{dW}{d\phi} = p(E_c \phi - E \sin\phi) :$$



3 annulations cf. **II.2.a.**
 – les équilibres stables correspondent à un minimum de W.
 – l'équilibre instable correspond à un maximum de W.

$$\text{c. } E < E_c \quad \frac{dW}{d\phi} = p(E_c \phi - E \sin\phi) > 0 ;$$

1 annulation : $\phi = 0$ (cf. **II.2.a.**)



L'équilibre stable correspond à un minimum de W.

$$\text{4.a.}\alpha. E < E_c ; \phi_0 = 0 ; I\ddot{\phi} = -k\phi + pE\phi \text{ si } \phi \text{ petit.}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{k}{I} \left[1 - \frac{E}{E_c} \right] \phi = 0 ; \text{ le mouvement est sinusoïdal.}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k \left(1 - \frac{E}{E_c} \right)}} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E}{E_c}}}.$$

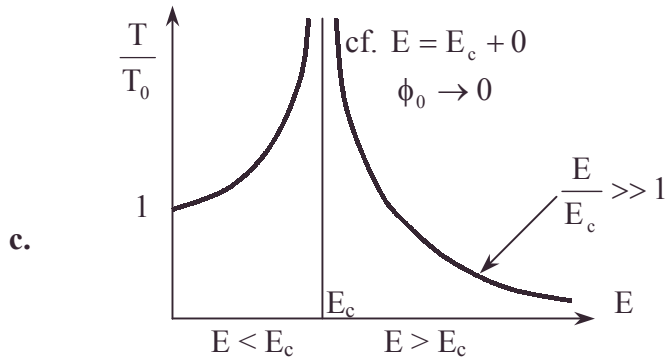
$$\text{b. } E > E_c ; \text{ posons } \varphi = \phi - \phi_0 ; I\ddot{\varphi} = -k(\phi_0 + \varphi) + E(\sin\phi_0 + \varphi \cos\phi_0) ;$$

$$I\ddot{\varphi} + k\varphi \left(1 - \frac{E}{E_c} \cos\phi_0 \right) = 0 ; \text{ or } a - \cos\phi_0 = \frac{k}{pE} - \cos\phi_0 = \frac{k}{pE} \left(1 - \frac{E}{E_c} \right).$$

le mouvement est sinusoïdal car $(a - \cos\phi_0) > 0$ cf. **II.2.a.**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k \left(1 - \frac{E}{E_c} \cos\phi_0 \right)}} ; \frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E}{E_c} \cos\phi_0}}.$$

$$\text{b. On est dans le dernier cas car } \frac{E}{E_c} \gg 1 ; E \rightarrow \infty ; \phi_0 \rightarrow +\pi ; \frac{T}{T_0} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E}{E_c}}} ;$$



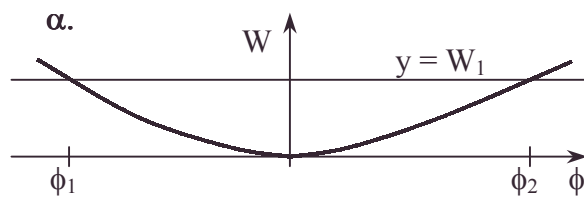
d. Le développement précédent n'est plus valable pour $E = E_c$. En effet, pour ϕ petit : $I\ddot{\phi} = -k\phi + E_c p \sin\phi = -k\phi + E_c p \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} \right) = -\frac{E_c p}{6} \phi^3$.

soit l'équation $\ddot{\phi} + \frac{E_c p}{6I} \phi^3 = 0$.

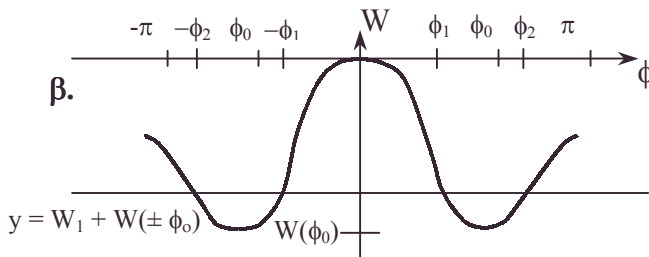
Le mouvement n'est plus sinusoïdal : $T \rightarrow +\infty$ comme le graphe le montre par continuité.

5.a. $E_{\text{cin}} + W = \text{cste} = W_1 + W_{\text{éq.stable}}$; les élongations ϕ_1 et ϕ_2 correspondent à $E_{\text{cin}} = 0$.

Remarque : si la rotation n'a pas de point d'arrêt, elle est périodique ; il n'y a pas d'oscillation.



$E < E_c$; $W_{\text{éq.stable}} = 0$; $W(\phi) = W_1 + 0$
On trouve ϕ_1 et ϕ_2 à l'intersection de $y = W(\phi)$ et $y = W_1$



$E > E_c$; $W_{\text{éq.stable}} = W(\phi_0) < 0$;
 $W(\phi) = W_1 + W(\pm \phi_0)$; on trouve ϕ_1 et ϕ_2 à l'intersection de $y = W(\phi)$ et de $y = W_1 + W(\phi_0)$.

b. α. Par analogie avec les oscillations d'une bille dans une gouttière, l'existence de 2 valeurs ϕ_1, ϕ_2 démontre que le mouvement est périodique ; sinon la rotation se fait sans oscillation.

β. $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$; la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + W(\phi) = W_1 + W_{\text{éq.stable}} = W(\phi_1) \text{ pour } E > E_c \text{ et pour } E_c > E.$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2}{I} (W(\phi_1) - W(\phi)) \text{ soit } \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2}{I} (W(\phi_1) - W(\phi))} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{I}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{W(\phi_1) - W(\phi)}}.$$

On a une demi période en passant de ϕ_1 à ϕ_2 , d'où en intégrant :

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{I}{2}} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{2} k \phi_1^2 + E p (\cos \phi_1 - 1) - \frac{1}{2} k \phi^2 - E p (\cos \phi - 1)}},$$

$$\text{soit } \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{I}{k}} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(\phi_1^2 - \phi^2 + \frac{2E}{E_c} (\cos \phi_1 - \cos \phi))^{\frac{1}{2}}}, \text{ or } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}.$$

$$\Rightarrow \pi \frac{T}{T_0} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \phi_1^2 - \phi^2 + \frac{2E}{E_c} (\cos \phi_1 - \cos \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi. \quad \text{c.q.f.d.}$$

c. $E > E_c$ et $W_1 = -W(\pm \phi_0)$: l'intersection de $y = W_1 + W(\pm \phi_0) = 0$ et de $y = W(\phi)$ donne le point O, seul point d'intersection. L'équilibre en O étant instable, le système va évoluer aléatoirement vers les positions $\phi = \pm \phi_0$ où W_1 assure le passage par $\phi = \pm \pi$, la rotation continue donc sans oscillation.

III. $E > E_c$ mais $\frac{E - E_c}{E_c} \ll 1$ soit $E \neq E_c$; $\frac{E_1}{E_c} \ll 1$; ϕ petit.

1. $E_1 = 0$; au quasi équilibre, $k\phi = pE \sin \phi = pE \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} \right)$.

$$E_c = \frac{k}{p} = E - E \frac{\phi^2}{6} \Rightarrow \phi = \pm \sqrt{6} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.a. $I\ddot{\phi} = -k\phi + pE \sin \phi + E_1 p \cos \phi$; au quasi équilibre, $0 = -k\phi + p(E \sin \phi + E_1 \cos \phi)$, soit $E_c \phi = E \sin \phi + E_1 \cos \phi$.

$$\text{b. } E_c \phi = E \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} \right) + E_1 \left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{E_c} = \frac{\phi \left(1 - \frac{E}{E_c} \left(1 - \frac{\phi^2}{6} \right) \right)}{1 - \frac{\phi^2}{2}} = \frac{\phi(E_c - E)}{E_c} + \frac{E}{E_c} \frac{\phi^3}{6} + \frac{E_c - E}{E_c} \frac{\phi^3}{2} ;$$

soit en première approximation avec

$$\phi_{E_1=0} = \pm \sqrt{6} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{1}{2}}, \left| \frac{E_1}{E_c} \right| = \sqrt{6} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right) = \sqrt{6} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ pour accord des}$$

signes et de $E > E_c$.

Donc l'ordre $\frac{3}{2}$ est l'ordre minimum pour l'intervention de $\frac{E_1}{E_2}$ vu l'énoncé.

c. Si $\frac{E_1}{E_c}$ est de cet ordre, le terme correctif qui suit $\left| \frac{E_1}{E_c} \right| \frac{\phi^2}{2} = 3\sqrt{6} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{5}{2}}$ est négligeable devant le plu

s petit terme en E : $\frac{\phi^3}{6} \neq E_c \sqrt{6} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}}$ cf 1..

• développement au premier ordre ou plus, équilibre, graphe, minimum, théorème du moment cinétique

L'équation algébrique est donc, d'après **2.b.**, $E_c \phi = E \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} \right) + E_1$;

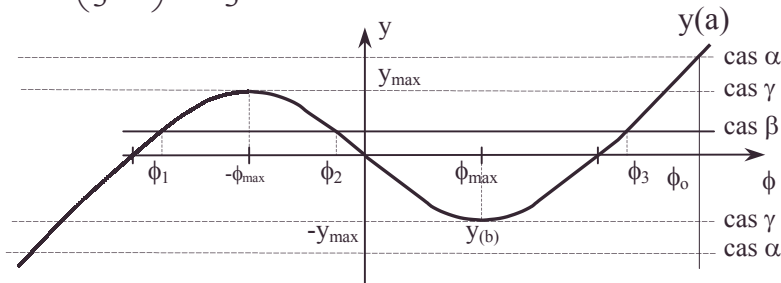
soit $\frac{E_c - E}{E_c} \phi = -\frac{\phi^3}{6} \frac{E}{E_c} + \frac{E_1}{E_c}$ qu'on écrira, en négligeant les ordres supérieurs vu

$$E \neq E_c : \frac{E_1}{E_c} = \frac{\phi^3}{6} - \frac{E - E_c}{E_c} \phi.$$

d. On étudie l'intersection de $y_{(a)} = \frac{E_1}{E_c}$ et $y_{(b)} = \frac{\phi^3}{6} - \frac{E - E_c}{E_c} \phi$:

$$\text{Extrema : } \frac{dy}{d\phi} = \frac{\phi^2}{2} - \frac{E - E_c}{E_c} = 0 \Rightarrow \phi_{\max} = \pm \sqrt{\frac{2(E - E_c)}{E_c}} ; y(\phi_{\max}) = \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{car } \frac{2^{\frac{3}{2}}}{6} - 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{2}{3} \sqrt{2}.$$



$$\alpha. \frac{E_1}{E_c} < -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{E_1}{E_c} > +\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}} ;$$

Une seule intersection ϕ_0 . Etudions le signe de $\frac{I \ddot{\phi}}{\phi - \phi_{eq}}$ (cf. constante de torsion

équivalente) qui est celui de $I \ddot{\phi}(\phi - \phi_0)$.

On constate donc que :

$$p \left(-E_c \phi + E \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} \right) + E_1 \right) (\phi - \phi_0) = p E_c (y_{(a)} - y_{(b)}) (\phi - \phi_0) < 0$$

d'après le graphique : la position est stable.

$$\beta. -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}} < \left| \frac{E_1}{E_c} \right| < +\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}} : 3 \text{ intersections.}$$

Etudions le signe de $\frac{I \ddot{\phi}}{\phi - \phi_{eq}}$ qui est celui de :

$$p \left(-E_c \phi + E \left(\phi - \frac{\phi^3}{6} \right) + E_1 \right) (\phi - \phi_{eq}) = p E_c (y_{(a)} - y_{(b)}) (\phi - \phi_{eq})$$

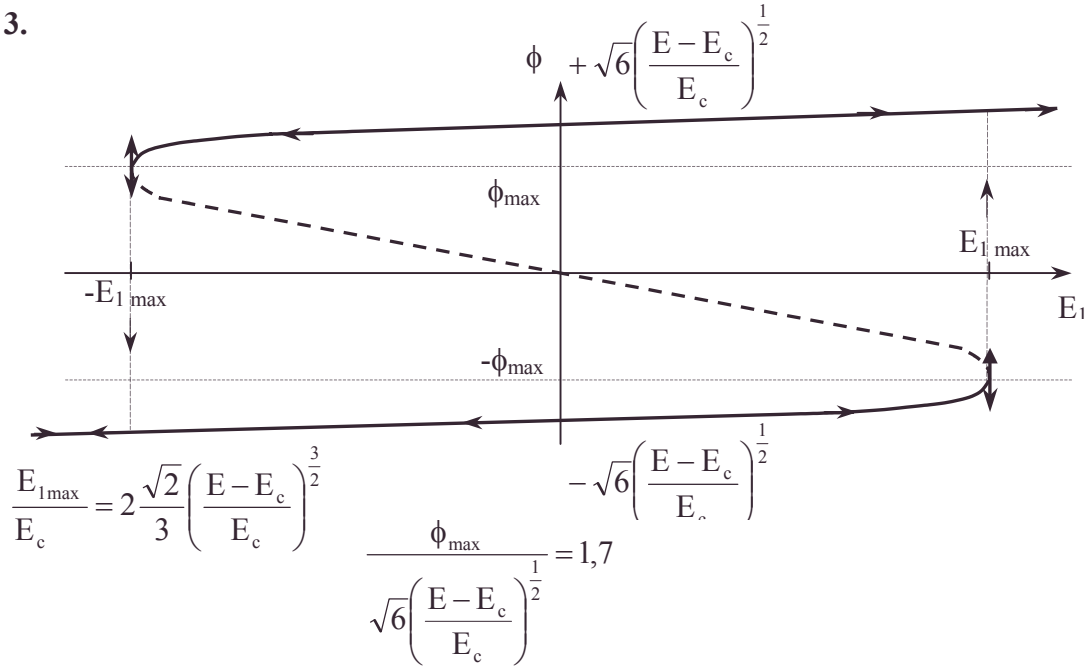
– Comme précédemment pour ϕ_0 , on a le signe – (soit un couple de rappel) de la stabilité pour ϕ_1 et ϕ_3 .

– Ce n'est pas le cas pour ϕ_2 , position instable (couple de signe positif).

$\gamma. \frac{E_1}{E_c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}}$: 2 intersections. (dont l'une double). La solution de type ϕ_3

ou ϕ_1 est stable. La solution double (le maximum $\pm \phi_{\max}$) considérée comme limite de ϕ_2 est instable. Cette solution considérée comme limite de ϕ_3 (ou ϕ_1) est apparemment stable. De fait, le cas défavorable d'instabilité en $\pm \phi_{\max}$ est susceptible de se produire.

3.



En pointillé gras, les positions instables.

Soit $\phi > 0$, quand E_1 croît à partir de $-E_{1\max}$, ϕ croît; on peut y revenir mais si l'on décroît au-delà de $-E_{1\max}$, on passe sur l'autre portion de courbe stable.

Soit $\phi < 0$, quand E_1 décroît à partir de $+E_{1\max}$, ϕ décroît, d'où les flèches. On peut faire la démarche inverse mais si l'on dépasse $E_1 = E_{1\max}$, on passe sur l'autre portion de courbe stable.

4.a.α. Si $A \leq E_c \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}}$, on a une succession d'états de quasi équilibre par

continuité (dans le cadre de l'approximation d'états quasi stationnaires: constante de temps d'établissement faible) et il y a oscillation; ϕ est de même période que E_1 . On reste sur la portion supérieure de $\phi(E_1)$ ou inférieure selon les conditions initiales.

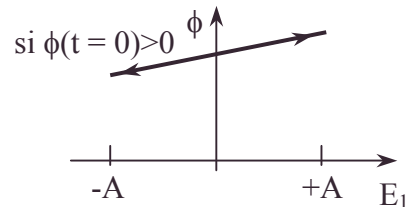
$$\mathcal{E} = \int_0^T \mathcal{M}_z d\phi = \int_0^T p(-E_c \phi + E\phi - E \frac{\phi^3}{6} + E_1) d\phi$$

$$\text{car } \mathcal{M}_z = I\ddot{\theta}; \text{ or } [\phi^2]_0^T = 0; [\phi^4]_0^T = 0;$$

$$\text{on voit graphiquement que } \int_0^T E_1 d\phi = 0 \text{ car le}$$

segment est parcouru dans les deux sens pendant T .

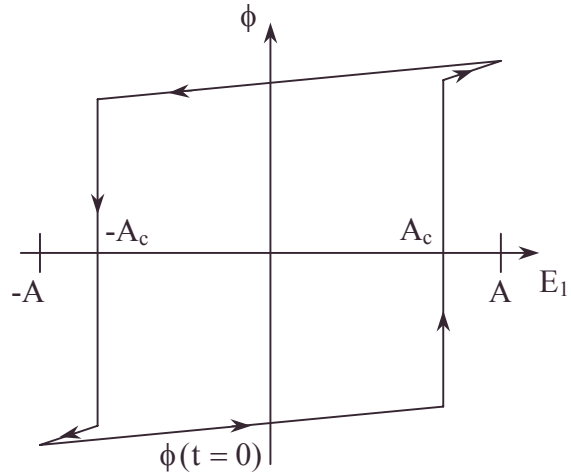
$$\text{Conclusion : } \mathcal{E} = 0 \Rightarrow A_c = E_{1\max} = 2E_c \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}}$$



β. Si $A \geq E_c \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}}$;

On passe de manière discontinue en $E_1 = \pm E_{1\max} = \pm A_c$ d'une portion de courbe à l'autre.

On a un phénomène d'hystérésis.
(cf. comparateur)



$$\text{b. } \mathcal{E} = \int_0^T p(-E_c \phi + E \phi - E \frac{\phi^3}{6}) d\phi + \int_0^T p E_1(t) d\phi;$$

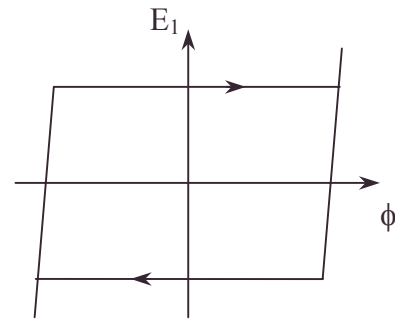
$$\text{soit } \mathcal{E} = \left[-p E_c \frac{\phi^2}{2} + p E \frac{\phi^2}{2} - p E \frac{\phi^4}{24} \right]_0^T + p \int_0^T E_1 d\phi = 0 + p(\text{aire du cycle})$$

avec ici une aire positive car l'intégrale est positive sur le parcours (équivalent) ci-contre :
Approximation de l'aire du cycle assimilé à un parallélogramme de côtés $2|\phi_{\text{eq}}|_{E_1=0}$ et $2A_c$;

$$\text{soit } 4\sqrt{6} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2E_c \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{qui devient } \frac{16\sqrt{3}}{3} E_c \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^2,$$

$$\text{soit } \mathcal{E} = 16p \frac{\sqrt{3}}{3} E_c \left(\frac{E - E_c}{E_c} \right)^2.$$



2.2.6. Pendule pesant

On notera \dot{A}, \ddot{A} ... les dérivées successives par rapport au temps t de la fonction $A(t)$:

$$\dot{A}(t) = \frac{d}{dt} A(t)$$

I. L'objet du problème est d'étudier les caractéristiques du mouvement de la pièce mobile (\mathcal{S}) d'une machine tournante. (\mathcal{S}) peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal Δ passant par le point O , distant de $a = \|\overline{OG}\|$ du centre d'inertie G de (\mathcal{S}). On note M la masse de (\mathcal{S}), J_Δ son moment d'inertie par rapport à Δ et \vec{g} l'accélération de la pesanteur. On choisit par convention $g > 0$ (figure 1).

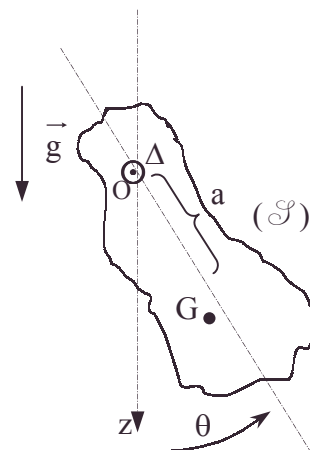


Figure 1

- centre d'inertie, hystérésis et mécanique, moment d'inertie, mouvement sans frottement

1. On suppose que la rotation autour de Δ s'effectue sans frottements. On repère la position de (\mathcal{S}) par l'angle θ que fait \overline{OG} avec la verticale descendante contenant O.

a. Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ lorsque (\mathcal{S}) tourne librement autour de Δ .

b. Trouver les positions d'équilibre de (\mathcal{S}) . Discuter brièvement leur stabilité.

2. L'articulation en O n'est pas parfaite, et (\mathcal{S}) ne se déplace pas dans le vide. On suppose que les actions s'opposant à tout mouvement de (\mathcal{S}) sont correctement décrites par la présence d'un couple résistif dont le moment par rapport à Δ vaut, en valeur absolue, $f|\dot{\theta}|$ où f est une constante positive.

a. Montrer qu'on peut écrire l'équation d'évolution de θ sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} + \Omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad [1].$$

Déterminer Ω_0 , Q . En quelle unité s'exprime chacun de ces paramètres ?

On supposera $Q \gg 1$, mais non infini, dans tout le problème.

b. On écarte (\mathcal{S}) très légèrement de sa position d'équilibre stable en lui conférant un supplément E_0 d'énergie potentielle ; on l'abandonne sans vitesse initiale. Comment varie l'énergie mécanique totale associée au mouvement de retour à l'équilibre ?

Quel sens physique donner à Ω_0 , Q ?

3. Un moteur exerce sur (\mathcal{S}) un couple de moment constant par rapport à Δ , noté $\Gamma_0 = J_{\Delta} \gamma_0$. On suppose dans cette question $a = 0$. Montrer que la vitesse angulaire de rotation de (\mathcal{S}) atteint une valeur limite ω_{lim} que l'on déterminera. Que devient alors la puissance fournie par le moteur ? Les considérations précédentes sont-elles qualitativement modifiées si G s'écarte légèrement de Δ ?

4. On suppose que le moteur n'exerce sur (\mathcal{S}) qu'un couple de moment $\Gamma(t) = \Gamma_1 \cos \omega t$, avec $\Gamma_1 = J_{\Delta} \gamma_1$ assez petit.

a. Montrer qu'on peut supposer que θ reste voisin de 0 et que, après un régime transitoire analogue à celui décrit au **I.2.b.**, on peut écrire : $\theta(t) = \theta_f(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$. Déterminer $\theta_f(\omega)$ en fonction de γ_1, Ω_0, Q et ω . Montrer que θ_f passe par un maximum pour une valeur ω_r que l'on déterminera. Calculer $\theta_f(\omega_r)$. Préciser l'hypothèse effectuée sur γ_1 .

b. On suppose $\omega = \omega_r$. Calculer la puissance moyenne fournie par le moteur. Par quel processus est-elle dissipée ? Justifier.

c. Représenter graphiquement $\left(\frac{\theta_f(\omega)}{\theta_f(\omega_r)} \right)$ en fonction de $\left(\frac{\omega}{\Omega_0} \right)$ au voisinage de

$\omega = \omega_r$. On supposera $Q = 8$.

II. Dans cette partie, on assimile (\mathcal{S}) à un pendule simple : une masse M ponctuelle est située au point G' ; elle est reliée par une tige rigide de longueur L et de masse négligeable au point O, point d'intersection de l'axe de rotation horizontal Δ avec le plan vertical dans lequel se fait le mouvement.

1. Calculer les valeurs à donner à L et f pour que le mouvement libre du pendule simple obéisse à l'équation [1] du **I.2.a.** On suppose désormais ces conditions réalisées.

• analogie, conditions initiales, développement au premier ordre ou plus, équilibre, graphe, maximum, stabilité, unité

2. A la suite d'un usage prolongé, la machine est détériorée : l'axe Δ , qui par hypothèse reste horizontal, n'est plus fixe dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

On repère sa position par $\overrightarrow{O_1O}$, où O_1 est un point fixe de ce référentiel (figure 2). O est mobile le long de la verticale contenant O_1 . On note $\overrightarrow{O_1O} = z_0(t)$.

a. Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ , angle que fait $\overrightarrow{OG'}$ avec la verticale. Quelles sont les positions d'équilibre du pendule ?

b. Le mouvement de O vérifie $z_0(t) = Z_0 \cos \Omega t$. Montrer qu'on peut alors écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta - \omega_0^2 h \cos \Omega t \sin \theta \quad [2]$$

Déterminer λ , ω_0 , h en fonction de Ω_0 , Q , Z_0 , L .

3. On se place au voisinage de la position d'équilibre $\theta = 0$. Cette hypothèse n'est pas suffisante pour permettre un calcul analytique de $\theta(t)$. On montre néanmoins que l'influence du mouvement du point O est particulièrement importante lorsque Ω est proche de $2\omega_0$, ce que l'on supposera.

a. Lorsque $h \ll 1$, on peut chercher une solution particulière approchée de l'équation du mouvement sous la

forme : $\theta_a(t) = \theta_1 \exp(st) \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right)$. [3]

En remplaçant, et en négligeant les termes variant à une fréquence différente de celle(s) de $\theta_a(t)$, qui sont compensés par des termes négligés dans la solution approchée [3], établir les équations donnant s et ψ . En déduire l'équation [4], du quatrième degré, que doit vérifier le paramètre s .

b. On néglige, dans un premier temps, l'amortissement du pendule : $\lambda = 0$.

α. Montrer que si h vérifie $h^2 > 4\left(1 - \frac{\Omega^2}{4\omega_0^2}\right)^2$, l'équation [4] admet des solutions

réelles. Que dire alors de la stabilité de la position d'équilibre $\theta = 0$?

β. Représenter, au voisinage du point $(1, 0)$ dans le plan des paramètres $\left(\frac{\Omega^2}{4\omega_0^2}, h\right)$, la courbe limite (\mathcal{C}) du domaine dans lequel la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

c. Déterminer, lorsque $\lambda \neq 0$, l'équation de la courbe (\mathcal{C}') devant être substituée à (\mathcal{C}). Représenter son allure sur le graphe précédent, en précisant les coordonnées de son minimum, dans le cas particulier $Q = 8$.

Quelle interprétation physique donner à la position de ce minimum ?

4. On se place désormais dans l'hypothèse où le mouvement du point O , décrit par la loi $z_0(t) = Z_0 \cos \Omega t$, est de faible amplitude et se produit à une fréquence très élevée : $\Omega \gg \omega_0$. On cherche alors les solutions de l'équation [2] sous la forme :

$\theta(t) = \theta_\ell(t) + \theta_r(t)$ où θ_ℓ et θ_r regroupent respectivement les variations "lentes" et "rapides" de θ : si on représente par la notation \bar{A} la valeur moyenne de la fonction $A(t)$ sur une période $2\pi/\Omega$ du mouvement "rapide" de O , on suppose $\bar{\theta} = \theta_\ell$ et donc

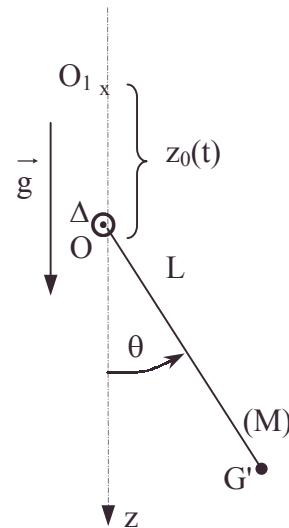


Figure 2

$\bar{\theta}_r = 0$. Comme $Z_0 \ll L$, on s'attend à ce que $|\theta_r| \ll |\theta_\ell|$. En revanche, θ_ℓ n'est pas nécessairement petit.

a. Etablir l'équation liant θ_ℓ , θ_r et leurs dérivées.

b. En ne conservant que les termes présentant une variation rapide et en ne gardant, de plus, que les termes d'ordre le plus bas en h et θ_r , montrer que θ_r est solution d'une équation du même type que celle étudiée en **I.4.**, pour une valeur particulière de γ_1 dont on donnera l'expression en fonction de h , ω_0 , θ_ℓ . En déduire que l'on peut écrire :

$$\theta_r(t) = h \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \sin(\theta_\ell) \cos \Omega t.$$

c. Etablir l'équation d'évolution de θ_ℓ en effectuant la moyenne sur une période du mouvement rapide de l'équation trouvée au **II.4.a.** Montrer qu'on retrouve l'équation d'évolution libre d'un pendule amorti pour lequel on aurait ajouté à l'énergie potentielle de pesanteur l'énergie cinétique moyenne U_r , associée au mouvement rapide, soit :

$$U_r = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}_r^2.$$

d. Conclure sur la stabilité des positions d'équilibre du système. Montrer en particulier que, pour Z_0 supérieur à une valeur Z_c que l'on déterminera, la position inversée $\theta = \pi$ devient stable.

III. Régime non linéaire.

On s'intéresse désormais au mouvement de (\mathcal{S}) dans le cas où l'approximation $\sin \theta = \theta$ n'est plus suffisante, bien que généralement l'on s'écarte peu de la position d'équilibre stable.

1. On suppose, comme au **I.4.a.**, que le moteur n'exerce sur (\mathcal{S}) qu'un couple de moment $\Gamma(t) = \Gamma_1 \cos \omega t$ où $\Gamma_1 = \gamma_1 J_\Delta$ est petit.

a. Ecrire sous une forme analogue à [1] l'équation différentielle [6] vérifiée par θ .

b. On cherche une solution particulière approchée de l'équation [6] sous la forme:

$$\theta_b(t) = -\alpha \sin(\omega t + \beta) \text{ où } \alpha, \beta \text{ peuvent dépendre de } \omega.$$

α . Etablir les équations vérifiées par α et β , en suivant une démarche analogue à celle du **II.3.b.**, c'est-à-dire en développant [6] et en ne tenant pas compte des termes de fréquence supérieure à $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ qui devraient être compensés par l'introduction de termes de fréquence plus élevée dans la forme approchée $\theta_b(t)$ retenue.

On pourra utiliser les fonctions appartenant à la famille des fonctions de Bessel J_n ,

$$n \in \mathbb{N}, \text{ définies par : } J_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iy \sin \varphi} e^{-in\varphi} d\varphi = \left(\frac{1}{2}y\right)^n \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}y^2\right)^q}{q!(n+q)!}.$$

On admettra, sans démonstration, la validité du développement en série ci-dessus, et celle de la relation suivante : $e^{iy \sin(\varphi)} = J_0(y) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}(y) \cos(2p\varphi)$

$$+ 2i \sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}(y) \sin((2p+1)\varphi).$$

$$\textbf{\beta. En déduire : } \left(-\alpha\omega^2 + 2\Omega_0^2 J_1(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{\alpha\omega\Omega_0}{Q}\right)^2 = \gamma_1^2 \quad [7].$$

c. On restreint l'étude aux valeurs de ω proches de Ω_0 , posant $\omega = \Omega_0(1 + \delta)$.

On suppose que α reste tout de même petit. En développant $J_1(\alpha)$ au troisième ordre inclus en α , écrire l'équation [8] liant δ et $u = \alpha^2$. Cette équation définit implicitement la "courbe de résonance" $u(\delta)$.

d. On peut résoudre très simplement l'équation précédente dans le cas particulier : $\gamma_1 = 0$ et $Q = +\infty$. Quelle signification physique donner à cette démarche ? Que représente la valeur de ω associée au paramètre δ ? Comment varie δ avec u ?

2. Etude de la courbe de résonance

a. Montrer que u passe par un maximum u_m pour une faible valeur de δ , notée δ_r , dont on donnera l'expression en fonction de u_m , Q . Déterminer ensuite u_m , puis δ_r , en fonction de Q , Ω_0 , γ_1 . On rappelle que $Q \gg 1$.

b. Lorsque γ_1 tend vers 0, retrouve-t-on à l'aide de δ_r , la valeur ω_r déterminée au I.4 ?

c. On se place au voisinage de la résonance, de sorte qu'on peut écrire l'équation [8] trouvée au c. sous la forme : $\frac{uQ^2}{u_m} \left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right] = 1$ [9].

On se propose dans la suite de cette question, d'étudier le nombre de solutions u correspondant à une valeur donnée de δ .

α. Lorsque u_m tend vers 0, que devient l'équation [9] ? Comparer au résultat de I.4.

β. Montrer que si $\delta > 0$, [9] n'admet pour chaque valeur de δ qu'une seule solution u .

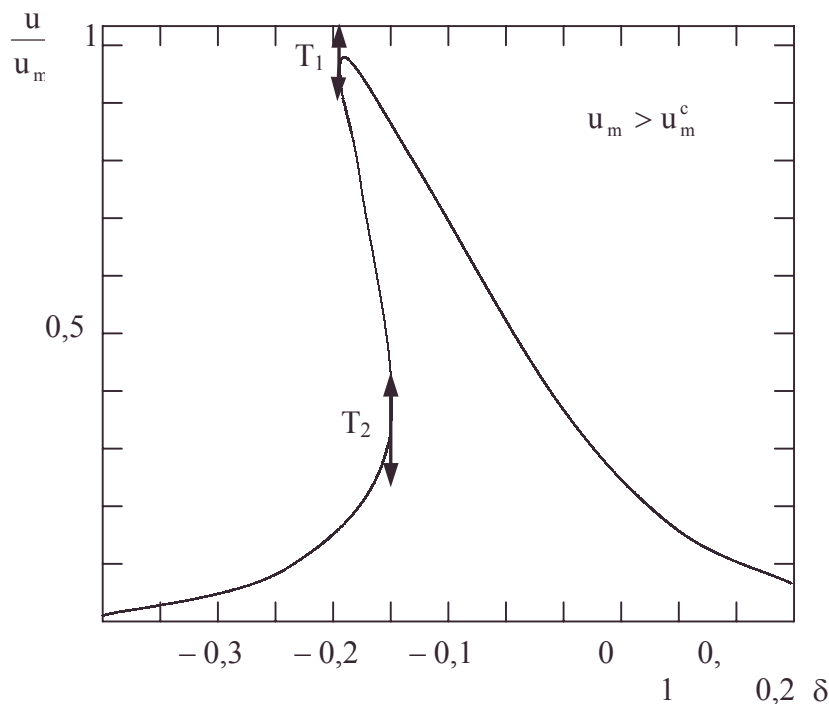


Figure 8

γ. Montrer que, lorsque le paramètre u_m est supérieur à une certaine valeur u_m^c , il peut exister pour certaines valeurs de δ trois solutions u à l'équation [9] qui sont physiquement acceptables a priori. La courbe de résonance a, dans ce cas, l'allure représentée sur la figure 8 : elle présente deux points T_1 et T_2 à tangente verticale.

Montrer que, lorsque $u_m = u_m^c$, T_1 et T_2 sont confondus en un unique point C dont les coordonnées (δ_c, u_c) vérifient $\delta_c = \frac{-\sqrt{3}}{2Q}$; $u_c = \frac{16}{Q\sqrt{3}}$.

Calculer alors u_m^c , puis la valeur γ_1^c associée, en fonction de Ω_0 , Q .

Indication – On pourra résoudre en δ l'équation [9], ou bien s'aider d'une représentation graphique pour étudier le nombre de solutions u de [9] pour une valeur donnée de δ .

δ. On suppose $\gamma_1 > \gamma_1^c$. Etablir l'équation [10] liant Q , u , δ , qui doit être satisfaite par les coordonnées des points T_1 et T_2 .

Décrire l'évolution du mouvement de (\mathcal{S}) lorsqu'on fait décroître lentement ω depuis Ω_0 jusqu'à une valeur très faible. Que se passe-t-il si, ultérieurement, on fait à nouveau croître lentement ω de 0 à Ω_0 ?

3. Pour que la solution approchée $\theta_b(t)$ de l'équation [6] soit physiquement acceptable, il faut que toute perturbation θ_ε de celle-ci soit amortie.

a. On pose $\theta(t) = \theta_b(t) + \theta_\varepsilon(t)$, avec $\theta_\varepsilon \ll 1$. Ecrire l'équation différentielle [11] vérifiée par la fonction θ_ε .

b. En ne conservant dans le développement de $\cos(\theta(t))$ que les termes dont les coefficients s'expriment avec $J_0(\alpha)$, $J_2(\alpha)$, montrer que cette équation peut être mise sous la forme [2] étudiée à la question 2.b. Quelles valeurs prennent alors les paramètres λ , ω_0 , h , Ω ?

4. La stabilité de la solution $\theta_\varepsilon = 0$ de l'équation [11], et donc la pertinence de la solution approchée $\theta_b(t)$ trouvée au III.2., dépend de la situation des paramètres par rapport à la courbe (\mathcal{C}') du II.3.c.

a. Montrer brièvement que, pour $\gamma_1 \ll \gamma_1^c$, les solutions approchées $\theta_b(t)$ associées aux points de la courbe de résonance [9] proches de $\omega = \Omega_0$ correspondent à un mouvement stable.

On rappelle que $Q \gg 1$.

b. On s'intéresse au point $u = u_c$, $\delta = \delta_c$, lorsque $\gamma_1 = \gamma_1^c$. En développant $J_0(\alpha)$ et $J_2(\alpha)$ à l'ordre deux inclus en α , montrer que pour ces valeurs des paramètres le mouvement décrit par la solution approchée $\theta_b(t)$ correspond à la limite de la stabilité.

c. Montrer que, lorsqu'il existe deux points à tangente verticale comme dans le cas illustré sur la figure 8 ($\gamma_1 > \gamma_1^c$), les solutions associées à ces points correspondent toujours, dans le cadre de l'approximation du c., à la limite de la stabilité de la solution $\theta_\varepsilon = 0$ de l'équation [11].

Que peut-on penser des solutions associées aux points de la courbe de la figure 8 compris entre les deux points à tangente verticale ?

ENS ; Durée 4h

Corrigé

I.1.a. Le théorème du moment cinétique en O point fixe donne :

$$J_A \ddot{\theta} = -Mga \sin \theta, \text{ la liaison étant parfaite.}$$

b. $E_p = -Mga \cos \theta$ avec; les équilibres sont des extrema de E_p ;

• développement au premier ordre ou plus, équilibre, graphe, perturbation, résonance, stabilité, théorème du moment cinétique

$$\frac{dE_p}{d\theta} = Mga \sin \theta = 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi : 2 \text{ équilibres.}$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = Mga \cos \theta ; \frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ équilibre stable ; } \frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0 \text{ pour } \theta = \pi, \text{ équilibre instable.}$$

2.a. Le T.M.C. donne : $J_\Delta \ddot{\theta} = -Mga \sin \theta - f \dot{\theta}$, qui peut s'écrire

$$\ddot{\theta} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} + \Omega_0^2 \sin \theta = 0, \text{ avec } \frac{\Omega_0}{Q} = \frac{f}{J_\Delta} \text{ et } \Omega_0 = \left(\frac{Mga}{J_\Delta} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ soit } Q = \frac{(MgaJ_\Delta)^{\frac{1}{2}}}{f}.$$

$\ddot{\theta}$ s'exprimant en s^{-2} , $\dot{\theta}$ en s^{-1} ; on en déduit que Ω_0 s'exprime en rad.s^{-1} et que Q n'a pas d'unité car sans dimension.

b.α. $E = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + Mga(1 - \cos \theta) = 0 + E_0$; $dE = -f \dot{\theta} d\theta$ vu l'effet dissipatif, E ne

se conserve pas; si l'amortissement f est faible (ou Q grand) , les oscillations du pendule vont diminuer lentement jusqu'à l'immobilité de l'équilibre stable.

β. Ω_0 est la pulsation libre en l'absence d'amortissement $f = 0$.

γ. Prenons l'analogie du circuit R, L, C série d'équation : $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$ soit

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \text{ de la forme souhaitée quand } \theta \text{ est petit avec } \Omega_0^2 = \frac{1}{LC} ;$$

$$\frac{\Omega_0}{Q} = \frac{R}{L}, \text{ soit } Q = \frac{L}{R} \Omega_0 : \text{ on reconnaît le facteur de qualité du circuit. Rappelons sa}$$

$$\text{bande passante relative : } \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

3. $J_\Delta \ddot{\theta} = -f \dot{\theta} + J_\Delta \gamma_0$ (cf. a = 0) ;

a. La solution particulière est la valeur à t infini (quand rien ne varie plus)

$$\omega_{\text{lim}} = J_\Delta \frac{\gamma_0}{f}.$$

b. Le moteur n'accroissant pas l'énergie cinétique de rotation, la puissance fournie compense la puissance perdue par frottement.

c. En supposant $\dot{\theta}_\infty$ sensiblement constant, la puissance relative au mouvement périodique de G étant en moyenne nulle : $\langle Mga \sin \theta \dot{\theta} \rangle = 0$, on a la même conclusion qualitative.

4.a. $J_\Delta \ddot{\theta} = -Mga \sin \theta - f \dot{\theta} + J_\Delta \gamma_1 \cos \omega t$, on peut supposer que pour une excitation petite, θ est petit, soit : $\ddot{\theta} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} + \Omega_0^2 \theta = \gamma_1 \cos \omega t$, la solution particulière seule demeure après le régime transitoire. Appliquons la méthode complexe à l'équation complexe associée : $\ddot{z} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{z} + \Omega_0^2 z = \gamma_1 e^{j\omega t}$ avec $z = \theta_f e^{j(\omega t + \varphi)}$.

$$\theta_f e^{j\varphi} = \frac{\gamma_1}{-\omega^2 + \frac{\Omega_0^2}{Q} j\omega + \Omega_0^2}$$

$$= \frac{\gamma_1 \left[\Omega_0^2 - \omega^2 - j \frac{\Omega_0^2}{Q} \omega \right]}{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 2\Omega_0^2}{Q^2}} = \theta_f (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Rightarrow \theta_f(\omega) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\Omega_0^2}{Q^2}}}$$

$$\text{et } \varphi = \arctan \frac{\frac{\Omega_0 \omega}{Q}}{\omega^2 - \Omega_0^2}.$$

$$\frac{d \ln \theta_f^2}{d\omega} = \frac{- \left[-4(\Omega_0^2 - \omega^2)\omega + 2\omega \frac{\Omega_0^2}{Q^2} \right]}{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\Omega_0^2}{Q^2}} = \frac{-2\omega \left[2\omega^2 - 2\Omega_0^2 + \frac{\Omega_0^2}{Q^2} \right]}{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\Omega_0^2}{Q^2}}.$$

Le maximum de la résonance (cf. circuit RLC) est pour $\omega_r^2 = \Omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)$

$$\theta_f(\omega_r) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\frac{\Omega_0^4}{4Q^4} + \frac{\Omega_0^4}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)}} = \frac{\gamma_1 Q}{\Omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^4} \right)^{\frac{1}{2}}};$$

soit si $Q \gg 1$: $\omega_r = \Omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \Omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) \neq \Omega_0$, alors $\theta_f(\omega_r) \neq \frac{\gamma_1 Q}{\Omega_0^2}$.

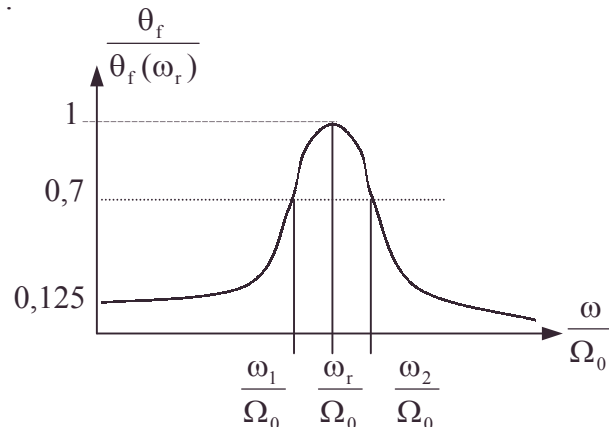
La linéarisation exige θ_f petit donc : $\gamma_1 \ll \frac{\Omega_0^2}{Q}$.

$$\mathbf{b. \alpha.} \quad P_{\text{re\acute{c}ue}} = \Gamma \dot{\theta} ; \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T (-J_{\Delta} \gamma_1 \theta_f \omega \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi)) dt = \frac{-\omega}{2} J_{\Delta} \gamma_1 \theta_f \sin \varphi.$$

$$\bar{P}(\omega_r) = \frac{\omega_r}{2} J_{\Delta} \gamma_1 \frac{\Omega_0}{Q} \omega_r \frac{\gamma_1}{\left[(\Omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + \omega_r^2 \frac{\Omega_0^2}{Q^2} \right]} \neq \frac{J_{\Delta}}{2} \gamma_1^2 \frac{Q}{\Omega^2} \text{ avec } \omega_r \neq \Omega_0.$$

\beta. En moyenne (comme pour un circuit RLC) la puissance fournie compense la dissipation par frottement (cf. $-f \dot{\theta} \frac{d\theta}{dt}$).

$$\mathbf{c.} \quad \theta_f(\omega) = \frac{\gamma_1 Q}{\Omega_0^2 \sqrt{Q^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right)}}$$



$$\frac{\theta_f(\omega)}{\theta_f(\omega_r)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{4Q^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{Q^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}}.$$

$$\frac{\frac{\omega_2}{\Omega_0} - \frac{\omega_1}{\Omega_0}}{\frac{\omega_r}{\Omega_0}} = \frac{1}{Q} = 0,125 ; Q \text{ n'est pas très grand : la bande passante n'est pas faible.}$$

II.1. Le théorème du moment cinétique appliqué au pendule simple s'écrit :

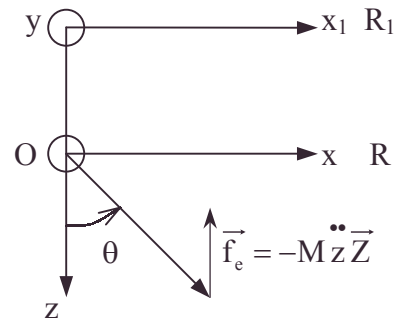
$$ML^2 \ddot{\theta} = -MgL \sin \theta - f \dot{\theta} ; \text{ l'identification donne : } L = \frac{g}{\Omega_0^2} ; f = \frac{Mg^2}{Q\Omega_0^3}.$$

2.a. R est un repère en translation dans R_1 .

Dans R, il faut ajouter le moment de la force d'inertie (d'entraînement).

$$ML^2 \ddot{\theta} = -MgL \sin \theta - f \dot{\theta} + M \ddot{z}_0 L \sin \theta.$$

$$\alpha. \text{ Soit } \ddot{\theta} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} + \left(\Omega_0^2 - \frac{\ddot{z}_0}{L} \right) \sin \theta = 0.$$



$$\beta. \text{ Formellement vu I.1. et 4. } E_p = - \left(\Omega_0^2 - \frac{\ddot{z}_0}{L} \right) J_\Delta \cos \theta ; \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \left(\Omega_0^2 - \frac{\ddot{z}_0}{L} \right) J_\Delta \sin \theta,$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = \left(\Omega_0^2 - \frac{\ddot{z}_0}{L} \right) J_\Delta \cos \theta. \text{ On sait que l'équilibre stable satisfait } \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} > 0 ;$$

L'équilibre où $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$ est donné par $\sin \theta = 0$. Si $\Omega_0^2 - \frac{\ddot{z}_0}{L} > 0$, $\theta = 0$ est

l'équilibre stable, $\theta = \pi$ étant instable, mais si $\Omega_0^2 - \frac{\ddot{z}_0}{L} < 0$, l'équilibre $\theta = \pi$ est stable et l'équilibre $\theta = 0$ instable.

$$b. \ddot{z}_0 = -Z_0 \Omega^2 \cos \Omega t \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} = -\Omega_0^2 \sin \theta - \frac{Z_0}{L} \Omega^2 \cos \Omega t \sin \theta.$$

$$\text{On en déduit par identification : } \lambda = \frac{\Omega_0}{Q} ; \omega_0 = \Omega_0 ; h = \frac{Z_0}{L} \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^2.$$

3.a. $\Omega \neq 2\omega_0$; $h \neq 4\frac{Z_0}{L} \ll 1$; vu l'énoncé de **3.a.**

on linéarise $\sin \theta$ en θ avec $\theta_a = \theta_1 \exp st \left[\cos \frac{\Omega}{2} t \cos \psi - \sin \frac{\Omega}{2} t \sin \psi \right]$.

$$\dot{\theta}_a = s\theta_a - \frac{\Omega}{2}\theta_1 \exp st \sin\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) = s\theta - \frac{\Omega}{2}\theta_1 \exp st \left(\sin \frac{\Omega}{2} t \cos \psi + \cos \frac{\Omega}{2} t \sin \psi \right) ;$$

$$\ddot{\theta}_a = s \left(s\theta_a - \frac{\Omega}{2}\theta_1 \exp st \sin\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) \right) - \frac{\Omega}{2}\theta_1 s \exp st \sin\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) - \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \theta_1 \exp st \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right)$$

$$\ddot{\theta}_a = \left(s^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right) \theta_1 \exp st \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) - s\Omega\theta_1 \exp st \sin\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) ;$$

or vu le second membre de l'équation **2.b.**

$$\cos \Omega t \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{3\Omega}{2}t + \psi\right) + \cos\left(\frac{\Omega}{2}t - \psi\right) \right] , \text{ soit}$$

$$\cos \Omega t \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\Omega}{2} t \cos \psi + \sin \frac{\Omega}{2} t \sin \psi \right) \text{ en négligeant la pulsation } \frac{3\Omega}{2}$$

Remplaçons dans l'équation différentielle.

On obtient une relation de la forme $A \cos \frac{\Omega}{2} t + B \sin \frac{\Omega}{2} t = 0$ et vu l'indépendance de ces deux fonctions (cf. base) : $A = 0$; $B = 0$ ce qui s'écrit :

$$\left[s^2 - \frac{\Omega^2}{4} + \lambda s + \omega_0^2 \left(1 + \frac{h}{2} \right) \right] \cos \psi - \left(s\Omega + \frac{\lambda\Omega}{2} \right) \sin \psi = 0 \text{ et}$$

$$\left(s\Omega + \frac{\lambda}{2}\Omega \right) \cos \psi + \left[s^2 - \frac{\Omega^2}{4} + \lambda s + \omega_0^2 \left(1 - \frac{h}{2} \right) \right] \sin \psi = 0 ; \text{ pour que ce système ait des}$$

solutions en $\sin \psi$ et $\cos \psi$, le déterminant doit être nul \Rightarrow l'équation du 4^e degré en s :

$$\left[s^2 - \frac{\Omega^2}{4} + \lambda s + \omega_0^2 \left(1 + \frac{h}{2} \right) \right] \left[s^2 - \frac{\Omega^2}{4} + \lambda s + \omega_0^2 \left(1 - \frac{h}{2} \right) \right] + \left(s\Omega + \frac{\lambda\Omega}{2} \right)^2 = 0 . \quad [4]$$

$$\mathbf{b.1.a.} \quad \lambda = 0 ; \text{ il reste } \left(s^2 - \frac{\Omega^2}{4} + \omega_0^2 \right)^2 - \omega_0^4 \frac{h^2}{4} + s^2 \Omega^2 = 0 ,$$

$$s^4 + s^2 \left(\Omega^2 + 2 \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right) \right) + \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right)^2 - \omega_0^4 \frac{h^2}{4} = 0 .$$

$$s^4 + 2s^2 \left(\omega_0^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right) + \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right)^2 - \omega_0^4 \frac{h^2}{4} = 0 ;$$

$$\Delta' = \left(\omega_0^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right)^2 - \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right)^2 + \omega_0^4 \frac{h^2}{4} ;$$

$$\Delta' = 2\omega_0^2 \frac{\Omega^2}{2} + \omega_0^4 \frac{h^2}{4} = \omega_0^2 \left(\Omega^2 + \frac{h^2}{4} \omega_0^2 \right) \Rightarrow s^2 = - \left(\omega_0^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right) \pm \omega_0 \sqrt{\Omega^2 + \frac{h^2}{4} \omega_0^2} ;$$

si $s^2 < 0$ s est imaginaire pur. C'est le cas où il y a 2 signes $-$.
 si $s^2 > 0$ s est réelle dans ce cas : alors

$$- \left(\omega_0^2 + \frac{\Omega^2}{4} \right) + \omega_0 \sqrt{\Omega^2 + \frac{h^2}{4} \omega_0^2} > 0 \text{ soit } \omega_0^2 \left(\Omega^2 + \frac{h^2}{4} \omega_0^2 \right) > \omega_0^4 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4\omega_0^2} \right)^2$$

$$\text{ou } h^2 > \frac{4}{\omega_0^4} \left[\omega_0^4 \left(1 + \frac{\Omega^2}{4\omega_0^2} \right)^2 - \omega_0^2 \Omega^2 \right] ; h^2 > 4 \left[1 + \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} + \frac{\Omega^4}{16\omega_0^4} - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right] ;$$

$$h^2 > 4 \left[1 - \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} + \frac{\Omega^4}{16\omega_0^4} \right] ; h^2 > \left(1 - \frac{\Omega^2}{4\omega_0^2} \right)^2 .$$

Le carré s^2 étant positif, il y a deux solutions $s = \pm |s|$ dont l'une est positive.

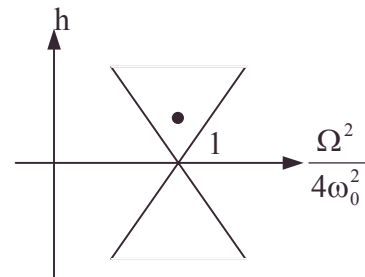
β. vu $s = +|s|$, $\theta = 0$ n'est pas atteint en général quand $t \rightarrow \infty$, valeur instable

2. Etudions les droites limites $h = \pm 2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{4\omega_0^2} \right)$

constituant \mathcal{C} qui correspondent à $s = 0$; elles régionnent le plan.

Mais le point $(1, \varepsilon)$ est tel que

$$h^2 > 4 \left(1 - \frac{\Omega^2}{4\omega_0^2} \right)^2 \text{ appartient à la zone d'instabilité.}$$



c. Considérons **3.b.2.** comme la première approximation du cas $\lambda \neq 0$. Etudions le cas limite $s^2 = 0$ étudié comme précédemment.

$$\text{On obtient : } \frac{h^2}{4} \omega_0^4 = \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{4} \right)^2 + \frac{\lambda^2 \Omega^2}{4} \text{ ou } h^2 = 4 \left(\frac{\Omega}{2\omega_0} \right)^4 + 4 \left(\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - 2 \right) \left(\frac{\Omega}{2\omega_0} \right)^2 + 4 :$$

\mathcal{C}' a \mathcal{C} comme asymptotes quand $\lambda \rightarrow 0$.

Etude du minimum :

$$\frac{d(h^2)}{d\left(\left(\frac{\Omega}{2\omega_0}\right)^2\right)} = 0 = 8 \left(\frac{\Omega}{2\omega_0} \right) \left[2 \left(\frac{\Omega}{2\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - 2 \right) \right].$$

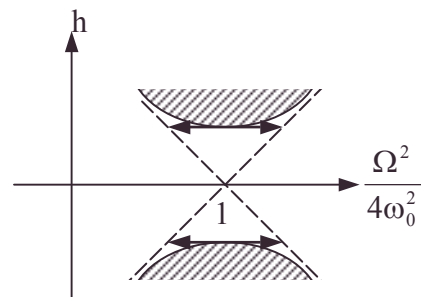
$$\text{Soit : } \frac{\Omega}{2\omega_0} = \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2\omega_0^2}} \neq 1 - \frac{1}{4Q^2} ; \frac{\Omega}{2\omega_0} = 0 \text{ étant}$$

mis à part du voisinage étudié.

$$h_m = \pm \frac{2}{Q}$$

$$\text{AN : } h_m = 0,25 ; \left(\frac{\Omega}{2\omega_0} \right)_m = 0,996 \text{ cf. énoncé confirmé.}$$

h_m est la plus petite valeur de h permettant la stabilité pour cet amortissement.



4.a. L'équation **II.2.b.** $\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} = -\omega_0^2(1 + h \cos \Omega t) \sin \theta$ s'écrit avec : $\theta = \theta_\ell + \theta_r$ avec $|\theta_r| \ll |\theta_\ell|$ vu $\sin(\theta_r + \theta_\ell) = \sin \theta_\ell \cos \theta_r + \cos \theta_\ell \sin \theta_r = \sin \theta_\ell + \theta_r \cos \theta_\ell$.

$$\ddot{\theta}_\ell + \ddot{\theta}_r + \lambda \left(\dot{\theta}_\ell + \dot{\theta}_r \right) = -\omega_0^2(1 + h \cos \Omega t)(\sin \theta_\ell + \theta_r \cos \theta_\ell).$$

b. θ_ℓ variant peu dans le temps, $\dot{\theta}_\ell$ et $\ddot{\theta}_\ell$ sont négligeables par rapport à $\dot{\theta}_r$ et $\ddot{\theta}_r$ respectivement.

- On négligera de plus les termes d'ordre 2 du type $h\theta_r$, h étant petit.
- On ne conserve que les termes ayant une variation rapide, ce qui fait disparaître 1 devant $h \cos \Omega t$, d'où $\ddot{\theta}_r + \lambda \dot{\theta}_r + \omega_0^2 \theta_r \cos \theta_\ell = -\omega_0^2 h \sin \theta_\ell \cos \Omega t$; en comparant à l'équation de **I.4.** :

$$\ddot{\theta} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} + \Omega_0^2 \theta = \gamma_1 \cos \omega t, \text{ on peut identifier :}$$

$$\lambda = \frac{\Omega_0}{Q}; \omega_0^2 \cos \theta_\ell = \Omega_0^2; \gamma_1 = -\omega_0^2 h \sin \theta_\ell; \omega = \Omega.$$

Or, la solution de **I.4.** est $\theta = \theta_r(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ avec $\theta_r = \frac{\gamma_1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\Omega_0^2}{Q^2}}}$ et

$$\cos \varphi = \frac{\Omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\Omega_0^2}{Q^2}}}; \text{ ces valeurs deviennent pour } \Omega \gg \omega_0 \text{ soit } \omega \gg \Omega_0 :$$

$$\theta_r = \frac{\gamma_1}{\Omega^2} \text{ et } \varphi = \pi \Rightarrow \text{on a la solution analogue vu } \gamma_1 = -\omega_0^2 h \sin \theta_\ell$$

$$\theta_r(t) = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} h \sin \theta_\ell \cos \Omega t \Rightarrow \dot{\theta}_r = -\frac{\omega_0^2}{\Omega} h \sin \theta_\ell \sin \Omega t; \ddot{\theta}_r = \frac{1}{2} \omega_0^4 h^2 \sin^2 \theta_\ell.$$

c.α. Prenons la valeur moyenne de l'équation de **II.4.a.** :

$$\overline{\ddot{\theta}_\ell + \ddot{\theta}_r} + \lambda \left(\overline{\dot{\theta}_\ell + \dot{\theta}_r} \right) = -\omega_0^2 \left(\overline{\sin \theta_\ell + \theta_r \cos \theta_\ell} \right) - h \omega_0^2 \left(\overline{\cos \Omega t \sin \theta_\ell + \theta_r \cos \Omega t \cos \theta_\ell} \right).$$

Vu l'énoncé sur les périodes des variation lentes et rapides :

$$\overline{\dot{\theta}_r} = 0; \overline{\ddot{\theta}_r} = 0; \overline{\ddot{\theta}_\ell} = \ddot{\theta}_\ell; \overline{\dot{\theta}_\ell} = \dot{\theta}_\ell; \overline{\sin \theta_\ell} = \sin \theta_\ell; \overline{\theta_r \cos \theta_\ell} = \cos \theta_\ell \overline{\theta_r} = 0;$$

$$\overline{\cos \Omega t \sin \theta_\ell} = \sin \theta_\ell \overline{\cos \Omega t} = 0; \overline{\theta_r \cos \Omega t \cos \theta_\ell} = \cos \theta_\ell \overline{\theta_r \cos \Omega t}$$

$$\Rightarrow \overline{\theta_r \cos \Omega t \cos \theta_\ell} = \cos \theta_\ell \sin \theta_\ell \frac{\omega_0^2 h}{\Omega^2} \overline{\cos^2 \Omega t} = \cos \theta_\ell \sin \theta_\ell \frac{\omega_0^2}{2\Omega^2} h \text{ vu } \mathbf{b.};$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_\ell + \lambda \dot{\theta}_\ell + \omega_0^2 \sin \theta_\ell + \frac{h^2 \omega_0^4}{2\Omega^2} \cos \theta_\ell \sin \theta_\ell = 0.$$

β. Multiplions par $ML^2 \dot{\theta}_\ell dt$ pour faire apparaître l'énergie cinétique :

$$d \left[\underbrace{\frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}_\ell^2}_{E_c} - \underbrace{\omega_0^2 ML^2 \cos \theta_\ell}_{E_{p1}} + \underbrace{\frac{ML^2 \omega_0^4}{2\Omega^2} \frac{h}{2} \sin^2 \theta_\ell}_{E_{p2}} \right] = -\lambda ML^2 \dot{\theta}_\ell d\theta_\ell.$$

On retrouve la même forme d'équation qu'en **I.2.b.** avec le terme supplémentaire annoncé vu l'expression de $\dot{\theta}_r^2$ donnée en **b.**

d. On trouve formellement 2 termes d'énergie potentielle :

$$\text{l'équilibre est pour } \frac{d(E_{p1} + E_{p2})}{d\theta_\ell} = 0 \text{ soit } \left(\omega_0^2 + \frac{h^2 \omega_0^4}{2\Omega^2} \cos \theta_\ell \right) \sin \theta_\ell = 0.$$

$$\cos \theta_\ell = -\frac{2\Omega^2}{h^2 \omega_0^2} \text{ est impossible vu } \Omega \gg \omega_0, \text{ reste } \sin \theta_\ell = 0 \text{ soit } \theta_\ell = 0 \text{ et } \theta_\ell = \pi.$$

$$\text{L'équilibre stable est pour } \frac{d^2(E_{p1} + E_{p2})}{d\theta_\ell^2} > 0 \text{ soit } ML^2 \omega_0^2 \left[\cos \theta_\ell + \frac{h^2 \omega_0^2}{2\Omega^2} \cos 2\theta_\ell \right] > 0.$$

$$\text{Pour } \theta_\ell = \pi, \text{ cela est vrai pour } h > \frac{\Omega \sqrt{2}}{\omega_0}$$

$$\text{or } h = \frac{Z_0}{L} \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^2 \text{ vu } \text{II.2.b. avec } \omega_0 = \Omega_0 \text{ soit } Z_0 > Z_c \text{ avec } Z_c = \frac{L\Omega_0}{\Omega} \sqrt{2}.$$

Pour $\theta_\ell = 0$, la stabilité existe $\forall h$.

$$\text{III.1.a. On a } \ddot{\theta} + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} + \Omega_0^2 \sin \theta = \gamma_1 \cos \omega t \text{ [6].}$$

$$\text{b.a. } \sin \theta = \sin(-\alpha \sin(\omega t + \beta)) = \frac{e^{-i\alpha \sin(\omega t + \beta)} - e^{i\alpha \sin(\omega t + \beta)}}{2i};$$

$$\text{or, } e^{i\alpha \sin(\omega t + \beta)} = J_0(\alpha) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (J_{2p}(\alpha) \cos 2p(\omega t + \beta) + i J_{2p+1}(\alpha) \sin(2p+1)(\omega t + \beta));$$

en ne tenant compte que de l'harmonique fondamentale ω vu la relation [7] à démontrer, soit pour $p = 0$:

$$e^{i\alpha \sin(\omega t + \beta)} = J_0(\alpha) + 2i J_1(\alpha) \sin(\omega t + \beta); e^{-i\alpha \sin(\omega t + \beta)} = J_0(-\alpha) + 2i J_1(-\alpha) \sin(\omega t + \beta)$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{J_0(-\alpha) - J_0(\alpha)}{2i} + [J_1(-\alpha) - J_1(\alpha)] \sin(\omega t + \beta).$$

Mais vu la définition des fonctions de Bessel :

$$J_0(-\alpha) = J_0(\alpha); J_1(-\alpha) = -J_1(\alpha) \text{ d'où } \sin \theta = -2J_1(\alpha) \sin(\omega t + \beta).$$

$$\text{Ecrivons dans [6] } \cos \omega t = \cos(\omega t + \beta - \beta) = \cos(\omega t + \beta) \cos \beta + \sin(\omega t + \beta) \sin \beta.$$

$$\text{Vu } \theta = -\alpha \sin(\omega t + \beta) \Rightarrow \dot{\theta} = -\alpha \omega \cos(\omega t + \beta) \Rightarrow \ddot{\theta} = \alpha \omega^2 \sin(\omega t + \beta) \text{ [6] s'écrit :}$$

$$\left[\alpha \omega^2 - 2\Omega_0^2 J_1(\alpha) - \gamma_1 \sin \beta \right] \sin(\omega t + \beta) + \left[-\frac{\Omega_0}{Q} \alpha \omega - \gamma_1 \cos \beta \right] \cos(\omega t + \beta) = 0,$$

et vu l'indépendance linéaire de $\sin(\omega t + \beta)$ et $\cos(\omega t + \beta)$:

$$\alpha \omega^2 - 2\Omega_0^2 J_1(\alpha) - \gamma_1 \sin \beta = 0; \frac{\Omega_0}{Q} \omega \alpha + \gamma_1 \cos \beta = 0.$$

$$\text{soit : } \sin \beta = \frac{\alpha}{\gamma_1} \omega^2 - 2 \frac{\Omega_0^2}{\gamma_1} J_1(\alpha); \cos \beta = -\frac{\Omega_0}{\gamma_1 Q} \omega \alpha.$$

• Bessel [fonctions de], équilibre, stabilité

β. Or $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow (-\alpha\omega^2 + 2\Omega_0^2 J_1(\alpha))^2 + \left(\frac{\alpha\omega\Omega_0}{Q}\right)^2 = \gamma_1^2$. [7]

c. $J_1(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^1 \left[\frac{\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)^0}{0!1!} + \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)^1}{1!2!} + \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)^2}{2!3!} + \dots \right];$

soit un développement au troisième ordre inclus :

$$J_1(\alpha) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{16} + 0(\alpha^5) \Rightarrow J_1(\alpha) = \frac{\sqrt{u}}{2} \left(1 - \frac{u}{8}\right); \alpha\omega^2 = \sqrt{u}(1+\delta)^2 \Omega_0^2,$$

Reportons dans [7] : $\frac{\Omega_0^4}{Q^2} u(1+\delta)^2 + \Omega_0^4 u \left(\frac{u}{8} + 2\delta\right)^2 = \gamma_1^2$. [8]

d. $\gamma_1 = 0$; $Q = +\infty \Rightarrow$

α. $u = -8\delta(2+\delta)$ soit $u \neq -16\delta$ possible si $\delta \leq 0$ ou

β. $u = 0$;

C'est le cas physique où il y a absence d'excitation et de frottement ; ω correspond à la pulsation de résonance possible dans ces conditions.

2.a. Dérivons l'équation de [8] ;

$$\frac{du}{d\delta} \left(\frac{(1+\delta)^2}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta\right)^2 \right) + u \left(2 \frac{(1+\delta)}{Q^2} + 2 \left(\frac{1}{8} \frac{du}{d\delta} + 2 \right) \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right) \right) = 0.$$

$$\frac{du}{d\delta} = 0 \text{ pour } u = 0 \text{ et } \frac{1}{Q^2} + \frac{u}{4} + 2\delta + 4\delta = 0 \text{ en négligeant } \frac{\delta}{Q^2} \text{ devant } \frac{1}{Q^2}.$$

$u = 0$ ne vérifie pas l'équation de [8] ; la résonance correspond donc à :

$$\delta_r = \frac{-u_m}{16} - \frac{1}{4Q^2}; \delta_r \text{ différence de deux termes petits est petit. Reportons dans [8] :}$$

$$\Omega_0^4 u_m \left[\left(\frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{u_m}{16} - \frac{1}{4Q^2} \right)^2 + \left(\frac{u_m}{8} + \frac{1}{16Q^4} - \frac{u_m}{8} - \frac{1}{2Q^2} + \frac{u_m}{32Q^2} \right)^2 \right) \right] = \gamma_1^2.$$

u_m est petit ; $\frac{1}{Q^2}$ aussi ; il reste $\frac{\Omega_0^4 u_m}{Q^2} = \gamma_1^2$.

Finalement, $u_m = \gamma_1^2 \frac{Q^2}{\Omega_0^4} \Rightarrow \delta_r = \frac{-\gamma_1^2 Q^2}{16\Omega_0^4} - \frac{1}{4Q^2}$.

b. $\gamma_1 = 0 \Rightarrow u_m = 0$, $\delta_r = \frac{-1}{4Q^2} \Rightarrow \omega_r = \Omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)$ c.q.f.d.

c.α. En prenant le terme principal de chaque parenthèse de [8] (ce qui est légitime car $Q \gg 1$), on obtient :

$$u \left(1 + Q^2 \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right) = \frac{\gamma_1^2 Q^2}{\Omega_0^4} = u_m \Rightarrow [9].$$

Si $u_m \rightarrow 0$; $u \rightarrow 0 \Rightarrow u(1 + 4\delta^2 Q^2) = u_m \Rightarrow u = \frac{u_m}{1 + 4\delta^2 Q^2} = \alpha^2$;

$$\alpha = \frac{\sqrt{u_m}}{\sqrt{1+4\delta^2 Q^2}} = \frac{\gamma_1 Q}{\Omega_0^2 \sqrt{1+4Q^2 \left(\frac{\omega - \Omega_0}{\Omega_0} \right)^2}} \neq \frac{\gamma_1 Q}{\Omega_0^2} \text{ car } \omega \neq \Omega_0.$$

On retrouve le résultat de **I.4.** pour $\omega \neq \Omega_0$.

β. [9] est de la forme : $f(u) = \frac{1}{Q^2 \left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right]} = \frac{u}{u_m}$ qui se prête à la

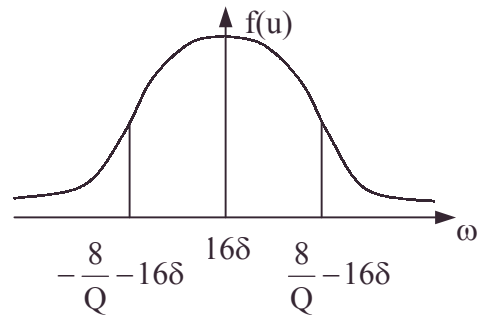
résolution graphique par étude de l'intersection de $y = \frac{u}{u_m}$ et $y = f(u)$.

$$\frac{df}{du} = \frac{-\left(\frac{u}{8} + 2\delta\right)}{4Q^2 \left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right]^2};$$

$$\frac{d^2f}{du^2} = \frac{-\frac{1}{8} \left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right) \left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right] \left[\frac{u}{8} + 2\delta \right] \cdot \frac{1}{4}}{4Q^2 \left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right]^4};$$

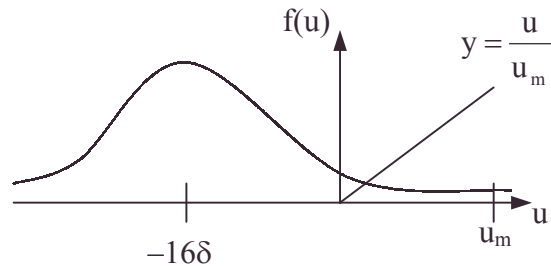
$$\frac{d^2f}{du^2} = \frac{-\left(\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right) - 2 \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2}{32Q^2 \left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right]^3} = -\frac{1}{32Q^2} \frac{\left[\frac{1}{Q} - \frac{u}{8} - 2\delta \right] \left[\frac{1}{Q} + \frac{u}{8} + 2\delta \right]}{\left[\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{u}{8} + 2\delta \right)^2 \right]^3}.$$

u	$-16\delta - \frac{8}{Q} \quad -16\delta \quad -16\delta + \frac{8}{Q}$					
$\frac{df}{du}$	+	+	0	-	-	
$\frac{d^2f}{du^2}$	+	0	-	-	0	+



Notons $f(0) = \frac{1}{1+4Q^2\delta^2}$;

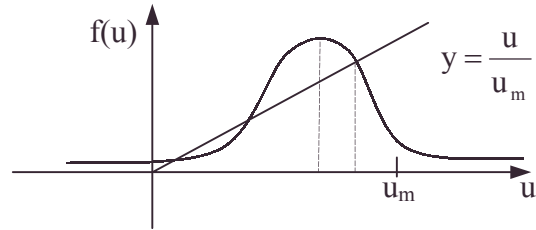
- Si $\delta > 0$: on a une seule intersection possible vu le graphique ci-contre :
 $u = \alpha^2 > 0$



γ . Vu le graphique :

• Il peut exister 3 solutions réelles en u à [9] pour δ donnée.

• Pour trouver T_1 et T_2 vu la figure 8, il faut chercher les valeurs de : $\frac{d\delta}{du} = 0$;



$$\text{Or, } \delta = \frac{1}{2} \left[-\frac{u}{8} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{u_m}{u} - 1} \right] \text{ vu [9].}$$

$$\frac{d\delta}{du} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8} \pm \frac{1}{Q} \left(-\frac{u_m}{u^2} \right) \frac{1}{2\sqrt{\frac{u_m}{u} - 1}} \right] = 0 \Leftrightarrow u^4 - u_m u^3 + \left(\frac{4u_m}{Q} \right)^2 = 0.$$

Résolution graphique : posons $g(u) = u^4 - u_m u^3 + \left(\frac{4u_m}{Q} \right)^2$.

• graphe u	$\frac{3}{4}u_m$
$g'(u)$	- 0 +
$g(u)$	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> $+\infty$ \swarrow </div> <div style="text-align: center;"> $u_m^2 \left(\frac{16}{Q^2} - \frac{27}{256} u_m^2 \right)$ </div> <div style="text-align: center;"> \nearrow $+\infty$ </div> </div>

$$g'(u) = 4u^3 - 3u_m u^2 = 4u^2 \left(u - \frac{3}{4}u_m \right)$$

L'intersection avec l'axe $y = 0$ donnera 2 solutions distinctes si :

$$g\left(\frac{3}{4}u_m\right) < 0 \text{ soit si } u_m > \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{1}{Q}$$

$$u_m^c = \frac{64}{3\sqrt{3} Q}$$

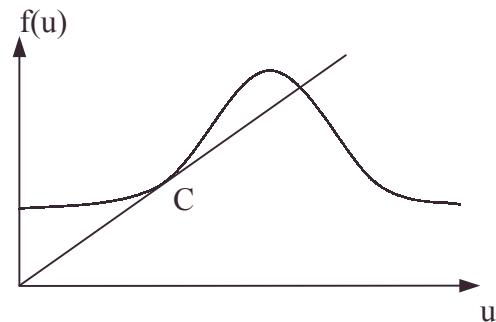
• Si on a : $u_m = u_m^c$; $g\left(\frac{3}{4}u_m\right) = 0$ et une seule solution $T_1 \equiv T_2$.

$$\text{or } g(u_m^c) = u_m^2 \left(\frac{16}{Q^2} - \frac{27}{256} u_m^2 \right)$$

$$\text{Alors, } u_c = \frac{16}{Q\sqrt{3}} \text{ et } \delta_c = -\frac{\sqrt{3}}{2Q}$$

$$\text{cf. expression de } \delta = \frac{1}{2} \left[-\frac{u}{8} - \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{u_m}{u} - 1} \right] ;$$

$$\gamma_1^c = \frac{\Omega_0^2}{Q} \sqrt{u_m^c} \text{ cf. I.4. or } u_m^c = \frac{64}{3\sqrt{3} Q} \Rightarrow \gamma_1^c = \frac{8\Omega_0^2}{Q^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{3}{4}}}.$$



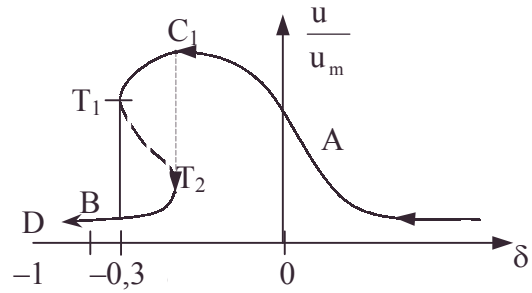
δ . $\gamma > \gamma_1^c$, il existe T_1 et T_2 qui ont $\frac{d\delta}{du} = 0 \Rightarrow g(u) = 0$:

• solution graphique

$$[10] \quad u^4 - u_m u^3 + \left(\frac{4u_m}{Q} \right)^2 = 0.$$

- Quand ω décroît depuis Ω_0 jusqu'à 0, δ varie de 0 à -1.

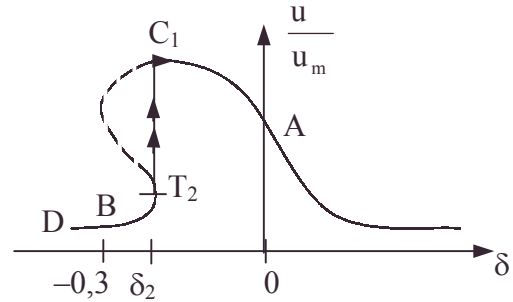
On suit l'itinéraire AT_1BD ... avec une discontinuité de u après T_1 .



- Quand ω croît de 0 à Ω_0 , δ varie de -1 à 0.

On suit l'itinéraire DBT_2C_1A avec une discontinuité de u après T_2 . (cf. hystérésis, mémoire de l'état antérieur).

On voit le cycle d'hystérésis mécanique $C_1T_1BT_2C_1$



$$3.a. \quad \theta = \theta_b(t) + \theta_\varepsilon(t) \text{ avec } \theta_\varepsilon \ll 1.$$

$$\theta \text{ vérifie [6] : } \theta + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta} + \Omega_0^2 \sin \theta = \gamma_1 \cos \omega t$$

$$\text{avec } \sin \theta = \sin \theta_b \cos \theta_\varepsilon + \cos \theta_b \sin \theta_\varepsilon, \text{ soit } \sin \theta \approx \sin \theta_b + \theta_\varepsilon \cos \theta_b ;$$

$$\text{Or, } \theta_b \text{ vérifie [6] : } \ddot{\theta}_b + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta}_b + \Omega_0^2 \sin \theta_b = \gamma_1 \cos \omega t.$$

$$\text{Soustrayons terme à terme : } \ddot{\theta}_\varepsilon + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta}_\varepsilon + \Omega_0^2 (\cos \theta_b) \theta_\varepsilon = 0 \quad [11].$$

b. En poursuivant jusqu'à J_2 d'après **1.b.** :

$$\cos \theta_b = \cos(-\alpha \sin(\omega t + \beta)) = \frac{1}{2} (e^{-i\alpha \sin(\omega t + \beta)} + e^{i\alpha \sin(\omega t + \beta)}) ;$$

$$e^{i\alpha \sin(\omega t + \beta)} = J_0(\alpha) + 2iJ_1(\alpha) \sin(\omega t + \beta) + 2J_2(\alpha) \cos(2\omega t + 2\beta) ;$$

$$e^{-i\alpha \sin(\omega t + \beta)} = J_0(-\alpha) + 2iJ_1(-\alpha) \sin(\omega t + \beta) + 2J_2(-\alpha) \cos(2\omega t + 2\beta),$$

et vu la définition des fonctions de Bessel :

$$J_0(-\alpha) = J_0(\alpha) ; J_1(-\alpha) = -J_1(\alpha) ; J_2(-\alpha) = +J_2(\alpha) ;$$

$$\cos \theta_b = J_0(\alpha) + 2J_2(\alpha) \cos 2(\omega t + \beta).$$

$$[11] \text{ s'écrit : } \ddot{\theta}_\varepsilon + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta}_\varepsilon + \Omega_0^2 J_0(\alpha) \theta_\varepsilon + 2\Omega_0^2 J_2(\alpha) \theta_\varepsilon \cos 2(\omega t + \beta) = 0 ,$$

soit de la forme **II.2.b.** linéarisée en θ avec :

$$\lambda = \frac{\Omega_0}{Q} ; \omega_0 = \Omega_0 \sqrt{J_0(\alpha)} ; h = \frac{2J_2(\alpha)}{J_0(\alpha)} ; \Omega = 2\omega.$$

on change l'origine des temps ou l'on fait $\beta = 0$.

$$4.a. \text{ cf. IV.1.d., 2.b., } \gamma_1 \rightarrow 0, u_m \rightarrow 0, \omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)$$

$$\text{avec } Q \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \approx \omega_0 ;$$

Or, $\omega \approx \Omega_0 \Rightarrow J_0(\alpha) \approx 1$ vu la question précédente.

$$\text{Or, } J_2(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4} \left[\frac{\left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)^0}{0!2!} - \frac{\frac{\alpha^2}{4}}{1!3!} \dots \right] \ll 1 \text{ (vu } \alpha^2 = u \rightarrow 0)$$

[11] se simplifie à : $\ddot{\theta}_\varepsilon + \frac{\Omega_0}{Q} \dot{\theta}_\varepsilon + \Omega_0^2 \theta_\varepsilon = 0$.

L'équation caractéristique $r^2 + \frac{\Omega_0}{Q}r + \Omega_0^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{\Omega_0^2}{Q^2} - 4\Omega_0^2$.

$Q \gg 1 \quad \Delta < 0$; $\theta_\varepsilon = A e^{\frac{-\Omega_0}{2Q}t} \cos(2\Omega_0 t + \varphi)$.

On a une solution oscillatoire amortie ; on aura une solution stable (cf. énoncé).

b. $T_1 \equiv T_2 \Rightarrow \alpha_c^2 = 4_c$ or en développant au second ordre : $J_0(\alpha) \# \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)$;

$$J_2(\alpha) \# \frac{\alpha^2}{8}$$

$$h = \frac{2J_2(\alpha_c)}{J_0(\alpha_c)} = \frac{\alpha_c^2}{4} \left(1 + \frac{\alpha_c^2}{4}\right) \# \frac{16}{4Q\sqrt{3}} \# \frac{2,3}{Q} \text{ or d'après II.3.c., } h_m = \pm \frac{2}{Q}.$$

On est bien dans le voisinage de la limite de stabilité (mais dans le domaine de stabilité car au-dessus du minimum).

$$\text{c. En } T_1 \text{ ou } T_2, \text{ on a : } u^4 - u_m u^3 + \left(\frac{4u_m}{Q}\right)^2 = 0 ; \delta = \frac{1}{2} \left[\frac{-u}{8} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{u_m}{u} - 1} \right].$$

$Q \gg 1 \Rightarrow u \# u_m$; $\delta \# \frac{-u_m}{16}$ soit le même voisinage qu'en **4.b.**, donc le voisinage de la

limite de stabilité.

• L'étude **III.2.c.** montre que ces états ne se rencontrent pas par évolution continue. Un état physique stable n'a pas de telles caractéristiques. Il s'agit donc d'états instables puisqu'on ne s'y arrête jamais.

2.2.7. Régulateur de Watt

Voir page 154.

2.2.8. Interaction entre 2 galaxies

Voir page 544.

2.2.9. Compresseur à accélération angulaire permanente

Voir page 581.

2.2.10. Electromètre

Voir page 757.

2.2.11. Auget, rendement

Voir page 366.

2.2.12. Moteurs en électrotechnique

Voir page 1066.

2.3. Contact entre solides

2.3.1. "Premiers pas" théoriques

2.3.1.1. Sphère sur plan incliné Roulement avec ou sans glissement

On considère dans tout ce problème une sphère (\mathcal{S}) homogène, pesante, de masse m , de rayon R , de centre C . On considère un plan incliné faisant l'angle α avec le plan horizontal. On utilisera le référentiel $Oxyz$, où Ox est parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné, Oy est horizontal et Oz perpendiculaire à la ligne de plus grande pente. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz . Le trièdre $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est orthonormé direct.

On note \mathcal{R}_0 ce référentiel, et on appelle :

- f le coefficient de frottement de glissement éventuel entre le plan et la sphère.
- $\vec{F} = T\vec{i} + N\vec{k}$ la réaction du plan incliné sur (\mathcal{S}).
- x l'abscisse de C .
- $\theta = (\vec{Cz}, \vec{CM})$ où \vec{CM} est un rayon particulier de la sphère appartenant au plan xOz , \vec{Cz} parallèle et de même sens que \vec{Oz} .

• I le point de contact de (\mathcal{S}) avec le plan incliné.

- O est à la distance R du plan incliné.

La sphère reste en contact avec le plan incliné, et le mouvement de C a lieu dans le plan xOz .

Le plan incliné est fixe, tout au long du problème, sauf dans la question **B.5**.

\mathcal{R}_0 est rigidement lié au plan incliné.

A. Première phase du mouvement

(\mathcal{S}) est déposée sans vitesse initiale sur le plan incliné.

A l'instant initial, C est en O . Le contact se fait sans frottement.

1. Etablir l'expression littérale du moment d'inertie J de (\mathcal{S}) par rapport à l'un quelconque de ses diamètres.

Calculer numériquement J sachant que $R = 2,5$ cm et $m = 0,3$ kg.

2. Quelle est la valeur de T dans cette phase ?

3. Quelles sont les équations différentielles du mouvement ?

Que valent \ddot{x} et $\ddot{\theta}$ (\dot{x} et $\dot{\theta}$ dérivées temporelles premières de x et θ ; \ddot{x} et $\ddot{\theta}$ dérivées secondes) ?

4. Application numérique : $\alpha = 30^\circ$; $g = 10$ m.s⁻² ;

A quel instant t_0 \dot{x} prend-elle la valeur $v_0 = 1$ m.s⁻¹ ? Quelle est alors la vitesse $\vec{V}(I/\mathcal{R})$ de I ? Quelle est la nature du mouvement de (\mathcal{S}) dans cette phase ?

Deuxième phase

A l'instant t_0 , la sphère (\mathcal{S}) est arrivée dans une zone où désormais le coefficient de frottement de glissement avec le plan n'est plus nul et vaut f . On prend comme nouvelle origine des temps l'instant t_0 précédent.

• coefficient de frottement, conditions initiales, contact entre solides, glissement, moment d'inertie, mouvement sans frottement

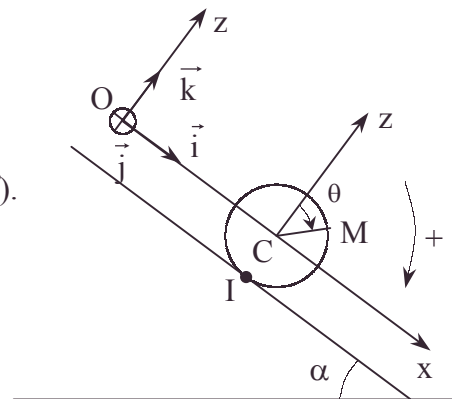


Figure 1

On notera t' les instants notés à partir de cette nouvelle origine.

5. Etablir l'expression de $\vec{V}(I/\mathcal{R})$ en fonction de \dot{x} et $\dot{\theta}$. Que peut-on dire maintenant de T ? En particulier, quel est le signe de T à $t' = 0+$? Quelle relation lie $\|\vec{T}\|$ et $\|\vec{N}\|$ dans le cas où $\vec{V}(I/\mathcal{R}) \neq \vec{0}$?

6. Ecrire le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique. En déduire l'accélération de C , ainsi que l'accélération angulaire de (\mathcal{S}) .

7. Quelle est la vitesse de I à l'instant t' ? A quelle condition (portant sur f et α) le glissement ne s'arrêtera-t-il jamais ?

Donner l'expression de l'énergie cinétique de la sphère à t' .

8. On suppose que cette condition n'est pas satisfaite.

A quel instant t'_1 le glissement cesse-t-il ?

9. Entre l'instant $t' = 0$ et t'_1 , quel est le travail des forces de contact ? Montrer qu'on peut l'évaluer de deux manières différentes.

On appelle x_1 la distance parcourue par C pendant la deuxième phase.

10. Application numérique : mêmes données numériques qu'au A.4. auxquelles on rajoute $f = 0,5$.

La condition du A.7. est-elle satisfaite ? Déterminer le cas échéant t'_1 , la vitesse et l'accélération de C à t'_1 , le travail des forces de contact entre $t' = 0$ et t'_1 .

Troisième phase

11. Lorsque la condition du 7. n'est pas satisfaite, quelle est la suite du mouvement ?

On remettra le problème en équations et on donnera l'accélération de C , ainsi que l'accélération angulaire de la sphère.

B. L'axe CY de la sphère parallèle à Oy est maintenant matérialisé. La sphère peut tourner sans frottement autour de cet axe. Les deux extrémités de cet axe sont reliées à une extrémité d'un ressort de raideur K et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée au point O précédemment défini. Le ressort agit suivant l'axe Ox . On négligera dans tous les cas le frottement du ressort sur le plan incliné (Figure 2).

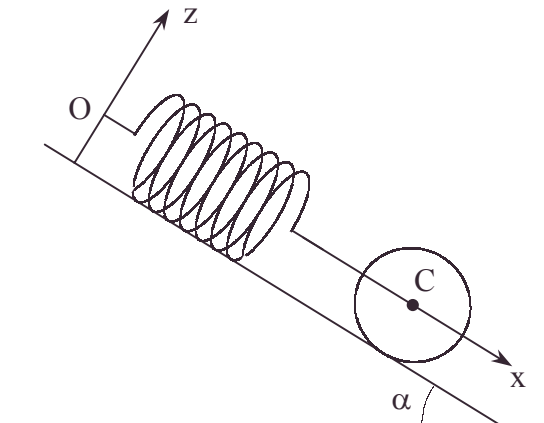


Figure 2

1. On suppose que le contact de la sphère et du plan incliné se fait sans frottement. Quelle est la longueur du ressort à l'équilibre ?

On tire sur le ressort d'une longueur x_0 au-delà de la position d'équilibre.

Quelle est la période T_1 d'oscillation du système ? Donner $x(t)$.

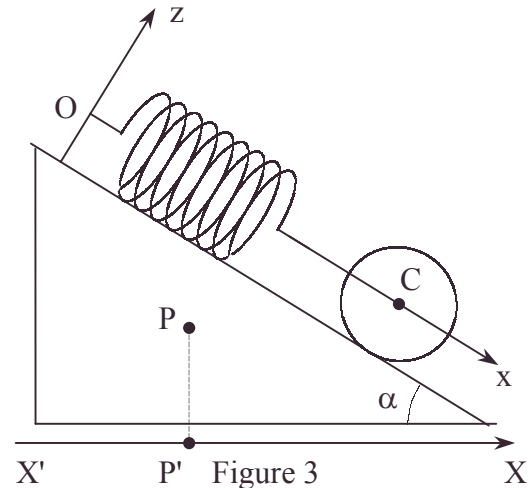
2. On suppose maintenant que le contact sphère-plan incliné est tel que la sphère roule sans glisser. Déterminer la nouvelle position d'équilibre de C et la nouvelle période d'oscillation T_2 du système. Comparer T_1 et T_2 .

3. Le coefficient de frottement étant égal à f , quelle doit être la valeur minimale de X_0 de x_0 pour que la sphère commence par glisser lorsqu'on lâche le système sans vitesse initiale ?

4. Application numérique : $K = 50 \text{ N.m}^{-1}$; les autres données numériques sont celles de la partie A. Déterminer T_1 , T_2 , X_0 .

5. Le plan incliné précédent appartient maintenant à un prisme de section triangulaire de masse M (figure 3). Le coefficient de frottement est nul.

La sphère précédente (toujours reliée au ressort) glisse parfaitement sur le plan incliné. On allonge le ressort d'une longueur x_1 au-delà de la position d'équilibre et on abandonne le système sans vitesse initiale. Le prisme est posé sur un plan horizontal avec lequel le contact plan sur plan est permanent et sans frottement.



On néglige la masse du ressort et des accessoires. On appelle P le centre d'inertie du prisme. On appelle P' la projection de P sur l'axe fixe $X'X$ horizontal (figure 3). Déterminer la période et l'amplitude des oscillations de P' autour de sa position initiale. Lorsque le système est au repos, P et C sont sur la même verticale. On ne demande pas la détermination de la position de P . L'axe Oz est matérialisé et reste solidaire du prisme.

Autres concours ; Durée : 3h

Corrigé

A.1. $J_{Cy} = \iiint (x^2 + z^2) \mu d\tau = \iiint (y^2 + x^2) \mu d\tau = \iiint (z^2 + y^2) \mu d\tau$ vu la symétrie sphérique.

$$3J_{Cy} = 2 \iiint (x^2 + y^2 + z^2) \mu d\tau = 2\mu \int_0^R r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi R^5}{5} \mu ; \text{ or } m = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu .$$

$$\Rightarrow 3J_{Cy} = \frac{6}{5} mR^2 .$$

$$J = \frac{2}{5} mR^2 ; \text{ AN : } J = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2 .$$

2. $T = 0$ car on dit absence de frottement.

3.a. Théorème du centre de masse : $m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{F}$; $\Rightarrow m\ddot{x} = mg \sin \alpha$.

$$m\ddot{y} = 0 = N - mg \cos \alpha .$$

b. Théorème du moment cinétique en C : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} \right)_{R_0} = \vec{CI} \wedge \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow J\ddot{\theta} = 0$.

c. $\ddot{x} = g \sin \alpha$

d. $\ddot{\theta} = 0$.

4.a. $\dot{x} = g t \sin \alpha \Rightarrow t_0 = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$; AN : $t_0 = 0,2 \text{ s}$.

b. $\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(I/R_0) = \vec{V}_C = \vec{v}_0$; AN : $V_1 = 1 \text{ m.s}^{-1}$.

c. Le mouvement est un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré.

• centre de masse, coefficient de frottement, conditions initiales, équilibre, moment cinétique, moment d'inertie, mouvement sans frottement, projections, ressort, symétrie, théorème du centre de masse, théorème du moment cinétique, théorème du mouvement du centre de masse

Le champ des vitesses d'un solide est un champ de moments de résultante $\vec{\Omega}$.

5.a. $\vec{V}_I = \vec{V}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI} = (\dot{x} - R\dot{\theta})\vec{i}$.

b. $T \neq 0$.

c. $\vec{V}_C \vec{T} < 0 \Rightarrow T < 0$ pour s'opposer au mouvement (jamais de rôle moteur).

d. $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ car $\vec{V}_I(t'=0) \neq \vec{0}$; $T = -fmg \cos \alpha$.

6.a. $\vec{F} = T\vec{i} + N\vec{k}$ vu **3.** $\Rightarrow m\ddot{x} = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha$.

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$

$$J\ddot{\theta} = -RT \text{ soit } \frac{2}{5}mR\ddot{\theta} = -T = fmg \cos \alpha.$$

b. $\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$; $\ddot{\theta} = \frac{5}{2R}fg \cos \alpha$.

7.a. $\dot{x} = g t'(\sin \alpha - f \cos \alpha) + v_0$; $\dot{\theta} = \frac{5}{2}g \frac{t'}{R} f \cos \alpha$ vu les conditions initiales.

$$\vec{V}_I = \vec{i} \left[\left(\sin \alpha - \frac{7}{2}f \cos \alpha \right) g t' + v_0 \right].$$

b. $\vec{V}_I = \vec{0}$ pour $t'_0 = \frac{v_0}{g \left(\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha \right)}$.

Si $t'_0 < 0$ le glissement existant en $t' = 0$ ne s'arrête pas : $t'_0 < 0 \Rightarrow f < \frac{2}{7} \tan \alpha$ (forte pente).

c. $E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mg^2(\sin \alpha - f \cos \alpha)^2 t'^2 + m \frac{5}{4}g^2 f^2 \cos^2 \alpha t'^2$.

8. Pour un fort frottement : $f > \frac{2}{7} \tan \alpha$; $t'_1 = \frac{v_0}{g \left(\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha \right)}$. $t'_1 > 0$.

9.a. $T = -mf g \cos \alpha$.

Vu V_I écrit en **7.**

$$\mathcal{E}_{\text{frottement}} = \int_0^{t'_1} V_I T dt = mf g \cos \alpha \left[\frac{v_0^2}{g \left(\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha \right)} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \left(\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha \right)} \right].$$

$$\mathcal{E}_{\text{frottement}} = \frac{mf \cos \alpha v_0^2}{2 \left(\frac{7}{2}f \cos \alpha - \sin \alpha \right)}; \text{ AN : } \mathcal{E}_{\text{frottement}} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

b. La conservation de l'énergie permet d'écrire : $d(E_C + E_P) = d\mathcal{E}_{\text{contact}}$, d'où la variante $\mathcal{E}_{\text{frottement}} = E_{C_{t'_1}} - E_{C_0} + E_{P_{t'_1}} - E_{P_0}$ avec $E_P = -mgx \cos \alpha$ pour les instants $t' = 0$ et $t' = t'_1$.

10. $f = 0,5$; $\frac{2}{7} \tan \alpha = 0,165$; $f > \frac{2}{7} \tan \alpha$; **A.7.** n'est pas satisfait.

• *champ de moments, conservation de l'énergie, glissement*

"Premiers pas" théoriques

$$t'_1 = 0,0984 \text{ s} ; \ddot{x} = 0,67 \text{ m.s}^{-2} ; \dot{x}(t'_1) = 1,066 \text{ m.s}^{-1} ; \mathcal{E}_{\text{contact}} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

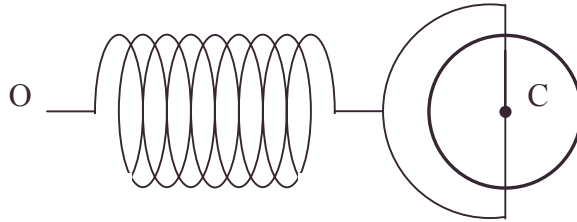
11. A partir de t'_1 la loi $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$ se transforme en $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ loi de Coulomb statique, loi associée à la loi de roulement sans glissement.

Les valeurs constantes de \ddot{x} et $\ddot{\theta}$ associées à $\vec{V}_I = \vec{0}$ ne changent pas. La situation de non glissement perdure.

$$\dot{x} - R \dot{\theta} = 0 ; m \ddot{x} = mg \sin \alpha + T ; O = N - mg \cos \alpha ; J \ddot{\theta} = -RT.$$

$$\text{d'où } \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin \alpha ; \ddot{\theta} = \frac{5}{7} \frac{g}{R} \sin \alpha ; T = -\frac{2}{5} \sin \ddot{x} = -\frac{2}{7} g \sin \alpha < f mg \cos \alpha \quad \forall t' > t'_1$$

B. Vue de dessus :



$$1.a. \vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0} \Leftrightarrow K(\ell_c - \ell_0) = mg \sin \alpha \Rightarrow \ell_c = \ell_0 + \frac{mg}{k} \sin \alpha.$$

L'absence de frottement ne permet pas le roulement.

b. On prend l'origine des abscisses à la position de repos définie par ℓ_c .

$$\vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_c \Leftrightarrow m \ddot{x} = mg \sin \alpha - K(\ell_c + x - \ell_0).$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = g \sin \alpha - \frac{K}{m}(\ell_c - \ell_0) = 0 \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \text{ et } x = x_0 \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t \text{ si } \dot{x}_0 = 0.$$

2.a. Soit T l'action tangentielle de contact ; or $T_{\text{ressort}} + mg_x = -Kx$.

$$\left. \begin{array}{l} J \ddot{\theta} = -RT \\ m \ddot{x} = T - Kx \\ 0 = \dot{x} - R \dot{\theta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = -\frac{2}{5} m \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{5}{7} \frac{Kx}{m} = 0 \Rightarrow x = x_0 \cos \sqrt{\frac{5K}{7m}} t \text{ si } \dot{x}_0 = 0 \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \frac{m}{K}} > T_1 \end{array}$$

b. La position d'équilibre : $\ddot{\theta} = 0 ; \ddot{x} = 0 \Rightarrow T = 0 \Rightarrow x = 0$.

3. Dans l'hypothèse du non glissement,

$$\text{d'après 2. : } T = m \ddot{x} + Kx = x_0 \left(\frac{5K}{7} + K \right) \cos \sqrt{\frac{5K}{7m}} t = \frac{12K}{7} x_0 \cos \sqrt{\frac{5K}{7m}} t ;$$

$$0 = N - mg \cos \alpha ;$$

$$\text{à } t = 0 : T = \frac{12K}{7} x_0.$$

L'hypothèse cesse d'être vraie si $T = f N = f mg \cos \alpha$, soit dès que $x_0 > X_0$ avec

$$X_0 = \frac{7f}{12K} mg \cos \alpha.$$

$$4. T_1 = 0,486 \text{ s} ; T_2 = 0,576 \text{ s} ; X_{0\min} = 1,5 \text{ cm}.$$

5. Soit G le barycentre de l'ensemble.

$$(M + m) \vec{a}_G = (M + m) \vec{g} + \vec{R} \quad (R = \text{action du sol}).$$

Soit en projection sur X, avec $R_x = 0$ cf. non frottement,

$(M + m)\ddot{X}_G = 0$ or $(M + m)X_G = MX_P + mX_C, \forall t$; on peut prendre $X_G = 0$;

$MX_P = -mX_C \Rightarrow M\dot{X}_P = -m\dot{X}_C$ avec $X_C = x_C \cos \alpha + \text{cste}$ avec l'origine bien choisie.

Ecrivons : $E_C + E_P = \text{cste}$.

Pour le prisme : $E_{C_1} = \frac{1}{2}M\dot{X}_P^2$; $E_{P_1} = \text{cste}$.

Pour la masse m sans rotation (cf. $f = 0$; $\dot{\theta}_0 = 0$) :

$$E_{C_2} = \frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}m\frac{\dot{X}_C^2}{\cos^2 \alpha} ; E_{P_2} = \frac{1}{2}Kx_C^2 - mgx_C \sin \alpha + \text{cste}.$$

$$\text{cste} = E_C + E_P = \frac{1}{2}M\dot{X}_P^2 + \frac{1}{2}m\frac{\dot{X}_C^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{2}K\frac{X_C^2}{\cos^2 \alpha} - mgX_C \tan \alpha + \text{cste},$$

et en dérivant, il reste après substitution de X_P :

$$\ddot{X}_C \left(\frac{m^2}{M} + \frac{m}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{K}{\cos^2 \alpha} X_C = mg \tan \alpha ; X_C = x_1 \cos \alpha \cos \frac{2\pi t}{T} + \text{cste} ;$$

x_1 est l'amplitude du mouvement de C sur le prisme si vitesse absolue initiale nulle.

$$X_P = -\frac{m}{M}x_1 \cos \alpha \cos \frac{2\pi t}{T} + \text{cste} ; \text{amplitude du mouvement de P}' : \frac{mx_1}{M} \cos \alpha.$$

$$\text{Période des diverses oscillations (proportionnelles)} : T = 2\pi \sqrt{\frac{m \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{m}{M} \right) \cos^2 \alpha}{K}}.$$

2.3.1.2. Roulement et basculement d'un cylindre

L'objet dont on veut étudier certains mouvements est un solide (C) homogène, de révolution, cylindrique.

- La longueur du cylindre est 2ℓ .
- Le rayon de la base circulaire est a .
- La masse totale est m .
- Le poids est \vec{mg} , \vec{g} étant un vecteur constant de norme $\|\vec{g}\| = g$.
- Le centre d'inertie est G.

On n'étudiera que des mouvements de roulement sans glissement, mais on cherchera à quelle(s) condition(s) il en est bien ainsi. On négligera tout frottement de roulement et on appellera f le coefficient de frottement de glissement.

I. Moments d'inertie : ces calculs ne sont pas exigibles dans toutes les filières

On rapporte le cylindre (C) à un trièdre orthonormé $Gxyz$, Gz étant l'axe de révolution du cylindre (Figure 1).

Calculer et exprimer en fonction de m , a et ℓ ;

1. Le moment d'inertie I_z par rapport à Gz .
2. Les moments d'inertie I_x et I_y par rapport à Gx et Gy .

"Premiers pas" théoriques

3. Le mouvement d'inertie J par rapport à une génératrice de la surface latérale du cylindre.

4. Déterminer le rapport $\frac{\ell}{a}$ tel que l'on ait $I_x = I_z$.

Quelle est alors la forme de l'opérateur d'inertie en G ?

Quelles seraient les conséquences pratiques de cette particularité dans l'écriture des lois fondamentales de la dynamique ?

II. Mouvement sur un plan

Le cylindre (C) est placé sur un plan horizontal fixe avec lequel il est en contact le long d'une génératrice.

1. Quelle est la nature du mouvement instantané du cylindre ?

Quelle est la nature du mouvement de G ?

2. Déterminer la réaction du plan sur le cylindre et en déduire que, si à l'instant initial le cylindre roule, le glissement ne pourra jamais s'amorcer.

Le plan qui supporte le cylindre fait désormais un angle α avec l'horizontale. La génératrice de contact fait un angle aigu β avec toute ligne de plus grande pente.

Les axes $Oxyz$, formant un trièdre orthonormé direct, seront choisis de la façon suivante :

O est un point fixe du plan.

Oy est parallèle à la génératrice de contact.

Ox est dans le plan incliné et fait un angle aigu $\frac{\pi}{2} - \beta$ avec la ligne de plus grande pente (Figure 2).

Le contact est réparti le long de la génératrice et l'on appelle T_x , T_y , N les composantes de la résultante \vec{R} des forces de liaison. Le cas échéant on pourra appeler $t_x dy$, $t_y dy$, ndy les composantes locales, c'est-à-dire en un point courant N de la génératrice de contact de ces forces de liaison. L'angle β est constant ; le trièdre $Oxyz$ est galiléen.

3. Quel est le mouvement de G ?

4. Ecrire, en G , les lois fondamentales de la dynamique.

5. En déduire les coordonnées de \vec{R} et la condition de non glissement que l'on exprimera sous forme d'une inégalité que f doit vérifier.

6. Vérifier que l'on retrouve bien le résultat déjà mis en évidence pour $\alpha = 0$. Déterminer dans quelle direction par rapport à la ligne de plus grande pente s'amorce éventuellement le glissement et vérifier que l'on a bien $\theta = 0$ si $\beta = 0$.

7. Déduire de II.4. que, en général, il n'est pas possible de considérer comme uniforme le long de la génératrice de contact la composante normale (suivant Oz) des forces de liaison. Expliquer qualitativement pourquoi.

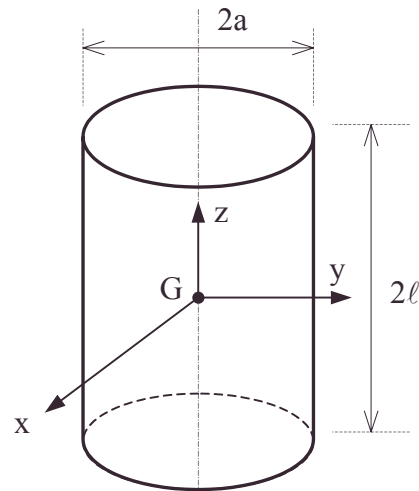


Figure 1

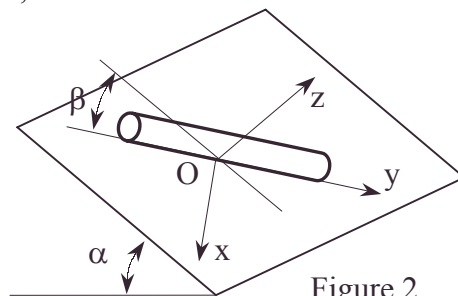


Figure 2

III. Mouvement sur une surface cylindrique

Le cylindre (C) est maintenant placé sur la face concave d'une surface cylindrique fixe (S), à génératrices horizontales, dont le cercle directeur a un rayon b ($b > a$) (Figure 3).

Le cylindre (C) dans son mouvement de roulement sans glissement, a une génératrice commune avec (S). Sa position est repérée par l'angle θ que fait avec la verticale, le plan contenant les axes de (S) et de (C) (Figure 3).

1. On abandonne le cylindre à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale, l'angle θ ayant la valeur θ_0 (avec $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$).

Ecrire l'équation différentielle (E) du premier ordre à laquelle satisfait $\theta(t)$.

2. Déterminer la période T des petites oscillations (θ_0 petit) et vérifier que $T \rightarrow \infty$ quand b augmente.

Expliquer pourquoi, quand $a \rightarrow 0$, on ne retrouve pas la période d'un pendule simple de longueur b .

3. En appliquant les lois fondamentales de la dynamique, déterminer les composantes radiale (N) et tangentielle (T) de la réaction \vec{R} de (S) sur le cylindre (C).

4. En déduire la condition de non glissement et l'exprimer comme en II.5. sous forme d'une inégalité vérifiée par f .

On suppose maintenant que les génératrices de la surface cylindrique font avec l'horizontale un angle γ . Toutes les autres données sont sans changement.

5. Montrer qu'il est facile d'obtenir, à partir des résultats de III.1. et 2. la nouvelle équation (E') vérifiée par $\theta(t)$ et la nouvelle période T' .

6. Déterminer les composantes de \vec{R} et en déduire la nouvelle condition de non glissement. Vérifier que pour $\gamma = 0$ on retrouve bien la condition établie en II.3.

IV. Etude de la possibilité de basculement

Tous les calculs précédents supposent que le cylindre reste en contact le long d'une de ses génératrices soit avec le plan, soit avec la surface cylindrique (S). S'il n'en est pas ainsi, on dira qu'il y a basculement du cylindre. On suppose toujours qu'il n'y a pas de glissement.

1. Décrire qualitativement le phénomène ; expliquer pourquoi il existe une valeur critique λ du rapport $\frac{\ell}{a}$ en deçà de laquelle il y a basculement. λ dépend-il a priori du coefficient de frottement de glissement f ?

2. Déterminer λ en fonction des caractéristiques géométriques α et β , dans le cas du plan incliné (fin de II.).

3. Déterminer λ dans le cas de la surface cylindrique (S) inclinée (fin de III.). Le résultat dépend-il de θ_0 ?

Mines ; Durée 3h

Corrigé

$$\text{I.1. } I_z = \mu \iiint_C r^2 d\tau \text{ avec } d\tau = 2\pi r dr 2\ell ; I_z = \mu \cdot 4\pi \ell \int_0^a r^3 dr = \mu\pi \ell a^4.$$

$$\text{Or, } m = \mu\pi a^2 2\ell \Rightarrow I_z = \frac{ma^2}{2}.$$

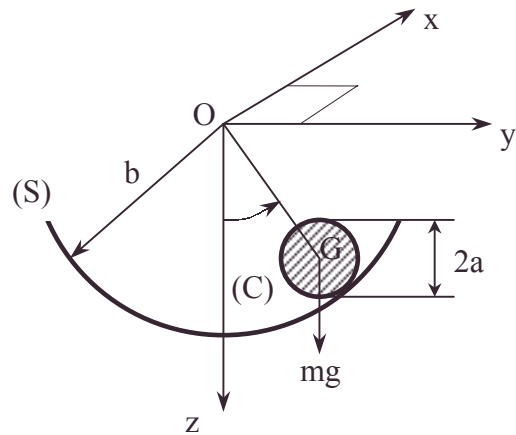


Figure 3

"Premiers pas" théoriques

2. $I_x = I_y$ par symétrie cylindrique ; or $I_x = \int (y^2 + z^2) dm$; $I_y = \int (z^2 + x^2) dm$; $I_z = \int (x^2 + y^2) dm$.

$$I_x + I_y = I_z + 2 \int z^2 dm ; \text{ or } \mu \int z^2 d\tau = \mu \int_{-\ell}^{+\ell} z^2 \pi a^2 dz = \frac{m\ell^2}{3} \Rightarrow I_x = I_y = m \left(\frac{a^2}{4} + \frac{\ell^2}{3} \right).$$

3. D'après le théorème de Huygens : $J = I_z + ma^2 = \frac{3}{2} ma^2$.

4.a. $I_x = I_z$; $\frac{a^2}{4} + \frac{\ell^2}{3} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{\ell}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Les plans coordonnés sont des plans de symétrie de C. Les produits d'inertie sont nuls ; l'opérateur d'inertie est diagonalisé dans la base choisie ; ses valeurs propres sont :

$$I_x, I_y, I_z \text{ (qui sont égales)}. I_x = I_y = I_z = \frac{ma^2}{2}.$$

$$(J_G) = \frac{ma^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

la matrice est une matrice scalaire comme dans le cas d'un cube ou d'une sphère.

c. D'après la méthode d'orthogonalisation de Schmidt, quand la valeur propre est triple, le choix de la base dans le sous espace propre de dimension 3 est libre. Tout

vecteur peut être choisi comme vecteur de base propre ; $\forall \vec{\Omega}, \vec{\sigma}_G = (J_G) \vec{\Omega} = \frac{ma^2}{2} \vec{\Omega}$

comme dans le cas d'un cube ou d'une sphère.

Le moment cinétique est toujours proportionnel à $\vec{\Omega}$ avec le coefficient multiplicatif $\frac{ma^2}{2}$.

II.1.a. et b. Analyse des forces : $m\vec{g}$, \vec{R} l'action de contact en I.

α. Théorème du mouvement du centre de masse : $m\vec{a}(G/R) = m\vec{g} + \vec{R}$.

β. Théorème du moment cinétique : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_R = \vec{GI} \wedge \vec{R} + \vec{0}$.

γ. Roulement sans glissement : $\vec{V}(I/R) = \vec{V}(G/R) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{0}$.

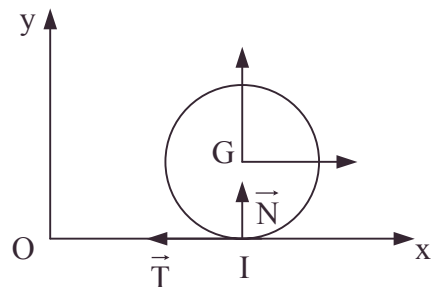
δ. Conservation de l'énergie : $\frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/R) + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_G \vec{\Omega} = \text{cste.}$

Soit : $m\ddot{x} = T_x$; $\frac{d\sigma_{Gz}}{dt} = aT_x$; $0 = \dot{x} + a\dot{\theta}$.

$$0 = -mg + N_y ; \frac{m}{2} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 = c ;$$

c est une constante.

$$\text{Or, } \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2c}{ma^2 + I_z}} = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \dot{x} = -a\dot{\theta}_0 = \dot{x}_0.$$



- centre de masse, centre d'inertie, Huygens [théorème sur les moments d'inertie d'], moment cinétique, moment d'inertie, opérateur d'inertie, P.F.D., produit d'inertie, roulement sans glissement, symétrie, théorème du moment cinétique

Conclusion : l'hypothèse de liaison parfaite sous la forme roulement sans glissement donne, translation rectiligne uniforme pour G, rotation uniforme pour le cylindre dans le repère barycentrique. L'axe instantané de rotation engendre un plan (axoïde), à la distance a du plan horizontal support.

2. $N_y = mg$; $T_x = 0$ à tout instant du mouvement du roulement sans glissement . Cette situation permanente dure sans aucun changement : le glissement ne pourra jamais s'amorcer sans événement supplémentaire.

3. et 4. $m\vec{a}\left(\frac{G}{R}\right) = m\vec{g} + \vec{R}$; $\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\right) = \int_C \vec{GN} \wedge (t_x d\vec{y}_x + t_y d\vec{y}_y + n d\vec{y}_z) + \vec{0}$

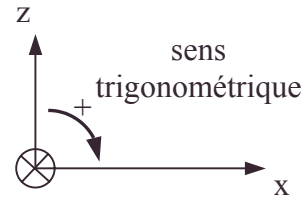
avec $\vec{GN} \begin{vmatrix} 0 \\ y \\ -a \end{vmatrix}$;

$$\vec{V}\left(\frac{I}{R}\right) = \vec{V}\left(\frac{G}{R}\right) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{0} ; \frac{1}{2}m\vec{V}^2\left(\frac{G}{R}\right) + \frac{1}{2}\vec{\sigma}_G \vec{\Omega} - m\vec{g} \cdot \vec{OG} = c ;$$

c est une constante

Projetons sur R : Oxyz :

$$\vec{g} \begin{vmatrix} g \sin \alpha \sin \beta \\ g \sin \alpha \cos \beta \\ -g \cos \alpha \end{vmatrix} \quad \vec{R} \begin{vmatrix} T_x \\ T_y \\ N \end{vmatrix} \quad \vec{GI} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{vmatrix} \quad \vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \end{vmatrix}$$



On garde la notation $I_z = \frac{ma^2}{2}$. On projette les équations vectorielles :

α. $m\ddot{x} = mg \sin \alpha \sin \beta + T_x$; $I_y \ddot{\beta} = 0$; $0 = \dot{x} - a \dot{\theta}$;

signe compréhensible vu la figure jointe ci-dessus : quand $\dot{x} > 0$ $\dot{\theta} > 0$.

β. $m\ddot{y} = mg \sin \alpha \cos \beta + T_y$; $I_z \ddot{\theta} = -aT_x$; $0 = \dot{y} \Rightarrow \ddot{y} = 0$;

$$0 = -mg \cos \alpha + N ; \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_y \dot{\beta}^2 - mg \sin \alpha (x \sin \beta + y \cos \beta) = c .$$

Éliminons T_x et θ ; $m\ddot{x} = mg \sin \alpha \sin \beta - \frac{I_z}{a} \ddot{\theta} = mg \sin \alpha \sin \beta - \frac{I_z}{a^2} \ddot{x}$.

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha \sin \beta}{1 + \frac{I_z}{ma^2}} = \frac{2}{3}g \sin \alpha \sin \beta \text{ et } \ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{a} \sin \alpha \sin \beta ; \ddot{y} = 0 .$$

N.B. : Le mouvement de G est un mouvement rectiligne uniformément accéléré :

$$x = \frac{1}{3}g \sin \alpha \sin \beta t^2 + V_0 t ; y = 0 ; z = a .$$

Cette conclusion aurait pu être énoncée auparavant vu le sens physique.

5.a. $\vec{R} \begin{vmatrix} T_x = -\frac{mg}{3} \sin \alpha \sin \beta \\ T_y = -mg \sin \alpha \cos \beta \\ N = mg \cos \alpha \end{vmatrix}$

"Premiers pas" théoriques

b. La condition de non glissement s'exprime vu la loi de Coulomb statique car $\vec{V}(I/R) = \vec{0}$;

$$|\vec{T}| \leq f N \text{ soit } \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \leq f mg \cos \alpha \text{ et en remplaçant } T_x \text{ et } T_y : f \geq \frac{\tan \alpha}{3} \sqrt{1 + 8 \cos^2 \beta} .$$

La loi de Coulomb statique est impérative pour qu'il y ait roulement sans glissement ; on doit s'en assurer car elle n'est pas contenue dans l'écriture cinématique du roulement sans glissement.

6.a. $\alpha = 0$ donne $f \geq 0$, il ne peut y avoir qu'un roulement sans glissement car cette condition ne peut être transgressée.

b. Physiquement; le glissement démarre sous l'effet et dans la direction de \vec{T} .

$$\tan(\beta - \phi) = \frac{T_x}{T_y} = \frac{1}{3} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \Rightarrow \beta - \phi = \arctan \left[\frac{1}{3} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right] (\text{modulo } \pi).$$

$$\phi = \beta - \arctan \left(\frac{1}{3} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) (\text{modulo } \pi).$$

On vérifie $\phi = 0$ pour $\beta = 0$.

donc $T_x = 0$; $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$ sans lancement.

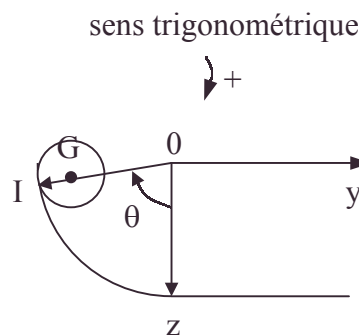
7. Vu l'absence de rotation autour de Ox :

$$\vec{x} \cdot \left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right) = \int_{-\ell}^{+\ell} (ny dy + a t_y dy) = 0 \Rightarrow a \int_{-\ell}^{+\ell} t_y dy = a T_y = mg a \sin \alpha \cos \beta = - \int_{-\ell}^{+\ell} ny dy$$

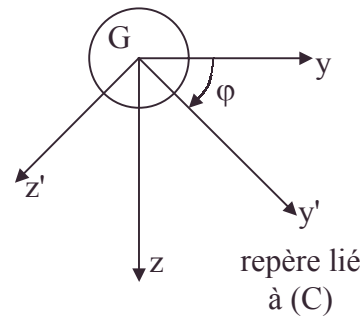
Si n était uniforme, on aurait $\int ny dy = 0$ ce qui n'est pas compatible avec la mécanique

vu la tendance d'un solide à s'enfoncer en arrivant (d'où un signe $-$ à $\vec{x} \cdot \left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right)$)

Qualitativement, la partie basse porte davantage que la partie haute du contact.

III.1.

On prendra
 θ et ϕ
positifs
sur les figures.



On a un mouvement à 2 paramètres : écrivons la condition de roulement sans glissement et la conservation de l'énergie.

a. $\vec{V}(I/R) = \vec{0} = \vec{V}(G/R) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}.$

$$\vec{OG} \begin{vmatrix} 0 \\ -(b-a) \sin \theta \\ (b-a) \cos \theta \end{vmatrix} ; \vec{V}(G/R) \begin{vmatrix} 0 \\ -(b-a) \cos \theta \dot{\theta} \\ -(b-a) \sin \theta \dot{\theta} \end{vmatrix} ; \vec{V}^2(G/R)_z = (b-a)^2 \dot{\theta}^2 ;$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} \vec{GI} \begin{vmatrix} 0 \\ -a \sin \theta \\ a \cos \theta \end{vmatrix} ; \vec{\Omega} \begin{vmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ; \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} \begin{vmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} a \cos \theta \\ -\dot{\varphi} a \sin \theta \end{vmatrix} & \Rightarrow & 0 = 0 + 0 & \\ & & 0 = -(b-a) \cos \theta \dot{\theta} - \dot{\varphi} a \cos \theta & \\ & & 0 = -(b-a) \sin \theta \dot{\theta} - \dot{\varphi} a \sin \theta & \end{array}$$

On en déduit : $(b-a)\dot{\theta} + \dot{\varphi}a = 0$; vérification des signes : $\dot{\theta} > 0 \Rightarrow \dot{\varphi} < 0$.

$$\text{b. } \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_G \cdot \vec{\Omega} - m \vec{g} \cdot \vec{OG} = c ; \vec{\sigma}_G = I_z \vec{\Omega} \text{ avec } I_z = \frac{ma^2}{2} ;$$

$$\frac{1}{2} m (b-a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 - m g (b-a) \cos \theta = -m g (b-a) \cos \theta_0 .$$

$$\text{Eliminons } \varphi : \frac{1}{2} m (b-a)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{I_z^2}{a^2} (b-a)^2 \dot{\theta}^2 - m g (b-a) \cos \theta = -m g (b-a) \cos \theta_0 ,$$

$$\text{soit } \dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(b-a)} (\cos \theta - \cos \theta_0) . \text{ (E)}$$

$$\text{2. En dérivant, il reste : } \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(b-a)} \sin \theta = 0 .$$

$$\text{a. En linéarisant : } \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(b-a)} \theta = 0 , \text{ soit } \omega = \left(\frac{2g}{3(b-a)} \right)^{\frac{1}{2}} , \text{ d'où } T = 2\pi \sqrt{\frac{3(b-a)}{2g}} .$$

$$\text{b. Quand } b \rightarrow \infty ; T \rightarrow \infty .$$

$$\text{c. Quand } a \rightarrow 0 ; T \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{3b}{2g}} .$$

• L'hypothèse $\dot{\varphi} = 0$ qui caractérise le pendule simple associé, équivaut à la suppression formelle de I_z , soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{(b-a)} \sin \theta = 0$, soit $T_p = 2\pi \sqrt{\frac{b-a}{g}}$ et

$$T_p \rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{b}{g}} \text{ quand } a \rightarrow 0 ; \text{ ce n'est pas la même limite.}$$

• La rotation $\varphi(t)$, que le pendule simple n'a pas, induit une énergie cinétique non nulle associée au roulement sans glissement qui modifie la période ; avec

$$\dot{\varphi} \rightarrow \infty \text{ quand } a \rightarrow 0 \text{ pour satisfaire à } b\dot{\theta} + \dot{\varphi}a = 0 : \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} ma^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} mb^2 \dot{\theta}^2 .$$

$$\text{3. } m \vec{a}_G = \vec{R} + m \vec{g} \Rightarrow \vec{R} = m \vec{a}_G - m \vec{g} .$$

On se prépare à projeter en coordonnées polaires de centre O,

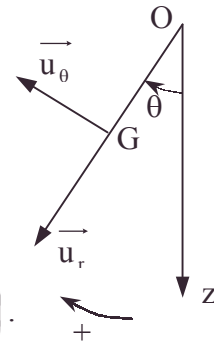
$$\vec{a}_G = -(b-a)\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + (b-a)\ddot{\theta} \vec{u}_\theta ;$$

$$m \vec{g} = m g \cos \theta \vec{u}_r - m g \sin \theta \vec{u}_\theta ;$$

$$\vec{R} = -N \vec{u}_r + T \vec{u}_\theta \Rightarrow T = m g \sin \theta + m (b-a) \ddot{\theta} = \frac{1}{3} m g \sin \theta \text{ vu 2.}$$

$$\text{et } N = m g \cos \theta + m (b-a) \dot{\theta}^2 \text{ et vu 1., } N = m g \left(\frac{7}{3} \cos \theta - \frac{4}{3} \cos \theta_0 \right) .$$

4. La condition de non glissement issue de la loi de Coulomb statique.



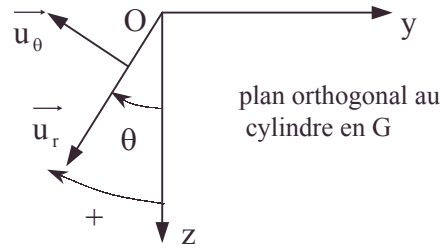
"Premiers pas" théoriques

$$|\vec{T}| \leq f |\vec{N}| \quad \text{s'écrit} \quad f \geq \left| \frac{\sin \theta}{7 \cos \theta - 4 \cos \theta_0} \right|.$$

5. On a la même condition de roulement sans glissement et la même énergie cinétique.

- Projétons \vec{g} dans ces axes :

$E_p = -\vec{g} \cdot m \vec{OG} = -mg(b-a) \cos \theta \cos \gamma$, car le plan de la figure précédente fait l'angle γ avec le plan vertical ; g est remplacé par $g \cos \gamma$ afin d'éviter un dessin plus délicat et une démonstration nouvelle.



- On obtient la même relation qu'en III.1. en remplaçant $\cos \theta$ par $\cos \theta \cos \gamma$, ce qui par dérivation donne, à la place de $\sin \theta$ dans III.2., $\sin \theta \cos \gamma$; on obtient :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g \cos \gamma}{3(b-a)} (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (E')$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(b-a)} \sin \theta \cos \gamma = 0 \quad \text{et} \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{3(b-a)}{2g \cos \gamma}} \quad \text{pour les petites oscillations.}$$

6. En coordonnées cylindriques (cf. III.3.) : $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$;

$$\vec{a}_G = -(b-a) \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + (b-a) \ddot{\theta} \vec{u}_\theta ;$$

$$m \vec{g} = mg \cos \theta \cos \gamma \vec{u}_r - mg \sin \theta \cos \gamma \vec{u}_\theta - mg \sin \gamma \vec{k} ;$$

$$\text{La nouveauté est : } \vec{R} = -N \vec{u}_r + T_1 \vec{u}_\theta + T_2 \vec{k} ; \text{ or } \vec{R} = m \vec{a} \left(\vec{G}/\vec{R} \right) - m \vec{g} ,$$

$$\text{et la conservation de l'énergie s'écrit : } \dot{\theta}^2 = \frac{4g \cos \gamma}{3(b-a)} (\cos \theta - \cos \theta_0) ; \ddot{\theta} = \frac{2g \sin \theta}{3(b-a)} \cos \gamma .$$

$$\text{On en tire : } T_1 = -\frac{mg}{3} \cos \gamma \sin \theta ; T_2 = -mg \sin \gamma ;$$

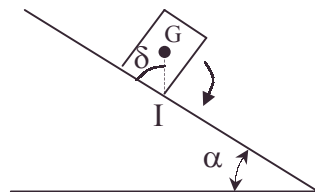
$$N = -\frac{mg}{3} \cos \gamma (7 \cos \theta - 4 \cos \theta_0) .$$

$$\text{La condition de Coulomb s'écrit : } T_1^2 + T_2^2 \leq f^2 N^2, \text{ soit } f \geq \sqrt{\frac{\sin^2 \theta + 9 \tan^2 \gamma}{(7 \cos \theta - 4 \cos \theta_0)^2}} \quad \forall \theta .$$

$\gamma = 0$, f satisfait à III.4.

IV.1.a. Le mouvement de basculement indiqué sur la figure se fera si G est à droite de la verticale de I (cf. moment du poids actif en I en supposant aucune impulsion initiale favorable), soit avec :

$$\delta > \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{soit si } \tan \delta > \cotan \alpha \quad \text{ou} \quad \tan \alpha \geq \frac{\ell}{a} .$$



La valeur critique de $\frac{\ell}{a}$ est $\lambda = \tan \alpha$.

On comprend que vu $a \gg \ell$ il y a un basculement aisé.

b. Cette condition géométrique limite est indépendante du coefficient de frottement qui intervient dans l'analyse dynamique.

2. Etudions le changement de signe du moment du poids en I, selon Ox : basculement si moment négatif.

- conservation de l'énergie, développement au premier ordre ou plus, énergie cinétique, loi de Coulomb, non glissement, roulement sans glissement

$$\begin{array}{c|c|c} \vec{IG} & \begin{array}{c} 0 \\ -\ell \\ a \end{array} & \begin{array}{c} g \sin \alpha \sin \beta \\ g \sin \alpha \cos \beta \\ -g \cos \alpha \end{array} \\ \hline \vec{IG} \wedge m\vec{g} & \begin{array}{c} B \\ C \end{array} & \begin{array}{c} mg(\ell \cos \alpha - a \sin \alpha \cos \beta) \end{array} \end{array}$$

Il faut donc à la limite $\frac{\ell}{a} = \lambda = \tan \alpha \cos \beta$, et le basculement a lieu pour :

$$\tan \alpha \cos \beta \geq \frac{\ell}{a} \text{ (cf. IV.1.a. pour } \beta = 0 \text{)}.$$

3. Etudions le changement de signe de la projection selon \vec{u}_θ du moment du poids calculé en I_1 , point bas de contact.

$$\vec{I_1 G} = -a \vec{u}_r + \ell \vec{k} ; m\vec{g} = mg \cos \theta \cos \gamma \vec{u}_r - mg \sin \theta \cos \gamma \vec{u}_\theta - mg \sin \gamma \vec{k} \text{ cf. III.}$$

$$\vec{u}_\theta \cdot (\vec{I_1 G} \wedge m\vec{g}) = -a mg \cos \theta \cos \gamma \left(\frac{\tan \gamma}{\cos \theta} - \frac{\ell}{a} \right) < 0 \text{ donne le basculement (cf. sens}$$

$$\text{trigonométrique) pour } \frac{\tan \gamma}{\cos \theta} > \frac{\ell}{a} ; \lambda = \frac{\tan \gamma}{\cos \theta} \text{ avec } \dot{\theta}_0 = 0.$$

$$\cos \theta_0 < \cos \theta ; \frac{1}{\cos \theta_0} > \frac{1}{\cos \theta} ;$$

$$\frac{\ell}{a} < \frac{\tan \gamma}{\cos \theta} < \frac{\tan \gamma}{\cos \theta_0} \text{ provoque le basculement et si la condition est possible elle est}$$

satisfaite dès $t = 0$.

θ_0 a donc une pleine importance pour le basculement, qui sinon n'aura pas lieu après.

2.3.1.3. Loi de Coulomb dans un repère oscillant

Une barre homogène A'A de masse M , de longueur $2L$ et de section négligeable est mobile, sans frottement sauf spécification contraire, autour d'un axe passant par son centre de masse O .

On dépose à l'extrémité A de la barre une masse m quasi-ponctuelle. Le contact entre la masse et la barre se fait selon un frottement de glissement statique de coefficient K .

On étudie successivement les conditions dans lesquelles la masse m reste posée sur la barre pour différents mouvements de celle-ci.

On utilisera le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(Oxyz)$ de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, le vecteur \vec{k} étant vertical.

On notera g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

I. L'axe de rotation Oz de la barre est vertical

On utilisera en outre le référentiel lié à la barre $\mathcal{R}_1(r\theta z)$ de vecteurs unitaires $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$ avec $\theta = \left(\vec{i}, \vec{u}_r \right)$.

A. On donne à la barre un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω .

1. Donner, en fonction de g , K et L , l'expression de la valeur ω_c de la vitesse angulaire à partir de laquelle la masse quitte la barre.

B. On adjoint au système un ressort spiral parfait de raideur C_1 . Le ressort a une extrémité fixe et l'autre liée à la barre, lui conférant un couple de rappel de moment

"Premiers pas" théoriques

parallèle à Oz. La barre est écartée, dans le plan horizontal, d'un angle θ_0 de sa position d'équilibre et libérée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

2. Ecrire, en fonction de M , m , L et C_1 , l'équation différentielle en θ du mouvement.

3. En déduire son équation horaire $\theta(t)$ et sa pulsation Ω .

4. Calculer l'accélération \vec{a} de la masse m dans le référentiel \mathcal{R}_1 .

5. En déduire les composantes des forces s'exerçant sur la masse m .

6. Ecrire, en fonction de m , L , Ω , K , g (et du temps t), la loi de Coulomb relative au frottement de glissement.

7. Etudier cette expression. On pourra poser $X = \sin^2 \Omega t$.

Mettre en évidence une valeur critique θ_{0c} de l'angle initial θ_0 quant à l'expression de l'angle $\theta_{0\ell}$ pour laquelle la masse m quitte la barre.

8. Application numérique : calculer Ω et $\theta_{0\ell}$ pour les données suivantes :

$M = 2 \text{ kg}$; $C_1 = 0,2 \text{ N.m}$; $m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $K = 0,2$; $L = 1 \text{ m}$.

C. Le système précédent est ici soumis de plus à un couple de frottement visqueux de coefficient f devant $\dot{\theta}$.

9. Ecrire l'équation différentielle en θ du mouvement.

On posera $\xi = \frac{f\Omega}{2C_1}$ et on supposera $\xi < 1$.

10. En déduire l'équation horaire $\theta(t)$.

II. L'axe de rotation Ox de la barre est horizontal

On utilisera ici le référentiel lié à la barre $\mathcal{R}_2(\rho, \alpha, x)$ de vecteurs unitaires \vec{u}_ρ , \vec{u}_α , \vec{i} avec $\alpha = \left(\vec{j}, \vec{u}_\rho \right)$.

D. La barre est ici munie d'un ressort spiral parfait de raideur C_2 ayant une extrémité fixe et l'autre liée à la barre, lui conférant un couple de rappel parallèle à Ox. Ce couple est nul pour $\alpha = 0$.

11. Ecrire, en fonction de m , L , g , C_2 et α , la somme des moments selon Ox à l'équilibre.

12. Ecrire les conditions d'équilibre de la masse m dans le repère \mathcal{R}_0 .

13. En déduire la valeur limite $\alpha_{1\ell}$ de α pour laquelle la masse m reste sur la barre.

14. Montrer qu'il existe de même une valeur limite $C_{2\ell}$ de C_2 .

Exprimer $C_{2\ell}$ en fonction de m , L , g et K .

15. Application numérique : avec les données de la question 8., dire si le ressort de raideur C_1 (partie I.B.) peut ici convenir pour maintenir l'équilibre.

E. On supprime ici le ressort spiral. On abandonne le système en position horizontale sans vitesse initiale.

16. Déterminer, en fonction de m , M , L et g , l'accélération angulaire $\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ du

système. La mettre sous la forme $\ddot{\alpha} = \dot{\omega}_0 \cos \alpha$. Exprimer $\dot{\omega}_0$.

17. Ecrire les composantes des forces s'exerçant sur la masse m .

18. Ecrire les expressions ci-dessus en fonction des seuls paramètres m , L , g , ω_0 , $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

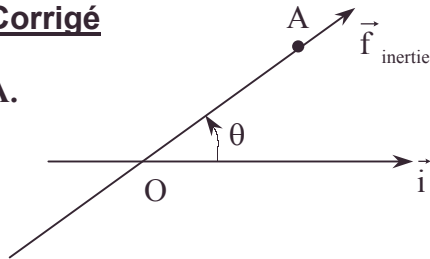
19. En déduire la valeur limite $\alpha_{2\ell}$ de α pour laquelle la masse m reste sur la barre.

20. Application numérique : avec les données de la question 8., calculer $\alpha_{1\ell}$ (n° 13.) et $\alpha_{2\ell}$. Commenter la comparaison de ces résultats.

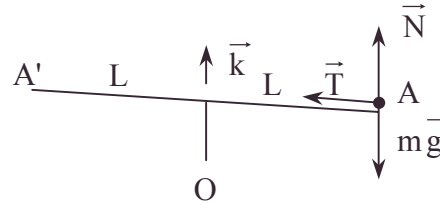
ENSAM ; Durée : 2h.

Corrigé

A.



vue de dessus



vue en perspective

1. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans \mathcal{R}_1 :

$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f}_{\text{inertie}}$; au démarrage par croissance continue de ω : on obtient le début du glissement

$$\left. \begin{array}{l} \text{avec } \vec{O} = \vec{0} \\ \text{et } T = KN \end{array} \right\} \Rightarrow N = mg \text{ et } T = m\omega_c^2 L \Rightarrow Kmg = m\omega_c^2 L ; \omega_c = \sqrt{\frac{Kg}{L}}.$$

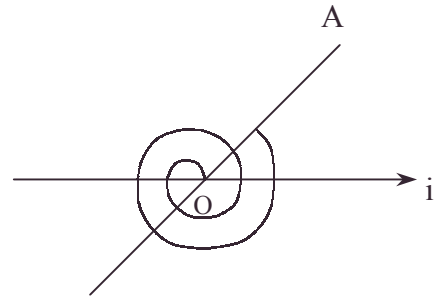
B.2. Le théorème du moment cinétique appliqué au système $M + m$ (m supposé en A) donc fixé :

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = -C_1 \theta ;$$

$$\vec{\sigma}_0 = \vec{OA} \wedge m\vec{V}_A + \int_{-L}^L \vec{OM} \wedge \vec{V}_M dm ;$$

$$\vec{\sigma}_0 = \left(mL^2 \omega + \int_{-L}^L \frac{M}{2L} r^2 \omega dr \right) \vec{k}.$$

$$\sigma_z = \left(mL^2 + \frac{1}{3} ML^2 \right) \omega \Rightarrow \left(m + \frac{1}{3} M \right) L^2 \ddot{\theta} + C_1 \theta = 0.$$



$$3. \theta = A \cos(\Omega t + \varphi) \text{ avec } \Omega^2 = \frac{C_1}{\left(m + \frac{1}{3} M \right) L^2}.$$

Les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{C_1}{L^2 \left(m + \frac{M}{3} \right)}} t.$

4. L'accélération relative de m dans \mathcal{R}_1 est nulle ; son accélération \vec{a} pour un mouvement circulaire (non uniforme) s'écrit :

$$\vec{a} = L \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2 L \vec{u}_r = -L\Omega^2 \theta_0 \cos \Omega t \vec{u}_\theta - L\Omega^2 \theta_0^2 \sin^2 \Omega t \vec{u}_r.$$

5. $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g}$ (dans \mathcal{R}_0) ; vu l'absence de moteur pour le soulèvement ;

$$\vec{a}_z = \vec{0} \Rightarrow N = mg ; \vec{T} = m\vec{a}.$$

$$T_r = -m\dot{\theta}^2 L = -mL\Omega^2 \theta_0^2 \sin^2 \Omega t ; T_\theta = m\ddot{\theta} L = -mL\Omega^2 \theta_0 \cos \Omega t.$$

6. La loi de Coulomb dans le cas résolu est : $\|\vec{T}\| \leq K \|\vec{N}\|.$

"Premiers pas" théoriques

$$m^2 L^2 \left(\ddot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2 \right) \leq K^2 m^2 g^2 \Rightarrow \theta_0^4 \Omega^4 \sin^4 \Omega t + \Omega^4 \theta_0^2 \cos^2 \Omega t \leq \frac{K^2 g^2}{L^2}.$$

7. Avec la notation $X = \sin^2 \Omega t$;

$$\theta_0^2 X^2 - X + \left(1 - \frac{K^2 g^2}{L^2 \Omega^4 \theta_0^2} \right) \leq 0 \text{ de la forme } f(X) \leq 0.$$

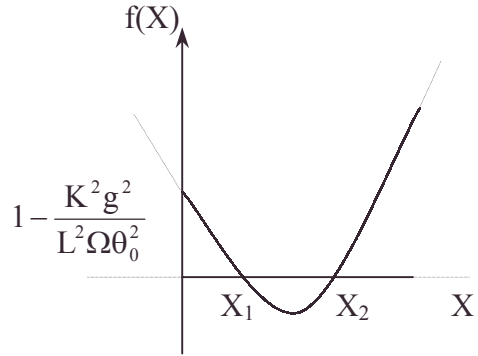
On voit sur le graphe que :

$$f(X) \leq 0 \text{ pour } X_1 \leq X \leq X_2.$$

La dérivée $f'(x) = 2\theta_0^2 X - 1$ est nulle pour

$$X_m = \frac{1}{2\theta_0^2} = \frac{X_1 + X_2}{2}.$$

$$f(X) = 0 \Rightarrow X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\theta_0^2 + \frac{4K^2 g^2}{L^2 \Omega^4}}}{2\theta_0^2}.$$



$$\text{Conditions d'existence } \Delta \geq 0 : 1 - 4\theta_0^2 + \frac{4K^2 g^2 L^2 \left(m + \frac{1}{3} M \right)^2}{C_1^2} \geq 0 ;$$

$$\theta_0 \leq \frac{\sqrt{1 + 4K^2 g^2 L^2 \left(m + \frac{1}{3} M \right)^2}}{2} \text{ de la forme } \theta_0 \leq \theta_{01} ; \text{A.N. : } \theta_{01} = 6,761 \text{ rad.}$$

Conditions de compatibilité :

$$\alpha. X_1 \geq 0 ; 1 - 4\theta_0^2 + \frac{4K^2 g^2 L^2 \left(m + \frac{1}{3} M \right)^2}{C_1^2} \leq 1 \text{ soit } \theta_0 \geq \frac{KgL \left(m + \frac{1}{3} M \right)}{C_1} \text{ de la forme}$$

$$\theta_0 \geq \theta_{02} ; \text{A.N. : } \theta_{02} = 6,74 \text{ rad.}$$

$$\beta. X_2 \leq 1 ; 1 + \sqrt{1 - 4\theta_0^2 + \frac{4K^2 g^2 L^2 \left(m + \frac{1}{3} M \right)^2}{C_1^2}} \geq 2\theta_0^2 ;$$

$$1 - 4\theta_0^2 + \frac{4K^2 g^2 L^2 \left(m + \frac{1}{3} M \right)^2}{C_1^2} \leq 1 + 4\theta_0^4 - 4\theta_0^2 ;$$

$$\left(\frac{4K^2 g^2 L^2 \left(m + \frac{1}{3} M \right)^2}{4C_1^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq \theta_0 \text{ de la forme } \theta_0 \geq \theta_{03} ; \text{A.N. : } \theta_{03} = 2,596 \text{ rad. En partant}$$

de $\theta_0 > 0$, la force centrifuge provoquera la chute de m pour la plus grande valeur de

$$\theta = \theta_0 \cos \Omega t = \theta_0 \sqrt{1 - X^2} \text{ inférieure à } \theta_0, \text{ soit la plus petite valeur réelle positive de } X.$$

Donc pour X_1 si $\theta_{01} \geq \theta_0 \geq \theta_{02}$ A.N. : $6,76 > \theta_0 > 6,74$ ce qui est un créneau très particulier.

Soit pour X_2 pour $\theta_{01} \geq \theta_0 \geq \theta_{03}$ A.N. : $6,76 > \theta_0 > 2,60$, donc $\theta_{0c} = \theta_{01}$

$$\text{A.N. : } \theta_{0c} = 2,60 \text{ rad et la valeur correspondante de } X_2 \Rightarrow \theta_{0\ell} = \theta_{0c} \sqrt{1 - X_{2c}^2} \neq \theta_{0c}$$

$$\text{avec } X_2 = 0,011 ; \theta_{0c} = \theta_{0\ell} = 2,60 \text{ rad.}$$

C.9. $\left(m + \frac{M}{3}\right)L^2 \ddot{\theta} = -C_1 \theta - f \dot{\theta}$ soit $\ddot{\theta} + \frac{f \dot{\theta}}{\left(m + \frac{M}{3}\right)L^2} + \Omega^2 \theta = 0$, ou encore :

$$\ddot{\theta} + \frac{f \Omega^2}{C_1} \dot{\theta} + \Omega^2 \theta \text{ soit } \ddot{\theta} + 2\xi\Omega \dot{\theta} + \Omega^2 \theta = 0.$$

10. En recherchant les solutions sous la forme $\theta = Ae^{rt}$;

$$r^2 + 2\xi\Omega r + \Omega^2 = 0 \Rightarrow r = -\xi\Omega \pm \Omega\sqrt{\xi^2 - 1} = -\Omega(\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}) \text{ vu } \xi < 1.$$

$$\theta = Ae^{-\xi\Omega t} \cos(\Omega\sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi),$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = Ae^{-\xi\Omega t} \left[-\xi\Omega \cos(\Omega\sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) - \Omega\sqrt{1 - \xi^2} \sin(\Omega\sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \right].$$

Soit avec les mêmes conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

$$A \cos \varphi = \theta_0 \text{ et } \xi\Omega \cos \varphi + \Omega\sqrt{1 - \xi^2} \sin \varphi = 0.$$

$$\varphi = -\arctan \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \xi = -\sin \varphi \Rightarrow A = \frac{\theta_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{ et } \varphi = -\arcsin \xi.$$

$$\theta = \frac{\theta_0 e^{-\xi\Omega t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(\Omega\sqrt{1 - \xi^2} t - \arcsin \xi).$$

D. figure avec $\alpha > 0$

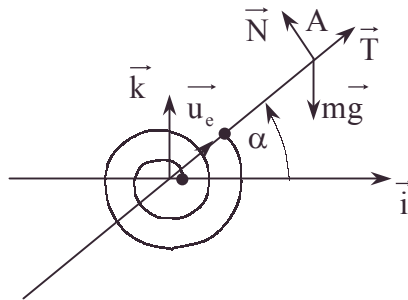
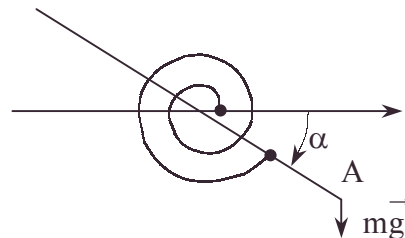


figure avec $\alpha < 0$

\vec{T} et \vec{N} non représentés



11. A l'équilibre du système $m + M$, $C_x = 0 = -mgL \cos \alpha_{\text{éq}} - C_2 \alpha_{\text{éq}} + 0$.

On voit $\alpha_{\text{éq}} < 0$.

\vec{T} et \vec{N} sont des forces intérieures ; la liaison est parfaite.

12. L'équilibre de m dans le repère \mathcal{R}_0 s'écrit : Selon \vec{u}_ρ : $0 = T - mg \sin \alpha$;

Selon \vec{u}_α : $0 = N - mg \cos \alpha$.

avec la vérification de la loi de Coulomb : $|T| \leq K|N|$, soit $|\tan \alpha| \leq K$.

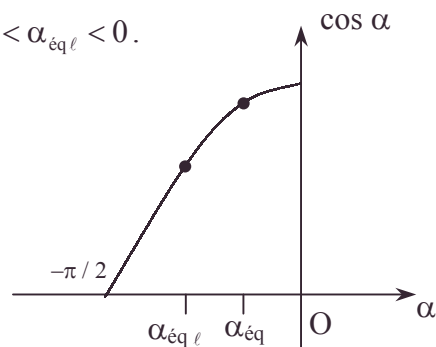
13. Vu 11. et 12. $\alpha_{\text{éq}\ell} = -\arctan K$, avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha_{\text{éq}\ell} < 0$.

14. La condition $\alpha_{\text{éq}\ell} \leq \alpha_{\text{éq}} < 0$ s'écrit

$$-\arctan K \leq -\frac{mgL}{C_2} \cos \alpha_{\text{éq}}, \text{ soit :}$$

$$C_2 \geq \frac{mgL \cos \alpha_{\text{éq}}}{\arctan K} \geq \frac{mgL \cos \alpha_{\text{éq}\ell}}{\arctan K}$$

car $\cos \alpha_{\text{éq}} > \cos \alpha_{\text{éq}\ell}$ vu la figure ci-contre.



"Premiers pas" théoriques

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_{\text{éq}\ell}} = 1 + \tan^2 \alpha_{\text{éq}\ell} = 1 + K^2.$$

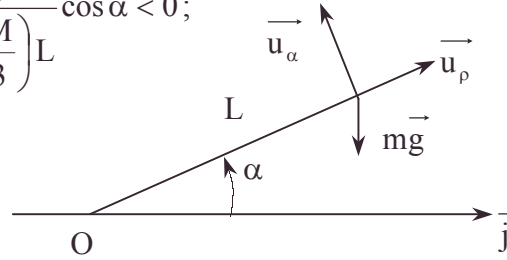
Soit $C_2 \geq C_{2\ell}$ avec $C_{2\ell} = \frac{mgL}{\sqrt{1+K^2} \arctan K}.$

15. $C_{2\ell} = 0,098L$ or $C_1 = 0,2 \text{ N.m.}$; C_1 peut convenir si $L < 2 \text{ m}$ ce qui est le cas.

E.16. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\left(m + \frac{M}{3}\right)L^2 \ddot{\alpha} = -mgL \cos \alpha \Rightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{mg}{\left(m + \frac{M}{3}\right)L} \cos \alpha < 0;$$

soit $\dot{\omega}_0 = -\frac{mg}{\left(m + \frac{M}{3}\right)L}.$



En multipliant par $\dot{\alpha} dt$ et en intégrant, on a : $\frac{\dot{\alpha}^2}{2} = \dot{\omega}_0 \sin \alpha$ vu les conditions initiales.

E.17.-18. $\vec{R} = T_\rho \vec{u}_\rho + N_\alpha \vec{u}_\alpha.$

$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g}$ s'écrit en projections même quand $\alpha < 0$.

$$mL\ddot{\alpha} = N_\alpha - mg \cos \alpha \Rightarrow N_\alpha = mL\ddot{\alpha} + mg \cos \alpha$$

$$-mL\dot{\alpha}^2 = T_\rho - mg \sin \alpha \Rightarrow T_\rho = mg \sin \alpha - mL\dot{\alpha}^2.$$

$$N_\alpha = mg \cos \alpha \left(1 - \frac{m}{m + \frac{M}{3}}\right) = \frac{m}{3} M \frac{g \cos \alpha}{m + \frac{M}{3}} = m \cos \alpha \left(g + L \dot{\omega}_0\right).$$

$$T_\rho = mg \sin \alpha - 2mL \dot{\omega}_0 \sin \alpha = m \sin \alpha \left(g - 2L \dot{\omega}_0\right);$$

$$T_\rho = mg \sin \alpha \left(1 + \frac{2m}{m + \frac{M}{3}}\right) = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{M}{3}} \left(\frac{M}{3} + 3m\right).$$

19. Le cas limite $|T_\rho| = K|N_\alpha|$ pour que m tombe de la barre s'écrit :

$$-\tan \alpha_{2\ell} = \frac{K \frac{M}{3}}{\frac{M}{3} + 3m} \Rightarrow \alpha_{2\ell} = -\arctan \frac{K}{1 + \frac{9m}{M}}.$$

20. On voit $|\alpha_{2\ell}| < |\alpha_{1\ell}|$; $\alpha_{1\ell}$ vu en D.13.

T doit vaincre la force d'inertie s'ajoutant à la pesanteur.

A.N. : $\alpha_{1\ell} = -0,1974 \text{ rad}$; $\alpha_{2\ell} = -0,1957 \text{ rad}$.

2.3.1.4. Système à ressorts

On considère un repère galiléen Oxyz, l'axe Oz est vertical ascendant et g mesure l'accélération de la pesanteur. On note respectivement \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz. La norme d'un vecteur \vec{U} est notée $|\vec{U}|$.

Dans tout le problème, t désigne le temps. Les dérivées premières et secondes des fonctions $r, \theta, p, x, y, \xi, \eta, \psi$ de t sont notées avec des points : $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{p}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\psi}, \ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{p}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\psi}$. Les valeurs initiales à $t = 0$ de ces mêmes fonctions et des dérivées premières sont notées avec un indice 0 : $r_0, \theta_0, p_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0, \dot{p}_0, \dots$ et ainsi de suite.

Dans ce problème, on considère plusieurs ressorts identiques notés \mathcal{R} , \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 et représentés par un trait gras sur les schémas. Chaque ressort a une masse négligeable, il exerce sur ses extrémités une force de rappel proportionnelle à son allongement, parallèle à la droite joignant ses extrémités dans l'état déformé, et nulle quand sa longueur est égale à λ . La raideur du ressort est notée k ($k > 0$).

I. On considère dans cette partie un solide de masse m assimilée à une particule ponctuelle notée P . Une liaison parfaite, c'est-à-dire sans frottement, maintient la particule P dans le plan Oxy. On ne se préoccupe pas de la réaction assurant cette liaison, on utilisera donc le principe fondamental de la dynamique en projection sur le plan Oxy.

Le plan Oxy est orienté positivement par Oz et la particule P est repérée par ses coordonnées polaires (r, θ) , $r = |\vec{OP}|$ et $\theta = (\vec{i}, \vec{OP})$. On note \vec{e}_r et \vec{e}_θ les vecteurs se déduisant de \vec{i} et \vec{j} par rotation d'angle θ .

On appelle $\vec{v}(P)$ et $\vec{a}(P)$ la vitesse et l'accélération de la particule P .

La particule P est attachée à l'extrémité d'un ressort (décrit précédemment) dont l'autre extrémité est attachée en O. De plus, un amortisseur exerce sur P une force résistante égale à $-\alpha \left[\vec{v}(P), \vec{e}_r \right] \vec{e}_r$ (α est une constante positive).

1. Déterminer $\vec{v}(P)$ et $\vec{a}(P)$ en fonction de $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \ddot{r}, \ddot{\theta}, \vec{e}_r$ et \vec{e}_θ .
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule P . En déduire les deux équations différentielles vérifiées par r et θ .
3. Des équations précédentes, déduire une intégrale première liant θ et r (on peut également obtenir cette relation en appliquant le théorème du moment cinétique), puis l'équation différentielle vérifiée par r .
4. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique, en déduire que la trajectoire de P tend asymptotiquement vers une trajectoire circulaire centrée en O. Déterminer, en fonction des conditions initiales, l'équation vérifiée par le rayon r_1 de ce cercle.
5. On suppose que les conditions initiales sont telles que r reste voisin de la trajectoire circulaire asymptotique de rayon r_1 ; on pose $r = r_1 + \rho$ avec $\rho \ll r_1$. En développant en série l'équation différentielle vérifiée par r à l'ordre 1, déterminer celle vérifiée par ρ .
6. On suppose de plus que r_1 est très voisin de λ , on prendra donc $r_1 = \lambda$. Quels sont, en fonction de m, k et α , les différents régimes d'amortissement du mouvement de P ?

L'amortissement est critique, $\dot{\rho}_0$ est nul, déterminer $\rho(t)$ en fonction de ρ_0 et des paramètres du problème.

"Premiers pas" théoriques

AN : On donne $k = 10^2 \text{ kg/s}^2$, $m = 0,1 \text{ kg}$. Déterminer le temps t_1 tel que $\rho(t_1) = 10^{-3} \rho_0$. On pourra résoudre l'équation en s : $s = K + \ln(1 + s)$ par itération en posant $s_0 = K$ et $s_{n+1} = K + \ln(1 + s_n)$.

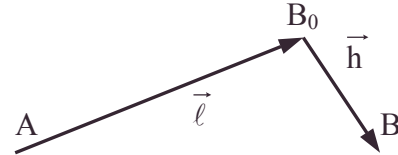
7. On supprime le ressort et l'amortisseur ; déterminer la trajectoire de P en fonction des valeurs initiales r_0, \dot{r}_0, θ_0 et $\dot{\theta}_0$.

Question préliminaire aux parties II et III

On considère le ressort \mathcal{R} (décrit dans l'introduction) dont les extrémités sont notées A et B. Au repos, le vecteur \overrightarrow{AB} noté $\vec{\ell}$ a pour longueur λ , le point A reste fixe et le point B subit une translation de vecteur \vec{h} .

1. On appelle \vec{F} la force exercée par le ressort sur B. Déterminer \vec{F} en fonction de k , $\vec{\ell}$ et \vec{h} .

2. $\vec{\ell}$ étant fixe et \vec{h} variable, déterminer le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(|\vec{\ell} + \vec{h}|)$. On notera h_x, h_y, h_z les composantes de \vec{h} . Montrer que \vec{F} dérive d'un potentiel V fonction de k, λ , et $|\vec{\ell} + \vec{h}|$. Donner une expression de V.



II. Dans cette seconde partie, le mouvement de P se fait toujours dans le plan Oxy, la liaison étant toujours parfaite. L'amortisseur est supprimé et la particule P est attachée à un second ressort, les deux ressorts sont appelés \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Les autres extrémités des ressorts sont fixées à un plateau tournant Π , mobile autour de l'axe Oz, en deux points A_1 et A_2 alignés avec O et situés de part et d'autre de O à la distance λ .

(λ est la longueur au repos des ressorts).

On appelle \vec{F}_1 et \vec{F}_2 les forces exercées sur P par \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 respectivement.

On appelle \vec{u} le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{OA_2}}{\lambda}$ et \vec{v} le vecteur s'en déduisant par rotation

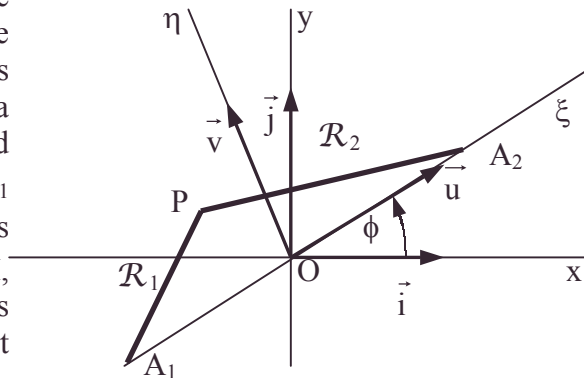
d'angle $+\pi/2$. La position du plateau Π est repérée par l'angle $\phi = (\vec{i}, \vec{u})$, la position de la particule P est repérée par ses coordonnées cartésiennes ξ et η dans le repère orthonormé O, \vec{u}, \vec{v} .

A. Le plateau Π est immobilisé dans la position $\phi = 0$, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} coïncident donc avec \vec{i} et \vec{j} et ξ, η coïncident avec les coordonnées cartésiennes x et y de P dans le repère O, \vec{i}, \vec{j} .

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule P et en déduire les équations différentielles vérifiées par x et y .

2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique pour trouver une intégrale première du mouvement de P.

3. Déterminer la période des mouvements vérifiant $y = 0$.



• conditions initiales, développement au premier ordre ou plus, énergie cinétique, freinage visqueux, frottement visqueux, intégrale première du mouvement, itération, moment cinétique, principe fondamental de la dynamique, ressort, théorème de l'énergie cinétique, théorème du moment cinétique

4. Dans la suite de cette partie, on s'intéresse aux mouvements vérifiant $x = 0$ et $y \ll \lambda$.

Dans ces conditions, développer les composantes de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sur \vec{j} au premier ordre non nul en y . En déduire que y vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{y} = -\mu y^3$. Déterminer μ .

5. A l'aide de l'équation précédente ou de la question 2., déterminer une intégrale première du mouvement.

6. On considère un mouvement tel que $y_0 \neq 0, \dot{y}_0 = 0$, on admettra que ce mouvement est périodique. Déterminer la période T du mouvement. On notera l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$.

B. Le plateau Π est animé d'un mouvement de rotation non nécessairement uniforme, les dérivées premières et secondes de $\phi, \dot{\phi}$ et $\ddot{\phi}$ sont supposées connues.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule P et en déduire les équations différentielles vérifiées par ξ et η .

2. Dans cette question et dans les suivantes, le plateau Π tourne avec une vitesse de rotation uniforme $\dot{\phi} = \Omega$. Montrer que les mouvements vérifiant $\xi = 0$ correspondent à des positions d'équilibre de la particule P par rapport à Π . Déterminer, en fonction de Ω , les valeurs correspondantes de η ; la valeur critique de Ω qui apparaît sera notée Ω_c .

3. Un dispositif placé sur le plateau maintient ξ à zéro, la liaison étant parfaite, c'est-à-dire sans frottement. On suppose $\Omega < \Omega_c$. Ces deux points seront supposés vérifiés dans toute la fin du **II.B.**; on appelle \vec{R} la réaction du dispositif sur la particule P . Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule P et en déduire les équations différentielles vérifiées par ξ et η .

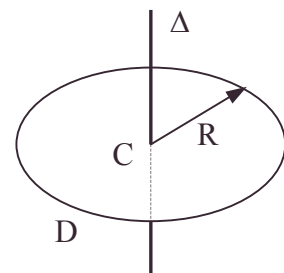
4. Montrer que l'on peut obtenir une intégrale première du mouvement de la forme : $\dot{\eta}^2 + U(\eta) = C$ où C est une constante. Déterminer la fonction $U(\eta)$.

5. A l'aide de la fonction $U(\eta)$, étudier la stabilité des équilibres (relativement au plateau Π) déterminés au 2.

6. On suppose $\dot{\eta}_0 = 0$, déterminer la valeur minimale à donner à la valeur absolue $|\eta_0|$ pour que P oscille de part et d'autre de O (relativement au plateau Π).

7. Déterminer, en fonction de $\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}, \Omega$ les composantes sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de la réaction \vec{R} .

III. Dans cette partie, on considère un disque cylindrique D . Ce disque est homogène, de rayon R , de masse M et d'épaisseur très petite. On l'assimilera à un disque plan. On notera J son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ du cylindre.



Deux ressorts (décrits dans l'introduction) appelés \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont fixés par une de leurs extrémités respectivement en deux points I_1 et I_2 situés sur la circonférence du disque et

"Premiers pas" théoriques

diamétralement opposés, les autres extrémités étant fixées aux points C_1 et C_2 tels que : $\overrightarrow{OC_1} = -\lambda \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC_2} = \lambda \vec{j} + 2R \vec{k}$ (λ est la longueur au repos des deux ressorts).

On appelle \vec{G}_1 et \vec{G}_2 les forces exercées sur le disque par \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 respectivement. Le mouvement du disque a lieu dans le plan Oyz, l'axe Δ du disque restant parallèle à l'axe Ox, on rappelle que l'axe Oz est vertical ascendant.

Les liaisons maintenant le plan du disque et le plan Oyz confondus sont parfaites. On ne se préoccupe pas des réactions assurant ces liaisons.

On utilisera les théorèmes du centre de gravité et du moment cinétique en projection sur le plan Oyz. Le disque peut rouler sur l'axe Oy qui est matérialisé. Le point de contact entre le disque D et l'axe Oy est noté L. La liaison entre le disque D et Oy se fait avec frottement solide. On néglige le frottement de roulement, les coefficients de frottement statique et dynamique sont identiques, ils sont notés f . La réaction exercée en L par l'axe Oy sur le disque D est notée \vec{S} .

Le plan Oyz est orienté positivement par Ox. La position du disque est repérée par la coordonnée y de son centre C sur l'axe Oy, par l'angle $\psi = (\vec{k}, \overrightarrow{CI_2})$.

Dans toute cette partie, on s'intéresse aux mouvements pour lesquels ψ est très petit devant 1 et y très petit devant λ et R (λ et R sont du même ordre de grandeur).

1. Déterminer la projection V_g sur l'axe Oy de la vitesse de glissement du disque D par rapport à l'axe Oy. Quelle est la condition de roulement sans glissement ?

Déterminer les relations que doivent vérifier \vec{V}_g et la réaction \vec{S} en raison du frottement solide entre le disque D et l'axe Oy.

2. Donner les développements de Taylor à l'ordre 1 en y et ψ , des composantes sur \vec{j} et \vec{k} des forces \vec{G}_1 et \vec{G}_2 .

3. Appliquer le théorème du centre de gravité et le théorème du moment cinétique au disque D. En déduire les équations différentielles vérifiées par y et ψ .

4. A $t = 0$, \dot{y} et $\dot{\psi}$ sont nulles, déterminer la condition (notée \mathcal{H}) que doivent vérifier les valeurs initiales y_0 et ψ_0 pour que le disque roule sans glisser dès le début du mouvement.

5. Les conditions initiales sont les mêmes qu'au 4. et la condition \mathcal{H} est vérifiée. Montrer que le mouvement est périodique ; déterminer sa période. Exprimer y et ψ .

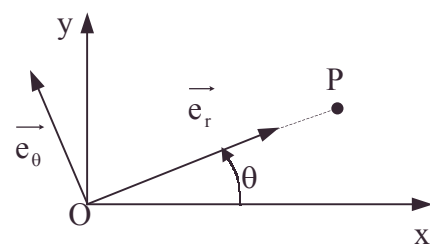
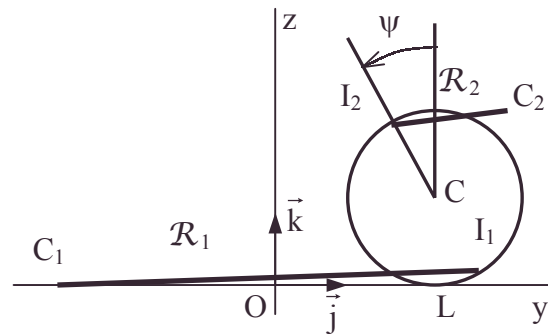
CCP ; Durée 3h

Corrigé

1. $\overrightarrow{OP} = r \vec{e}_r$; dérivons, sachant que :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

On obtient : $\vec{v}(P) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$;



- accélération en polaires, centre de gravité [avec g uniforme], développement au premier ordre ou plus, frottement solide, frottement statique, glissement, intégrale première du mouvement, moment cinétique, moment d'inertie, projections, ressort, roulement sans glissement, stabilité

$$\vec{a}(P) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

$$2.a. \quad m\vec{a}(P) = -k(r - \lambda)\vec{e}_r - \alpha\dot{r}\vec{e}_r + (m\vec{g} + \vec{R}_1).$$

$$b. \text{ Projétons sur } \vec{e}_r \text{ puis sur } \vec{e}_\theta : \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k(r - \lambda) - \alpha\dot{r};$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0.$$

$$3.a. \text{ On peut écrire : } 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt};$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = 0 \Leftrightarrow r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta}_0.$$

$$\text{Variante : } \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0^{\text{forces}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_0 = mr^2 \dot{\theta} \vec{k} = \vec{K} \Rightarrow mr^2 \dot{\theta} = mr_0^2 \dot{\theta}_0.$$

$$b. \text{ Remplaçons } \dot{\theta} = \frac{r_0^2 \dot{\theta}_0}{r^2} \text{ dans } \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r^3}; \text{ on obtient l'équation :}$$

$$m \left(\ddot{r} - \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r^3} \right) = -k(r - \lambda) - \alpha\dot{r}.$$

$$4.a. \quad dE_c = d\mathcal{E}; \text{ or } d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_R + d\mathcal{E}_{\text{amort}};$$

$$dE_c + dE_{\text{pr}} = d\mathcal{E}_{\text{amort}} = (-\alpha\dot{r}\vec{e}_r)(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)dt = -\alpha\dot{r}^2 dt,$$

$$\text{avec } E_{\text{pr}} = \frac{1}{2}k(r - \lambda)^2 \text{ et } E_c = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2;$$

$$\frac{d(E_p + E_c)}{dt} = -\alpha\dot{r}^2; \text{ par amortissement, l'énergie diminue tant que } \dot{r}^2 \neq 0.$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(r - \lambda)^2 = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2}k(r - \lambda)^2 > 0.$$

La trajectoire circulaire est telle que $\dot{r} = 0$, $E = \text{constante}$. Cet état stable est atteint au bout d'un temps infini d'après l'énoncé.

b. L'équation de ce cercle : $r = r_1$ satisfait l'équation différentielle 3.b., alors :

$$m \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r_1^3} = k(r_1 - \lambda).$$

5. Posons $r = r_1 + \rho$; $\dot{r} = \dot{\rho}$; $\ddot{r} = \ddot{\rho}$; l'équation 3.b. s'écrit :

$$m \left(\ddot{\rho} - \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{(r_1 + \rho)^3} \right) = -k(r_1 + \rho - \lambda) - \alpha\dot{\rho}; \text{ or, } \frac{1}{r_1^3 \left(1 + \frac{\rho}{r_1} \right)^3} = \frac{1}{r_1^3} \left(1 - 3\frac{\rho}{r_1} + \dots \right); \text{ 3.b. devient}$$

"Premiers pas" théoriques

$$m \left(\ddot{\rho} - \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r_1^3} + \frac{3r_0^4 \dot{\theta}_0^2 \rho}{r_1^4} \right) = -k(r_1 - \lambda) - k\rho - \alpha \dot{\rho} ; \text{vu 4.b., il reste :}$$

$$m \ddot{\rho} + \alpha \dot{\rho} + \left(\frac{3r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r_1^4} m + k \right) \rho = 0.$$

6.a. Si $r_1 = \lambda$; $\frac{m r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r_1^3} = 0$ vu **4.b.** $\Rightarrow \ddot{\rho} + \frac{\alpha \dot{\rho}}{m} + \frac{k}{m} \rho = 0$

Les différents régimes d'amortissement s'étudient à partir du signe $\Delta = \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 - 4 \frac{k}{m}$.

α. $\left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 - 4 \frac{k}{m} > 0$, soit $\frac{\alpha}{m} > 2\sqrt{\frac{k}{m}}$, régime apériodique.

$$\rho = \left(A_1 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t} + A_2 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t} \right) e^{-\frac{\alpha t}{2m}}.$$

β. $\frac{\alpha}{m} < 2\sqrt{\frac{k}{m}}$, régime pseudo périodique : $\rho = A e^{-\frac{\alpha}{2m} t} \cos \left[\sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{\alpha^2}{m^2}} t + \varphi \right]$.

γ. $\frac{\alpha}{m} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$, régime critique : $\rho = e^{-\frac{\alpha}{2m} t} (A_3 t + A_4)$.

b. $\Delta = 0$; $\rho = e^{-\frac{\alpha t}{2m}} (A_3 t + A_4)$; $\dot{\rho} = e^{-\frac{\alpha t}{2m}} \left[-\frac{\alpha}{2m} A_4 + A_3 \left(1 - \frac{\alpha t}{2m} \right) \right]$.

$\dot{\rho}_0 = 0 \Rightarrow A_3 = \frac{\alpha}{2m} A_4$; $\rho = \rho_0 \Rightarrow A_4 = \rho_0$; $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\alpha t}{2m} \right) e^{-\frac{\alpha t}{2m}}$.

c. On cherche t_1 tel que : $\rho_0 \left(1 + \frac{\alpha t_1}{2m} \right) e^{-\frac{\alpha t_1}{2m}} = 10^{-3} \rho_0$.

A.N. : Posons $s = \frac{\alpha}{2m} t_1$ et prenons le logarithme de l'équation : $\ln(1+s) - s = \ln 10^{-3}$;

Or, $\ln 10^{-3} = -6,908 = -K$; On a la forme $s = \ln(1+s) + K$.

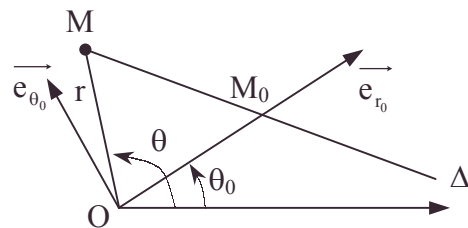
• Résolution par itération de la forme : $s_{n+1} = K + \ln(1+s_n)$:

n	0	1	2	3	4	5
s_n	6,908	8,976	9,208	9,231	9,233	9,233

$s_f = 9,233$; $t_1 = \frac{2m}{\alpha} s_f$; $t_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} s_f = 0,292 \text{ s}$.

7. Vu le principe d'inertie, la trajectoire est une droite Δ parallèle à \vec{V}_0 passant par M_0 ; or, dans le repère $O, \vec{e}_{r_0}, \vec{e}_{\theta_0}$:

$$\vec{V}_0 = \dot{r}_0 \vec{e}_{r_0} + r_0 \dot{\theta}_0 \vec{e}_{\theta_0} \text{ et}$$



$\overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$; projetons : $\overrightarrow{M_0 M} = (r \cos(\theta - \theta_0) - r_0) \vec{e}_{r_0} + r \sin(\theta - \theta_0) \vec{e}_{\theta_0}$.

• stabilité

Ecrivons : $\overrightarrow{M_0 M} \wedge \overrightarrow{V_0} = \vec{0} : r \dot{r}_0 \dot{\theta}_0 \cos(\theta - \theta_0) - r_0^2 \dot{\theta}_0 - \dot{r}_0 r \sin(\theta - \theta_0) = 0$.

Divisons par $r \dot{r}_0^2 \dot{\theta}_0$:

$$\text{ou } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left(\cos(\theta - \theta_0) - \frac{\dot{r}_0}{r_0 \dot{\theta}_0} \sin(\theta - \theta_0) \right), \text{ équation polaire de } \Delta.$$

Question préliminaire aux parties II et III

$$1. \vec{F} = -k \left(\left| \vec{\ell} + \vec{h} \right| - \left| \vec{\ell} \right| \right) \frac{(\vec{\ell} + \vec{h})}{\left| \vec{\ell} + \vec{h} \right|}.$$

$$2.a. \overrightarrow{\text{grad}} r = \frac{\partial r}{\partial \vec{r}} \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}; \overrightarrow{AB} = \vec{\ell} + \vec{h} = \vec{r}; \overrightarrow{\text{grad}} \left| \vec{\ell} + \vec{h} \right| = \overrightarrow{\text{grad}} r = \frac{\vec{\ell} + \vec{h}}{\left| \vec{\ell} + \vec{h} \right|}.$$

$$b. \vec{F} = -k \left(\left| \vec{\ell} + \vec{h} \right| - \lambda \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left| \vec{\ell} + \vec{h} \right| = -k \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{2} \left| \vec{\ell} + \vec{h} \right|^2 + \lambda k \overrightarrow{\text{grad}} \left| \vec{\ell} + \vec{h} \right|, \text{ soit :}$$

$\vec{F} = -k \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{2} \left| \vec{\ell} + \vec{h} \right|^2 \left(\left| \vec{\ell} + \vec{h} \right| - 2\lambda \right) \right]$; \vec{F} dérive d'un potentiel (ou d'une énergie potentielle).

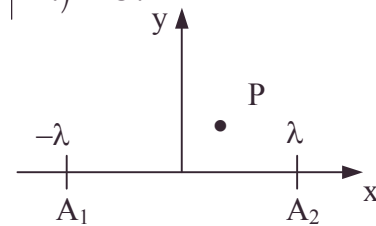
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \text{ avec } V = \frac{1}{2} k \left| \vec{\ell} + \vec{h} \right|^2 \left(\left| \vec{\ell} + \vec{h} \right| - 2\lambda \right) + K.$$

$$c. \text{ Remarque : en posant } K = \frac{1}{2} k \lambda^2 + C : V = \frac{1}{2} k \left(\left| \vec{\ell} + \vec{h} \right| - \lambda \right)^2 + C.$$

$$II.A.1.a. m \vec{a}(P) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + (m \vec{g} + \vec{R}_1);$$

$$\vec{\ell}_1 + \vec{h}_1 = \overrightarrow{A_1 P} = (x + \lambda) \vec{i} + y \vec{j}; A_1 P^2 = (x + \lambda)^2 + y^2;$$

$$\vec{\ell}_2 + \vec{h}_2 = \overrightarrow{A_2 P} = (x - \lambda) \vec{i} + y \vec{j}; A_2 P^2 = (x - \lambda)^2 + y^2$$



b. Projétons sur Ox puis Oy ; vu la question préliminaire 1. on prendra le gradient de $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} k \left(\left| \vec{\ell}_1 + \vec{h}_1 \right| - \lambda \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\left| \vec{\ell}_2 + \vec{h}_2 \right| - \lambda \right)^2$

$$m \ddot{x} = -k \left((x + \lambda) + (x - \lambda) \right) + \frac{k \lambda (\lambda + x)}{\sqrt{(x + \lambda)^2 + y^2}} + \frac{k \lambda (x - \lambda)}{\sqrt{(x - \lambda)^2 + y^2}};$$

$$m \ddot{y} = -k (y + y) + \frac{k \lambda y}{\sqrt{(x + \lambda)^2 + y^2}} + \frac{k \lambda y}{\sqrt{(x - \lambda)^2 + y^2}},$$

$$\text{soit } m \ddot{x} = -k \left[2x - \frac{\lambda (x + \lambda)}{\sqrt{(x + \lambda)^2 + y^2}} - \frac{\lambda (x - \lambda)}{\sqrt{(x - \lambda)^2 + y^2}} \right].$$

$$m \ddot{y} = -k \left[2y - \frac{\lambda y}{\sqrt{(x + \lambda)^2 + y^2}} - \frac{\lambda y}{\sqrt{(x - \lambda)^2 + y^2}} \right].$$

$$2. E_p = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} k \left[\sqrt{(x + \lambda)^2 + y^2} - \lambda \right]^2 + \frac{1}{2} k \left[\sqrt{(x - \lambda)^2 + y^2} - \lambda \right]^2 \quad \text{à une}$$

constante près.

$E_c + E_p = C$, C est une constante car il n'y a plus d'amortisseur.

"Premiers pas" théoriques

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}k\left[\left(\sqrt{(x+\lambda)^2 + y^2} - \lambda\right)^2 + \left(\sqrt{(x-\lambda)^2 + y^2} - \lambda\right)^2\right] = C.$$

3. $y = 0$; l'équation sur Ox s'écrit directement : $m\ddot{x} = -2k(x - \lambda)$,

soit $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2k}{m}\lambda$; $\omega^2 = \frac{2k}{m}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$; AN : $T = 0,140$ s.

$$4.a. x = 0 ; F_{1y} = -ky + \frac{k\lambda y}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}} ; F_{2y} = -ky + \frac{k\lambda y}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}} = F_{1y}.$$

$$\text{Or, } y \ll \lambda \Rightarrow (\lambda^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{y^2}{\lambda^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{2\lambda^2}\right) ;$$

$$\Rightarrow F_{1y} = F_{2y} = -ky + ky \left(1 - \frac{y^2}{2\lambda^2}\right) = \frac{-ky^3}{2\lambda^2}.$$

b. L'équation sur Oy devient : $m\ddot{y} = \frac{-2ky^3}{2\lambda^2}$ de la forme $\ddot{y} = -\mu y^3$, avec $\mu = \frac{k}{m\lambda^2}$.

5. L'intégrale première de 2. devient : $\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k.2\left(\sqrt{\lambda^2 + y^2} - \lambda\right)^2 = C$;

$$\text{Or, } \sqrt{\lambda^2 + y^2} = \lambda \sqrt{1 + \frac{y^2}{\lambda^2}} = \lambda \left(1 + \frac{y^2}{2\lambda^2}\right) ; \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{ky^4}{4\lambda^2} = C.$$

6. Déterminons C à l'instant $t = 0$: $C = \frac{1}{2}m\dot{y}_0^2 + \frac{ky_0^4}{4\lambda^2} = \frac{ky_0^4}{4\lambda^2}$.

$$\text{De 5., on déduit : } \frac{dy}{dt} = \varepsilon \frac{y_0^2}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{2m}} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1.$$

Intégrons sur un quart de période : $\varepsilon = +1$ si y varie de 0 à y_0 .

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \int_0^{y_0} \frac{dy}{\frac{y_0^2}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{2m}} \left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}} , \text{ soit en posant } u = \frac{y}{y_0},$$

$$\frac{T}{4} = \frac{\lambda}{y_0} \sqrt{\frac{2m}{k}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \Rightarrow T = 4I \frac{\lambda}{y_0} \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

B.1. Rappel : pour un mouvement circulaire de rayon R : $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{\tau} + R\dot{\theta}^2\vec{n}$; on en déduira l'expression de l'accélération d'entraînement soit vectoriellement soit en projections.

Dans le repère tournant :

$$a. \vec{m}\vec{a}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + (\vec{m}\vec{g} + \vec{R}_1) + \left(-m \underbrace{\left[\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) \right]}_{\vec{a}_c} \right) - \underbrace{2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r}_{\vec{ma}_c}$$

• conservation de l'énergie, intégrale première du mouvement

b. En projetant sur $O\xi$ puis $O\eta$; on obtient : vu $\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{vmatrix} ; \overrightarrow{V_r} \begin{vmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\phi} \vec{k}$;

$$\textcircled{1} \quad m \ddot{\xi} = -k \left[2\xi - \frac{\lambda(\lambda + \xi)}{\sqrt{(\xi + \lambda)^2 + \eta^2}} - \frac{\lambda(\xi - \lambda)}{\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + \eta^2}} \right] + m \left(\eta \ddot{\phi} + \xi \dot{\phi}^2 + 2\dot{\eta} \dot{\phi} \right) ;$$

$$\textcircled{2} \quad m \ddot{\eta} = -k \left[2\eta - \frac{\lambda\eta}{\sqrt{(\lambda + \xi)^2 + \eta^2}} - \frac{\lambda\eta}{\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + \eta^2}} \right] + m \left(-\xi \ddot{\phi} + \eta \dot{\phi}^2 - 2\dot{\xi} \dot{\phi} \right).$$

2. $\ddot{\phi} = 0$; $\xi = 0$; de $\textcircled{1}$, il reste $2m\dot{\eta}\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\eta} = 0$ soit $\ddot{\eta} = 0$ et $\textcircled{2}$ laisse :

$$0 = -2k\eta \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \right) + m\eta \dot{\phi}^2 ; \text{ on en tire : } \eta \left[m\Omega^2 - 2k \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \right) \right] = 0.$$

$$\Rightarrow 3 \text{ solutions constantes : } \eta = 0 \text{ et } \eta = \pm \lambda \left[\frac{1}{\left(1 - \Omega^2 \frac{m}{2k} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta^2 = -\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{\left(1 - \frac{\Omega^2 m^2}{2k} \right)} ; \sqrt{\frac{\eta^2 + \lambda^2}{\lambda^2}} = \frac{2k}{2k - \Omega^2 m}.$$

Soit 3 positions d'équilibre.

La valeur critique $\eta = \pm \infty$ est pour $\Omega^2 = \frac{2k}{m} = \Omega_c^2$.

$$\text{D'où } \eta = \pm \lambda \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } \eta = 0.$$

Pour $\Omega^2 < \Omega_c^2$, $0 < \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2 \right) < 1$, $\eta \neq 0$ existe.

3.a. Un nouveau dispositif introduit la force \vec{R} ;

La condition liaison parfaite impose : $\vec{R} \cdot \vec{V_r} = 0$;

$\xi = 0$; $\dot{\xi} = 0$; $\ddot{\xi} = 0$, $\vec{R} \cdot \vec{V_r} = 0$ s'écrit : $R_\eta \dot{\eta} = 0$; $\forall \dot{\eta}(t) \Rightarrow R_\eta = 0$;

$$m\vec{a_r} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} + (m\vec{g} + \vec{R}_1) + \left(-m \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \right) - 2m(\overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{V_r}) \right).$$

b. En projetant sur $O\xi$ puis $O\eta$, il reste : $0 = 2m\dot{\eta}\Omega + R_\xi$, (vu $\ddot{\phi} = 0, \xi = 0$) ①'

$$m\ddot{\eta} = -2k\eta \left[1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \right] + m\eta\Omega^2. \quad \text{②'}$$

4. Multiplions la 2^{ème} relation par $\dot{\eta} dt$;

$$m\dot{\eta}\ddot{\eta} dt = -2k\eta\dot{\eta} dt + \frac{2k\lambda\eta\dot{\eta}}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} dt + m\eta\dot{\eta}\Omega^2 dt.$$

$$\text{Il vient : } \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 = -k\eta^2 + 2k\lambda\sqrt{\lambda^2 + \eta^2} + \frac{1}{2}m\eta^2\Omega^2 + \text{cste},$$

$$\text{d'où : } \dot{\eta}^2 + U(\eta) = C \text{ avec } U(\eta) = (\Omega_c^2 - \Omega^2)\eta^2 - 2\Omega_c^2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}, \text{ avec } \Omega_c^2 = \frac{2k}{m}.$$

5. Le rôle de l'énergie potentielle est joué par $\frac{1}{2}mU(\eta)$; il y a équilibre stable :

$$\text{si : } \frac{dE_p}{d\eta} = 0 \text{ et si } \frac{d^2E_p}{d\eta^2} > 0 \text{ (cf. minimum de l'énergie potentielle).}$$

$$\frac{dU}{d\eta} = 2(\Omega_c^2 - \Omega^2)\eta - 2\lambda\Omega_c^2 \frac{\eta}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} ; \frac{d^2U}{d\eta^2} = 2(\Omega_c^2 - \Omega^2) - \frac{2\lambda^3\Omega_c^2}{(\lambda^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{Pour } \eta = 0, 1^{\text{ère}} \text{ solution d'équilibre de } \frac{dU}{d\eta} = 0 ; \frac{d^2U}{d\eta^2} = -2\Omega^2 < 0 ; \text{équilibre instable.}$$

$$\text{Pour } \eta = \pm\lambda \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ autres solutions de } \frac{dU}{d\eta} = 0 \text{ pour } \Omega^2 < \Omega_c^2.$$

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} = 2\Omega_c^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2} \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) > 0 ; \text{équilibre stable.}$$

6. $\dot{\eta}_0 = 0$;

$$\dot{\eta}^2 + U(\eta) = 0 + U(\eta_0).$$

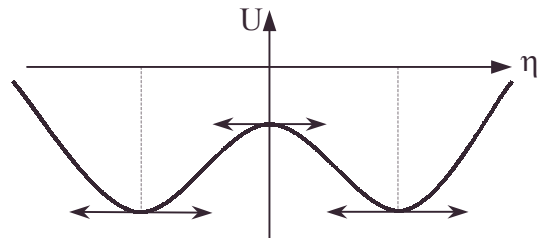
Pour que P passe le col énergétique de O

à la limite, il faut $\dot{\eta}^2 = +0$

On a alors $U(0) = U(\eta_{0\min})$, soit

$$(\Omega_c^2 - \Omega^2)\eta_{0\min}^2 - 2\Omega_c^2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \eta_{0\min}^2} = -2\Omega_c^2\lambda^2 = U(0).$$

$$\text{Après avoir isolé } \sqrt{\lambda^2 + \eta_{0\min}^2}, \sqrt{\lambda^2 + \eta_{0\min}^2} = \frac{(\Omega_c^2 - \Omega^2)\eta_{0\min}^2}{2\Omega_c^2\lambda} + \lambda.$$



Elevons au carré : $\lambda^2 + \eta_{0\min}^2 = \lambda^2 + \frac{(\Omega_c^2 - \Omega^2)\eta_{0\min}^2}{\Omega_c^2} + \frac{(\Omega_c^2 - \Omega^2)^2 \eta_{0\min}^4}{4\Omega_c^4 \lambda^2}$;

$\left(\frac{(\Omega_c^2 - \Omega^2)^2}{4\Omega_c^4 \lambda^2} \eta_{0\min}^2 - \frac{\Omega^2}{\Omega_c^2} \right) \eta_{0\min}^2 = 0$; On trouve : $\eta_{0\min} = 0$ (sans intérêt).

et $\eta_{0\min} = \pm \frac{2\lambda\Omega\Omega_c}{\Omega_c^2 - \Omega^2}$; il faut donc : $|\eta_0| > \frac{2\lambda\Omega\Omega_c}{\Omega_c^2 - \Omega^2}$.

7. D'après **3.a.b.**, sur \vec{u} : $R_\xi = -2m\dot{\eta}\Omega$; sur \vec{v} : $R_\eta = 0$.

III.1.a. $\vec{v}_g = \vec{V}_L = \vec{V}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CL}$ avec $\vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{i}$; $\vec{v}_g = (\dot{y} + R\dot{\psi}) \vec{j}$.

b. La condition de roulement sans glissement est donc : $\dot{y} + R\dot{\psi} = 0$.

c.α. Si roulement sans glissement : $\vec{V}_g = \vec{0}$, on a $\|\vec{T}_s\| \leq f \|\vec{N}_s\|$ et la puissance due au frottement $P_{\text{frott}} = \vec{V}_g \cdot \vec{S} = 0$.

β. Si glissement, le frottement consomme de la puissance et $\vec{V}_g \cdot \vec{S} = P_{\text{frott}} < 0$.

avec la condition $\|\vec{T}_s\| = f \|\vec{N}_s\|$.

2. Appliquons la question préliminaire 1. :

$\vec{C_2I_2} = \vec{C_2O} + \vec{OC} + \vec{CI_2}$ avec $\vec{CI_2} = -R \sin \psi \vec{j} + R \cos \psi \vec{k}$;

$\vec{C_1I_1} = \vec{C_1O} + \vec{OC} + \vec{CI_1}$ avec $\vec{CI_1} = R \sin \psi \vec{j} - R \cos \psi \vec{k}$.

Exprimons : $\vec{C_1I_1} = (\lambda + y + R \sin \psi) \vec{j} + R(1 - \cos \psi) \vec{k}$;

$C_1I_1^2 = (\lambda + y + R \sin \psi)^2 + R^2(1 - \cos \psi)^2$;

$\vec{C_2I_2} = (-\lambda + y - R \sin \psi) \vec{j} - R(1 - \cos \psi) \vec{k}$;

$C_2I_2^2 = (-\lambda + y - R \sin \psi)^2 + R^2(1 - \cos \psi)^2$.

$\vec{C_1I_1} = \lambda \left(1 + \frac{y}{\lambda} + \frac{R}{\lambda} \psi \right) \vec{j} + R \psi^2 \vec{k} \dots$; $C_1I_1 = \lambda \sqrt{\left(1 + \frac{y}{\lambda} + \frac{R}{\lambda} \psi \right)^2 + R^2 \psi^4} = \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y}{\lambda} + \frac{R}{2\lambda} \psi \right) \dots$

$\vec{C_2I_2} = -\lambda \left(1 - \frac{y}{\lambda} + \frac{R}{\lambda} \psi \right) \vec{j} - R \psi^2 \vec{k} \dots$; $C_2I_2 = \lambda \sqrt{\left(1 - \frac{y}{\lambda} + \frac{R}{\lambda} \psi \right)^2 + R^2 \psi^4} = \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\lambda} + \frac{R}{2\lambda} \psi \right) \dots$

Exprimons : $\vec{G_1} = -k \left[|C_1I_1| - \lambda \right] \frac{\vec{C_1I_1}}{C_1I_1}$ et $\vec{G_2} = -k \left[|C_2I_2| - \lambda \right] \frac{\vec{C_2I_2}}{C_2I_2}$: le seul terme

d'ordre 1 est le crochet.

Vu $y \neq 0, \psi \neq 0$ $\vec{C_1I_1} = \lambda \vec{j}$, $\vec{C_2I_2} = -\lambda \vec{j} \dots$ $\vec{G_1} = -k(y + R\psi) \vec{j}$; $\vec{G_2} = -k(y - R\psi) \vec{j}$, finalement évident si on souhaite éviter le calcul.

3.a. Théorème du centre de gravité :

$m\vec{a}(C) = \vec{G_1} + \vec{G_2} + \vec{S} + m\vec{g}$ avec $\vec{S} = T\vec{j} + N\vec{k}$.

b. Théorème du mouvement cinétique : $\frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} = \vec{CI_1} \wedge \vec{G_1} + \vec{CI_2} \wedge \vec{G_2} + \vec{CL} \wedge \vec{S}$.

c.α. Projetons **a.** sur \vec{j} et \vec{k} : $m\ddot{y} = -2ky + T$; $0 = mg - N$.

β. Projetons **b.** sur \vec{i} : $J\ddot{\psi} = -2kR^2\psi + RT$.

• *équilibre, glissement, roulement sans glissement, stabilité*

4. Exprimons $|T| \leq f|N|$, condition nécessaire du roulement sans glissement.

Or, $T = m\ddot{y} + 2ky$ et $T = \frac{J}{R}\ddot{\psi} + 2kR\psi$; $N = mg$.

Éliminons les expressions $\ddot{\psi}$ et \ddot{y} , indésirables afin d'introduire seulement y et ψ et leurs valeurs initiales.

Puisque $\dot{y} + R\dot{\psi} = 0$, s'il y a roulement sans glissement : $\ddot{y} = -R\ddot{\psi}$.

$$T = T \Rightarrow m\ddot{y} + 2ky = \frac{J}{R}\ddot{\psi} + 2kR\psi = -\frac{J}{R^2}\ddot{y} + 2kR\psi \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2k(R\psi - y)}{m + \frac{J}{R^2}} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2k}{J + mR^2}(Jy + mR^3\psi); \text{ la condition } \mathcal{H} \text{ à l'instant } t = 0 \text{ s'écrit :}$$

$$\frac{2k}{J + mR^2}(Jy_0 + mR^3\psi_0) < fmg.$$

$$5. \dot{y} = -R\dot{\psi} \Rightarrow y - y_0 = -R(\psi - \psi_0) \Leftrightarrow \psi = \psi_0 - \frac{(y - y_0)}{R} \text{ qu'on reporte dans } T.$$

$$\text{On obtient : } \left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{y} + 4ky = 2k(R\psi_0 + y_0); \omega^2 = \frac{4k}{m + \frac{J}{R^2}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{J}{R^2}}{4k}}.$$

Le mouvement est périodique :

$$\alpha. y = \frac{1}{2}(y_0 - R\psi_0)\cos\omega t + \frac{1}{2}(y_0 + R\psi_0).$$

Vérifications : $y(0) = y_0$

$$\dot{y} = \frac{\omega}{2}(y_0 - R\psi_0)\sin\omega t \text{ avec } \dot{y}(0) = 0 \text{ or } \psi = -\frac{\dot{y}}{R}.$$

$$\beta. \psi = -\frac{1}{2}\frac{(y_0 - R\psi_0)}{R}\cos\omega t + \frac{1}{2}\frac{(R\psi_0 + y_0)}{R}.$$

Vérifications : $\psi(0) = \psi_0$

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{2}\frac{(y_0 - R\psi_0)}{R}\sin\omega t \text{ avec } \dot{\psi}(0) = 0.$$

2.3.1.5. Oscillations de tige et de disque

Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

On étudie dans ce problème les mouvements d'un disque D homogène de centre G de

masse $m = 10 \text{ g}$ de rayon $\rho = 2 \text{ cm}$ et de moment d'inertie autour de GZ : $J_{GZ}^D = \frac{1}{2}m\rho^2$.

L'accélération de la pesanteur vaut $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et on pourra utiliser la notation $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$

où h est une fonction quelconque du temps.

I. On fixe en G perpendiculairement à l'axe de D, une tige T, très fine, homogène de centre d'inertie C, de masse $m' = 2g$ et de longueur $\ell = 10$ cm. On donne son moment d'inertie $J_{GZ}^T = \frac{m'\ell^2}{12}$. Grâce à un dispositif approprié, on

peut lier rigidement D et T ou au contraire permettre leur rotation relative sans frottement.

1. D et T étant liés rigidement, on suspend le système par l'extrémité libre de T à un axe Δ horizontal, parallèle à celui de D. T tourne librement autour de l'axe Δ (figure 1). Donner l'expression de la période T_1 des petites oscillations autour de Δ . Application numérique.

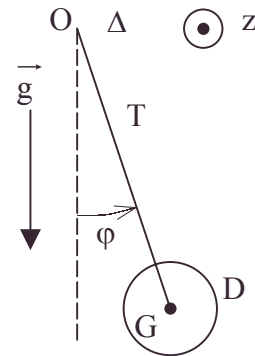


Figure 1

2. La disposition est la même qu'au paragraphe précédent, mais D et T peuvent maintenant tourner librement l'un par rapport à l'autre. A l'instant initial T est immobile et fait l'angle φ_0 avec la verticale ; D possède la vitesse angulaire ω_0 (figure 2). On lâche T. Donner l'expression de la période T_2 des petites oscillations autour de Δ .

ω_0 a-t-il une influence ? Application numérique. Comparer T_1 et T_2 . Peut-on justifier qualitativement le résultat ?

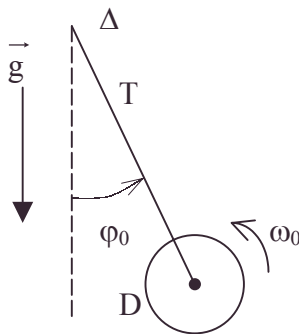


Figure 2

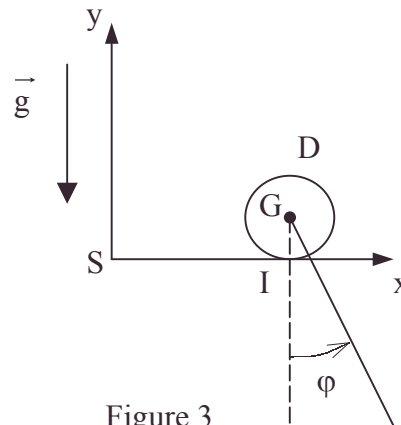


Figure 3

3. D roule maintenant sans glisser le long de l'axe horizontal Sx en restant dans le plan vertical Sxy , on note I le point de contact et x l'abscisse de G. La liaison entre D et T est à nouveau rigide (figure 3). L'angle de T par rapport à la verticale est noté φ .

Calculer l'énergie cinétique du système en fonction de φ et $\dot{\varphi}$. Trouver l'équation liant φ , $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$. En admettant que φ , $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$ sont des infiniment petits, donner l'expression de la période T_3 des petites oscillations du système. Application numérique.

4. La situation est la même qu'au paragraphe précédent, mais D et T peuvent tourner librement l'un par rapport à l'autre. L'angle de rotation du disque est noté θ ; l'angle que fait T avec la verticale est toujours noté φ . Dans l'approximation des petites oscillations, donner l'expression de la période T_4 . Application numérique. Simplifier l'expression de T_4 lorsque $m' \ll m$? Interpréter le résultat.

II. Dans cette partie, le disque D se déplace le long de l'axe Sx d'un repère $Sxyz$, le plan du disque restant confondu avec le plan vertical Sxy . On appelle \vec{R} la force de contact s'exerçant sur D au point de contact I. On rappelle les lois du frottement de glissement :

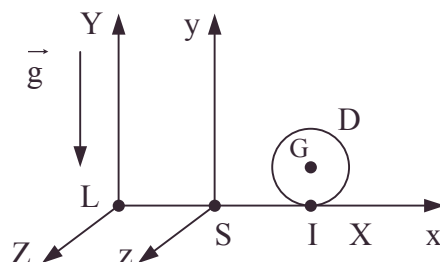


Figure 4

"Premiers pas" théoriques

si \vec{R}_t et \vec{R}_n sont respectivement les projections de \vec{R} sur le plan de contact et sur la normale au plan de contact

- lorsqu'il n'y a pas de glissement $|\vec{R}_t| < k|\vec{R}_n|$;
- lorsqu'il y a glissement $|\vec{R}_t| = k|\vec{R}_n|$ et \vec{R}_t est opposé à la vitesse de glissement.

Le coefficient de frottement de glissement k est supposé indépendant de la vitesse de glissement et pour des applications numériques, on prendra $k = 0,2$.

1. Le repère $Sxyz$ est animé par rapport au référentiel du laboratoire $LXYZ$ où règne le champ de pesanteur, d'un mouvement de translation uniformément accéléré, d'accélération $\vec{a} = (a, 0, 0)$ le long de l'axe LX (Figure 4). Au temps $t = 0$, L , S et I sont confondus et toutes les vitesses initiales sont nulles. Etudier le mouvement de D (en particulier celui de G d'abscisse x) dans le repère $Sxyz$ en supposant qu'il n'y a pas de glissement. En déduire les composantes de \vec{R} sur les axes Sx et Sy . Calculer la puissance fournie par \vec{R} dans le repère $Sxyz$ et dans le repère $LXYZ$. Retrouver ces deux puissances par application du théorème de l'énergie cinétique.

A quelle condition y a-t-il effectivement non-glissement ?

2. Le repère $Sxyz$ effectue des oscillations telles que $\vec{LS} = (X_0 \cos \omega t, 0, 0)$ le long de l'axe LX . Calculer l'amplitude des oscillations de G dans le repère $Sxyz$ en régime permanent, en supposant que D roule sans glisser le long de Sx . Quelle est la valeur maximale de X_0 pour qu'à aucun moment il n'y ait glissement ?

Application numérique pour $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

III. On étudie le mouvement de D lorsque le plan Sxz fait un angle α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) avec l'horizontale (le repère $Sxyz$ est maintenant fixe par rapport au repère $LXYZ$, figure 5).

1. Initialement le disque est immobile et I est confondu avec S . On le lâche à l'instant $t = 0$.

Etudier le mouvement ultérieur du disque dans le repère $Sxyz$, en particulier calculer l'abscisse x de G . Montrer qu'il y a glissement ou non selon la position de α par rapport à une certaine valeur α_ℓ que l'on calculera.

Comparer les deux types de mouvement pour $\alpha = \alpha_\ell$.

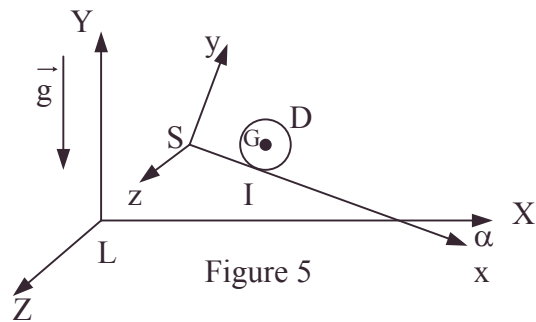
2. On suppose $\alpha < \alpha_\ell$. A l'instant $t = 0$, I est confondu avec S mais on communique au disque une vitesse initiale $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ et une vitesse angulaire initiale $\vec{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$.

Soit ε_0 le signe de la vitesse initiale de glissement $v_0 + \rho\omega_0$. Montrer que, quels que soient v_0 et ω_0 , le mouvement finit par se transformer en un mouvement de roulement sans glissement. Calculer la durée t_f de la phase de glissement.

Calculer $x(t)$ quel que soit t .

3. Toujours dans l'hypothèse $\alpha < \alpha_\ell$, le disque est lancé vers le bas ($v_0 > 0$, ω_0 quelconque). Pour $t < t_f$, montrer que selon le signe de ε_0 et la valeur de α , le mouvement de G peut être accéléré ou ralenti. En particulier dans le cas où le mouvement est ralenti, montrer qu'il peut exister une valeur de ω_0 , notée ω_1 , pour laquelle le disque D remonte le long du plan incliné avant la fin du glissement. (On appellera t_0 l'instant où ce phénomène se produit). On a un "effet".

- coefficient de frottement, conditions initiales, développement au premier ordre ou plus, énergie cinétique, glissement, théorème de l'énergie cinétique



Calculer t_0 en fonction de g , v_0 , α et k . Représenter soigneusement les variations de la vitesse \dot{x} de G en fonction du temps (quel que soit t) selon les valeurs de ε_0 , α et ω_0 .

Calculer la vitesse de G : \dot{x}_f à la fin du glissement en fonction de ρ , α , k , ω_0 et ω_1 si $\alpha < \alpha_\ell$ et $\varepsilon_0 = +1$.

4. On suppose $\varepsilon_0 > 0$ et $\tan \alpha < k$. Montrer qu'il existe une valeur minimale de ω_0 notée ω_2 pour laquelle le disque D peut remonter jusqu'au point S avant la fin du glissement.

Calculer numériquement ω_1 et ω_2 ainsi que t_0 , t_f et \dot{x}_f lorsque $\omega_0 = 50 \text{ rad.s}^{-1}$, $v_0 = 10 \text{ c.m s}^{-1}$ et $\tan \alpha = 0,1$.

ENS ; Durée 4h

Corrigé

I.1. Problème à un paramètre de mouvement : on utilise la conservation de l'énergie : système (terre, pendule) isolé, liaison parfaite.

$$E_C = E_{C_D} + E_{C_T} \text{ avec } E_{C_T} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma_0^T} \overrightarrow{\Omega^T} ; \overrightarrow{\sigma_0^T} = J_{OZ}^T \overrightarrow{\Omega^T} \text{ avec } J_{OZ}^T = J_{GZ}^T + m' \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m' \ell^2 ;$$

$$E_{C_D} = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma_G^D} \overrightarrow{\Omega^D} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \rho^2 \right) \dot{\varphi}^2 \text{ car } \overrightarrow{\Omega^D} = \overrightarrow{\Omega^T} = \dot{\varphi} \vec{k} ;$$

$$E_C = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m' \ell^2 \right) \dot{\varphi}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \rho^2 \right) \dot{\varphi}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m' \ell^2 + m \ell^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \right] \dot{\varphi}^2 ;$$

$$E_p = -m' g \frac{\ell}{2} \cos \varphi - m g \ell \cos \varphi ;$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} \left[\ell^2 \left(m + \frac{m'}{3} \right) + \frac{1}{2} m \rho^2 \right] \dot{\varphi}^2 - g \ell \left(\frac{m'}{2} + m \right) \cos \varphi = \text{cste.}$$

$$\text{Dérivons : } \dot{\varphi} \left[\left(\ell^2 \left(m + \frac{m'}{3} \right) + m \frac{\rho^2}{2} \right) \ddot{\varphi} + g \ell \left(m + \frac{m'}{2} \right) \sin \varphi \right] = 0 ;$$

$$\text{Linéarisons : } \ddot{\varphi} + \frac{g \ell \left(m + \frac{m'}{2} \right)}{\ell^2 \left(m + \frac{m'}{3} \right) + \frac{m \rho^2}{2}} \varphi = 0 ; T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m \frac{\rho^2}{2} + \ell^2 \left(m + \frac{m'}{3} \right)}{g \ell \left(m + \frac{m'}{2} \right)}} ;$$

$$\text{AN : } T_1 = 0,624 \text{ s.}$$

Variante : on peut appliquer la formule du cours sur la rotation autour d'un axe fixe:

$$\left(J_{OZ}^T + J_{OZ}^D \right) \ddot{\varphi} \vec{k} = \left[-m' g \frac{\ell}{2} \sin \varphi - m g \ell \sin \varphi \right] \vec{k} \text{ d'où } T_1 \text{ après linéarisation.}$$

2. Le problème a 2 paramètres de mouvement φ et θ tel que $\dot{\theta} = \omega$.

a. Appliquons le théorème du moment cinétique dans R_{Gb} au disque, la liaison étant supposée parfaite.

$$J_{GZ} \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega_0.$$

b. Le problème devient de fait à un seul paramètre de mouvement. On utilise la conservation de l'énergie : système (terre, pendule) isolé, liaisons parfaites :

"Premiers pas" théoriques

$$E_C = E_{C_D} + E_{C_T} \text{ avec } E_{C_T} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m' \ell^2 \right) \dot{\varphi}^2 ;$$

$$E_{C_D} = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma}_G^D \cdot \overrightarrow{\Omega}_D ; \overrightarrow{\Omega}_D = \dot{\theta} \vec{k} \Rightarrow E_{C_D} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \rho^2 \right) \dot{\theta}^2 ;$$

$$E_P = -m' g \frac{\ell}{2} \cos \varphi - mg \ell \cos \varphi ; \text{ écrivons } E = E_C + E_P = \text{constante.}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m' \ell^2 + m \ell^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \rho^2 \right) \dot{\theta}^2 - g \ell \left(\frac{m'}{2} + m \right) \cos \varphi =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \rho^2 \right) \omega_0^2 - g \ell \left(m + \frac{m'}{2} \right) \cos \varphi_0 ;$$

$$\text{En dérivant (et en linéarisant) , on a : } \ell^2 \left(m + \frac{m'}{3} \right) \ddot{\varphi} + g \ell \left(m + \frac{m'}{2} \right) \varphi = 0 ,$$

$$\Rightarrow T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\left(m + \frac{m'}{3} \right) \ell}{\left(m + \frac{m'}{2} \right) g}} ; \text{ AN : } T_2 = 0,619 \text{ s.}$$

$\dot{\theta} = \omega_0$ disparaît par dérivation : ω_0 n'a pas d'influence sur T_2 .

Tout se passe comme si on remplaçait $J_{OZ} = \left(\frac{1}{3} m' \ell^2 \right) + \frac{1}{2} m \rho^2 + m \ell^2$ par $\frac{1}{3} m' \ell^2 + m \ell^2$

C'est comme si le disque était remplacé par le point matériel G, m. L'inertie diminuant : $T_2 < T_1$ (qualitativement).

3. Problème à un paramètre de mouvement : φ .

a. Exprimons la condition de roulement sans glissement $\overrightarrow{V}_I = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{V}_G = \overrightarrow{V}_I + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{IG} = -\rho \dot{\varphi} \vec{i} \text{ avec } \overrightarrow{\Omega}^D = \dot{\varphi} \vec{k} .$$

b. Exprimons que T et D constituent un solide (unique) : $\overrightarrow{\Omega}^T = \dot{\varphi} \vec{k}$.

$$\overrightarrow{V}_C = \overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{\Omega}^T \wedge \overrightarrow{GC} = -\rho \dot{\varphi} \vec{i} + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge \left(\frac{\ell}{2} \sin \varphi \vec{i} - \frac{\ell}{2} \cos \varphi \vec{j} \right)$$

$$\overrightarrow{V}_C = \left(-\rho + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) \dot{\varphi} \vec{i} + \frac{\ell}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \vec{j} \Rightarrow V_C^2 = \dot{\varphi}^2 \left[\rho^2 + \frac{\ell^2}{4} - \rho \ell \cos \varphi \right] .$$

c. Exprimons la conservation de l'énergie : système (terre-pendule) isolé, vu une puissance de contact nulle.

$$E_C = E_{C_D} + E_{C_T} \text{ avec } E_{C_T} = \frac{1}{2} m' V_C^2 + \frac{1}{2} J_C^T \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m' \left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3} - \rho \ell \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 ;$$

$$E_{C_D} = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_{GZ}^D \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \rho^2 \right) \dot{\varphi}^2 ;$$

$$E_C = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} m \rho^2 + m' \left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3} - \rho \ell \cos \varphi \right) \right] \dot{\varphi}^2 \text{ et } E_P = +mg\rho + m'g \left(\rho - \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) .$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \rho^2 + m' \left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3} - \rho \ell \cos \varphi \right) \right) \dot{\varphi}^2 + mg\rho + m'g \left(\rho - \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) = \text{cste} .$$

• conservation de l'énergie, développement au premier ordre ou plus, linéarisation, moment cinétique, roulement sans glissement, théorème du moment cinétique

En dérivant : $0 = \ddot{\varphi} \left[\frac{3}{2} m \rho^2 + m' \left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3} - \rho \ell \cos \varphi \right) \right] + \frac{m'}{2} \rho \ell \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{\ell}{2} g m' \sin \varphi$.

Linéarisons : $\ddot{\varphi} \left(\frac{3}{2} m \rho^2 + m' \left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3} - \rho \ell \right) \right) + \frac{\ell}{2} m' g \varphi = 0$.

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m \rho^2 + m' \left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3} - \rho \ell \right)}{\frac{\ell}{2} m' g}} ; \text{AN : } T_3 = 0,611 \text{ s.}$$

4. Problème à 2 paramètres de mouvement : φ et θ .

a. Exprimons la condition de roulement sans glissement $\vec{V}_I = \vec{0}$:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_I + \vec{\Omega}^D \wedge \vec{IG} = -\rho \dot{\theta} \vec{i} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega}^D = \dot{\theta} \vec{k}.$$

b. Exprimons que T constitue un solide $\vec{\Omega}^T = \dot{\varphi} \vec{k}$:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{\Omega}^T \wedge \vec{GC} = -\rho \dot{\theta} \vec{i} + \frac{\ell}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{i} + \dot{\varphi} \frac{\ell}{2} \sin \varphi \vec{j}.$$

c. Exprimons la conservation de l'énergie : système (terre-pendule) isolé, puissances de contact nulles.

$$E_C = E_{C_D} + E_{C_T} \quad \text{avec} \quad E_{C_T} = \frac{1}{2} m' V_C^2 + \frac{1}{2} J_{CZ}^T \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m' \left(\rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{3} \dot{\varphi}^2 - \rho \ell \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} \right) ;$$

$$E_{C_D} = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_{GZ}^D \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m \rho^2 \right) \dot{\theta}^2 ; \quad E_P = mg\rho + m'g \left(\rho - \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) ;$$

$$E = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + m' \rho^2 \dot{\theta}^2 - m' \rho \ell \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} + m' \frac{\ell^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right] + mg\rho + m'g \left(\rho - \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) = \text{cste}$$

En dérivant :

$$\frac{3}{2} m \rho^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m' \left(\rho^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - \frac{\rho}{2} \ell \cos \varphi \left(\ddot{\theta} \varphi + \ddot{\varphi} \theta \right) + \frac{\rho}{2} \ell \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \ddot{\theta} + \frac{\ell^2}{3} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \right) + m' g \frac{\ell}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} = 0$$

expression a priori embarrassante à utiliser.

d. Appliquons le théorème du moment cinétique à la tige dans le repère R_G (qui n'est pas son repère barycentrique), R_G ayant un mouvement de translation : les forces d'inertie de Coriolis sont nulles ;

l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(N) = \vec{a}_G$; $\vec{a}_e(N) = -\rho \ddot{\theta} \vec{i} \quad \forall N \in T$;

$$\vec{\sigma}_G^T = \frac{1}{3} m' \ell^2 \dot{\varphi} \vec{k} ; \quad \vec{\mathcal{M}}_G^{T_{\text{ext}}} = \vec{GC} \wedge m' \vec{g} = -\frac{\ell}{2} m' g \sin \varphi \vec{k}.$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G^{T_{\text{entraînement}}} = -\int_T \vec{GN} \wedge \vec{a}_e(N) dm = -\left(\int_T \vec{GN} dm \right) \wedge \vec{a}_G = -m' \vec{GC} \wedge \vec{a}_G = \frac{m'}{2} \rho \ell \cos \varphi \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_G^T}{dt} \right) = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{Text}} + \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{entr}} \Rightarrow \frac{1}{3} m' \ell^2 \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2} m' \ell g \sin \varphi + m' \frac{\rho}{2} \ell \cos \varphi \ddot{\theta}.$$

e. Linéarisons **d.** : $\frac{1}{3} m' \ell^2 \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2} m' \ell g \varphi + \frac{1}{2} m' \rho \ell \ddot{\theta}$;

"Premiers pas" théoriques

pour éliminer $\ddot{\theta}$, multiplions par $\dot{\varphi}$: $\frac{1}{3}m'\ell^2\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m'\ell g\dot{\varphi}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m'\rho\ell\ddot{\theta}\dot{\varphi} = 0$;

Conservons les termes d'ordre 2 de **c.** dans l'approximation des petites oscillations :

$$\frac{3}{2}m\rho^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + m'\rho^2\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{m'\rho}{2}(\ddot{\theta}\dot{\varphi} + \dot{\theta}\ddot{\varphi}) + \frac{m'\ell^2}{3}\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + m'g\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\dot{\varphi} = 0 ;$$

Soustrayons membre à membre les deux dernières équations, il reste une relation d'ordre

2 simplifiable par $\dot{\theta}$:

$$\frac{3}{2}m\rho^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + m'\rho^2\ddot{\theta}\dot{\theta} - m'\frac{\rho}{2}\ell\ddot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \text{ d'où : } \left(\frac{3}{2}m\rho^2 + m'\rho^2\right)\ddot{\theta} = m'\frac{\ell}{2}\ddot{\varphi}.$$

On a le moyen d'éliminer $\ddot{\theta}$: on reporte $\ddot{\theta}$ dans **d.** linéarisé :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \frac{3(3m + 2m')}{6m + m'} \varphi = 0 \Rightarrow T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} \frac{6m + m'}{3(3m + 2m')}} ; \text{AN : } T_4 = 0,490 \text{ s.}$$

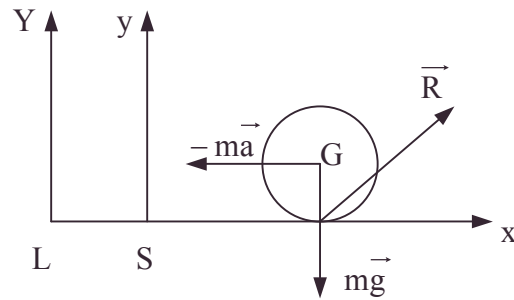
$$\text{f. } m' \ll m ; T'_4 = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}} ; \text{AN : } T'_4 = 0,513 \text{ s.}$$

g. Interprétation : G est pratiquement immobile.

On applique le cours sur la rotation autour d'un axe fixe. On trouve :

$$\frac{1}{3}m'\ell^2\ddot{\varphi} = -m'g\frac{\ell}{2}\sin\varphi \text{ d'où } T_4'.$$

II.1.A. Schéma d'évocation des actions :
pour projeter sur les axes sans erreur de
signes.



Expressions vectorielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a. } m \left(\frac{d^2 \vec{SG}}{dt^2} \right)_{Sxyz} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{entr}}^{\text{Inertie}} ; \vec{F}^{\text{inertie}} = -m\vec{a} . \\ \text{b. } \left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{Sxyz} = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{inertie}} = \vec{GI} \wedge \vec{R} . \\ \text{c. Le roulement sans glissement s'écrit : } \vec{V}_G = \vec{V}_I + \vec{\Omega} \wedge \vec{IG} \text{ avec } \vec{V}_I = \vec{0} . \end{array} \right.$$

Expressions scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a'. } m\ddot{x} = -ma + R_x ; 0 = -mg + R_y . \\ \text{b'. } \frac{1}{2}m\rho^2\ddot{\theta} = \rho R_x . \\ \text{c'. } \dot{x} = -\rho\dot{\theta} . \end{array} \right.$$

$$\text{On élimine } R_x = \frac{1}{2}m\rho^2\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}m\ddot{x} ;$$

on détermine les 2 paramètres du mouvement successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -\frac{2}{3}a \Rightarrow x = -\frac{1}{3}at^2 . \\ \ddot{\theta} = +\frac{2}{3}\frac{a}{\rho} \Rightarrow \theta = \frac{1}{3}\frac{a}{\rho}t^2 . \end{array} \right.$$

B. On en déduit : $R_x = \frac{1}{3}ma$; $R_y = mg$.

C.a. $\mathcal{P}\left(\frac{\vec{R}}{S_{xyz}}\right) = \vec{R} \cdot \vec{V}\left(\frac{I}{S_{xyz}}\right) = 0$.

b. $\mathcal{P}\left(\frac{\vec{R}}{L_{XYZ}}\right) = \vec{R} \cdot \vec{V}\left(\frac{I}{L_{XYZ}}\right) = \vec{R} \cdot \vec{V}_e(I)$ avec $\vec{V}_e(I) = at\vec{i}$; $\mathcal{P}\left(\frac{\vec{R}}{L_{XYZ}}\right) = \frac{1}{3}ma^2t$.

c. Application du théorème de la puissance cinétique :

α. Dans S_{xyz} : $\left(\frac{dE_C}{dt}\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\vec{R}}{S_{xyz}}\right) + mg \cdot \vec{V}\left(\frac{G}{S_{xyz}}\right) + \mathcal{P}^{inertie}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet E_C\left(\frac{D}{S_{xyz}}\right) = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\rho^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 ; \left(\frac{dE_C}{dt}\right)_{S_{xyz}} = \frac{3}{2}m\ddot{x}\dot{x} ; \\ \bullet \mathcal{P}^{inertie} = -\int_D \vec{a}_e \cdot \vec{V}_r dm = -\vec{a} \int_D \vec{V}_r dm = -\vec{a} \cdot m\vec{V}_G = -a\dot{x}m ; \\ \bullet \mathcal{P}\left(\frac{\vec{R}}{S_{xyz}}\right) = \left(\frac{dE_C}{dt}\right)_{S_{xyz}} - \underbrace{mg \cdot \vec{V}_G}_{=0} - \mathcal{P}^{inertie} = \frac{3}{2}m\ddot{x}\dot{x} + am\dot{x} = 0 \end{array} \right.$$

β. Dans L_{XYZ} : $\left(\frac{dE_C}{dt}\right)_{L_{XYZ}} = \mathcal{P}\left(\frac{\vec{R}}{L_{XYZ}}\right) + \underbrace{mg \cdot \vec{V}\left(\frac{G}{L_{XYZ}}\right)}_0$

$$E_C = \frac{1}{2}m(\vec{V}_G + \vec{V}_e)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\rho^2\right)\dot{\theta}^2 ; \text{ or } \vec{V}_e = at\vec{x} ; \vec{V}_G = \dot{x}\vec{x} ; \dot{x} = -\frac{2at}{3} = -\rho\dot{\theta} ;$$

$$E_C = \frac{1}{6}ma^2t^2 ; \left(\frac{dE_C}{dt}\right)_{L_{XYZ}} = \mathcal{P}\left(\frac{\vec{R}}{L_{XYZ}}\right) = \frac{1}{3}ma^2t.$$

D. Il y a effectivement non glissement si $|R_x| \leq k|R_y|$;

soit $a \leq 3gk$; AN : $a \leq 6m.s^{-2}$.

2.A. $\vec{a}_e = -\omega^2 X_0 \cos \omega t \vec{i}$; on remplace formellement a de **II.1.A.** par a_e ;

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}\omega^2 X_0 \cos \omega t ; x = \frac{2}{3}X_0(1 - \cos \omega t).$$

L'amplitude des oscillations est $A = \frac{2}{3}X_0$.

B. De même $R_x = -m\frac{\omega^2}{3}X_0 \cos \omega t$ et $R_g = mg$.

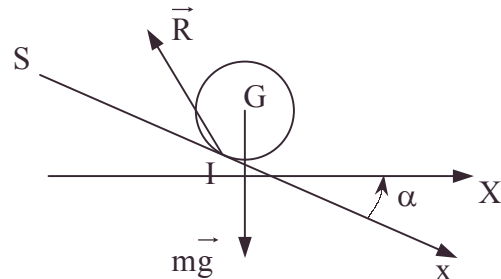
La condition de roulement sans glissement $|R_x| \leq k|R_g|$ s'exprime par :

$$|X_0| \leq \frac{3kg}{\omega^2} ; \text{ AN : } |X_0| < 6.10^{-2}m.$$

III.1. On a : $m\frac{d^2SG}{dt^2} = \vec{R} + m\vec{g}$ et

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\right) = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} = \vec{GI} \wedge \vec{R} ; \text{ soit :}$$

$$m\ddot{x} = R_x + mg \sin \alpha ; 0 = R_y - mg \cos \alpha .$$



$$m \frac{\rho^2}{2} \ddot{\theta} = \rho R_x$$

a. Supposons le roulement sans glissement :

$$\vec{V}_G = \vec{V}_I + \vec{\Omega} \wedge \vec{IG} \text{ avec } \vec{V}_I = \vec{0} \text{ s'écrit } \dot{x} = -\rho \dot{\theta}.$$

$$\text{On obtient en éliminant } R_x : \quad \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \Rightarrow x = \frac{1}{3} g \sin \alpha t^2,$$

$$\text{d'où } \theta = -\frac{1}{3} g \frac{t^2}{\rho} \sin \alpha.$$

Cette hypothèse doit vérifier $|R_x| \leq k |R_y|$ avec :

$$R_x = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha \text{ et } R_y = mg \cos \alpha, \text{ soit } \frac{1}{3} mg \sin \alpha \leq k mg \cos \alpha,$$

Soit si $\alpha < \alpha_\ell$, avec $\tan \alpha_\ell = 3k$ ou $\alpha_\ell = \arctan 3k$; AN : $\alpha_\ell = 0,540 \text{ rad}$;

$$\text{avec } 0 < \alpha_\ell < \frac{\pi}{2}$$

b. Supposons le roulement avec glissement : $R_x = -k R_y$ avec $R_y = mg \cos \alpha$.

$$\text{Vu le départ arrêté à } t = 0, \ddot{x} = g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \text{ soit } x = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - k \cos \alpha) t^2 ;$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{\rho} k \cos \alpha \text{ soit } \theta = -\frac{g}{\rho} k t^2 \cos \alpha ;$$

$$\vec{V}_I = \left(\dot{x} + \rho \dot{\theta} \right) \vec{i} = g t (\sin \alpha - 3k \cos \alpha) \vec{i} ; v_I \geq 0 \text{ si } \tan \alpha \geq 3k ; .$$

$v_{I_x} < 0$: impossible si départ arrêté cf. 3.

c. Le départ arrêté est compatible avec le roulement sans glissement si $\alpha < \alpha_\ell$ et avec le roulement avec glissement si $\alpha > \alpha_\ell$.

d. Pour $\alpha = \alpha_\ell$;

$$\text{a. Avec l'hypothèse non glissement : } \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha_\ell ;$$

$$\text{b. Avec l'hypothèse glissement : } \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha_\ell$$

Les deux types de mouvement donnent le même résultat : $x = \frac{1}{3} g \sin \alpha_\ell t^2$.

2. $\alpha < \alpha_\ell$ avec départ non arrêté : $\vec{v}_{I_0} = (v_0 + \rho \omega_0) \vec{i} \neq \vec{0}$; on commence donc avec un roulement avec glissement.

$R_x = -\varepsilon_0 k mg \cos \alpha$ opposé à la vitesse v_I , de même signe que v_{I_0} , tant que $v_I \neq 0$;

On dispose des équations de III.1.b. :

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha - \varepsilon_0 k mg \cos \alpha \text{ (selon le signe de } v_{I_0} \text{ noté } \varepsilon_0) ; R_y = mg \cos \alpha ;$$

$$\frac{m \rho^2}{2} \ddot{\theta} = -\rho \varepsilon_0 k mg \cos \alpha .$$

$$\text{On en déduit : } \ddot{x} = g \sin \alpha - \varepsilon_0 k g \cos \alpha ; \dot{x} = (g \sin \alpha - \varepsilon_0 k g \cos \alpha) t + v_0 ;$$

$$x = \frac{1}{2} g t^2 (\sin \alpha - \varepsilon_0 k \cos \alpha) + v_0 t .$$

$$\ddot{\theta} = -2\varepsilon_0 k \frac{g}{\rho} \cos \alpha ; \dot{\theta} = -2\varepsilon_0 k \frac{g}{\rho} \cos \alpha t + \omega_0 ; \theta = -\varepsilon_0 k \frac{g}{\rho} \cos \alpha t^2 + \omega_0 t ;$$

$$v_I = \left(\rho \dot{\theta} + \dot{x} \right) = gt \cos \alpha (\tan \alpha - 3\varepsilon_0 k) + \underbrace{(v_0 + \rho \omega_0)}_{v_{I_0}}.$$

Il existe toujours t_f tel que $v_I = 0$, donné par :

$$\text{Si } \varepsilon_0 = +1, t_{f+} = \frac{-(v_0 + \rho \omega_0)}{g \cos \alpha (\tan \alpha - 3k)} > 0 \text{ si } \alpha < \alpha_\ell \text{ vu } v_{I_0} > 0 ;$$

$$\text{si } \varepsilon_0 = -1, t_{f-} = \frac{-(v_0 + \rho \omega_0)}{\rho \cos \alpha (\tan \alpha + 3k)} > 0 \text{ vu } v_{I_0} < 0.$$

A partir de cet instant, $t_f = \frac{-(v_0 + \rho \omega_0)}{g \cos \alpha (\tan \alpha - 3\varepsilon_0 k)}$, considérée comme nouvel instant

initial, la condition $v_I = 0$ permet la démonstration du **III.1.a.** et la vérification de l'hypothèse de roulement sans glissement si $\alpha < \alpha_\ell$ (seule l'intégration de x change), t_f est donc la durée de la phase de glissement.

$$\text{On a calculé à } t \leq t_f, \quad x = \frac{1}{2} g t^2 (\sin \alpha - \varepsilon_0 k \cos \alpha) + v_0 t ;$$

$$\text{donc, à } t = t_f, \quad x_f = \frac{1}{2} g t_f^2 (\sin \alpha - \varepsilon_0 k \cos \alpha) + v_0 t_f ;$$

$$\text{et pour } t \geq t_f, \quad x = \frac{1}{2} g \sin \alpha (t - t_f)^2 + v_f (t - t_f) + x_f ;$$

$$\text{avec (cf. III.2.)} \quad v_f = (g \sin \alpha - \varepsilon_0 k g \cos \alpha) t_f + v_0.$$

3. On a $\alpha < \alpha_\ell$; $v_0 > 0$;

Pendant la phase de glissement : $\ddot{x} = g \cos \alpha (\tan \alpha - \varepsilon_0 k)$

a. $\varepsilon_0 = -1$; $(\rho \omega_0 < -v_0)$; $\ddot{x} > 0$; le mouvement est accéléré ; $(\forall \alpha < \alpha_\ell)$.

b. $\varepsilon_0 = +1$; $(\rho \omega_0 > -v_0)$;
– si $\tan \alpha > k$, $\ddot{x} > 0$, le mouvement est accéléré.
($\alpha_\ell > \alpha > \alpha_1$ avec $\alpha_1 = \arctan k$).

– si $\tan \alpha < k$, $\ddot{x} < 0$, le mouvement est ralenti.
 $\alpha < \alpha_1$; AN : $\alpha_1 = 11,31^\circ$.

c. Dans le cas de mouvement ralenti, si

$$\alpha < \alpha_1 \text{ et } \varepsilon_0 = +1, \ddot{x} = g \cos \alpha (\tan \alpha - k) < 0 \Rightarrow \dot{x} = gt \cos \alpha (\tan \alpha - k) + v_0.$$

Le disque remonte quand $\dot{x} < 0$, soit à $t > t_0$ avec $t_0 = \frac{v_0}{g \cos \alpha (k - \tan \alpha)}$.

Pour que cela existe ainsi, il faut $t_0 \leq t_f$, soit : $\frac{-(v_0 + \rho \omega_0)}{g \cos \alpha (\tan \alpha - 3k)} \geq \frac{-v_0}{g \cos \alpha (\tan \alpha - k)}$,

$$\text{soit : } \omega_0 > \frac{v_0}{\rho} \frac{2k}{k - \tan \alpha}, \text{ soit } \omega_1 = \frac{2v_0 k}{\rho(k - \tan \alpha)}.$$

Représentation de la vitesse.

$$t < t_f ; \dot{x} = gt \cos \alpha \underbrace{(\tan \alpha - \varepsilon_0 k)}_{\geq 0} + v_0 ;$$

de pente positive ou négative.

$$t = t_f ; \dot{x}_f = \frac{(\omega_0 \rho + v_0)}{3k\varepsilon_0 - \tan \alpha} \cdot (\tan \alpha - k) + v_0 ;$$

de valeur positive ou négative.

$$t > t_f ; \dot{x} = \dot{x}_f + \frac{2}{3} g \sin \alpha (t - t_f) .$$

On peut introduire ω_1 dans \dot{x}_f :

$$\dot{x}_f = \rho(\omega_1 - \omega_0) \frac{k - \tan \alpha}{3k - \tan \alpha} \text{ si } \varepsilon_0 = +1, \alpha < \alpha_\ell .$$

4. $\varepsilon_0 = +1 ; \alpha < \alpha_\ell$: le mouvement est ralenti.

$$\ddot{x} = g \cos \alpha (\tan \alpha - k) ; x = \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha (\tan \alpha - k) + v_0 t .$$

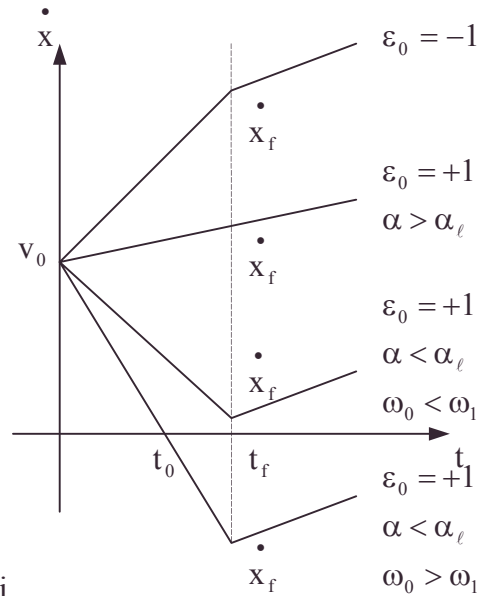
Calculons t , tel que $x = 0$; $t(-gt \cos \alpha (k - \tan \alpha) + v_0) = 0$,

$$\Rightarrow t = 0 \text{ cf. départ et } t_2 = \frac{2v_0}{g \cos \alpha (k - \tan \alpha)} > 0 .$$

Exprimons que cette loi n'est valable que si $t_2 \leq t_f$, soit :

$$\frac{2v_0}{g \cos \alpha (k - \tan \alpha)} \leq \frac{v_0 + \rho \omega_0}{g \cos \alpha (3k - \tan \alpha)} \text{ soit } \omega_0 > \omega_2 \text{ avec } \omega_2 = \frac{v_0}{\rho} \frac{5k - \tan \alpha}{k - \tan \alpha} :$$

$$\text{AN : } \begin{cases} \omega_1 = 20,0 \text{ rad.s}^{-1} \\ \omega_2 = 45,0 \text{ rad.s}^{-1} \\ t_0 = 0,100 \text{ s} \\ t_f = 0,221 \text{ s} \\ \dot{x}_f = -0,120 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$



2.3.1.6. Activités sportives

Voir page 246.

2.3.1.7. Véhicules

Voir page 259.

2.3.2. Activités sportives

2.3.2.1. Influence de la pente et de la nature de la neige sur les efforts d'un skieur

Sur une piste rectiligne, faisant un angle α avec l'horizontale, un skieur glisse, à partir d'un point O. Sa vitesse initiale est nulle.

Au point O est associé un référentiel galiléen, orthonormé, direct $R_0 (\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0}, \overrightarrow{Oz_0})$ avec $\overrightarrow{Ox_0}$ colinéaire à la pente et dirigé vers le bas, $\overrightarrow{Oy_0}$ étant perpendiculaire à la pente et dirigé vers le haut.

Au point A, d'abscisse x , où se trouve le skieur, on pourra associer le repère R_A dont les axes $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}, \overrightarrow{AZ}$ sont respectivement parallèles à $\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0}$ et $\overrightarrow{Oz_0}$.

Le repère R_A est en translation par rapport à R_0 avec une vitesse $\mathbf{V} = \dot{x}$.

Le skieur est assimilé à un solide de masse m et on néglige la masse des skis. Le contact ski-skieur est supposé ponctuel, en A. Le centre de masse G du skieur est défini par le vecteur \overrightarrow{AG} , de norme ℓ constante et faisant un angle θ avec \overrightarrow{AY} (figure 1). Le moment d'inertie du skieur autour d'un axe \overrightarrow{GZ} , parallèle à \overrightarrow{AZ} , vaut I.

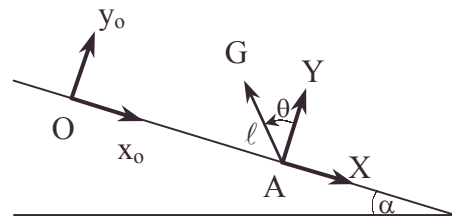


Figure 1

Outre son poids, le skieur subit de la part de l'air des actions mécaniques dont le torseur en G se réduit à une force de frottement colinéaire à $\overrightarrow{Ox_0}$ et de module KSV^2 (S désigne l'aire offerte par le skieur à l'air et K est le "coefficient de pénétration"). Le torseur des actions mécaniques exercées par le skieur sur ses skis a pour éléments de réduction en A une force \vec{F} et un couple \vec{C} parallèle à \overrightarrow{AZ} .

Sauf dans la dernière partie, le contact ski-piste est sans frottement solide.

A. Première partie

1. Exprimer, en fonction de x, θ et de leurs dérivées $\dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}, \ddot{\theta}$ par rapport au temps, la vitesse et l'accélération de G dans R_0 .

2. Exprimer le moment dynamique $\overrightarrow{D_G}$ en G du skieur, dans R_0 , et en déduire, dans le même référentiel, le moment dynamique $\overrightarrow{D_A}$ en A.

3. Exprimer le théorème de la résultante dynamique pour l'ensemble ski-skieur, dans R_0 , en projection sur $\overrightarrow{Ox_0}$ et $\overrightarrow{Oy_0}$.

4. Exprimer le théorème du moment dynamique pour le skieur seul, au point A, dans R_0 , en projection sur $\overrightarrow{Oz_0}$.

B. Deuxième partie : étude du mouvement suivant $\overrightarrow{Ox_0}$

On suppose que le skieur a acquis une inclinaison constante par rapport à la pente : $\theta = \theta_0$.

1. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite V_0 dont on donnera l'expression littérale puis la valeur numérique pour $\alpha = 45^\circ$ avec $m = 80 \text{ kg}$, $S = 0,4 \text{ m}^2$, $K = 0,4$ unité SI, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ et $\theta_0 = 0$.

• centre de masse, conditions initiales, couple, moment d'inertie, moment dynamique, mouvement sans frottement, projections, résistance à l'air, théorème de la résultante dynamique, théorème du moment dynamique, torseur

2. Déterminer la loi $v(t)$ qu'on présentera sous la forme $\frac{v(t)}{V_0} = f\left(\frac{t}{\tau}\right)$ où τ est un temps caractéristique dont on donnera l'expression littérale puis la valeur numérique. Tracer le graphe correspondant.

3.a. Déterminer la loi $x(t)$ qu'on présentera sous la forme $\frac{x(t)}{x_0} = g\left(\frac{t}{\tau}\right)$ où x_0 est la distance caractéristique $x_0 = \tau V_0$ dont on donnera la valeur numérique. Tracer le graphe correspondant.

b. Que se passe-t-il pour x et t petits par rapport à, respectivement, x_0 et τ ?

4.a. Par un calcul direct, déterminer le travail $W(t)$ fourni depuis l'instant $t = 0$ contre le frottement de l'air et l'exprimer en fonction des paramètres $E_0 = \frac{1}{2} m V_0^2$ et $\frac{t}{\tau}$.

b. Exprimer en fonction de E_0 et $\frac{t}{\tau}$, l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ et en déduire le bilan énergétique à l'instant t .

C. Troisième partie : étude de la stabilité de l'équilibre

1. Le skieur a une inclinaison constante $\theta = \theta_0$ par rapport à la normale à la pente.

a. Quelle est, en fonction de α et θ_0 , la valeur de $|\vec{C}|$ qui permet un tel mouvement ?

b. En déduire la position la plus confortable pour le skieur, c'est-à-dire celle pour laquelle le module de \vec{C} est minimum : cette position correspond à une valeur θ_e de θ .

2. Le skieur est passif ($\vec{C} = \vec{0}$) et l'on veut étudier sa stabilité par rapport à la position $\theta = \theta_e$ qui est compatible avec $\vec{C} = \vec{0}$.

On pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$ et on admet que ε , $\dot{\varepsilon}$ et $\ddot{\varepsilon}$ sont des infiniment petits du même ordre. Déterminer, en négligeant les infiniment petits du 2^{ème} ordre, l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$. Conclure quant à la stabilité du skieur passif.

3. Le skieur est actif et exerce autour de la position d'équilibre définie précédemment un couple de rappel $C = k\varepsilon$.

Quelle est la condition sur k qui permet la stabilité du skieur ? Quelle remarque vous suggère l'influence de la pente α sur les valeurs de k assurant la stabilité ?

D. Quatrième partie : influence du coefficient de frottement

On veut reprendre la troisième partie sans négliger le frottement dont le coefficient vaut f (on pourra poser $f = \tan \phi$).

On suppose toujours constante l'inclinaison du skieur : $\theta = \theta_0$.

1.a. Quelle est la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x(t)$?

b. Quelle est la condition de démarrage si $\dot{x}(0) = 0$?

c. Cette condition étant réalisée, quelle sera la nouvelle vitesse limite si $f = 0,05$?

2.a. Expliquer pourquoi l'équation déterminée en I.4. est toujours valable et en déduire la nouvelle valeur de θ correspondant à la position la plus confortable qu'on désignera encore par θ_e .

b. La projection de G sur Ox_0 est elle en avant ou en arrière de A ? Que doit faire le skieur quand il passe d'une zone verglacée, où le frottement est très faible, à une zone de neige fraîche, où f est plus important ? Justifier la réponse.

3. Le skieur étant passif au voisinage de θ_e , reprendre comme à la question III.2. ci-dessus la discussion sur la stabilité et comparer les résultats.

• cinétique, couple de rappel, développement au premier ordre ou plus, équilibre, frottement solide, graphe, minimum, projections, stabilité

Mines ;Durée : 3h**Corrigé**

$$\text{A.1. } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} ; \overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x - \ell \sin \theta \\ \ell \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} \Rightarrow \overrightarrow{V}(G) \begin{vmatrix} \dot{x} - \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ -\ell \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} .$$

$$\overrightarrow{a}(G) \begin{vmatrix} \ddot{x} + \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \ell \cos \theta \\ -\ell \dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\theta} \ell \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} .$$

$$\text{2.a. } \overrightarrow{D}_G = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}_G}{dt} \right)_{R_{Gb}} \Rightarrow \overrightarrow{D}_G = I \ddot{\theta} \overrightarrow{z_0} .$$

$$\text{b. } \overrightarrow{D}_A = \overrightarrow{D}_G + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a}_G = \left[(I + m \ell^2) \ddot{\theta} - m \ell \ddot{x} \cos \theta \right] \overrightarrow{z_0} .$$

3. Soit l'expression vectorielle du théorème de la résultante dynamique :
 $m \overrightarrow{a}_G = -\overrightarrow{F} + \overrightarrow{R}_{\text{air}} + m \overrightarrow{g}$; projetons sur :

$$\overrightarrow{x_0} : m \left(\ddot{x} + \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \ell \cos \theta \right) = T - K \dot{x}^2 + mg \sin \alpha .$$

$$\overrightarrow{y_0} : -m \left(\ell^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \ell \sin \theta \right) = N - mg \cos \alpha .$$

4. Soit l'expression vectorielle du théorème du moment dynamique en A, vu le théorème de l'action - réaction pour le couple C :

$$\overrightarrow{D}_A = -\overrightarrow{C} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R}_{\text{air}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{g} ; \text{ projetons sur } \overrightarrow{z_0} :$$

$$(I + m \ell^2) \ddot{\theta} - m \ell \ddot{x} \cos \theta = -C + K \dot{x}^2 \ell \cos \theta + m \ell g \sin (\theta - \alpha) .$$

$$\text{B. } \theta = \theta_0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0 ; \ddot{\theta} = 0$$

$$\text{3. et 4. donnent : } m \ddot{x} = -K \dot{x}^2 + mg \sin \alpha \text{ vu } T = 0 ;$$

$$0 = N - mg \cos \alpha ;$$

$$-m \ell \ddot{x} \cos \theta_0 = -C + K \dot{x}^2 \ell \cos \theta_0 + m \ell g \sin (\theta_0 - \alpha)$$

$$\text{1. } \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = V_0 = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{K}} \quad \text{AN : } V_0 = 58,86 \text{ m.s}^{-1} = 212 \text{ km.h}^{-1} .$$

$$\text{2. Posons } \dot{x} = v \Rightarrow dv = dt g \sin \alpha \left(1 - \frac{v^2}{\frac{mg \sin \alpha}{K}} \right)$$

puis $u = \frac{v}{V_0} : \frac{du}{1-u^2} = \frac{dt}{\tau}$ avec $\tau = \frac{V_0}{g \sin \alpha} \Rightarrow \operatorname{arctanh} u = \frac{t}{\tau} ;$

$v = V_0 \tanh \frac{t}{\tau}$. AN : $\tau = 8,49 \text{ s}$

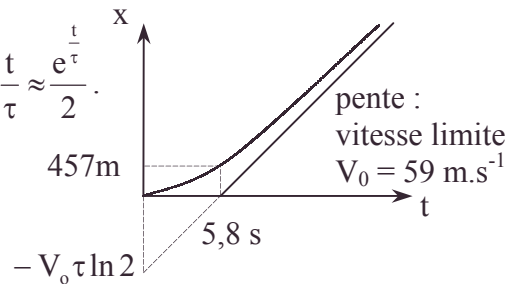
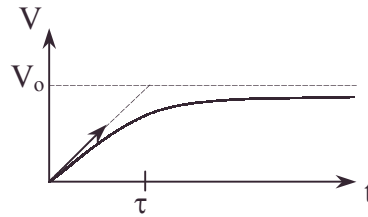
3.a. $dx = V_0 \frac{\sinh\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)} dt.$

$x = v_0 \tau \ln \left[\cosh \left(\frac{t}{\tau} \right) \right]$ car pour $t = 0, x = 0$.

Asymptote : $\cosh \frac{t}{\tau} = \frac{e^{\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}}}{2}$, si $t \rightarrow \infty$ $\cosh \frac{t}{\tau} \approx \frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{2}$.

$x \approx V_0 \tau \left(-\ln 2 + \frac{t}{\tau} \right)$; $x = 0$ pour $t = \tau \ln 2$

AN : $x_0 = V_0 \tau = 500 \text{ m}$.



b. $t \rightarrow 0 \quad \ln \cosh \frac{t}{\tau} \approx \ln \left(1 + \frac{t^2}{2\tau^2} \right) \approx \frac{t^2}{2\tau^2}.$

$x = \frac{V_0}{2} \frac{t^2}{\tau} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{V_0}{\tau}$ A.N. : $\ddot{x}_0 = 7 \text{ m.s}^{-2}$; mouvement à accélération constante au début.

4.a. $W = \int_0^t KSV^2 dx = KSV_0^3 \int_0^t \tanh^3 \frac{t}{\tau} dt = KSV_0^3 \tau \left(\ln \cosh \frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} \tanh^2 \frac{t}{\tau} \right) + \text{cste}.$

à $t = 0 \quad W = 0 \Rightarrow \text{cste} = 0.$

$SKV_0^3 \tau = \frac{SK}{g \sin \alpha} V_0^4 = m \frac{V_0^4}{V_0^2} = mV_0^2 = 2E_0.$

$W = 2E_0 \left(\ln \cosh \frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} \tanh^2 \frac{t}{\tau} \right).$

b.α. $E_c = \frac{1}{2} mV_0^2 \tanh^2 \frac{t}{\tau} ;$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $dE_c = -dW + dW_{\text{poids}}.$

$dE_c = -dW - dE_{\text{pot}} = -dW + mg \sin \alpha dx.$

$E_c = -W + mg \sin \alpha x = -2E_0 \left(\ln \cosh \frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} \tanh^2 \frac{t}{\tau} \right) + mg \sin \alpha V_0 \tau \ln \cosh \frac{t}{\tau}.$

or à $t = 0$ où $W = 0$: $mg \sin \alpha V_0 \tau = mV_0^2 = 2E_0 ;$

$E_c = E_0 \tanh^2 \frac{t}{\tau}.$

C.1.a. $\theta = \theta_0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0 ;$

$\Rightarrow \text{A.4.} \Rightarrow C = m\ell \ddot{x} \cos \theta_0 + K \dot{x}^2 \ell \cos \theta_0 + mg\ell \sin(\theta_0 - \alpha).$

or $T = 0$ et **A.3.** donne : $m \ddot{x} = -K \dot{x}^2 + mg \sin \alpha$.
 $C = mg\ell (\cos \theta_0 \sin \alpha + \sin \theta_0 \cos \alpha - \cos \theta_0 \sin \alpha)$.

$$C = mg\ell \sin \theta_0 \cos \alpha \Rightarrow |\vec{C}| = mg\ell \sin \theta_0 \cos \alpha.$$

b. En faisant varier θ_0 lentement, $|\vec{C}|$ est minimum pour $\theta_0 = 0$.

$$2. \varepsilon = \theta - \theta_0 = \theta ; \dot{\varepsilon} = \dot{\theta}, \ddot{\varepsilon} = \ddot{\theta}.$$

En négligeant les termes d'ordre 2 :

$$\text{de A.3. on tire : } m \ddot{x} - m\ell \ddot{\varepsilon} = -K \dot{x}^2 + mg \sin \alpha.$$

$$\text{de A.4. on tire : } \left(I + m\ell^2 \right) \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} - m \ddot{x} = K \dot{x}^2 - mg \sin \alpha.$$

Éliminons \ddot{x} et \dot{x} entre les deux équations en les additionnant.

On obtient $\frac{I}{\ell} \ddot{\varepsilon} = 0$ incompatible avec les hypothèses d'ordre 1 pour ε au cours du temps. Il faut reprendre la technique de linéarisation trop expéditive en **A.4.**

$$\left(I + m\ell^2 \right) \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} - m \ddot{x} = K \dot{x}^2 + mg \sin (\varepsilon - \alpha).$$

$$\Rightarrow \left(I + m\ell^2 \right) \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} - m \ddot{x} = K \dot{x}^2 + mg \varepsilon \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

On obtient alors par addition : $I \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} = mg \varepsilon \cos \alpha$ qui n'est pas de la forme $\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0$

donnant la stabilité. (On ne peut pas jouer sur $\cos \alpha < 0$). Cette instabilité fait que le skieur passif tombe.

$$3. \text{ A.4. s'écrit } \left(I + m\ell^2 \right) \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} - m\ell \ddot{x} = -\frac{k\varepsilon}{\ell} + K \dot{x}^2 + mg \varepsilon \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

On obtient alors par addition avec l'équation linéarisée issue de **A.3.** :

$$I \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} = mg \varepsilon \cos \alpha - \frac{k\varepsilon}{\ell}, \text{ soit } I \ddot{\varepsilon} + (k - mg\ell \cos \alpha) \varepsilon = 0.$$

La stabilité exigeant la forme $\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0$ exige $k > mg\ell \cos \alpha$.

α fort permet à k d'être faible (dans le cadre de la stabilité).

On peut conclure à la stabilité du skieur sur forte pente moyennant un couple plutôt faible.

$$\text{D.1.a. } T = -fN, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0.$$

$$\text{A.3. s'écrit : } m \ddot{x} = -fN - K \dot{x}^2 + mg \sin \alpha.$$

$$0 = N - mg \cos \alpha.$$

$$\text{aussi } m \ddot{x} = -K \dot{x}^2 + mg (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

$$\text{b. Si } \dot{x}(0) = 0 : m \ddot{x}_0 = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

\ddot{x}_0 positif si $\sin \alpha > f \cos \alpha$ soit $\tan \alpha > \tan \phi$. Démarrage donc, si $\alpha > \phi$.

c. La vitesse limite suppose $\ddot{x} = 0$.

$$V_o^2 = \frac{mg}{K} (\sin \alpha - f \cos \alpha) \Rightarrow V_o = \sqrt{\frac{mg}{K} (\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

$$AN : V_{of} = 57,4 \text{ m.s}^{-1}.$$

2.a. L'équation 4. de la première partie n'est pas influencée par $f \neq 0$ car le couple de T en A est nul.

La technique calculatoire de C.1.a. est à reproduire.

$$C = m\ell \ddot{x} \cos \theta_o + K \dot{x}^2 \ell \cos \theta_o + mg\ell \sin(\theta_o - \alpha).$$

$$\text{or } m\ddot{x} = -K\dot{x}^2 + mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Rightarrow \text{vu } \sin(\theta_o - \alpha) = \sin \theta_o \cos \alpha - \cos \theta_o \sin \alpha,$$

$$C = mg\ell (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \theta_o + mg\ell \sin \theta_o \cos \alpha - mg\ell \cos \theta_o \sin \alpha.$$

$$C = mg\ell (\sin \theta_o - f \cos \theta_o) \cos \alpha.$$

Le minimum nul du module de C est obtenu pour $\tan \theta_o = f = \tan \phi$ soit $\theta_e = \phi$.

b. G est en arrière de A ; θ_e croît avec f.

Le skieur s'inclinera vers l'arrière pour augmenter θ_o quand il passera d'une zone verglacée à une zone de neige fraîche de f supérieur.

$$3. \varepsilon = \theta - \theta_e ; \dot{\varepsilon} = \dot{\theta} ; \ddot{\varepsilon} = \ddot{\theta} ; T = -fmg \cos \alpha.$$

$$\text{On a : } m\ddot{x} - m\ell \ddot{\varepsilon} = -K\dot{x}^2 + mg(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

$$\left(I + m\ell^2\right) \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} - m\ddot{x} \cos \theta_e = 0 + K\dot{x}^2 \cos \theta_e + mg \sin(\theta_e - \alpha + \varepsilon),$$

$$\text{d'où : } I \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} - mg \cos \theta_e (\sin \alpha - f \cos \alpha) = mg \varepsilon \cos(\theta_e - \alpha) + mg \sin(\theta_e - \alpha).$$

$$\text{or, } C = mg\ell (\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \theta_e + mg\ell \sin(\theta_e - \alpha) = 0.$$

$$\text{il reste } I \frac{\ddot{\varepsilon}}{\ell} - mg \varepsilon \cos(\theta_e - \alpha) = 0.$$

L'instabilité demeure car on ne peut avoir réellement $\cos(\theta_e - \alpha) < 0$.

On a à jouer avec l'activité du skieur avec $C = k\varepsilon$ pour obtenir

$$I \ddot{\varepsilon} + (k - mg\ell \cos(\theta_e - \alpha)) \varepsilon = 0.$$

La stabilité exige $k > mg\ell \cos(\alpha - \theta_e)$.

La facilité donnée en C.3. par α fort est diminuée vu l'intervention de θ_e .

Aussi la neige fraîche de f fort oblige à θ_{eq} et à k plus difficile à réaliser que la neige verglacée.

2.3.2.2. Equilibriste sur un ballon

Un ballon sphérique de rayon R , rigide, de masse m uniformément répartie en surface, roule sans glisser sur le sol horizontal de sorte que son centre reste dans le plan xOz d'un référentiel (\mathcal{R}) ($O; x, y, z$) supposé galiléen, dont Oz désigne la verticale ascendante. L'intensité de la pesanteur est g ; les vecteurs unitaires portés par les axes Ox , Oy et Oz sont respectivement désignés par \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} et forment un trièdre (cf. figure1). Le coefficient de frottement de glissement sur le sol Ox est constant et égal à f .

A l'instant initial $t = 0$, le centre C du ballon immobile a pour coordonnées $x = y = 0, z = R$. Un equilibriste a ses pieds en un point A du ballon situé dans le plan xOz et tel que la droite CA fasse un angle α avec la verticale (cf. Figure 1). L'équilibriste marche ou court à petits pas sur le ballon en direction de son point le plus haut. A tout instant, la droite instantanée CA fait un angle α avec la verticale. L'équilibriste est assimilé à un solide de masse M de centre de masse H : AH est constamment vertical ; $AH = h = 2R$. On néglige l'inertie des parties mobiles de l'équilibriste dans sa marche ou sa course à petits pas de sorte que son mouvement est, dans (\mathcal{R}) , un mouvement de translation.

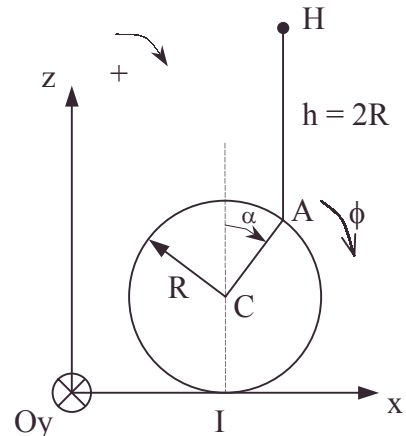


Figure 1

On désigne par \vec{v} et \vec{a} la vitesse et l'accélération de C dans (\mathcal{R}) . La rotation du ballon dans (\mathcal{R}) est comptée positivement suivant Oy ; ϕ est l'angle de rotation et on pose $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ (cf. figure 1).

I. Cinématique et cinétique

1.a. Quelles sont la vitesse \vec{v}_H et l'accélération \vec{a}_H de H dans (\mathcal{R}) ?

b. En déduire la vitesse \vec{v}_G et l'accélération \vec{a}_G du centre de masse G du système équilibriste-ballon dans son mouvement par rapport à (\mathcal{R}) .

2. Quelle est la relation traduisant le roulement sans glissement du ballon au point de contact I avec le sol ?

3. Quelle est la vitesse de l'équilibriste par rapport à la surface du ballon, avec laquelle il est en contact ?

4. Quel est le moment d'inertie J du ballon autour de l'axe Cy parallèle à Oy ?

5.a. Quel est, dans (\mathcal{R}) , le moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ du ballon en son centre C ? On exprimera $\vec{\sigma}_C$ en fonction de m , R et $\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{i}$.

b. En déduire le moment cinétique $\vec{\sigma}_I$, dans (\mathcal{R}) , au point de contact I .

6.a. Quel est, dans (\mathcal{R}) , le moment cinétique $\vec{\sigma}'_H$ de l'équilibriste en H ?

En déduire, dans (\mathcal{R}) , le moment cinétique $\vec{\sigma}'_I$ de l'équilibriste en I .

b. Exprimer en fonction de R , v , m , M et α , le moment cinétique total $\vec{\sigma}$ du système équilibriste-ballon en I , dans le référentiel (\mathcal{R}) .

II. Dynamique

1. On considère le moment cinétique $\vec{\Sigma}_P$ d'un solide quelconque (S), de centre de masse G, calculé dans un référentiel (\mathcal{R}), en un point P quelconque de (S).

Calculer, dans (\mathcal{R}), la dérivée par rapport au temps de $\vec{\Sigma}_P$ et l'exprimer en faisant apparaître, en particulier, le moment dynamique en P, \vec{M}_P . La relation obtenue sera dans la suite du problème désignée par [1].

2.a. Quelles sont les vitesses \vec{V}_I et \vec{V}_G des points I et G dans le mouvement du système équilibriste-ballon dans (\mathcal{R}) ?

b. En appliquant [1], déduire le moment dynamique en I, dans (\mathcal{R}), du système équilibriste-ballon.

3.a. Montrer que l'accélération du point C est $a = \frac{Mg \sin \alpha}{\frac{5}{3}m + M(3 + \cos \alpha)}$.

b. Calculer numériquement a pour :

$$M = 60 \text{ kg} ; m = 6 \text{ kg} ; R = 0,5 \text{ m} ; \alpha = 5^\circ ; g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}.$$

4.a. Calculer les composantes tangentielle \vec{T} et normale \vec{N} de la réaction du sol sur le ballon.

b. Montrer que si $f = 0,2$ il ne peut y avoir glissement ni au départ, ni en un instant ultérieur.

5. L'équilibriste ne peut courir à petits pas à plus de $v_0 = 2 \text{ m/s}$ par rapport à la surface du ballon.

a. Au bout de quel temps τ cette vitesse est-elle atteinte ? Quelle est la distance L parcourue par le ballon ? Que se passe-t-il ensuite ? (N.B.: on demande pour τ et L les expressions littérales et les valeurs numériques).

b. Quel est le maximum de la puissance utile P_u fournie par l'équilibriste, c'est-à-dire la puissance fournie pour accroître dans (\mathcal{R}) l'énergie cinétique du système équilibriste-ballon ? On donnera comme ci-dessus l'expression littérale de P_u au cours du temps, puis sa valeur maximum, littérale et numérique.

III. Statique et dynamique sur un plan incliné

Le ballon est désormais sur une planche inclinée, dont la ligne de plus grande pente, choisie comme axe Ox du référentiel (\mathcal{R}') galiléen, fait l'angle β avec le sol. L'axe Oz est orthogonal à Ox et dirigé vers le haut (figure 2). L'équilibriste est toujours vertical, c'est-à-dire que AH est orthogonal au sol. L'angle de CA avec IC est noté α , comme dans les parties I et II (cf. Figure 2).

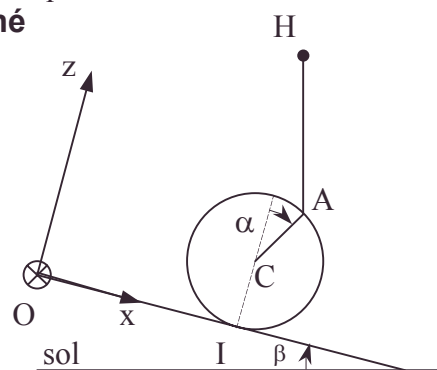


Figure 2

1. On suppose que l'équilibriste est en équilibre sur le ballon, et on admet que le coefficient de frottement de l'équilibriste sur le ballon en A est suffisant pour que le glissement soit absent en A.

a. Quelle est la valeur de α qui, pour β donné, permet dans (\mathcal{R}') l'équilibre du système équilibriste-ballon ?

b. Quelle est la condition sur β pour que le glissement en I ne s'amorce pas ? On prendra $f = 0,2$.

- c. Calculer numériquement α à l'équilibre pour $\beta = 5^\circ$.
2. Le système équilibriste-ballon descend le plan incliné suivant la ligne de plus grande pente Ox : $v \geq 0$. L'équilibriste marche ou court pour maintenir α constant. Initialement le ballon et l'équilibriste sont immobiles.
- a. Exprimer dans (\mathcal{R}) le moment cinétique total en I en fonction de m, M, R, v, α et β . On vérifiera que pour $\beta = 0$ on retrouve bien le résultat de I.6.b.
- b. Appliquer, comme en II.2., la relation [1] et montrer que le mouvement de C est uniformément varié. On donnera l'expression $a(m, M, g, \alpha, \beta)$.
- c. Vérifier que l'expression de a redonne bien, pour $\beta = 0$, celle déterminée en II.3. et qu'elle s'annule bien si la condition d'équilibre de III.1. est vérifiée.
- d. On prend $\alpha = \beta = 5^\circ$. calculer a puis la distance parcourue quand le clown atteint la vitesse limite, par rapport au ballon, de 2 m/s. Comparer au résultat de II.5.
3. L'équilibriste veut avoir un mouvement ascendant, c'est-à-dire remonter la pente Ox .
- a. Montrer que α doit satisfaire à une inégalité, dépendant de β .
- Si $\beta = 5^\circ$, la valeur $\alpha = -15^\circ$ est-elle satisfaisante ? Calculer a dans ce cas.
- b. Calculer les composantes tangentielle et normale de la réaction de la planche sur le ballon et vérifier que le glissement ne peut s'amorcer si $f = 0,2$.
- c. Quelle longueur le ballon peut-il parcourir avant que l'équilibriste perde l'équilibre ? A quelle hauteur cela correspond-il ?
- d. Comment devrait-on définir ici la puissance utile développée par l'équilibriste ? Calculer sa valeur maximum compatible avec l'équilibre de l'équilibriste sur le ballon.

Mines ; Durée 3h

Corrigé

I. On rappelle que les vitesses d'un solide et les moments cinétiques possèdent les propriétés des champs de moments.

1.a. Considérons le repère R_A de centre A lié à l'équilibriste. R_A est en translation dans \mathcal{R} : $\vec{V}_A = \vec{V}_H$ et $\vec{a}_A = \vec{a}_H$.

Considérons le repère R_C de centre C, repère barycentrique du ballon ; il est en translation dans \mathcal{R} .

Pour le point géométrique fixe $A \in R_C$: $\vec{V}_A = \vec{v}$, $\vec{a}_A = \vec{a} \Rightarrow \vec{V}_H = \vec{v}$ et $\vec{a}_H = \vec{a}$

b. G étant un point fixe de R_C a même propriété : $\vec{V}_G = \vec{v}$; $\vec{a}_G = \vec{a}$.

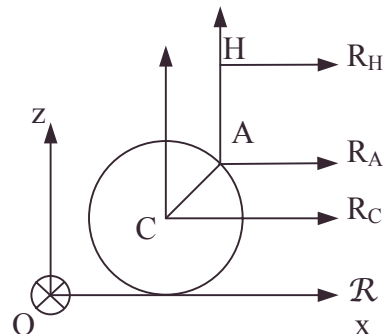
2. $\vec{V}_I = \vec{V}_C + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega} = \vec{0}$ avec $\vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{j} \Rightarrow \vec{v} - \dot{\phi} R \vec{i} = \vec{0}$ soit $v = R \dot{\phi}$.

3. Soit \vec{V}_I la vitesse de l'équilibriste par rapport à la surface du ballon en contact en A.

$\vec{V}_I = \vec{v} - \vec{V}(A \in \text{ballon} / \mathcal{R})$ car \vec{v} est la vitesse de tout point de l'équilibriste, A en particulier.

$$\text{Or, } \vec{V}(A \in \text{ballon} / \mathcal{R}) = \vec{V}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CA} = \vec{v} + v(\vec{i} \cos \alpha - \vec{k} \sin \alpha) \text{ car } \vec{CA} \begin{vmatrix} R \sin \alpha \\ 0 \\ R \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_I = v(-\vec{i} \cos \alpha + \vec{k} \sin \alpha).$$



4. On veut calculer : $J = \int_{\Sigma} (z^2 + x^2) dm$ or $\int_{\Sigma} x^2 dm = \int_{\Sigma} y^2 dm = \int_{\Sigma} z^2 dm$,

avec $dm = \sigma ds$.

De plus, $J_0 = \int_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dm = mR^2 = 3 \int_{\Sigma} x^2 dm = \frac{3}{2} J \Rightarrow J = \frac{2}{3} mR^2$.

5.a. $\vec{\sigma}_C(\text{ballon}/R_C) = J\vec{\Omega} = \frac{2}{3} mR^2 \dot{\phi} \vec{j} \Rightarrow \vec{\sigma}_C = \frac{2}{3} mRv \vec{j}$ vu $v = R \dot{\phi}$.

b. $\vec{\sigma}_I = \vec{\sigma}_C + \vec{IC} \wedge m\vec{v} = \frac{2}{3} mRv \vec{j} + mRv \vec{j} = \frac{5}{3} mRv \vec{j}$.

6.a. $\vec{\sigma}_H = \vec{\sigma}_H(\text{équilibrise}/R_H) = (J_H)(\vec{\Omega}(\text{équilibrise}/R_H)) = \vec{0}$.

$\vec{\sigma}'_I = \vec{\sigma}'_H + \vec{IH} \wedge M\vec{v}$ avec $\vec{IH} = R(\vec{i} \sin \alpha + \vec{k}(3 + \cos \alpha)) \Rightarrow \vec{\sigma}'_I = MRv(3 + \cos \alpha) \vec{j}$.

b. $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_I^{\text{total}} = \vec{\sigma}_I + \vec{\sigma}'_I = \left(\frac{5}{3} m + (3 + \cos \alpha) M \right) Rv \vec{j}$.

II.1. Dérivons $\vec{\Sigma}_P = \int \vec{PN} \wedge \vec{V}_N dm$; $\left(\frac{d\vec{\Sigma}_P}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \int \left(\frac{d\vec{PN}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_N dm + \int \vec{PN} \wedge \vec{a}_N dm$.

or, $\left(\frac{d\vec{PN}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d(\vec{ON} - \vec{OP})}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{V}_N - \vec{V}_P$;

$\int (\vec{V}_N - \vec{V}_P)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{V}_N dm = \int \vec{0} dm - \vec{V}_P \wedge \underbrace{\int \vec{V}_N dm}_{M_T \vec{V}_G}$;

$\left(\frac{d\vec{\Sigma}_P}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_P - \vec{V}_P \wedge \vec{M}_T \vec{V}_G$. ①

2.a. $\vec{V}_G = \vec{v}$ (cf. I.1.b.) ; si $I \in \text{ballon}$, $\vec{V}_I = \vec{V}_C + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega} = \vec{v} - R \dot{\phi} \vec{i}$.

b. vu 1. $\left(\frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_I - \underbrace{\vec{V}_I \wedge (m + M) \vec{V}}_0$
 \Rightarrow vu I.6.b. $\vec{M}_I = \left(\frac{5}{3} m + (3 + \cos \alpha) M \right) R \dot{\phi} \vec{j}$.

3.a. $\vec{\mathcal{M}}_I^{\text{contact en I}} = \vec{0}$; $\vec{\mathcal{M}}_I^{\text{poids ballon}} = \vec{0}$; $\vec{\mathcal{M}}_I^{\text{poids équilibrise}} = \vec{IH} \wedge M\vec{g} = MgR \sin \alpha \vec{j}$.

$\vec{M}_I = \vec{\mathcal{M}}_I^{\text{poids équilibrise}} + \vec{0} \Rightarrow a = \frac{Mg \sin \alpha}{\frac{5}{3} m + (3 + \cos \alpha) M}$.

b. AN : $a = 0,205 \text{ m.s}^{-2}$.

4.a. Utilisons le théorème du mouvement du centre de masse G :

$(m + M)\vec{a} = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$ soit en projection sur Ox : $(m + M)a = T_x$;
 sur Oy : $0 = -(m + M)g + N_y$.

$T_x = (m + M) \frac{Mg \sin \alpha}{\frac{5}{3} m + (3 + \cos \alpha) M}$ et $N_y = (m + M)g$;

AN : $T = 13,54 \text{ N}$; $N = 646,8 \text{ N}$.

b. Les valeurs de a , v_I , T_x , N étant constantes, tout demeure.

• loi de Coulomb, moment cinétique, moment d'inertie, projections, théorème du centre de masse, théorème du moment cinétique, théorème du mouvement du centre de masse

La résolution précédente permet de vérifier la loi : $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$.

En effet, $\frac{|T|}{|N|} = \frac{a}{g} = 0,021 < 0,2$; elle est donc valable à tout instant, y compris le cas particulier $t = 0$. Le fait d'imposer une contrainte sur le ballon par l'équilibriste, de mouvement défini, empêche la possibilité de glissement en I.

$$\text{5.a.}\alpha. \text{ cf. I.3. : } \|\vec{V}_I\| = \|\vec{v}\| ; \text{ or } v = at \Rightarrow \tau = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0 \left(\frac{5}{3}m + (3 + \cos \alpha)M \right)}{Mg \sin \alpha} ;$$

$$\text{AN : } v_0 = 2\text{m.s}^{-1} ; \tau = 9,756 \text{ s.}$$

$$\beta. L = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0 \left(\frac{5}{3}m + (3 + \cos \alpha)M \right)}{2Mg \sin \alpha} ; \text{ AN : } L = 9,75 \text{ m.}$$

γ . Après, l'équilibriste garde une vitesse v_0 par rapport à la surface du ballon ; α croît, a croît et la situation empire ; quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$ l'équilibriste perd le contact.

$$b. \frac{dE_c}{dt} = P_{\text{contact I}} + P_{\text{contact A}} + P_{\text{poids}} \text{ avec } P_{\text{poids}} = (m + M)\vec{g} \cdot \vec{V}_G = 0 \text{ car } \vec{g} \cdot \vec{v} = 0.$$

$$P_{\text{contact I}} = (\vec{T} + \vec{N}) \cdot \vec{V}_I = 0 ; P_u = P_{\text{contact A}} = \frac{dE_c}{dt} ;$$

$$\text{Or, } E_c = \frac{1}{2}Mv^2 + \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\Omega^2 \right) = \frac{1}{2} \left(M + \frac{5}{3}m \right) v^2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{5}{3}m \right) a^2 t^2$$

$$P_u = \left(M + \frac{5}{3}m \right) a^2 t = \left(M + \frac{5}{3}m \right) (Mg \sin \alpha)^2 \frac{t}{\left[\frac{5}{3}m + M(3 + \cos \alpha) \right]^2} ;$$

$$P_u = \left(M + \frac{5}{3}m \right) va \text{ dans les conditions définies.}$$

$$a \text{ est défini par } \alpha \text{ mais } v_{\max} = v_0 \Rightarrow P_{u \max} = \left(M + \frac{5}{3}m \right) v_0 a = \left(M + \frac{5}{3}m \right) \frac{V_0^2}{\tau}.$$

Il ne s'agit pas d'un maximum absolu qu'on pourrait trouver par dérivation.

$$\text{AN : } P_{u \max} = 28,7 \text{ W.}$$

III.1.a. Considérons l'ensemble ballon-équilibriste : les actions extérieures sont $M\vec{g}$ et $m\vec{g}$ en H et C, \vec{N} et \vec{T} (en I). Pour éliminer les forces inconnues \vec{N} et \vec{T} , écrivons le théorème du moment cinétique en I ;

$$\text{à l'équilibre } \frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} = \vec{0} = \vec{IC} \wedge m\vec{g} + \vec{IH} \wedge M\vec{g} = \vec{\mathcal{M}}_I^{\text{ext}} \text{ cf. format avant-dernière ligne.}$$

$$\text{or } \vec{g} = \begin{vmatrix} g \sin \beta \\ 0 \\ -g \cos \beta \end{vmatrix}_{\mathcal{R}'} \quad \vec{IC} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{vmatrix}_{\mathcal{R}'} \quad \vec{CA} = \begin{vmatrix} R \sin \alpha \\ 0 \\ R \cos \alpha \end{vmatrix}_{\mathcal{R}'} \quad \vec{AH'} = \begin{vmatrix} -2R \sin \beta \\ 0 \\ 2R \cos \beta \end{vmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

$$\vec{IH} = \vec{IC} + \vec{CA} + \vec{AH'} ;$$

$$\text{L'équation vectorielle donne : } \vec{\mathcal{M}}_I^{\text{ext}} = Rg[m \sin \beta + M \sin(\alpha + \beta) + M \sin \beta] \vec{j} = \vec{0}.$$

• équilibre, équilibriste, glissement, maximum, théorème de la puissance cinétique, théorème du moment cinétique

$$\alpha = -\beta - \arcsin\left(\frac{M+m}{M}\sin\beta\right).$$

b. Ecrivons l'équilibre du centre de masse de l'ensemble ballon-équilibriste,
 $\vec{0} = \vec{N} + \vec{T} + (M+m)\vec{g}$, soit $(N - (m+M)g\cos\beta)\vec{k} + (T + (m+M)g\sin\beta)\vec{i} = \vec{0}$;
 $N = (m+M)g\cos\beta$; $T = -(m+M)g\sin\beta$; le non-glissement impose $|T| \leq f|N|$;
 soit $\tan\beta \leq f$, soit $\beta \leq \arctan f$; AN : $\beta \leq 11^\circ 18'$.

c. AN : $\beta = 5^\circ$; $\alpha = -10^\circ 30'$.

2.a. Pour le ballon (cf. **I.5.b.**) : $\vec{\sigma}_I = \frac{5}{3}mRv\vec{j}$;

Pour l'équilibriste : $\vec{\sigma}_I = \vec{IH} \wedge Mv\vec{i} = M(1 + \cos\alpha + 2\cos\beta)Rv\vec{j}$;

Pour l'ensemble : $\vec{\sigma}_I = \left[\frac{5}{3}m + M(1 + \cos\alpha + 2\cos\beta) \right] Rv\vec{j}$;

On vérifie : si $\beta = 0$ (cf. **I.6.b.**) $\vec{\sigma} = \left[\frac{5m}{3} + M(3 + \cos\alpha) \right] Rv\vec{j}$.

b. Ecrivons comme en **II.2.b.** :

$$\frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} = \left[\frac{5}{3}m + M(1 + \cos\alpha + 2\cos\beta) \right] Ra\vec{j} ;$$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_I = \underbrace{\vec{M}_I^{\text{contact I}}}_{=0} + \vec{IC} \wedge m\vec{g} + \vec{IH} \wedge M\vec{g} \quad (\text{cf. III.1.a.}) ;$$

$$a = g \frac{m\sin\beta + M(\sin(\alpha + \beta) + \sin\beta)}{\frac{5}{3}m + M(1 + \cos\alpha + 2\cos\beta)}.$$

c.α. On vérifie $\beta = 0$; $a = \frac{Mg\sin\alpha}{\frac{5}{3}m + M(3 + \cos\alpha)}$.

β. On trouve : $m\sin\beta + M\sin(\alpha + \beta) + M\sin\beta = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

d.α. Pour $\alpha = \beta$; vu **b.** : $a = \frac{g(M+m)\sin\alpha + M\sin 2\alpha}{\frac{5}{3}m + M(1 + 3\cos\alpha)}$;

AN : $a = 0,636 \text{ m.s}^{-2}$.

β. $L = \frac{v_0^2}{2a}$ (cf. **II.5.a.**) ; AN : $L = 3,15 \text{ m}$.

$$L_{III} = \frac{v_0^2 \left[\frac{5}{3}m + M(1 + 3\cos\alpha) \right]}{2g[(m+M)\sin\alpha + M\sin 2\alpha]}.$$

$L_{III} < L_{II}$: la pente augmente l'accélération ;

3.a.α. $a < 0$ (pour créer un mouvement ascendant).

$$\Leftrightarrow m\sin\beta + M(\sin(\alpha + \beta) + \sin\beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha < -\beta - \arcsin\left(\frac{m+M}{M}\sin\beta\right) ;$$

AN : $\alpha \leq -10^\circ 30'$.

β. $\alpha = -15 < -10,5^\circ$ convient.

γ. AN : $a = -0,185 \text{ m.s}^{-2}$.

b.α. Le théorème du centre de masse pour l'ensemble ballon-équilibriste s'écrit :

$$(m + M)\vec{a} = (m + M)\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} \Rightarrow \begin{aligned} T_x &= (m + M)(a - g \sin \beta) ; \text{AN : } T_x = -68,57 \text{ N.} \\ N_y &= (m + M)g \cos \beta ; \quad N_y = 644,33 \text{ N.} \end{aligned}$$

$$\beta. \frac{|T|}{|N|} = \frac{|a - g \sin \beta|}{g \cos \beta} ; \text{AN : } \frac{|T|}{|N|} = 0,106 < 0,2 : \text{ le glissement ne peut s'amorcer car}$$

les valeurs demeurent constantes.

$$\text{c. cf. II.5.a.}\beta. : L'_{\text{III}} = \frac{v_0^2}{2|a|} ; \text{AN : } L'_{\text{III}} = 10,81 \text{ m.}$$

On voit l'effet de g qui permet de durer.

$$H' = \frac{v_0^2}{2|a|} \sin \beta ; \text{AN : } H' = 0,94 \text{ m.}$$

$$\text{d. } \frac{dE_c}{dt} = P_{\text{contact I}} + P_{\text{contact A}} + P_{\text{poids}} ; P_{\text{contact I}} = 0 ; P_{\text{contact A}} = P_u ;$$

$$P_{\text{poids}} = (m + M)\vec{g} \cdot \vec{V} \text{ avec } V < 0 \text{ vu } a < 0.$$

$$P_{\text{poids}} = (m + M)gv \sin \beta ; P_u = \frac{dE_c}{dt} - P_{\text{poids}} \text{ avec } E_c = \frac{1}{2}(M + \frac{5}{3}m)v^2 \text{ (cf. II.5.b.) ;}$$

$$P_u = \left(\frac{5}{3}m + M \right) va - (m + M)gv \sin \beta ;$$

$$P_{u \text{ max}} = \left(\left(\frac{5}{3}m + M \right) a - (m + M)g \sin \beta \right) v_0.$$

$$\text{A.N. : } P_{u \text{ max}} = 138,6 \text{ W.}$$

$$P_{u \text{ max III}} > P_{u \text{ max II}} \text{ car il faut monter.}$$

2.3.3. Véhicules

2.3.3.1. Roues de véhicule

Les parties **A.**, **B.**, **C.** et **D.** sont indépendantes.

Dans tout le problème, $R(Oxyz)$ ou simplement R , désigne le repère galiléen, d'origine O , d'axes Ox , Oy et Oz , de vecteurs unitaires respectifs \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . R est un repère trirectangle direct.

A. Une roue, d'axe de symétrie GZ , comprenant jante et pneumatique, est fixée à un câble sans raideur ni masse. G est le centre d'inertie de la roue, m est sa masse. On écarte légèrement la roue de sa position d'équilibre stable dans le champ de pesanteur, d'accélération g . On mesure la période T des petites oscillations. La distance $OG = L$ reste constante (Figure 1).

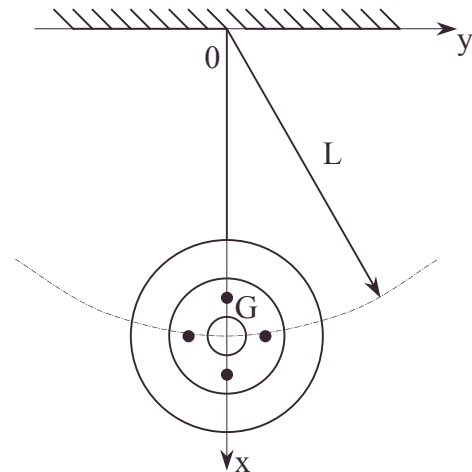


Figure 1

1. Calculer le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de symétrie GZ perpendiculaire au plan des petites oscillations, en fonction de T , m et L .

2. Calculer ce moment d'inertie sachant que :

$$T = 2,56 \text{ s} ; m = 12,5 \text{ kg} ; L = 1,5 \text{ m} ;$$

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}.$$

B. Une roue de rayon extérieur r (figure 2), roule sans glisser et sans pivoter sur le plan Oxy , dans la direction Ox .

Soit $\vec{V}(G/R, t) = V\vec{i}$ la vitesse absolue du centre d'inertie G de la roue, à l'instant t .

Soit $R_s(Gx_s yz_s)$ le repère trirectangle direct lié à la roue. On désigne par $\vec{\omega}(R_s/R, t) = \omega\vec{j}$

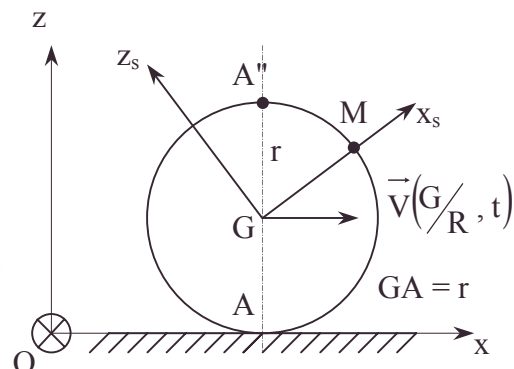


Figure 2

le vecteur vitesse instantané de rotation du repère R_s par rapport à R .

1.a. Exprimer une relation traduisant le roulement sans glissement du point A de la roue coïncidant avec le point géométrique de contact de la roue et du sol.

b. Exprimer la vitesse absolue du point A'' de la roue, diamétralement opposé au point A , à l'instant t , en fonction de $\vec{V}(G/R, t)$.

2.a. Etablir la relation entre les accélérations absolues \vec{a}_M et \vec{a}_N de deux points quelconques M et N d'un solide, dans le cas général d'un mouvement quelconque.

On exprimera $\vec{a}_M - \vec{a}_N$ en fonction de $\vec{\omega}$, $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ et \overline{NM} .

b. En déduire l'accélération absolue du point A , soit $\vec{a}(A/R, t)$, A étant le point de la roue coïncidant à l'instant t avec le point géométrique de contact de la roue et du sol, dans le cas $V = \text{cste}$.

c. Démontrer qu'à tout instant t , dans le cas où $V = \text{cste}$, le vecteur accélération absolue d'un point M de la circonférence de la roue est colinéaire au vecteur \overrightarrow{MG} .

3.a. Toujours dans ce cadre, θ désignant l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$, donner en fonction de r et θ la représentation paramétrique de la trajectoire du point M lorsque la roue roule sans glissement ni pivotement sur le sol. On supposera que le point M est à l'origine du temps et du mouvement confondu avec le point O .

b. Donner l'allure de la trajectoire de M .

C. L'ensemble des actions de contact du sol sur la roue est défini par le torseur exprimé au point A' : $\mathcal{T}_{A'}(\vec{F}_A, \vec{0})$. La résultante \vec{F}_A est dans le plan $Ox Oz$, telle que $(\vec{k}, \vec{F}_A) = \varphi$, φ étant constante.

La roue roule sans glisser sur l'axe Ox .

R_s désigne le repère lié à la roue, défini à la question B.

A' est le point lié à R_s , de coordonnées dans R_s à l'instant t , $(x_A + d, 0, 0)$. d est constant à partir du moment où il y a roulement.

1. A étant le point de la roue coïncidant avec le point géométrique de contact roue - sol, à l'instant t , définir en ce point le torseur des actions de contact du sol sur la roue.

2.a. En supposant que $|\vec{F}_A|$ est constante, exprimer le travail de l'action définie par $\mathcal{T}_{A'}$ lorsque le centre de la roue se déplace d'une distance a suivant Ox .

b. On donne $|\vec{F}_A| = 1000 \text{ N}$; $\varphi = 20^\circ$; $a = 100 \text{ m}$; $d = 0,04 \text{ m}$ et le rayon extérieur de la roue, $r = 0,30 \text{ m}$. Calculer ce travail.

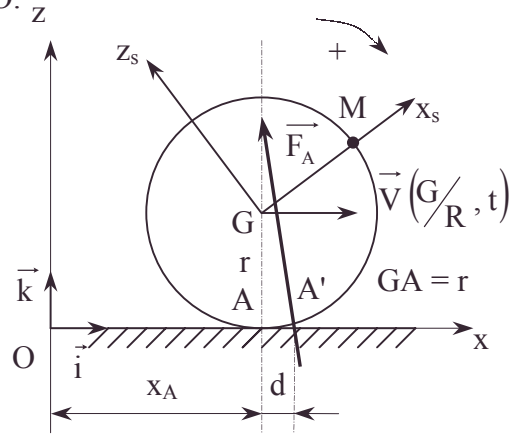


Figure 3

D. Un véhicule 4x4 équipé de quatre roues indépendantes roule dans le plan Oxy de R . Le roulement des roues sur le plan s'effectue sans glissement et sans pivotement au contact roues-sol. Soit r le rayon extérieur des quatre roues, soit $R_C(Cx_cy_cz)$ le repère trirectangle direct lié au véhicule, le plan Cx_cy_c étant parallèle au plan horizontal Oxy . Soient $(\vec{i}_c, \vec{j}_c, \vec{k})$ les vecteurs unitaires du repère R_C (figure 4).

Soit G_i le centre de gravité de la roue d'indice i ($i = 1, 2, 3, 4$) et soit $\alpha_i' \vec{u}_i$ le vecteur vitesse de rotation angulaire de la roue i , par rapport à son axe de révolution défini par le vecteur unitaire \vec{u}_i contenu dans le plan Cx_cy_c .

On définit les angles $(\vec{j}_c, \vec{u}_1) = \beta_1, (\vec{j}_c, \vec{u}_2) = \beta_2, (\vec{j}_c, \vec{u}_3) = (\vec{j}_c, \vec{u}_4) = 0$.

Soit $\vec{V}(C/R, t)$ la vitesse absolue du point C lié au véhicule, à l'instant t , telle que $\vec{V}(C/R, t) = V\vec{i}_c$, V étant constante.

Soit $\omega_c \vec{k}$ le vecteur vitesse de rotation instantanée de R_C par rapport à R , à l'instant t , ω_c étant constante.

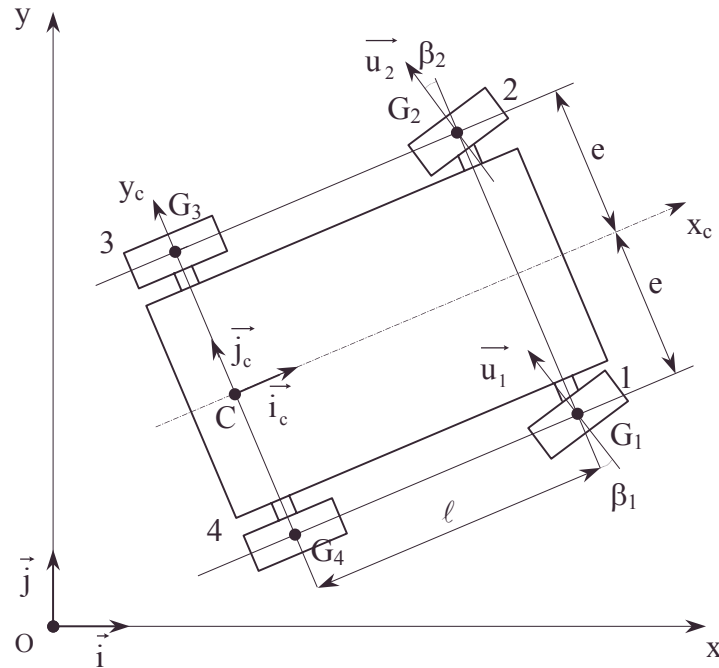


Figure 4

1. On désigne par $\vec{\omega}_i$ le vecteur vitesse de rotation instantanée d'un point de la roue d'indice i par rapport au repère R . Exprimer la relation entre $\vec{\omega}_i, \alpha'_i, \vec{u}_i, \frac{d\beta_i}{dt} \vec{k}$ et $\omega_c \vec{k}$.

2. I étant le centre instantané de rotation du véhicule, exprimer la vitesse $\vec{V}_i(G_i \in R_c/R, t)$ par rapport à R , d'un point G_i , attaché à R_c , et démontrer que chaque vecteur \vec{u}_i est colinéaire à $\vec{G_i I}$.

N.B. : A_i étant le point de la roue d'indice i , coïncidant à l'instant t , avec le point géométrique de contact de cette roue avec le sol, on pourra, au préalable, exprimer la relation entre la vitesse de A_i par rapport à R et la vitesse de G_i par rapport à R .

3.a. Exprimer la vitesse V définie ci-dessus en D , en fonction du rayon de braquage $\rho = IC$ et de ω_c .

b. En utilisant les relations trouvées à la question D.2. exprimer pour chaque roue d'indice i , les relations entre $\alpha'_i, \beta_i, \omega_c, \rho, \ell$ et e .

ℓ désigne la distance $G_1 G_4$ et e la distance $CG_3 = CG_4$.

c. On donne $r = 0,3 \text{ m}$; $V = 5 \text{ m/s}$; $\omega_c = 1 \text{ rd/s}$; $e = 0,7 \text{ m}$; $\ell = 2,7 \text{ m}$. Calculer les α'_i et β_i .

4. Les angles de braquage β_i et la vitesse V étant constants, calculer la vitesse angulaire de pivotement des roues.

Autres concours ; Durée : 2h30

Corrigé

A.1. La roue est fixée complètement par rapport au câble (sans masse) et constitue avec le câble un solide unique de vecteur instantané de rotation $\dot{\theta} \vec{Z}$.

Appliquons la conservation de l'énergie mécanique à ce problème à un degré de liberté θ .

• centre instantané de rotation, pivotement, roue

$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta = \text{cste}$ d'où : $(J + mL^2)\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0$, et pour les faibles oscillations : $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ avec $\omega^2 = \frac{mgL}{J + mL^2}$, ou encore $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J + mL^2}$,

$$\Rightarrow J = mL \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right).$$

2. AN : $J = 2,41 \text{ kg.m}^{-2}$.

B.1. Vu le sens trigonométrique dans le plan Oxz, on a d'après la figure 2 :

$$\vec{\omega} = -\vec{j} \frac{d\theta}{dt} = +\vec{j} \omega \text{ avec } \omega = -\dot{\theta} = -\frac{d\theta}{dt}.$$

a. $\vec{v}_A = \vec{0} = \vec{v}_G + \vec{AG} \wedge \vec{\omega} = (V - r\omega)\vec{i} \Rightarrow V - r\omega = 0$

b. $\vec{v}_{A''} = \vec{v}_G + \vec{A''G} \wedge \vec{\omega} = (V + r\omega)\vec{i} = 2r\omega\vec{i} = 2\vec{V}.$

2.a. $\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{MN} \wedge \vec{\omega} \Rightarrow \vec{a}_M = \vec{a}_N + (\vec{v}_N - \vec{v}_M) \wedge \vec{\omega} + \vec{MN} \wedge \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R$

or $\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{\omega} \wedge \vec{NM}$; $\vec{a}_M - \vec{a}_N = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{NM}) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R \wedge \vec{NM}.$

b. Prenons M en A et N en G ;

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GA}) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R \wedge \vec{GA} = \vec{a}_G + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{GA})}_{\vec{0}} \vec{\omega} - \omega^2 \vec{GA} - \frac{d\omega}{dt} r \vec{i}$$

Or cf. **B.1.a.** $\dot{V} = r \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a}_A = -\omega^2 \vec{GA}.$

c. Si $V = K$, $\dot{V} = 0 = r \frac{d\omega}{dt}$; or $\vec{a}_M = \underbrace{\vec{a}_G}_{\vec{0}} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{GM})}_{\vec{0}} \omega - \omega^2 \vec{GM} + \vec{0} = \omega^2 \vec{MG}.$

3.a. $\vec{v}_M = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GM} ;$

$$\vec{v}_M = V\vec{i} - r\omega \cos\theta \vec{i} - r\omega \sin\theta \vec{k} \text{ avec } \omega = -\frac{d\theta}{dt} ; V = -r \frac{d\theta}{dt}.$$

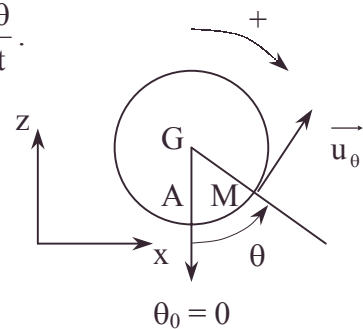
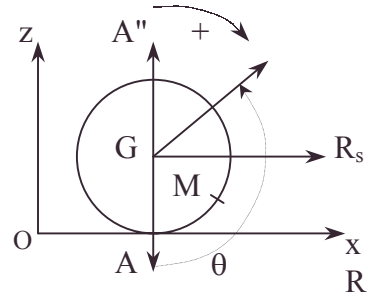
$$\vec{OM} = \int \vec{v}_M dt = -r\theta \vec{i} + r \sin\theta \vec{i} + \vec{0} \vec{i} (-r \cos\theta + c) \vec{k} ;$$

c est déterminé pour que $\vec{OM} = \vec{0}$ à $\theta = 0$, cf. $t = 0$.

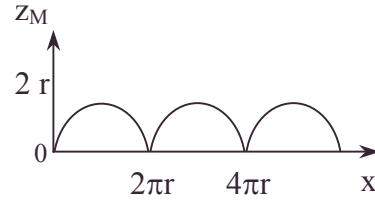
$$\vec{OM} \begin{vmatrix} -r(\theta - \sin\theta) \\ 0 \\ r(1 - \cos\theta) \end{vmatrix} ;$$

équation paramétrique d'une cycloïde paramétrée par θ

Remarque : l'intégration de $V + r\dot{\theta} = 0$ donne $x_G = -r\theta = r\omega t$.



$$\mathbf{b.} \quad \overrightarrow{OM} \begin{cases} x_G - r \sin \frac{x_G}{r} \\ 0 \\ r(1 - \cos \frac{x_G}{r}) \end{cases}, \text{ c'est-à-dire :}$$



équation paramétrique d'une cycloïde (ici, paramètre x_G).

C.1. $\mathcal{T}_A[\vec{F}_A, \vec{AA'} \wedge \vec{F}_A]$: la résultante du "glisseur" reste identique : $\vec{R} = \vec{F}_A$.

Le champ de moment est tel que $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_{A'} + \vec{AA'} \wedge \vec{R}$ avec $\vec{\mathcal{M}}_{A'} = \vec{0}$.

2.a. Le torseur cinétique de la roue est $\mathcal{T}_{IG}[\vec{\omega}, \vec{V}_G]$; $V - r\omega = 0$ vu le roulement sans glissement.

La puissance de l'action de contact s'exprime : $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{V}_A + \vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{\omega}$.

$$\mathcal{P} = 0 + (\vec{AA'} \wedge \vec{F}_A) \cdot \vec{\omega} = -|\vec{F}_A| \cos \varphi \omega \, d \Rightarrow W = \int_0^t \mathcal{P} dt = -|\vec{F}_A| \cos \varphi \omega \frac{a}{V} d.$$

$$W = -|\vec{F}_A| \cos \varphi \frac{a}{r} d.$$

b. AN : $W = -12529 \text{ J}$.

D. Nommons R_i le repère lié à la roue i .

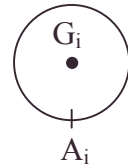
On a $\vec{\omega}_i(\vec{R}_i / \vec{R}) = \vec{\omega}(\vec{R}_i / \vec{R}_C) + \vec{\omega}(\vec{R}_C / \vec{R}) = \left(\alpha'_i \vec{u}_i + \frac{d\beta_i}{dt} \vec{k} \right) + \omega_c \vec{k} = \vec{\omega}_i$, vu la loi de composition des vitesses angulaires.

2.● D'après la cinématique du mouvement plan sur plan, I , centre instantané de rotation, est un point de vitesse nulle.

$$\vec{V}(G_i) = \underbrace{\vec{V}(I)}_0 + \vec{G_i I} \wedge \vec{\omega}_c \quad [1]; \text{ } I \text{ et } A_i \text{ étant des points de vitesse nulle de } R_C.$$

$$\bullet \text{ Pour la roue } R_i : \vec{V}(G_i) = \underbrace{\vec{V}(A_i)}_0 + \vec{G_i A_i} \wedge \vec{\omega}_i = -r \vec{k} \wedge \alpha'_i \vec{u}_i \quad [2].$$

$$\bullet \text{ Faisons } [1] - [2] : \vec{0} = \underbrace{(\vec{G_i I} \omega_c - r \alpha'_i \vec{u}_i)}_{\text{vecteur orthogonal à } \vec{k}} \wedge \vec{k} \Rightarrow r \alpha'_i \vec{u}_i = \omega_c \vec{G_i I}, \text{ c.q.f.d.}$$



$$\mathbf{3.a.\alpha.} \quad \vec{V}(C) = \underbrace{\vec{V}(I)}_0 + \vec{CI} \wedge \vec{\omega}_c \quad (I \text{ et } C \text{ sont des points de } R_C) \text{ avec } \vec{CI} = \vec{CG_3} + \vec{G_3 I}.$$

$$\text{Or } \vec{CG_3} = e \vec{j}_c \text{ et d'après } \mathbf{2.}, \vec{G_3 I} = r \alpha'_3 \frac{\vec{u}_3}{\omega_c} = r \frac{\alpha'_3}{\omega_c} \vec{j}_c \Rightarrow \vec{CI} \wedge \omega_c \vec{k} // \vec{i}_c.$$

$$\text{On a bien } \vec{V}(C) = V \vec{i}_c.$$

$$\mathbf{\beta.} \text{ Posons } \vec{CI} = \rho \vec{j}_c; \text{ d'après } \mathbf{\alpha.} \quad \vec{V}(C) = \rho \vec{j}_c \wedge \omega_c \vec{k} = \rho \omega_c \vec{i}_c \Rightarrow V = \rho \omega_c.$$

ρ est algébrique :

b.

$$\vec{G_i I} = \vec{CI} - \vec{CG_i}; \vec{CI} \begin{vmatrix} 0 \\ \rho; \vec{CG_i} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_C} \begin{vmatrix} \ell \\ -e; \vec{CG_2} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_C} \begin{vmatrix} \ell \\ +e; \vec{CG_3} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_C} \begin{vmatrix} 0 \\ e; \vec{CG_4} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_C} \begin{vmatrix} 0 \\ -e; \vec{u_i} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_C} \begin{vmatrix} -\sin \beta_i \\ \cos \beta_i \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{N.B. : } \beta_3 = \beta_4 = 0.$$

- centre instantané de rotation, champ de moment, composition des vecteurs instantanés de rotation, cycloïde, glisseur, roue, roulement sans glissement, torseur

Projetons $r\alpha'_i \vec{u}_i = \omega_c (\vec{CI} - \vec{CG}_i)$; on obtient :

$$\begin{array}{l} \alpha'_1 r \sin \beta_1 = \omega_c \ell \quad \left| \quad \alpha'_1 r \cos \beta_1 = \omega_c (\rho + e) \quad \right| \quad r\alpha'_3 = \omega_c (\rho - e). \\ \alpha'_2 r \sin \beta_2 = \omega_c \ell \quad \left| \quad \alpha'_2 r \cos \beta_2 = \omega_c (\rho - e) \quad \right| \quad r\alpha'_4 = \omega_c (\rho + e). \end{array}$$

c. Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\rho = \frac{V}{\omega_c}$, éliminons $\cos x$ et $\sin x$:

$$\pm \alpha'_1 = \frac{\omega_c}{r} \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{V}{\omega_c} + e \right)^2} ; \pm \alpha'_2 = \frac{\omega_c}{r} \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{V}{\omega_c} - e \right)^2} ;$$

$$\beta_1 = \arctan \frac{\ell}{\frac{V}{\omega_c} + e} ; \beta_2 = \arctan \frac{\ell}{\frac{V}{\omega_c} - e}$$

$$\text{AN : } \alpha'_1 = 21,0 \text{ rad.s}^{-1} ; \alpha'_2 = 16,9 \text{ rad.s}^{-1} ; \alpha'_3 = 14,3 \text{ rad.s}^{-1} ; \alpha'_4 = 19,0 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\beta_1 = 25,3^\circ ; \beta_2 = 32,1^\circ.$$

Toutes les valeurs sont différentes.

4. La vitesse angulaire de pivotement est orthogonale au plan Oxy :

$$\vec{\omega}_{pi} = \vec{k} (\vec{\omega}_i \cdot \vec{k}) = \left(\frac{d\beta_i}{dt} + \omega_c \right) \vec{k} ; \text{ on a ici } \vec{\omega}_{pi} = \omega_c \vec{k} \quad \forall i \text{ si } \beta_i = \text{cste.}$$

2.3.3.2. Freinage et accélération d'une automobile

Une automobile a une masse totale M . Chacune des quatre roues a une masse m et un moment d'inertie I par rapport à son axe de rotation et un rayon r . On notera \vec{T}_1 la composante tangentielle de la résultante des actions de contact du sol sur une roue avant et \vec{N}_1 la composante normale au sol, \vec{T}_2 et \vec{N}_2 les composantes de la résultante des forces de contact du sol sur une roue arrière ; v la vitesse de l'automobile et ω la vitesse angulaire d'une roue.

A. Freinage d'une automobile en ligne droite horizontale

On considère le mouvement rectiligne horizontal d'une automobile ; soit v_0 la norme de sa vitesse au début du freinage. On admet dans cette partie que le poids est également réparti sur les roues et que les quatre freins agissent de manière identique. Soit f le coefficient de frottement de glissement. On maintient les roues à la limite de l'adhérence, c'est-à-dire à la limite du glissement.

1. On néglige tout d'abord la résistance de l'air et l'inertie des roues.

1. Calculer la décélération.

On donne $f = 0,6$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $M = 1200 \text{ kg}$; $v_0 = 100 \text{ km.h}^{-1}$.

2. Etablir alors l'expression de la distance d'arrêt.

2. On néglige toujours l'inertie des roues mais on tient compte de la résistance de l'air qui a une action équivalente à un glisseur de freinage en kv^2 .

1. Ecrire l'équation différentielle du 1^{er} ordre du mouvement du centre d'inertie G de l'automobile.

2. Appelant x la distance parcourue depuis le début du freinage, établir l'équation différentielle donnant v^2 en fonction de x .

3. Etablir l'expression de la distance d'arrêt. On donne $k = 0,444 \text{ N.m}^{-2}.\text{s}^2$.

4. Comparer les ordres de grandeur des forces de freinage. Conclure.

• adhérence limite, centre d'inertie, coefficient de frottement, distance d'arrêt, freinage, glissement, glisseur, moment d'inertie, résistance à l'air, roue

3. On considère la résistance de l'air et on ne néglige plus l'inertie des roues.

1. Ecrire la condition de roulement sans glissement d'une roue sous forme d'une relation simple entre v , ω et r .

2. Calculer l'énergie cinétique du véhicule muni de ses roues en fonction de v , M , I , r .

3. Etablir l'expression de la distance d'arrêt ; A.N. : $I = 0,766 \text{ kg.m}^2$; $r = 0,35 \text{ m}$. Conclure.

B. Montée de l'automobile le long d'un plan incliné

L'automobile précédente monte suivant une ligne de plus grande pente un plan incliné P faisant un angle θ avec l'horizontale. L'air exerce un torseur de forces équivalentes à un glisseur de résultante \vec{R} (de forme déjà citée en A.2.) et de moment par rapport à un point C nul ; la distance de C au plan incliné P est ℓ . Le centre d'inertie G est distant de h du plan P ; sa projection sur P est distante des projections sur P des essieux avant et arrière de a et b respectivement.

1.1. Ecrire l'équation du mouvement du centre d'inertie G.

2. Calculer $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$ en fonction de M , g et θ .

3. Calculer \vec{N}_1 et \vec{N}_2 en fonction de V , M , θ , a , b , ℓ , h et k quand la vitesse est maintenue constante.

A.N. : $\theta = 10^\circ$; $M = 1200 \text{ kg}$; $a = b = 2 \text{ m}$; $\ell = 0,85 \text{ m}$; $h = 0,65 \text{ m}$; $k = 0,444 \text{ N.m}^{-2} \cdot \text{s}^2$.

4. Pour quelle valeur de v les roues avant pourraient-elles se soulever (à v constante)?

2. Les roues avant sont motrices. Soit C_m le couple moteur subi par chaque roue motrice. D'autre part, chaque roue (motrice ou non) subit un couple résistant aux roulements (supplémentaire) $C' = (\alpha + \beta v^\gamma) N.r$; N est la composante normale de la réaction du sol sur la roue concernée ; α , β , γ des constantes issues de l'expérience.

On donne : $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-2}$; $\beta = 3 \cdot 10^{-4}$; $\gamma = 1,1$ (dans le système d'unités internationales).

1. Calculer la puissance P_1 liée à \vec{R} en fonction de k , v .

A.N. : $k = 0,444 \text{ N.m}^{-2} \cdot \text{s}^2$; $v = 140 \text{ km.h}^{-1}$; $\theta = 10^\circ$.

2. Calculer la puissance P_2 liée au couple résistant C' en fonction de M , g , θ , α , β , γ et v .

3. Calculer la puissance P_3 liée aux forces de pesanteur en fonction de M , g , θ , v .

4. Calculer la puissance P_4 liée au couple moteur en fonction de C_m , v et r .

5. En déduire l'équation du mouvement.

6. Quelle est l'équation donnant la vitesse limite maximale ? On considérera C_m dépendant de v .

3. On donne la puissance liée au couple moteur comme une fonction de v fournie expérimentalement.

$P_4 = 34,94(v - 3,83)(72,83 - v)$, v en m.s^{-1} et P_4 en watts.

On donne $M = 1200 \text{ kg}$; $I = 0,766 \text{ kg.m}^2$; $k = 0,444 \text{ kg.m}^{-1}$.

I. La voiture roule sur un sol horizontal : $\theta = 0$.

1. Calculer la vitesse limite maximale.

2. Faire le bilan des diverses puissances mises en jeu.

3. Calculer la réserve de puissance non utilisée quand $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$. En déduire l'accélération de l'automobile.

4. Calculer T_1 et T_2 quand on considère que l'essieu avant porte 60% de la charge. Préciser les vecteurs.

• centre d'inertie, couple résistant de roulement, distance d'arrêt, énergie cinétique, glisseur, maximum, P.F.D., projections, réserve de puissance d'une automobile, résistance à l'air, roue, roulement sans glissement, torseur

5. Calculer à nouveau l'accélération en utilisant le théorème du centre d'inertie.

6. Déterminer le coefficient de frottement de glissement en dessous duquel il n'est plus possible de faire rouler les roues de devant. Conclusion pratique.

II. L'automobile roule sur un plan incliné tel que $\tan \theta = 0,05$.

1. Calculer la vitesse limite maximale.

2. $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$; calculer la réserve de puissance non utilisée et en déduire l'accélération possible. Conclusion.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

A.1.1. $M\vec{a} = 4\vec{T} + 4\vec{N} + M\vec{g}$; $T = -f N$; $4N = Mg$.

$Ma_x = 4T = -4f N = -f Mg$; $a_x = -f g$; A.N. : $a_x = -5,89 \text{ m.s}^{-2}$.

2. Le théorème de l'énergie cinétique donne : $d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = -f Mg dx$.

$v^2 - v_0^2 = -fg(x - x_0)$; à l'arrêt, $v = 0 \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2fg}$; A.N. : $d = 65,5 \text{ m}$.

2.1. $Ma_x = 4T - kv^2$; $T = -f N$; $4N = Mg$.

2. Le théorème de l'énergie cinétique donne : $d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = -(f Mg + kv^2)dx$.

Posons $y = v^2$; $\frac{dy}{y + f \frac{Mg}{k}} = -2 \frac{k}{M} dx$.

3. Intégrons : $d = \frac{M}{2k} \ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{f Mg}\right)$; A.N. : $d = 63,88 \text{ m}$.

4. $4T = -5886 \text{ N}$ constant

$kv_0^2 = 309 \text{ N}$ augmente avec la vitesse mais reste faible ;

l'action de freinage de l'air modifie peu d.

3.1. $v = \omega r$.

2. $E_c = \frac{1}{2}(M - 4m)v^2 + 4\left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right] = \frac{1}{2}Mv^2 + 2I\omega^2$.

$E_c = \frac{1}{2}\left(M + \frac{4I}{r^2}\right)v^2$.

3. $dE_c = -(f Mg + kv^2)dx$ et avec $y = v^2$.

$\frac{dy}{y + \frac{f Mg}{k}} = -\frac{2k}{M + \frac{4I}{r^2}} dx \Rightarrow d = \frac{M + \frac{4I}{r^2}}{2k} \ln\left(1 + \frac{kv_0^2}{f Mg}\right)$; A.N. : $d = 65,3 \text{ m}$; l'importance

des roues augmente logiquement d.

B.1.1. $M\vec{a} = 2(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) + 2(\vec{N}_1 + \vec{N}_2) + M\vec{g} + \vec{R}$.

2. En projetant sur la normale à P : $2(N_1 + N_2) = Mg \cos \theta$.

3. Calculons un moment par le produit force . bras de levier affecté du signe qui fait tourner ou non dans le sens trigonométrique. Ecrivons que le moment des forces

appliquées par rapport à un axe horizontal du plan est nul au point milieu des points de contact des roues avant :

$$2N_2(a+b) = R\ell + Mg(a \cos \theta + h \sin \theta).$$

$$N_2 = \frac{kv^2\ell + Mg(a \cos \theta + h \sin \theta)}{2(a+b)}; \text{ A.N. : } N_2 = 3064 + 0,047 v^2.$$

De même à l'arrière :

$$2N_1(a+b) = -R\ell + Mg(b \cos \theta - h \sin \theta).$$

$$N_1 = \frac{-k\ell v^2 + Mg(b \cos \theta - h \sin \theta)}{2(a+b)};$$

$$\text{A.N. : } N_1 = 2732 - 0,047 v^2.$$

4. Le cas limite est $N_1 = 0$ ce qui a lieu pour :

$$v^2 = \frac{Mg(b \cos \theta - h \sin \theta)}{2(a+b)k\ell}. \text{ A.N. : } v = 868 \text{ km.h}^{-1}$$

$$2.1. P_1 = Rv = kv^3; P_1 = 26137 \text{ W}.$$

$$2. P_2 = 2C_1'\omega + 2C_2'\omega = 2\omega r(\alpha + \beta V^\gamma)(N_1 + N_2).$$

$P_2 = (\alpha + \beta V^\gamma)Mg v \cos \theta$; $P_2 = 12995 \text{ W}$ ce qui n'est pas négligeable bien que souvent omis.

$$3. P_3 = Mg v \sin \theta ; P_3 = 79478 \text{ W}.$$

$$4. P_4 = 2C_m\omega = 2C_m \frac{v}{r} ; P_4 \text{ dépend de } v.$$

$$5. \frac{dE_c}{dt} = P_4 - P_3 - P_2 - P_1.$$

$$\left(M + \frac{4I}{r^2}\right)v \frac{dv}{dt} = 2C_m \frac{v}{r} - kv^3 - Mg v (\sin \theta + (\alpha + \beta V^\gamma) \cos \theta).$$

$$6. \frac{dv}{dt} = 0 \text{ donne une équation à résoudre en } v \text{ connaissant } C_m(v).$$

$$7. C_m = \frac{r}{2} [kv^2 + Mg (\sin \theta + (\alpha + \beta V^\gamma) \cos \theta)]$$

$$\text{si } v_{\max} \text{ est connue } C_{m_{\max}} = \frac{r}{2} [kv_{\max}^2 + Mg (\sin \theta + (\alpha + \beta V^\gamma) \cos \theta)].$$

$$3.1.1. 0 = P_4 - P_3 - P_2 - P_1 ;$$

$$0 = 34,94(V - 3,83)(72,83 - V) - 0,444V^3 - 1200,9,81V(1,2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} V^{1,1})$$

La résolution graphique donne : $v_{\max} = 143 \text{ km.h}^{-1}$.

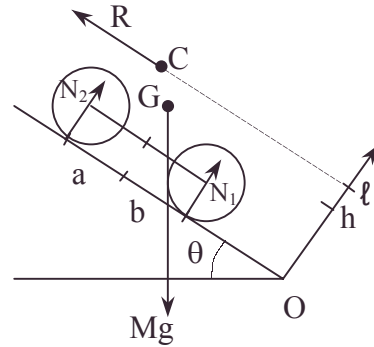
$$2. P_1 = 27870 \text{ W} ; P_2 = 13664 \text{ W} ; P_3 = 0 ; P_4 = 41519 \text{ W} ; P_4 = P_1 + P_2.$$

$$3.1. P_4 = 37691 \text{ W} ; P_1 + P_2 + P_3 = 17247 \text{ W} ; P_4 - P_1 - P_2 - P_3 = 20444 \text{ W}.$$

$$2. \text{ Vu } 2.5. \frac{dv}{dt} = \frac{P_4 - P_1 - P_2 - P_3}{v \left(M + \frac{4I}{r^2} \right)} ; \text{ A.N. : } \frac{dv}{dt} = 0,6 \text{ m.s}^{-2}$$

$$4. \omega = \frac{v}{r} = 79,36 \text{ rad.s}^{-1} ; \dot{\omega} = \frac{dv}{r dt} = 1,717 \text{ rad.s}^{-2} ;$$

$$C_m = \frac{P_4}{2\omega} ; \text{ A.N. : } C_m = 237,46 \text{ N.m.}$$



Le théorème du moment cinétique donne :

- Pour la roue avant : $I\dot{\omega} = C_m - C'_1 - rT_1$,
avec $C'_1 = (\alpha + \beta V^2) r N_1$ avec $N_1 = \frac{60}{100} \frac{M}{2} g$; $C'_1 = 29,194 \text{ N.m}$.
 $T_1 = \frac{1}{r} [C_m - C'_1 - I\dot{\omega}]$; A.N. : $T_1 = 591,3 \text{ N}$. On voit le rôle tracteur des roues avant.

- Pour la roue arrière : $I\dot{\omega} = -C'_2 - rT_2$.
 $T_2 = -\frac{1}{r} (C'_2 + I\dot{\omega})$; A.N. : $T_2 = -59,5 \text{ N}$. Le signe – montre l'absence de moteur.

5. $Ma = -kv^2 + T_1 + T_2$; A.N. : $a = 0,6 \text{ m.s}^{-2}$.

6. La condition de non glissement s'écrit : $|T_1| \leq f |N_1|$.

$f_\ell = \frac{T_1}{N_1}$; A.N. : $f_\ell = 0,167$ (cas d'une route légèrement givrée).

Si $f_\ell \leq 0,167$ il faut diminuer T_1 sur une route glissante ; mais pour la tenue de route, certains au lieu de diminuer C_m et P_4 agissent en augmentant $\dot{\omega}$ (ce qui est plus "sportif") ou C' (pneus spéciaux).

2.1. $\theta = 2,86^\circ$; on a :

$$0 = 34,94(V - 3,83)(72,83 - V) - 0,444V^3 - 1200.9,81V(0,05 + (1,2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-4} V^{1,1}))$$

résolution graphique : $v_{\max} = 109,8 \text{ km.h}^{-1}$;

2. $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$; $P_4 = 37691 \text{ W}$; $P_1 + P_2 + P_3 = 33562 \text{ W}$;

$P_4 - P_1 - P_2 - P_3 = 4129 \text{ W}$.

$\frac{dv}{dt} = \frac{P_4 - P_1 - P_2 - P_3}{\left(M + \frac{4I}{r^2}\right)v} = 0,121 \text{ m.s}^{-2}$. On voit la diminution de puissance et

d'accélération dues à une pente même faible.

En cas de réserve de puissance faible, l'accélération reste faible.

On est près de la vitesse maximum.

2.3.3.3. Mouvement de charges sur une plate-forme lors d'un freinage

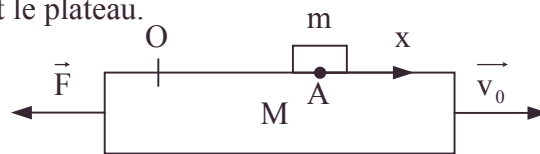
A. Un plateau horizontal P de masse M se déplace sans frottement sur un support horizontal fixe, et est animé d'un mouvement de translation uniforme de vitesse \vec{v}_0 . Un bloc de masse m, assimilable à un point matériel A, est posé sur le plateau et est immobile par rapport à celui-ci. A l'instant $t = 0$, on applique au plateau une force de freinage F, constante et uniquement passive, horizontale ; c'est-à-dire que cette force \vec{F} , de même direction, et de sens contraire à la vitesse \vec{v} du plateau, ne s'exerce que lorsque la vitesse du plateau n'est pas nulle. Lorsque \vec{v} devient nulle, le plateau reste définitivement immobile. O étant un point fixe du plateau, on note x l'abscisse du point matériel par rapport au plateau, Ox étant colinéaire à \vec{v}_0 et de même sens.

• couple résistant au roulement, freinage, loi de Coulomb, maximum, mouvement sans frottement, réserve de puissance d'une automobile, roue, roulement sans glissement, solution graphique, théorème du moment cinétique

On notera $F = |\vec{F}|$.

1. On néglige les frottements entre le bloc et le plateau.

Etudier le mouvement relatif du bloc par rapport au plateau. On déterminera l'instant t_1 où le plateau s'immobilise définitivement, et on donnera l'expression de $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ avant



et après l'arrêt du plateau.

Dans les quatre questions qui suivent, on tient compte du frottement solide de glissement entre le bloc et le plateau.

2. Soit f le coefficient de frottement de glissement, supposé prendre la même valeur qu'il y ait ou non glissement du bloc sur le plateau.

Etudier le mouvement relatif du bloc par rapport au plateau : $\dot{x} = \dot{x}(t)$. On déterminera l'instant t_1 où le plateau s'arrête, et l'instant t_2 où le bloc s'arrête définitivement.

3. Calculer directement t_2 par application du théorème de l'énergie cinétique.

4. Application numérique : déterminer t_1 et t_2 , tracer $\dot{x} = \dot{x}(t)$ lorsque $M = m$, $f = 0,5$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $f g = \frac{v_0}{10}$ (numériquement), dans les 2 cas suivants :

$$\mathbf{a} : F = (M + m) g ; \mathbf{b} : F = (M + m) \frac{g}{10}.$$

5. Le bloc m est maintenant soumis à une force de rappel de la part du point O, $\vec{F}_1 = -k\vec{OA}$ (k constante > 0). Le plateau a toujours le mouvement uniforme \vec{v}_0 , le bloc étant immobile par rapport au plateau avec $x = 0$. On exerce brutalement une force \vec{F} très importante, passive, si bien que le plateau est immobilisé au bout d'un temps négligeable, le bloc n'ayant subi, pendant la durée où s'exerce la force \vec{F} , qu'un déplacement négligeable. Par contre, il a acquis la vitesse \vec{v}_0 . Donc à $t = 0$, instant où \vec{F} ne s'exerce plus, on a $x = 0, \dot{x} = v_0$.

Etudier le mouvement ultérieur du bloc dans le cas où $v_0 = fg \sqrt{\frac{m}{k}}$.

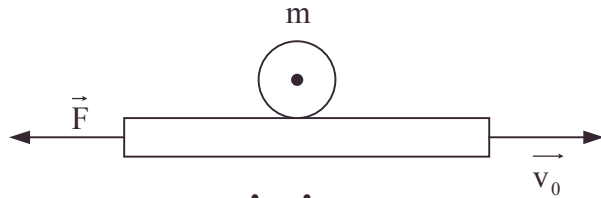
A quel instant et pour quelle abscisse x_e obtient-on la position d'équilibre ?

B. Le bloc précédent est remplacé par un cylindre homogène de masse m et de rayon de base r de moment d'inertie J autour de C_z : $J = \frac{1}{2}mr^2$. Le coefficient de frottement de glissement du cylindre sur le plateau sera appelé f (et aura la même valeur qu'il y ait roulement avec ou sans glissement). Le plateau est en translation uniforme \vec{v}_0 , le cylindre étant posé sur le plateau (et en équilibre relatif par rapport au plateau) lorsque à $t = 0$, on applique au plateau la force passive \vec{F} constante, de freinage.

1. Etudier le mouvement relatif du cylindre par rapport au plateau, en supposant qu'il y a roulement sans glissement. On déterminera l'instant t_1 où le plateau s'immobilise, et on donnera $\dot{x} = \dot{x}(t)$ avant et après l'arrêt du plateau.

A quelle condition l'hypothèse du roulement sans glissement est-elle acceptable ?

2. Le mouvement relatif du cylindre par rapport au plateau est un mouvement de roulement avec glissement.



Déterminer l'instant t_1 où le plateau s'immobilise, donner $\dot{x} = \dot{x}(t)$ avant et après l'arrêt du plateau. Calculer la vitesse de glissement.

A quelle condition l'hypothèse du roulement avec glissement est-elle acceptable ?

3. Application numérique : $M = m$; $v_0 = 30 \text{ fg}$ (numériquement) ; $F = 5mfg$.

Calculer t_1 et tracer $\dot{x} = \dot{x}(t)$. On calculera au préalable \dot{x} en fonction de t et de v_0 .

Autres concours ; durée : 3h

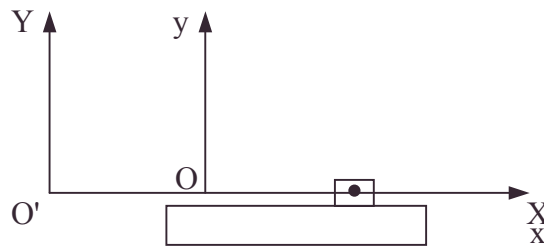
Corrigé

A.1.a. Choix des repères :

absolu : $O'XYZ$;

relatif : $Oxyz$.

$\vec{F} = -F\vec{x}$ tant que $\vec{v} \cdot \vec{x} > 0$.



b. Appliquons le théorème du centre de masse dans le repère relatif pour le bloc m .

$m\ddot{x} = m\vec{g} + \vec{R}_{M \rightarrow m} + \vec{F}_{\text{inertie}}$; x abscisse du centre de masse m .

c. On néglige le frottement : $\vec{R}_{M \rightarrow m} \cdot \vec{x} = 0$.

d. $\vec{F}_{\text{Inertie}} = -m(\vec{a}_e + \vec{0})$. (La force de Coriolis est nulle : $\vec{\Omega} = \vec{0}$).

$\vec{F}_{\text{Inertie}} = -m\ddot{X}\vec{x}$; X abscisse du centre de masse M dans $O'XYZ$.

e. Déterminons \ddot{X} en écrivant le théorème du centre de masse pour le plateau M , dans le repère absolu : $M\ddot{X} = -\vec{R}_{M \rightarrow m} + \vec{F} + \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow M}$.

f. Avant l'arrêt du plateau, projetons sur l'axe des x : $m\ddot{x} = -m\ddot{X}$; $M\ddot{X} = -F$;

On a : $\ddot{x} = \frac{F}{M} \Rightarrow \dot{x} = \frac{Ft}{M} + 0$; $x = \frac{1}{2}Ft^2 + x_0$, F étant le module de \vec{F} jusqu'à l'arrêt.

g. Déterminons l'instant t_1 de l'arrêt du plateau :

$M\ddot{X} = -F \Rightarrow \dot{X} = -\frac{Ft}{M} + v_0$; $\dot{X} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 M}{F}$.

h. Après l'arrêt du plateau, le théorème du centre de masse du bloc m s'écrit :

$m\ddot{x} = m\vec{g} + \vec{R}_{M \rightarrow m} + \vec{0}$ soit $m\ddot{x} = 0$; $\dot{x} = \dot{x}(t_1) = v_0$.

2.a. Projetons l'équation 1.b. sur l'axe des y : vu l'absence de force motrice,

$m\ddot{y} = 0 = -mg + R_y \Rightarrow R_y = mg$.

b. $R_x = \varepsilon fmg$; $\varepsilon = -1$ si $\dot{x} > 0$; $\varepsilon = +1$ si $\dot{x} < 0$.

c. Projetons l'équation 1.b. sur l'axe des x : $m\ddot{x} = \varepsilon fmg - m\ddot{X}$;

La force motrice du mouvement relatif est la force d'inertie ; or $M\ddot{X} = -F - \varepsilon fmg$.

Vu $\ddot{X} < 0$, le freinage entraîne $\dot{x} > 0 \Rightarrow \varepsilon = -1$ (cf. $F + \varepsilon fmg > 0$).

$\dot{X} = \left(\frac{fmg - F}{M} \right)t + v_0$; l'instant t_1 de l'arrêt est : $t_1 = \frac{v_0 M}{F - fmg}$; avant l'arrêt du plateau,

$\ddot{x} = -fg + \frac{F - fmg}{M} \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{M}(F - (fg(m + M))t > 0$ ce qui suppose $F > fg(m + M)$.

$$\dot{x}(t_1) = \frac{v_0(F - fg(m + M))}{(F - fmg)} = v_0 \left(1 - \frac{fgM}{F - fmg} \right).$$

• Si le frottement est très fort $F - fmg < 0$, le bloc reste arrêté, le frottement local l'emporte : $(m + M)\ddot{X} = -F \Rightarrow \dot{X} = -\frac{Ft}{m + M} + v_0 \Rightarrow t'_1 = (M + m)\frac{v_0}{F}$.

d. Après l'arrêt du plateau, $\ddot{X} = 0$; $\ddot{x} = -fg$ ($\dot{x} > 0$) et en intégrant entre t_1 et t :
 $\dot{x} - \dot{x}(t_1) = -fg(t - t_1)$; en remplaçant $\dot{x}(t_1)$ et $t_1 \Rightarrow \dot{x} = v_0 - fg t$.

La loi du mouvement se maintient tant que \dot{x} ne change pas de signe.

e. L'arrêt du bloc correspond à : $\dot{x} = 0$ et ,

α. Si $F < fg(M + m)$ la force motrice était insuffisante : $\dot{x} \equiv 0$; $t_2 = 0$; $t_2 < t_1$.

β. Si $F > fg(M + m)$ on prend $\dot{x} = 0$; $t_2 = \frac{v_0}{fg}$; $t_2 > t_1$ est vérifié.

3. $dE_c = d\mathcal{E}$ pour le bloc m dans son mouvement relatif.

$dE_c = (-fmg - m\ddot{X})\dot{x} dt$, avec $\ddot{X} = 0$ si $t > t_1$. Or $E_c(0) = 0$ et $E_c(t_2) = 0$;

Intégrons l'équation différentielle après remplacement de \ddot{X} (dans le cas $F > fg(M + m)$).

$$\int_0^{t_2} dE_c = 0 = -fmg \int_0^{t_1} \dot{x}^2 dt - \frac{m}{M}(fmg - F) \int_0^{t_1} \dot{x} dt - mfg \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} dt ;$$

$$0 = -fmg \left[\frac{(F - fg(M + m))t^2}{2M} \right]_0^{t_1} - \frac{m}{M}(fmg - F) \left[(F - fg(M + m)) \frac{t^2}{2M} \right]_0^{t_1} - fmg \left[v_0 t - fg \frac{t^2}{2} \right]_{t_1}^{t_2}$$

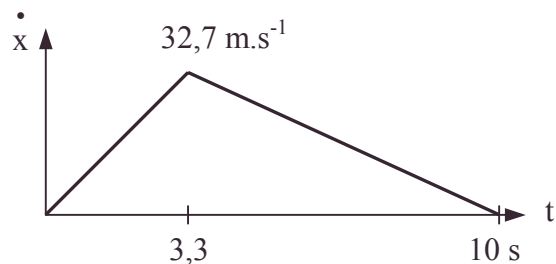
Or $t_1 = \frac{v_0 M}{F - fmg} \Rightarrow fg \frac{t_2^2}{2} - v_0 t_2 + \frac{v_0^2}{2fg} = 0$; on retrouve $t_2 = \frac{v_0}{fg}$ seule solution positive acceptable.

4.a. $F > fg(M + m)$;

$$t_1 = \frac{10f}{2-f} ; \text{AN : } t_1 = 3,33 \text{ s.}$$

$$t_2 = 10 \text{ s.}$$

$$\dot{x}(t_1) = 32,7 \text{ m.s}^{-1}.$$

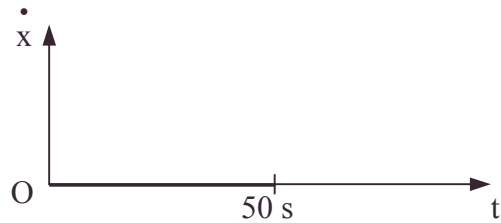


b. $F < fg (M + m)$; la force de frottement solide est supérieure à l'effet d'inertie ;

le bloc reste immobile.

$$t'_1 = 100 \text{ f}$$

$$\text{A.N. : } t'_1 = 50 \text{ s ; } t_2 = 0$$



5. Tout se passe comme si, le plateau ayant toujours été immobile, on lançait le bloc à la vitesse $v_0 > 0$.

a. Equation du mouvement : $m \ddot{x} = \varepsilon fmg - kx$; $\varepsilon = -1$ si $\dot{x} > 0$; c'est le cas ici
 $\varepsilon = +1$ si $\dot{x} < 0$.

b. Début du mouvement : $\varepsilon = -1$; $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -fg$ et vu les conditions initiales,
 $x = \frac{v_0^2}{fg} \sin \omega t + \frac{v_0^2}{fg} (\cos \omega t - 1)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $v_0 = fg \sqrt{\frac{m}{r}}$.

c. Premier arrêt : $\dot{x} = 0$; or $\dot{x} = \frac{v_0^2}{fg} \omega \cos \omega t - \frac{v_0^2}{fg} \omega \sin \omega t$,

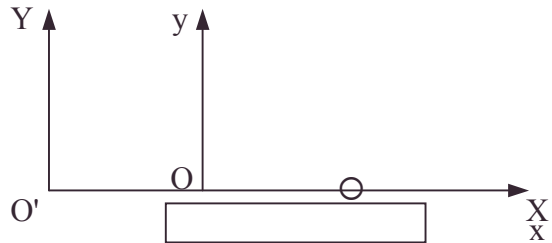
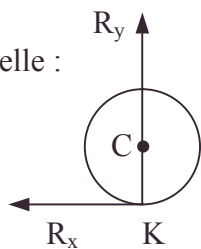
soit quand $\tan \omega t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi v_0}{4fg}$, soit encore $\omega t = \frac{\pi}{4}$.

L'abscisse est alors $x_e = \frac{v_0^2}{fg} (\sqrt{2} - 1)$.

d. Etude du redémarrage : il faut une force motrice supérieure au frottement ;
 $kx > fmg$; or $kx = fmg(\sqrt{2} - 1) < fmg$. Le premier arrêt est la position d'équilibre finale.

B.1. Attention:

Action de contact réelle :



Action de contact formellement positive :

a. Le théorème du centre de masse s'écrit :

Pour le cylindre : $m \ddot{x} \vec{x} = m \vec{g} + \vec{R}_{M \rightarrow m} + \vec{F}_{\text{inertie}}$

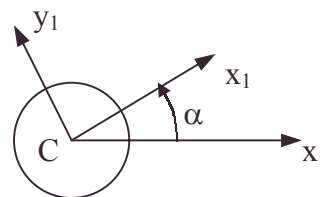
Pour le plateau : $M \ddot{X} \vec{X} = -\vec{R}_{M \rightarrow m} + \vec{F} + \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow M}$

Soit $R_y = mg$ et $m \ddot{x} = R_x - m \ddot{X}$ et encore $M \ddot{X} = -R_x - F$

b. Le théorème du moment cinétique pour le cylindre

s'écrit : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} \right)_{R_{Gb}} = \overrightarrow{CK} \wedge \vec{R} = r R_x \vec{z}$; soit $J \ddot{\alpha} = r R_x$,

avec $J = \frac{1}{2} m r^2$



• conditions initiales, équilibre, roulement sans glissement, théorème du centre de masse, théorème du mouvement du centre de masse

c. La condition de roulement sans glissement relatif s'écrit :

$$\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{KC} \wedge \vec{\Omega} = \vec{0} \text{ soit } \dot{x} + r\dot{\alpha} = 0.$$

d. On tire de b. : $R_x = -m\frac{\ddot{x}}{2}$; de a. : $\ddot{X} = -\frac{3}{2}\ddot{x}$ avec finalement $\ddot{x} = \frac{2F}{m+3M}$,

soit $\dot{x} = \frac{2F}{m+3M}t$ avant l'arrêt du plateau.

e. La condition de roulement sans glissement à vérifier : $|R_x| < fmg$ s'écrit :

$$\frac{mF}{m+3M} < fmg \text{ soit } F \leq fg(m+3M).$$

f. Détermination de t_1 : $\dot{X} = -\frac{3}{2}\dot{x} + v_0 = \frac{-3Ft}{m+3M} + v_0$; $\dot{X} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3M+m}{3F}v_0$.

g. Mouvement après l'arrêt du plateau : $\ddot{X} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$; $\dot{x} = \text{cste} \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}(t_1) = \frac{2v_0}{3}$.

2.a. $\dot{y} = 0 \Rightarrow R_y = mg$, la force motrice est la force d'inertie, le frottement s'oppose à la force motrice.

L'hypothèse du roulement avec glissement donne : $R_x = -fmg$.

Les autres équations à satisfaire étant :

a. : $m\ddot{x} = R_x - m\ddot{X}$; b. : $J\ddot{\alpha} = rR_x$; c. $M\ddot{X} = -R_x - F$

b. \Rightarrow : $\dot{\alpha} = \frac{-rfmg}{J}t = -2\frac{fg}{r}t$ et c. \Rightarrow : $\dot{X} = \frac{mfg-F}{M}t + v_0$,

a. \Rightarrow : $\dot{x} = \frac{F-fg(m+M)}{M}t$ avant l'arrêt du plateau.

b. Détermination de t_1 : $\dot{X} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 M}{F-fmg}$; $\dot{x}(t_1) = v_0 \left(1 - \frac{fMg}{F-fmg}\right)$.

c. Mouvement après l'arrêt du plateau : $\ddot{X} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{R_x}{m} = -fg$;

$\dot{x} = \dot{x}(t_1) - fg(t-t_1)$ avec $\dot{x}(t_1) = v_0 \left(1 - \frac{fMg}{F-fmg}\right)$ pour satisfaire la continuité de \dot{x}

en $t = t_1$ à condition que le roulement soit avec glissement, soit $\dot{x} = v_0 - fgt$.

d. Vitesse de glissement : $v_K - 0 = \dot{x} + r\dot{\alpha}$.

α . $t < t_1$; $v_K = \frac{F-fg(m+3M)}{M}t$. β . $t > t_1$; $v_K = v_0 - 3fgt$.

On constate que la vitesse de glissement peut s'annuler pour $t'_1 = \frac{v_0}{3fg}$.

e. L'hypothèse du roulement avec glissement est acceptable si $v_K \neq 0$; $v_K \geq 0$ est la seule possibilité physiquement acceptable avec départ arrêté, la force motrice étant la force d'inertie. On retrouve avec $v_K > 0$, la condition complémentaire de B.1.

$F > fg(m+3M)$

f. Dans ces conditions, le roulement avec glissement apparaît pour $0 < t < t_1$,
En effet $F > fg(m+3M)$; A.N. : $5mfg > 4mfg$;

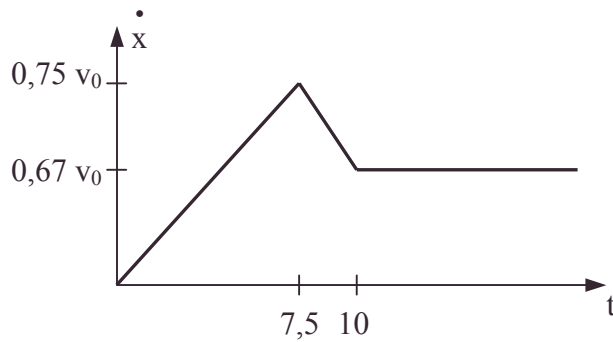
à $t > t_1$, quand $v_K = 0$, soit $t'_1 = \frac{v_0}{3fg}$: il y a apparition du roulement sans glissement et par continuité $\dot{x}(t'_1) = \frac{2}{3}v_0$ et cette valeur constante demeure vu l'absence d'effet dissipatif.

3. $t_1 = 7,5 \text{ s}$; $t'_1 = 10 \text{ s}$;

$$t < t_1 ; \dot{x} = \frac{v_0}{10} t ;$$

$$t_1 < t < t'_1 ; \dot{x} = v_0 \left(1 - \frac{t}{30} \right) ;$$

$$t > t'_1 ; \dot{x} = \frac{2}{3}v_0$$



2.3.3.4. Traîneau

Voir page 149.

2.3.3.5. Jouet à réaction

Voir page 350.

2.4. Oscillations

2.4.1. Stabilisation de satellite, matrice d'inertie

La Terre est supposée constituée de couches concentriques homogènes de centre O. Elle exerce sur un point matériel M de masse m une force attractive : $\vec{F} = -\mu m \frac{\vec{OM}}{(OM)^3}$ avec

$$\mu = 4.10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Soit : $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère barycentrique de la Terre, considéré ici comme repère absolu galiléen.

$R_1(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le repère associé aux coordonnées polaires d'un point G du plan xOy : \vec{u} est radial, \vec{v} est orthoradial.

$R_2(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ le repère principal d'inertie d'un satellite.

$R_3(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère barycentrique d'un satellite.

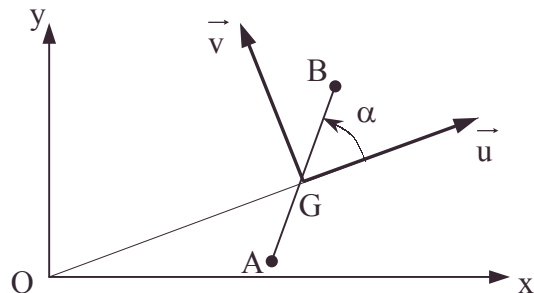
On envisage dans ce problème différents satellites dont le centre d'inertie G décrit une trajectoire circulaire de rayon r dans le plan xOy, à la vitesse angulaire ω , et on s'intéresse au mouvement autour du centre d'inertie.

Les trois parties du problème sont indépendantes, à l'exception des questions II.3.c. et III.1.b.

I. Satellite en forme d' haltère

On considère un satellite constitué de 2 masses ponctuelles A et B de même masse m, reliées par une tige rigide AB de masse négligeable ($AB = 2L$).

On s'intéresse à la rotation de AB autour de Gz, repérée par l'angle $\alpha = (\vec{u}, \vec{AB})$.



1. Pour quelles valeurs de α le moment en G des forces de gravitation que la Terre exerce sur l'haltère est-il nul ?

2. En effectuant un développement limité en $\frac{L}{r}$, montrer que le terme principal de ce

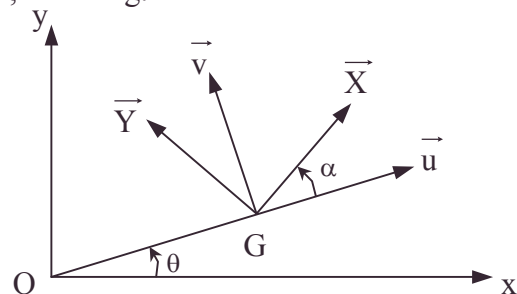
moment est $\overline{\mathcal{M}}_G = -\frac{3\mu m}{L} \left(\frac{L}{r}\right)^3 \sin 2\alpha \vec{z}$.

3. Calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

Application numérique : $r = 7000 \text{ km}$; $L = 5 \text{ m}$; $m = 4 \text{ kg}$.

II. Satellite plan

On considère un satellite en forme de plaque (P), de masse m. Dans toute cette partie, le plan GXY du satellite restera confondu avec le plan xOy. La matrice représentant l'opérateur d'inertie en G du satellite sur la base $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de R_2 a pour expression :



$$(J) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}; \text{ la position du satellite est repérée par : } r = OG; \theta = (\vec{x}, \vec{u}) \text{ et } \alpha = (\vec{u}, \vec{X}).$$

1.a. On appelle \vec{F} et $\vec{\mathcal{M}}_G$ les éléments de réduction en G du torseur [T] des forces de gravitation appliquées au satellite : [T] $\begin{cases} \vec{F} = F_r \vec{u} + F_\theta \vec{v} \\ \vec{\mathcal{M}}_G = \mathcal{M} \vec{z} \end{cases}$

Exprimer le travail élémentaire dW des forces de gravitation en fonction de dr, dθ, dα.

b. Soit U(r, α) l'énergie potentielle du satellite dans le champ de gravitation terrestre. Exprimer F_r , F_θ et \mathcal{M} en fonction des dérivées partielles de U.

c. Calculer le moment en O des forces de gravitation appliquées au satellite. Commenter le résultat.

2.a. Calculer le moment cinétique barycentrique $\vec{\sigma}_G$ du satellite et son énergie cinétique barycentrique E_C dans R (repère barycentrique de la Terre).

b. Donner deux intégrales premières du mouvement en précisant leur signification physique.

3. L'expression de U est : $U = \iint_P -\mu \frac{dm}{OM}$; on pose $\rho = GM$ et $\phi = (\vec{u}, \vec{GM})$.

a. Calculer $\iint_P \rho^2 dm$ et $\iint_P \rho \cos \phi dm$;

montrer que $\iint_P \rho^2 \cos^2 \phi dm = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \cos 2\alpha$.

b. En effectuant un développement limité en $\frac{\rho}{r}$, montrer que l'expression de U au quatrième ordre près est : $U = -\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu}{4r^3} [(A+B) + 3(B-A) \cos 2\alpha]$.

c. En déduire \mathcal{M} et F_θ . Retrouver l'expression du **I.2**.

d. Application : (P) est une plaque circulaire homogène de masse m, de rayon R, portant deux surcharges ponctuelles symétriques par rapport à G, distantes de 2R et situées sur \vec{GX} . $r = 42000$ km ; $m = 200$ kg ; $m' = 3$ kg ; $R = 4$ m. On rappelle que le moment d'inertie d'un disque par rapport à Gz vaut $\frac{1}{2}mR^2$. Calculer les valeurs maximales de $|F_\theta|$ et $|\mathcal{M}|$, ainsi que le terme principal de F_r . Commenter les résultats numériques.

4. On fait maintenant les approximations : $F_r = -\frac{\mu m}{r^2}$ et $F_\theta = 0$; la valeur de \mathcal{M} est celle trouvée en **3.c**.

a. Calculer ω , r et la vitesse de G pour un satellite géostationnaire : (période T = 23 h 56 min 04 s).

b. Ecrire le théorème du moment cinétique dans R_3 .

c. Donner l'équation différentielle en α dans le cas des petits angles. Montrer que le mouvement n'est stable que si $B > A$.

Application numérique : calculer la période des petites oscillations pour $\frac{B-A}{B+A} = \frac{1}{4}$.

d. Lorsque l'angle α n'est pas petit, trouver une équation différentielle du type :

$$\ddot{\alpha}^2 = f(\alpha).$$

Pour $B > A$ et une position α_0 donnée ($0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{4}$) déterminer la condition sur $\dot{\alpha}$

($\dot{\alpha} > 0$) pour que le mouvement ne soit pas révolutif.

Application numérique : $\alpha_0 = 40^\circ$.

III. Satellite de forme quelconque

On note : α, β, γ les composantes dans R_2 du vecteur unitaire \vec{u} de \overrightarrow{OG} . La matrice représentant l'opérateur d'inertie en G du satellite dans R_2 est :

$$(J) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Dans toute cette partie, on utilisera comme repère de projection le repère R_2 .

1.a. Montrer que les composantes du moment en G des forces de gravitation ont pour

$$\mathcal{M}_{GX} = 3\omega^2 \beta \gamma (C - B)$$

équivalents : $\mathcal{M}_{GY} = 3\omega^2 \gamma \alpha (A - C)$

$$\mathcal{M}_{GZ} = 3\omega^2 \alpha \beta (B - A)$$

b. Retrouver le résultat du I.2.

2. La figure ci-contre indique la signification géométrique des angles d'Euler (ψ, θ, ϕ) repérant l'orientation de R_2 par rapport à R_1 .

\vec{N} est le vecteur unitaire porté par $\vec{u} \wedge \vec{Z}$ (\vec{u} et \vec{Z} sont supposés non colinéaires).

On rappelle que le vecteur rotation de R_1 par rapport à R est $\omega \vec{w}$.

a. Exprimer en fonction de $\omega, \psi, \theta, \phi$ et des dérivées $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ les composantes sur la base $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de R_2 du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de R_2 par rapport à R .

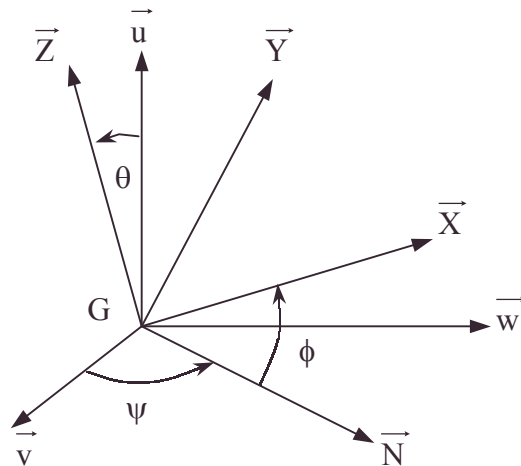
b. On pose $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$. En considérant ψ, ε, ϕ et leurs dérivées comme des infiniment petits, montrer que les composantes "linéarisées" de $\vec{\Omega}$ s'écrivent :

$$\Omega_X = \dot{\varepsilon} + \omega \psi; \Omega_Y = \dot{\psi} - \omega \varepsilon; \Omega_Z = \dot{\phi} - \omega.$$

c. Calculer les composantes "linéarisées" du moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ et du moment dynamique $\vec{\delta}_G$ barycentriques.

3.a. Former le système d'équations différentielles linéaires en ψ, ε et ϕ .

b. Quelle relation doivent vérifier A, B et C pour que le couplage entre ε et ψ disparaisse ? Interpréter géométriquement ce résultat.



c. En supposant pour simplifier que la condition précédente est vérifiée, quelles inégalités doivent vérifier A, B et C pour que le mouvement autour de la position $\psi = 0$ $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\phi = 0$ soit stable ?

d. Application numérique : A = 300 m².kg ; B = 60 m².kg ; C = 360 m².kg ; r = 7000 km.

Calculer la période orbitale et les trois périodes d'oscillations en ψ , ε et ϕ .
Comment peut-on envisager l'amortissement des oscillations précédentes ?

4. On suppose maintenant que A = B. On étudie les solutions de la forme, en notation complexe : $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\Omega_0 t}$ et $\psi = \psi_0 e^{i\Omega_0 t}$ où Ω_0 est la pulsation des oscillations considérées.

a. Ecrire l'équation satisfaite par la pulsation Ω_0 .

b. Etudier les conditions sur le rapport $x = \frac{A}{C}$ pour que le type de solution considérée existe. Que se passe-t-il si ces conditions ne sont pas satisfaites ?

Centrale ; Durée 4h

Corrigé

$$1.1. \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B = \vec{GA} \wedge (\vec{F}_A - \vec{F}_B) = -\mu m \vec{GA} \wedge \left(\frac{\vec{OA}}{OA^3} - \frac{\vec{OB}}{OB^3} \right) ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = r\vec{u} + \vec{GA} \\ \vec{OB} = r\vec{u} - \vec{GA} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_G = -r\mu m (\vec{GA} \wedge \vec{u}) \left(\frac{1}{OA^3} - \frac{1}{OB^3} \right) .$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \vec{u} // \vec{GA} & ; \alpha = 0 \text{ ou } \pi \\ \text{ou bien } OA = OB \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$2. OA^2 = r^2 + L^2 - 2Lr \cos \alpha = r^2 \left(1 - \frac{2L}{r} \cos \alpha + \frac{L^2}{r^2} \right) \Rightarrow OA^{-3} = r^{-3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2L}{r} \cos \alpha \dots \right)$$

$$OB^2 = r^2 + L^2 + 2Lr \cos \alpha . \quad \Rightarrow OB^{-3} = r^{-3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{2L}{r} \cos \alpha \dots \right)$$

$$\frac{1}{OA^3} - \frac{1}{OB^3} = \frac{6L \cos \alpha}{r^4} .$$

$$\vec{GA} \wedge \vec{u} = L\vec{z} \sin \alpha, \text{ d'où } \vec{\mathcal{M}}_G = -r\mu m L\vec{z} \sin \alpha \cdot \frac{6L \cos \alpha}{r^4} = -\frac{3\mu m}{L} \left(\frac{L}{r} \right)^3 \sin 2\alpha \vec{z} .$$

3. Moment d'inertie du système $2mL^2$. On applique le théorème du moment cinétique selon Gz : $2mL^2 \ddot{\alpha} = -\frac{3\mu m}{L} \left(\frac{L}{r} \right)^3 \sin 2\alpha \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{3\mu}{r^3} \cos \alpha \sin \alpha = 0$.

– Etude au voisinage de $\alpha = 0$; $\ddot{\alpha} + \frac{3\mu}{r^3} \alpha = 0$: position stable car il existe une action

de rappel puisque le mouvement est périodique : $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{3\mu}}$; AN : T = 3359 s.

Idem pour $\alpha = \pi$ qu'on ne peut physiquement distinguer.

• action, couplage, développement au premier ordre ou plus, moment cinétique, moment dynamique, stabilité, valeurs propres

– Etude au voisinage de $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \Rightarrow \ddot{\beta} - \frac{3\mu}{r^3}\beta = 0$ position instable exclue.

Idem pour $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ qu'on ne peut physiquement distinguer.

II.1.a. $dW = \vec{F} \cdot d\vec{OG} + \vec{\mathcal{M}}_G \cdot d(\alpha + \theta) \vec{z} = F_r dr + (\mathcal{M} + rF_\theta) d\theta + \mathcal{M} d\alpha$.

b. $dW = -dU \Rightarrow F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$; $\mathcal{M} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha}$; $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 = \mathcal{M} + rF_\theta \Rightarrow F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \alpha}$.

c. $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_G + \vec{OG} \wedge \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} \vec{z} + r\vec{u} \wedge \left(F_r \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \vec{v} \right) = \vec{0}$.

On pouvait prévoir ce résultat d'après le théorème d'opposition de l'action et de la réaction : la Terre étant à symétrie sphérique et le satellite appartenant à un plan passant par O, le moment en O du torseur des forces que le satellite exerce sur la Terre est nul.

2.a. $\vec{\Omega} = (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{z}$; $\vec{\sigma}_G = (J)(\vec{\Omega}) = (A+B)(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{z}$; $E_c = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_G \cdot \vec{\Omega}$.

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} (A+B) (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2.$$

b.α. Intégrale première de l'énergie mécanique : $E = E_c + U$ (système isolé sans frottement) ; $\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} (A+B) (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + U = \text{constante}$.

β. Intégrale première du moment cinétique en O ; cf. **1.c.**, on a le vecteur constant : $\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_G + \vec{OG} \wedge m \vec{V}_G$; $\sigma_{Oz} = (A+B)(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + m r^2 \dot{\theta} = \text{cste}$.

3.a. $\iint_P \rho^2 dm = \text{moment d'inertie} / Gz = A+B$; $\iint_P \vec{GM} dm = \vec{0}$; G est barycentre des masses ;

multiplions scalairement par $\vec{u} \Rightarrow \iint_P \rho \cos \phi dm = 0$.

$$\iint_P \rho^2 \cos^2 \phi dm = \iint d^2(M, Gv) dm = \text{moment d'inertie} / Gv = \vec{v} \cdot (J_G) \vec{v}.$$

On le calcule dans R_2 : \vec{v} a pour composante $\begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } \iint \rho^2 \cos^2 \phi dm = A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha = \frac{A}{2} (1 - \cos 2\alpha) + \frac{B}{2} (1 + \cos 2\alpha) ;$$

$$\iint \rho^2 \cos^2 \phi dm = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \cos 2\alpha.$$

b. $\frac{1}{OM} = (OG^2 + GM^2 + 2OG \cdot GM \cdot \cos \phi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2\rho}{r} \cos \phi + \frac{\rho^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} ;$

Si on néglige les termes du 4^{ème} ordre au moins,

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\rho}{r} \cos \phi - \frac{\rho^2}{2r^2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} \cdot \frac{4\rho^2}{r^2} \cos^2 \phi + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} \frac{8\rho^2}{r^3} \cos^3 \phi \right)$$

• action et réaction [théorème de l'], barycentre de masse, centre d'inertie, développement au premier ordre ou plus, glisseur, intégrale première du mouvement, moment cinétique, moment d'inertie, mouvement sans frottement, satellite, stabilité, symétrie, théorème du moment cinétique, torseur

$$\text{or } \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos^3 \phi d\phi = 0.$$

$$U = -\frac{\mu}{r} \left[\iint dm + \frac{3}{2r^2} \iint \rho^2 \cos^2 \phi dm - \frac{1}{2r^2} \iint \rho^2 dm \right].$$

$$\text{En utilisant les résultats du a. : } U = -\frac{\mu m}{r} - \mu \frac{(A+B)}{4r^3} - \frac{3\mu(B-A)}{4r^3} \cos 2\alpha \text{ c.q.f.d..}$$

$$\text{c. } \mathcal{M} = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -\frac{3\mu(B-A)}{2r^3} \sin 2\alpha ; F_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{3\mu(B-A)}{2r^4} \sin 2\alpha$$

On retrouve bien le résultat du I.2. en faisant $A = 0$ et $B = 2mL^2$.

$$\mathcal{M} = -3\mu m \frac{L^2}{r^3} \sin 2\alpha ; .$$

d. Pour un disque sans surcharge $A = B$ et $A+B = \frac{1}{2}mR^2$. les surcharges ponctuelles étant décrites dans l'énoncé, leurs distances valent

0 par rapport à GX
R par rapport à GY

$$A = \frac{mR^2}{4} ; B = \frac{mR^2}{4} + 2m'R^2 ;$$

$$|\mathcal{M}|_{\max} = \frac{3\mu m'R^2}{r^3} ; \text{A.N. : } |\mathcal{M}|_{\max} = 7,77.10^{-7} \text{ N.m ;}$$

$$|F_\phi|_{\max} = \frac{|\mathcal{M}|_{\max}}{r} ; \text{A.N. : } |F_\phi|_{\max} = 1,85.10^{-14} \text{ N .}$$

$$F_r \approx -\frac{\mu(m+2m')}{r^2} ; \text{A.N. : } F_r = 46,71 \text{ N.}$$

On vérifie que la perturbation due à F_θ est négligeable devant F_r . En revanche, l'effet de \mathcal{M} ne peut être négligé, car il impose le mouvement du satellite autour de son centre d'inertie.

$$\text{4.a. } \omega = \frac{2\pi}{T} ; m\omega^2 r = \frac{\mu m}{r^2} ; r^3 = \frac{\mu}{\omega^2} ; r = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}} ; v_G = r\omega = \sqrt[3]{\frac{\mu 2\pi}{T}}$$

$$\text{AN : } \omega = 7,292.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1} ; r_0 = 42213 \text{ km} ; v_G = 3,078 \text{ km.s}^{-1}.$$

$$\text{b. } \sigma_{GZ} = (A+B)\ddot{\alpha} \Rightarrow (A+B)\ddot{\alpha} + \frac{3\mu}{2r^3}(B-A)\sin 2\alpha = 0.$$

$$\text{c. } (A+B)\ddot{\alpha} + \frac{3\mu}{r^3}(B-A)\alpha = 0.$$

On a oscillations et donc stabilité si $B > A$;

$$\text{alors : } T_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{3\mu} \frac{B+A}{B-A}} ; \text{A.N. : } T_{\text{osc}} = 2T_{\text{jour}} ; T_{\text{osc}} = 99493 \text{ s.}$$

d. On multiplie par $2\dot{\alpha}$ l'équation du 4.b. et on intègre :

$$\Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \dot{\alpha}_0^2 + \frac{3\mu}{2r^3} \frac{B-A}{B+A} (\cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0).$$

Le mouvement est non révolutif si $\dot{\alpha}$ peut s'annuler :

Comme $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}$, $\cos 2\alpha_0 > 0$; le cas limite est atteint pour $\cos 2\alpha = -1$ et

$$\dot{\alpha} = 0 \text{ si } \left| \dot{\alpha}_0 \right| = \sqrt{\frac{3\mu}{r^3} \frac{B-A}{B+A} \cos^2 \alpha_0} ;$$

conclusion : le mouvement est non révolutif si $\dot{\alpha}_0 < \frac{2\pi}{T_{\text{osc}}} \cos \alpha_0$;

AN : $\dot{\alpha}_0 < 4,84.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. Valeur à comparer à la pulsation terrestre.

$$\text{III.1.a. } \overrightarrow{\mathcal{M}}_G = \iiint -\overrightarrow{GM} \wedge \frac{\mu \overrightarrow{OM}}{OM^3} dm = -\mu r \iiint \frac{\overrightarrow{GM} \wedge \vec{u}}{OM^3} dm \text{ car } \overrightarrow{OM} = r\vec{u} + \overrightarrow{GM} ;$$

$$\frac{1}{OM^3} = \left(r^2 + GM^2 + 2\vec{u} \cdot \overrightarrow{GM}r \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r^3} \left(1 - 3\vec{u} \cdot \frac{\overrightarrow{GM}}{r} \right) ; \overrightarrow{GM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} X & \alpha \\ Y & \beta \\ Z & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma Y - \beta Z \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

ce qui donne pour la 1^{ère} composante :

$$\mathcal{M}_{GX} = -\frac{\mu}{r^2} \iiint \left(1 - \frac{3(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)}{r} \right) (\gamma Y - \beta Z) dm.$$

En tenant compte de la définition de G et de la nullité des produits d'inertie :

$$\mathcal{M}_{GX} = \frac{3\mu}{r^3} \iiint \beta \gamma (Y^2 - Z^2) dm = \frac{3\mu}{r^3} \iiint \beta \gamma [(X^2 + Y^2) - (Z^2 + X^2)] dm,$$

$$\text{soit } \mathcal{M}_{GX} = \frac{3\mu\beta\gamma}{r^3} (C - B) = 3\omega^2 \beta\gamma (C - B).$$

Les autres composantes s'en déduisent par permutation circulaire.

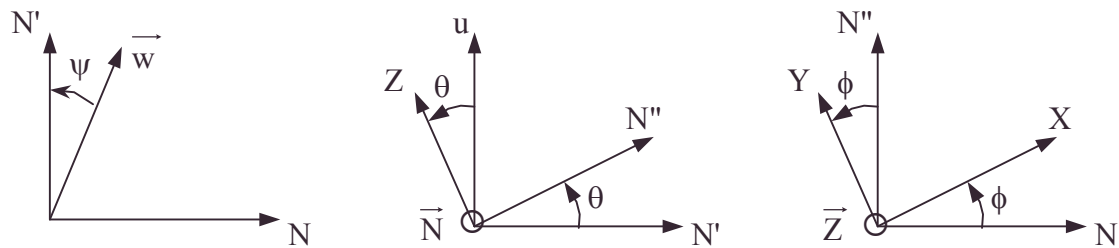
b. On prend l'haltère alignée sur GX, et GZ // Oz :

Alors, A = 0, B = C = 2mL².

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} ; \text{ d'où : } \mathcal{M}_{GZ} = -\frac{3\mu}{r^3} \cos \alpha \sin \alpha \cdot 2mL^2.$$

2.a. La loi de composition des vecteurs instantanés de rotation donne :

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{w} + \dot{\psi} \vec{u} + \dot{\theta} \vec{N} + \dot{\phi} \vec{Z} ; \vec{N}' = \vec{u} \wedge \vec{N} \text{ et } \vec{N}'' = \vec{Z} \wedge \vec{N}.$$



$$\begin{aligned} \vec{N}' &= \vec{N}'' \cos \theta - \vec{Z} \sin \theta ; & \vec{N} &= \vec{X} \cos \phi - \vec{Y} \sin \phi ; & \vec{N}'' &= \vec{X} \sin \phi + \vec{Y} \cos \phi ; \\ \vec{w} &= \vec{N} \sin \psi + \vec{N}' \cos \psi ; & \vec{u} &= \vec{N}'' \sin \theta + \vec{Z} \cos \theta ; & & \end{aligned} \quad (\text{Voir figures})$$

En utilisant ces expressions pour éliminer \vec{N} , \vec{N}' , \vec{N}'' et \vec{u} :

$$\Omega_X = \omega (\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi) + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi ;$$

$$\Omega_Y = \omega (-\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi) + \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi ;$$

$$\Omega_Z = \omega (-\cos \psi \sin \theta) + \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.$$

b. Vu $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ la linéarisation permet : $\cos \theta = -\varepsilon$; $\cos \psi = 1$; $\cos \phi = 1$;
 $\sin \theta = 1$; $\sin \psi = \psi$; $\sin \phi = \phi$

Alors , en éliminant les termes d'ordre 2,

$$\Omega_X = \omega\psi + \dot{\varepsilon} ; \quad \Omega_Y = -\omega\varepsilon + \dot{\psi} ; \quad \Omega_Z = -\omega + \dot{\phi} ;$$

c. $\vec{\sigma}_G = (J)(\vec{\Omega})$ exprimés dans R_2 .

$$\vec{\sigma}_G \Big|_{R_2} = \begin{pmatrix} A(\dot{\varepsilon} + \omega\psi) \\ B(\dot{\psi} - \omega\varepsilon) \\ C(\dot{\phi} - \omega) \end{pmatrix} ;$$

$$\vec{\delta}_G = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{R_2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}_G = \begin{pmatrix} A\ddot{\varepsilon} + (A+B-C)\omega\dot{\psi} + (C-B)\omega^2\varepsilon \\ B\ddot{\psi} + (C-A-B)\omega\dot{\varepsilon} + (C-A)\omega^2\psi \\ C\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

3.a. $\vec{u} = \vec{X} \sin \phi \sin \theta + \vec{Y} \cos \phi \sin \theta + \vec{Z} \cos \theta \Rightarrow$

$$\vec{u} \Big|_{R_2} \approx \begin{pmatrix} \phi = \alpha \\ 1 = \beta \\ -\varepsilon = \gamma \end{pmatrix} \text{ donc vu III.1.a., et en linéarisant : } \vec{\mathcal{M}}_G \Big|_{R_2} = \begin{pmatrix} -3\omega^2\varepsilon(C-B) \\ 0 \\ 3\omega^2\phi(B-A) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ecrivons : } \vec{\delta}_G = \vec{\mathcal{M}}_G \Leftrightarrow \begin{cases} A\ddot{\varepsilon} + (A+B-C)\omega\dot{\psi} + 4(C-B)\omega^2\varepsilon = 0 \\ B\ddot{\psi} + (C-A-B)\omega\dot{\varepsilon} + (C-A)\omega^2\psi = 0 \\ C\ddot{\phi} + 3\omega^2\phi(A-B) = 0 \end{cases}$$

b. Couplage supprimé si $A + B = C \Rightarrow \iiint Z^2 dm = 0$ cf. satellite plan.

c. On aura oscillations (stables) en ϕ si $C > A > B$, en ψ si $C > A$, en ε si $C > B$.

(La condition $C > A$ est automatiquement vérifiée d'après **3.b.**). On regroupera de manière compatible ces conditions $C > A > B$.

d. Y est selon la verticale locale, Z est normal au plan de l'orbite, X est tangent à l'orbite.

$$T_{\text{orbitale}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}} ; \text{A.N.: } T_{\text{orbitale}} = 5818 \text{ s} ;$$

$$T_{\psi} = T_{\text{orbitale}} \sqrt{\frac{B}{C-A}} = T_{\text{orbitale}} ; \text{A.N.: } T_{\psi} = 5818 \text{ s}.$$

$$T_{\varepsilon} = T_{\text{orbitale}} \sqrt{\frac{A}{4(C-B)}} = \frac{T_{\text{orbitale}}}{2} ; \text{A.N.: } T_{\varepsilon} = 2909 \text{ s}.$$

$$T_{\phi} = T_{\text{orbitale}} \sqrt{\frac{C}{3(A-B)}} ; A : T_{\phi} = 4114 \text{ s}.$$

Il y a certainement un amortissement visqueux.

• couplage, développement au premier ordre ou plus, linéarisation, moment cinétique, satellite, vecteur instantané de rotation

On peut imaginer aussi un amortissement dû aux courants de Foucault dans \vec{B} terrestre et solaire.

$$\begin{aligned} \text{4.a. 3.a. s'écrivent } [-A\Omega_0^2 + 4(C-A)\omega^2 \varepsilon_0 + i\Omega_0\omega](2A-C)\psi_0 &= 0; \\ -i\Omega_0\omega(2A-C)\varepsilon_0 + [-A\Omega_0^2 + (C-A)\omega^2]\psi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Pour avoir une solution avec $\varepsilon_0 \neq 0$ et $\psi_0 \neq 0$, il faut un déterminant nul, soit :

$$\Omega_0^4 A^2 - \Omega_0^2 \omega^2 (C^2 + AC - A^2) + 4(C-A)^2 \omega^4 = 0.$$

$$\text{b. 4.a. s'écrit avec } x = \frac{A}{C} \text{ et } X = \Omega_0^2; X^2 x^2 - \omega^2 (1+x-x^2)X + 4(1-x)^2 \omega^4 = 0. \quad \textcircled{1}$$

Pour que X existe dans \mathbb{R} , il faut : $\Delta = [(1+x-x^2)^2 - 16x^2(1-x)^2] \omega^4 > 0$;

Soit $\Delta = (1+5x-5x^2)(1-3x+3x^2) \omega^4 > 0$, or le trinôme $y = 1-3x+3x^2$ a

$\Delta_1 = 9-12 < 0 \Rightarrow y = (1-3x+3x^2) > 0 \quad \forall x$ (discussion classique ou graphique sur le trinôme car la parabole n'a pas de zéros réels).

Pour que X existe dans \mathbb{R} , il faut donc :

$$1+5x-5x^2 > 0; \text{ or, } 1+5x-5x^2 = -5 \left(x - \left(\frac{5+\sqrt{45}}{10} \right) \right) \left(x - \left(\frac{5-\sqrt{45}}{10} \right) \right) > 0 \text{ soit}$$

$$\text{pour } \frac{(5+\sqrt{45})}{10} > x > \frac{(5-\sqrt{45})}{10};$$

$$\bullet \text{ Si } X \text{ réel avec } X = \Omega_0^2 \text{ il faut } X > 0 \text{ or } X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ vu } \textcircled{1},$$

$$\forall x, \sqrt{\Delta} < b, a > 0 \Rightarrow -b > 0 \text{ soit } b < 0 \text{ avec } b = -\omega^2(1-x-x^2)$$

$$-x^2 + x + 1 = 0 \text{ a pour racines } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2} \text{ soit } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$b = -\omega^2 \left(x - \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) < 0 \text{ pour } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x < -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \text{ impossible.}$$

$x > 1,62$ incompatible avec $\Delta > 0$.

Il n'y a pas de solutions de la forme proposée avec Ω_0 réel.

Les solutions complexes, racines carrées d'un nombre complexe, différent de π en argument. Il y a toujours une solution à partie imaginaire positive, l'autre à partie imaginaire négative.

$i\Omega_0$ peut avoir une partie réelle positive qui crée une divergence, une instabilité.

2.4.2. Flexion et torsion couplées d'une aile d'avion ; vitesse de rupture

Le problème a pour objet l'étude de la stabilité en vol d'une aile d'avion. Le référentiel employé est galiléen et muni d'un repère orthonormé direct $Oxyz$.

I. Une plaque rectangulaire ABCD de faible épaisseur, homogène et rigide est fixée le

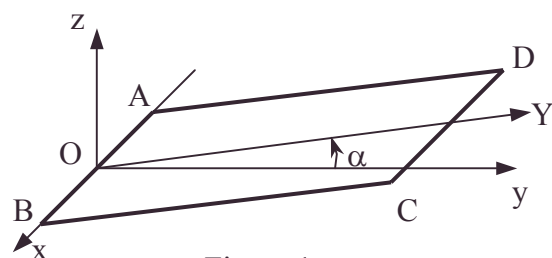


Figure 1

• action, centre d'inertie, développement au premier ordre ou plus, équilibre, stabilité, torsion, valeurs propres

long de son côté AB porté par Ox et autour duquel elle peut pivoter (figure 1).

Sous l'effet de forces élastiques et des forces de pesanteur, la plaque possède une position d'équilibre stable dans le plan xOy .

Ecartée de cette position par une rotation d'angle α autour de Ox , elle tend à y revenir sous l'action de l'ensemble de ces forces, dont le moment par rapport à Ox est $-C_1\alpha$, où C_1 est une constante positive. On désigne par OY l'axe lié à la plaque qui se déduit de Oy par la rotation d'angle α autour de Ox .

Dans tout ce qui suit, on suppose $|\alpha| \ll 1$ et on note a et b les longueurs de AB et BC et M la masse de la plaque.

1.a. Calculer le moment d'inertie I_1 de la plaque par rapport à Ox .

b. Exprimer en fonction de C_1 et I_1 la pulsation ω_1 des oscillations libres de la plaque.

2. On fixe au bord CD de la plaque un petit moteur dont le rotor (partie tournante), de masse m , tourne autour de OY avec une vitesse angulaire constante ω ; le centre d'inertie G_1 de ce rotor est à une distance $h > 0$ de OY (existence d'un "balourd"). On a $h \ll b$, $m \ll M$.

a. Montrer que, pour la plaque, l'effet du moteur est équivalent à celui d'une force appliquée au bord CD, dont on exprimera la composante suivant Oz en fonction de m , b , h , ω , α et t .

b. En négligeant l'inertie du moteur (rotor et partie fixe, ou stator) devant celle de la plaque, écrire l'équation du mouvement de la plaque et déterminer l'amplitude $|\alpha_0|$ de ce mouvement en régime permanent décrit par la notation complexe $\alpha(t) = \alpha_0 e^{i\omega t}$.

c. Tracer le graphe de la fonction de ω ainsi obtenue pour $|\alpha_0|$.

3. En fait, le mouvement de la plaque est freiné par un amortissement produit par des efforts mécaniques dont le moment par rapport à OX est de la forme $-\gamma I_1 \omega_1 \frac{d\alpha}{dt}$ où γ est une constante positive. Le moteur agit comme dans la question **I.2**.

a. Déterminer l'amplitude $|\alpha_0|$ de la vibration en régime permanent.

b. Pour quelle valeur ω_m de ω cette amplitude est-elle maximale ? Expliciter cette amplitude maximale en fonction de m , b , h , I et γ .

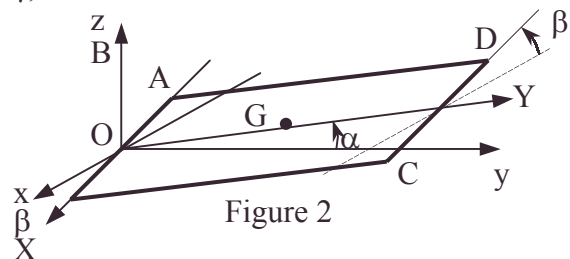
c. Quelle condition doit satisfaire γ pour que ω_m diffère de ω_1 d'au plus 2 % en valeur relative ?

4. On donne les valeurs numériques suivantes :

$$M = 60 \text{ kg} ; a = 1 \text{ m} ; b = 5 \text{ m} ; m = 0,1 \text{ kg} ; h = 3 \text{ cm}.$$

Le déplacement maximal (de crête à crête) de l'extrémité CD de la plaque est obtenu pour $\omega_m = 20 \pi \text{ rad.s}^{-1}$ et vaut 2 cm. Calculer γ , ω_1 et C_1 .

II. Dans cette partie, le moteur est supprimé. Le mouvement de la plaque est maintenant plus complexe : à partir de la position d'équilibre dans le plan xOy , il se décompose en une rotation d'angle β autour de Oy , suivie d'une rotation d'angle α autour de Ox .



Dans ce mouvement, Ox vient en OX et Oy en OY (Figure 2). Un point P quelconque de la plaque sera repéré par ses coordonnées (X,Y) dans le repère OXY . L'origine O ,

point fixe de la plaque, est telle que les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque sont $\left(d, \frac{b}{2}\right)$ avec $-\frac{a}{2} \leq d \leq \frac{a}{2}$. Dans tout ce qui suit, on suppose $|\alpha| \ll 1$ et $|\beta| \ll 1$.

1.a. Montrer que, au deuxième ordre près en α et β , le déplacement du point P est parallèle à Oz et donné par $z = Y\alpha - X\beta$.

b. Exprimer en fonction de M, a, b, d, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d\beta}{dt}$, les composantes σ_x et σ_y du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de la plaque par rapport à O, en notant I_2 son moment d'inertie par rapport à OY, avec lequel on pourra désormais confondre le moment d'inertie par rapport à Oy.

c. L'ensemble des forces de rappel élastique et de pesanteur qui s'exercent sur la plaque ont par rapport à OX un moment $-C_1\alpha$ comme dans la partie I., et par rapport à OY un moment $-C_2\beta$ où C_2 est une constante positive. Ecrire les équations du mouvement de la plaque en utilisant pour paramètres $\lambda_1 = \frac{Mbd}{2I_1}$; $\lambda_2 = \frac{Mbd}{2I_2}$ et les

pulsations ω_1 et ω_2 des oscillations obtenues en bloquant respectivement la rotation autour de OY (β constant) et la rotation autour de Ox (α constant).

2.a. Montrer qu'il existe pour le mouvement de la plaque des solutions représentées en notation complexe par $\alpha(t) = \alpha_0 e^{i\omega t}$ et $\beta(t) = \beta_0 e^{i\omega t}$ avec des amplitudes complexes α_0 et β_0 non nulles, à condition que ω soit racine d'une équation qu'on explicitera à l'aide de ω_1 , ω_2 et $\delta = \frac{d}{a}$.

b. On note Ω_1 et Ω_2 (avec $\Omega_1 \leq \Omega_2$) les racines positives de cette équation. Sans les calculer, préciser comment elles se situent par rapport à ω_1 et ω_2 .

c. Calculer numériquement Ω_1 et Ω_2 lorsque $d = \frac{a}{4}$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{4}{\sqrt{7}}$, avec les données numériques de I.4. Déterminer le rapport des amplitudes $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ pour $\omega = \Omega_1$ et pour $\omega = \Omega_2$.

3. La plaque est placée dans une soufflerie. La vitesse uniforme du vent, de même direction et sens que Ox, est v. Pour une tranche de la plaque de largeur dY, de surface $dS = adY$, l'action du vent peut se modéliser par une force \vec{dF} perpendiculaire à la plaque, appliquée en un point de la tranche situé au quart de la largeur compté à partir du bord AD face au vent, et de norme $|\vec{dF}| = |A\rho v^2 \beta dS|$ où ρ est la masse volumique de l'air et A une constante numérique.

a. Montrer qu'au deuxième ordre près en α et β , \vec{dF} est parallèle à Oz et de composante $dF = A\rho v^2 \beta dS$ suivant Oz. Ecrire dans le cas $d = \frac{a}{4}$ les équations du mouvement de la plaque sous l'action du vent et des forces de pesanteur et de rappel.

b. Montrer qu'il existe des solutions de la même forme que celles envisagées en II.2.a. à condition que ω soit racine d'une équation qu'on explicitera à l'aide de $\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2$ et $k = \frac{3A\rho v^2}{2M}$.

c. Soient Ω'_1 et Ω'_2 ($\Omega'_1 \leq \Omega'_2$) les racines positives de cette équation pour $v > 0$. Comment sont-elles situées par rapport à Ω_1 et Ω_2 ?

d. Montrer qu'il existe une vitesse critique v_c pour laquelle les deux pulsations Ω'_1 et Ω'_2 se confondent.

A l'aide des données numériques de **I.4.** et **II.2.c** avec $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $A = 2,3$, calculer v_c en km/h.

e. Pour v légèrement supérieur à v_c et sans effectuer de résolution explicite, donner la forme générale des solutions des équations du mouvement de la plaque (on indique que ces solutions constituent un espace vectoriel complexe de dimension 4). Les conditions initiales à $t = 0$ pouvant être quelconques, quel phénomène se manifeste-t-il ?

III. Dans cette partie, on considère une aile d'avion dont on néglige l'épaisseur et qui est encastree le long d'un segment de l'axe Ox dans le fuselage rigide et fixe. Cette aile, qui peut fléchir et se tordre, est située à l'équilibre dans le plan xOy d'un repère orthonormé direct $Oxyz$ et elle a une extrémité E sur Oy d'ordonnée b (figure 3).

Avec un bon degré d'approximation, l'aile en flexion se déforme par affinité de direction Oz ; on note z_b le déplacement du point E ; tous les points d'une tranche parallèle à Ox et d'ordonnée y ont un déplacement d'ensemble $z(y) = f(y)z_b$ où f est une fonction numérique qui croît de 0 à 1 lorsque y croît de 0 à b .

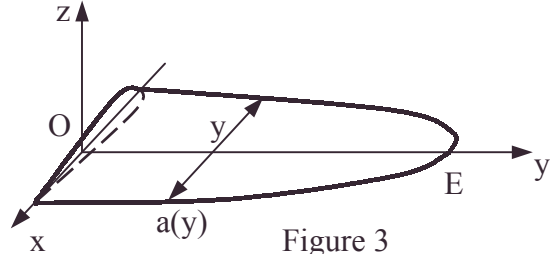


Figure 3

On posera $z_b = b\alpha$, avec $|\alpha| \ll 1$.

De même, l'aile peut se tordre autour de Oy ; si β est l'angle de torsion en E , avec $|\beta| \ll 1$, la tranche d'ordonnée y tourne alors en bloc d'un angle $\theta(y) = g(y)\beta$ où g est une fonction numérique qui croît de 0 à 1 lorsque y croît de 0 à b .

Enfin, la répartition des masses de l'aile est caractérisée par une densité de masse supposée connue $\mu(x, y)$ par unité de surface.

1.a. En présence simultanée de flexion et de torsion, exprimer le déplacement $z(x, y)$ parallèle à Oz d'un point de l'aile de coordonnées $(x, y, 0)$ à l'équilibre.

b. Montrer que l'énergie cinétique T de l'aile est de la forme :

$$T = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + J_{12} \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2,$$

où J_1 , J_{12} et J_2 sont des constantes. Comparer cette forme avec celle de l'énergie cinétique de la plaque en mouvement étudiée en **II.1.**

2. On admettra que le mouvement de l'aile est correctement décrit par les paramètres α et β et que ces paramètres obéissent à des équations différentielles de forme identique à celles régissant le mouvement de la plaque en **II.1.**

Avec les mêmes notations qu'en **II.2.**, on désigne par Ω_1 et Ω_2 les pulsations des mouvements libres sinusoïdaux, et respectivement par ω'_1 et ω'_2 (on suppose $\omega'_1 \neq \omega'_2$) celles des mouvements de flexion et de torsion, l'autre mouvement étant bloqué. Ecrire à l'aide de $J_1, J_{12}, J_2, \omega'_1$ et ω'_2 l'équation en Ω^2 dont Ω_1 et Ω_2 sont les racines positives.

3. Sous l'effet d'un vent de vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ dirigée suivant Ox une tranche d'ordonnée y de l'aile, de surface $dS = a(y) dy$ (figure 3), est soumise à une force perpendiculaire à l'aile, de mesure $dF = A\rho v^2 \theta(y) dS$ suivant Oz , et dont on admet qu'elle est appliquée au point $(0, y, 0)$.

• cinétique, conditions initiales, équilibre, flexion mécanique, masse surfacique, stabilité, torsion, unidimensionnalité

a. Calculer le travail élémentaire total de ces forces aérodynamiques pour un petit déplacement de l'aile caractérisé par les variations $d\alpha$ et $d\beta$ de α et β .

b. Montrer que ce travail élémentaire est analogue à celui de forces de moment \mathcal{M} , par rapport à Ox pour une rotation $d\alpha$. Exprimer \mathcal{M} sous la forme $\mathcal{M}_x = Bv^2\beta$ en explicitant B.

4. Application numérique : pour le chasseur Morane 408 du début de la guerre 39 – 45, on obtient numériquement en kg.m^{-2} pour l'aile droite $J_1 = 429$, $J_{12} = -21,25$, $J_2 = 6,34$. Une étude des vibrations excitées par un moteur à balourd (cf. partie I.) fournit les pulsations $\Omega_1 = 2\pi.11,7 \text{ rad.s}^{-1}$, $\Omega_2 = 2\pi.22,5 \text{ rad.s}^{-1}$. une étude en soufflerie fournit pour B la valeur 13,9 unité S.I..

a. Calculer numériquement en km/h la vitesse critique v_c de cette aile.

b. Afin d'autoriser le vol en piqué, montrer qu'on peut augmenter v_c en ajoutant à l'aile une surcharge quasi ponctuelle de masse m_0 ; préciser s'il faut placer cette surcharge du côté du bord d'attaque ($x < 0$) de l'aile ou à l'arrière ($x > 0$) de l'aile.

c. On place cette surcharge près de l'extrémité E de l'aile, à 6 m de Ox et 0,5 m de Oy. Déterminer m_0 pour assurer la stabilité de l'aile à toutes les vitesses v .

Ecole Polytechnique ; Durée 3h

Corrigé

Pour une barre de longueur b , le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal passant par son extrémité vaut : $\int_0^b y^2 dm = \int_0^b y^2 \lambda dy = \frac{\lambda}{3} b^3 = \frac{1}{3} b^2 m$

I.1.a. Pour une plaque divisée en barres de masse dm :

$$I_1 = \int dI_{1AB} \text{ avec } dI_{1AB} = \frac{1}{3} b^2 dm ; I_1 = \frac{1}{3} Mb^2.$$



b. La rotation d'un solide autour d'un axe fixe donne : $I_1 \ddot{\alpha} = -C_1 \alpha$,

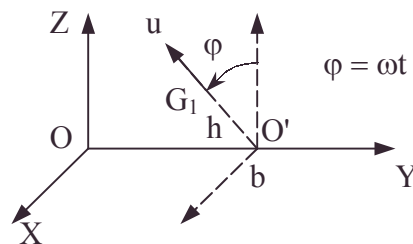
$$\text{Soit } \ddot{\alpha} + \frac{C_1}{I_1} \alpha = 0 ; \omega_1^2 = \frac{C_1}{I_1} ; \omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{3C_1}{Mb^2}}.$$

2.a. Appliquons le théorème du moment cinétique en O pour le système (plaque P et

rotor R) ; $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = -C_1 \alpha \vec{X}$ (On dira que C_1 inclut le rotor).

$$\vec{\sigma}_0 = \vec{\sigma}_0^P + \vec{\sigma}_0^R ; \vec{\sigma}_0^P = I_1 \dot{\alpha} \vec{X} ;$$

$$\vec{\sigma}_0^R = \vec{\sigma}_{G_1}^R + \vec{OG}_1 \wedge m \vec{V} \left(\frac{G_1}{Oxyz} \right) ; \vec{\sigma}_{G_1}^R \neq \vec{0} \text{ cf. 2.b. inertie négligeable.}$$



$$\vec{OG}_1 = \vec{OO'} + \vec{O'G}_1 ; \vec{OO'} = b \vec{Y} ; \vec{O'G}_1 = h \vec{u} ; \vec{u} = \sin \omega t \vec{X} + \cos \omega t \vec{Z}.$$

$$\vec{V}(G_1/Oxyz) = \vec{V}_r + \vec{V}_e \text{ avec } \vec{V}_e = \vec{\Omega}^P \wedge \vec{OG}_1 = \dot{\alpha} \vec{X} \wedge (b \vec{Y} + h \sin \omega t \vec{X} + h \cos \omega t \vec{Z}) ;$$

$$\text{donc : } \vec{V}_e = -\dot{\alpha} h \cos \omega t \vec{Y} + \dot{\alpha} b \vec{Z} ; \vec{V}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{O'G}_1 = \omega h (\cos \omega t \vec{X} - \sin \omega t \vec{Z}) ;$$

$$\vec{\sigma}_0^R = \begin{vmatrix} h \sin \omega t \\ b \\ h \cos \omega t \end{vmatrix}_{OXYZ} \wedge \begin{vmatrix} h \omega \cos \omega t \\ -h \dot{\alpha} \cos \omega t \\ \dot{\alpha} b - \omega h \sin \omega t \end{vmatrix}_{OXYZ} ;$$

$$\vec{\sigma}_0^R \cdot \vec{X} = -h m b \omega \sin \omega t + m b^2 \dot{\alpha} + m h^2 \dot{\alpha} \cos^2 \omega t ;$$

Simplifions vu les valeurs $b \gg h$: $\vec{\sigma}_0^R \cdot \vec{X} = m b (b \dot{\alpha} - h \omega \sin \omega t)$;

$$\dot{\sigma}_{Ox} = -C_1 \alpha \text{ s'écrit : } I_1 \ddot{\alpha} + (m b^2 \ddot{\alpha} - m \omega^2 h b \cos \omega t) = -C_1 \alpha ,$$

ou encore : $I_1 \ddot{\alpha} = -C_1 \alpha + b F_z$ avec $F_z = -m b \ddot{\alpha} + m \omega^2 h \cos \omega t$.

Tout se passe comme si la rotation du rotor engendrait la force de composante F_z ci-dessus déterminée, appliquée en O' .

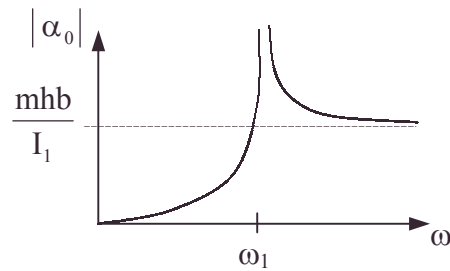
b.α. $(I_1 + m b^2) \ddot{\alpha} = -C_1 \alpha + m b \omega^2 h \cos \omega t$; or $m b^2 \ll I_1$ cf. petit moteur.

$$\ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha = \frac{m \omega^2 h b}{I_1} \cos \omega t \text{ avec } \omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{I_1}} .$$

$$\beta. \alpha = \alpha_0 e^{i \omega t} \text{ solution de } \ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha = \frac{m \omega^2 h b}{I_1} e^{i \omega t} , \text{ soit } \alpha_0 = \frac{m \omega^2 h b}{I_1 (\omega_1^2 - \omega^2)} ,$$

$$\Rightarrow |\alpha_0| = \frac{m \omega^2 h b}{I_1 |\omega_1^2 - \omega^2|} .$$

c. Graphe



$$\mathbf{3.a.} \quad I_1 \ddot{\alpha} = -C_1 \alpha - \gamma I_1 \omega_1 \dot{\alpha} + m \omega^2 h b \cos \omega t \Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \gamma \omega_1 \dot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha = \frac{m \omega^2}{I_1} h b \cos \omega t .$$

L'équation complexe associée $\ddot{\alpha} + \gamma \omega_1 \dot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha = \frac{m \omega^2}{I_1} h b e^{i \omega t}$ vérifiée par α , donne :

$$\alpha_0 = \frac{m \omega^2 h b}{I_1 [(\omega_1^2 - \omega^2) + i \gamma \omega_1 \omega]} \Rightarrow |\alpha_0| = \frac{m b h}{I_1} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_1^2 \omega^2}} .$$

$$\mathbf{b.} \text{ Posons } X = \frac{\omega_1^2}{\omega^2} ; |\alpha_0| = \frac{m b h}{I_1} \frac{1}{[(X-1)^2 + \gamma^2 X]^{\frac{1}{2}}} :$$

α. Etudions les minima du dénominateur de $|\alpha_0|^2$: $D(X) = (X-1)^2 + \gamma^2 X$;

$$\frac{dD}{dX} = 2(X-1) + \gamma^2 = 0 \text{ pour } X_m = \frac{\omega_1^2}{\omega_m^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{2} \text{ soit } \omega_m = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}} \text{ (existe si } \gamma < \sqrt{2} \text{).}$$

$$\beta. |\alpha_0|_{\max} = \frac{m b h}{I_1} \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} .$$

c. Si $\frac{\omega_m - \omega_1}{\omega_1} \leq 2.10^{-2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}} - 1 < 2.10^{-2} \Rightarrow \gamma \leq 0,279$ en faisant le calcul

sans approximation.

4. $2b|\alpha_0|_{\max} = 2.10^{-2} \text{ m}$. En négligeant $\frac{\gamma^2}{4}$ devant 1, on trouve : $\gamma = \frac{6hm}{2b|\alpha_0|_{\max} M}$;

$$\omega_1 = \omega_m \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}} ; C_1 = I_1 \omega_1^2 = I_1 \omega_m^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right).$$

AN : $\gamma = 1,5.10^{-2}$ ainsi $\left(\frac{\gamma^2}{4} = 5,6.10^{-5} \ll 1\right)$; $\omega_1 = 6,283.10^{+1} \text{ rad.s}^{-1}$;

$$\omega_1 \neq \omega_m ; I_1 = 500 \text{ kg.m}^2 ; C_1 = 1,974.10^6 \text{ J}.$$

II.1.a. $\vec{OP} = X\vec{X} + Y\vec{Y}$; or \vec{X} et \vec{Y} varient et peuvent être linéarisés :

$$\vec{X} = \cos \beta \vec{x} - \sin \beta \vec{z} = \vec{x} - \beta \vec{z} ;$$

$$\vec{Y} = \cos \alpha \vec{y} + \sin \alpha \vec{z} = \vec{y} + \alpha \vec{z} .$$

$$\vec{OP} = (X\vec{x} + Y\vec{y}) + (-X\beta + Y\alpha)\vec{z} ;$$

$$\vec{OP} = X\vec{x} + Y\vec{y} + (Y\alpha - X\beta)\vec{z} ; \text{ le déplacement dû à } \alpha, \beta \text{ est } (Y\alpha - X\beta)\vec{z} .$$

b. $\vec{V}(P) = \left(Y \frac{d\alpha}{dt} - X \frac{d\beta}{dt} \right) \vec{z} ;$

$$\vec{\sigma}_0^P = \iint_P \vec{OP} \wedge \vec{V}(P) dm = \left. \begin{array}{l} \iint \left(Y^2 \frac{d\alpha}{dt} - XY \frac{d\beta}{dt} \right) dm \\ - \iint XY \frac{d\alpha}{dt} dm + \iint X^2 \frac{d\beta}{dt} dm \\ 0 \end{array} \right|_{X,Y,Z}$$

• Notations : $I_{2(OY)} = \iint_P X^2 dm = I_{2(GY)} + Md^2$ d'après la formule d'Huygens ;

or $I_{2(GY)} = \int dI_{2(GY)} = \int \frac{a^2}{12} dm = \frac{Ma^2}{12}$ (en découpant la plaque en barres de centre sur OY de masse dm).

$$I_2 = \frac{1}{12} Ma^2 + Md^2 ; I_1 = \iint Y^2 dm = \frac{1}{3} Mb^2 ;$$

$$\iint XY dm = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}+d}^{\frac{a}{2}+d} X dX \int_0^b Y dY = \frac{M}{ab} \left[\frac{\left(\frac{a}{2}+d\right)^2 - \left(d-\frac{a}{2}\right)^2}{2} \right] \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{1}{2} Mbd ;$$

En confondant OXYZ avec Oxyz.

$$\sigma_x = I_1 \frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{2} Mbd \frac{d\beta}{dt} ; \sigma_y = -\frac{1}{2} Mbd \frac{d\alpha}{dt} + I_2 \frac{d\beta}{dt} \text{ soit encore :}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{3} Mb^2 \frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{2} Mbd \frac{d\beta}{dt} ; \sigma_y = -\frac{1}{2} Mbd \frac{d\alpha}{dt} + \left(d^2 + \frac{a^2}{12} \right) M \frac{d\beta}{dt} .$$

• Cramer, développement au premier ordre ou plus, Huygens [théorème sur les moments d'inertie d'], moment cinétique, moment d'inertie

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_{Ox} = -C_1 \alpha \vec{x} - C_2 \beta \vec{y} \text{ donne moyennant } \omega_1^2 = \frac{C_1}{I_1}; \omega_2^2 = \frac{C_2}{I_2} :$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_1^2 \alpha = \lambda_1 \frac{d^2\beta}{dt^2}; \frac{d^2\beta}{dt^2} + \omega_2^2 \beta = \lambda_2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Remarque : confondre OXYZ et Oxyz revient à négliger $\vec{\Omega} \left(\frac{\text{plaque}}{Oxyz} \right) \wedge M \vec{V}_G$ qui est d'ordre 2, ce qui est donc légitime.

2.a. On cherche $\alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}$ et $\beta = \beta_0 e^{i\omega t}$ dans les deux équations de **I.1.c.**

$$(\omega_1^2 - \omega^2) \alpha_0 + \lambda_1 \omega^2 \beta_0 = 0; \lambda_2 \omega^2 \alpha_0 + (\omega_2^2 - \omega^2) \beta_0 = 0.$$

Le système homogène en α_0 et β_0 admet des solutions différentes de zéro si et seulement si le déterminant du système de Cramer est nul.

$$(1 - \lambda_1 \lambda_2) \omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0;$$

$$\text{or } \delta = \frac{d}{a}; \lambda_1 \lambda_2 = \frac{M^2 b^2 d^2}{4 I_1 I_2} = \frac{M^2 b^2 d^2}{4 \frac{M^2 b^2}{3} \left(d^2 + \frac{a^2}{12} \right)} = \frac{9 \delta^2}{1 + 12 \delta^2};$$

$$\frac{1 + 3 \delta^2}{1 + 12 \delta^2} \omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \text{ de la forme } f(\omega^2) = 0.$$

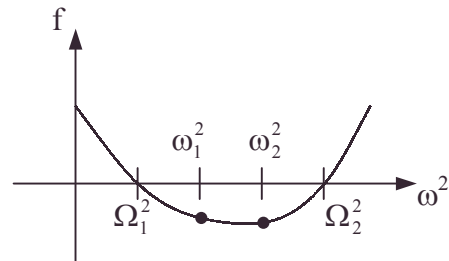
b. Il s'agit de placer ω_1 et ω_2 par rapport aux racines de $f(\omega^2) = 0$.

$$\frac{df}{d\omega^2} = \frac{1 + 3 \delta^2}{1 + 12 \delta^2} \cdot 2 \omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2); \frac{d^2 f}{d\omega^2} = 2 \frac{1 + 3 \delta^2}{1 + 12 \delta^2} > 0;$$

$$f(0) = \omega_1^2 \omega_2^2 > 0;$$

$$f(\omega_1^2) = -\omega_1^4 \frac{9 \delta^2}{1 + 12 \delta^2} < 0.$$

$$f(\omega_2^2) = -\omega_2^4 \frac{9 \delta^2}{1 + 12 \delta^2} < 0.$$



vu le graphe, $\Rightarrow \Omega_1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \Omega_2$,

$$\text{c.}\alpha. \Omega^2 = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4 \omega_1^2 \omega_2^2 \left(\frac{1 + 3 \delta^2}{1 + 12 \delta^2} \right)}}{2 \frac{(1 + 3 \delta^2)}{(1 + 12 \delta^2)}};$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2}{2 \frac{(1 + 3 \delta^2)}{(1 + 12 \delta^2)}} \left[1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \pm \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{1 + 3 \delta^2}{1 + 12 \delta^2} \right)} \right];$$

A.N. : de fait, on a intérêt à résoudre sur l'équation initiale $f(\omega^2) = 0$ écrite

numériquement $\delta = \frac{d}{a} = \frac{1}{4}$; $\omega_1 = 20 \pi \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega_2 = 31 \pi \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\lambda_1 \lambda_2 = 0,3214; \lambda_2 = 2,3 \cdot 10^{-3}; \Omega_1 = 57,66 \text{ rad.s}^{-1}; \Omega_2 = 125,66 \text{ rad.s}^{-1}$$

β. On tire **II.2.a.** : $\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{-(\omega_1^2 - \omega^2)}{\lambda_1 \omega^2} = -\frac{2b}{3d} \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega^2}$.

AN : • $\omega = \Omega_1$; $\frac{\beta_0}{\alpha_0} = -2,476$; • $\omega = \Omega_2$: $\frac{\beta_0}{\alpha_0} = 10,00$.

3.a.α. $\vec{dF} = \|\vec{dF}\| \vec{X} \wedge \vec{Y}$ (cf. portance) ; on sait : $\vec{X} \# \vec{x}$; $\vec{Y} \# \vec{y}$;

$\|\vec{dF}\| = |\text{Apv}^2 \beta dS|$ est d'ordre 1 en β il suffit de prendre $\vec{X} \wedge \vec{Y}$ à l'ordre 0 et

$\vec{dF} = |\text{Apv}^2 \beta dS| \vec{x} \wedge \vec{y}$ soit $\vec{dF} = \text{Apv}^2 \beta dS \vec{z}$.

β. $\vec{ON} = -\frac{a}{4} \vec{X} + Y \vec{Y}$;

$\vec{M}_0 = \int_p \vec{ON} \wedge \vec{dF} = \text{Apv}^2 \beta a (\vec{Y} \wedge \vec{z}) \int_0^b Y dY - \text{Apv}^2 \frac{\beta a^2}{4} (\vec{X} \wedge \vec{z}) \int_0^b dY$.

Pour garder les termes d'ordre 1 en β , il suffit d'écrire $\vec{Y} \wedge \vec{z}$ et $\vec{X} \wedge \vec{z}$ à l'ordre 0.

Soit $\vec{Y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$ et $\vec{X} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$, $\vec{M}_0 = \frac{1}{2} \text{Apv}^2 ab^2 \beta \vec{x} + \text{Apv}^2 \frac{\beta a^2 b}{4} \vec{y}$.

A.N. : $\frac{\mathcal{M}_{0X}}{\mathcal{M}_{0Y}} = 2 \frac{ab^2}{a^2 b} = \frac{2b}{a} = 10$.

On négligera \mathcal{M}_{0Y} devant \mathcal{M}_{0X} , comme étant d'ordre supérieur négligeable.

Les équations sont modifiées par un seul terme cf.k donné :

$I_1 \ddot{\alpha} - I_1 \lambda_1 \ddot{\beta} = -C_1 \alpha + \frac{1}{2} \text{Apv}^2 ab^2 \beta$; $I_2 \ddot{\beta} - I_2 \lambda_2 \ddot{\alpha} = -C_2 \beta$.

$\ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha - \lambda_1 \ddot{\beta} - k\beta = 0$; $\ddot{\beta} + \omega_2^2 \beta - \lambda_2 \ddot{\alpha} = 0$; $k = \frac{3 \text{Apv}^2}{2M}$.

b. La même méthode qu'en **II.2.a.** donne :

$(\omega_1^2 - \omega^2) \alpha_0 + (\lambda_1 \omega^2 - k) \beta_0 = 0$; $\lambda_2 \omega^2 \alpha_0 + (\omega_2^2 - \omega^2) \beta_0 = 0$, de déterminant nul.

$\omega^4 (1 - \lambda_1 \lambda_2) - (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda_2 k) \omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0$ de la forme $g(\omega^2) = 0$.

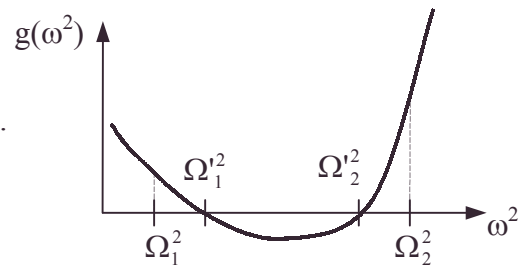
c. La même méthode qu'en **II.2.b.** donne :

$g(\omega^2) = f(\omega^2) + \lambda_2 k \omega^2 = 0$; $g(0) = \omega_1^2 \omega_2^2 > 0$; $g(\Omega_1^2) = \lambda_2 k \Omega_1^2 > 0$; $g(\Omega_2^2) = \lambda_2 k \Omega_2^2 > 0$

$\frac{d^2 g}{d(\omega^2)^2} = \frac{d^2 f}{d\omega^2} > 0$,

L'énoncé suppose l'existence de Ω'_1 et Ω'_2 .

Vu le graphe $\Rightarrow \Omega_1 \leq \Omega'_1 \leq \Omega'_2 \leq \Omega_2$



d. $\Omega'_1 = \Omega'_2$ si $\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda_2 k)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 (1 - \lambda_1 \lambda_2) = 0$. (cf. discriminant nul pour **3.b.**) dont la résolution en k donne :

$k_{c\pm} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm 2\omega_1 \omega_2 \sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2} \Rightarrow v_{c\pm} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{M}{\text{ap} \Lambda \lambda_2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm 2\omega_1 \omega_2 \sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}]}$;

$\Delta = \lambda_2^2 (k - k_{c+})(k - k_{c-})$.

k	k _{c-} k _{c+}	
Δ	+	+
v	v _{c-} v _{c+}	

$\Delta < 0$ pour $v_{c+} > v > v_{c-}$.

AN : $v_{c-} = 98,97 \text{ m.s}^{-1} = 356,3 \text{ km/h}$; $v_{c+} = 270,9 \text{ m.s}^{-1} = 975,24 \text{ km/h}$.

e. Vu l'énoncé $v_{c+} > v > v_{c-} \Rightarrow \Delta < 0$, les racines sont complexes et conjuguées 2 à 2.

$\omega = \pm a \pm ib$ (cf. espace de dimension 4).

$\alpha = A_1 e^{at} e^{ibt} + A_2 e^{at} e^{-ibt} + A_3 e^{-at} e^{ibt} + A_4 e^{-at} e^{-ibt}$; β s'en déduit vu **II.3.a**.

L'amplification exponentielle conduit à un cas instable dangereux pour l'aile.

III.1.a. vu **II.1.a.** et le supplément d'information de l'énoncé, on obtient le déplacement $z = f(y)b\alpha - xg(y)\beta$.

b. Dans le repère Oxyz et pour caractériser flexion et torsion :

$$T = \iint \frac{1}{2} \mu \dot{z}^2 dS ; \text{ or } \dot{z} = f(y)b \frac{d\alpha}{dt} - xg(y) \frac{d\beta}{dt} ;$$

$$\dot{z}^2 = f^2(y)b^2 \dot{\alpha}^2 + x^2 g^2(y) \dot{\beta}^2 - 2fgxb \dot{\alpha} \dot{\beta}.$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\iint \mu f^2(y) b^2 dx dy \right) \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\iint \mu x^2 g^2(y) dx dy \right) \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 - \left(\iint \mu f(y) g(y) x b dx dy \right) \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt}.$$

de la forme demandée : $T = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + J_{12} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) \left(\frac{d\beta}{dt} \right)$, avec :

$$J_1 = \iint \mu b^2 f^2(y) dx dy ; J_2 = \iint \mu x^2 g^2(y) dx dy ; J_{12} = - \iint \mu b x f(y) g(y) dx dy ;$$

Or dans **II.1.**, $f(y) = \frac{y}{b}$; $g(y) = 1 \Rightarrow J_1 = \iint y^2 dm = I_1 = \frac{1}{3} Mb^2$;

$$J_2 = \iint x^2 dm = I_2 = Md^2 + \frac{Ma^2}{12} ; J_{12} = - \iint xy dx dy = -\frac{1}{2} Mbd.$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} Mbd \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{1}{2} I_2 \dot{\beta}^2 \text{ de même forme dans III.1 et II.1.}$$

On passe donc de J_1 à I_1 , J_2 à I_2 et J_{12} à $-\frac{1}{2} Mbd$.

2. Par analogie avec **II.2.a.** on écrit l'équation vérifiée par Ω^2 : ω'_1 et ω'_2 étant les

analogues de ω_1 et ω_2 ; $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\left(\frac{1}{2} Mbd \right)^2}{I_1 I_2}$ étant en correspondance avec $\frac{J_{12}^2}{J_1 J_2}$.

$$\Omega^4 \left(1 - \frac{J_{12}^2}{J_1 J_2} \right) - (\omega_1'^2 + \omega_2'^2) \Omega^2 + \omega_1'^2 \omega_2'^2 = 0.$$

3.a. $dz = fbd\alpha - xgd\beta$ à y constant se réduit à $dz = fbd\alpha$ en $x = 0$;

$$\delta'W = dF dz = A\rho v^2 \theta(y) dS f(y) b d\alpha ; \theta(y) = g(y)\beta, dS = a(y) dy$$

$$\delta W = \int \delta'W = \left[A\rho v^2 \beta b \int_0^b g(y) f(y) a(y) dy \right] d\alpha.$$

• flexion mécanique, graphe, torsion, valeurs propres

b. On a : $\delta W = \mathcal{M}_x d\alpha \Rightarrow \mathcal{M}_x = Bv^2\beta$ avec $B = A\rho b \int_0^b g(y)f(y)a(y)dy$.

Ainsi Bv^2 remplace $\frac{1}{2}A\rho v^2 ab^2 = \frac{Mk}{3}b^2 = kI_1$.

4.a. On avait : $(1 - \lambda_1\lambda_2)\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda_2 k)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0$
dont les solutions vérifiaient :

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{1 - \lambda_1\lambda_2}, \quad \Omega_1^2\Omega_2^2 = \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{1 - \lambda_1\lambda_2} \text{ et } \lambda_2 k_{c_-} = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2\sqrt{1 - \lambda_1\lambda_2}. \textcircled{1}$$

Par analogie avec **II.2.a.**, on fait correspondre λ_1 à $\frac{-J_{12}}{J_1}$, λ_2 à $\frac{-J_{12}}{J_2}$, k à $\frac{Bv^2}{J_1}$:

$$\text{On a donc } \textcircled{1}' : \frac{-J_{12}}{J_2} \frac{Bv_{c_-}^2}{J_1} = \left(1 - \frac{J_{12}^2}{J_1 J_2}\right) (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2 \left(1 - \frac{J_{12}^2}{J_1 J_2}\right)^{\frac{1}{2}} \Omega_1 \Omega_2.$$

$$\text{Finalement, } v_{c_-} = \left[\frac{J_1 J_2 - J_{12}^2}{-B J_{12}} \right]^{\frac{1}{2}} (\Omega_2 - \Omega_1) ; \text{ AN : } v_{c_-} = 188,05 \text{ m.s}^{-1} = 677 \text{ km/h.}$$

Les possibilités augmentent car v_{c_-} plus élevée.

b. En ajoutant un point matériel m_0 en x_0, y_0 pour augmenter v_{c_-} , on voit que J_1 et J_2 vont augmenter, mais $-J_{12}$ devient : $-J_{12} + m_0 b f(y_0) g(y_0) x_0$ par extension de l'intégrale de Lebesgue au point matériel.

Et si on veut diminuer $(-J_{12})$ pour augmenter v_{c_-} , on peut envisager $x_0 < 0$ vu $fg > 0$, soit une masselotte à l'avant de l'aile.

c. On veut $v_{c_-} \infty$ (ainsi il y aura stabilité à toute vitesse).

On en déduit m_0 tel que $-J_{12} + m_0 x_0 y_0 = 0$ (cf. $g(y_0) = 1$ et $b f(y_0) = y_0$ en bout d'aile dans l'énoncé).

$$m_0 = \frac{J_{12}}{x_0 y_0} ; \text{ AN : } m_0 = 7,083 \text{ kg quand } x_0 = -0,5\text{m, } y_0 = 6 \text{ m.}$$

2.4.3. Suspension automobile classique

Voir page 294.

2.4.4. Equation de Lagrange ; cloche et battant

Voir page 297.

2.4.5. Oscillateurs couplés

Voir page 302.

2.4.6. Cylindre dans coupelle oscillante

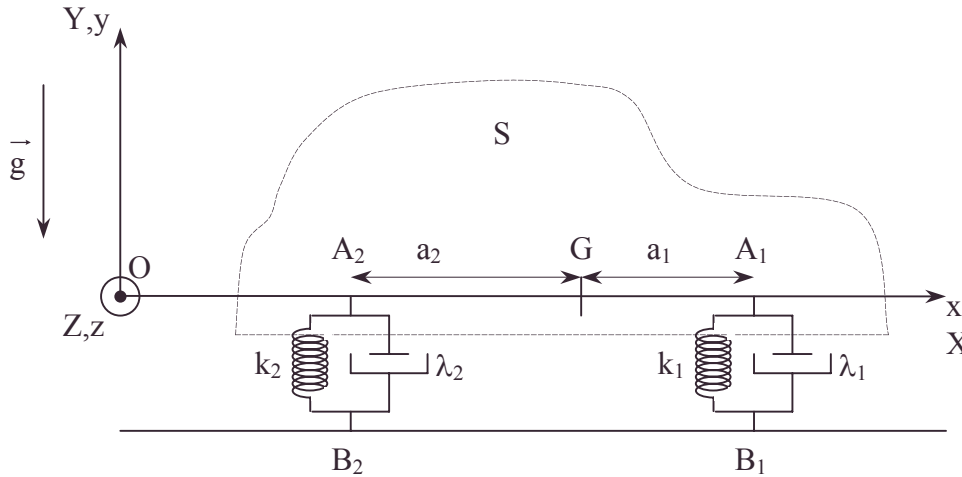
Voir page 308.

2.4.7. Ondes de torsion

Voir page 1307.

2.5. Couplage d'oscillateurs

2.5.1. Suspension automobile



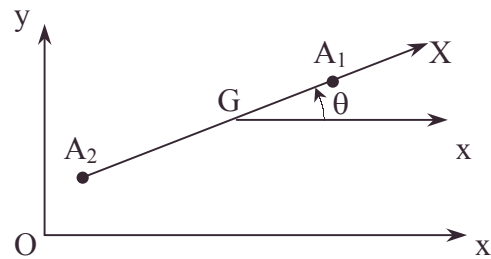
Le repère $R(O, x, y, z)$ est galiléen.

Le châssis S de l'auto est considéré comme un solide qui conserve le plan $z = 0$ comme plan de symétrie. Son centre d'inertie G est sur l'axe Ox à l'arrêt de S .

Le repère lié au châssis $R'(G, X, Y, Z)$ a comme origine G . L'axe GZ restera parallèle à l'axe Oz . L'axe GX coïncide avec l'axe Ox quand S est au repos.

Soient M la masse de S , et I son moment d'inertie par rapport à l'axe GZ .

Le mouvement du châssis S est décrit par les coordonnées de $G[x(t), y(t), 0]$ et par l'angle $\theta = (\vec{Gx}, \vec{GX})$.



On étudie seulement le mouvement de S tel que \dot{x} soit constant sur un sol horizontal.

La suspension de S est assimilée à deux ensembles ressort-amortisseur visqueux de masse négligeable, supposés verticaux.

Les éléments avant et arrière sont affectés respectivement des indices 1 et 2.

La force \vec{F}_i appliquée à S en A_i est verticale ; on a : $F_{iy} = N_i - k_i y_i - \lambda_i \frac{dy_i}{dt}$, y_i étant

l'ordonnée de A_i , avec $y_i = 0$ à l'équilibre ; N_i , k_i , λ_i sont des constantes.

On supposera toujours $y, y_1, y_2, \theta, \dot{y}, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{\theta}, \ddot{y}, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{\theta}$ des infiniment petits de même ordre. On donne $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

1.1. Exprimer y_1 et y_2 en fonction de y et θ en linéarisant $\sin \theta$.

2. Exprimer y et θ en fonction de y_1 et y_2 .

2.1. Calculer N_1 et N_2 à l'équilibre.

2. A.N. : $M = 1000 \text{ kg}$; $a_1 = 1,3 \text{ m}$; $a_2 = 1,7 \text{ m}$.

3. Ecrire les équations différentielles du mouvement vertical :

1. en utilisant les paramètres y_1 et y_2 .

2. en utilisant les paramètres y et θ .

• analogie, centre d'inertie, couplage, équilibre, freinage visqueux, frottement visqueux, linéarisation, moment d'inertie, stabilité, symétrie

4. On cherche des solutions de la forme $y_1 = \underline{Y}_1 e^{j\omega t}$; $y_2 = \underline{Y}_2 e^{j\omega t}$; $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2$ et ω appartenant au corps des complexes \mathbb{C} .

1. Ecrire le polynôme donnant les pulsations complexes possibles, sans le développer.

2. Si $I = M a_1 a_2$, montrer quelle est la simplification apportée (avec $a_1 \neq a_2$).

Interpréter physiquement.

5. On cherche des solutions de la forme : $y = \underline{Y} e^{j\omega t}$; $\theta = \underline{\theta}_0 e^{j\omega t}$; $\underline{Y}, \underline{\theta}_0$ et ω appartenant au corps des complexes \mathbb{C} .

1. Ecrire les deux équations homogènes vérifiées par \underline{Y} et $\underline{\theta}_0$.

2. Montrer que les relations $a_2 k_2 = a_1 k_1$ et $a_2 \lambda_2 = a_1 \lambda_1$ font disparaître le couplage entre y et θ .

3. On suppose les amortissements négligeables $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ pour la suite du problème. Ecrire le polynôme donnant les pulsations propres possibles, solutions d'un régime

sinusoïdal, en fonction de $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 k_1 + a_2^2 k_2}{I}}$ et $h = \frac{a_2 k_2 - a_1 k_1}{\sqrt{IM}}$.

4. Montrer que la condition $h = 0$ permet une solution double, moyennant une valeur $\frac{I}{M}$ que l'on donnera en fonction de a_1 et a_2 .

5. Donner la valeur ω_0 de la solution double en fonction de ω_1 et ω_2 .

6. On indique $\omega_0 = 4 \pi \text{ rad.s}^{-1}$. Calculer littéralement et numériquement I, k_1, k_2 .

Autres concours ; durée : 2h.

Corrigé

1.a. $\overline{H_1 A_1} = a_1 \sin \theta \# a_1 \theta$.

$\overline{H_2 A_2} = -a_2 \sin \theta \# -a_2 \theta$.

$y_1 = y_G + \overline{H_1 A_1}$; $y_2 = y_G + \overline{H_2 A_2}$.

$y_1 = y + a_1 \theta$; $y_2 = y - a_2 \theta$.

b. d'où en éliminant θ :

$y = \frac{a_2 y_1 + a_1 y_2}{a_1 + a_2}$; et en éliminant y : $\theta = \frac{y_1 - y_2}{a_1 + a_2}$.

2.1. Ecrivons l'équilibre de S :

a. $\vec{Mg} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0}$ soit $N_1 + N_2 = Mg$.

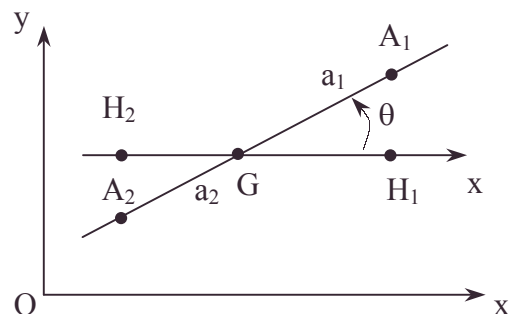
b. $\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{R'} = \vec{0} = \overrightarrow{GA_1} \wedge \vec{N}_1 + \overrightarrow{GA_2} \wedge \vec{N}_2$ soit $a_1 N_1 - a_2 N_2 = 0$.

On tire : $N_1 = \frac{a_2 Mg}{a_1 + a_2}$; $N_2 = \frac{a_1 Mg}{a_1 + a_2}$;

2. A.N. : $N_1 = 5559 \text{ N}$; $N_2 = 4251 \text{ N}$; on notera l'écart et l'ordre des termes.

3. • Ecrivons le principe fondamental de la dynamique pour S :

$\vec{Ma}_G = \vec{Mg} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, soit en projection selon Oy :



$$M\ddot{y} = -k_1 y_1 - k_2 y_2 - \lambda_1 \dot{y}_1 - \lambda_2 \dot{y}_2 + \underbrace{N_1 + N_2 - Mg}_0 \quad \textcircled{1}$$

- Ecrivons le théorème du moment cinétique dans R' :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{R'} = \vec{GA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{GA}_2 \wedge \vec{F}_2 ; \text{ vu } \theta \text{ petit : } \cos \theta \approx 1, \text{ soit :}$$

$$I\ddot{\theta} = a_1 \left(N_1 - k_1 y_1 - \lambda_1 \dot{y}_1 \right) - a_2 \left(N_2 - k_2 y_2 - \lambda_2 \dot{y}_2 \right) ; \text{ or, } a_1 N_1 - a_2 N_2 = 0 ;$$

$$I\ddot{\theta} = -a_1 (k_1 y_1 + \lambda_1 \dot{y}_1) + a_2 (k_2 y_2 + \lambda_2 \dot{y}_2) \quad \textcircled{2}$$

- a. Substituons y et θ vu **1.b.** :

$$\textcircled{1} \text{ s'écrit } M(a_2 \ddot{y}_1 + a_1 \ddot{y}_2) = -(a_1 + a_2)(k_1 y_1 + k_2 y_2 + \lambda_1 \dot{y}_1 + \lambda_2 \dot{y}_2). \quad \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{ s'écrit } I(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) = (a_1 + a_2) \left[a_2 \left(k_2 y_2 + \lambda_2 \dot{y}_2 \right) - a_1 \left(k_1 y_1 + \lambda_1 \dot{y}_1 \right) \right]. \quad \textcircled{2}'$$

- b. Substituons y_1 et y_2 vu **1.a.** :

$$\textcircled{1} \text{ s'écrit } M\ddot{y} = -(k_1 + k_2)y - (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{y} + (a_2 k_2 - a_1 k_1)\theta + (a_2 \lambda_2 - a_1 \lambda_1)\dot{\theta}. \quad \textcircled{1}''$$

$$\textcircled{2} \text{ s'écrit } I\ddot{\theta} = (a_2 k_2 - a_1 k_1)y + (a_2 \lambda_2 - a_1 \lambda_1)\dot{y} - (a_1^2 k_1 + a_2^2 k_2)\theta - (a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2)\dot{\theta} \quad \textcircled{2}''$$

- 4.a. En notation complexe, $\textcircled{1}'$ et $\textcircled{2}'$ s'écrivent :

$$\underline{Y}_1 [-\omega^2 M a_2 + j\omega \lambda_1 (a_1 + a_2) + k_1 (a_1 + a_2)] + \underline{Y}_2 [-\omega^2 M a_1 + j\omega \lambda_2 (a_1 + a_2) + k_2 (a_1 + a_2)] = 0.$$

$$\underline{Y}_1 [-\omega^2 I + j\omega \lambda_1 a_1 (a_1 + a_2) + k_1 a_1 (a_1 + a_2)] - \underline{Y}_2 [-\omega^2 I + j\omega \lambda_2 a_2 (a_1 + a_2) + k_2 a_2 (a_1 + a_2)] = 0.$$

Ce système de 2 équations homogènes à 2 inconnues $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2$ admet des solutions différentes de zéro si son déterminant est nul ; ce déterminant constitue le polynôme cherché, soit :

$$[-\omega^2 M a_2 + j\omega \lambda_1 (a_1 + a_2) + k_1 (a_1 + a_2)][-\omega^2 I + j\omega \lambda_2 a_2 (a_1 + a_2) + k_2 a_2 (a_1 + a_2)] =$$

$$[-\omega^2 M a_1 + j\omega \lambda_2 (a_1 + a_2) + k_2 (a_1 + a_2)][-\omega^2 I + j\omega \lambda_1 a_1 (a_1 + a_2) + k_1 a_1 (a_1 + a_2)].$$

- b. Remplaçons $I = M a_1 a_2$.

$$[-\omega^2 M a_2 + j\omega \lambda_1 (a_1 + a_2) + k_1 (a_1 + a_2)] a_2 [-\omega^2 M a_1 + j\omega \lambda_2 (a_1 + a_2) + k_2 (a_1 + a_2)] =$$

$$[-\omega^2 M a_1 + j\omega \lambda_2 (a_1 + a_2) + k_2 (a_1 + a_2)] a_1 [-\omega^2 M a_2 + j\omega \lambda_1 (a_1 + a_2) + k_1 (a_1 + a_2)], \text{ soit :}$$

$$(a_2 - a_1)[- \omega^2 M a_2 + j\omega \lambda_1 (a_1 + a_2) + k_1 (a_1 + a_2)] \dots$$

$$\dots [-\omega^2 M a_1 + j\omega \lambda_2 (a_1 + a_2) + k_2 (a_1 + a_2)] = 0$$

$$\Rightarrow \text{si } a_1 \neq a_2, -\omega^2 M a_2 + j\omega \lambda_1 (a_1 + a_2) + k_1 (a_1 + a_2) = 0,$$

$$\text{ou } -\omega^2 M a_1 + j\omega \lambda_2 (a_1 + a_2) + k_2 (a_1 + a_2) = 0.$$

- L'équation bicarrée revient à la résolution de 2 équations du second degré.
- Pour a_1, a_2 donnés, la 1^{ère} équation ne dépend que de k_1, λ_1 , et la 2^{ème} équation ne dépend que de k_2, λ_2 .

On a 2 valeurs complexes de ω , chacune caractérisant un des éléments de la suspension, sans qu'il y ait de couplage (entre eux) réagissant sur pulsation et amortissement.

- 5.a. En notation complexe, les équations $\textcircled{1}''$ et $\textcircled{2}''$ de **3.b.** s'écrivent :

$$\underline{Y} [-\omega^2 M + j\omega (\lambda_1 + \lambda_2) + k_1 + k_2] - \theta_0 [j\omega (a_2 \lambda_2 - a_1 \lambda_1) + (a_2 k_2 - a_1 k_1)] = 0.$$

- couplage, Cramer [système de], théorème du moment cinétique

$$Y[j\omega(a_2\lambda_2 - a_1\lambda_1) + (a_2k_2 - a_1k_1)] - \theta_0[-\omega^2 I + j\omega(a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2) + a_1^2k_1 + a_2^2k_2] = 0.$$

b. Si $a_2k_2 = a_1k_1$ et $a_2\lambda_2 = a_1\lambda_1$, le lien entre y et θ contenu dans l'équation 1 disparaît, de même dans l'équation 2 : le couplage entre les deux mouvements a disparu.

c. Substituons : $k_1 + k_2 = M\omega_1^2$; $a_1^2k_1 + a_2^2k_2 = I\omega_2^2$; $a_2k_2 - a_1k_1 = h\sqrt{IM}$.

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ dans le déterminant du système.

$$\begin{vmatrix} (\omega_1^2 - \omega^2)M & -h\sqrt{IM} \\ h\sqrt{IM} & I(\omega_2^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \text{ soit } (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = -h^2.$$

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2 + h^2 = 0.$$

4. On a une solution double pour $\Delta = 0$ qui s'écrit $(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\omega_1^2\omega_2^2 + h^2) = 0$, soit $(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 = 4h^2$.

Or, $a_2k_2 = a_1k_1 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_2^2$ soit des équations initiales proportionnelles

$$\frac{k_1 + k_2}{M} = \frac{a_1^2k_1 + a_2^2k_2}{I} ; \frac{I}{M} = \frac{a_1^2k_1 + a_2^2k_2}{k_1 + k_2}. \text{ Toutes ces positions sont équivalentes.}$$

$$\text{Eliminons } k_1 = \frac{a_2}{a_1}k_2 \text{ par substitution : } \frac{I}{M} = \frac{k_2(a_2^2 + a_1a_2)}{k_2\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)} = \frac{a_2(a_2 + a_1)}{\frac{(a_1 + a_2)}{a_1}} = a_1a_2.$$

Le résultat est symétrique.

5. $\Delta = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_1^2 = \omega_2^2$. Soit $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$.

6.a. $I = Ma_1a_2$; A.N. : $I = 2210 \text{ kg.m}^2$.

b. $k_1 + k_2 = M\omega_0^2$.

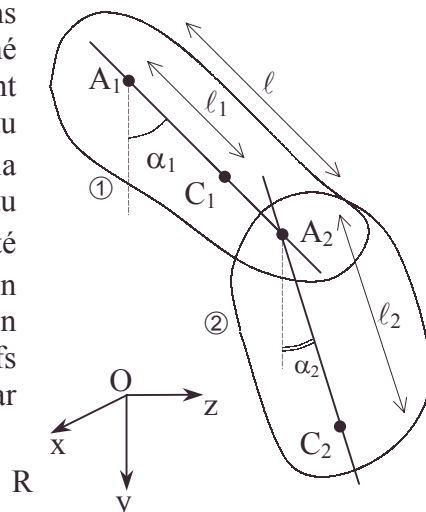
$$a_1^2k_1 + a_2^2k_2 = I\omega_0^2 = M\omega_0^2a_1a_2$$

$$k_1 = \frac{a_2M\omega_0^2}{a_1 + a_2} \text{ et } k_2 = \frac{a_1M\omega_0^2}{a_1 + a_2}$$

A.N. : $k_1 = 89484 \text{ N.m}^{-1}$; $k_2 = 68429 \text{ N.m}^{-1}$.

2.5.2. Equations de Lagrange cloche et battant

On considère un pendule double assujéti à rester dans un plan vertical $x = 0$. Ce pendule double est formé d'un solide ①, de masse M_1 , mobile autour du point A_1 et d'un solide ②, de masse M_2 , mobile autour du point A_2 (voir figure ci-contre). On notera ℓ_1 la distance entre le point A_1 et le centre de gravité C_1 du solide ①, ℓ_2 la distance entre A_2 et le centre de gravité du solide ②, ℓ la distance entre A_1 et A_2 . On supposera que C_1 se trouve sur l'axe A_1A_2 . On désignera par I_1 et I_2 les moments d'inertie respectifs du solide ① par rapport à A_1 et du solide ② par rapport à C_2 .



• centre de gravité [avec g uniforme], cloche, conditions initiales, couplage, équations de Lagrange en mécanique analytique, valeurs propres

On désignera par α_1 et α_2 les angles que font respectivement les axes A_1C_1 et A_2C_2 avec la verticale.

On notera g l'intensité de la pesanteur et on négligera tous les frottements.

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique E du pendule double en fonction de α_1 et α_2 , et de leurs dérivées par rapport au temps, qui seront notées $\dot{\alpha}_1$ et $\dot{\alpha}_2$.

2. Donner de même l'expression de l'énergie potentielle P du système.

3. Donner l'expression du moment cinétique K en A_1 du pendule double.

4. En supposant que le pendule n'est soumis qu'à de petites oscillations, quelles simplifications peut-on apporter aux expressions des trois questions précédentes ?

5. On supposera dorénavant que le système est soumis à de petites oscillations autour de son état d'équilibre. Déduire de la question précédente les équations de mouvement.

6. Vérifier que les équations du mouvement peuvent également être obtenues à partir de l'énergie cinétique et potentielle par les formules

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} = 0, \text{ où } i = 1 \text{ et } i = 2.$$

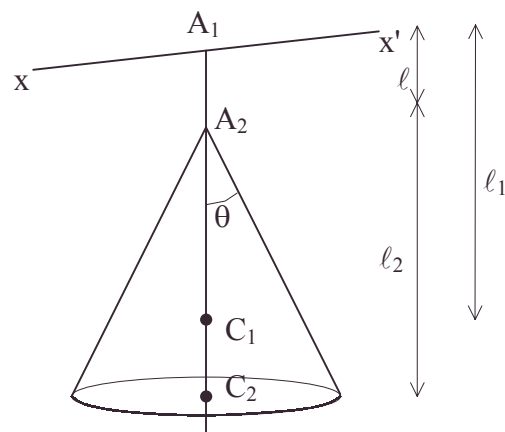
7. Vérifier que les équations $\alpha_1 = A \sin(\omega t + \phi)$ et $\alpha_2 = B \sin(\omega t + \phi)$ forment une solution du système.

On donnera une équation de ω^2 en fonction des données du problème.

8. Discuter alors l'existence, la nature et le nombre des solutions de l'équation en ω^2 .

9. Le pendule double est une cloche ① constituée d'un cône de révolution de sommet A_2 , d'épaisseur négligeable, de rayon de base R , de hauteur ℓ_2 et d'angle au sommet θ et d'un battant ② que l'on assimilera à un pendule simple de longueur ℓ_2 accroché au sommet du cône en A_2 .

Le cône peut osciller autour d'un axe $x'x$ passant par A_1 , l'axe A_1A_2 solidaire du cône et de longueur ℓ étant supposé de masse négligeable (voir figure ci-contre).



On appellera σ la masse surfacique du cône.

a. Déterminer la position du centre de gravité C_1 du cône.

b. Calculer le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe $x'x$. On fournit le résultat à trouver ; $I_{A_1x_1} = \frac{1}{4} M_1 \left(R^2 + 2\ell_2^2 + 4\ell^2 + \frac{16\ell\ell_2}{3} \right)$

c. On se place dans le cas où $M_1 = M_2 = M$, $\ell = \frac{\ell_2}{6}$ et $R = \frac{4}{3} \ell_2$.

Comparer les rapports d'amplitude des angles d'oscillations α_1 et α_2 dans le cas où la cloche et son battant sont soumis à de petites oscillations. Donner une interprétation physique du résultat.

Météo ; Durée : 1h

Corrigé

1. $E_{C_1} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{1A_1} \cdot \vec{\Omega}_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}_1^2$, A_1 est un point fixe de ①.

• centre de gravité [avec g uniforme], centre de masse, centre d'inertie, cloche, développement au premier ordre ou plus, énergie cinétique, équations de Lagrange en mécanique analytique, équilibre, masse surfacique, moment cinétique, moment d'inertie

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} M_2 \overrightarrow{V_{C_2}}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\sigma_{2C_2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_2} \text{ avec } \overrightarrow{\sigma_{2C_2}} = I_2 \dot{\alpha}_2 \vec{x}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 C_2} &= \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 C_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ \ell \cos \alpha_1 + \ell_2 \cos \alpha_2 \\ \ell \sin \alpha_1 + \ell_2 \sin \alpha_2 \end{vmatrix}_R \\ \Rightarrow \overrightarrow{V_{C_2}} &= \left(\frac{d\overrightarrow{A_1 C_2}}{dt} \right)_R = \begin{vmatrix} 0 \\ -\ell \sin \alpha_1 \dot{\alpha}_1 - \ell_2 \sin \alpha_2 \dot{\alpha}_2 \\ \ell \cos \alpha_1 \dot{\alpha}_1 + \ell_2 \cos \alpha_2 \dot{\alpha}_2 \end{vmatrix}_R \end{aligned}$$

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} M_2 \left(\ell^2 \dot{\alpha}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2\ell\ell_2 (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \right) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}_2^2.$$

$$E = E_{C_1} + E_{C_2} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \left(\ell^2 \dot{\alpha}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2\ell\ell_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \right).$$

$$2. E_{P_1} = -M_1 \ell_1 g \cos \alpha_1 ; E_{P_2} = -M_2 y_2 g = -M_2 g (\ell_2 \cos \alpha_1 + \ell_2 \cos \alpha_2).$$

$$P = E_{P_1} + E_{P_2} = -g ((M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) \cos \alpha_1 + M_2 \ell_2 \cos \alpha_2).$$

$$3. \vec{K}_{A_1} = \vec{\sigma}_{1A_1} + \vec{\sigma}_{2A_1} \text{ avec } \vec{\sigma}_{2A_1} = \vec{\sigma}_{2C_2} + \overrightarrow{A_1 C_2} \wedge M_2 \overrightarrow{V_{C_2}} ;$$

$$\vec{\sigma}_{2A_1} = \begin{vmatrix} I_2 \dot{\alpha}_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R + M_2 \begin{vmatrix} \ell^2 \dot{\alpha}_1 + \ell_2^2 \dot{\alpha}_2 + \ell\ell_2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R.$$

$$\vec{K}_{A_1} = \vec{x} \left(I_1 \dot{\alpha}_1 + M_2 \left(\ell^2 \dot{\alpha}_1 + \ell_2^2 \dot{\alpha}_2 + \ell\ell_2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right) + I_2 \dot{\alpha}_2 \right).$$

4. On conserve les termes d'ordre 2 dans les termes énergétiques et les termes d'ordre 1 dans le moment cinétique, $\alpha_1, \alpha_2, \dot{\alpha}_1$ et $\dot{\alpha}_2$ étant supposés infiniment petits, de même ordre (cf. oscillations sinusoïdales).

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \left(\ell^2 \dot{\alpha}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2\ell\ell_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \right) \text{ soit encore :}$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} M_2 \left(\ell \dot{\alpha}_1 + \ell_2 \dot{\alpha}_2 \right)^2.$$

$$P = \frac{1}{2} g [(M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) \alpha_1^2 + M_2 \ell_2 \alpha_2^2] + \text{cste.}$$

$$\vec{K}_{A_1} = \vec{x} \left(I_1 \dot{\alpha}_1 + I_2 \dot{\alpha}_2 + M_2 \left(\ell^2 \dot{\alpha}_1 + \ell_2^2 \dot{\alpha}_2 + \ell\ell_2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \right) \right).$$

5.a. Le théorème du moment cinétique (en A_1 point fixe) donne :

$$\left(\frac{d\vec{K}_{A_1}}{dt} \right)_R = \overrightarrow{A_1 C_1} \wedge M_1 \vec{g} + \overrightarrow{A_1 C_2} \wedge M_2 \vec{g} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A_1}^{\text{liaison en } A_1 \text{ (supposée parfaite)}}.$$

En projection sur l'axe \vec{x} :

$$\textcircled{1} \quad I_1 \ddot{\alpha}_1 + I_2 \ddot{\alpha}_2 + M_2 \left(\ell^2 \ddot{\alpha}_1 + \ell_2^2 \ddot{\alpha}_2 + \ell \ell_2 \left(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 \right) \right) =$$

$$-M_1 \ell_1 g \sin \alpha_1 - M_2 g [\ell \sin \alpha_1 + \ell_2 \sin \alpha_2] + 0.$$

En linéarisant le second membre (pour la cohérence mathématique de l'ordre retenu dans les 2 membres) :

$$I_1 \ddot{\alpha}_1 + I_2 \ddot{\alpha}_2 + M_2 \left(\ell^2 \ddot{\alpha}_1 + \ell_2^2 \ddot{\alpha}_2 + \ell \ell_2 \left(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 \right) + M_1 \ell_1 g \alpha_1 + M_2 (\ell \alpha_1 + \ell_2 \alpha_2) \right) = 0.$$

b. Vu les liaisons parfaites $E + P = \text{cste}$: dérivons :

$$\textcircled{2} \quad 0 = I_1 \dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_1 + I_2 \dot{\alpha}_2 \ddot{\alpha}_2 + M_2 \left(\ell^2 \dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_1 + \ell_2^2 \dot{\alpha}_2 \ddot{\alpha}_2 + \ell \ell_2 \left(\dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_2 + \ddot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_1 \right) \right) \dots$$

$$\dots + g (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) \dot{\alpha}_1 \ddot{\alpha}_1 + M_2 \ell_2 \dot{\alpha}_2 \ddot{\alpha}_2.$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}_i} \right] - \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} = 0. \text{ Il s'agit des équations de Lagrange pour un système non}$$

dissipatif. On considérera $\alpha_1, \alpha_2, \dot{\alpha}_1$ et $\dot{\alpha}_2$ comme des variables indépendantes.

Prenons $i = 1$.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}_1} = I_1 \dot{\alpha}_1 + M_2 \left[\ell^2 \dot{\alpha}_1 + \ell \ell_2 \dot{\alpha}_2 \right]; \quad \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha_1} = g (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) \alpha_1.$$

Prenons $i = 2$.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}_2} = I_2 \dot{\alpha}_2 + M_2 \left[\ell^2 \dot{\alpha}_2 + \ell \ell_2 \dot{\alpha}_1 \right]; \quad \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} = g M_2 \ell_2 \alpha_2$$

Reportons dans les équations de Lagrange :

$$I_1 \ddot{\alpha}_1 + M_2 \left(\ell_2 \ddot{\alpha}_1 + \ell \ell_2 \ddot{\alpha}_2 \right) + g (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) \alpha_1 = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$I_2 \ddot{\alpha}_2 + M_2 \left(\ell_2^2 \ddot{\alpha}_2 + \ell \ell_2 \ddot{\alpha}_1 \right) + g M_2 \ell_2 \alpha_2 = 0 \quad \textcircled{4}$$

Additionnons $\textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$: on retrouve $\textcircled{1}$.

Multiplions $\textcircled{3}$ par $\dot{\alpha}_1$, $\textcircled{4}$ par $\dot{\alpha}_2$, additionnons, on retrouve $\textcircled{2}$.

On préférera les équations $\textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$ qui sont linéaires ; c'est l'intérêt pratique des équations de Lagrange a priori plus abstraites.

7. $\alpha_1 = A \sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha_2 = B \sin(\omega t + \varphi)$;

$$\ddot{\alpha}_1 = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) ; \quad \ddot{\alpha}_2 = -\omega^2 B \sin(\omega t + \varphi)$$

Reportons dans $\textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$; après simplification par $\sin(\omega t + \varphi)$ et mise en facteur :

$$A [g (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) - \omega^2 (M_2 \ell^2 + I_1)] - B M_2 \ell \ell_2 \omega^2 = 0.$$

$$-A M_2 \ell \ell_2 \omega^2 + B [g M_2 \ell_2 - \omega^2 (I_2 + M_2 \ell_2^2)] = 0.$$

Ce système homogène donne des solutions A, B différentes de zéro si son déterminant est nul.

$$[g (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) - \omega^2 (M_2 \ell^2 + I_1)] [g M_2 \ell_2 - \omega^2 (I_2 + M_2 \ell_2^2)] - M_2^2 \ell^2 \ell_2^2 \omega^4 = 0.$$

On obtient l'équation bicarrée :

$$\omega^4 [(I_1 + M_2 \ell^2) (I_2 + M_2 \ell_2^2) - M_2^2 \ell^2 \ell_2^2] - \omega^2 g (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) (I_2 + M_2 \ell_2^2) \dots$$

$$+ g M_2 \ell_2 (M_2 \ell^2 + I_1) + g^2 (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2) M_2 \ell_2 = 0.$$

8. Le discriminant $\Delta = g^2[(M_1\ell_1 + M_2\ell_2)(I_2 + M_2\ell_2^2) + M_2\ell_2(M_2\ell_2^2 + I_1)]^2 \dots$
 $- 4(M_1\ell_1 + M_2\ell_2)M_2\ell_2g^2 \cdot [(I_1 + M_2\ell_2^2)(I_2 + M_2\ell_2^2) - M_2^2\ell_2^2\ell_2^2]$ s'écrit encore :
 $\Delta = g^2[(M_1\ell_1 + M_2\ell_2)(I_2 + M_2\ell_2^2) - M_2\ell_2(M_2\ell_2^2 + I_1)]^2 + 4g^2M_2^2\ell_2^2\ell_2^2(M_1\ell_1 + M_2\ell_2)$.
 $\Delta > 0$: il existe 2 solutions réelles distinctes en ω^2 ; pour avoir ω réel, il faut $\omega^2 > 0$.

$$\text{Or } \omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{M_2\ell_2g^2(M_1\ell_1 + M_2\ell_2)}{[(I_1 + M_2\ell_2^2)(I_2 + M_2\ell_2^2) - M_2^2\ell_2^2\ell_2^2]},$$

$$\text{et } \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{g[(M_1\ell_1 + M_2\ell_2)(I_2 + M_2\ell_2^2) + M_2\ell_2^2(M_2\ell_2^2 + I_1)]}{[(I_1 + M_2\ell_2^2)(I_2 + M_2\ell_2^2) - M_2^2\ell_2^2\ell_2^2]}.$$

Numérateurs et dénominateurs étant positifs, somme et produit sont positifs et ω_1^2, ω_2^2 sont positifs ; ω_1, ω_2 sont réels.

Conclusion : il existe toujours 2 pulsations distinctes ω_1 et ω_2 de résonance sans amortissement.

9.a. Par symétrie, C_1 est sur l'axe de révolution A_2y_1 .

or, $M_1 \overrightarrow{A_2C_1} = \int A_2 \overrightarrow{M} dm = \int A_2 \overrightarrow{M} \sigma dS$ cf. barycentre,
 et en projection sur A_2y_1 : voir figures ci-contre.

$$M_1 y_{C_1} = \int y \sigma dS.$$

$$\bullet \text{ Aussi, } dS = 2\pi r \frac{dy}{\cos \theta} = 2\pi y \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} dy,$$

$$\Rightarrow S_{\text{lat}} = 2\pi \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \int_0^{\ell_2} y dy = \frac{2\pi}{2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \ell_2^2.$$

$$\bullet \int y dS = 2\pi \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \int_0^{\ell_2} y^2 dy = \frac{2\pi}{3} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \ell_2^3;$$

cone creux

$$M_1 = \sigma S_{\text{lat}} = \frac{2\pi\sigma\sin\theta}{2\cos^2\theta} \ell_2^2; \quad y_{C_1} = \frac{\int y\sigma dS}{M_1} = \frac{2}{3} \ell_2.$$

b. $I_{A_2x_1} = \int (y^2 + z^2) dm$; $I_{A_2z_1} = \int (x^2 + y^2) dm$; $I_{A_2y_1} = \int (x^2 + z^2) dm$, avec :
 $I_{A_2x_1} = I_{A_2z_1}$ vu la symétrie de révolution. On calcule aisément :

$$\int y^2 dm = \sigma \int y^2 dS = \sigma \int_0^{\ell_2} y^3 2\pi \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} dy = 2\pi\sigma \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\ell_2^4}{4}.$$

$$I_{A_2y_1} = \int (x^2 + z^2) dm = \sigma \int y^2 \tan^2 \theta \cdot 2\pi \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} y dy = 2\pi\sigma \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\ell_2^4}{4} \tan^2 \theta.$$

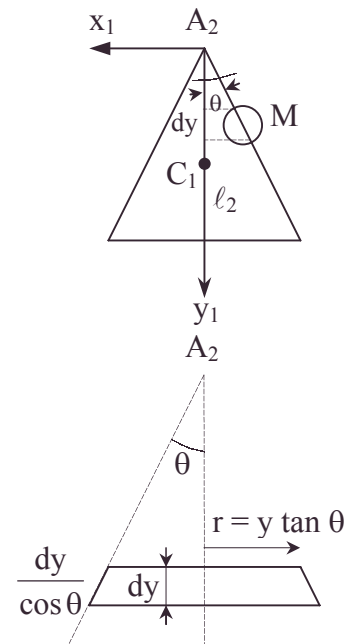
$$I_{A_2x_1} + I_{A_2z_1} = \int [(x^2 + z^2) + 2y^2] dm = 2\pi\sigma \frac{\ell_2^4}{4} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} (\tan^2 \theta + 2) = 2I_{A_2x_1}.$$

$$I_{A_2x_1} = \frac{1}{4} M_1 \ell_2^2 (\tan^2 \theta + 2) = \frac{1}{4} M_1 \ell_2^2 \left(\frac{R^2}{\ell_2^2} + 2 \right) = \frac{1}{4} M_1 (R^2 + 2\ell_2^2).$$

Or d'après le théorème de Huygens sur les moments d'inertie,

$$I_{A_2x_1} = I_{C_1x_1} + M_1 \left(\frac{2\ell_2}{3} \right)^2; \quad I_{A_1x_1} = I_{C_1x_1} + M_1 \left(\ell + \frac{2\ell_2}{3} \right)^2.$$

$$\text{En éliminant } I_{C_1x_1}, \quad I_{A_1x_1} = I_{A_2x_1} + M_1 \left[\left(\ell + \frac{2\ell_2}{3} \right)^2 - \left(\frac{2\ell_2}{3} \right)^2 \right].$$



• barycentre de masse, Huygens [théorème sur les moments d'inertie d'], masse [calcul de], moment d'inertie, projections, résonance, symétrie

$$I_{A_1x_1} = \frac{1}{4} M_1 \left(R^2 + 2\ell_2^2 + 4\ell^2 + \frac{16}{3} \ell \ell_2 \right) \text{ c.q.f.d.}$$

$$\text{c. } I_{A_1x_1} = I_1 = \frac{43}{36} M \ell_2^2 ; I_2 = 0 ; C_2 \text{ est à la distance } \ell_2 \text{ de } A_2$$

$$\text{l'équation bicarrée s'écrit : } \frac{43}{36} M^2 \ell_2^4 \omega^4 - \frac{80}{36} \omega^2 g M^2 \ell^3 \omega^2 + g^2 M^2 \ell_2^2 = 0.$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell_2} \left[\frac{80 \pm \sqrt{208}}{86} \right] \text{ d'où les pulsations de résonance non amorties.}$$

$$\omega_1^2 = 1,098 \frac{g}{\ell_2} ; \omega_2^2 = 0,7625 \frac{g}{\ell_2} \text{ de la forme } \alpha \frac{g}{\ell_2} ; \text{ or, d'après 7.,}$$

le rapport des amplitudes des oscillations libres de résonance :

$$\frac{A}{B} = \frac{g M_2 \ell_2 - \omega^2 (I_2 + M_2 \ell_2^2)}{M_2 \ell \ell_2 \omega^2} = \frac{\frac{g}{\ell_2} - \omega^2}{\frac{\omega^2}{6}} = \frac{1 - \alpha}{\frac{\alpha}{6}} = \frac{6(1 - \alpha)}{\alpha}.$$

$$\textcircled{1} \left(\frac{A}{B} \right)_{\omega_1} = -0,535 ; \textcircled{2} \left(\frac{A}{B} \right)_{\omega_2} = +1,869.$$

Dans le cadre où $\alpha_1 = A \sin(\omega t + \phi)$; $\alpha_2 = B \sin(\omega t + \phi)$ d'oscillations synchronisées :

① La cloche a une plus faible amplitude que le battant mais celui-ci a une amplitude quasi double (et en opposition de phase) et frappera la cloche. C'est le mode souhaitable car les vitesses sont opposées. Il y aura ensuite la remise en route du battant après le choc.

② La cloche a une amplitude quasi double du battant et dans ces mouvements en phase il n'y aura pas de choc. Ce mode n'a pas d'effet sonore.

2.5.3. Oscillateurs couplés

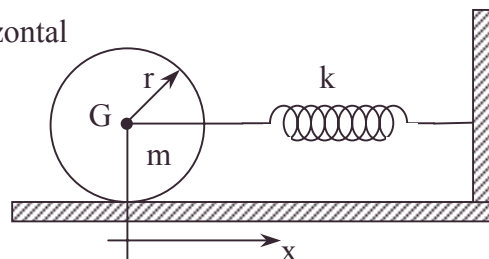
Les parties **I.**, **II.** et **III.** peuvent être traitées indépendamment, ce qui signifie en particulier qu'une même notation littérale puisse être affectée dans ces différentes parties à des entités distinctes.

Mouvements et équilibres possibles d'un cylindre

Le problème envisage différentes situations de mouvement ou de l'équilibre statique d'un cylindre homogène, de masse m , de rayon r .

I. Le cylindre roule sans glisser sur un plan horizontal

A. L'axe de symétrie du cylindre est relié à un point fixe par un ressort linéaire de constante k . On note x le déplacement du centre d'inertie G du cylindre par rapport à sa position d'équilibre statique.



1. Etablir l'équation différentielle en x du mouvement du cylindre (plusieurs méthodes sont possibles). On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par G , $I = \frac{1}{2} m r^2$.

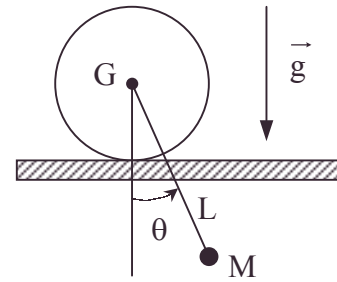
2. En déduire l'expression de ω^2 , où ω désigne la pulsation naturelle du système.

• centre d'inertie, cloche, couplage, équilibre, moment d'inertie, résonance, ressort, roulement sans glissement, statique du solide, symétrie

B. L'axe de symétrie du cylindre et donc le cylindre est ici solidaire par soudage d'un pendule simple de tige sans masse de longueur L et de masse ponctuelle M . (Rappel : il y a roulement sans glissement).

L'ensemble est dans le champ de pesanteur usuel de module g .

On note θ l'angle de la tige du pendule avec la verticale, de sorte que $\theta = 0$ caractérise l'équilibre statique du système.



3. Ecrire le moment d'inertie J_c du système par rapport au centre instantané de rotation C.

4. Ecrire l'équation différentielle en θ du mouvement, et son expression linéarisée pour les petits déplacements en θ .

5. En déduire, dans ces derniers cas, l'expression de ω^2 , où ω désigne la pulsation naturelle du système.

II. Le cylindre est maintenant placé dans une coquille constituée d'un demi cylindre de rayon R ($R > r$), d'axe O. La demi coquille est fixe et le cylindre soumis au champ de pesanteur g .

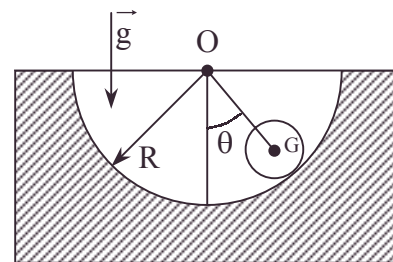
On repère par θ la position angulaire du cylindre dans la coquille, de sorte que $\theta = 0$ corresponde à la position d'équilibre statique.

On note φ l'angle de rotation propre du cylindre, de sorte que $\varphi = 0$ corresponde également à la position d'équilibre statique.

A. On suppose dans cette partie que le cylindre glisse sans frottement.

6. Ecrire le moment d'inertie J_0 du cylindre par rapport à son centre de rotation O.

7. Ecrire l'équation différentielle en θ du mouvement, et son expression linéarisée pour les petits déplacements en θ .



8. En déduire, dans ces derniers cas, l'expression de ω^2 , où ω désigne la pulsation naturelle du système.

B. On suppose dans cette partie que le cylindre roule sans glissement.

9. Ecrire la relation de roulement sans glissement liant les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.

10. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c du système.

11. Donner l'expression de son énergie potentielle E_p .

12. En déduire l'équation différentielle en θ du mouvement, et son expression linéarisée pour les petits déplacements en θ .

13. Donner, dans ce dernier cas, l'expression de ω^2 , où ω désigne la pulsation naturelle du système. Comparer ce résultat à celui obtenu à la question 8. et commenter.

C. On suppose dans cette partie que le cylindre est soumis à un frottement de glissement coulombien de coefficient f . On note T et N les composantes tangentielle et normale de la réaction d'appui de la demi coquille sur le cylindre.

14. Donner les expressions de T et de N en fonction de θ et ses dérivées.

15. Etablir, en fonction de f , la condition requise sur la valeur initiale θ_0 de θ (à la vitesse initiale de $\dot{\theta}_0 = 0$) pour que s'amorce le roulement sans glissement du cylindre à $t = 0$ (cf. partie II.B.)

• centre d'inertie, centre instantané de rotation, coefficient de frottement, conditions initiales, énergie cinétique, équilibre, linéarisation, moment d'inertie, mouvement sans frottement, roulement sans glissement, symétrie

III. Dans cette partie, la demi coquille de la partie **II.** est rigidement solidarisée d'une barre massive B, de sorte que son axe, contenant O, soit dans le plan de symétrie transverse de l'ensemble.

Le centre d'inertie du dit ensemble est Ω et on note L la distance ΩO .

Au point Ω est fixé un ressort de rappel linéaire de constante k fournissant le moment $\Gamma = k\alpha$, où α désigne l'angle que forme la barre avec la verticale ascendante. Le cylindre est placé dans la demi coquille et on s'intéresse aux équilibres possibles du système ainsi constitué placé dans le champ de pesanteur g.

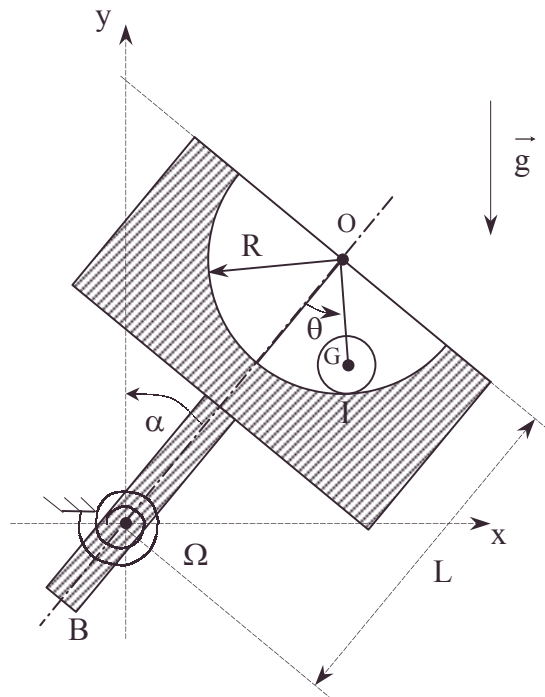
16. Etablir, en application du théorème des moments, la condition d'équilibre statique du système.

17. Montrer que l'équilibre est possible pour deux valeurs α_1 et α_2 de α que l'on précisera.

18. Faire un graphe représentatif de la situation sous la forme de l'intersection de la courbe $z = \sin \alpha$ avec la courbe $z = f(\alpha)$ convenable.

19. Décrire, en fonction des valeurs du facteur $\frac{k}{mgL}$, les différentes situations envisageables.

20. Le système, supposé initialement immobilisé en $\alpha = \alpha_0$, est libéré. Discuter alors de la stabilité des équilibres possibles en fonction des situations ci-dessus et de la valeur initiale α_0 choisie.



Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

A.1. Soit θ l'angle de rotation du solide S dans son repère barycentrique : $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{z}$. La condition de roulement sans

glissement s'écrit : $\vec{V}_I = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{0}$ soit $0 = \dot{x} + r \dot{\theta}$.

Le mouvement de S défini par 2 paramètres x et θ liés se résout simplement par une méthode énergétique scalaire à 1 paramètre indépendant.

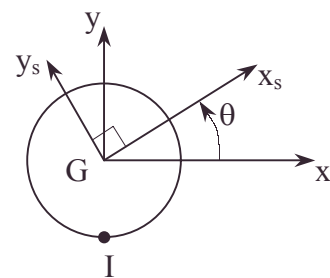
La puissance des actions de contact en I est nulle :

$$\vec{F} \cdot \vec{V}_I = 0 \text{ car } \vec{V}_I = \vec{0} \Rightarrow E_c + E_p = \text{cste}$$

Soit $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{cste}$, l'origine de l'axe des x étant prise à la position de repos du ressort.

Il reste $\frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{cste}$; en dérivant on a : $\ddot{x} + \frac{2k}{3m} x = 0$.

$$2. \omega^2 = \frac{2k}{3m}.$$



B. On considère le solide constitué du cylindre et tige soudés dont le mouvement plan sur plan permet de pouvoir parler du centre instantané de rotation du système.

3. $\vec{V}_I = \vec{0} \Rightarrow C$ est en I car $\vec{V}_C = \vec{0}$ caractérise le centre instantané de rotation dans un mouvement plan sur plan : C unique intersection du plan et de l'axe central du torseur des vitesses.

$J_{Cz} = J_{Gz} + (m + M)R^2$ d'après le théorème de Huygens.

$$\text{Or } J_{Gz} = \frac{1}{2}mR^2 + ML^2 \Rightarrow J_{Cz} = \frac{3}{2}mR^2 + M(R^2 + L^2).$$

$$4.a. \text{ Le solide ayant un point de vitesse nulle, } E_C = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_I \vec{\Omega} \text{ or } \vec{\Omega}_{R_s} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix},$$

R_s repère lié au solide,

$\Rightarrow \vec{\sigma}_I = J_C \vec{\Omega}$ (cf. évidence cinétique ou matrice d'inertie).

$$E_C = \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[M(R^2 + L^2) + \frac{3}{2}mR^2 \right] \dot{\theta}^2.$$

$$E_p = -MgL \cos \theta + \text{cste}.$$

$$E_C + E_p = \text{cste} \text{ car } \vec{F} \cdot \vec{V}_I = 0.$$

contact

$$\frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 - Mg \ell \cos \theta = \text{cste}.$$

$$\text{Dérivons : } J_C \ddot{\theta} + MgL \sin \theta = 0.$$

$$\text{Linéarisons : } \ddot{\theta} + \frac{Mg}{J_C} L \theta = 0.$$

$$5. \omega^2 = \frac{MgL}{J_C} = \frac{MgL}{M(R^2 + L^2) + \frac{3}{2}mR^2}.$$

$$6. \text{ D'après le théorème de Huygens : } J_{Oz} = J_{Gz} + m(R-r)^2 = m \left(\frac{r^2}{2} + (R-r)^2 \right),$$

Oz étant orthogonal au plan de la figure.

$$7. \left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{R_{Gb}} = \vec{0} \text{ vu } T = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_G(t) = \vec{\sigma}_G(0) \text{ soit } I\dot{\varphi} = I\dot{\varphi}_0.$$

Ce système non dissipatif a la conservation de l'énergie $E_c + E_p = \text{cste}$ qui s'écrit :

$$\frac{m}{2}(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_0^2 - mg(R-r) \cos \theta = \text{cste},$$

$$\text{soit } \frac{m}{2}(R-r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R-r) \cos \theta = \text{cste}.$$

$$\text{Après dérivation : } (R-r) \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

$$\text{Après linéarisation : } (R-r) \ddot{\theta} + g\theta = 0, \text{ d'où } \omega^2 = \frac{g}{R-r}.$$

• centre instantané de rotation, cinétique, conservation de l'énergie, Huygens [théorème sur les moments d'inertie d'], linéarisation, matrice, repère barycentrique, roulement sans glissement, torseur des vitesses d'un solide

B.9. Soit I le point de contact ; le roulement sans glissement s'écrit :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{0} \text{ soit } (R-r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0.$$

$$10. E_c = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\sigma}_G \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 \text{ car } \vec{\sigma}_G = I\vec{\Omega} \text{ avec } \vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{z};$$

$$E_c = \frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2 \text{ après remplacement de } \dot{\varphi}.$$

$$11. E_p = -mg(R-r)\cos\theta + \text{cste.}$$

12. $P = (\vec{N} + \vec{T}) \cdot \vec{V}_I = 0$ car $\vec{V}_I = \vec{0}$; ce système non dissipatif a la conservation de l'énergie soit $E_c + E_p$ qui s'écrit :

$$\frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mg(R-r)\cos\theta = \frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}_0^2 - mg(R-r)\cos\theta_0 ;$$

$$\text{après dérivation } \frac{3}{4}(R-r)\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0.$$

$$\text{Après linéarisation : } \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0.$$

$$13. \omega^2 = \frac{2g}{3(R-r)} \neq \frac{g}{R-r}.$$

Le cylindre du **II.a.** peut être assimilé à un point matériel.

L'énergie cinétique de rotation propre n'intervient pas.

L'approximation du point matériel est impossible en **II.B.** car l'énergie cinétique de rotation propre intervient à part entière (φ paramètre descriptif non constant) : traduction conséquence du frottement nécessaire à la rotation.

C.14. $m\vec{a}_G = \vec{N} + \vec{T} + m\vec{g}$; G a une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $R-r$.

en projection sur \vec{u}_ρ :

$$-m(R-r)\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta.$$

en projection sur \vec{u}_θ :

$$m(R-r)\ddot{\theta} = T - mg\sin\theta.$$

$$\text{On tire : } T = m\left[g\sin\theta + (R-r)\ddot{\theta}\right] ; N = m\left[g\cos\theta + (R-r)\dot{\theta}^2\right]$$

15. si le roulement sans glissement existe à $t = 0$, on peut remplacer

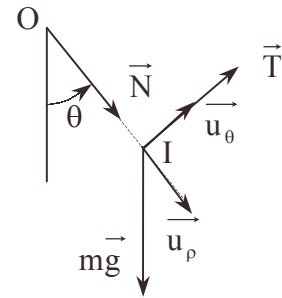
$$\dot{\theta}^2 \text{ vu } \frac{3}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2 - (R-r)\cos\theta = -(R-r)\cos\theta_0, \text{ et } \ddot{\theta} = -\frac{2g}{3}\frac{\sin\theta}{(R-r)}, \text{ vu 12.} \Rightarrow$$

$$T = \frac{mg}{3}\sin\theta \quad . \quad N = \frac{1}{3}m[7g\cos\theta - 4\cos\theta_0].$$

La condition $|T| \leq f|N|$ en $\theta = \theta_0$ s'écrit : $\frac{mg}{3}\sin\theta_0 \leq fmg\cos\theta_0$ soit $\tan\theta_0 \leq 3f$.

III.16. L'équilibre du cylindre se traduit par :

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}.$$

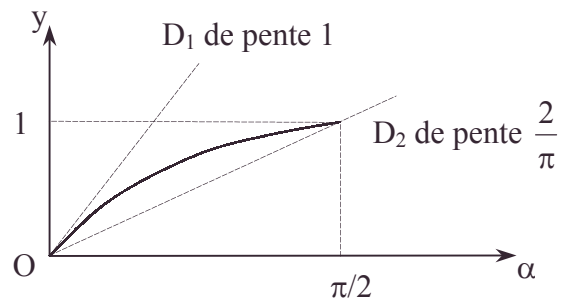


$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{R_{Gb}} = \vec{0} \Rightarrow rT = 0 \Rightarrow T = 0.$$

De même $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{0} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} + \vec{OI} \wedge \vec{N} = (\vec{OG} - \vec{OI}) \wedge m\vec{g} \Rightarrow GI$ verticale ; or G sur la normale en I à la demi-coquille $OG \Rightarrow OG$ vertical, soit $\theta = \alpha$.
L'équilibre se traduit par une somme de couples extérieurs nuls en projection sur z pour le système cylindre, demi coquille ; la liaison étant supposée parfaite autour de Ωz ,
 $k\alpha = mgL \sin \alpha$.

17.18.19. On détermine graphiquement les valeurs de α comme intersection de $y = \frac{k\alpha}{mgL}$ et de $y = \sin \alpha$.

α décrivant l'intervalle $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, vu la symétrie et aussi car $\frac{\pi}{2}$ est le cas limite d'inclinaison après lequel le cylindre tombe.



Étudions les 3 cas :

a. Si la droite $D : y = \frac{k\alpha}{mgL}$ est de pente supérieure à 1, une seule intersection $\alpha_1 = 0$.

b. Si la droite D a une pente comprise entre 1 et $\frac{2}{\pi}$, $\frac{2}{\pi} < \frac{k}{mgL} < 1$, on a une valeur α_2

(et $-\alpha_2$) en plus de α_1 .

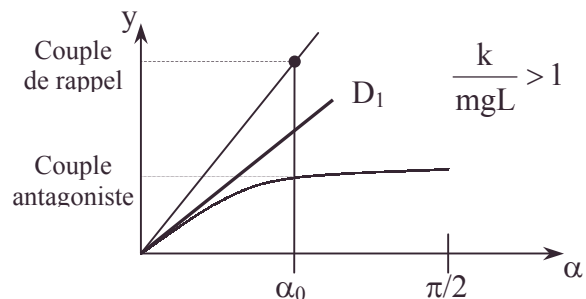
c. Si la droite D a une pente inférieure à $\frac{2}{\pi}$, on n'a que la solution $\alpha_1 = 0$.

20. A un changement d'échelle près,

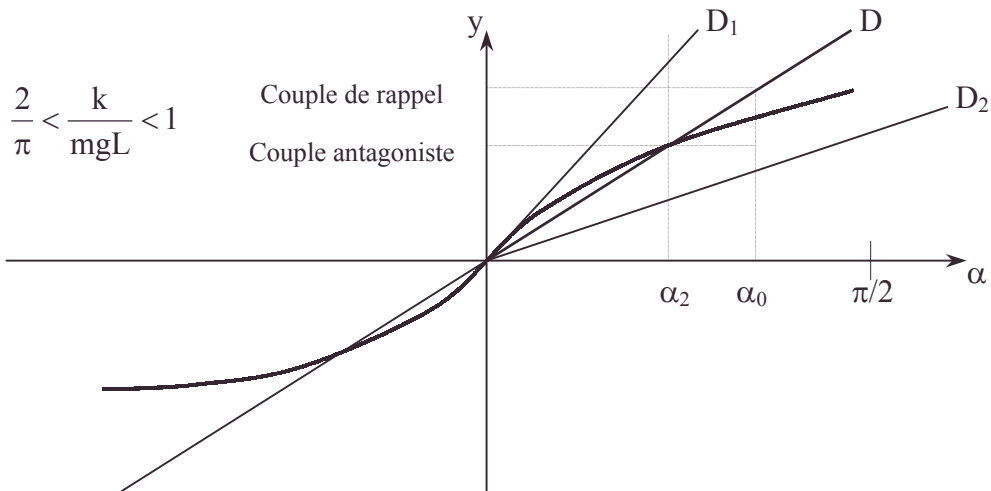
$\frac{k\alpha}{mgL}$ représente le module du couple de rappel ;

$\sin \alpha$ représente le module du couple exercé par le cylindre, au voisinage de l'équilibre (cf. démarrage et équilibre éventuel après amortissement).

a. Le couple de rappel plus grand ramène la demi coquille vers $\alpha_1 = 0$. De même symétriquement, si on va au-delà de $\alpha_1 = 0$, ces oscillations montrent la stabilité de $\alpha_1 = 0$.



b.

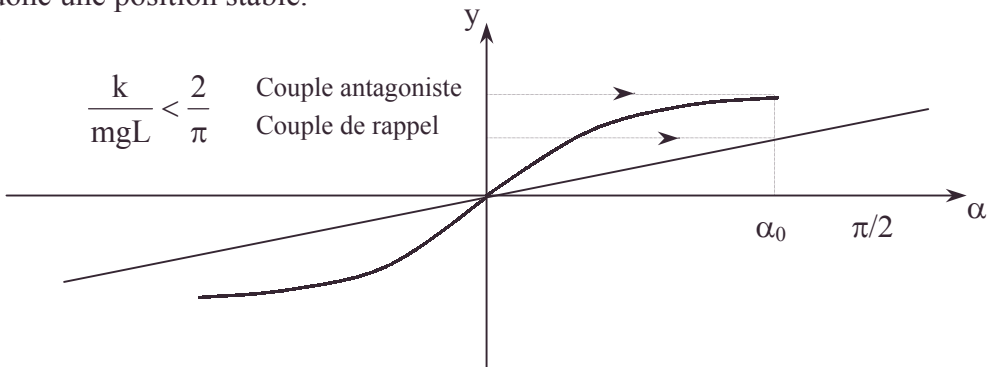


en $\alpha_0 > \alpha_2$, le couple de rappel ramène la demi coquille vers α_2 ;

De même si $\alpha_0 < \alpha_2$, α croissant sous l'effet du couple antagoniste.

α_2 est donc une position stable.

c.

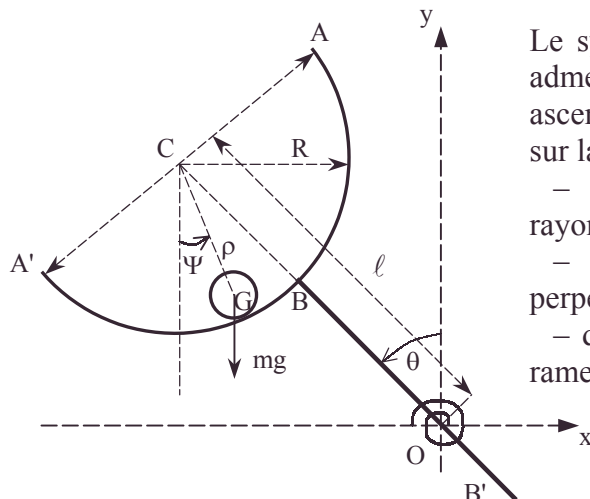


Le couple antagoniste l'emporte ; α croît vers $\pi/2$; au-delà, le cylindre tombe.

Le couple de rappel, seule action, ramène la demi coquille à la position $\alpha_1 = 0$.

$\alpha_1 = 0$ n'est pas une position stable du système total cylindre, demi coquille.

2.5.4. Cylindre dans coupelle oscillante



Le système mécanique étudié dans ce problème admet le plan vertical xOy (Oy verticale ascendante) comme plan de symétrie (représenté sur la figure) et se compose :

- d'une coupelle demi-cylindrique $A'BA$ de rayon R , d'axe C .
- d'une tige $B'OB$ portée par OC et perpendiculaire à $A'A$.
- d'un ressort spiral de rappel en O , tendant à ramener BC sur Oy .
- d'un rouleau cylindrique de rayon r , d'axe G , de poids mg placé dans la coupelle.

On appelle ℓ la distance OC et $\rho = R - r$ la distance CG.

θ , angle de OC avec Oy et Ψ , angle de CG avec la verticale descendante, sont comptés positivement dans le sens trigonométrique direct.

Le couple de rappel du ressort est $m = -k\theta$. L'ensemble tige-coupelle est supposé bien équilibré, son centre de gravité étant O. Son moment d'inertie par rapport à O est J.

On appelle T et N les composantes tangentielle et normale de la réaction d'appui (coupelle sur rouleau), T étant comptée positivement dans le sens de Ψ croissant.

Première partie

1. En supposant θ immobilisé à la valeur θ_1 , indiquer la position éventuelle d'équilibre du rouleau et la condition d'existence de cet équilibre.

2. θ étant libre, indiquer les positions éventuelles d'équilibre du système et leurs conditions d'existence suivant les valeurs de $\frac{k}{mg\ell}$.

Il pourra être utile de se référer à une solution graphique.

3. En supposant qu'un équilibre réalisé dans les conditions de la première question est suivi de la libération de θ , dire dans quel sens le système évoluera et, sans calcul, les suites du mouvement selon les valeurs de $\frac{k}{mg\ell}$ et de θ_1 .

Deuxième partie

Dans cette partie, on suppose θ bloqué à la valeur $\theta_1 = 0$.

1. Si le rouleau glisse sans frottement dans la coupelle,

a. Donner une équation du mouvement de G ;

b. Calculer la période du petit mouvement quand Ψ reste petit.

2. Si le rouleau roule sans glisser dans la coupelle,

a. Ecrire la relation entre la vitesse de rotation propre $\dot{\phi}$ du rouleau et la vitesse angulaire $\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$ traduisant ce roulement sans glissement.

b. Calculer l'énergie mécanique totale du rouleau en fonction de $\dot{\psi}$ et ψ ;

c. En déduire l'équation du mouvement en introduisant l'amplitude maximale ψ_0 ;

d. Calculer la période du petit mouvement pour ψ_0 petit.

3. S'il existe au contact du rouleau et de la coupelle un frottement de glissement obéissant aux lois de Coulomb,

a. Rappeler l'équation reliant N et T module de l'action respectivement normale et tangentielle dans le cas où le rouleau glisse dans la coupelle en précisant le signe.

b. Expliciter les conditions sur ψ_0 pour que le mouvement du rouleau soit et se poursuive sans cesser d'être, un roulement sans glissement.

Troisième partie

Dans cette partie, on suppose θ libéré.

1. Si le rouleau glisse sans frottement dans la coupelle,

a. écrire les équations des mouvements de G et de la coupelle.

b. transformer ces équations dans le cadre des petits mouvements autour de la position

d'équilibre définie par $\theta = 0$ et $\psi = 0$, c'est-à-dire en supposant $\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ infiniment petits du 1^{er} ordre. En cherchant les solutions de la forme $\theta = \lambda e^{st}$; $\psi = \mu e^{st}$, montrer

qu'un mouvement harmonique n'est possible que si $\frac{k}{mg\ell} > 1$.

• centre de gravité, coefficient de frottement, développement au premier ordre ou plus, équilibre, loi de Coulomb, maximum, mouvement sans frottement, P.F.D., roulement sans glissement, solution graphique, statique du solide

- c. calculer la période du petit mouvement si $J = 0$.
2. Si le rouleau roule sans glisser dans la coupelle,
- Ecrire la relation entre $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$;
 - Indiquer une méthode permettant d'établir les équations du mouvement.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. A l'équilibre, $m\vec{a}_G = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$.

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_R = \vec{0} = \vec{GI} \wedge \vec{T} + \vec{0} + \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{T} // \vec{GI}.$$

Or, par définition, $\vec{T} \perp \vec{GI} \Rightarrow \vec{T} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{N} = -m\vec{g}$ vertical $\Rightarrow \psi = 0$

L'équilibre existe avec G en-dessous de C, à condition que

le rouleau reste dans la coupelle, soit $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$.

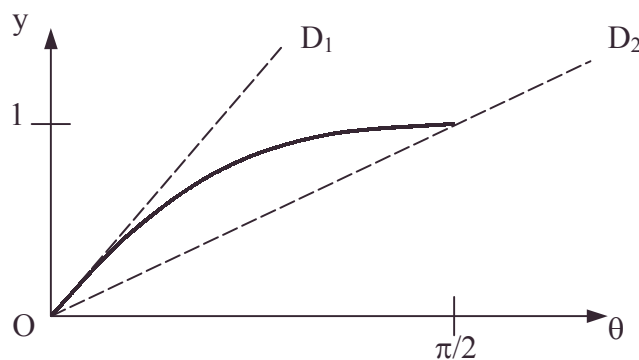
2. L'équilibre du système suppose l'équilibre du rouleau, soit les équations précédentes. Ecrivons l'équilibre de l'ensemble selon Oz :

$-k\theta + mg\ell \sin \theta + 0 = 0$, liaison parfaite selon Oz.

Etude graphique de $\sin \theta = \frac{k}{mg\ell} \theta$:

Il s'agit de visualiser l'intersection d'une sinusoïde et d'une droite passant par l'origine, D, de pente $\frac{k}{mg\ell}$. (cf; la figure suivante).

Si θ est solution, $-\theta$ le sera aussi. On n'étudiera que l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cf. 1.



D₁ droite tangente en O donc de pente 1.

D₂ droite limite d'existence de pente $2/\pi$.

Si la pente de D est supérieure à 1 ou inférieure à $2/\pi$ il n'y a pas de solution autre que $\theta = 0$.

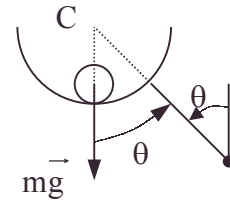
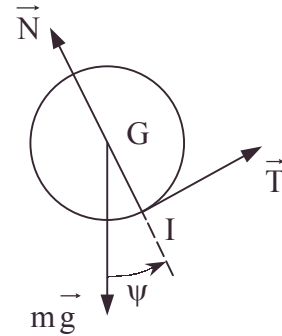
Pour $\frac{2}{\pi} < \frac{k}{mg\ell} \leq 1$ il y a une solution (et la symétrique) en plus de $\theta = 0$.

3.a. Pour $\frac{k}{mg\ell} > 1$, le couple de rappel l'emporte sur le couple exercé par le rouleau.

$\forall \theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On va atteindre la position d'équilibre $\theta = 0$.

L'importance relative du couple de rappel implique des oscillations autour de $\theta = 0$ et donc la stabilité de cette position.

• couple, couple de rappel, équilibre, solution graphique, stabilité, théorème du moment cinétique



b. Pour $\frac{k}{mg\ell} < \frac{2}{\pi}$, le couple exercé par le rouleau l'emporte sur le couple de rappel.

θ passe de θ_1 à $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ chute du rouleau ; la coupelle se redresse après.

c. Pour $\frac{2}{\pi} < \frac{k}{mg\ell} < 1$:

• $\theta = 0 + \varepsilon$; le couple du rouleau l'emporte sur le couple de rappel et θ augmente.

• Si $\theta = \theta_e + \varepsilon$ le couple de rappel l'emporte sur le couple du rouleau : $\theta \rightarrow \theta_e$.

Si $\theta = \theta_e - \varepsilon$ le couple du rouleau l'emporte sur le couple de rappel : $\theta \rightarrow \theta_e$.

θ_e est donc une position stable qui s'établit à partir de θ_1 .

II.1.a. $T = 0$; $\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{R_{Gb}} \cdot \vec{z} = 0 = I\ddot{\varphi}$ avec $I = \frac{1}{2}mr^2$.

φ angle de rotation propre ; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Un problème à un paramètre indépendant se résout par la conservation de l'énergie car il n'y a pas d'effet dissipatif vu $T = 0$.

$$E_c = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_0^2 \text{ avec } V_G^2 = \rho^2 \dot{\psi}^2 ; E_p = -mg\rho \cos \psi$$

$$\text{On a : } \frac{1}{2}m\rho^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_0^2 - mg\rho \cos \psi = \text{cste.}$$

$$\text{En dérivant : } \ddot{\psi} + \frac{g}{\rho} \sin \psi = 0.$$

b. Si ψ est petit, on linéarise $\sin \psi = \psi$;

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{\rho} \psi = 0 \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{g}}.$$

2.a. Ecrivons le roulement sans glissement.

$$\vec{V}_I = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \vec{0} \text{ soit } \rho \dot{\psi} + r \dot{\varphi} = 0.$$

$$\text{b. } E_c = \frac{1}{2}m\rho^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mr^2 \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m\rho^2 \dot{\psi}^2.$$

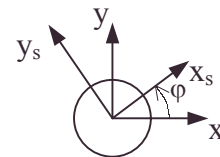
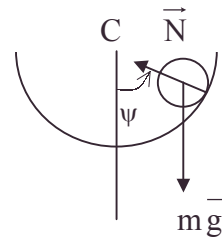
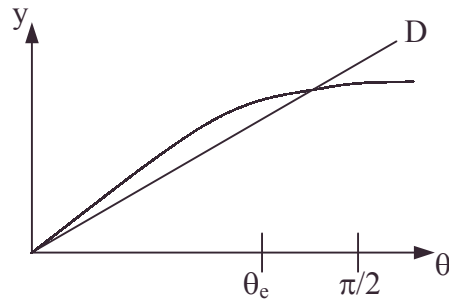
$$E_c + E_p = \frac{3}{4}m\rho^2 \dot{\psi}^2 - mg\rho \cos \psi.$$

c. Vu l'effet non dissipatif du roulement sans glissement :

$$P = (\vec{T} + \vec{N}) \cdot \vec{V}_I = 0, \text{ on a conservation de } E_c + E_p.$$

$$\text{Soit } \frac{3}{4}m\rho^2 \dot{\psi}^2 - mg\rho \cos \psi = 0 - mg\rho \cos \psi_0, \text{ car } \dot{\psi} = 0 \text{ pour } \psi = \psi_{\max} = \psi_0.$$

$$\text{d. Dérivons : } \ddot{\psi} + \frac{2}{3} \frac{g}{\rho} \sin \psi = 0.$$



• conservation de l'énergie, couple, couple de rappel, linéarisation, roulement sans glissement, stabilité, théorème du moment cinétique

Linéarisons : $\ddot{\psi} + \frac{2g}{3\rho}\psi = 0 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{3\rho}{2g}}$.

3.a. Exprimons \vec{a}_G pour le mouvement circulaire de G d'angle polaire ψ .

$$\vec{a}_G = -\rho\dot{\psi}^2 \vec{u}_\rho + \rho\ddot{\psi} \vec{u}_\psi.$$

Le principe fondamental appliqué au rouleau s'écrit :

$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$, soit en projections sur \vec{u}_ρ et \vec{u}_ψ :

$$-m\rho\dot{\psi}^2 = mg \cos \psi - N ; m\rho\ddot{\psi} = -mg \sin \psi \pm T.$$

signe + pour $\dot{\psi} > 0$, signe - pour $\dot{\psi} < 0$.

Dans le cas du glissement, $T = kN$.

b. Dans le cas du roulement sans glissement, $T \leq kN$.

Or, $N = mg \cos \psi + m\rho\dot{\psi}^2 = \frac{1}{3}mg(7 \cos \psi - 4 \cos \psi_0)$ (cf. $E_c + E_p = -mg\rho \cos \psi_0$).

$$T = mg \sin \psi + m\rho\ddot{\psi} = \frac{1}{3}mg \sin \psi \text{ (cf. PFD)}.$$

Visualisation : cf. figure ci-contre définissant ψ_1 .

$$T \leq kN \Rightarrow 0 \leq \psi \leq \psi_1 \quad \forall \psi \Rightarrow \psi_0 \leq \psi_1.$$

avec ψ_1 vérifiant $(7 \cos \psi_1 - 4 \cos \psi_0)k = \sin \psi_1$.

- pour $\psi = \psi_0$ $N = mg \cos \psi_0$; $T = \frac{mg}{3} \sin \psi_0$.

On a $\tan \psi_0 \leq 3k$ pour respecter $T \leq kN$.

Conclusion : si $\tan \psi_0 \leq 3k$ le mouvement commence par un roulement sans glissement

et continue ainsi si $|\psi_{\max}| \leq |\psi_1|$ soit si $\frac{3}{4}\rho\dot{\psi}_0^2 - \cos \psi_0 < -\cos \psi_1$ vu l'étude énergétique.

Le phénomène se reproduit périodiquement ainsi.

III.1. $T = 0$

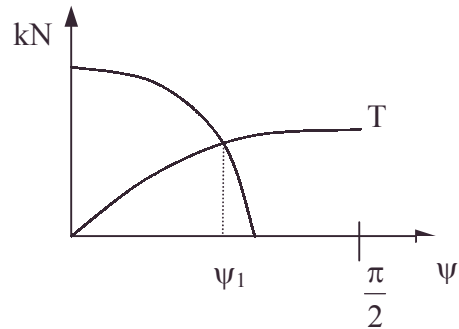
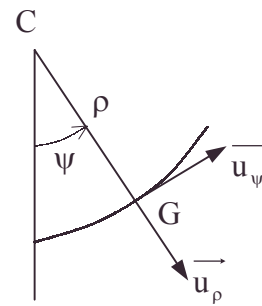
a. pour le rouleau

$$\begin{cases} m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{N} \quad (1) \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{R_{Gb}} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \end{cases}$$

$$\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{CG} \Rightarrow \vec{OG} \begin{vmatrix} -\ell \sin \theta + \rho \sin \psi \\ \ell \cos \theta - \rho \cos \psi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{V}_G \begin{vmatrix} -\ell \cos \theta \dot{\theta} + \rho \cos \psi \dot{\psi} \\ -\ell \sin \theta \dot{\theta} + \rho \sin \psi \dot{\psi} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{a}_G$ s'écrit dans (1) sur x et y.

- $m\ell \left[-\cos \theta \ddot{\theta} + \sin \theta \dot{\theta}^2 \right] + m\rho \left(\cos \psi \ddot{\psi} - \sin \psi \dot{\psi}^2 \right) = -N \sin \psi.$



$$\bullet m\ell \left(-\sin\theta \ddot{\theta} - \cos\theta \dot{\theta}^2 \right) + m\rho \left(\sin\psi \ddot{\psi} + \cos\psi \dot{\psi}^2 \right) = N \cos\psi - mg.$$

Projetons pour la coupelle : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_R \vec{z} = -k\theta + [\vec{OI} \wedge (-\vec{N})] \vec{z}.$

car le rouleau exerce une action $-\vec{N}$ opposée à celle qu'il subit ; k est la raideur angulaire.

$$\vec{OI} \wedge \vec{N} = (\vec{OC} + \vec{CI}) \wedge \vec{N} = \vec{OC} \wedge \vec{N} + \vec{0} \quad \text{car } \vec{CI} // \vec{N}.$$

$$\vec{OC} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} -\ell \sin\theta & -N \sin\psi & 0 \\ \ell \cos\theta & N \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & -\ell N \cos\psi \sin\theta + N\ell \cos\theta \sin\psi \end{vmatrix};$$

$$\bullet J\ddot{\theta} = -k\theta + \ell N(\sin\theta \cos\psi - \cos\theta \sin\psi) = -k\theta + \ell N \sin(\theta - \psi)$$

b. Linéarisons les 3 équations de **1.a.**

$$-m\ell \ddot{\theta} + m\rho \ddot{\psi} = -N\psi.$$

$$0 = N - mg$$

$$J\ddot{\theta} = -k\theta + \ell N(\theta - \psi).$$

Il reste : $-\ddot{\theta}\ell + \rho\ddot{\psi} = -g\psi.$

$$J\ddot{\theta} = -k\theta + \ell mg(\theta - \psi).$$

Recherchons les solutions sous la forme $\theta = \lambda e^{st}$; $\psi = \mu e^{st}$.

$$s, \ell, \mu \text{ vérifient } -s^2\ell\lambda + (\rho s^2 + g)\mu = 0 \text{ et } (Js^2 + k - \ell mg)\lambda + mg\ell\mu = 0.$$

On a des solutions non nulles en λ et μ si le déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} -\ell s^2 & ; \rho s^2 + g \\ Js^2 + k - \ell mg & ; \ell mg \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{soit } \rho Js^4 + s^2[\ell^2 mg + k\rho - \rho\ell mg + Jg] + g(-\ell mg + k) = 0.$$

$$\text{équation bicarrée de la forme : } aX^2 + bX + c = 0 \text{ avec } X = s^2.$$

On aura une solution harmonique si les s sont imaginaires purs, donc les solutions en

$$X \text{ sont toutes deux négatives donc de produit } X_1 X_2 = \frac{c}{a} < 0, \text{ soit } k < mg\ell \text{ cf. c.}$$

$$\text{c. } J = 0 \text{ donne } s^2 = X = \frac{(\ell mg - k)g}{\rho(k - mg\ell) + mg\ell^2}, \text{ négatif si } k > mg\ell.$$

$$s = \pm i\omega \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{(k - mg\ell)g}{mg\ell^2 + \rho(k - mg\ell)}};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mg\ell^2 + \rho(k - mg\ell)}{(k - mg\ell)g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{g} + \frac{m\ell^2}{k - mg\ell}}.$$

2.a. Le roulement sans glissement suppose l'égalité des vitesses des point coïncidents en **II**. de la coupelle et du rouleau ; soit

$$\vec{v}_G + \dot{\varphi} \vec{z} \wedge \vec{GI} = \vec{v}_O + \dot{\theta} \vec{z} \wedge (\vec{OC} + \vec{CI}) \text{ avec } \vec{v}_O = \vec{0},$$

• Cramer [système de], roulement sans glissement

$$\text{avec } \vec{z} \wedge \vec{GI} = \begin{vmatrix} 0 & (R-\rho)\sin\psi \\ 0 & -(R-\rho)\cos\psi \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (R-\rho)\cos\psi \\ (R-\rho)\sin\psi \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{et } \vec{z} \wedge \vec{OI} = \begin{vmatrix} 0 & -\ell\sin\theta + R\sin\psi \\ 0 & \ell\cos\theta - R\cos\psi \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos\psi - \ell\cos\theta \\ \ell\sin\theta - R\sin\psi \\ 0 \end{vmatrix},$$

et finalement :

$$-\ell\cos\theta\dot{\theta} + \rho\cos\psi\dot{\psi} + \dot{\varphi}(R-\rho)\cos\psi = \dot{\theta}(R\cos\psi - \ell\cos\theta);$$

$$-\ell\sin\theta\dot{\theta} + \rho\sin\psi\dot{\psi} + \dot{\varphi}(R-\rho)\sin\psi = \dot{\theta}(\ell\sin\theta - R\sin\psi).$$

En divisant la première par $\cos\psi \neq 0$ et la seconde par $\sin\psi \neq 0$, il reste

$$(R-\rho)\dot{\varphi} + \rho\dot{\psi} = R\dot{\theta}, \text{ pour les deux.}$$

b. Les 5 inconnues de ce problème sont : $\theta, \psi, \dot{\varphi}, T, N$ et nécessitent 5 équations :

1. la condition de roulement sans glissement ;
2. le théorème du moment cinétique : $I\ddot{\varphi} = r\vec{T}$;
3. le théorème du centre d'inertie du rouleau : 2 projections
4. le théorème du moment cinétique à l'ensemble rouleau-coupelle.

2.5.5. Flexion et torsion d'une aile d'avion

Voir page 283.

2.5.6. Ondes de torsion

Voir page 1307.

2.6. Mouvement à 2 paramètres de rotation

2.6.1. Antenne de poursuite de missile

On donne deux repères directs et orthonormés $Ox_1y_1z_1$ et $Oxyz$ (Figure 1). Le premier est lié à la Terre et Oz_1 est la verticale ascendante du point O. Le second est mobile autour de O et son axe Ox est horizontal. Son orientation par rapport au premier est définie par deux angles : – la distance zénithale $\theta = (Oz_1, Oz)$
– le cap $\psi = (Ox_1, Ox)$.

Le système matériel S qui fait l'objet du problème est le modèle mécanique d'une antenne de poursuite (figure 2), essentiellement constituée par un miroir capteur M dont l'axe, qui coïncide avec Oz, peut être dirigé vers un point quelconque du ciel au moyen de deux moteurs M_1 et M_2 .

Le moteur M_1 , dont le rotor R_1 , solidaire du miroir, a pour axe Ox, permet un pointage en hauteur, c'est-à-dire une variation de θ par rotation du miroir autour de Ox. Le rotor R_1 et le miroir M font partie d'un même solide indéformable ($M R_1$) qu'on peut assimiler à un disque circulaire infiniment plat du plan xOy, de centre O, d'axe de révolution Oz et de moment d'inertie I par rapport à cet axe.

Le miroir est porté par un support auquel est invariablement lié le stator S_1 du moteur M_1 . Ce support comporte un arbre vertical A auquel est invariablement lié le rotor R_2 du moteur M_2 . L'axe de l'arbre et celui du rotor R_2 coïncident avec Oz_1 . Le stator S_2 du moteur M_2 est lié au sol. L'arbre A, le rotor R_2 et le stator S_1 font partie d'un solide indéformable (AR_2S_1) que le moteur M_1 peut faire tourner autour de Oz_1 , ce qui permet, en faisant varier l'angle ψ , de réaliser le pointage du miroir en direction. Ce solide a, par rapport à Oz_1 , un moment d'inertie $J = \frac{\mu - 1}{2} I$, μ étant une constante donnée.

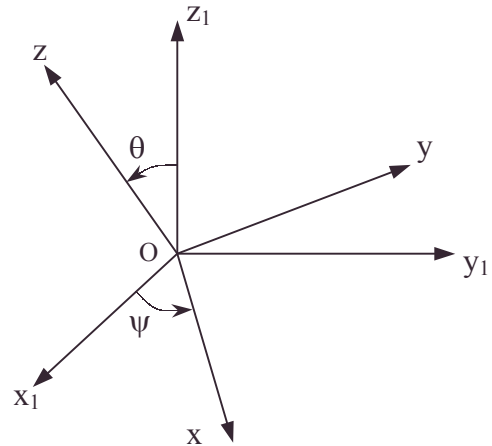


Figure 1

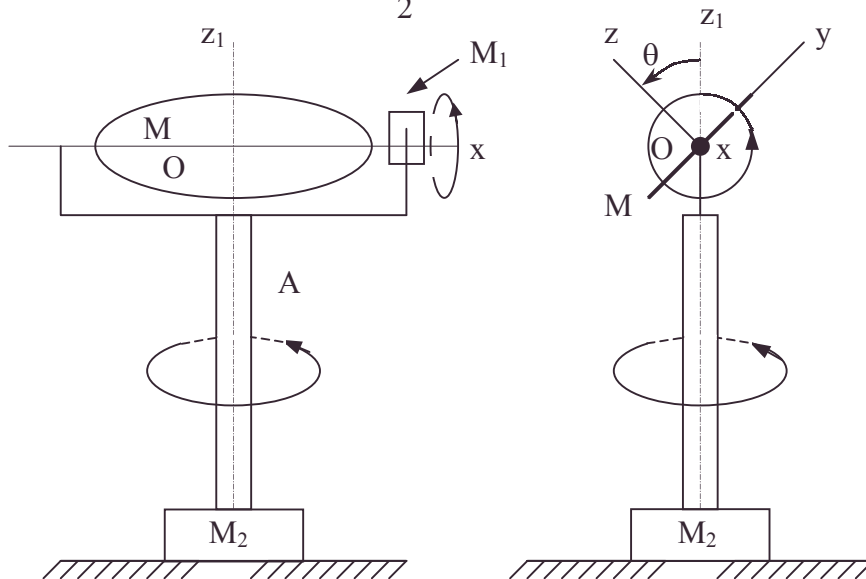


Figure 2

Les liaisons astreignant le système S sont permanentes, bilatérales et parfaites (tous les frottements sont négligeables). Elles permettent la rotation de M autour de Ox et celle de A autour de Oz_1 . Elles assurent la fixité de Ox , lié au miroir M, par rapport à son support et à l'arbre A, ainsi que l'orthogonalité de Ox et de Oz_1 .

I. Le système S est animé d'un mouvement quelconque.

A. On considère d'abord le mouvement par rapport à la Terre du solide (MR_1) . Les vecteurs étant définis par leurs composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz :

- a.** Exprimer en fonction de θ et ψ et de leurs dérivées temporelles $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$:
- la vitesse de rotation de (MR_1) ;
 - la vitesse d'un élément quasi ponctuel de (MR_1) , de masse dm , situé au point $P(x,y,0)$;
 - sa quantité de mouvement ;
 - son moment cinétique en O ;
 - son énergie cinétique ;

b. En déduire, pour le solide (MR_1) , par sommations étendues à tous ses éléments matériels :

- la quantité de mouvement ;
- le moment cinétique en O ;
- l'énergie cinétique ;
- le moment dynamique en O (vitesse relative à $Ox_1y_1z_1$ de l'extrémité du vecteur moment cinétique en O).

B. On considère maintenant le système global S. Calculer :

- son moment cinétique H par rapport à l'axe Oz_1 ; son énergie cinétique T.

II. Dans la suite, les forces d'inertie de Coriolis dues à la rotation de la Terre sont négligées. Le repère $Ox_1y_1z_1$ est donc considéré comme galiléen.

Les moteurs ne fonctionnent pas et le système S est lancé à l'instant initial $t = 0$ suivant les conditions initiales : $\theta = \theta_0$; $\psi = \psi_0$; $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$; $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$.

Montrer que le mouvement de S par rapport à la Terre satisfait aux deux équations différentielles du premier ordre : $H(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}hI$; $T(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{1}{4}k^2I$, où les

constantes h et k sont définies par les conditions initiales.

Suivant les valeurs de ces constantes, discuter les circonstances du mouvement de S en le représentant par celui du point Q, intersection de l'axe Oz et de la sphère de centre O et de rayon unité. Aucune intégration n'est à cet égard nécessaire.

III. Un engin ponctuel E décrit dans le ciel de O une trajectoire (E) définie relativement au repère $Ox_1y_1z_1$ par les lois : distance zénithale $\Theta = F(t)$; cap $\psi = G(t)$, où $F(t)$ et $G(t)$ sont des fonctions continues dérivables jusqu'à l'ordre 2, au moins, de t .

La poursuite de E par S s'effectue, Oz pointant vers E, et réalise à tout instant les conditions $\theta = \Theta$ et $\psi = \Psi$.

Calculer en fonction de t les couples moteurs et les puissances fournies à S par M_1 et M_2 pour réaliser cette opération.

IV. Le solide (MR_1) est équivalent à une plaque mince circulaire de diamètre $d = 1,50$ m, d'épaisseur $e = 0,05$ m, de masse volumique $\rho = 8000$ kg/m³.

Le moment d'inertie J du solide (AR_2S_1) par rapport à Oz_1 est $\frac{1}{2}I$ (cf. $\mu = 2$).

La trajectoire (E), située dans le plan x_1Oz_1 , est décrite à vitesse de module uniforme $V = 1000$ m/s. L'engin E décrit d'abord Ox_1 en se dirigeant vers O.

A la distance $D = 5000$ m de O, il change de direction suivant un quart de circonférence du plan x_1Oz_1 de rayon $R = 50$ m, jusqu'à se mouvoir parallèlement à Oz_1 .

Calculer l'énergie puis la puissance moyenne fournie à S par M_1 durant la giration de E, pour assurer la continuation de la poursuite. En quoi la diminution par E de son rayon de giration R peut-elle constituer un moyen d'échapper à la poursuite ?

V. Revenant au cas général, on suppose que les deux solides qui constituent S sont légèrement déformables. A l'instant t où les moteurs sont astreints à développer les couples précédemment calculés pour assurer la poursuite de l'engin E, l'axe Oz occupe la position : $\theta = F(t) + \alpha(t)$, $\psi = G(t) + \beta(t)$, voisine de la position théorique $\theta = F(t) = G(t)$, vers laquelle S est rappelé élastiquement par les couples :

- d'axes Ox et d'intensité $-\frac{1}{2}a I \alpha$;
- d'axes Oz_1 et d'intensité $-\frac{1}{2}b I \beta$;

où a et b sont des constantes positives données.

Les perturbations $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, ainsi que leurs dérivées utiles, étant traitées comme des infiniment petits, former les équations linéaires du second ordre qu'elles vérifient, quand on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Que deviennent ces équations pour un engin E qui parcourt l'horizon $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ avec une

vitesse angulaire $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ constante ? En déduire la condition à laquelle doit satisfaire la constante a pour que la poursuite soit stable.

Ecole Polytechnique ; Durée 3h

Corrigé

I.A.a.α. La loi de composition donne pour MR_1 : $\vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{i}$,

soit $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{i} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{j} + \dot{\psi} \cos \theta \vec{k}$.

$$\beta. \vec{V}(P) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OP} = -y \dot{\psi} \cos \theta \vec{i} + x \dot{\psi} \cos \theta \vec{j} + \left(y \dot{\theta} - x \dot{\psi} \sin \theta \right) \vec{k}.$$

$$\gamma. d\vec{P} = \vec{V} dm = -y \dot{\psi} \cos \theta dm \vec{i} + x \dot{\psi} \cos \theta dm \vec{j} + \left(y \dot{\theta} - x \dot{\psi} \sin \theta \right) dm \vec{k}.$$

$$\delta. d\vec{\sigma}_0(MR_1) = \vec{OP} \wedge d\vec{P} = \left(y^2 \dot{\theta} - xy \dot{\psi} \sin \theta \right) dm \vec{i} + \left(x^2 \dot{\psi} \sin \theta - xy \dot{\theta} \right) dm \vec{j} + \dot{\psi} (x^2 + y^2) \cos \theta dm \vec{k}.$$

$$\epsilon. dE_c = \frac{1}{2} dm V^2 = \frac{1}{2} dm \left[\dot{\psi}^2 (x^2 + y^2 \cos^2 \theta) + \dot{\theta}^2 y^2 - 2xy \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \right].$$

b.α. $\vec{P} = \int_{MR_1} d\vec{P} = M \vec{V}(O/R_1) = \vec{0}$ car O est un point fixe sur Oz.

$$\beta. \int_{MR_1} (x^2 + y^2) dm = I ;$$

$$\text{par symétrie : } \int_{MR_1} x^2 dm = \int_{MR_1} y^2 dm = \frac{I}{2} \text{ et } \int_{MR_1} xy dm = 0.$$

• composition des vecteurs instantanés de rotation, développement au premier ordre ou plus, énergie cinétique, moment cinétique, moment d'inertie, perturbation [méthodes des], produit d'inertie, stabilité, symétrie

$$\vec{\sigma}_0(MR_1) = \int_{MR_1} d\vec{\sigma}_0 = \frac{I}{2} \left(\dot{\theta} \vec{i} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{j} + 2 \dot{\psi} \cos \theta \vec{k} \right).$$

$$\gamma. E_C(MR_1) = \int_{MR_1} dE_C = \frac{I}{4} \left[\dot{\psi}^2 (1 + \cos^2 \theta) + \dot{\theta}^2 \right].$$

$$\begin{aligned} \delta. \vec{K}_0(MR_1) &= \left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_{R_1} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_R + \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}_0, \\ &= \frac{I}{2} \left[\left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \vec{i} + \ddot{\psi} \sin \theta \vec{j} + 2 \left(\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \right) \vec{k} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{B.a. } H = \vec{\sigma}_0(S) \cdot \vec{k}_1 = \vec{\sigma}_0(MR_1) \cdot \vec{k}_1 + \vec{\sigma}_0(AR_2S_1) \cdot \vec{k}_1 ; \vec{k}_1 = \sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k}.$$

$$\text{Or, } \vec{\sigma}_0(AR_2S) = J \dot{\psi} \vec{k}_1 \text{ avec } J = \frac{\mu - 1}{2} I ; H = \frac{I}{2} \dot{\psi} (\mu + \cos^2 \theta).$$

$$\text{b. } T = E_C(MR_1) + E_C(AR_2S_1) = \frac{I}{4} \left(\dot{\psi}^2 (1 + \cos^2 \theta) + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} J \dot{\psi}^2 \text{ avec } J = \frac{\mu - 1}{2} I ;$$

$$T = \frac{I}{4} \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 (\mu + \cos^2 \theta) \right].$$

$$\text{II.a. } \left(\frac{dH}{dt} \right) = \vec{\mathcal{M}}_0^{\text{ext}} \cdot \vec{k}_1 = 0 \text{ car } 0 = \vec{\mathcal{M}}_0^{\text{ext}} \cdot \vec{k}_1 \text{ représente le couple de liaison parfaite}$$

pour la rotation autour de l'axe Oz_1 :

$$H = \text{cste} = h \frac{I}{2} \Rightarrow \dot{\psi} (\mu + \cos^2 \theta) = h \text{ avec } h = \dot{\psi}_0 (1 + \mu \cos^2 \theta_0).$$

b. Ecrivons la conservation de l'énergie mécanique :

$$\text{Comme } E_P = \text{constante}, T = \text{constante} = k^2 \frac{I}{4} ;$$

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 (\mu + \cos^2 \theta) = k^2 \text{ avec } k^2 = \dot{\theta}_0^2 + \dot{\psi}_0^2 (1 + \mu \cos^2 \theta_0).$$

$$\text{c. Eliminons } \dot{\psi} \text{ entre } H \text{ et } T : \dot{\theta}^2 = k^2 - \frac{h^2}{\mu + \cos^2 \theta} ; \text{ or } \dot{\theta}^2 > 0 \text{ soit } \cos^2 \theta \geq \frac{h^2}{k^2} - \mu.$$

$$\alpha. 1 \geq \frac{h^2}{k^2} - \mu \geq 0 \quad \exists \alpha_1 \text{ tel que } \cos^2 \alpha_1 = \frac{h^2}{k^2} - \mu ;$$

$$\cos^2 \theta \geq \cos^2 \alpha_1 \Rightarrow -\alpha_1 \leq \theta \leq +\alpha_1 \text{ ou } \pi - \alpha_1 \leq \theta \leq \pi + \alpha_1.$$

- Le lieu de Q est confiné dans la calotte sphérique supérieure ou inférieure de demi angle au centre α_1 .

- La fonction $\theta(t)$ est périodique (sauf cas particulier de période infinie) : sa période valant 4 fois la durée de la transition pour θ de 0 à α_1 (période qui se transmet à $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}(t)$).

$$\text{On peut le vérifier grâce à l'expression : } \dot{\theta}^2 = \frac{k^2 (\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha_1)}{\mu + \cos^2 \theta} ;$$

$$\text{Quand } \theta = \pm \alpha_1 ; \dot{\theta} = 0 ; \dot{\psi}_1 = \frac{k^2}{\mu + \cos^2 \alpha_1} = \frac{k^4}{h^2} ; \text{ Or, } \dot{\psi} (\mu + \cos^2 \theta) \geq \dot{\psi} \frac{h^2}{k^2} ;$$

la limite est atteinte quand $\theta = \pm\alpha_1(\pi)$, soit $h \geq \dot{\psi} \frac{h^2}{k^2}$, soit $\dot{\psi} \leq \frac{k^2}{h}$ et $\psi - \psi_0 \leq \frac{k^2}{h} t$.

L'égalité étant pour $\theta = \pm\alpha_1(\pi)$, la courbe n'est pas stationnaire en général. (Figure 3).

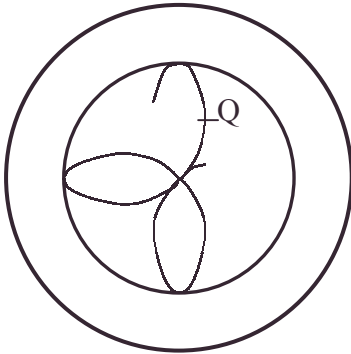


Figure 3

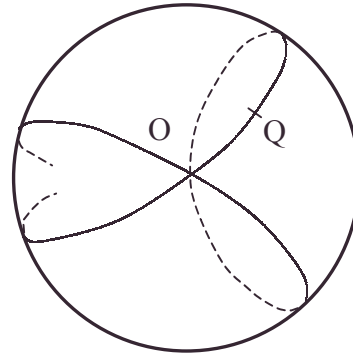


Figure 4

β. $\frac{h^2}{k^2} < \mu$; $\dot{\theta}^2 > 0$; $\dot{\theta}$ fonction continue qui ne peut s'annuler, gardera un signe

constant $\Rightarrow \theta$ passera par les multiples de π . Comme on aura aussi une monotonie de ψ (cf. H et T), la courbe s'inscrira sur la sphère en passant par les pôles. C'est l'extension à la sphère entière du cas α . (Figure 4).

III.a. Avec l'intervention du moteur M_2 selon Oz ,

$$\frac{dH}{dt} = \mathcal{M}_{Oz_1}^{M_2 \rightarrow S} = \frac{I}{2} \left[\ddot{\psi}(\mu + \cos^2 \theta) - 2\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \right] \text{ vu II.a.}$$

$$\text{b. } P_{M_2} = \dot{\psi} \mathcal{M}_{Oz_1}^{M_2 \rightarrow S} = \frac{I}{2} \dot{\psi} \left[\ddot{\psi}(\mu + \cos^2 \theta) - 2\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \right].$$

$$\text{c. } M_1 \text{ a une action selon } Ox : \overrightarrow{K_0} \cdot \vec{i} = \mathcal{M}_{Ox}^{M_1 \rightarrow S} = \frac{I}{2} \left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right).$$

$$\text{d. } P_{M_1} = \dot{\theta} \mathcal{M}_{Ox}^{M_1 \rightarrow S} = \frac{I}{2} \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right); \text{ on remarquera : } \frac{dT}{dt} = P_{M_1} + P_{M_2}.$$

IV.a. $\psi = \text{constante}$; M_2 ne travaille pas : $P_{M_1} \neq \frac{E_C}{\tau}$;

Quand E décrit Ox_1 : $\dot{\psi} = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$;

Quand E décrit une parallèle à Oz_1 , $\dot{\psi} = 0$; $\tan \theta = \frac{x}{D}$; $\frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{V}{D}$; $\dot{\theta}_{\max} = \frac{V}{D}$.

Il a fallu donner au moment du changement de direction :

$$E_C = \frac{I}{4} \left(\dot{\theta}^2 + \underbrace{\dot{\psi}^2}_{=0} (\mu + \cos^2 \theta) \right) = \frac{I}{4} \frac{V^2}{D^2};$$

$$\text{Calculons } I = \int r^2 dm = \rho e \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r^3 dr = \frac{2\pi \rho e}{4} \frac{d^4}{2^4} = \frac{\pi \rho e d^4}{32};$$

$$E_C = \frac{\rho e \pi d^4}{128} \dot{\theta}_{\max}^2; \text{ AN : } \dot{\theta}_{\max} = 0,2 \text{ rad s}^{-1}; E_C = 1,99 \text{ J}.$$

$$\text{b. Durée de l'opération (quart de cercle) : } \tau = \frac{\pi R}{2V}; \text{ AN : } \tau = 0,079 \text{ s}.$$

• moment d'inertie, théorème de la puissance cinétique, théorème du moment cinétique

$$P_{M_1} = \frac{E_C}{\tau} = \frac{I V^3}{2\pi R D^2} ; \text{AN} : P_{M_1} = 25 \text{ W} .$$

c. Si R diminue, $P_{M_1} \rightarrow \infty$, ce qu'il n'est pas possible d'assurer : la poursuite est interrompue quand on atteint la puissance maximale disponible.

$$\text{V.a. Vu III.c. et b. : } \mathcal{M}_{Ox}^{M_1 \rightarrow S} = \frac{I}{2} \left(\ddot{F} + \dot{G}^2 \sin F \cos F \right) ;$$

$$\mathcal{M}_{Oz_1}^{M_2 \rightarrow S} = \frac{I}{2} \left[\ddot{G}(\mu + \cos^2 F) - 2\dot{F}\dot{G} \sin F \cos F \right] ;$$

Faisons intervenir les couples de rappel :

$$\overrightarrow{K_0} \cdot \vec{i} = \frac{I}{2} \left(\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) = \mathcal{M}_{Ox}^{M_1 \rightarrow S} - \frac{1}{2} a I \alpha . \quad (1)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{I}{2} \left(\ddot{\psi}(\mu + \cos^2 \theta) - 2\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta \sin \theta \right) = \mathcal{M}_{Oz_1}^{M_2 \rightarrow S} - \frac{1}{2} b I \beta \quad (2)$$

En traitant les perturbations $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ et leurs dérivées comme des infiniment petits, il reste les termes d'ordre 1 après substitution :

$$(1) \quad 0 = \ddot{\alpha} + 2\dot{\beta}\dot{G} \sin F \cos F + \alpha \dot{G}^2 (\cos^2 F - \sin^2 F) + a\alpha . ;$$

$$(2) \quad 0 = \ddot{\beta}(\mu + \cos^2 F) - 2\alpha \ddot{G} \sin F \cos F - 2 \left(\dot{\alpha} \dot{G} + \dot{\beta} \dot{F} \right) \sin F \cos F \dots$$

$$- 2\alpha \dot{F}\dot{G}(\cos^2 F - \sin^2 F) + b\beta$$

$$\text{b. } F = \frac{\pi}{2} ; \dot{G} = \dot{\psi}_0 \text{ donnent : } \ddot{\alpha} - \alpha \dot{\psi}_0^2 + a\alpha = 0 ; \mu \ddot{\beta} + b\beta = 0 .$$

$$\text{c. } \beta = B \sin \left(\sqrt{\frac{b}{\mu}} t + \varphi_1 \right) ; \alpha \text{ de la forme } A \sin \left(\sqrt{\left(a - \dot{\psi}_0^2 \right)} t + \varphi_2 \right) \text{ si et seulement si}$$

$$a > \dot{\psi}_0^2 .$$

Chapitre 3 : Mécanique des fluides

Appartient aux programmes de PSI, PC, BCPST2, TPC2

3.1. Cinématique des fluides

3.1.1. Ecoulement dans un coin

Equation de Laplace dans un problème d'écoulement de fluide

A. On définit un élément de fluide comme une partie de fluide dont le volume est très grand à l'échelle atomique, mais petit à l'échelle macroscopique.

1. Montrer, par un ordre de grandeur, que cette définition a une réalité physique.

2. Soit ρ la masse volumique du fluide et \vec{v} la vitesse d'un élément de fluide.

Ecrire l'équation de conservation de la masse du fluide au cours du temps t . En déduire, pour un fluide de masse volumique uniforme et constante, la relation : $\text{div } \vec{v} = 0$.

B. On étudie dans ce paragraphe les mouvements d'un fluide de masse volumique ρ uniforme et constante, tels que $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$.

Ces mouvements sont qualifiés d'irrotationnels.

1. Montrer que la vitesse \vec{v} d'un élément de fluide dérive alors d'un potentiel Φ (on notera $\vec{v} = \text{grad } \Phi$) et que ce potentiel vérifie une équation de Laplace.

2. Soit un dièdre d'angle α . On considère un écoulement à l'intérieur de ce dièdre, dans un plan de section normale à l'arête O (Figure 1).

r et θ sont les coordonnées polaires dans ce plan, O étant le pôle.

On notera : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$; $[\overrightarrow{O(1)}, \overrightarrow{OM}] = \theta$; $[\overrightarrow{O(1)}, \overrightarrow{O(2)}] = \alpha$.

On cherche le potentiel Φ sous la forme :

$$\Phi(r, \theta) = f(r).g(\theta).$$

1. Donner l'équation différentielle à laquelle satisfait $g(\theta)$. On rappelle qu'en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

2. Au contact des parois du dièdre, le fluide s'écoule tangentiellement à ces parois. En déduire l'expression de $g(\theta)$ en fonction de θ et α .

3. Quelles sont les expressions des exposants n tels que $f(r) = Ar^n$, où A est une constante ?

4. n étant pris différent de zéro, choisir la plus petite valeur positive possible pour n et donner l'expression de la solution correspondante de l'équation de Laplace.

Que peut-on dire de la vitesse au pôle selon que n est inférieur à 1 ou supérieur à 1 ?

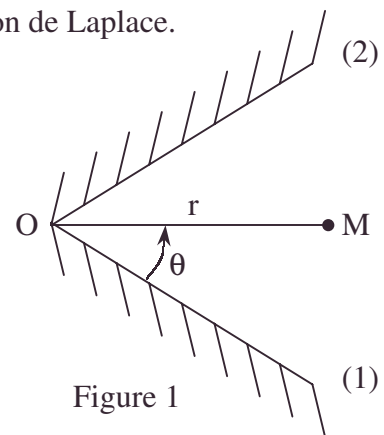


Figure 1

ENS ; Durée 1h

Corrigé

A.1. Calculons par la loi des gaz parfaits le nombre de molécules présentes dans $1(\mu\text{m})^3$ sous 1 bar, à 300K : on trouve de l'ordre de 10^7 molécules. On trouverait un ordre de 10^3 supérieur pour un liquide. La moyenne statistique sur un tel ensemble a un sens et la

vitesse (ou toute autre grandeur physique mesurable à cette échelle) a une réalité physique pour cet élément de fluide.

2.a. Un système fermé est tel que : $\frac{Dm}{Dt} = 0$;

$$\text{soit } \frac{dm}{dt} + \oint_{\Sigma} \mu \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\text{soit } \iiint_{V_{\Sigma}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) \right) d\tau = 0 \quad \forall V_{\Sigma}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \quad \text{soit } \frac{D\mu}{Dt} + \mu \text{div} \vec{v} = 0 \quad \text{avec } \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu.$$

b. Si $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ alors $\text{div} \vec{v} = 0$.

B.1.a. $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \phi, \vec{v} = \vec{\text{grad}} \phi$.

b. $\text{div} \vec{v} = \text{div} \vec{\text{grad}} \phi = \Delta \phi = 0$ soit une équation de Laplace.

2.1. $\frac{\partial \phi}{\partial r} = f'(r)g(\theta)$; $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = f''(r)g(\theta)$; $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = f(r)g''(\theta)$.

$$\Delta \phi = 0 \text{ s'écrit } \left(\frac{f'(r)}{r} + f''(r) \right) g(\theta) + \frac{1}{r^2} f(r) g''(\theta) = 0,$$

$$\text{soit encore : } \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = - \left(\frac{\frac{f'(r)}{r} + f''(r)}{\frac{f(r)}{r^2}} \right) : \text{ ce rapport est une constante } k \text{ car seul type de}$$

fonction commun aux fonctions de r et celles de θ .

On a : $g''(\theta) - kg(\theta) = 0$ avec k positif ou négatif.

2. L'écoulement tangentiel implique $\vec{v}_{\theta} = \vec{0}$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \alpha, \forall r$.

$$\vec{v}_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{u}_{\theta} = \frac{f(r)}{r} g'(\theta) \vec{u}_{\theta}.$$

a. $k < 0$; posons $\sigma^2 = -k$; $g(\theta) = B \cos(\sigma\theta + \varphi)$ et $g'(\theta) = -\sigma B \sin(\sigma\theta + \varphi)$;
 $\theta = 0$; $g'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0$, $\varphi = 0(\pi)$; $\theta = \alpha$, $g'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin \sigma\alpha = 0$, soit :

$$\sigma = \frac{p\pi}{\alpha} \quad p \in \mathbb{Z} ; \quad g(\theta) = B \cos \frac{p\pi}{\alpha} \theta.$$

b. $k > 0$; posons $\tau^2 = k$; $g(\theta) = A_1 e^{\tau\theta} + A_2 e^{-\tau\theta}$ et $g'(\theta) = \tau A_1 e^{\tau\theta} - \tau A_2 e^{-\tau\theta}$;
 $\theta = 0$, $g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2$; $\theta = \alpha$, $g'(\theta) = 0 \Rightarrow \tau A_1 (e^{\tau\alpha} - e^{-\tau\alpha}) = 0$;

Soit finalement $\tau A_1 \text{sh } \tau\alpha = 0$ avec $\alpha \neq 0$ et $\tau \neq 0 \Rightarrow A_1 = 0 = A_2$ et $g(\theta) = 0$.

c. $k = 0$; $g''(\theta) = 0$; $g'(\theta) = c$; $\theta = 0$; $g'(\theta) = 0 \Rightarrow g(\theta) = c'$
 $\Rightarrow c = g(\theta) = 0$ vu $\Delta \phi = 0$.

On ne conserve que la solution significative $g(\theta) = B \cos \frac{p\pi}{\alpha} \theta, p \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{3.} \text{ On a : } \sigma^2 = -k = \frac{\frac{f'(r)}{r} + \frac{f''(r)}{r}}{\frac{f(r)}{r^2}} = \frac{nAr^{n-2} + n(n-1)Ar^{n-2}}{Ar^{n-2}} = n^2 \Rightarrow n = p_1 \frac{\pi}{\alpha}$$

avec $p_1 = \mathbb{Z}$.

4.a. $n = \frac{\pi}{\alpha}$; $p_1 = +1$; $\phi = \phi_0 r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}$.

b. $\vec{v}_\theta = -\phi_0 r^{\frac{\pi-\alpha}{\alpha}} \frac{\pi}{\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} \vec{u}_\theta$; $\vec{v}_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r = \phi_0 \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi-\alpha}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \vec{u}_r$.

$$v^2 = \phi_0^2 \frac{\pi^2}{\alpha^2} r^{\frac{2(\pi-\alpha)}{\alpha}}.$$

α. $n > 1$: $\pi > \alpha$; angle rentrant ; $r = 0$; $v^2(0, \theta) = 0$.

β. $n < 1$: $\pi < \alpha$; angle saillant ; $r = 0$; $v^2(0, \theta) = \infty$.

3.1.2. Champ de gradient, de rotationnel

I. Dans un fluide incompressible est immergé un tube cylindrique vertical, très long, de rayon a , percé d'une multitude de petits orifices répartis uniformément laissant jaillir le même liquide avec un débit volumique constant par mètre de longueur noté q_v .

Ce tube constitue une "source".

1. On note \vec{C}_1 la vitesse (célérité) d'un élément de fluide situé en M à la distance r_1 de l'axe du tube ; exprimer C_1 en fonction de q_v et r_1 .

2. On associe au champ des vitesses \vec{C}_1 le potentiel des vitesses, noté U_1 , défini par la relation $\vec{C}_1 \cdot d\vec{M} = dU_1$. Exprimer U_1 au point M .

3. On dispose d'un tube identique au précédent. Soit d la distance des axes ; ce deuxième tube absorbe le liquide avec le débit volumique q_v et constitue un "puits" que l'on pourra, dans les calculs qui vont suivre, traiter comme une source de débit $-q_v$.

Exprimer le potentiel U résultant en M situé aux distances r_1 et r_2 des axes de chacun des tubes.

4. On se place dans la situation où le point M est repéré par ses coordonnées polaires r, θ avec l'hypothèse $d \ll r$.

Exprimer U en fonction de r et θ .

5. Les tubes précédents sont immergés dans un écoulement à vitesse constante $\vec{C}_0 = C_0 \vec{x}$, parallèle à O_1O_2 . Exprimer le potentiel des vitesses U_0 associé à cet écoulement seul en fonction de r et θ . En déduire le potentiel résultant U en M .

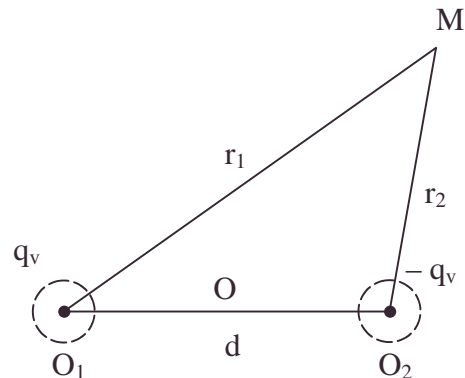
N.B. : le potentiel des vitesses étant défini à une constante près, celle-ci sera choisie de sorte que $U_0 = 0$ en O .

6. Calculer la vitesse \vec{C} résultante par ses composantes dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$.

On remarquera que la composante sur \vec{u} est nulle en tout point d'un cylindre vertical centré en O , dont on calculera le rayon r_0 .

Application numérique : calculer r_0 avec $C_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$; $q_v = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; $d = 2 \text{ m}$.

Remarque : le système étudié modélise un pieu vertical, de rayon r_0 , placé dans le lit d'un fleuve. Donner l'allure des lignes de courant.



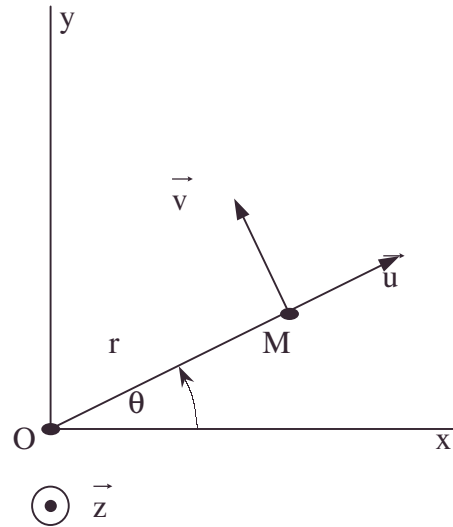
II.1. On envisage un mouvement tourbillonnaire du liquide caractérisé par le champ des vitesses suivant autour de l'axe vertical Oz :

$$\vec{C} = C(r)\vec{v}, \text{ où } \begin{cases} C(r) = \frac{k}{r} \text{ si } r \geq a, \text{ et} \\ C(r) = \frac{kr}{a^2} \text{ si } r \leq a, \end{cases}$$

où a est une longueur caractéristique.

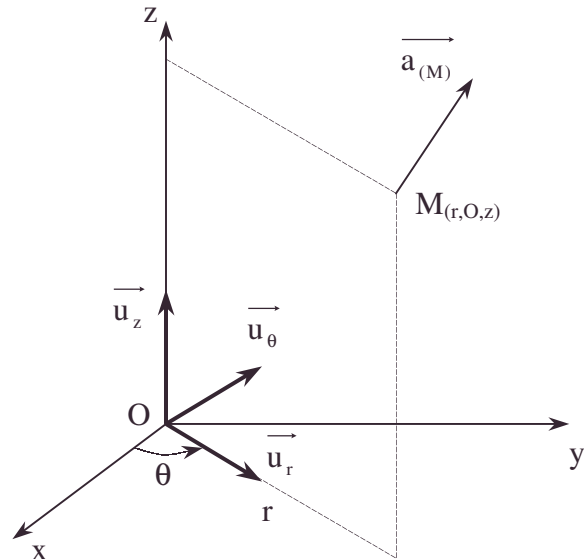
On définit le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ par la relation : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{C}$.

Exprimer $\vec{\Omega}$ par ses composantes dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$. (cas $r > a$ et $r < a$).



2. On associe deux mouvements tourbillonnaires de sens opposés et de même nature que le précédent, leurs axes verticaux étant distants de d .

Après avoir montré l'analogie entre le champ des vitesses actuel et un champ magnétique, en déduire la nature géométrique des lignes de courant dans une région éloignée des axes. Donner l'allure des lignes de courant.



Expression de $\vec{\text{rot}} \vec{a}$ en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z.$$

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

I.1. Vu la symétrie cylindrique et l'invariance des causes par rapport à z et θ , $\vec{V} = V_r(r)\vec{u}_r$. Prenons comme surface Σ la surface extérieure d'un manchon cylindrique de rayon $R_1 = a$; $R_2 = r$ de hauteur h . Pour un fluide incompressible, le débit entrant égale le débit sortant : $q_v h = 2\pi r h C_1$; $C_1 = \frac{q_v}{2\pi r}$.

$$2. dU_1 = \vec{C}_1 d\vec{OM} = C_1 dr = \frac{q_v}{2\pi r} dr \Rightarrow U_1 = \frac{q_v}{2\pi} \ln r + c ; (c = \text{cste indéterminable}).$$

3. L'additivité scalaire des potentiels associée à la superposition des champs de vitesses permet d'avoir :

$$U(M) = U_1(M) + U_2(M) = \frac{q_v}{2\pi} \ln r_1 + \frac{(-q_v)}{2\pi} \ln r_2 + k = \frac{q_v}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + k.$$

Pour des raisons d'anti-symétrie, pour le point O, il est commode de prendre k (indéterminable) tel que k = 0. $U(M) = \frac{q_v}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$.

4. On rappelle $r_1 = r \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$; $r_2 = r \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$ avec $d \ll r$.

$$U(M) = \frac{q_v}{2\pi} \left[\ln \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) - \ln \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right] = \frac{q_v}{2\pi} \left(\frac{d}{2r} \cos \theta + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) = \frac{q_v}{2\pi r} d \cos \theta.$$

5.a. Potentiel associé au champ \vec{C}_0 : $C_{0x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} \Rightarrow U_0 = C_0 x = C_0 r \cos \theta$.

b. Potentiel résultant : l'additivité des potentiels consécutive de la superposition linéaire des champs donne :

$$U = U_0 + \frac{q_v}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \text{ soit } U = \left(\frac{q_v d}{2\pi r} + C_0 r \right) \cos \theta.$$

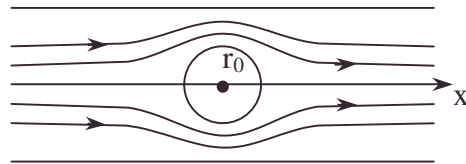
$$6.a. \vec{C} = \vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{v} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{z}$$

$$C_r = \left(C_0 - \frac{q_v d}{2\pi r^2} \right) \cos \theta ; C_\theta = - \left(C_0 + \frac{q_v d}{2\pi r^2} \right) \sin \theta ; C_z = 0.$$

b. $C_r = 0$ pour $r_0 = \sqrt{\frac{q_v d}{2\pi C_0}}$ cf. cylindre d'axe Oz de rayon r_0 .

c. AN : $r_0 = 0,178 \text{ m}$.

d. Le liquide ne rentre pas dans ce cylindre comme le fait un fleuve pour un pieu vertical (de condition limite $C_r = 0$).



II.1. D'après les données du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\Omega_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_\theta}{\partial z} = 0 ; \Omega_\theta = 0 ; \Omega_z = \frac{1}{2} \frac{C_\theta}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial C_r}{\partial r} ;$$

$$r \geq a ; \Omega_z = \frac{k}{2r^2} - \frac{k}{2r^2} = 0 \text{ soit } \vec{\Omega} = \vec{0}.$$

$$r \leq a ; \Omega_z = \frac{k}{2a^2} + \frac{1}{2} \frac{k}{a^2} = \frac{k}{a^2} \text{ soit } \vec{\Omega} = \frac{k}{a^2} \vec{z}.$$

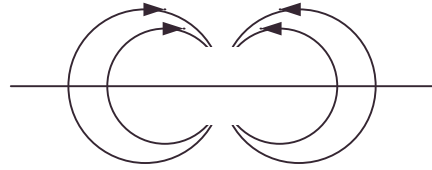
2.a. k se transposant en $\frac{\mu_0 i}{2\pi}$, on voit l'analogie avec le champ magnétique créé par un fil infini de rayon a parcouru par une intensité i (trouvé par l'utilisation du théorème d'Ampère sur un cercle de rayon r_1 :

- $\vec{C} = \frac{k}{r_1} \vec{v}$ et $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} \vec{v}$ pour $r_1 > a$,
- $\vec{C} = \frac{k}{a^2} r_1 \vec{v}$ et $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} r_1 \vec{v}$ pour $r_1 < a$.

• additivité des grandeurs ou de leurs variations en physique linéarisée, analogie

Le mouvement tourbillonnaire est donc analogue au champ \vec{B} créé par un câble infini de rayon a .

b. Cette analogie se poursuit pour la superposition de deux mouvements tourbillonnaires de sens opposés d'axes distants de d et la superposition des champs \vec{B} créés par deux câbles infinis de rayon a , distants de d , parcourus en sens inverse ce qui donne une intuition inexacte de dipôle magnétique.



Les lignes de courant de \vec{C} et de \vec{B} sont analogues : il faut respecter $a \ll d$ et $d \ll r$; le voisinage de O est supprimé.

3.1.3. Electrostatique

Voir page 735.

3.1.4. Magnétostatique.

Voir page 765.

3.2. Statique des fluides

Appartient aussi aux programmes de MPSI, PCSI, PTSI, TSI1, TPC1

3.2.1. Barrage parallélépipédique

Il est rappelé aux étudiants que les explications physiques des phénomènes étudiés ont autant d'importance que les calculs proprement dits et doivent figurer au même titre. Ces explications seront prises en compte dans la notation.

Partie A

Données numériques nécessaires pour les applications numériques et valables pour tout le problème :

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Pression atmosphérique : $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

Masse volumique de l'eau (sous la pression atmosphérique) : $\rho_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Le référentiel d'étude est la terre et sera donc supposé galiléen.

I. On considère un fluide de masse volumique ρ dépendant éventuellement de la pression, en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre \vec{g} .

a. Donner, sans démonstration, la relation liant la pression P en un point du liquide, la masse volumique en ce point et l'accélération de la pesanteur \vec{g} .

b. En déduire que les surfaces isobares du liquide sont des plans horizontaux. Quelle est, en particulier, la pression de la surface libre du liquide ?

Pour la suite du problème, on repérera un point M du liquide par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) du repère de la figure 1. La surface libre du liquide étant le plan xOy , le liquide se trouve dans le demi-espace z positif. Le demi-espace z négatif est à la pression atmosphérique P_0 .

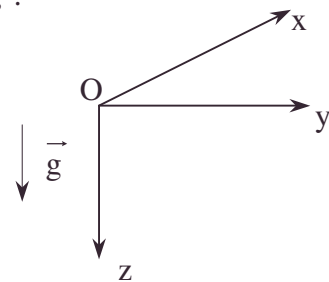


Figure 1

c. Le liquide est supposé, dans un premier temps, incompressible. Déterminer la relation donnant l'expression de la pression en un point M du liquide de profondeur $z = h$, en fonction de P_0 , g , ρ_0 et h ; ρ_0 représentant la masse volumique du liquide.

Application numérique : le liquide est de l'eau ; $h = 30 \text{ m}$.

d. Le liquide n'est maintenant plus supposé incompressible. Son coefficient de compressibilité isotherme χ , défini par $\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ est supposé constant.

(Dans l'expression de χ , V représente un volume quelconque de liquide).

On se propose, comme dans la question précédente, de trouver la loi donnant l'expression de la pression en fonction de la profondeur (à température constante).

1. Démontrer la relation existant entre la masse volumique ρ du liquide en un point, et la pression en ce point. On fera également intervenir dans la relation la pression atmosphérique et la masse volumique ρ_0 du liquide sous la pression atmosphérique.

2. En déduire l'expression de la pression en fonction de la profondeur h du point étudié.

3. Retrouver l'expression trouvée en **c.** quand χ tend vers 0.

4. Application numérique : le liquide est de l'eau pour laquelle $\chi = 5.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

Calculer la pression à une profondeur $h = 30 \text{ m}$.

Sur quel chiffre significatif porte la correction apportée par la prise en compte de χ ?

Conclure.

II. Le fluide est maintenant contenu dans le quart d'espace z positif, y négatif, le plan xOz servant de paroi (figure 2).

a. Déterminer la force exercée par le liquide sur une hauteur h de paroi comptée depuis le point O . On pourra raisonner sur une longueur $\ell = 1\text{m}$ de paroi comptée suivant l'axe des x .

b. Compte tenu de la présence d'air à droite de la paroi, quelle est la force subie par la paroi de la part des fluides qui l'entourent ?

c. Déterminer de même le moment des efforts subis par la paroi de la part des fluides qui l'entourent. Ce moment sera calculé par rapport à l'axe Δ , correspondant à $z = h$ et $y = 0$ (figure 2). L'étudiant orientera l'axe Δ à son gré, mais fera clairement apparaître son choix.

III. On se propose d'étudier l'équilibre d'un barrage-poids en utilisant les résultats du **II**. Le barrage sera modélisé de la façon suivante ; un édifice parallélépipédique de hauteur h , de longueur ℓ , d'épaisseur e , en béton, de masse volumique ρ_b , repose sur le sol (figure 3).

L'action du sol sur le barrage sera modélisée par une densité surfacique de forces dont la composante verticale est $f_{sz} = \alpha y + \beta$.

On négligera toute action sur le barrage autre que celles dues au poids, à la poussée de l'eau et de l'air et à l'action du sol (en particulier on ne tiendra pas compte de l'ancrage sur les côtés).

a. En écrivant les conditions d'équilibre sur le barrage, trouver deux relations liant :

- d'une part α , β , e , h , g et ρ_b .
- d'autre part α , β , ρ_0 , g , h , e , ρ_b .

b. En déduire les valeurs de α et β .

On donnera : α en fonction de ρ_0 , g , h et e .

β en fonction de ρ_0 , ρ_b , g , h et e .

c. Commenter précisément le signe de α .

d. Il n'est pas souhaitable que β soit positif. Pourquoi ? Quelle condition cela impose-t-il à l'épaisseur e du barrage ?

(Cette condition sera donnée par une inégalité liant ρ_0 , ρ_b , h et e).

IV. Cette partie étudie le comportement de l'eau dans une canalisation coudée à 90° et subissant un rétrécissement. Le coude sera supposé s'effectuer horizontalement (figure 4).

Le débit massique D sera supposé constant, l'eau sera considérée comme non visqueuse, incompressible, et son écoulement sera supposé irrotationnel.

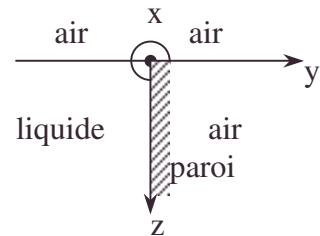
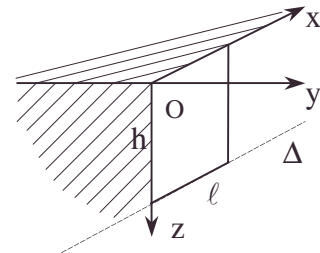


Figure 2

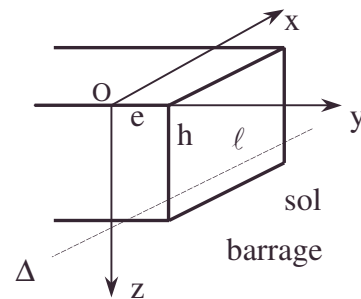


Figure 3

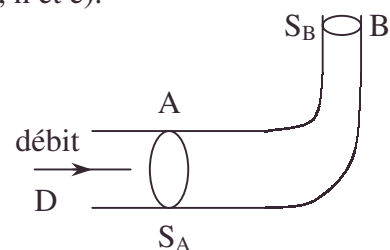


Figure 4

Les vitesses seront supposées les mêmes dans chaque section droite de la canalisation, soit v_A au point A où la section est S_A et v_B au point B où la section est S_B .

• barrage, couple, densité surfacique de forces, équilibre, incompressibilité

a. Trouver la relation liant v_A , v_B , S_A et S_B .

b. Déterminer la force subie par l'eau comprise entre les points A et B.

On rappelle le théorème de Bernoulli :

"Lors de l'écoulement irrotationnel permanent d'un fluide parfait, incompressible, la grandeur $\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}$ se conserve. Dans cette expression, v , z , p et ρ représentent

respectivement la vitesse, l'altitude, la pression et la masse volumique en un point du fluide, g étant l'accélération de pesanteur".

c. Soit P_A et P_B les pressions aux niveaux de A et de B. Donner la relation liant P_A , P_B , S_A , S_B , v_A et ρ_0 .

d. En négligeant le poids de l'eau devant les autres forces, déterminer la force subie par le coude de la canalisation en fonction de P_A , P_B , v_A , S_A , S_B , v_B et P_0 .

CCP ; Durée : 2h

Corrigé

A.1.a. $\vec{\rho g} = \text{grad } p \Leftrightarrow dp = \rho g dz$.

b. $\frac{1}{\rho(P)} \frac{\partial p}{\partial z} = g$; $\frac{dp}{\rho(P)} = g dz$; par intégration : $F(p) = gz$.

Les surfaces isobares de pression p_1 sont des plans horizontaux avec $z_1 > 0$;
 $z = z_1 = F(p_1)$. La surface libre est plane et correspond à $p = P_0$.

c. $\rho = \rho_0$; $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 g \Rightarrow p = P_0 + \rho_0 g z = P_0 + \rho_0 g h$.

A.N. : $h = 30 \text{ m} \Rightarrow p = 394300 \text{ Pa}$; $p - P_0 = 294300 \text{ Pa}$.

d.1. $\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$.

Soit une masse donnée constante $m = \rho V$; soit $\ln m = \ln \rho + \ln V$, et en dérivant :

$$0 = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} \Rightarrow \chi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T.$$

A T constant, $dp = \frac{1}{\chi} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow p - P_0 = \frac{1}{\chi} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ ou $\rho = \rho_0 \exp(\chi(p - P_0))$.

L'intégration à une fonction de T près est traduite par P_0 et ρ_0 qui dépendent de T supposé uniforme.

2. Reprenons $\frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial z} = g$; $\exp(-\chi(p - P_0)) \frac{dp}{\rho_0} = P_0 g dz \Rightarrow$

$$e^{-\chi(p-P_0)} - 1 = gz\chi\rho_0 \Rightarrow p = P_0 - \frac{1}{\chi} \ln(1 - gh\chi\rho_0).$$

3. $\chi \rightarrow 0$; $\ln(1 - gh\chi\rho_0) = -gh\chi\rho_0$; $p = P_0 + g\rho_0 h$.

4. $p = 10^5 - \frac{1}{5} 10^{10} \ln(1 - 9,81 \cdot 30 \cdot 5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3) = 394321,6 \text{ Pa}$.

L'écart de 21,6 Pa est faible et la correction concerne le 5^{ème} chiffre significatif. On abandonnera l'intervention de χ .

II.a. $dF_y = p dS$ avec $dS = \ell dz$ et $p = P_0 + \rho_0 g z$.

$$F_{y_\ell} = \int_0^h P_0 \ell \, dz + \int_0^h \rho_0 \ell g z \, dz = \left(\frac{1}{2} \rho_0 g h + P_0 \right) h \ell ;$$

A.N. : $h = 30 \text{ m}$; $F_{\text{total } y} = 4414500 \text{ N}$ (énorme).

b. $F_{\text{air } y} = -P_0 h \ell \Rightarrow F_{\text{tot } y} = F_{y_\ell} + F_{\text{air } y} = \frac{1}{2} \rho_0 g h^2 \ell$. A.N. : $F_{\text{tot } y} = 4314500 \text{ N}$.

c. $A \in \Delta$, $\vec{\mathcal{M}}_A = \int \vec{AN} \wedge (p - P_0) dS \vec{y} \Rightarrow$
 $\mathcal{M}_{A_\Delta} = \int_A^h \rho_0 g z (h - z) \ell \, dz = \frac{1}{6} \rho_0 g h^3 \ell$

A.N. : $h = 30 \text{ m}$; $\mathcal{M}_{A_z} = 44,1 \cdot 10^6 \text{ N.m}$

Δ orienté comme Ox .

III.a.α. Action du sol.

$$F_z^{\text{sol}} = \int_0^e f_{sz} \ell \, dy = \left(\alpha \frac{e}{2} + \beta \right) \ell e .$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{sol}} = \int \vec{AN} \wedge f_{sz} \ell \, dy \vec{z} .$$

$$\mathcal{M}_{A_\Delta}^{\text{sol}} = \int_0^e (\alpha y^2 + \beta y) \ell \, dy = \left(\frac{\alpha e}{3} + \frac{\beta}{2} \right) \ell e^2 .$$

β. Action de la pesanteur sur le barrage

$$\vec{F}_{\text{barrage}}^{\text{pesanteur}} = \ell e h \rho_b g \vec{z} ; \quad \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{pesanteur}} = \int \vec{AN} \wedge \rho_b g \vec{\tau} \, d\tau ;$$

$$\mathcal{M}_{A_\Delta}^{\text{pesanteur}} = \iiint y \rho_b g \, d\tau \quad \text{avec } d\tau = h \ell \, dy .$$

$$\mathcal{M}_{A_\Delta}^{\text{pesanteur}} = \frac{e^2}{2} \rho_b h g \ell .$$

Ecrivons l'équilibre du barrage :

$$F_z^{\text{sol}} + F_z^{\text{pesanteur}} + F_z^{\text{air}} = 0 ; \quad \mathcal{M}_{A_\Delta}^{\text{sol}} + \mathcal{M}_{A_\Delta}^{\text{pesanteur}} + \mathcal{M}_{A_\Delta}^{\text{fluide}} = 0 .$$

$$\left(\alpha \frac{e}{2} + \beta \right) \ell e + \ell e h \rho_b g = 0 ; \quad + \left(\alpha \frac{e}{3} + \frac{\beta}{2} \right) \ell e^2 + e^2 \ell \frac{\rho_b h g}{2} + \frac{1}{6} \rho_0 g h^3 \ell = 0$$

$$\alpha \frac{e}{2} + \beta + \rho_b h g = 0 ; \quad \left(\alpha \frac{e}{3} + \frac{\beta}{2} \right) + \rho_b \frac{h g}{2} + \frac{1}{6} \rho_0 g \frac{h^3}{e^2} = 0 .$$

b. $\alpha = -2\rho_0 g \frac{h^3}{e^3} ; \beta = -gh \left(\rho_b - \frac{\rho_0 h^2}{e^2} \right)$.

c. $\alpha < 0$: Résistance au basculement ; il est indispensable que le moment et la force dûs au sol s'opposent aux autres actions au maximum.

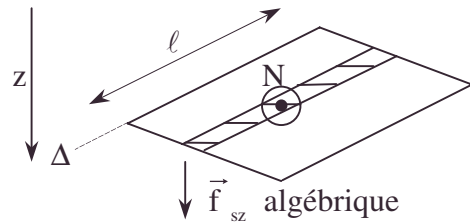
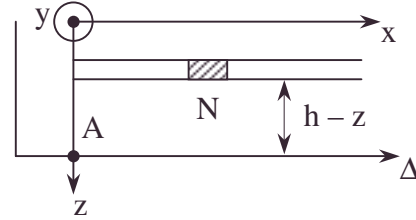
d. Si $f_{sz} < 0 \quad \forall y \Rightarrow \beta < 0$ soit une réaction du sol la plus grande possible (en résultante et en moment en opposition à l'action des fluides). Le frottement solide (qui empêche le glissement du barrage) est d'autant favorisé :

$$\beta < 0 \Rightarrow e > h \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_b}} .$$

IV.a. Conservation du débit pour les fluides incompressibles : $v_A S_A = v_B S_B$.

b. Appliquons le théorème d'Euler en régime stationnaire pour l'eau présente dans la surface de contrôle constituée de la canalisation, de S_A et de S_B . cf. figure 4.

$$\vec{F} = \vec{F}^{\text{pression}} + \vec{F}^{\text{pesanteur}} + \vec{F}^{\text{coude-fluide}} = D(\vec{V}_B - \vec{V}_A) \quad (D \text{ débit massique}).$$



c. La formule de Bernoulli s'écrit :

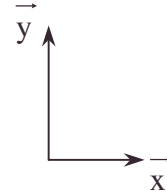
$$\frac{1}{2}\rho_0 V_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho_0 V_B^2 + p_B \Rightarrow \frac{1}{2}\rho_0 V_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{S_A^2 V_A^2}{S_B^2} + p_B.$$

d. $\vec{F}_{\text{coude} \rightarrow \text{eau}} = -\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{coude}}$ d'après le théorème de l'action et de la réaction.

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{coude}} = D(V_A \vec{x} - V_B \vec{y}) + \vec{0} + (p_A S_A \vec{x} - p_B S_B \vec{y});$$

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{coude}} = (DV_A + p_A S_A) \vec{x} - (DV_B + p_B S_B) \vec{y}.$$

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{coude}} = (\rho_0 S_A V_A^2 + p_A S_A) \vec{x} - (\rho_0 S_B V_B^2 + p_B S_B) \vec{y}.$$



3.2.2. Barrages prismatique et voûte

I. Etude d'un barrage-poids

Il existe deux grandes catégories de barrage : les barrages-poids et les barrages-voûtes. Les barrages-poids ont presque tous la même coupe transversale triangulaire, le sommet du triangle placé au niveau le plus haut que pourra atteindre la surface libre de l'eau. Les parements d'un barrage sont les 2 faces visibles de l'ouvrage en général en béton. On distingue le parement amont (face côté eau) et le parement aval (face côté air). Le parement amont est vertical et le parement aval est incliné et sa pente est donnée par l'angle α (Figure 1). L'ouvrage subit trois forces réparties, les forces de pression exercées par l'eau, le poids du barrage et la réaction que le sol exerce sur l'ouvrage. On admettra que les éléments de réduction respectifs de ces actions sont une force \vec{F} appliquée en C, le poids \vec{P} appliqué en G et une réaction \vec{R} appliquée en M. On note h la hauteur du barrage, L sa largeur de base et h_e la hauteur moyenne de l'eau retenue en amont. (On a évidemment $h_e < h$).

L'eau est considérée comme un fluide incompressible de masse volumique μ_0 .

Le béton a une masse volumique égale à $\mu_b = 2,5 \mu_0$.

A.N. : $\mu_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

On considérera une base \vec{u}_x et \vec{u}_z et les vecteurs seront toujours déterminés dans cette base.

De plus, les calculs seront effectués, numériquement ou non, en considérant toujours 1 mètre de largeur de barrage. Une couche fine d'air est supposée exister sous le barrage vu la fabrication rustique de l'ouvrage et la porosité du béton.

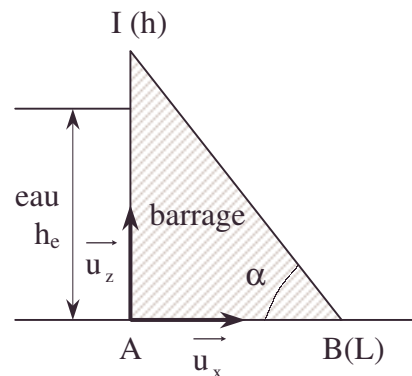


Figure 1

1. Les forces de pression intrinsèques que l'eau exerce sur la face amont en un point M sont notées $d\vec{F}$, la résultante de cette force répartie sera notée \vec{F} et on définit son centre de poussée C par la relation $\vec{OC} \wedge \vec{F} = \iint_S \vec{OM} \wedge d\vec{F}$.

(Le point O est quelconque dans cette question. On prendra par exemple O en A).

Déterminer \vec{F} et le centre de poussée C.

(on précisera les composantes et les coordonnées). Le point C est un point appartenant au parement amont.

2. Déterminer le poids de l'ouvrage et donner la position de son centre de gravité G. (On précisera les composantes et les coordonnées).

3. En écrivant les conditions d'équilibre, trouver alors la résultante des actions que le sol exerce sur le barrage et déterminer la position M où s'exerce cette résultante.

4. Pour des raisons de l'ingénierie de sécurité on souhaite que la position du point M se situe avant les $2/3$ de la base, soit $x_M < 2L/3$. Ceci est pour éviter le basculement du barrage sous la pression de l'eau par rapport au point B. Quelle valeur doit-on donner à α pour que cette condition soit réalisée ? Faire l'application numérique.

On prendra $h_e = 0,8 h$. On notera α_1 la valeur limite de α .

5. On impose une deuxième condition ; on veut que le rapport des composantes horizontale et verticale de la réaction que le sol exerce sur le barrage soit dans le rapport $3/4$.

a. Quelle est la raison physique de cette condition ?

b. Quelle valeur doit-on donner à α pour que cette condition soit réalisée ?

Faire l'application numérique. On notera α_2 la valeur limite de α .

On a toujours $h_e = 0,8 h$.

6. En fait, des infiltrations d'eau se produisent au niveau des fondations. Ces infiltrations d'eau créent sous celui-ci des sous-pressions effectives qui décroissent linéairement de A à B. Elles sont évidemment proportionnelles à la hauteur d'eau h_e .

La sous-pression est nulle en B et égale à $\mu_e g \lambda h_e$ en A.

a. Déterminer la force d'adhérence verticale \vec{F}_1 due à ces sous-pressions et son centre de poussée C_1 .

b. Quelles sont alors les nouvelles valeurs de α_1 et α_2 ?

Application numérique : on prendra $\lambda = 0,5$.

7. On choisit finalement $\alpha = 60^\circ$ pour construire le barrage.

Par suite de pluies exceptionnelles, le barrage est complètement rempli ; les conditions données au I.4. et I.5. sont-elles toujours vérifiées ?

II. Etude d'un barrage-voûte

Un barrage-voûte s'arc-boute sur les flancs d'une vallée pour leur transmettre les efforts provenant de la poussée de l'eau. On considère que le barrage-voûte a un parement amont de profil courbe, d'équation $z = ax^n$, n étant positif mais pas nécessairement entier. On fera le calcul des forces de poussée sur l'unité de largeur.

1. On considère la quantité d'eau comprise entre HIA, toujours sur une largeur de 1 mètre. Calculer le poids de cette quantité d'eau. On note par h_e la hauteur d'eau $AH = IB$, par x_e la distance $HI = AB$. (HIBA est un rectangle).

2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de cette quantité d'eau.

$$\vec{AG} = x_G \vec{u}_x + z_G \vec{u}_z$$

3. Calculer la force due à la pression que cette quantité d'eau subit sur la face AH et déterminer le centre de poussée.

4. Dédurre des calculs précédents la poussée \vec{F} que le barrage reçoit de l'eau. On déterminera les composantes F_x et F_z de cette poussée.

5. Trouver une équation de degré n vérifiée par l'abscisse x_C du centre de poussée.

6. A.N. : déterminer F_x , F_z , x_C et z_C avec $h_e = 50$ m, $n = 2$ et $x_e = 10$ m

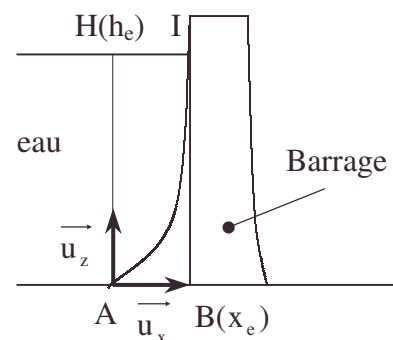


Figure 2

CCP ; Durée 2h30**Corrigé****I. Etude d'un barrage-poids**

Pour ne pas considérer l'action de l'air sur le barrage, il faut considérer le barrage comme entouré complètement d'air notamment grâce à l'existence d'une couche infiniment mince entre le barrage et le sol.

Alors, $-\iint_{\Sigma} P_0 \vec{dS} = \vec{0}$; l'action de l'eau est alors caractérisée par différence par rapport à celle de l'air. On utilisera $p(z)$ comme représentative de l'action spécifique de l'eau, avec toutes les conséquences numériques de cette manière de faire.

1.a. $\vec{F} = -\iint p d\vec{S}$; $F_x = \mu_0 g \int_0^{h_e} (h_e - z) dS$ avec $dS = 1.dz$.

$$F_x = \mu_0 g \left(h_e^2 - \frac{h_e^2}{2} \right) = \mu_0 g \frac{h_e^2}{2}, \text{ seule composante.}$$

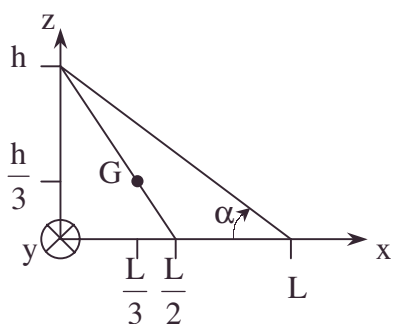
b. $\iint \vec{AM} \wedge d\vec{F} = \vec{u}_y \int_0^{h_e} z \mu_0 g (h_e - z) dz = \vec{u}_y \mu_0 g \left[\frac{h_e^3}{2} - \frac{h_e^3}{3} \right] = \vec{u}_y \mu_0 \frac{gh^3}{6}.$

$$\vec{AC} \wedge \vec{F} = z_c \mu_0 g \frac{h_e^2}{2} \vec{u}_y \Rightarrow z_c = \frac{h_e}{3}. \text{ C a pour coordonnées } 0, 0, \frac{h_e}{3}.$$

2.a. Masse du barrage par mètre de longueur : $m_B = \mu_b \frac{L}{2} h.$

Poids par mètre de longueur : $\vec{P} = -\frac{1}{2} \mu_b h L g \vec{u}_z.$

b. On découpe le barrage en tranches minces triangulaires ; on détermine G pour un triangle, au tiers des médianes, d'où par proportionnalité et associativité :



$$\Rightarrow G_{\text{ensemble}} \left| \begin{array}{l} \frac{2}{3} \frac{L}{2} = \frac{L}{3} \\ 0 \\ \frac{h}{3} \end{array} \right. \quad (\text{par symétrie}).$$

3.a. L'équilibre s'écrit : $\vec{0} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{P} - \vec{F}$; \vec{R} étant à répartition surfacique sur la surface de contact passant par A.

$$\vec{R} \left| \begin{array}{l} -\mu_0 g \frac{h_e^2}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \mu_b h L g \end{array} \right.$$

b. L'équilibre s'écrit pour les couples en A :

$$\vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{AM} \wedge \vec{R} + \vec{AC} \wedge \vec{F} + \vec{AG} \wedge \vec{P}, \text{ soit } x_M P + z_C F - \frac{L}{3} P = 0 ;$$

$$x_M = \frac{L}{3} + \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{\mu_b} \frac{h_e^3}{hL};$$

$$4. x_M < \frac{2L}{3} \Rightarrow \frac{\mu_0}{\mu_b} \frac{h_e^3}{hL^2} < 1$$

$$\text{en remplaçant } \frac{h}{L} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{\mu_0}{\mu_b} \left(\frac{h_e}{h} \right)^3 \tan^2 \alpha < 1.$$

$$\alpha_1 = \arctan \sqrt{\frac{\mu_b}{\mu_0} \left(\frac{h}{h_e} \right)^3}; \text{ A.N. : } \alpha_1 = 65,65^\circ.$$

5. On impose $R_x = -0,75 R_z$.

a. La condition de non-glissement s'écrit : $|R_x| < k R_z$, avec k le coefficient de frottement statique. Il faut donc $0,75 < k$ pour rendre les contraintes compatibles.

$$b. -\frac{R_x}{R_z} = \frac{\mu_0}{\mu_s} \frac{h_e^2}{h^2} \tan \alpha \leq 0,75 \Rightarrow \text{la valeur limite } \tan \alpha_2 = 0,75 \frac{\mu_b}{\mu_0} \left(\frac{h}{h_e} \right)^2.$$

$$\alpha_2 = \arctan 0,75 \frac{\mu_s}{\mu_0} \left(\frac{h}{h_e} \right)^2; \text{ A.N. : } \alpha_2 = 71,15^\circ.$$

α_1 est donc la contrainte la plus impérative car elle limite le plus la hauteur du barrage.

6.a. Traduisons l'énoncé dans l'expression de ce terme correctif linéarisé :

$$p_b = \mu_0 \lambda g h_e \left(1 - \frac{x}{L} \right). \text{ cf. conditions limites.}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{z} \int_0^L p_b dS, \text{ pour un mètre de largeur ; } dS = 1 \cdot dx.$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{z} \frac{1}{2} \mu_0 g \lambda h_e L; \text{ on a une force aspirante, d'adhérence du barrage au sol.}$$

On obtient l'abscisse du centre de poussée C_1 en écrivant : $\int \overrightarrow{AN} \wedge d\vec{F}_1 = \overrightarrow{AC_1} \wedge \vec{F}_1$.

$$\text{Aussi, } \int_0^L \mu_0 \lambda g h_e \left(1 - \frac{x}{L} \right) x dx = \mu_0 \lambda g h_e \frac{L^2}{6} = x_{C_1} \cdot \frac{1}{2} \mu_0 g \lambda h_e L \text{ soit } x_{C_1} = \frac{L}{3}.$$

b. Reprenons les calculs de II.3.a. et b.

$$\alpha. \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \mu_0 g h_e^2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \mu_b g hL - \frac{1}{2} \mu_0 g \lambda h_e L \end{vmatrix}$$

$$\beta. \vec{0} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AC_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P};$$

$$0 = x_M \frac{1}{2} gL (h\mu_b + \mu_0 h\lambda) - \frac{h_e}{3} \mu_0 \frac{gh^2}{2} + \mu_0 \lambda h_e \frac{L^2}{6} - \frac{L}{3} \frac{1}{2} \mu_b hLg,$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{L}{3} + \frac{1}{3} \frac{\mu_0 h_e^3}{3h\mu_b L \left(1 - \frac{\lambda h_e \mu_0}{h\mu_b} \right)}.$$

$$x_M < \frac{2L}{3} ; \frac{\mu_0 h_e^3}{\mu_b h L^2 \left(1 - \frac{\lambda h_e \mu_0}{h \mu_b}\right)} < 1 \Rightarrow \frac{\mu_0}{\mu_b} \left(\frac{h_e}{h}\right)^3 \frac{\tan^2 \alpha'_1}{1 - \lambda \frac{h_e \mu_0}{h \mu_b}} < 1$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha'_1 = \frac{\mu_b - \lambda \frac{h_e}{h}}{\left(\frac{h_e}{h}\right)^3} \Rightarrow \alpha'_1 = \arctan \left[\frac{h}{h_e} \sqrt{\frac{h}{h_e} \frac{\mu_b}{\mu_0} - \lambda} \right]$$

A.N. : $\alpha'_1 = 63,72^\circ$ condition plus contraignante que α_1 .

$$\gamma - \frac{R_x}{R_z} = \frac{\mu_0 g h_e^2}{\mu_b g h L - \mu_0 \lambda h_e L} = \frac{\tan \alpha}{\left(\frac{\mu_b}{\mu_0} \frac{h}{h_e} - \lambda\right) \frac{h}{h_e}} \leq 0,75 ;$$

de valeur limite $\tan \alpha'_2 = 0,75 \frac{h}{h_e} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0} \frac{h}{h_0} - \lambda\right)$; A.N. : $\alpha'_2 = 67,89^\circ$.

La sécurité impose la contrainte la plus impérative $\alpha'_1 = 63,72^\circ$

$$7. \frac{h}{h_e} = 1, \alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha''_1 = 54,73^\circ < \alpha \Rightarrow x_M > \frac{2L}{3} ; \alpha''_2 = 56,30^\circ < \alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{R_x}{R_z} > \frac{3}{4} : \text{le barrage glisse et peut basculer.}$$

II. Etude d'un barrage-voûte

1. Masse de la zone HIA

$$M = \mu_0 \left(h_e x_e - \int_0^{x_e} a x^n dx \right) = \mu_0 h_e x_e - \mu_0 \frac{a x_e^{n+1}}{n+1} ;$$

$$\text{or, } h_e = a x_e^n \Rightarrow M = \mu_0 h_e x_e \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) ; \vec{P} = \frac{n}{n+1} \mu_0 h_e x_e \vec{g} .$$

$$2. \overrightarrow{MAG} = \int \overrightarrow{AN} dm \text{ avec } dm = \mu_0 dx dz . 1.$$

$Mx_G = \mu_0 \iint x dx dz$; $Mz_G = \mu_0 \iint x dx dz$; la première intégration évidente donne :

$$Mx_G = \mu_0 \int_0^{x_e} x dx (h_e - a x^n) ; Mz_G = \mu_0 \int_0^{h_e} z dz \left(\frac{z}{a} \right)^{\frac{1}{n}} ;$$

$$Mx_G = \mu_0 \left(h_e \frac{x_e^2}{2} - \frac{a x_e^{n+2}}{n+2} \right) ; Mz_G = \mu_0 \frac{h_e^{\left(\frac{1}{n}+2\right)}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) a^{\frac{1}{n}}} ; \text{or } h_e = a x_e^n \text{ et } x_e = \left(\frac{h_e}{a} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$x_G = \frac{\mu_0 h_e x_e^2 (n+2-2)}{2(n+2) \frac{n}{n+1} \mu_0 h_e x_e} ; z_G = \frac{\mu_0 x_e h_e^2 n}{(2n+1) \mu_0 h_e x_e \frac{n}{n+1}} .$$

$$x_G = \frac{x_e (n+1)}{2(n+2)} ; z_G = \frac{h_e (n+1)}{(2n+1)} .$$

$$3. \text{ Comme en I.1., } F_{2x} = \mu_0 g \frac{h_e^2}{2} \text{ et } C_2 \left(0, 0, \frac{h_e}{3} \right) .$$

4. Ecrivons l'équilibre de l'eau de la zone HIA, qui subit \vec{F}_{2x}, \vec{Mg} pour la partie AI et $-\vec{Mg}, \vec{F}$ (cf. action réaction) :

$$\vec{F}_{2x} + \vec{Mg} - \vec{F} = \vec{0} ; \vec{F} = \vec{F}_{2x} + \vec{Mg} ; \vec{F} \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 g h_e^2 \\ 0 \\ -\frac{n \mu_0 h_e x_e g}{n+1} \end{cases}$$

5. Ecrivons l'équilibre de la zone HIA pour le couple subi en A :

$$\vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} = \vec{AC}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{AC} \wedge (-\vec{F}) + \vec{AG} \wedge \vec{Mg},$$

C étant le centre de poussée de la force \vec{F} .

$$z_{C_2} F_{2x} - z_C |F_x| - x_C |F_z| + x_G Mg = 0 ; \text{ (cf. } \sum_i \text{ bras de levier}_i \cdot \text{force}_i = 0 \text{)}.$$

$$-\frac{1}{3} h_e^2 + a h_e x_C^n + \frac{2 n x_e}{n+1} x_C - \frac{n x_e^2}{n+2} = 0 \text{ avec } a = \frac{h_e}{x_e^n}$$

$$6. \text{ A.N. : } F_x = 1,23 \cdot 10^7 \text{ N}, F_z = 3,27 \cdot 10^6 \text{ N}, \frac{h_e^2}{x_e^2} x_C^2 + \frac{4}{3} x_e x_C - \frac{h_e^2}{3} - \frac{x_e^2}{4} = 0 ;$$

$$z_C = h_e \left(\frac{x_C}{x_e} \right)^2 \text{ A.N. : } x_C = 5,90 \text{ m}, z_C = 17,30 \text{ m}.$$

3.2.3. Statique des marées

La Terre est assimilée à une sphère rigide, homogène (centre T, rayon R_T , masse M_T), entièrement recouverte d'un océan d'épaisseur négligeable par rapport à R_T , constitué d'un liquide homogène, non visqueux, incompressible, de masse volumique ρ . La pression atmosphérique P_0 est supposée constante et uniforme. On néglige les interactions gravitationnelles entre molécules du liquide dans tout le problème.

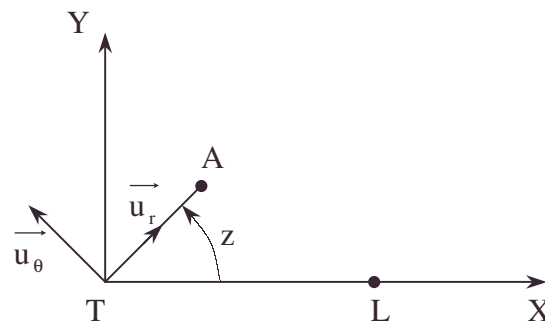
1.a. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique pour un élément infinitésimal de liquide situé en A ($\vec{r} = \vec{TA}$) dans l'hypothèse où la Terre est immobile et seule dans l'espace. On appelle G la constante de gravitation universelle.

b. Le liquide étant au repos, montrer qu'un potentiel (qu'on définira) est constant dans tout le volume occupé par le liquide. En déduire la forme de la surface de l'océan au repos.

c. Exprimer l'accélération de la pesanteur g à la surface de la Terre en fonction de G, R_T et M_T . Par la suite, on prendra $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ dans tout le liquide.

2. Considérons maintenant l'ensemble Terre - Lune supposé seul dans l'espace, la lune L étant assimilée à une masse ponctuelle M_L située à une distance D du centre de la Terre. La Terre ne tourne pas sur elle-même dans cette modélisation.

On appelle $\vec{D} = \vec{TL}$ et z l'angle (\vec{TL}, \vec{TA}) .



plan méridien

a. Quelle est l'accélération d'entraînement du centre de la Terre T dans un référentiel galiléen ?

b. Que devient la relation fondamentale de la dynamique pour le liquide dans un référentiel lié à la Terre ? Les termes supplémentaires dus à la présence de la Lune forment l'accélération génératrice des marées \vec{a}_M dans le cadre formel $\vec{f} = m\vec{a}$.

c. Exprimer cette accélération lorsque $D \gg R_T$ en fonction de g , M_L , M_T , R_T , \vec{D} et \vec{r} . Préciser en quels points de la surface du globe elle est maximum. La comparer numériquement à l'accélération de la pesanteur.

On donne $M_L = 0,0122 M_T$ et $D = 60,2 R_T$.

d. Montrer, dans le cas $D \gg R_T$, que \vec{a}_M dérive d'un potentiel Ω dont on donnera l'expression à la surface de la Terre en fonction de g , M_L , M_T , R_T , D et z .

3.a. L'eau étant au repos, trouver une relation vérifiée dans tout le liquide. En déduire une équation caractérisant la surface libre.

b. Soit s la variation de niveau de l'océan due à l'attraction lunaire.

En remarquant que la quantité d'eau à la surface du globe reste constante, montrer que :

$$s = \frac{1}{2} \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^4}{D^3} (3 \cos^2 z - 1).$$

4. On suppose que la Lune décrit une orbite circulaire dans le plan équatorial terrestre, avec une vitesse angulaire ω_1 (période $T_1 = 28$ jours) de même sens que la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre sur elle-même (période $T = 24$ heures).

La force d'inertie centrifuge ne produisant que des déformations permanentes, on ne tiendra pas compte de son effet sur l'eau.

a. Quelle est la vitesse angulaire apparente de la Lune dans un repère lié à la Terre ? Quelle est la période T_{L2} du mouvement des marées en considérant l'équilibre de l'eau réalisé à chaque instant ? Calculer numériquement T_{L2} .

b. Calculer numériquement l'amplitude des marées (différence de hauteur entre la haute mer et la basse mer) en un point de l'équateur. On donne $R_T = 6350$ km.

Les valeurs numériques des période et amplitude que vous obtenez vous paraissent-elles vraisemblables ?

ENS ; Durée : 1h.

Corrigé

1.a. $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\text{grad } P + \rho \vec{g}$ avec $\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_r$.

Soit, en multipliant par $d\tau$: $\rho \vec{a} d\tau = -G_p M_T \frac{d\tau}{r^2} \vec{u}_r - \text{grad } P d\tau$.

b.α. $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = d\tau \text{grad} \left(\frac{GpM_T}{r} - P \right) = d\tau \text{grad } f_R$ avec $f_R(A) = -P + \frac{GpM_T}{r}$.

Le repos du liquide implique $f_R(A) = \text{cste} \quad \forall A$ (cf. électrostatique des conducteurs), le volume du liquide est un volume équi- f_R . On prendra f_R comme potentiel.

β. A la surface du liquide Σ : $P = P_0 \quad \forall A \in \Sigma$ définit la surface libre.

On a par continuité : $P_0 - \frac{GpM_T}{r} = C$ (cste) $\forall A \in \Sigma$; soit $r = \frac{GpM_T}{P_0 - C}$ qui est l'équation d'une sphère.

• équilibre, force d'inertie, maximum, P.F.D., potentiel des marées, surface libre

c. Vu l'expression comparée des forces de gravitation et électrostatiques entre deux points matériels, le théorème de Gauss adapté à la gravitation donne :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g} \, dS = -M_{\text{int}\Sigma} \cdot 4\pi G \Rightarrow \vec{g}_{R_T} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{u}_r \text{ soit } G = \frac{R_T^2}{M_T} g.$$

2.a. Appliquons le P.F.D. à la Terre : $M_T \vec{a}_T = GM_T M_L \frac{\vec{D}}{D^3}$, la Terre n'étant attirée que par la lune. $\vec{a}_T = GM_L \frac{\vec{D}}{D^3} = \vec{a}_e$ vu $\vec{a}_r = \vec{0}$.

Rappelons qu'une accélération d'entraînement est une accélération absolue.

b. La Terre ne tournant pas sur elle-même (sic) $\vec{a}_c = \vec{0}$;

$$\rho \vec{a}(M, t) d\tau = -G\rho M_T \frac{d\tau}{r^2} \vec{u}_r - \vec{\text{grad}} P d\tau - \rho d\tau \vec{a}_T - \rho d\tau GM_L \frac{\vec{LM}}{LM^3} ;$$

$$\rho \vec{a}(M, t) d\tau = -G\rho M_T \frac{d\tau}{r^2} \vec{u}_r - \vec{\text{grad}} P d\tau + \rho \vec{a}_M d\tau \text{ avec } \vec{a}_M = -GM_L \left(\frac{\vec{LA}}{LA^3} + \frac{\vec{D}}{D^3} \right).$$

$$\text{c.}\alpha. \vec{LA} = \vec{TA} - \vec{TL} = \vec{r} - \vec{D} ; LA = (\vec{D} - \vec{r})^{\frac{1}{2}} = (D^2 + r^2 - 2\vec{D}\cdot\vec{r})^{\frac{1}{2}} ;$$

$$LA = D \left(1 - 2 \frac{\vec{D}\cdot\vec{r}}{D^2} + \left(\frac{r}{D} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; LA^{-3} = \frac{1}{D^3} \left(1 + 3 \frac{\vec{D}\cdot\vec{r}}{D^2} + \dots \right).$$

$$\vec{a}_M = GM_L \left[\frac{\vec{D} - \vec{r}}{D^3} \left(1 + \frac{3\vec{D}\cdot\vec{r}}{D^2} \dots \right) - \frac{\vec{D}}{D^3} \right] = g \frac{R_T^2}{M_T} M_L \left[3(\vec{D}\cdot\vec{r}) \frac{\vec{D}}{D^5} - \frac{\vec{r}}{D^3} + \dots \right].$$

en ne conservant que les termes d'ordre 1 en $\frac{r}{D}$.

$$\beta. \vec{a}_M = g R_T^2 \frac{M_L}{M_T} \left[\left[\frac{3r \cos z}{D^3} - \frac{r \cos z}{D^3} \right] \vec{X} - \frac{r \sin z}{D^3} \vec{Y} \right] ;$$

$$\vec{a}_M^2 = g^2 R_T^4 \frac{M_L^2}{M_T^2} \frac{r^2}{D^6} [4 \cos^2 z + \sin^2 z] = g^2 R_T^4 \frac{M_L^2}{M_T^2} \frac{r^2}{D^6} [4 - 3 \sin^2 z] ;$$

\vec{a}_M^2 est maximale pour $\sin z = 0$ soit $z = 0$, le point de la Terre sous la Lune et $z = \pi$ point de la Terre en opposition avec la Lune sur la ligne TL.

$$\gamma. \text{ Alors } a_M \sim g R_T^2 \frac{M_L}{M_T} \cdot 2 \frac{R_T}{D^3} \Rightarrow \frac{a_M}{g} = 2 \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{D} \right)^3 ; \text{ AN : } \frac{a_M}{g} \# 1,12 \cdot 10^{-7}.$$

d. On cherche Ω tel que:

$$\vec{\text{grad}} \Omega = g \frac{R_T^2}{M_T} M_L \left[\frac{3D\vec{r}}{D^5} \cos z (\vec{D}\vec{u}_r \cos z - \vec{D}\vec{u}_\theta \sin z) - r \frac{\vec{u}_r}{D^3} \right] ;$$

$$\vec{a}_M = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \vec{u}_z = g R_T^2 \frac{M_L}{M_T} \frac{\vec{u}_r}{D^3} r (3 \cos^2 z - 1) - g R_T^2 \frac{M_L}{M_T} 3r \sin z \vec{u}_\theta \cos z.$$

$$\text{On trouve : } \Omega = g \frac{R_T^2}{D^3} \frac{M_L}{M_T} \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 z - 1) + \text{cste}.$$

• développement au premier ordre ou plus, équations d'Euler, Gauss [théorème de] adapté à la gravitation, P.F.D., potentiel de marée, surface libre

$$\mathbf{3.a.}\alpha. \vec{a}(A, t) = \vec{0} \quad \forall A \text{ et d'après } \mathbf{A.1.,2.b.} : \vec{0} = d\tau \left(-G\rho M_T \frac{\vec{u}_r}{r^2} - \vec{\text{grad}} P + \rho \vec{\text{grad}} \Omega \right),$$

soit $\vec{0} = d\tau (\vec{\text{grad}} f_R + \vec{\text{grad}} \rho \Omega)$ ou $\vec{0} = \vec{\text{grad}} (\rho \Omega + f_R)$, soit $\rho \Omega + f_R = \text{cste} \quad \forall A$.

$$\rho g \frac{R_T^2}{D^3} \frac{M_L}{M_T} \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 z - 1) + \frac{G\rho M_T}{r} - P = \text{cste}.$$

$\beta.$ $P = P_0 \quad \forall A \in \text{surface libre } \Sigma$: on obtient l'équation de la surface libre :

$$\rho g \frac{R_T^2}{D^3} \frac{M_L}{M_T} \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 z - 1) + \frac{G\rho M_T}{r} = \text{cste}.$$

$$\mathbf{b.} \text{ Posons } r = R_T + s = R_T \left(1 + \frac{s}{R_T} \right); \quad r^2 \sim R_T^2 \left(1 + \frac{2s}{R_T} + \dots \right) \text{ et } r^{-1} \sim R_T^{-1} \left(1 - \frac{s}{R_T} \dots \right).$$

L'équation de la surface libre peut être linéarisée.

$$\text{On obtient } s = \frac{1}{2} \frac{R_T^4}{D^3} \frac{M_L}{M_T} (3 \cos^2 z - 1) + c, \quad c \text{ étant une constante.}$$

Ecrivons que le volume de la Terre est le même en présence ou en absence de l'attraction lunaire : $\mathcal{V} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{R_T+s} r^2 dr \right) \sin z dz \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{R_T} r^2 dr \right) \sin z dz \right) d\varphi$.

$$\text{Par différence, il reste : } 0 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_{R_T}^{R_T+s} r^2 dr \right) \sin z dz \right) d\varphi;$$

$$\text{or, } r^3 \approx R_T^3 \left(1 + \frac{3s}{R_T} \right) \text{ et } \int_{R_T}^{R_T+s} r^2 dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_T}^{R_T+s} = \frac{s}{R_T} R_T^3,$$

$$\text{et il reste : } 0 = \left(\int_0^\pi s(z) \sin z dz \right) 2\pi R_T^2 \Rightarrow \text{on trouve } c = 0 \text{ donc :}$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{R_T^4}{D^3} \frac{M_L}{M_T} (3 \cos^2 z - 1), \text{ de période } \pi \text{ en } z \text{ (cf. } \mathbf{2.c}).$$

$$\mathbf{4.a.} \quad \vec{\Omega} \left(\frac{L}{R_T} \right) = \vec{\Omega} \left(\frac{L}{R} \right) + \vec{\Omega} \left(\frac{R}{R_T} \right) = \vec{\Omega} \left(\frac{L}{R} \right) - \vec{\Omega} \left(\frac{R_T}{R} \right).$$

R_T : repère lié à la Terre ; R : repère galiléen.

$$T \left(\frac{L}{R_T} \right) = \frac{2\pi}{\left| \vec{\Omega} \left(\frac{L}{R_T} \right) \right|} = \frac{2\pi}{\left| \frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T} \right|} = \frac{T T_1}{T_1 - T}.$$

La période de s étant π , nous aurons 2 maxima pour une période $T \left(\frac{L}{R_T} \right)$.

$$T_{L_2} = \frac{T \left(\frac{L}{R_T} \right)}{2} = \frac{T T_\ell}{2(T_\ell - T)}; \quad \text{AN : } T_{L_2} = 44800 \text{ s.}$$

$\mathbf{b.}\alpha.$ A l'équateur (défini par TL) $z = 0 (\pi)$.

$$\text{L'amplitude : } s_{\max} - s_{\min} = \frac{1}{2} \frac{R_T^4}{D^3} \frac{M_L}{M_T} (3 - 1) - \frac{1}{2} \frac{R_T^4}{D^3} \frac{M_L}{M_T} (0 - 1) = \frac{3}{2} \frac{R_T^4}{D^3} \frac{M_L}{M_T}.$$

A.N. : 0,533 m.

$\beta.$ T_{L_2} est en accord avec la période des marées sur nos côtes. L'amplitude n'est valable qu'en haute mer et ne tient pas compte du profil des côtes.

3.2.4. Atmosphère et ballon Transformation polytropique

Voir page 511.

3.2.5. Atmosphère et aérostats

Voir page 515.

3.3. Actions mécaniques

3.3.1. Premiers pas théoriques

3.3.1.1. Turbine hydraulique

1. Une conduite d'eau issue d'un barrage alimente une centrale hydraulique. L'extrémité de cette conduite a une section décroissante, appelée injecteur, à la sortie de laquelle l'eau sort, à l'air libre, sous forme de jet pratiquement cylindrique et horizontal. La section droite du jet est circulaire, de diamètre d . On admet que l'écoulement est unidimensionnel, la vitesse u de l'eau est la même en tout point du jet et parallèle à son axe. On note par H la différence d'altitude entre la surface libre de l'eau du barrage et l'axe de l'injecteur.

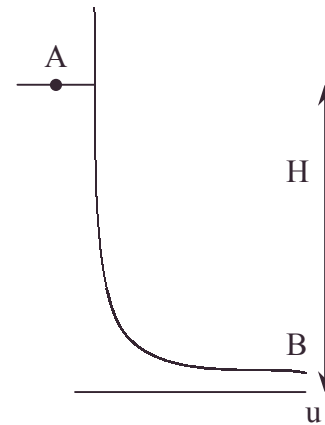


Figure 1

a. Calculer la vitesse u de l'eau après sa sortie de l'injecteur.

b. Calculer le débit volumique D_v et la puissance cinétique P_1 du jet d'eau en fonction de u , d et μ_0 .

c. A.N. : $H = 50 \text{ m}$; $d = 10 \text{ cm}$; $\mu_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. Calculer numériquement u , D_v et P_1 .

2. Le jet frappe alors les augets d'une roue à aubes d'axe horizontal. Les aubages ont la forme de plaques planes ; elles sont disposées à la périphérie de la roue de très grand diamètre. Le déplacement des plaques est assimilé à un déplacement rectiligne, la plaque se déplaçant à la vitesse \vec{V} (cette approximation est rendue possible par le rayon très grand de la roue à aubes).

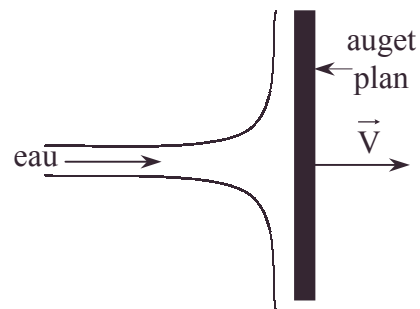


Figure 2

On suppose également que le jet d'eau est entièrement reçu par la plaque et qu'en s'écrasant sur celle-ci, il rejaillit latéralement. (Figure 2).

a. Déterminer la quantité de mouvement transférée par unité de temps de l'eau à la plaque. On suppose que le jet reste horizontal, de section circulaire de diamètre d , la vitesse de l'eau restant égale à u par rapport au sol.

b. Calculer la puissance mécanique P_2 reçue par la roue et déterminer le rendement $r_1 = \frac{P_2}{P_1}$ en fonction de u et de V .

Pour quelle valeur de V obtient-on le meilleur rendement ? Le calculer.

3. On remplace les augets plans par des augets Pelton, représentés figure 3.

a. Montrer que l'eau repart des augets avec une vitesse relative opposée à la vitesse relative d'arrivée du jet sur les augets.

b. Calculer la puissance mécanique P_3 reçue par la roue et donner le rendement $r_2 = \frac{P_3}{P_1}$ en fonction de u et v .

Pour quelle valeur de V obtient-on le meilleur rendement ? Le calculer

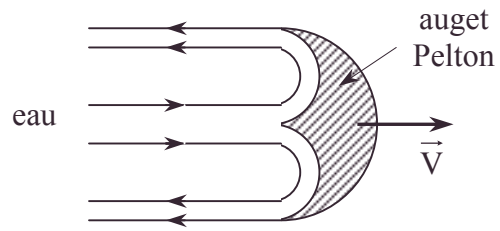


Figure 4

Autres concours ; Durée : 1h30.

Corrigé

1.a. Appliquons la formule de Bernoulli entre la surface libre de l'eau retenue par le barrage et le point de sortie B

$$: P_0 + \frac{1}{2}\mu_0 u^2 + 0 = P_0 + \frac{1}{2}\mu_0 V_A^2 + \mu g H.$$

Or, $V_A^2 \ll u^2$ (niveau invariant du barrage).

Il vient : $u = \sqrt{2gH}$.

b.α. $D_V = Su = \frac{\pi}{4} d^2 u.$

β. $P_1 = \iint_{s_1} \frac{1}{2} u^2 \mu_0 \vec{u} d\vec{S} = \frac{\mu}{2} D_V u^2 = \frac{1}{8} \pi d^2 u^3 \mu_0.$

c. A.N. : $u = 31,32 \text{ m.s}^{-1}$; $D_V = 0,25 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; $P_1 = 1,20 \cdot 10^5 \text{ W}$

2.



a. Plaçons-nous dans le repère lié à la plaque en translation rectiligne : le jet y est en régime stationnaire ; il arrive avec une vitesse $u - V$ avec un débit massique

$$D_m = \mu_0 \frac{\pi d^2}{4} (u - V).$$

D'après la formule de Reynolds $\frac{DP_x}{Dt} = -D_m(u - V)$ pour le liquide présent dans la surface de contrôle Σ en régime permanent.

- $\frac{DP_x}{Dt}$ est la quantité de mouvement transférée par unité de temps à la plaque

(cf. symétrie cylindrique) au signe près ; $\frac{DP_x}{Dt} = -\mu_0 \frac{\pi d^2}{4} (u - V)^2.$

b.α. $P_2 = \vec{F} \cdot \vec{V}$ dans le repère lié au sol, \vec{F} étant la force subie par l'auget de la part du jet et de la pression atmosphérique. Ecrivons le PFD dans le repère lié à l'auget pour le liquide présent dans la surface de contrôle Σ_1 (en régime permanent).

"Premier pas" théoriques

$$\frac{D\vec{P}_\Sigma}{Dt} = - \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_{latt}} p_a \vec{dS} + \vec{F}_{plaque \rightarrow \Sigma} ;$$

$$\text{Or, } \vec{F} = \vec{F}_{\Sigma \rightarrow plaque} - \iint_{\Sigma_p} p_a \vec{dS} = -\vec{F}_{plaque \rightarrow \Sigma} - \iint_{\Sigma_p} p_a \vec{dS} .$$

$$\vec{F} = -\frac{D\vec{P}_\Sigma}{Dt} - \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_{latt}} p_a \vec{dS} - \iint_{\Sigma_p} p_a \vec{dS} = \mu_0 \frac{\pi d^2}{4} (u - V)^2 \vec{x} - \underbrace{\iint_{\Sigma_p} p_a \vec{dS}}_{=0}$$

$$P_2 = \mu_0 \frac{\pi d^2}{4} (u - V)^2 V .$$

$$\beta. r_1 = \frac{P_2}{P_1} = 2 \frac{V}{u^3} (u - V)^2 = 2 \left(1 - \frac{V}{u} \right)^2 \left(\frac{V}{u} \right) .$$

$$\gamma. \text{ Posons } \lambda = \frac{V}{u} , r_1 = 2\lambda(1 - \lambda)^2 .$$

$$\frac{dr_1}{d\lambda} = 2(1 - \lambda)(1 - 3\lambda) = 0 \text{ pour } \lambda = 1 \text{ et } \lambda = 0,33 .$$

$$\lambda = 1 , r_1 = 0 : \text{minimum de } r_1 .$$

$$\lambda = 0,33 : \text{seul maximum de } r_1, \text{ par conséquent : } V = \frac{u}{3} \Rightarrow r_1 = 0,296 .$$

3.a. Dans le repère lié à l'auget, le régime est stationnaire ; en considérant la conservation des surfaces des jets entrant et réfléchi comme allant de soi par réflexion. Cela entraîne l'égalité des valeurs des vitesses $|u - V|$ de par la conservation des débits.

b. Comme en 2. appliquons le PFD au liquide présent dans Σ :

$$\frac{DP_x}{Dt} = -2D_m(u - V) = -2\mu_0 \frac{\pi d^2}{4} (u - V)^2 .$$

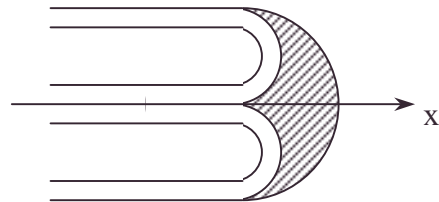
Ce coefficient 2 se conservera dans les raisonnements analogues à ceux de 2. :

$$P_3 = 2P_2 ; r_2 = 2r_1 ; P_3 = \mu_0 \frac{\pi d^2}{2} (u - V)^2 V ; r_2 = 4 \left(1 - \frac{V}{u} \right)^2 \frac{V}{u} =$$

$$r_2 = 4\lambda(1 - \lambda)^2 , \frac{dr_2}{d\lambda} = \frac{2dr_2}{d\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow r_{2\max} \text{ correspond à } V = \frac{u}{3} \text{ et } r_{2\max} = 0,592 .$$

Le coefficient 2 dans P_3 vient de la forme de l'auget et améliore considérablement le rendement.



3.3.1.2. Vidange

Les questions A, B et C sont indépendantes.

Un réservoir cylindrique, de rayon R , contient une hauteur H d'eau fluide considérée comme incompressible, sans viscosité et de masse volumique ρ constante. Ce récipient est situé dans le champ de la pesanteur \vec{g} supposé uniforme.

On se propose d'utiliser ce réservoir pour analyser quelques lois de mouvement relatives à la dynamique des fluides.

A. Première étude

Par une alimentation permanente, on maintient constant le niveau H de l'eau et on perce la surface latérale du réservoir d'un trou circulaire de rayon r très petit devant R et situé à la distance y du niveau supérieur de l'eau (Figure 2).

En justifiant de manière rigoureuse les hypothèses permettant d'écrire les différentes équations :

1. On demande de calculer la vitesse d'éjection V_0 (considérée horizontale) du fluide à la sortie de l'orifice.

2. Le récipient étant posé sur un plateau horizontal, établir dans le plan (\vec{X}, \vec{Y}) la loi du mouvement d'une particule fluide entre sa sortie du trou et sa rencontre au point P avec le plan horizontal.

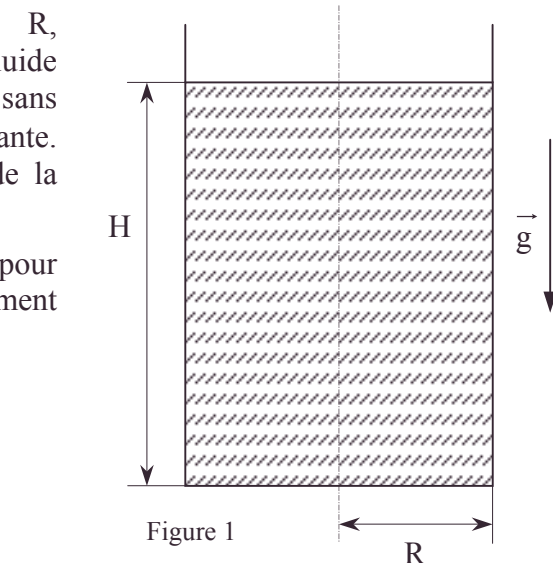


Figure 1

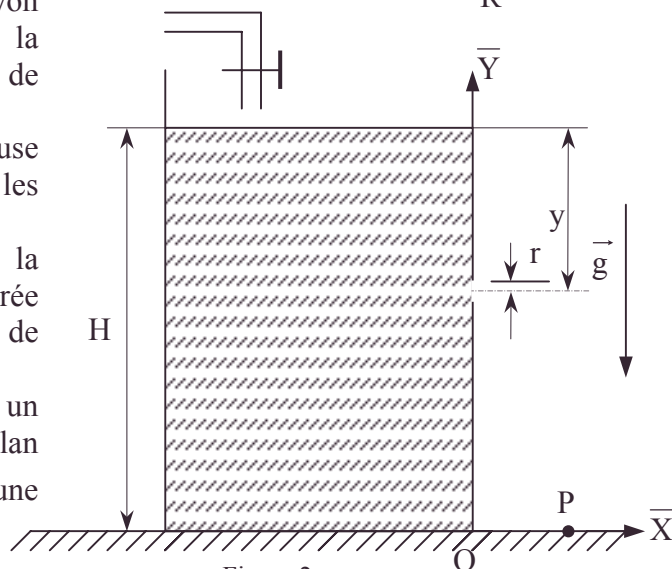


Figure 2

En déduire sa trajectoire et la distance $L = OP$. Etudier sommairement les variations de L en fonction de y . Tracer la courbe représentative correspondante. Pour quelle valeur de y , L est-elle maximale ? Trouver cette valeur en fonction de H . On négligera les frottements dus à l'air.

B. Deuxième étude

Le réservoir précédent sert à alimenter une lance d'arrosage de section circulaire (diamètre D) dont l'axe de l'ajutage formant l'embout du tuyau se trouve à la distance constante $H_0 = H - \frac{D}{2}$ de la surface libre du réservoir (figure 3). L'ajutage de sortie est de section circulaire, diamètre d qu'il est possible de faire varier en vissant ou dévissant l'embout.

- On appelle :
- V la vitesse de l'eau dans le tuyau ;
 - u la vitesse dans la section de sortie ;
 - λ le rapport d / D .

et on admet que la répartition des vitesses est uniforme dans une section droite.

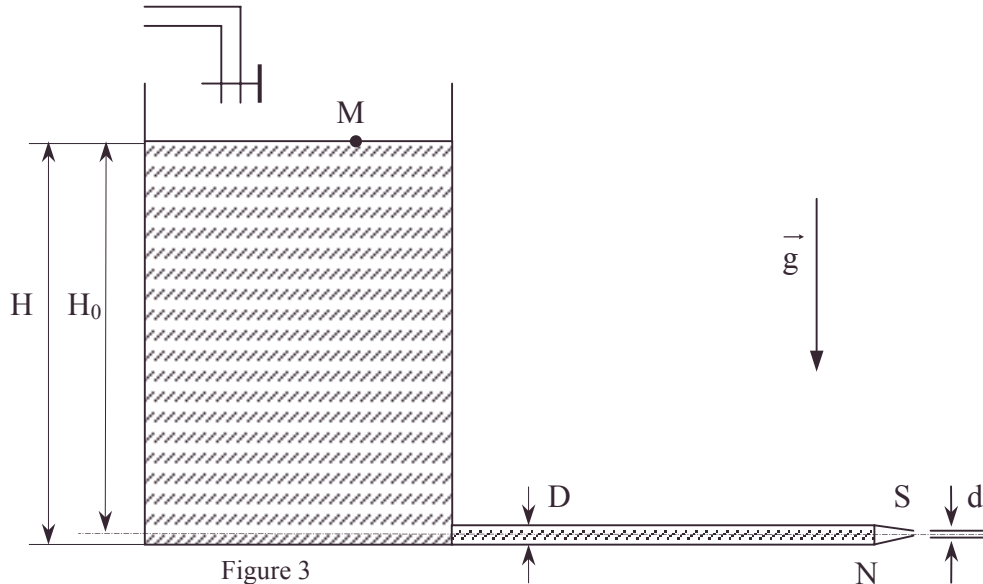


Figure 3

1. Par application (à justifier) du théorème de Bernoulli entre les points M et S et l'utilisation de la conservation du débit, calculer la vitesse V en fonction de g , H_0 et λ .

2. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points N et S, trouver l'expression de la pression P_N au point N, en fonction de ρ , g , H_0 , λ et de la pression atmosphérique P_0 .

3. On considère le volume de fluide limité d'une part par les parois de l'embout, et d'autre part par les sections circulaires en N et S. Après avoir établi le bilan des efforts extérieurs s'exerçant sur ce volume, et négligé les efforts correspondants dus à la pesanteur, en déduire l'effort F exercé par le fluide sur le pas de vis de fixation de l'embout sur le tuyau. Exprimer F en fonction de ρ , g , H , D , λ et P_0 .

Préciser le sens et la direction de la force \vec{F} .

4. Calculer F dans le cas suivant d'application :

$$H_0 = 5 \text{ m} ; d = 5 \text{ mm} ; D = 3 \text{ cm} ; P_0 = 1 \text{ bar} ; g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}.$$

C. Troisième étude

Pour vidanger le réservoir précédent, la section inférieure de celui-ci est percée d'un trou circulaire de rayon r très faible devant R (figure 4). A l'instant initial ($t = 0$), la hauteur d'eau est égale à H et à l'instant t , elle devient h .

1. En supposant l'écoulement quasi permanent (permanence établie pour des intervalles de temps successifs très courts), après avoir calculé la vitesse d'éjection du fluide à un instant donné, compte tenu de la conservation du débit, établir la loi de variation de h en fonction du temps. En déduire le temps nécessaire T pour vider le réservoir.

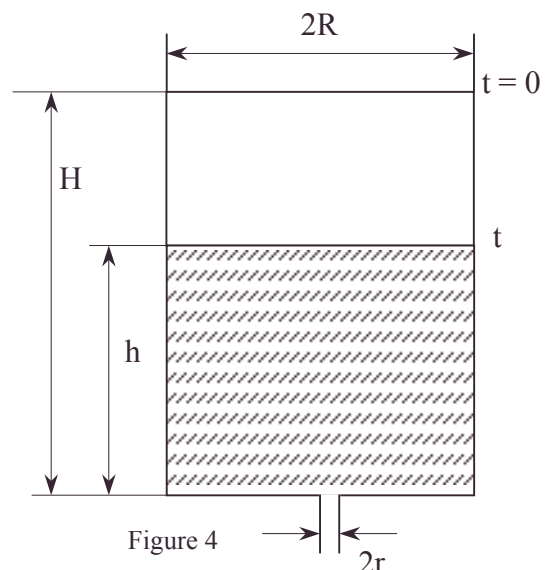


Figure 4

- conservation du débit, effort exercé par le fluide, théorème de Bernoulli

2. Avec les conditions suivantes : $H = 5 \text{ m}$; $R = 1 \text{ m}$; $r = 2 \text{ cm}$, trouver les valeurs numériques des temps T' et T pour vider respectivement la moitié et la totalité du réservoir.

3. Discuter l'hypothèse de l'écoulement permanent utilisé dans la question 1.

CCP ; Durée : 2h

Corrigé

A.1. Soit B un point du trou. Considérons une ligne de courant AB où $P_A = P_0$, $\vec{V}_A = -\frac{dH}{dt}\vec{Y} = \vec{0}$ et $P_B = P_0$, $\vec{V}_B = \vec{V}_0$. En

régime stationnaire, la formule de Bernoulli pour cette ligne de courant s'écrit :

$$\frac{1}{2}V_0^2\rho + \rho g(H - y) + P_0 = 0 + \rho gH + P_0 \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gy}.$$

Remarque : il faut avoir un fluide parfait ($\rho = \rho_0$, viscosité nulle).

2.a. En l'absence de viscosité, pour une particule (fluide parfait) dans un champ de pression uniforme $P(N) = P_0 \quad \forall N$.

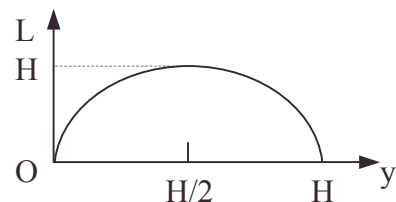
$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} \Leftrightarrow \frac{d\vec{V}^L}{dt} = \vec{g}$ (L'exposant L rappelle le sens lagrangien de la notation classique de mécanique du point).

$$\left. \frac{D\vec{V}}{Dt} \right| \begin{matrix} \ddot{X} = 0 \\ \ddot{Y} = -g \end{matrix} ; \left. \vec{V} \right| \begin{matrix} \dot{X} = V_0 \\ \dot{Y} = -gt \end{matrix} \Rightarrow \text{trajectoire parabolique : } \overrightarrow{OM} \left| \begin{matrix} X = V_0 t = \sqrt{2gy} t \\ Y = \frac{1}{2}gt^2 + H - y \end{matrix} \right.$$

b. $Y = 0$; $t = \sqrt{\frac{2(H-y)}{g}} \Rightarrow L = X_p = \sqrt{4y(H-y)}.$

c. La courbe est une ellipse.

$$\frac{dL}{dy} = \frac{H-2y}{\sqrt{y(H-y)}} \Rightarrow L_{\max} = H \text{ pour } y = \frac{H}{2}.$$



B.1. $P_M = P_0$; $V_M = -\frac{dH}{dt} = 0$; $P_S = P_0$; $V_S = u$.

En régime stationnaire, la formule de Bernoulli, pour cette ligne de courant AS, s'écrit :

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g \cdot 0 + P_0 = 0 + \rho gH_0 + P_0 \Rightarrow u = \sqrt{2gH_0}.$$

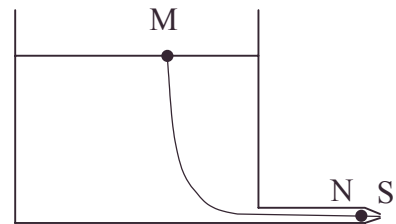
On suppose, comme en A, avoir un fluide parfait

($\rho = \rho_0$, viscosité nulle). La conservation du débit pour un fluide incompressible

permet d'écrire : $V \cdot \frac{\pi D^2}{4} = u \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow V = u \frac{d^2}{D^2}$ soit $V = \lambda^2 \sqrt{2gH_0}$.

2. En appliquant le théorème de Bernoulli (le même qu'en B.1.) entre les points N et S

on a : $\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g \frac{D}{2} + P_N = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g \frac{D}{2} + P_0$ ou $P_N = P_0 + \frac{1}{2}\rho(u^2 - V^2)$, soit :



$$P_N = P_0 + \rho g H_0 (1 - \lambda^4).$$

$$3. \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{F}_N^{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}} + \vec{F}_{\text{pesanteur}} = \frac{D\vec{P}}{Dt} = \iiint \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dm + \iint \vec{V} \rho \vec{V} d\vec{S} ;$$

$$\vec{X} \left(P_N \frac{\pi D^2}{4} - P_0 \frac{\pi d^2}{4} \right) - \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = \vec{0} + (\vec{V}_S - \vec{V}_N) D_m.$$

cf. action réaction.

régime stationnaire.

théorème d'Euler.
pour un écoulement
unidimensionnel

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = \vec{X} \left[\frac{\pi D^2}{4} (P_N - P_0 \lambda^2) + (V - u) \rho V \frac{\pi D^2}{4} \right]$$

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \lambda^2) (P_0 + \rho g H_0 (1 - \lambda^2)) \vec{X} ;$$

$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}}$ a même sens que \vec{X} car $\lambda < 1$.

$$4. \text{AN : } F_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = 100 \text{ N}.$$

C.1.a. Dans l'A.R.Q.S., la formule de Bernoulli appliquée à une ligne de courant allant de la surface libre à l'extérieur immédiat du jet s'écrit : $\frac{1}{2} \rho V_A^2 + \rho g h + P_0 = \frac{1}{2} \rho V_B^2 + 0 + P_0$.

Or, la conservation du débit d'un fluide incompressible s'écrit :

$$\pi R^2 V_A = \pi r^2 V_B \Rightarrow V_B^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = gh \Rightarrow V_B = \sqrt{2gh} \text{ vu } r \ll R.$$

$$b. V_A = -\frac{dh}{dt} = \frac{r^2}{R^2} V_B = \frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} dt ;$$

$$2(\sqrt{h} - \sqrt{H}) = -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} t \Rightarrow h = H \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \sqrt{\frac{g}{2H}} t \right]^2.$$

$$c. \text{Quand } h = 0, t = T = \frac{R^2}{r^2} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

$$C.2.a. \text{ Pour } h = \frac{H}{2}, t = T' = \frac{R^2}{r^2} \sqrt{\frac{H}{g}} (\sqrt{2} - 1).$$

$$b. \text{AN : } T' = 740 \text{ s. ; } T = 2525 \text{ s.}$$

$$C.3. \frac{dh}{dt} = -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2gh} ;$$

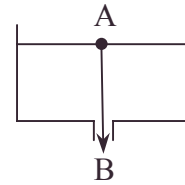
$$\text{AN : } a. h = 5 \text{ m ; } V_A = 3,96 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

$$b. h = 2,5 \text{ m ; } V_A = 2,80 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

$$c. h = 1 \text{ m ; } V_A = 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

$$d. h = 0,5 \text{ m ; } V_A = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

Cette vitesse faible justifie l'A.R.Q.S. faite.



3.3.1.3. Sphère dans un courant variable Effet Magnus

Un fluide infini, de masse volumique ρ uniforme et constante, s'écoule sans frottement d'un mouvement de translation parallèle à l'axe $z'Oz$ d'un trièdre orthonormé direct $Oxyz$: on appelle $\vec{u}(t)$ le vecteur vitesse de la translation, variable avec le temps t . On introduit une sphère solide de rayon R , maintenue immobile, son centre O étant l'origine des coordonnées (figure 1). On considère que le fluide acquiert une vitesse dérivant du potentiel Φ , défini en un point M du fluide tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$:

$$\Phi = \vec{u}(t) \cdot \vec{r} \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

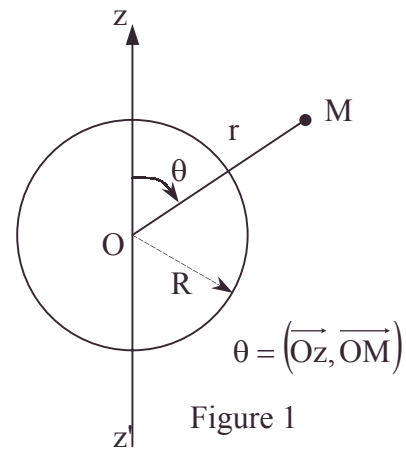


Figure 1

1. Déterminer, en coordonnées sphériques, les composantes de la vitesse du fluide en un point M : $\vec{V} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$.

2. En déduire la vitesse du fluide pour r très grand.

3. En déduire d'autre part la vitesse du fluide au contact de la sphère.

4. Soient une surface fermée Σ délimitant un volume τ de fluide et $\vec{d\Sigma}$ un vecteur surface élémentaire orienté vers l'extérieur de Σ ; on admettra, pour la pression P dans le fluide, la relation : $\oint \vec{P} d\vec{\Sigma} = \iiint \text{grad } P d\tau$.

Cette relation est applicable à tout volume ou tout élément de volume limité par une surface fermée. On donne aussi : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}$.

Montrer, en l'absence de forces autres que les forces de pression, et avec des hypothèses à préciser, que la quantité $\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ a même valeur en tout point du fluide à un instant donné. En déduire la force exercée à l'instant t par le fluide sur la sphère. Que vaut cette force si $\vec{u}(t)$ est un vecteur constant ?

ENS ; Durée 0h30

Corrigé

$$1. \vec{v} = \begin{pmatrix} v_r = u(t) \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \\ v_\theta = -u(t) \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\varphi = 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \vec{v}(\infty, \theta) = \begin{pmatrix} v_r = u \cos \theta \\ v_\theta = -u \sin \theta \\ v_\phi = 0 \end{pmatrix} ; \quad v^2 = u^2 ; \quad \vec{v} = \vec{u} : \text{ La perturbation due à la sphère a}$$

cessé, l'écoulement est uniforme et constant selon Ox.

$$3. r = R ; \quad \vec{V}_r = \begin{pmatrix} v_r = 0 \\ v_\theta = -\frac{3}{2}u \sin \theta \\ v_\phi = 0 \end{pmatrix}. \text{ L'écoulement est tangentiel.}$$

4.a. $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_v = -\vec{\text{grad}} P$, seule force volumique d'après l'énoncé. On aura donc (entre autres) la force volumique due à la compressibilité nulle $\vec{f}_v = \mu' \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{V}$ soit un fluide supposé incompressible $\text{div} \vec{V} = 0$, soit $\rho = \rho_0$.

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} \phi + \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} V^2 - \vec{V} \wedge \underbrace{\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} \phi}_0 \right] = -\vec{\text{grad}} P.$$

$$\vec{\text{grad}} \left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} V^2 + P \right] = \vec{0} \Rightarrow \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho V^2}{2} + P = k(t) \quad \forall M.$$

$$b. \vec{F} = -\iint_{\Sigma_R} P d\vec{S} \text{ avec } P = k(t) - \rho \frac{V^2}{2} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

$$\text{Pour la sphère, } r = R ; \quad v^2 = v_\theta^2 = \frac{9}{4} u^2 \sin^2 \theta ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3}{2} R \frac{du}{dt} \cos \theta.$$

Par raison de symétrie, $F_x = F_y = 0$.

$$F_z = -\iint_{\Sigma_R} P d\vec{S} \cdot \vec{z} = -\iint_{\Sigma_R} P \cos \theta dS = -\iint_{\Sigma_R} \left(k(t) - \frac{9}{8} \rho u^2(t) \sin^2 \theta - \frac{3}{2} \rho R \frac{du}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta dS$$

Prenons à l'instant t, dS le plus grand telle que l'intégrant y soit constant :

$$dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta > 0 \text{ si } 0 < \theta < \pi.$$

$$F_z = -2\pi k R^2 \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta + \frac{9}{8} 2\pi \rho R^2 u^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos \theta d\theta + \frac{3}{2} \rho R \cdot 2\pi R^2 \frac{du}{dt} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$\text{soit } F_z = -2\pi k R^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi + \frac{9}{4} \pi \rho R^2 u^2 \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^\pi + 3\pi \rho R^3 \frac{du}{dt} \left[\frac{-\cos \theta}{3} \right]_0^\pi = 2\pi \rho R^3 \frac{du}{dt}.$$

$$c. \text{ Si } \frac{du}{dt} = 0 \quad F_z = 0.$$

3.3.1.5. Fusées et satellites

Voir page 14.

3.3.1.6. Théorème de Bernoulli

Voir page 438.

3.3.2. Applications techniques

3.3.2.1. Jouet à réaction

La partie II peut être traitée indépendamment de la partie I. La partie III n'utilise que certains des résultats des parties I et II. Ce problème a pour thème l'étude très simplifiée d'un jouet à réaction.

Les mouvements étudiés dans ce problème sont rapportés à un repère terrestre $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ étant les vecteurs unitaires) orthonormé direct que l'on suppose galiléen. Le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{z}$ est supposé uniforme. L'axe \vec{Oz} est vertical ascendant. On néglige dans tous les mouvements étudiés la résistance de l'air.

Partie I

On se propose d'étudier le mouvement de translation rectiligne d'un véhicule qui roule sur le plan horizontal xOy dans la direction \vec{Oy} . Il est constitué d'un châssis indéformable de masse M muni de quatre roues assimilées à des disques d'épaisseur négligeable, homogènes, de masse m chacune et de rayon R .

Les roues sont reliées deux à deux de façon rigide par des arbres cylindriques de masse négligeable dont les axes de révolution sont évidemment confondus avec ceux des roues.

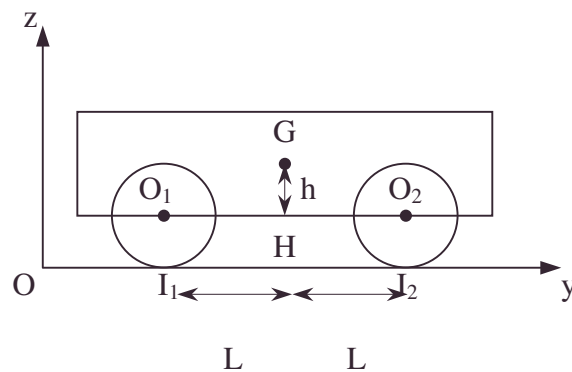


Figure 1

On désigne par le terme essieu le solide indéformable constitué de l'arbre cylindrique et de ses deux roues. Deux articulations rotoïdes liées au châssis et d'axes parallèles à l'axe \vec{Ox} permettent aux essieux de tourner sans frottement autour de leurs axes de révolution. Le plan vertical yOz est un plan de symétrie du système.

On désigne par :

- I_1 et I_2 les projections sur le plan yOz des points de contact des essieux avec le plan xOy
- O_1 et O_2 l'intersection des axes des essieux avec le plan yOz .

Le centre d'inertie G du châssis est situé dans le plan yOz , à une distance h de O_1O_2 . On désigne par H la projection de G sur le segment O_1O_2 . On pose $O_1H = O_2H = L$.

Les rotations des essieux sont paramétrées par les angles $\theta_1 = (\vec{y}, \vec{O_1M_1})$ et $\theta_2 = (\vec{y}, \vec{O_2M_2})$; $\vec{O_1M_1}$ et $\vec{O_2M_2}$ représentent des rayons liés aux roues des essieux.

θ_1 et θ_2 sont des fonctions du temps t , on pose $\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt}$ et $\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt}$.

Le véhicule est mis en mouvement par une force $\vec{F} = F\vec{y}$ (F positif) dont le support, situé dans le plan de symétrie yOz du véhicule, passe par le centre d'inertie du châssis.

$\vec{A}_G(t)$ et $\vec{V}_G(t)$ désignent respectivement l'accélération et la vitesse du centre d'inertie du châssis. On note : $\vec{A}_G = \vec{A}_G \cdot \vec{y}$ et $\vec{V}_G = \vec{V}_G \cdot \vec{y}$.

A. Pour le problème étudié, les actions des essieux sur le châssis du véhicule peuvent être représentés par les forces $\vec{R}_1 = Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z}$ et $\vec{R}_2 = Y_2\vec{y} + Z_2\vec{z}$ appliquées

- articulations rotoïdes, essieux, mouvement sans frottement, projections, roue, symétrie

Applications techniques

respectivement en O_1 et O_2 . De même, les actions du plan horizontal xOy sur les essieux peuvent être représentés par les forces $\vec{F}_1 = T_1 \vec{y} + N_1 \vec{z}$ et $\vec{F}_2 = T_2 \vec{y} + N_2 \vec{z}$ appliquées respectivement en I_1 et I_2 .

1. Justifier cette représentation des forces.

Quelles sont les actions du châssis sur les essieux ?

2. Appliquer pour le châssis les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique en G. Projeter ces équations sur les trois axes de référence.

3. Appliquer, pour chacun des essieux, les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique (respectivement en O_1 et O_2). Projeter ces équations sur les trois axes de référence.

B. On suppose l'existence d'un frottement de glissement pour le contact entre les roues et le plan xOy . On considère que le roulement a lieu sans glissement.

Soit $\omega = \omega_1 = \omega_2$ la vitesse de rotation commune aux essieux.

1. Trouver la relation entre V_G et ω .

2. En utilisant les résultats de la question A. :

a. Exprimer A_G en fonction de M , m et F .

b. Calculer N_1 et N_2 en fonction de m , M , h , L , g et F .

c. Quelle serait la valeur du module de \vec{F} au-dessus de laquelle le contact de l'un des essieux avec le plan xOy ne serait plus assuré ? Préciser l'essieu concerné. Est-on assuré qu'une telle éventualité se produira effectivement ?

C. On suppose toujours les essieux en contact avec le plan horizontal xOy . Ce contact suit la loi de Coulomb pour le frottement ; on appelle f le coefficient de frottement dynamique entre le plan xOy et chacune des roues.

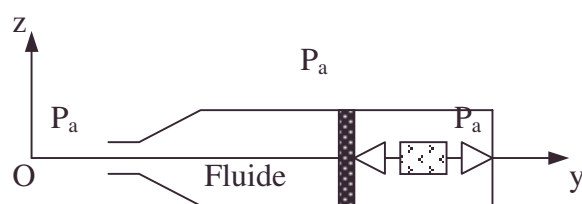
1. Calculer la valeur du module de \vec{F} à partir de laquelle le glissement apparaît. Préciser quel essieu.

2. Montrer que le glissement apparaît toujours en fait avant que l'un des essieux ne perde le contact avec le plan xOy .

3. Dans le cas où le glissement se produit pour les deux essieux, calculer la nouvelle expression de A_G .

Partie II

Soit un réservoir présentant une symétrie de révolution autour de l'axe \vec{Oy} . Il est constitué d'une partie cylindrique à section constante S comportant à une extrémité une paroi plane, et accolée à l'autre extrémité à une partie conique.



Celle-ci converge vers un petit orifice centré sur l'axe \vec{Oy} , dont la section est circulaire plane de normale \vec{y} . Un piston de masse négligeable, formé d'un disque plan circulaire de normale \vec{y} , est astreint à se déplacer sans frottement parallèlement à l'axe \vec{Oy} dans la partie cylindrique du réservoir. Un dispositif de mise en charge (dont on ne précisera pas la nature) permet d'exercer sur le piston, en plus de la force due à la pression atmosphérique, une force $-Q\vec{y}$ (Q positif) constante en s'appuyant sur la paroi plane de l'extrémité du réservoir sur laquelle il exerce évidemment la force $Q\vec{y}$.

On se propose d'étudier l'écoulement obtenu lorsque, après avoir rempli de fluide la partie du réservoir limitée par la paroi du piston, on met en charge le piston avec le dispositif évoqué précédemment.

On suppose bien sûr que le contact piston-réservoir est étanche.

Le fluide est parfait : non visqueux et à masse volumique constante.

On considère dans tout le problème que l'écoulement est permanent.

On note :

t : le temps ;

\vec{V} : le champ de vitesse du fluide en coordonnées eulériennes (x, y, z)

avec $V = \vec{V} \cdot \vec{y}$;

\vec{a} : le champ d'accélération en coordonnées eulériennes (x, y, z) avec $a = \vec{a} \cdot \vec{y}$;

P : le champ de pression dans le fluide ;

μ : la masse volumique du fluide.

A. Propriétés préliminaires

1. Rappeler la relation entre \vec{a} , P , μ , et $g\vec{z}$.

2. En déduire que pour un écoulement permanent, lorsque les trajectoires sont localement des droites parallèles, la quantité $P + \mu gz$ est constante sur chaque plan perpendiculaire à ces droites. On pourra projeter la relation de la question A.1. sur une normale aux trajectoires.

B. On fait les hypothèses suivantes :

- Les trajectoires de l'écoulement sont situées dans des plans passant par l'axe de révolution du réservoir. Elles sont parallèles à l'axe \vec{Oy} dans la région voisine du piston.
- Le jet libre du fluide issu de l'orifice est cylindrique à section circulaire constante et il présente des trajectoires parallèles à son axe de révolution.
- Le champ de vitesse du fluide au voisinage du piston est uniforme et égale à la vitesse de translation du piston qui est constante.

On note :

s : la section du jet libre ;

V_p : le module de la vitesse de translation du piston ;

\vec{u} : le champ de vitesse dans le jet libre en coordonnées eulériennes (x, y, z) ,

avec $u = \vec{u} \cdot \vec{y}$ (On notera $|u|$ la valeur absolue de u) ;

P_a : la pression atmosphérique ;

D : le débit massique de fluide éjecté du réservoir.

1. En utilisant les propriétés préliminaires et le théorème de Bernoulli (on justifiera son emploi) :

a. Trouver une quantité liant V , g , z , P et μ qui soit constante dans tout l'écoulement.

b. En déduire que, dans la partie de l'écoulement où les trajectoires sont des droites parallèles, \vec{V} est uniforme et P ne dépend que de z .

2. Calculer, en appliquant, pour le piston, le théorème de la résultante cinétique, le champ de pression au voisinage du piston.

Si on se donne $S = 10 \text{ cm}^2$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $Q = 200 \text{ N}$ et $P_a = 10^5 \text{ N.m}^{-2}$, montrer que la contribution des termes de pesanteur est négligeable.

3. On admet que la pression dans le fluide à la frontière du jet libre avec l'air est partout égale à la pression atmosphérique.

a. Montrer que cette propriété est en toute rigueur incompatible avec les résultats précédents mais qu'elle devient admissible si l'on néglige les effets de la pesanteur.

• contribution des termes de pesanteur, jet [utilisation d'un], théorème de Bernoulli, théorème de la résultante cinétique

b. Dans le cas où les effets de la pesanteur sont négligeables, que peut-on en déduire concernant la pression et la vitesse dans le jet ?

4. La section s du jet est très petite devant celle S du réservoir. Les effets de pesanteur peuvent donc légitimement être négligés.

a. Montrer que V_p est négligeable devant le module de \vec{u} .

b. Calculer alors la valeur de $|u|$.

c. Application numérique : $Q = 200 \text{ N}$; $s = 2 \text{ mm}^2$; $S = 10 \text{ cm}^2$; $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.
Calculer la valeur numérique de $|u|$, en déduire l'ordre de grandeur de V_p ; conclusion.

C. On considère maintenant que le réservoir est en translation le long de l'axe \vec{Oy} , le vecteur vitesse de ce mouvement noté $\vec{V}_G(t)$ (avec $V_G = \vec{V}_G \cdot \vec{y}$) est fonction du temps. La vitesse d'éjection du fluide par rapport au réservoir est la vitesse \vec{u} calculée à la question **B.4.**

1. Donner l'expression du débit massique D de fluide éjecté du réservoir.

2. Soit ε le volume de fluide contenu dans le réservoir (il est limité par les parois du piston et du réservoir et par le plan de l'orifice d'éjection). On considère le système \mathcal{S} de masse $\mathcal{M}(t)$, constitué du réservoir, du dispositif de mise en charge et du fluide contenu dans le volume ε à l'instant t .

Calculer la variation, entre les instants t et $t + dt$, de la résultante cinétique du système \mathcal{S} de masse $\mathcal{M}(t)$ (V_p sera bien sûr négligé devant le module de \vec{u}).

3. Montrer que le réservoir subit une poussée $\vec{\pi}$ dont on précisera le module en fonction de Q , s et S , et le sens. En déduire que ce dispositif est réducteur de poussée.

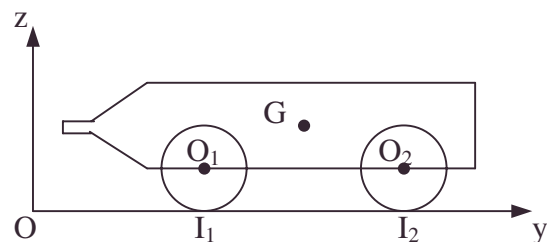
4. Application numérique : $Q = 200 \text{ N}$; $s = 2 \text{ mm}^2$; $S = 10 \text{ cm}^2$.

Calculer la valeur du module de $\vec{\pi}$.

Partie III

Le système propulseur décrit dans la partie II est placé sur le véhicule étudié dans la partie I. On reprend les notations de la partie I et de la partie II.

L'axe du réservoir est parallèle à l'axe \vec{Oy} et passe par le centre d'inertie du châssis. La notation M de la partie I désigne cette fois la masse totale du châssis et du système propulseur rempli de fluide.



On s'intéresse au mouvement du véhicule lorsque, après avoir rempli le réservoir, on applique brusquement (avec le dispositif décrit dans la partie II) la force $-Q\vec{y}$ sur le piston. Les phases transitoires d'établissement et d'arrêt d'écoulement sont considérées comme infiniment courtes. Entre le début du temps $t = 0$ et la fin de l'écoulement au temps $t = \theta$, le piston balaie un volume τ du réservoir.

On reprend les hypothèses de la partie II. La vitesse \vec{u} et la poussée $\vec{\pi}$ sont celles calculées aux questions **B.4.** et **C.3.** de la partie II.

On se place dans le cas où les essieux du véhicule restent toujours, sans glisser, en contact avec le plan xoy .

A. On désigne par $\mathcal{M}_1(t)$ la masse totale du châssis, du réservoir et de son contenu à l'instant t .

1. Calculer $\mathcal{M}_1(t)$ à l'instant t en fonction de M , D et t .

2. Calculer la durée θ de l'écoulement.

B. En utilisant les résultats de la partie I (question **B.**) :

1. Déterminer en fonction de la poussée $\vec{\pi}$ (on notera $\pi = \vec{\pi} \cdot \vec{y}$) l'accélération \vec{A}_G du véhicule à l'instant t . Préciser les valeurs obtenues en début et fin d'écoulement.

2. Déterminer la vitesse $\vec{V}_G(t)$ du véhicule à l'instant t , sachant que cette vitesse est nulle à l'instant $t = 0$. Calculer la vitesse maximum \vec{V}_{GM} .

3. Calculer la distance totale d parcourue à l'instant $t = \theta$.

4. Application numérique : $Q = 200 \text{ N}$; $S = 10 \text{ cm}^2$; $s = 2 \text{ mm}^2$; $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $M = 200 \text{ g}$; $m = 20 \text{ g}$; $\tau = 100 \text{ cm}^3$.

a. Calculer la valeur numérique de V_{GM} et de d .

b. Calculer la valeur numérique de A_G aux instants $t = 0$ et $t = \theta$.

Comparer l'ordre de grandeur des effets d'inertie et de pesanteur.

c. Calculer θ .

5. Montrer pourquoi le choix d'une section s très petite rend le jouet plus attrayant pour l'utilisateur.

CCP ; Durée : 3h

Corrigé

Partie I.

A.1.a. Les deux roues arrières étant symétriques, subissent des actions symétriques ; la résultante est dans le plan de symétrie et le moment général en O_1 , somme de 2 moments opposés, est nul : l'action du sol ou du châssis peut être représentée par un vecteur glissant de support passant par O_1 (glisseur), du plan yOz , ainsi se comprend la donnée de \vec{R}_1 et \vec{F}_1 ; de même pour \vec{R}_2 et \vec{F}_2 .

b. D'après le théorème de l'action et de la réaction, l'essieu arrière subit le vecteur glissant $-\vec{R}_1$ de support passant par O_1 et l'essieu avant subit le vecteur glissant $-\vec{R}_2$ de support passant par O_2 .

2.a. Le théorème de la résultante cinétique appliqué en G donne :

$$M \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt} \right)_R = \vec{F} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + M\vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} MA_G = F + Y_1 + Y_2 \\ 0 = 0 + Z_1 + Z_2 - Mg \end{cases}$$

b. Le théorème du moment cinétique appliqué en G donne avec $\vec{\sigma}_G^{\text{absolu}} = \vec{\sigma}_G^{\text{relatif}} = \vec{0}$:

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_R = \vec{0} + \vec{GO}_1 \wedge \vec{R}_1 + \vec{GO}_2 \wedge \vec{R}_2 + \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = h(Y_1 + Y_2) + L(Z_2 - Z_1) \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

3.a. Appliquons le théorème de la résultante cinétique à l'essieu :

$$\bullet \text{ arrière : } 2m \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt} \right)_R = \vec{F}_1 - \vec{R}_1 + 2m\vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mA_G = T_1 - Y_1 \\ 0 = N_1 - Z_1 - 2mg \end{cases}$$

- avant : $2m \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt} \right)_R = \vec{F}_2 - \vec{R}_2 + 2m\vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mA_G = T_2 - Y_2 \\ 0 = N_2 - Z_2 - 2mg \end{cases}$

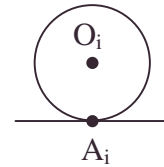
b. Le théorème du moment cinétique appliqué à l'essieu :

- arrière : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}}{dt} \right)_R = \vec{O_1I_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{0} + \vec{0} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} mR^2 \ddot{\theta}_1 = T_1 R.$
- avant : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{O_2}}{dt} \right)_R = \vec{O_2I_2} \wedge \vec{F_2} + \vec{0} + \vec{0} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} mR^2 \ddot{\theta}_2 = T_2 R.$

B.1. Considérons une roue i.

$\vec{V}(O_i) = \vec{V}_G$; le roulement sans glissement signifie :

$\vec{V}\left(\frac{A_i}{R}\right) = \vec{0}$; or, $\vec{V}_{A_i} = \vec{V}_{O_i} + \vec{A_iO_i} \wedge \vec{\Omega_i}$ et on en tire $V_G = -R\omega$



2.a. $\dot{\omega} = \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 \Rightarrow T_1 = T_2 = mR \dot{\omega} = -mA_G$

A.3.a. $\Rightarrow Y_1 = Y_2 = T_1 - 2mA_G = -3mA_G$

A.2.a. $\Rightarrow Y_1 + Y_2 = MA_G - F = -6mA_G$

$\Rightarrow A_G = \frac{F}{M+6m}.$

b. $Z_1 + Z_2 = Mg$

$Z_1 - Z_2 = -\frac{h}{L}(Y_1 + Y_2).$

$\Rightarrow Z_1 = \frac{1}{2} \left(Mg - \frac{h}{L} \frac{6mF}{M+6m} \right) ; Z_2 = \frac{1}{2} \left(Mg + \frac{h}{L} \frac{6mF}{M+6m} \right)$

A.3. $\Rightarrow N_1 = \left(2m + \frac{M}{2} \right) g - \frac{h}{2L} \frac{6mF}{M+6m} ; N_2 = \left(2m + \frac{M}{2} \right) g + \frac{h}{2L} \frac{6mF}{M+6m}.$

c.α. Le cas limite $N_1 = 0$ atteint le plus facilement pour $F > 0$ donne :

$F_{lim} = \frac{L}{h} \frac{M+4m}{m} \frac{M+6m}{6} g.$

β. Il s'agit de l'essieu arrière pour $F > 0$ (car l'étude de $N_2 = 0$ donne $F'_{lim} = -F_{lim}$).

γ. L'hypothèse de roulement sans glissement cesserait sans doute avant la perte effective du contact et il faudrait une étude détaillée cf. **C.2.**

C.1. Pour ne pas avoir de glissement :

On a, avec le frottement, les deux inégalités : $|T_1| \leq f|N_1|$ et $|T_2| \leq f|N_2|$; or, $T_1 = T_2$, donc : $|T_1| \leq f \cdot \inf(|N_1|, |N_2|)$ soit, si $F \geq 0$, $|N_1| \leq |N_2|$, soit $|T_1| \leq f|N_1|$ et, à la limite, en

remplaçant T_1 et N_1 , $\frac{m}{M+6m} F = f \left(2m + \frac{M}{2} \right) g - f \frac{h}{2L} \frac{6mF}{M+6m}$, soit :

$F_{lim}^{glissement} = \frac{L}{h} \left(\frac{M+4m}{m} \right) \left(\frac{M+6m}{6} \right) g \left(\frac{f}{f + \frac{L}{3h}} \right).$

La condition portant sur N_1 concerne l'essieu arrière.

- glissement, roue, roulement sans glissement, théorème du moment cinétique

$$2. \text{ On a : } F_{\text{lim glissement}} = \frac{f}{f + \frac{L}{3h}} F_{\text{lim}} < F_{\text{lim}}.$$

On montre ainsi que le glissement apparaît avant que l'essieu arrière ne perde le contact avec le plan xOy (si $F > 0$).

3. Dans le cas où le glissement se produit sur les deux essieux, $T_1 = -f N_1$ et $T_2 = -f N_2$ car $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ et $T_1 < 0$, $T_2 < 0$. La force de frottement s'oppose au mouvement. L'élimination dans les équations (dans l'ordre) de T_1 et T_2 , Z_1 et Z_2 , Y_1 et Y_2 et finalement N_1 et N_2 permet d'obtenir : $A_G = -f g + \frac{F}{M + 4m}$.

Partie II

A.1. Les équations d'Euler s'écrivent $\vec{\mu} \vec{a} = -\vec{\text{grad}} P - \mu g \vec{z}$.

2. Si les trajectoires sont localement des droites, on a : $\vec{a} // \vec{V} // \overrightarrow{M_0 M}$.

or, $\vec{a} = -\vec{\text{grad}} \left(\frac{P}{\mu} + gz \right)$; comme $\vec{\text{grad}} f$ est orthogonal aux surfaces $f = \text{constante}$,

$\overrightarrow{M_0 M}$ est orthogonal aux surfaces $\frac{P}{\mu} + gz = \text{constante}$; comme tous les vecteurs

normaux de ces surfaces sont localement parallèles, ces surfaces $\frac{P}{\mu} + gz$ sont

localement les plans orthogonaux aux droites trajectoires.

B.1.a. Le théorème de Bernoulli est applicable car ici nous avons un fluide non visqueux incompressible en écoulement permanent (a priori tourbillonnaire) sur une ligne de courant i : $\forall M \in i, P + \mu gz + \frac{1}{2} \mu V^2 = C_i$. Or, au voisinage du piston,

$P + \mu gz = \text{cste} \quad \forall i$ (cf. A_2) et d'autre part $\vec{V} = \vec{V}_p \quad \forall i$, d'où $P + \mu gz + \frac{1}{2} \mu V^2 = C \quad \forall i$ au

voisinage du piston comme $P + \mu gz + \frac{1}{2} \mu V^2 = C_i$ (i désignant une ligne de courant)

pour $M \in i$ au voisinage du piston $\Rightarrow C_i = C \quad \forall i$ et $P + \mu gz + \frac{1}{2} \mu V^2 = C$, M dans l'écoulement.

b.α. Dans la partie de l'écoulement où les trajectoires sont des droites $\vec{V}(M) = V(x, y, z) \vec{y}$, or dans le plan $y = y_1$, $P + \mu gz = \text{cste}$ et donc $\frac{1}{2} \mu V^2 = \text{cste}$ à y donnée donc, $\vec{V} = V(y) \vec{y}$; or pour les fluides incompressibles $\text{div} \vec{V} = 0$ s'écrit : $\frac{dV_y}{dy} = 0$, donc \vec{V} est uniforme.

$$\beta. P = \left(C - \frac{1}{2} \mu V^2 \right) - \mu gz \Rightarrow P \text{ est une fonction affine de } z.$$

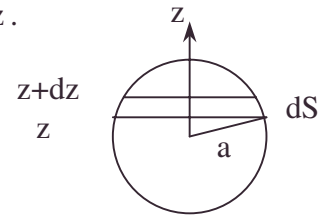
$$2. \vec{V} = \vec{V}_p ; \text{ or on est en régime permanent } \Rightarrow \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{0}.$$

Appliquons le théorème de la résultante cinétique au piston :

$$\vec{0} = -Q\vec{y} - P_a S\vec{y} + \iint_S P(z)\vec{y} dS \text{ avec } P(z) = C - \frac{1}{2}\mu V^2 - \mu g z.$$

$$dS = 2\sqrt{a^2 - z^2} dz \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \iint P(z) dS &= \int_{-a}^{+a} dz \left(2\sqrt{a^2 - z^2} \right) \left(C - \frac{1}{2}\mu V_p^2 - \mu g z \right) \\ &= \left(C - \frac{1}{2}\mu V_p^2 \right) \pi a^2 + 0. \end{aligned}$$



On en déduit C par la résultante cinétique du piston :

$$0 = -Q - P_a S + CS - \frac{1}{2}\mu V_p^2 S \Rightarrow C = P_a + \frac{Q}{S} + \frac{1}{2}\mu V_p^2.$$

$$P = P_a + \frac{Q}{S} - \mu g z ; \text{ AN : } P = 10^5 + 2.10^5 \pm 178 \# 3.10^5 P_a \text{ en majorant } |\mu g z| \text{ par } \mu g a,$$

avec $a = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 1,784.10^{-2} \text{ m}$. La contribution de la pesanteur est négligeable : $0,6 \ll 1000$.

3.a. La dépendance $P = P_a + \frac{Q}{S} - \mu g z$ (cf. **A.2.**) et $P = P_a \forall z$ à la surface du jet ne sont pas compatibles, mais cette relation est numériquement acceptable si on néglige les effets de la pesanteur (cf. **B.2.**).

b.α. On en déduit $P = P_a \forall M$.

β. D'où V est uniforme : $\vec{V} = -u\vec{y}$ (cf. Bernoulli de **b.1.a.**).

4.a. La conservation de la masse donne : $\mu S V_p = \mu s |u|$; $s \ll S \Rightarrow V_p \ll |u|$.

$$\text{b. } P(z) = P_a = C - \frac{1}{2}\mu u^2 - \mu g z = P_a + \frac{Q}{S} + \frac{1}{2}\mu V_p^2 - \frac{1}{2}\mu u^2 \Rightarrow |u| \# \sqrt{\frac{2Q}{\mu S}}.$$

$$\text{c. } V_p = \frac{s}{S} \sqrt{\frac{2Q}{\mu S}} ; \text{ AN : } u = 20 \text{ m.s}^{-1} ; V_p = 4.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}.$$

L'élimination numérique de V_p est justifiée.

$$\text{C.1. } D = \mu s |u| = s \sqrt{\frac{2Q\mu}{S}} ; \text{ AN : } D = 4.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}.$$

2. Etudions le mouvement dans le repère lié au réservoir dont la surface extérieure servira de surface de contrôle Σ .

Le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{=0 \text{ en régime permanent}} + \iint_{S_{\Sigma}} \mu \vec{V} \vec{V} dS = \vec{F} + \vec{F}_{\text{entraînement}} + \vec{F}_{\text{Coriolis}} ;$$

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = D\vec{u} = \vec{F} - \underbrace{\int \vec{a}_G dm}_{\mathcal{M}(t)\vec{a}_G} + \vec{0} . \quad \frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{F} - \mathcal{M} \vec{a}_G .$$

3. $\mathcal{M}(t)\vec{a}_G = \vec{F} + \vec{\pi}$ avec $\vec{\pi} = -D\vec{u}$. L'identification avec $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$ introduit une poussée $\vec{\pi}$ opposée à \vec{u} (cf. propulsion par réaction, soit ici selon \vec{y}) :

$$\vec{\pi} = D \sqrt{\frac{2Q}{\mu S}} \vec{y} = 2 \frac{s}{S} Q \vec{y}.$$

On peut justifier le terme réducteur de poussée $\frac{2s}{S}$ car $\vec{\pi} = -\frac{2s}{S} \vec{Q}$ est plus petit que \vec{Q} l'action initiale et dans le rapport $\frac{2s}{S}$ (petit).

$$4. \text{ A.N. : } |\vec{\pi}| = 0,8 \text{ N.}$$

Partie III

A.1. $d\mathcal{M}_1(t) = -D dt$; $\mathcal{M}_1(t) = M - Dt$ en intégrant.

$$2. \text{ La vidange complète du volume } \tau \text{ dure } \theta : \theta = \frac{\tau}{\frac{D}{\mu}} ; \theta = \frac{\mu \tau}{s} \sqrt{\frac{S}{2\mu Q}}.$$

$$B.1. \text{ On identifie } \vec{F} \text{ et } \vec{\pi} : \vec{A}_G = \frac{\vec{\pi}}{\mathcal{M}(t) + 6m} = \frac{2s}{S} \frac{Q \vec{y}}{M + 6m - Dt}.$$

$$\bullet t = 0 ; \quad \vec{A}_G = \frac{2s}{S} \frac{Q \vec{y}}{M + 6m}.$$

$$\bullet t = \theta ; \quad \vec{A}_G = \frac{2s}{S} \frac{Q \vec{y}}{M + 6m - \mu \tau}.$$

$$2.a. \vec{V}_G = \int_0^t \vec{A}_G dt ; \vec{V}_G = \frac{-\vec{y}}{D} 2 \frac{s}{S} Q \ln \frac{M + 6m - Dt}{M + 6m}.$$

$$b. \vec{V}_{GM} = \vec{V}_G(\theta) = \frac{-\vec{y}}{D} 2 \frac{s}{S} Q \ln \frac{M + 6m - \mu \tau}{M + 6m}.$$

$$3. d = \int_0^\theta V_G dt = \frac{6m + M}{\mu s} \left[1 + \left(\frac{M + 6m - \mu \tau}{M + 6m} \right) \left(\ln \left(\frac{M + 6m - \mu \tau}{M + 6m} \right) - 1 \right) \right].$$

$$4.a.\alpha. \text{ A.N. : } V_{GM} = 7,494 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\beta. \text{ A.N. : } d = 8,784 \text{ m.}$$

$$b.\alpha. \text{ A.N. : } A_G(0) = 2,500 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$\beta. \text{ A.N. : } A_G(\theta) = 3,636 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$\gamma. \frac{g}{4} \leq A_G \leq \frac{g}{2} ; \text{ inertie et pesanteur sont comparables.}$$

$$c. \text{ A.N. : } \theta = 2,5 \text{ s.}$$

5. s petit diminue V_G et a_G , mais augmente θ et d . La durée du jeu est plus longue.

3.3.2.2. Aéromoteur

Les résultats littéraux seront présentés sous la forme la plus simple et les résultats numériques comportant un nombre vraisemblable de chiffres significatifs.

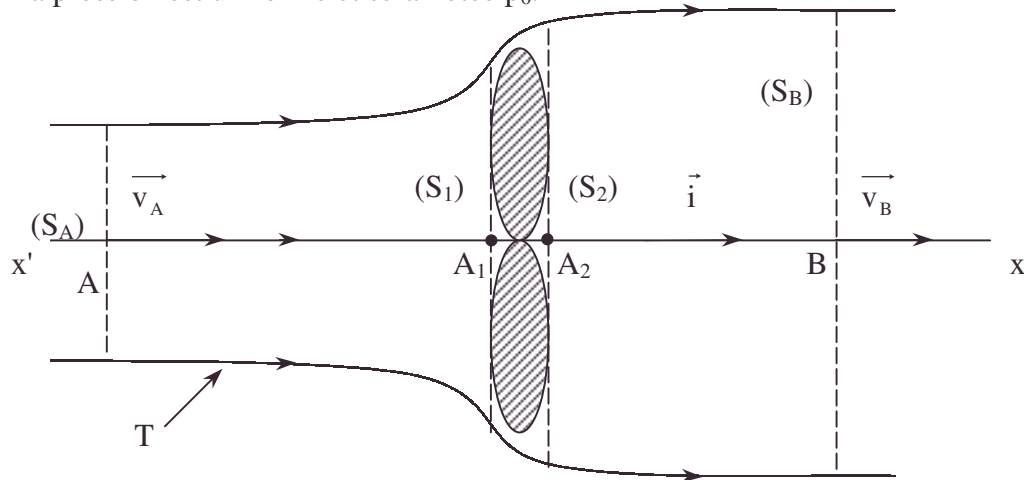
Une hélice est immergée dans l'air assimilé à un fluide parfait, homogène, incompressible et de masse volumique μ .

Dans le référentiel d'étude (R) supposé galiléen et lié au sol, l'hélice est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe $x'x$, balayant un disque éolien d'aire S .

Nous adopterons les hypothèses suivantes :

- aéromoteur, hélice, incompressibilité, pesanteur, vidange

- L'écoulement permanent du fluide est à symétrie de révolution autour de l'axe $x'x$ loin de l'hélice :
- La vitesse du fluide est uniforme, de valeur \vec{v}_A sauf dans la partie aval du tube de courant T passant par le disque éolien où elle vaut \vec{v}_B .
- La pression est uniforme et sera notée p_0 .



- Les pressions et les vitesses sont uniformes sur toute section transversale du tube de courant T ;
- On note S_A, S_1, S_2, S_B les aires des sections droites de T figurées ci-dessus avec $S_1 \approx S_2 \approx S$ pour les sections S_1 et S_2 très voisines, sur lesquelles existent les pressions p_1 et p_2 et la même vitesse $\vec{v} = v\vec{x}$ du fluide (\vec{x} vecteur unitaire de l'axe $x'x$).
- On néglige l'action de la pesanteur sur le fluide et toute perte d'énergie par frottement.

1. Etablir que la pression est uniforme lorsque les lignes de courant sont rectilignes et parallèles.

2. Pourquoi le vent animant une éolienne est-il considéré comme un écoulement incompressible ?

3. Evaluer p_1 et p_2 en fonction respectivement de p_0, μ, v, v_A et de p_0, μ, v, v_B .

En déduire la résultante \vec{F} des forces exercées par l'hélice sur le fluide, en raisonnant sur le système ouvert constitué par le fluide contenu dans la portion de T située entre (S_1) et (S_2) .

4. Evaluer \vec{F} en fonction de v_A, v_B, D (débit-masse à travers T) en appliquant le théorème d'Euler à un système ouvert convenablement choisi et de grandes dimensions.

5. En déduire la relation entre v, v_A et v_B .

6. Exprimer de deux façons différentes la puissance \mathcal{P} , prélevée au fluide par l'hélice, en fonction de μ, S, v_A, v_B ($\mathcal{P} > 0$ si l'hélice reçoit de l'énergie) :

a. à partir de \vec{F} .

b. à partir du premier principe de la thermodynamique.

7. On pose $x = \frac{v_B}{v_A}$. Si v_A est fixée, pour quelle valeur de x , \mathcal{P} est-elle maximale ?

L'exprimer en fonction de v_A, μ et S et tracer le graphe représentant $\mathcal{P}(x)$ pour $x \in [0,1]$.

8. Exprimer la puissance cinétique \mathcal{P}_c incidente à l'hélice et en déduire le rendement optimal de cet aéromoteur. (\mathcal{P}_c représente la puissance cinétique de l'air, de vitesse \vec{v}_A à l'entrée du tube de courant T).

9. Calculer la puissance d'un aéromoteur, l'hélice balayant un disque de 20 m de diamètre, placé dans un écoulement d'air ($\mu = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$), de vitesse 8 m.s^{-1} , dont le rendement n'est que la moitié de sa valeur maximale.

La comparer à celle d'une centrale nucléaire.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

$$1. \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } V^2 + \text{rot } \vec{V} \wedge \vec{V} = -\text{grad } \frac{P}{\mu} \quad (\vec{g} \text{ négligé}).$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \text{ car l'écoulement est permanent. } \vec{V} \text{ est uniforme sur toute section} \Rightarrow \vec{V} = \vec{V}(x).$$

Les lignes de courant sont rectilignes et parallèles à \vec{x} en accord avec la symétrie cylindrique du problème si $V_y = 0, V_z = 0$.

$$\text{Soit } \vec{V} = v(x)\vec{x} \Rightarrow \text{rot } \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}.$$

$$\text{Or, } \text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P \text{ est uniforme : } P = p_0 \quad \forall M_1 t.$$

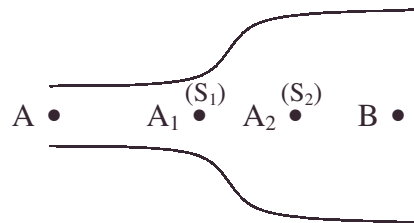
2. L'air est considéré comme incompressible quand sa vitesse est très inférieure à la célérité du son. L'étude du son prend en compte la compressibilité de l'air ; le déplacement de l'air a alors une célérité c comme vitesse de phase.

Ainsi, un vent de 108 km/h a une vitesse de 30 m.s^{-1} , très inférieure à $c = 330 \text{ m/s}$ (variable avec la température).

3. Appliquons le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant bien définie :

$$a. \text{ entre A et } A_1 : \frac{v_A^2}{2} + \frac{p_0}{\mu} = \frac{V_{A_1}^2}{2} + \frac{p_1}{\mu};$$

$$\Rightarrow p_1 = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_A^2 - V_{A_1}^2).$$



$$b. \text{ entre } A_2 \text{ et } B : \frac{V_{A_2}^2}{2} + \frac{p_2}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\mu} \Rightarrow p_2 = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_B^2 - V_{A_2}^2).$$

Or, $S_1 = S_2 = S$ et $Sv = S_1 V_{A_1} = S_2 V_{A_2}$: conservation du débit volumique d'un fluide

incompressible ; on a $p_1 = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_A^2 - v^2)$; $p_2 = p_0 + \frac{\mu}{2}(v_B^2 - v^2)$.

c. Prenons comme système l'air présent dans la surface de contrôle Σ telle que :

$$\Sigma \quad A_1 \bullet \quad \bullet A_2 \quad \vec{F}_{\text{ext}} = D_m (\vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_1}) \text{ en régime permanent cf. bilan de quantité de mouvement ou théorème d'Euler..}$$

Applications techniques

$$\text{Or, } \vec{V}_{A_2} = \vec{V}_{A_1} \Rightarrow \vec{0} = \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\Sigma} \vec{g} + (p_1 - p_2) S \vec{x} + \vec{F}_{\text{hélice} \rightarrow \text{air}} + \vec{F}_{\text{pression latérale}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{pression latérale}} = \vec{0} \text{ par symétrie} \Rightarrow \vec{F}_{\text{hélice} \rightarrow \text{air}} = (p_2 - p_1) S \vec{x} = \frac{\mu}{2} S (v_B^2 - v_A^2) \vec{x}.$$

4. Prenons comme système le système présent dans la surface de contrôle Σ' .

$$\vec{F}'_{\text{ext}} = D(\vec{V}_B - \vec{V}_A) = m_{\Sigma'} \vec{g} - \iint_{\Sigma'} P_0 d\vec{S} + \vec{F}_{\text{hélice} \rightarrow \text{air}}.$$

$$\text{Or, } - \iint_{\Sigma'} P_0 d\vec{S} = - \iiint \text{grad } P_0 d\tau = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{\text{hélice} \rightarrow \text{air}} = D(v_B - v_A) \vec{x}.$$

$$5. \frac{\mu}{2} S (v_B^2 - v_A^2) = \mu v S [v_B - v_A] \Rightarrow v = \frac{1}{2} [v_A + v_B].$$

$$6.a. -\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\mu}{4} S (v_B^2 - v_A^2) (v_B + v_A) - \frac{D}{2} (v_B^2 - v_A^2).$$

b. Appliquons le théorème de la puissance cinétique au système Σ' .

$$\frac{DE_c}{Dt} = P_{f, \text{pression}} - \mathcal{P} \text{ soit } D \left[\frac{1}{2} v_B^2 - v_A^2 \right] = \underbrace{p_0 S_A v_A - p_0 S_B v_B}_{=0} - \mathcal{P}.$$

$$\mathcal{P} = \frac{D}{2} (v_A^2 - v_B^2).$$

$$7. \text{ Prenons } D = SV = \frac{S}{2} (v_A + v_B) = \frac{S}{2} v_A (1+x)$$

$$\mathcal{P} = -\frac{\mu S}{4} v_A^3 (1+x)(x^2 - 1);$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx} = 0 \text{ or } \frac{d\mathcal{P}}{dx} = -\frac{\mu S}{4} v_A^3 (3x^2 + 2x - 1);$$

$$x = \frac{-1 \pm 2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \# 0,33 \text{ seule valeur acceptable.}$$

$$\mathcal{P}_{\text{max}} = \frac{8}{27} \mu S v_A^3. \text{ Formule de Betz.}$$

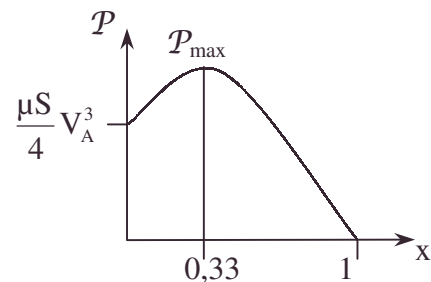
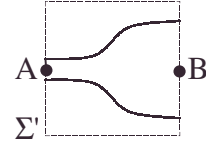
$$8. \mathcal{P}_c = \frac{1}{2} D v_A^2 = \frac{1}{2} \mu S \frac{(v_A + v_B)}{2} v_A^2 = \frac{\mu S}{4} v_A^3 (1+x).$$

$$r = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} = 1 - x^2; \text{ or } x_{\mathcal{P}_{\text{max}}} = 0,33; r_{\text{optimal}} = 0,89.$$

$$9. \mathcal{P}_c \text{ donnée, } \mathcal{P}_{\text{réel}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{max}}}{2}.$$

$$\mathcal{P}_{\text{réel}} = \frac{4}{27} \mu S v_A^3 = \frac{\mu \pi d^2}{27} v_A^2; \text{ A.N.: } \mathcal{P}_{\text{réel}} = 31 \text{ kW.}$$

Faible devant le gigawatt d'une centrale nucléaire (équivalente à 30000 éoliennes).



3.3.2.3. Eolienne

Le but du problème est d'étudier une éolienne et les possibilités d'utiliser le vent comme source d'énergie ; on traitera successivement :

- la puissance qu'on peut tirer d'un vent déterminé,
- la probabilité d'obtenir une puissance donnée en fonction des variations de vitesse du vent,

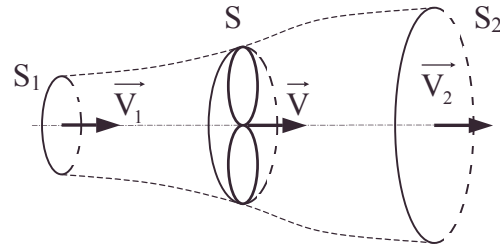
- (formule de), éolienne, optimisation, probabilité, rendement, théorème de la puissance cinétique, tube de courant

Première partie : fonctionnement de l'éolienne

Un "disque éolien" balayant une surface d'aire S a pour but de prélever une partie de l'énergie cinétique du vent qui le frappe.

L'air sera considéré comme un fluide incompressible, de masse volumique ρ .

La figure ci-contre représente le tube de courant s'appuyant sur S . En tout point, la vitesse des molécules est, à chaque instant, parallèle à l'axe du tube ; elle est aussi uniforme dans chaque section droite du tube (ces sections droites sont circulaires).



Loin "en amont" du disque, la vitesse de l'air est $\vec{V}_1 = V_1 \vec{i}$; loin "en aval" , elle vaut $\vec{V}_2 = V_2 \vec{i}$, V_2 étant bien sûr inférieure à V_1 . Au niveau du disque, elle s'écrit $\vec{V} = V \vec{i}$. On suppose que le régime permanent est établi : toutes les vitesses sont donc indépendantes du temps.

1. Pourquoi convient-il de considérer l'air comme un fluide incompressible ?

2.a. Exprimer littéralement le débit de masse D_m : quelle propriété possède-t-il ?

b. Calculer, en fonction de D_m , \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , la force exercée sur le disque par le courant d'air.

c. Ecrire la variation d'énergie cinétique volumique de l'air entre les sections S_1 et S_2 .

d. En déduire que la vitesse de l'air, au niveau du disque, vaut : $\vec{V} = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2}$.

On se propose d'étudier le rendement de l'éolienne seule, en analysant l'énergie que l'on peut tirer d'un vent déterminé, de vitesse \vec{V}_1 .

3.a. Calculer la puissance cinétique incidente.

b. Exprimer la puissance prélevée par l'éolienne en fonction de ρ , S , V_1 et V_2 .

c. V_1 étant fixée, pour quelle valeur de $\frac{V_2}{V_1}$ cette puissance est-elle maximale ? Tracer

la courbe traduisant cette puissance en fonction du rapport $\frac{V_2}{V_1}$.

d. Comparer cette puissance à la puissance incidente.

e. Sur quelle caractéristique du système peut-on agir pour approcher ce maximum ?

Au vu de la courbe précédente, la valeur de V_2 est-elle très importante ?

f. En supposant que V_2 a la meilleure valeur, exprimer la puissance maximale disponible en fonction de ρ , S et V_1 (relation de Betz).

g. A l'aide des données numériques, évaluer la puissance maximale que l'on peut tirer de l'éolienne.

Données numériques : $V_1 = 10 \text{ m.s}^{-1}$; Rayon des pales : $R = 1 \text{ m}$.

$\rho (\text{air}) = 1,25 \text{ kg.m}^{-3}$.

Deuxième partie : étude statistique du vent

Les stations météorologiques déterminent continuellement la vitesse du vent soufflant en un site donné : il est alors possible d'étudier avec quelle probabilité une valeur de la vitesse est observée ; on définit une fonction $p(v)$ telle que la probabilité dP d'observer une vitesse comprise entre v et $v + dv$ soit $dP = p(v) dv$.

1. Que vaut l'intégrale $\int_0^\infty p(v) dv$?

2. La fonction $p(v)$ peut être modélisée à l'aide de la loi de Weibull :

• énergie cinétique volumique, éolienne, maximum, probabilité, récurrence, relation de Betz [éolienne], rendement, valeur moyenne, Weibull [loi de]

$$p(v) = \frac{k}{v_0} \frac{v}{v_0} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}.$$

Déterminer la valeur de k . (On pourra utiliser la variable réduite $u = \frac{v}{v_0}$).

3. On se propose de calculer la valeur moyenne de v et de v^3 .

a. Exprimer sous forme d'intégrales les valeurs de $\langle v \rangle$ et de $\langle v^3 \rangle$. Les calculs conduisent à l'utilisation d'intégrales du type : $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$, pour lesquelles on

démontre la relation de récurrence suivante : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

b. Calculer I_1 et I_{2p+1} ; sachant que $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer I_{2p} .

4. Déterminer, en fonction de v_0 , les valeurs de :

a. La vitesse v_p la plus probable, qui rend $p(v_p)$ maximale.

b. La valeur v_m , valeur moyenne de v .

c. La valeur moyenne de v^3 .

5. Sur les côtes françaises, l'énergie disponible du vent sur une année est de l'ordre de 1000 kWh par mètre carré.

a. Quelle est la puissance incidente correspondante ?

b. En déduire la vitesse moyenne et la vitesse la plus probable.

c. Avec quelle probabilité le vent souffle-t-il avec une vitesse inférieure à 144 km/h ?

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. La compressibilité de l'air, d'ailleurs très faible, permet d'étudier la célérité du son c de l'ordre de 300 m.s^{-1} . Il n'y a pas lieu de considérer la compressibilité de l'air pour des vitesses très inférieures à c .

2.a. $D_{m\Sigma} = \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} d\vec{s}$; Σ étant une section du tube de courant.

$\text{div} \rho \vec{V} = \rho \text{div} \vec{V} = 0$ si fluide incompressible.

$\text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} d\vec{s}$ indépendant de Σ pour un tube donné.

Il y a conservation du débit de masse.

$D_{mS_1} = \rho \iint_{S_1} V_1 d\vec{s} = \rho V_1 S_1$; $D_{mS} = \rho VS$; $D_{mS_2} = \rho V_2 S_2$;

$\rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2 = \rho VS \Rightarrow VS = V_1 S_1 = V_2 S_2$.

b. Le théorème d'Euler (bilan de quantité de mouvement en régime permanent pour un écoulement unidimensionnel) appliqué à l'air compris entre S_1 et S_2 dans le tube donne : $\vec{F}_{\text{ext}} = D_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$; or $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{pesanteur}} + \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{disque} \rightarrow \text{air}}$.

Afin d'éliminer le rôle des forces de pression inconnues, nous les supposons voisines de l'équilibre hydrostatique où : $\vec{F}_{\text{pesanteur}} + \vec{F}_{\text{pression}} = \vec{0}$; Alors, $\vec{F}_{\text{disque} \rightarrow \text{air}} = D_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$

et d'après le théorème de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{disque}} = D_m (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$.

c. Appliquons le théorème de Bernoulli :

- célérité du son, compressibilité, conservation du débit, équilibre hydrostatique, ordre de grandeur, probabilité, récurrence, théorème de Bernoulli, théorème de l'action et de la réaction, théorème d'Euler, tube de courant, unidimensionnalité, valeur moyenne

α. Avant le disque éolien : $\frac{1}{2}\rho V_1^2 + P_{S_1} + 0 = \frac{1}{2}\rho V_-^2 + P_- + 0.$

β. Après le disque éolien : $\frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_{S_2} + 0 = \frac{1}{2}\rho V_+^2 + P_+ + 0. (P_{S_2} = P_\infty).$

La conservation du débit s'écrit $V_+S = V_-S$ soit $V_+ = V_-$.

On caractérise une discontinuité de pression de part et d'autre de la "perturbation" (le disque éolien) par : $\frac{1}{2}\rho V_2^2 - \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_+ - P_-.$

• Appliquons le théorème d'Euler à une tranche d'air de part et d'autre du disque éolien :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{disque} \rightarrow \text{air}} + \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{pesanteur}} = D_m (\vec{V}_+ - \vec{V}_-) = \vec{0},$$

soit sur l'axe horizontal : $\vec{0} = \vec{F}_{\text{disque} \rightarrow \text{air}} + (P_- - P_+) \vec{S}_i.$

Ainsi, $P_+ - P_- = \frac{D_m}{S} (V_2 - V_1) \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_2^2 - \frac{1}{2}\rho V_1^2 = \frac{D_m}{S} (V_2 - V_1).$

Variation des énergies cinétiques volumiques entre les secteurs S_1 et S_2 .

d. $V_2^2 - V_1^2 = (V_2 - V_1)(V_2 + V_1)$ d'où par simplification par $V_2 - V_1$:

$$\frac{1}{2}\rho(V_2 + V_1) = \frac{D_m}{S}; \text{ or, } D_m = \rho S V \Rightarrow V = \frac{V_2 + V_1}{2}.$$

2.a. $P_1 = \iint_{S_1 \text{ n mvt}} \left(\frac{1}{2} V_1^2 \right) \rho \vec{V} d\vec{S} = \frac{1}{2} V_1^2 \cdot D_m.$

b. $P_2 = \iint_{S_2 \text{ n mvt}} \left(\frac{1}{2} V_2^2 \right) \rho \vec{V} d\vec{S} = \frac{1}{2} V_2^2 \cdot D_m.$

Le bilan en puissance cinétique en régime permanent : $P_1 = P_2 + P$ avec P puissance

consommée par le disque éolien : $P = \frac{1}{2} D_m (V_1^2 - V_2^2); P = \frac{1}{4} \rho S (V_1 + V_2)^2 (V_1 - V_2).$

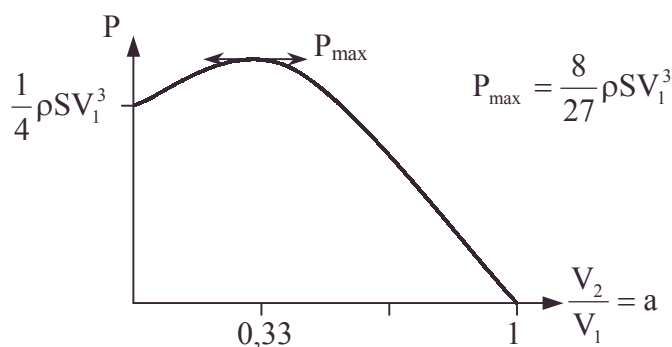
c. $P = \frac{1}{4} \rho S V_1^3 \left(1 + \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right)^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right);$ dérivons par rapport à la variable $a = \frac{V_2}{V_1}$:

$$P = \frac{1}{4} \rho S V_1^3 (1+a)^2 (1-a);$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_{V_1} = \frac{1}{4} \rho S V_1^3 (2(1+a)(1-a) - (1+a)^2) = \frac{1}{4} \rho S V_1^3 (1+a)(1-3a) \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) = 0,$$

pour $a = -1$ ou $a = \frac{1}{3}$. Une seule solution acceptable $a = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3}$; on vérifie d'après le

signe à gauche et à droite de $\frac{\partial P}{\partial a}$ (qui est le signe de $1-3a$) que c'est un maximum de P .



• bilan de puissance, éolienne, maximum, rendement

$$\text{d. } P_1 = \frac{1}{2} D_m V_1^2 = \frac{1}{2} \rho S \left(\frac{V_1 + V_2}{2} \right) V_1^2 = \frac{1}{4} \rho V_1^3 \left(1 + \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right).$$

$$P = P_1 \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \right); \text{ pour } \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{3} : P_{\max} = \frac{8}{9} P_1.$$

e. α . Le profil de l'éolienne déterminera son rendement $\frac{P}{P_1}$.

β . V_2 est important pour ce rendement qui s'annule pour $V_2 = V_1$ et qui est maximum pour $V_2 = \frac{V_1}{3}$, mais sa valeur n'a pas besoin d'être réglée avec précision car

le graphique donne : $0,25 \rho S V_1^3 < P < 0,30 \rho S V_1^3$ pour $\frac{V_2}{V_1} < 0,60$.

$$\text{f. } V_2 = \frac{V_1}{3}; P_{\max} = \frac{8}{27} \rho S V_1^3. \text{ Formule de Betz.}$$

g. AN : $P_{\max} = 1,164 \text{ kW}$. (cf. puissance d'un radiateur électrique assez puissant.)

II.1. La condition de normalisation postule que la somme des probabilités vaut 1 :

$$\int_0^\infty p(v) dv = 1.$$

$$2. \text{Ecrivons } \int_0^\infty k u e^{-u^2} du = 1; \text{ posons } \omega = u^2, 1 = k \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\omega} d\omega = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2.$$

$$3.a.\alpha. < v > = \int_0^\infty v p(v) dv; < v > = 2v_0 \int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du.$$

$$< v > = 2v_0 I_2.$$

$$\beta. < v^3 > = \int_0^\infty v^3 p(v) dv; < v^3 > = 2V_0^3 \int_0^\infty u^4 e^{-u^2} du.$$

$$< v^3 > = 2v_0^3 I_4.$$

$$\text{b.}\alpha. I_1 = \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\omega} d\omega = \frac{1}{2} \text{ (cf. } \omega = x^2 \text{)}.$$

$$\beta. I_{n+2} = \int_0^\infty x^{n+2} e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty x^{n+1} (-2x e^{-x^2} dx), \text{ et par intégration par partie :}$$

$$I_{n+2} = -\frac{1}{2} \left[x^{n+1} e^{-x^2} \right]_0^\infty - \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty (n+1) x^n e^{-x^2} dx, \text{ soit } I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

γ . Appliquons la formule de récurrence pour $n = p$ pair :

$$\cancel{I_1} = I_1$$

$$\cancel{I_3} = \cancel{I_1}$$

$$\cancel{I_5} = 2 \cancel{I_3}$$

$$I_7 = 3 \cancel{I_5}$$

$$I_{2p+1} = p \cancel{I_{2p-1}} \Rightarrow I_{2p+1} = p! I_1 = \frac{p!}{2}$$

δ . Appliquons la formule de récurrence pour $n = 2p + 1$ impair :

$$\cancel{I_0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\cancel{I_2} = \frac{1}{2} \cancel{I_0}$$

$$I_4 = \frac{3}{2} I_2$$

$$I_6 = \frac{5}{2} I_4$$

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2} I_{2p-2}$$

$$I_{2p} = \frac{2p!}{p!} \frac{I_0}{2^{2p}} = \frac{2p!}{p!} 2^{-2p} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$4.a. \frac{dp}{dv} = \frac{2}{v_0^2} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \left(1 - \frac{2v^2}{v_0^2}\right); \frac{dp}{dv} = 0 \text{ pour } v_p = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b. v_m = \langle v \rangle = 2v_0 I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} v_0.$$

$$c. \langle v^3 \rangle = 2v_0^3 I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} v_0^3.$$

$$5.a. \langle P_{1s} \rangle = \frac{E_{1s}}{t_1}; t_1 = 1 \text{ an} = 3600.24.365 \text{ s.}$$

$$E_{1s} = 1000.3600 \text{ kJ.m}^{-2}; \langle P_{1s} \rangle = 1,14.10^2 \text{ W.m}^{-2}.$$

$$b. P_{1s} = \frac{1}{2} \rho v^3 \Rightarrow \langle P_{1s} \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle v^3 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} v_0^3 \Rightarrow v_0 = \sqrt[3]{\frac{8 \langle P_{1s} \rangle}{3\sqrt{\pi}}}.$$

$$\langle v_m \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt[3]{\frac{8 \langle P_{1s} \rangle}{3\sqrt{\pi}}}; \langle v_p \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[3]{\frac{8 \langle P_{1s} \rangle}{3\sqrt{\pi}}}.$$

$$\text{AN: } v_m = 4,92 \text{ m.s}^{-1}; v_p = 3,93 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$c. V_e = 40 \text{ m.s}^{-1} = 144 \text{ km/h.}$$

$$p = \int_0^{V_e} \frac{2}{V_0} \frac{V}{V_0} e^{-\frac{V^2}{V_0^2}} dV = \int_0^{\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2} e^{-\omega} d\omega = \left[-e^{-\omega}\right]_0^{\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2} = \left(1 - e^{-\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2}\right) \text{ cf. } e^{-\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2} \approx 2,7.10^{-23}.$$

$$p = 1 - e^{-\left(\frac{V_e}{V_0}\right)^2}; \text{A.N.: } p = 1, \text{ évidence bien quantifiée.}$$

3.3.2.4. Auget, rendement de turbine

Les deux problèmes peuvent être traités indépendamment l'un de l'autre.

Ils ont pour thème une schématisation très simplifiée d'une turbine Pelton. Le premier problème s'intéresse au mouvement de la roue de la turbine lorsqu'elle n'est pas reliée à l'alternateur. La force excitatrice résulte de l'impact d'un jet fluide dont l'étude fait l'objet du second problème.

Premier problème

Le système matériel étudié est schématisé par un disque indéformable homogène D, de centre O, de rayon b, d'épaisseur négligeable devant b, de masse m. On étudie le mouvement de D par rapport à un repère orthonormé direct $T_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ considéré comme galiléen si on introduit, parmi les actions extérieures, la pesanteur d'intensité constante g. L'axe Oz est vertical ascendant.

Applications techniques

Le disque D est astreint, grâce à une liaison sans frottement, à tourner autour de l'axe horizontal Ox (liaison rotoïde).

Si OE représente un rayon lié à D, le mouvement de D par rapport à T_0 est paramétré par l'angle $\theta = (\vec{y}, \vec{OE})$ orienté par le vecteur \vec{x} .

θ est une fonction du temps t et on pose $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

On note respectivement \vec{R} et $\vec{\mathcal{M}}_O$ la résultante et le moment en O des actions de contact de l'axe Ox sur le disque D dues à la liaison rotoïde.

Au point I, de coordonnées $x = 0, y = 0, z = -b$, est constamment appliquée une force \vec{F} liée à la vitesse angulaire ω du disque D par la relation : $\vec{F} = Qb(\omega_M - \omega)\vec{y}$, où ω_M est une constante strictement positive donnée, et Q une fonction donnée du temps à valeurs positives. On se limite à des forces \vec{F} de même sens que le vecteur \vec{y} et on note F le module de \vec{F} .

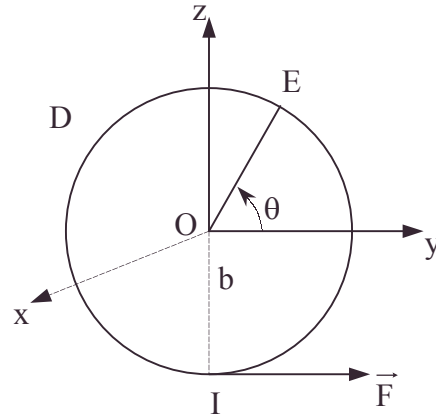


Figure 1

1. Quelle est la dimension de la grandeur Q ?
2. On pose $\vec{R} = R_y \vec{y} + R_z \vec{z}$. Déterminer R_y et R_z en fonction des données.
3. Ecrire une équation différentielle liant $\frac{d\omega}{dt}$, ω , m , Q , ω_M . On donne le moment d'inertie du disque par rapport à Ox : $J = \frac{1}{2}mb^2$.
4. A l'instant initial $t = 0$, la vitesse angulaire ω du disque est nulle. On impose alors une force \vec{F} telle que Q soit une constante strictement positive donnée Q_1 .

a. Déterminer $\frac{\omega}{\omega_M}$ en fonction de t et $T_1 = \frac{m}{2Q_1}$.

b. A quel instant t_1 , la vitesse angulaire ω est-elle égale à $\frac{\omega_M}{2}$?

c. Calculer t_1 si $Q_1 = 10^3 \text{ kg/s}$, $m = 10^5 \text{ kg}$.

5. Soit T_2 une constante strictement positive donnée ayant la dimension d'un temps. On pose $t_2 = t_1 + T_2$.

Sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, on impose une force \vec{F} telle que $Q(t) = Q_1 \left[1 - \frac{(t - t_1)}{T_2} \right]$.

a. Déterminer $\frac{\omega}{\omega_M}$ sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ en fonction de t , t_1 , T_1 et T_2 .

b. Déterminer $\frac{\omega}{\omega_M}$ à l'instant t_2 en fonction de T_1 , T_2 .

c. Calculer $\frac{\omega}{\omega_M}$ à l'instant t_2 si $T_2 = 20 \text{ s}$.

Deuxième problème

On se propose d'étudier l'impact d'un jet fluide sur un obstacle plan.

Soit $T_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct, considéré comme galiléen si on introduit, parmi les actions extérieures, la pesanteur d'intensité constante g . L'axe Oz est vertical ascendant.

On note : \vec{r} la position d'une particule fluide dans T_0 ;
 t le temps ;
 \vec{V} le champ des vitesses en coordonnées eulériennes (\vec{r}, t) ;
 V le module de \vec{V} ;
 \vec{a} le champ des accélérations en coordonnées eulériennes.

Les fluides considérés sont supposés parfaits c'est-à-dire non visqueux et à masse volumique constante.

La partie **I** est indépendante de la partie **II**.

I. On considère l'écoulement d'un fluide de masse volumique μ .

1.a. A partir de l'équation d'Euler écrite sous la forme :

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} p - \mu g \vec{z},$$

montrer que, pour un écoulement permanent, la quantité $\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\mu}$ est constante sur

chaque trajectoire (le terme $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}$ représente l'accélération \vec{a}).

b. Pour un écoulement tel que la vitesse, la pression, la masse volumique et les dimensions selon la verticale ont pour ordres de grandeur respectifs 100 m/s, 10^5 N/m², 10^3 kg/m³, 10 cm, évaluer les ordres de grandeur respectifs des quantités $\frac{V^2}{2}$, gz , $\frac{p}{\mu}$.

Conclusion ?

2. Soit un point M se déplaçant sur une courbe plane orientée C . Au point de C où se trouve M à l'instant t , on considère le rayon de courbure \mathcal{R} de C et le vecteur unitaire \vec{N} de la normale orientée située dans le plan de C .

a. Déterminer $\vec{a} \cdot \vec{N}$ en fonction de V et \mathcal{R} .

b. Dédurre alors de l'équation d'Euler que pour un écoulement permanent dans lequel les trajectoires sont localement des droites parallèles, la quantité $p + \mu gz$ est localement uniforme dans chaque plan perpendiculaire à la direction de ces droites.

II. Dans cette partie, on néglige les effets de la pesanteur. Cette approximation est en partie justifiée par la considération des ordres de grandeur calculés au **I.1.b.**

Soit un jet d'eau cylindrique de révolution, d'axe horizontal Oy , débouchant dans de l'air au repos et venant frapper une plaque P schématisée par un disque d'axe Oy , de centre C , de rayon a , d'épaisseur négligeable devant a . Cette plaque peut être fixe ou mobile par rapport au repère T_0 .

On note :

- μ la masse volumique de l'eau ;
- Σ_1 la section droite du jet située dans le plan d'équation $y = 0$;
- Σ_L la surface libre du jet ;
- Σ_2 la surface de sortie du jet, intersection du jet dévié avec le cylindre de révolution d'axe Oy et de rayon a ;
- Σ_p la face de la plaque mouillée par le jet ;

- v^t le volume de contrôle de frontière $\Sigma^t = \Sigma_1 \cup \Sigma_L \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_p$;
 a_1 le rayon de Σ_1 ;
 $S_1, S_2, S_p = \pi a^2$, les aires respectives de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_p$;
 \vec{n} le champ des normales à Σ^t extérieures à v^t ;
 \vec{n}_2 la restriction du champ \vec{n} à Σ_2 ;
 \vec{F} la force exercée par l'eau et l'air sur les deux faces de la plaque P ;
 $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{CM_p}}{\|\overrightarrow{CM_p}\|}$ si M_p est un point de la plaque P ;
 $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_p$ les vitesses respectives de l'eau par rapport à T_0 sur $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_p$;
 V_1, V_2, V_p les modules respectifs de $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_p$;
 $T = (C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère orthonormé direct lié à la plaque P ;
 $\vec{V}_{1T}, \vec{V}_{2T}, \vec{V}_{pT}$ les vitesses de l'eau par rapport à T respectivement sur $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_p$.

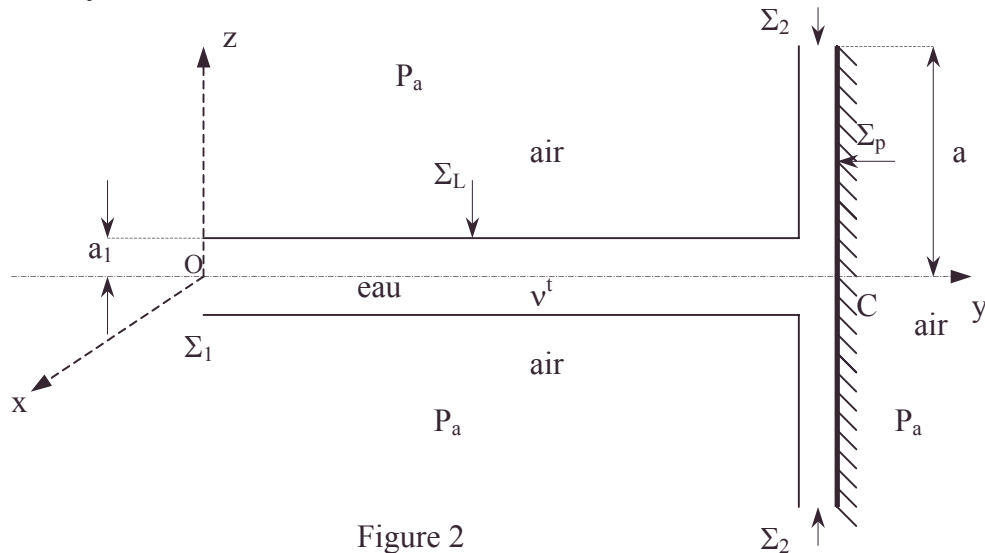


Figure 2

On adopte alors la schématisation suivante :

Dans la section d'entrée Σ_1 , la vitesse \vec{V}_1 est uniforme et s'écrit $\vec{V}_1 = V_1 \vec{y}$ ($V_1 > 0$).

Sur la surface de sortie Σ_2 , on suppose que \vec{V}_{2T} s'écrit $\vec{V}_{2T} = V_{2T} \vec{n}_2$ ($V_{2T} \geq 0$).

Sur la plaque P, on suppose que \vec{V}_{pT} s'écrit $\vec{V}_{pT} = V_{pT} \vec{i}$ ($V_{pT} \geq 0$).

L'air ambiant est à la pression atmosphérique constante P_a .

On suppose en outre que sur Σ_1 et Σ_2 la pression est uniforme et égale à P_a .

1. La plaque P est fixe par rapport à T_0 et on suppose que l'écoulement est permanent par rapport à T_0 . On pose $v^t = v$ et $\Sigma^t = \Sigma$.

1. Montrer que $V_2 = V_1$.

2.a. En utilisant la loi de conservation de la masse, déterminer, en fonction de a_1 et a , l'épaisseur e_2 du jet au niveau de la surface de sortie Σ_2 .

b. Calculer e_2 si $a_1 = 1$ cm, $a = 10$ cm.

3. En appliquant la loi de la résultante cinétique, pour le volume de contrôle v , écrite sous la forme $\iint_{\Sigma} \mu \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \iint_{\Sigma} p \vec{n} dS$, déterminer \vec{F} en fonction de μ, S_1, V_1
 dS désigne l'élément d'aire sur Σ .

On pourra exprimer \vec{F} à l'aide de l'intégrale de surface $\iint_{\Sigma} p \vec{n} dS$.

On rappelle la formule $\iint_{\Sigma} f \vec{n} dS = \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} f d\tau$, où f est une fonction à valeurs scalaires et où $d\tau$ désigne l'élément de volume dans V .

2. La plaque P est animée par rapport à T_0 d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{U} = u \vec{y}$, u étant une constante vérifiant $0 < u < V_1$.

Sur un grand intervalle de temps Δt , ce dispositif n'est pas réaliste, la longueur de la partie cylindrique du jet devant augmenter de $u \Delta t$.

Le volume de contrôle v^t dépend a priori de t .

En raison des mouvements de la plaque P, les vitesses respectives \vec{V}_2 et \vec{V}_p sur Σ_2 et Σ_p s'écrivent : $\vec{V}_2 = u \vec{y} + V_{2T} \vec{n}_2$, $\vec{V}_p = u \vec{y} + V_{pT} \vec{i}$.

On suppose que l'écoulement est permanent par rapport au repère T lié à la plaque P. Certains résultats obtenus au §1. sont alors transposables en remplaçant le repère T_0 par le repère T.

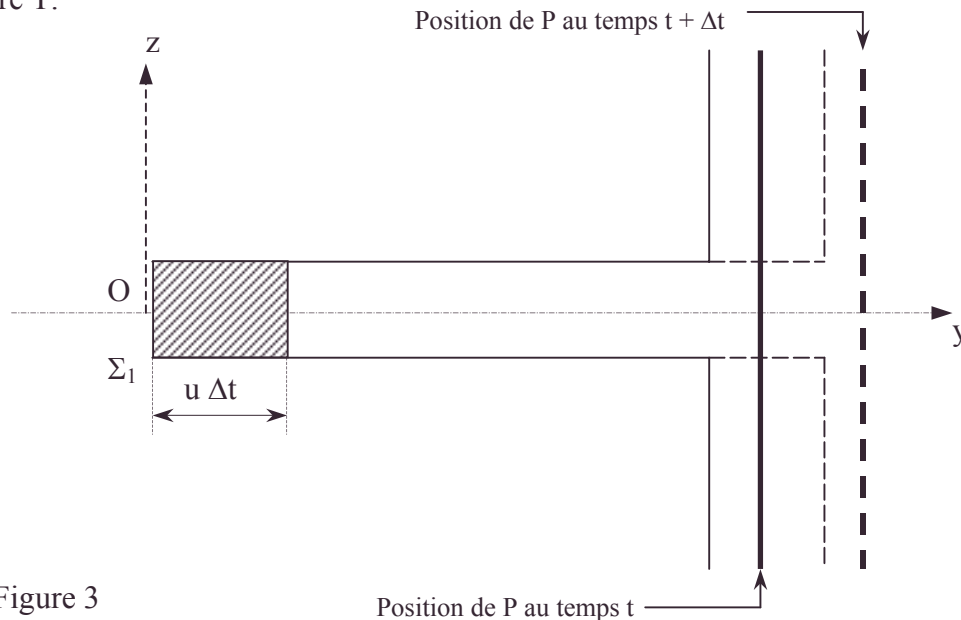


Figure 3

- 1.a. Déterminer \vec{V}_{1T} en fonction de V_1 et u .
- b. Montrer que $\vec{V}_{2T} = (V_1 - u) \vec{n}_2$.
- c. Déterminer S_2 en fonction de S_1 .
- d. En déduire l'expression de \vec{V}_2 en fonction de V_1 et u .
2. Déterminer \vec{F} en fonction de μ , S_1 , V_1 , u .
3. Calculer, en fonction de μ , S_1 , V_1 , u , la puissance mécanique \mathcal{P}_p (par rapport à T_0) reçue, à l'instant t , par la plaque P.
4. On définit le débit d'énergie cinétique \mathcal{P}_1 de l'eau, à travers Σ_1 , par rapport à T_0 (puissance fournie) par $\mathcal{P}_1 = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{2} \mu V_1^2 (\vec{V}_1 \cdot \vec{y}) dS$.

a. Etablir l'expression du rendement $\eta = \frac{\mathcal{P}_p}{\mathcal{P}_1}$ en fonction du paramètre $\lambda = \frac{u}{V_1}$.

b. Déterminer la valeur de λ pour laquelle le rendement est maximum ; quelle est alors la valeur de η ?

- maximum, rendement, volume de contrôle

c. Tracer la courbe représentative des variations de η en fonction de λ .

5.a. Calculer en fonction de μ , S_1 , V_1 , u , la puissance $\mathcal{P}_2 = \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{2} \mu V_2^2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) dS$.

b. Soit ε^t l'énergie cinétique associée au volume de contrôle v^t au temps t :

$$\varepsilon^t = \iiint_{v^t} \frac{1}{2} \mu V^2 d\tau.$$

$$\text{Calculer } \mathcal{P}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon^t).$$

c. Vérifier la relation de bilan : $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_A$.

d. Quelles idées permettant d'améliorer le rendement η cette dernière relation vous suggère-t-elle ?

e. Calculer \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_p , \mathcal{P}_A , si $\mu = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $a_1 = 10^{-2} \text{ m}$, $V_1 = 120 \text{ m/s}$, $u = 40 \text{ m/s}$.

Dans la pratique, le jet vient frapper successivement des augets fixés à la périphérie d'une roue tournant autour d'un axe horizontal, le diamètre de la roue étant grand devant les dimensions d'un auget. On montre alors qu'une approximation de la force \vec{F} peut s'écrire $\vec{F} = \mu S_1 V_1 (V_1 - u) \vec{y}$. C'est une force de ce type qui a été introduite dans le premier problème.

CCP ; Durée : 3h

Corrigé

A.1. $b\omega$ s'exprime en m.s^{-1} . Or, on connaît le théorème d'Euler unidimensionnel $\vec{F} = D_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$ que l'on compare à $\vec{F} = Q(b\omega_M - b\omega) \vec{y}$: on en déduit :
unité de Q = unité de $D_m = \text{kg.s}^{-1}$.

2. Appliquons le théorème du centre de masse : $m \vec{a} \left(\frac{O}{T_0} \right) = m \vec{g} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$;

On en tire : $R_y = -Qb(\omega_M - \omega)$; $R_z = mg$.

3. Appliquons le théorème du moment cinétique en O : $\left(\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)_{T_0} = \vec{\mathcal{M}}_0 + \vec{OI} \wedge \vec{F} + \vec{0}$.

En projection sur l'axe de rotation Ox, la liaison étant parfaite :

$$J \frac{d\omega}{dt} = Qb^2 (\omega_M - \omega) ; \text{ or, } J = \frac{1}{2} mb^2 \text{ donc : } \frac{d\omega}{dt} = \frac{2Q}{m} (\omega_M - \omega).$$

$$4.a. \frac{d\omega}{\omega_M - \omega} = \frac{2Q_1}{m} dt \Rightarrow \ln \frac{\omega_M - \omega}{A} = -\frac{2Q_1}{m} t \Rightarrow \omega_M - \omega = \omega_M e^{-\frac{t}{T_1}} ; \frac{\omega}{\omega_M} = \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

$$b. t_1 = T_1 \ln 2.$$

$$c. t_1 = \frac{m}{2Q_1} \ln 2 ; \text{ A.N.: } t_1 = 34,7 \text{ s.}$$

On remarquera que les masses mises en jeu appartiennent au domaine industriel.

$$5.a. \text{ Résolution de } \frac{d\omega}{dt} = \frac{2Q_1}{m} \left(1 - \frac{t-t_1}{T_2} \right) (\omega_M - \omega) \text{ ou } \int_{t_1}^t \frac{d\omega}{\omega_M - \omega} = \int_{t_1}^t \frac{1}{T_1} \left(1 - \frac{t-t_1}{T_2} \right) dt.$$

$$\ln \frac{\omega_M - \omega}{\frac{\omega_M}{2}} = -\frac{(t-t_1)}{T_1} + \frac{(t-t_1)^2}{2T_1T_2} - 0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_M} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(t-t_1)}{T_1} + \frac{(t-t_1)^2}{2T_1T_2}}.$$

b. $t_2 = t_1 + T_2$; $\frac{\omega}{\omega_M} = 1 - 0,5 e^{-\frac{T_2}{2T_1}}.$

c. $\frac{\omega}{\omega_M} = 1 - 0,5 e^{-\frac{T_2 Q_1}{m}} ; \text{AN : } \frac{\omega}{\omega_M} = 0,59.$

B.I.1.a. En écoulement permanent, trajectoire et ligne de courant Γ s'identifient ; calculons la circulation, à partir d'un point A d'une trajectoire :

$$\int_A^M \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \vec{d\ell}}_{\substack{=0 \\ \text{régime permanent}}} + \underbrace{\mu \text{grad} \frac{V^2}{2}}_{=0 \text{ car } d\ell = \vec{V} dt} + \underbrace{(\mu \vec{\text{rot}} \wedge \vec{V}) \vec{d\ell}}_{=0} + (\text{grad} \mu g z) \vec{d\ell} + (\text{grad} p) \vec{d\ell} \right) = \int_A^M \vec{0} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Or, $\mu = \mu_0$ d'où : $\int_A^M \left(\text{grad} \left(\mu \frac{V^2}{2} + p + \mu g z \right) \right) \vec{d\ell} = 0 = \int_A^M d \left(\mu \frac{V^2}{2} + p + \mu g z \right) ;$

$$\mu \frac{V^2(M)}{2} + p(M) + \mu g z(M) = \mu \frac{V^2(A)}{2} + p(A) + \mu g z(A) \quad \forall M \in \text{ligne de courant},$$

$\frac{V^2(M)}{2} + \frac{p(M)}{\mu} + g z(M) = \text{cste}$ sur chaque trajectoire, en régime permanent pour un fluide incompressible non visqueux.

b. $\frac{V^2}{2} = 5.10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} ; g z = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} ; \frac{p}{\mu} = 10^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$

Conclusion : $g z \ll \frac{p}{\mu} \ll \frac{V^2}{2}.$

2.a. La formule intrinsèque de \vec{a} dans le trièdre local donne :

$$\vec{a} = \frac{V^2}{\mathcal{R}} \vec{N} + \frac{dV}{dt} \vec{T} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{N} = \frac{V^2}{\mathcal{R}}.$$

b. Multiplions par \vec{N} l'équation d'Euler :

$$\mu \vec{a} = -\text{grad}(p + \rho g z) \Rightarrow \mu \vec{a} \cdot \vec{N} = -\vec{N} \cdot \text{grad}(p + \rho g z) = \frac{\mu V^2}{\mathcal{R}}.$$

• pour des trajectoires assimilables à des droites $\mathcal{R} \propto \infty$ et $\mu \frac{V^2}{\mathcal{R}} \rightarrow 0.$

• $\vec{N} \cdot \text{grad}(p + \rho g z) = 0$; or $\vec{N} \in \text{plan orthogonal à } \vec{T}$ définissant les droites parallèles.

$\Rightarrow \vec{T} // \text{grad}(p + \rho g z)$ et la surface $p + \rho g z = \text{cste}$ orthogonale à $\text{grad}(p + \rho g z)$ s'identifie avec le plan orthogonal à $\vec{T}.$

II.1.1. Considérons une ligne de courant partant de Σ_1 et aboutissant à Σ_2 :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} + 0 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu} + 0 \quad \text{mais } P_1 = P_2 = P_a.$$

$V_1 = V_2$ en écoulement permanent dans $T_0.$

• accélération dans le trièdre de Frenet, conservation de la masse, équation d'Euler, incompressibilité, trajectoire

2.a. La conservation de la masse d'un fluide incompressible s'écrit :

$$\iint_{\Sigma_1} \mu \vec{V} d\vec{S} = \iint_{\Sigma_2} \mu \vec{V} d\vec{S}, \text{ soit } V_1 \pi a_1^2 = V_2 2\pi a e_2.$$

Comme $V_1 = V_2$, on obtient : $e_2 = \frac{a_1^2}{2a}$.

b. AN : $e_2 = 5.10^{-4}$ m.

$$3. \vec{F}_\Sigma = \frac{D\vec{P}}{Dt} = \underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{=0 \text{ vu le régime permanent}} + \oint_{\Sigma} \mu \vec{V} \vec{V} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_L} p d\vec{S} + \underbrace{\iint_{V_t} \mu \vec{g}}_{=0 \text{ effet pesanteur négligeable}} d\tau + \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \Sigma}$$

$$\text{Or, } \vec{F} = \vec{F}_{\Sigma \rightarrow \text{plaque}} - \iint_{\Sigma_p} p_a d\vec{S} = -\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \Sigma} - \iint_{\Sigma_p} p_a d\vec{S} = -\iint_{\Sigma_p} p_a d\vec{S} - \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_L} p_a d\vec{S} - \vec{F}_\Sigma ;$$

$$\vec{F} = -\iint_{\Sigma_t} p_a d\vec{S} - \vec{F}_\Sigma ; \text{ or } \iint_{\Sigma_t} p_a d\vec{S} = \iiint_{V_t} \text{grad} p_a d\tau = \iiint_{V_t} \vec{0} d\tau = \vec{0}.$$

$$\vec{F} = -\iint_{\Sigma_t} \mu \vec{V} (\vec{V} d\vec{S}).$$

$$\vec{F} = -\iint_{\Sigma_1} \mu \vec{V}_1 (-\vec{V}_1 d\vec{S}) - \iint_{\Sigma_L} \mu \vec{V} \cdot 0 - \iint_{\Sigma_p} \mu \vec{V}_0 \cdot 0 - \iint_{\Sigma_2} \mu \vec{V}_2 (\vec{V}_2 d\vec{S})$$

$$\text{or } \iint_{\Sigma_2} \mu \vec{V}_2 (\vec{V}_2 d\vec{S}) = \mu V_2^2 \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \vec{n}_2 d\vec{S}}_{\vec{0} \text{ cf. symétrie}}.$$

$$\vec{F} = \mu V_1^2 \iint_{\Sigma_1} \vec{y} d\vec{S} = \mu V_1^2 S_1 \vec{y}.$$

2.1.a. Par composition des vitesses $\vec{V}_1 = \vec{V}_{1T} + \vec{U} \Rightarrow \vec{V}_{1T} = (V_1 - u)\vec{y}$.

b. Ecrivons la relation de Bernoulli dans T en régime permanent (T étant galiléen car en translation rectiligne uniforme) :

$$\frac{V_{1T}^2}{2} + \frac{P_{1T}}{\mu} + 0 = \frac{V_{2T}^2}{2} + \frac{P_{2T}}{\mu} + 0 \Rightarrow V_{1T} = V_{2T} \text{ car } P_{1T} = P_{2T} = P_a ;$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{2T} = V_{2T} \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{V}_{2T} = (V_1 - u)\vec{n}_2.$$

c. Ecrivons la conservation de la masse dans T où le régime est permanent :

$$\frac{Dm}{Dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0} + \oint_{\sigma_1} \mu \vec{V}_T \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma_1 \text{ mvt}} \mu \vec{V}_T \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_2} \mu \vec{V}_T \cdot d\vec{S} ;$$

$$\mu_1 V_{1T} S_1 = \mu_2 V_{2T} S_2 ; \text{ or } V_{1T} = V_{2T} \Rightarrow S_1 = S_2.$$

d. Par composition des vitesses : $\vec{V}_2 = \vec{V}_{2T} + \vec{U} \Rightarrow \vec{V}_{2T} = -u\vec{y} + (V_1 - u)\vec{n}_2$.

2. Ecrivons le PFD dans T galiléen en régime permanent :

$$\vec{F}_{T\Sigma} = \frac{D\vec{P}_T}{Dt} = \underbrace{\frac{d\vec{P}_T}{dt}}_{=0} + \oint_{\Sigma_t} \mu \vec{V}_T (\vec{V}_T d\vec{S}) = -\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} p_a d\vec{S} + \vec{0} + \vec{F}_{T \text{ plaque} \rightarrow \Sigma} ;$$

$$\text{Or d'après 1., } \vec{F} = \vec{F}_{T\Sigma \rightarrow \text{plaque}} - \iint_{\Sigma_p} p_a d\vec{S} = -\vec{F}_{T \text{ plaque} \rightarrow \Sigma} - \iint_{\Sigma_p} p_a d\vec{S} = -\vec{F}_{T\Sigma} - \oint_{\Sigma} p_a d\vec{S} ;$$

$$\vec{F} = -\vec{F}_{T\Sigma} - \iiint_{V_T} \text{grad} p_a d\tau = -\vec{F}_{T\Sigma} - \vec{0} = -\iint_{\Sigma_t} \mu \vec{V}_T (\vec{V}_T d\vec{S}) \text{ et par analogie avec 1.3. pour}$$

ne pas réécrire les mêmes intégrales :

$$\vec{F} = \mu S_1 V_{1T}^2 \vec{y} = \mu S_1 (V_1 - u)^2 \vec{y}.$$

$$3. \mathcal{P}_p = \vec{F} \cdot \vec{U} = \mu S_1 u (V_1 - u)^2.$$

• analogie, Bernoulli [formules de], composition des vitesses, conservation de la masse, P.F.D.

$$4.a. \mathcal{P}_1 = \iint_{\Sigma_1 \text{ mvt}} \frac{1}{2} \mu V_1^2 (\vec{V}_1 \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{2} \mu V_1^2 V_1 \iint_{\Sigma_1} dS = \frac{1}{2} \mu V_1^3 S_1.$$

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_p}{\mathcal{P}_1} = \frac{\mu S_1 u (V_1 - u)^2}{\frac{1}{2} \mu S_1 V_1^3} = 2\lambda(1-\lambda)^2.$$

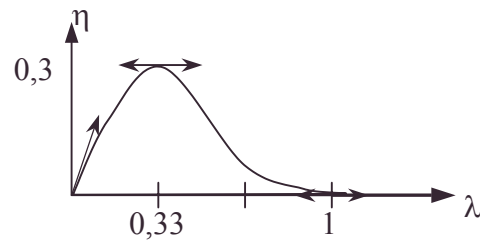
$$b. \frac{d\eta}{d\lambda} = 2(1-\lambda)(1-3\lambda) = 0$$

pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 0,33$.

α . $\lambda = 1$; $\eta = 0$ minimum de η .

β . $\lambda = 0,33$ seul maximum $\eta = 0,296$.

$$c. \text{Pente en } \lambda = 0 : \left(\frac{d\eta}{d\lambda} \right)_0 = 2$$



$$5.a. \mathcal{P}_2 = \iint_{\Sigma_2 \text{ mvt}} \frac{1}{2} \mu V_2^2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) dS = \frac{1}{2} \mu V_2^2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) \iint_{\Sigma_2} dS = \frac{1}{2} \mu V_2^2 V_{2T} S_2 ;$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} \mu S_1 [(V_1 - u)^2 + u^2] (V_1 - u).$$

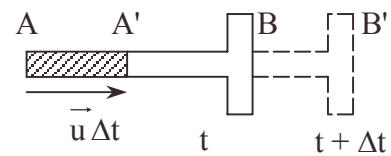
b. Vu le libellé de l'énoncé qui n'incite pas à une analyse mathématicienne des flux, nous faisons le bilan des énergies cinétiques à travers \mathcal{V}_t fixe dans T (mais mobile dans T_0 cf. fusée).

$$\varepsilon^{t+\Delta t} = E_C(AB');$$

$$\varepsilon^t = E_C(AB) ;$$

$$\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon^t = E_C(AA') + \underbrace{E_C(A'B') - E_C(AB)}_{0 \text{ en régime permanent}}$$

$B' \rightarrow B$ quand $\Delta t \rightarrow 0$



$$E_C(AA') = \iiint_{AA'} \left(\frac{1}{2} \mu V_1^2 \right) d\tau = \frac{1}{2} \mu V_1^2 S_1 u \Delta t \text{ d'où } \mathcal{P}_A = \frac{1}{2} \mu V_1^2 S_1 u.$$

Remarque : c'est le résultat qui permet de vérifier **c**.

c. Remplaçons les différents termes :

$$S_1 \cdot \frac{1}{2} \mu V_1^2 \cdot V_1 = S_1 \cdot \frac{1}{2} \mu ((V_1 - u)^2 + u^2) (V_1 - u) + \mu S_1 u (V_1 - u)^2 + \frac{1}{2} S_1 \mu V_1^2 u ;$$

On vérifie bien :

$$\frac{1}{2} V_1^3 = \frac{1}{2} V_1^3 - \frac{1}{2} u^3 - \frac{3}{2} u V_1^2 + \frac{3}{2} u^2 V_1 + \frac{1}{2} u^2 V_1 - \frac{1}{2} u^3 + u V_1^2 - 2u^2 V_1 + u^3 + \frac{1}{2} u V_1^2.$$

$$d. \text{Introduisons } \eta = \frac{\mathcal{P}_p}{\mathcal{P}_1} \text{ en divisant par } \mathcal{P}_1 \text{ la 2}^{\text{ème}} \text{ relation } \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_A :$$

$$1 = \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} + \eta + \frac{\mathcal{P}_A}{\mathcal{P}_1} ; \text{ or, } \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \frac{\frac{1}{2} \mu S_1 [(V_1 - u)^2 + u^2] (V_1 - u)}{\frac{1}{2} \mu S_1 V_1^3} = [(1-\lambda)^2 + \lambda^2] (1-\lambda),$$

$$\text{et } \frac{\mathcal{P}_A}{\mathcal{P}_1} = \frac{\frac{1}{2} S_1 \mu V_1^2 u}{\frac{1}{2} S_1 \mu V_1^3} = \lambda ; \text{ on retrouve } \eta = 2\lambda(1-\lambda)^2.$$

• bilan d'énergie cinétique, fusée, graphe, maximum, minimum

On ne peut pas agir indépendamment sur \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_A . On ne peut donc agir que sur λ (cf. courbe) : $\eta_{\max} = 0,296$ pour $\lambda = 0,33$.

e. $\mathcal{P}_1 = 271,43 \text{ kW}$; $\mathcal{P}_2 = 100,53 \text{ kW}$; $\mathcal{P}_p = 80,42 \text{ kW}$; $\mathcal{P}_A = 90,48 \text{ kW}$.

On a : $\lambda = 0,33$ soit : $\eta_{\max} = 0,296$; on vérifie $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_A$.

3.3.2.5. Anémomètre à jet

Voir page 169.

3.3.2.6. Fusées et satellites

Voir page 14.

3.3.2.7. Satellite géostationnaire

Voir page 75.

3.3.2.8. Turbine hydraulique

Voir page 341.

3.3.2.9. Vidange

Voir page 344.

3.3.2.10. Sphère dans un courant variable Effet Magnus

Voir page 348.

3.3.2.11. Voile

Voir page 376.

3.3.2.12 Voile de Flettner

Voir page 381.

3.3.2.13. Planche à voile

Voir page 378.

3.3.2.14. Modèles d'aéroglesseur

Voir page 397.

3.3.2.15. Navigation contre le vent

Voir page 407.

3.3.2.16. Effet de carène liquide

Voir page 413.

3.3.3. Marine

3.3.3.1. Voile

Note : le résultat de certaines questions est fourni dans l'énoncé de façon à permettre aux étudiants de poursuivre la résolution du problème.

1. Caractérisation et effet d'un coude dans l'écoulement

Dans tout le problème, on considère une veine de fluide incompressible et non visqueux, de masse volumique ρ constante, se déplaçant à une vitesse \vec{V} , de norme V constante et uniforme. La surface S de la veine de fluide, comptée dans une section droite perpendiculaire à la vitesse, sera donc supposée constante.



Figure 1

1. Définir et exprimer le débit massique q .

2.a. La veine du fluide subit un coude (voir la figure 2).

La norme de la vitesse étant constante,

$$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V.$$

θ est l'angle entre \vec{V}_2 et l'axe des x .

Le plan Oxy est supposé horizontal.

On considère que pendant un laps de temps dt , une masse dm comprise dans un volume $d\mathcal{C} = S.V.dt$ passe de l'état (1) à l'état (2). En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse dm , déterminer les composantes F_x et F_y de la force \vec{F} que le fluide exerce sur le coude.

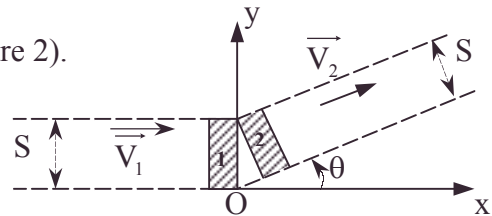


Figure 2

b. Montrer que cette force peut se mettre sous la forme $|\vec{F}| = F = Af(\theta)$ où le terme

A ne dépend que de ρ , S et V . Donner les expressions de A et de $f(\theta)$.

c. Application numérique : calculer F pour de l'eau, $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ avec un débit égal à $q = 50 \text{ kg.s}^{-1}$ et avec $\theta = 45^\circ$ et $S = 10^{-2} \text{ m}^2$.

2. Application à l'étude de la propulsion d'un bateau à voile

On assimile la voile d'un petit bateau à une surface plane Σ placée dans l'écoulement d'air que constitue le vent relatif par rapport au bateau. Ce dernier se déplaçant à vitesse constante constitue un repère galiléen qui sera choisi pour toute cette question.

On admettra que l'action d'une voile réglée pour que le plan de Σ fasse un angle φ avec la direction du vent relatif (cf. figure 3) consiste à dévier de 2φ le tube du courant qui aurait traversé Σ en l'absence de la voile. On admettra, en outre, que la voile n'altère pas de façon sensible l'écoulement de l'air en dehors de ce tube de courant. On pourra donc, dans ces conditions, assimiler la voile à un coude dans un tube de courant d'air s'écoulant à vitesse constante en module. On admettra que ρ , la masse volumique de l'air, reste constante. Comme on n'étudie pas ici le mouvement de dérive du bateau, on ne s'intéresse qu'à la composante suivant Ox , soit f , de la force exercée par le vent sur la voile.

1. Donner la relation entre S , surface de la veine d'air, et Σ .

2. Montrer que $f = \rho \Sigma V^2 g(\alpha, \varphi)$, où $g(\alpha, \varphi)$ est une fonction uniquement de α et de φ telle que : $g(\alpha, \varphi) = 2 \sin^2 \varphi \sin(\alpha - \varphi)$.

3.a. Représenter sommairement sur un même graphique (nommé G_1) les variations de g en fonction de φ pour les deux valeurs particulières de α :

$$\alpha_1 = 90^\circ \text{ et } \alpha_2 = 180^\circ.$$

Expliquer en quoi ces deux graphiques permettent de voir que, pour une allure de vent relatif donné (α fixé), il existe un réglage optimum de la voile correspondant à une valeur $\varphi_m(\alpha)$ de l'angle φ .

Donner les valeurs approchées de φ_m pour $\alpha_1 = 90^\circ$ et $\alpha_2 = 180^\circ$.

b. Montrer que pour une valeur quelconque de α , φ_m est défini par la relation :

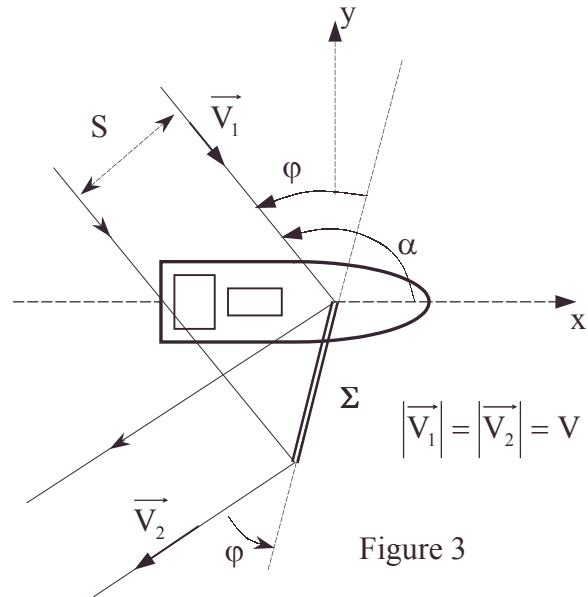


Figure 3

$2 \tan(\alpha - \varphi_m) = \tan \varphi_m$. Pour déterminer $\varphi_m(\alpha)$, donner un tableau comportant au moins dix valeurs. Les valeurs numériques seront déterminées soit par informatique, soit à partir de la courbe fournie (voir figure 4). Dans l'un ou l'autre cas, la procédure employée sera soigneusement expliquée.

c. Faire un schéma du bateau, de sa voile et de la direction du vent relatif pour le réglage optimum correspondant aux valeurs de α : 50° , 90° et 180° .

4.a. Tracer la courbe $g(\alpha, \varphi_m) = y(\alpha)$, (graphique nommé G_2), à partir des résultats précédents. On justifiera rapidement le nombre et l'emplacement des points choisis pour tracer une courbe suffisamment précise de $y = y(\alpha)$.

b. En déduire la valeur de la force propulsive qu'on peut obtenir en déployant une voile de 30 m^2 dans un vent relatif de vitesse $V = 10 \text{ m.s}^{-1}$ arrivant par le travers ($\alpha = 90^\circ$). On prendra $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.

5. L'une des caractéristiques importantes d'un bateau est sa capacité à remonter au vent. Pour déterminer cette capacité, on continue de négliger le mouvement de dérive et on considère que la coque et les superstructures présentent une résistance à l'écoulement de l'air équivalente à celle d'une surface S_0 perpendiculaire au vent relatif. Montrer, avec ces hypothèses, que le bateau ne peut plus avancer si $\alpha \leq \alpha_0$. Déterminer à l'aide des graphiques précédents la valeur de α_0 pour $S_0 = 3 \text{ m}^2$, en conservant les valeurs numériques de **2.4.b.**

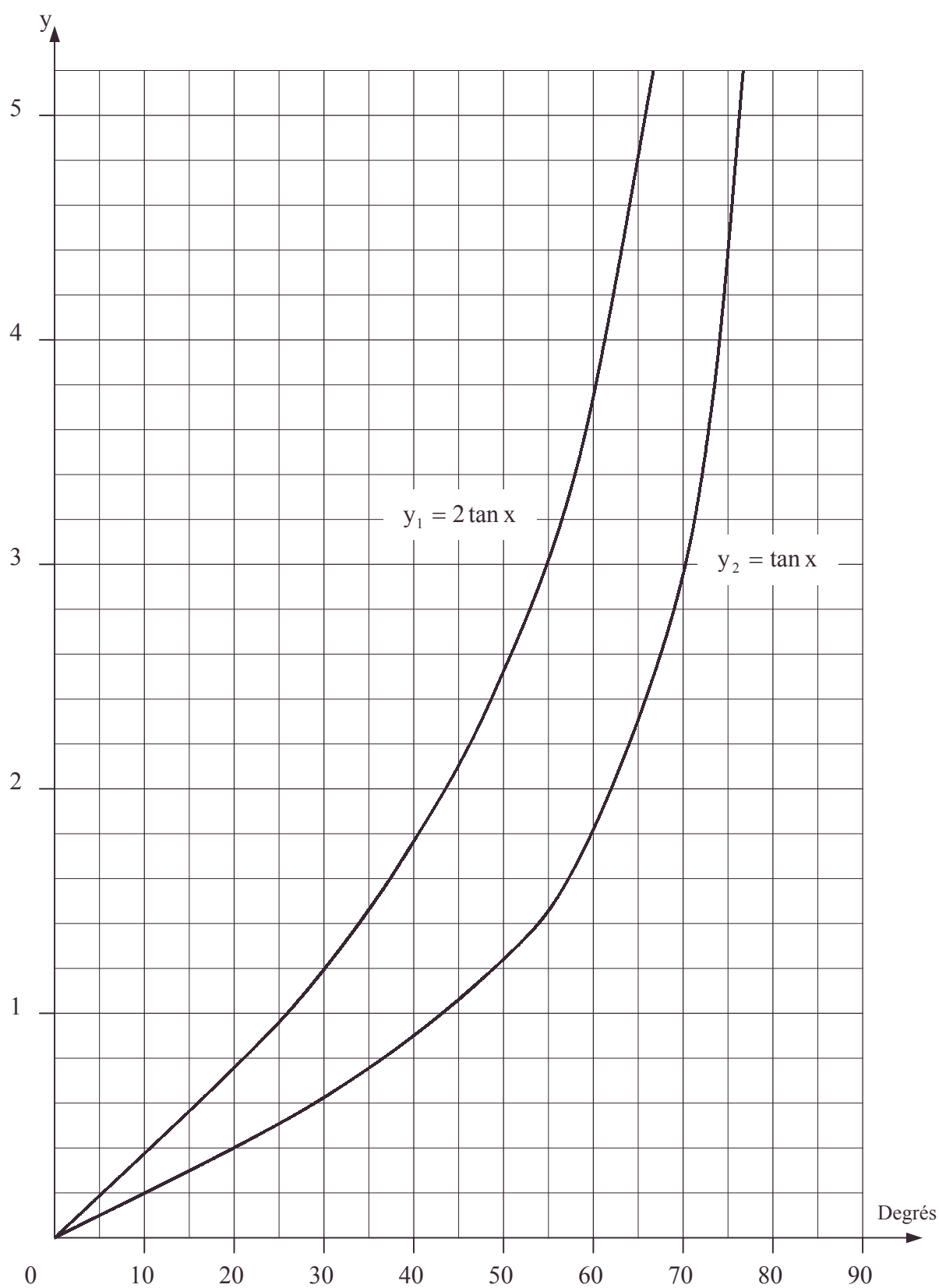


Figure 4

Capes ; Durée : 1h

Corrigé

$$1.1. q = \iint_S \rho \vec{V} d\vec{S} = \rho V.S.$$

2.a. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dm comme le dit l'énoncé :

$$\vec{F}_1 = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt}; \text{ où } \vec{p} = \vec{V}dm \text{ avec } dm = \rho SV dt.$$

$$\vec{p}(t) = \rho SV^2 dt \vec{x} \text{ et } \vec{p}(t+dt) = \rho SV^2 \cos \theta dt \vec{x} + \rho SV^2 \sin \theta dt \vec{y}.$$

En appliquant le théorème de l'action et de la réaction :

$$-\vec{F}_1 = \vec{F}, \text{ d'où : } F_x = \rho SV^2 (1 - \cos \theta); F_y = -\rho SV^2 \sin \theta;$$

le poids vertical n'intervient pas.

$$b. |\vec{F}| = \rho SV^2 \sqrt{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2} = 2\rho SV^2 \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow A = 2\rho SV^2; f(\theta) = \sin \frac{\theta}{2}.$$

$$c. F = \frac{2q^2}{\rho S} \sin \frac{\theta}{2}; \text{ A.N. : } F = 191,3 \text{ N.}$$

2. On admet la réflexion du vent (relatif) sur la voile.

1. $S = \Sigma \sin \varphi$ d'après la figure 3.

2. Vu **1.** Avec \vec{x}' selon \vec{V}_1 , on a une déviation $\theta = 2\varphi$ et

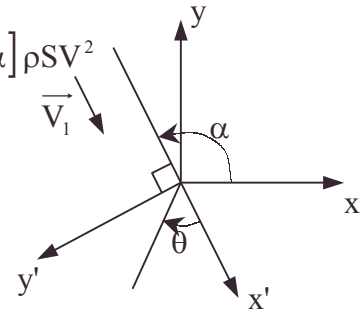
$$F_x = \rho SV^2 (1 - \cos 2\varphi); F_{y'} = -\rho SV^2 \sin 2\varphi;$$

$$\vec{F} = \vec{x} [F_{x'} \cdot \vec{x} + F_{y'} \cdot \vec{x}] = \vec{x} [-2 \sin^2 \varphi \cos \alpha + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha] \rho SV^2$$

$$\text{Soit } \vec{F} = 2\rho SV^2 \sin \varphi \sin(\alpha - \varphi) \vec{x},$$

$$\text{ou } \vec{F} = \vec{x} \rho \Sigma V^2 \cdot 2 \sin(\alpha - \varphi) \sin^2 \varphi = f \vec{x},$$

$$\Rightarrow g(\alpha, \varphi) = 2 \sin^2 \varphi \sin(\alpha - \varphi).$$



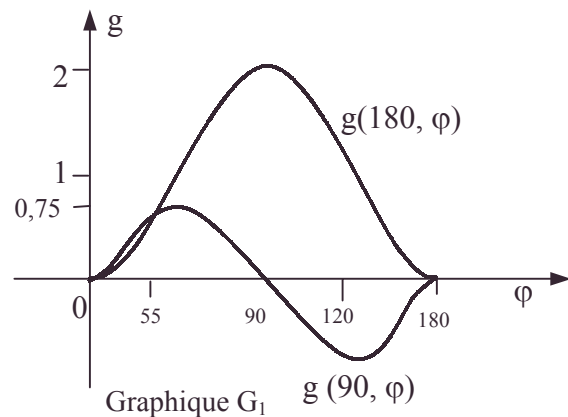
3.a.alpha. graphes

beta. Il existe un réglage optimum, car pour V_1, Σ, α donnés, f , force propulsive, peut être maximale pour φ bien choisi.

AN : valeurs lues (approchées) :

$$\alpha_1 = 90^\circ; \varphi_m = 55^\circ.$$

$$\alpha_2 = 180^\circ; \varphi_m = 90^\circ.$$



$$b.alpha. \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 4 \sin \varphi \cos \varphi \sin(\alpha - \varphi) - 2 \sin^2 \varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi);$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 2 \sin \varphi [2 \sin(\alpha - \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi \cos(\alpha - \varphi)] = 0;$$

$$\Rightarrow \text{pour } \varphi \neq 0(\pi); \tan \varphi_m = 2 \tan(\alpha - \varphi_m).$$

β.A. Méthode numérique : $\alpha = \arctan\left(\frac{\tan \varphi_m}{2}\right) + \varphi_m (\pi)$ pour φ_m choisi, on

déduit α :

φ_m	0	10	15	20	25	30	35	40	45
α°	0	15,0	22,6	30,8	38,1	46,1	54,3	62,8	71,6
g		$5,3 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	0,080	0,139	0,217	0,320	0,447

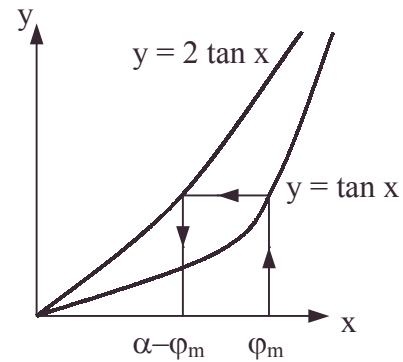
φ_m	50	55	60	65	70	75	80	85	90
α°	80,8	90,5	100,8	112,0	123,9	136,8	150,6	165,1	180
g	0,601	0,779	0,980	1,201	1,427	1,645	1,830	1,955	2,000

On peut augmenter le nombre de valeurs ; rappelons que classiquement 12 points régulièrement espacés peuvent représenter une sinusoïde.

B. Méthode graphique :

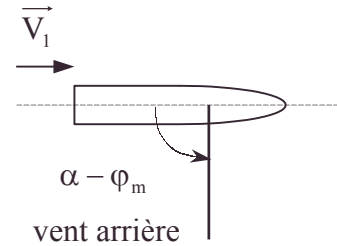
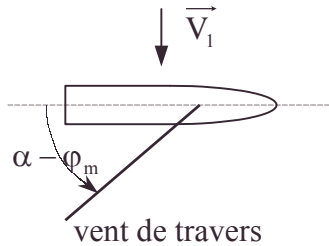
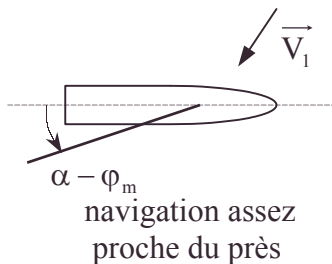
φ_m étant choisi, on en déduit $\tan \varphi_m = 2 \tan(\alpha - \varphi_m)$.

On en déduit $\alpha - \varphi_m$ d'où α .

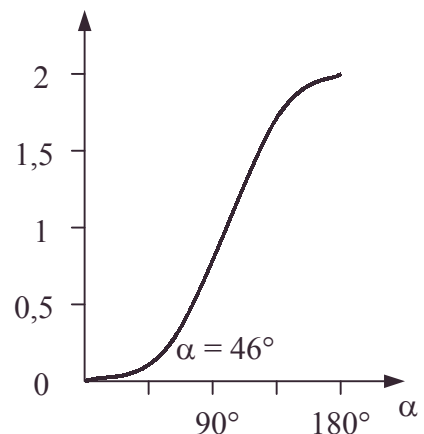


c.

$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$
$\varphi_m \# 32,4^\circ$	$\varphi_m \# 54,6^\circ$	$\varphi_m \# 90^\circ \# \alpha - \varphi_m$
$\alpha - \varphi_m \# 176^\circ$	$\alpha - \varphi_m \# 35,4^\circ$	$\alpha - \varphi_m \# 90^\circ$



4.a. Les points intéressants sont les points qui ne sont pas dans la partie linéaire :
soit $\alpha \in [0, 50]$ (4 points) et $[130, 180]$ (4 points) et 2 points dans l'intervalle $[50, 130]$.



Graphique G_2 de $g(\alpha, \varphi_m)$

b. $\alpha = 90^\circ$, on déduit du graphique $g = 0,770 \Rightarrow F = \rho \Sigma V^2 g$; AN : $F = 3003 \text{ N}$.

5.a. Pour calculer la résistance à l'air F'_x , on remplace dans F , Σ par S_0 et $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

elle est opposée à F_x . $\Rightarrow F'_x = -2\rho S_0 V^2 \cos \alpha$.

b. A la limite de l'arrêt : $F'_x + F = 0$,
soit $\rho \Sigma V^2 g(\alpha, \varphi) = 2\rho S_0 V^2 \cos \alpha$.

On trouve ainsi l'angle α limite, α_0 où :

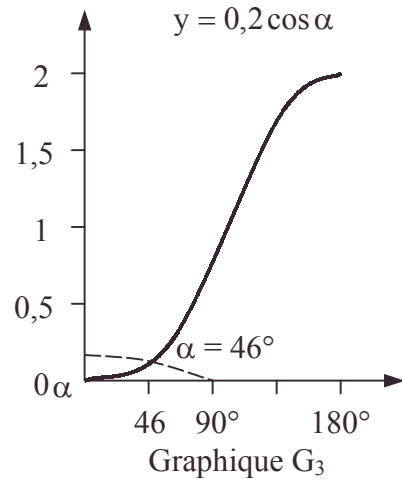
$$g(\alpha_0, \varphi) = \frac{2S_0}{\Sigma} \cos \alpha_0.$$

c. On résout graphiquement en traçant $y = y(\alpha)$

et $y = \frac{2S_0}{\Sigma} \cos \alpha$ soit A.N. : $y = 0,2 \cos \alpha$ sur G_3 :

On lit à l'intersection : $\alpha = 46^\circ$.

Remarque : les caravelles de Christophe Colomb ne pouvaient naviguer au près.



3.3.3.2. Superposition d'écoulements Voile de Flettner ; effet Magnus

Première partie : superposition d'écoulements

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible parfait défini par le champ de vitesse $\vec{V}_1 = \frac{\lambda}{2\pi r_1} \vec{u}_1$, où λ est une constante réelle et r_1 , θ_1 et z les coordonnées cylindriques d'un point M par rapport au point A_1 de coordonnées $(-a, 0, 0)$ dans un repère galiléen (O, x, y, z) muni de la base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Le point H (figure 1) étant la projection du point M sur le plan (xOy) , on a : $\vec{A_1M} = r_1 \vec{u}_1 + z \vec{z}$, où \vec{u}_1 est le vecteur unitaire porté par $\vec{A_1H}$.

1. Montrer que la circulation du vecteur \vec{V}_1 entre deux points A et B est indépendante du chemin suivi et déterminer le potentiel $\phi'_1(r_1)$ associé à cet écoulement tel que $\vec{V}_1 = \text{grad } \phi'_1$, sachant qu'il est par convention nul pour une certaine valeur r_0 de r_1 .

2. Cet écoulement suit-il la loi de Laplace $\Delta \phi'_1 = 0$?

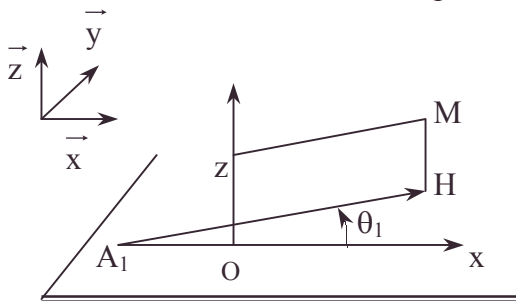


Figure 1 : écoulement défini par

$$\vec{V}_1 = \frac{\lambda}{2\pi r_1} \vec{u}_1$$

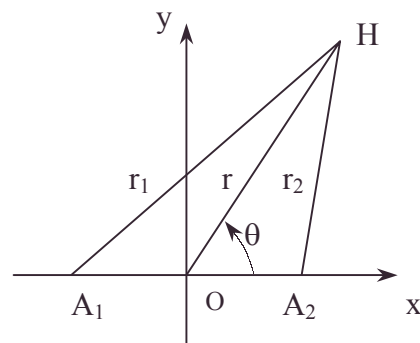


Figure 2 : écoulement défini par

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 \text{ (cf. 1.3.)}$$

3. On superpose à l'écoulement précédent le nouvel écoulement défini par le champ de vitesse $\vec{V}_2 = \frac{-\lambda}{2\pi r_2} \vec{u}_2$ avec $\vec{A}_2\vec{M} = \vec{A}_2\vec{H} + \vec{HM} = r_2 \vec{u}_2 + z\vec{z}$ (figure 2), les coordonnées du

point A_2 étant $(a, 0, 0)$. Quelle est l'expression du potentiel des vitesses $\varphi_1(r_1, r_2)$ associé à l'écoulement résultant, l'origine des potentiels étant prise dans le plan (yOz) ?

4. On fait tendre a vers 0 et λ vers l'infini, de telle sorte que le produit $2\lambda a = \mathcal{M}$ soit constant.

Montrer que le potentiel en coordonnées cylindriques (vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ) s'écrit alors $\varphi_1 = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{2\pi r}$, où θ est l'angle entre \vec{Ox} et \vec{OH} (figure 2).

5. Déterminer l'équation des lignes de courant ; tracer rapidement leur allure.

6. On superpose à cet écoulement un écoulement uniforme, de vitesse $\vec{u} = u\vec{x}$. Montrer qu'il existe pour l'écoulement résultant une ligne de courant circulaire d'axe Oz , dont on précisera le rayon R en fonction de \mathcal{M} et de u . Donner alors, qualitativement, la forme des lignes de courant ; on distinguera les cas $r < R$ et $r > R$.

7. Un cylindre rigide immobile de rayon R est immergé dans le fluide. La vitesse du fluide pour r très grand devant R est uniforme et égale à $\vec{u} = u\vec{x}$.

a. Montrer qu'à l'extérieur du cylindre le régime d'écoulement trouvé en 1.6. est solution du problème en présence du cylindre.

b. Existe-t-il des points de vitesse nulle ?

c. Quel est le potentiel φ_t de l'écoulement ?

d. Voyez-vous une analogie, magnétostatique ou électrostatique, à ce problème d'écoulement ?

8. On superpose enfin un dernier écoulement, défini par la vitesse \vec{V}_3 pour $r > R$: $\vec{V}_3 = \frac{C}{2\pi r} \vec{u}_\theta$, où C est une constante.

Montrer que cet écoulement dérive d'un potentiel φ_3 dont on ne demande pas d'établir l'expression. Quelle est la circulation du vecteur \vec{V}_3 sur une courbe fermée dans les deux cas où l'origine est à l'intérieur ou à l'extérieur de la courbe ? Voyez-vous une analogie, magnétostatique ou électrostatique, à ce problème d'écoulement ?

Deuxième partie : voile de Flettner

Un bateau est muni d'un cylindre vertical de rayon R et de hauteur h , tournant autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{z}$. Le vent souffle avec une vitesse uniforme constante $\vec{u} = u\vec{x}$.

L'écoulement de potentiel des vitesses φ_1 de la question 1.7. correspond à l'écoulement du vent autour du cylindre de rayon R , satisfaisant aux conditions aux limites.

L'écoulement de potentiel des vitesses φ_3 de la question 1.8. correspond à l'effet d'entraînement de l'air (masse volumique ρ) par la rotation du cylindre.

1. Donner la relation entre la constante C et ω . On remarquera que, dans ce modèle, la vitesse du vent sur le cylindre est celle du cylindre, autrement dit que la vitesse tangentielle ne s'annule pas sur la paroi du cylindre (ce point relève, en fait, de viscosité).

2. Calculer, en coordonnées polaires, les composantes de la vitesse résultante pour $r > R$.

3. Sachant que, loin du bateau, le vent n'est pas perturbé et que la pression est égale à la pression atmosphérique normale p_0 , déterminer, en fonction de l'angle θ , la pression autour du cylindre ($r = R$).

4. Quelle est, en fonction de R , C , \vec{u} , \vec{z} et de la masse volumique de l'air ρ , la résultante des forces de pression par unité de hauteur sur le cylindre ?

On pourra aussi bien exprimer le résultat en fonction de R , ρ , \vec{u} et $\vec{\omega}$.

5. Préciser sur un schéma le sens de rotation du cylindre correspondant à une force propulsive. Quelle est l'allure du vent la plus favorable (vent de près, vent de travers et vent arrière sont précisés sur la figure 3.a.).

6. La vitesse du vent est 10 m.s^{-1} ; la masse volumique de l'air est $1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Le cylindre a une hauteur de 10 m et un rayon de 30 cm : $\omega = 30 \text{ rad.s}^{-1}$.

Calculer la valeur numérique maximale de la force propulsive.

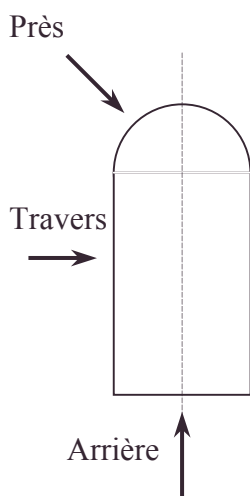


Figure 3.a.
Allures du vent

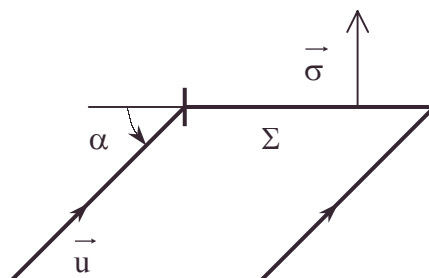


Figure 3.b.
Voile classique et vent (cf. 2.7.)

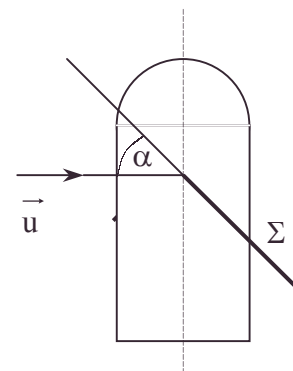


Figure 3.c.
Bordage optimal

Troisième partie : comparaison avec une voile classique

1. Une voile plane d'aire Σ et de vecteur unitaire normal $\vec{\sigma}$ reçoit une veine de vent de vitesse \vec{u} sous l'angle α (figure 3.b.) et la réfléchit selon la loi de Descartes.

Quel est le vecteur force exercé par le vent sur la voile ?

On pourra introduire le débit $D = \rho \Sigma u \sin \alpha$.

2. Le bateau reçoit le vent par le travers (figure 3.c.), l'axe du bateau est perpendiculaire au vent relatif. Quelle est dans ces conditions, en fonction de ρ , u , Σ et α la composante propulsive de la force précédente ?

3. Pour quelle valeur de α cette composante est-elle maximale ?

De quel type de vent s'agit-il ?

Calculer numériquement la force propulsive maximale avec le même vent qu'en II.6. ($u = 10 \text{ m.s}^{-1}$, $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$) pour une voile de 25 m^2 .

Comparer avec le cylindre de Flettner (le maximum de la fonction $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ vaut 0,385).

Mines ; Durée : 1h30

Corrigé**I.1.a.** Considérons un problème analogue :

Soit un fil infini électrisé avec une densité linéique uniforme λ ; le théorème de Gauss appliqué à un cylindre de rayon r_1 de hauteur h donne $E \cdot 2\pi r_1 h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \vec{u}_{r_1}$.

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ et donc ici on a : $\vec{\text{rot}} \vec{V}_1 = \vec{0}$; il existe donc ϕ_1' tel que $\vec{V}_1 = \vec{\text{grad}} \phi_1'$.

$$\int_B^C \vec{V}_1 d\ell = \int_B^C \vec{\text{grad}} \phi_1' d\ell = \int_B^C d\phi_1' = \phi_1'(C) - \phi_1'(B) \text{ indépendamment du chemin suivi.}$$

b. $d\phi_1' = \vec{\text{grad}} \phi_1' d\vec{A}_1 \vec{M}$ avec $d\vec{A}_1 \vec{M} = dr_1 \vec{u}_{r_1} + r_1 d\theta_1 \vec{u}_{\theta_1}$;

$$d\phi_1' = \frac{\lambda}{2\pi r_1} dr_1 \Rightarrow \phi_1' = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0}.$$

2. L'écoulement étant incompressible : $\text{div } \vec{V}_1 = 0 \Rightarrow \Delta \phi_1' = 0$.

3. \vec{V}_2 est associé au potentiel $\phi_1'' = -\frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_0}$.

$$\phi_1 = \phi_1' + \phi_1'' = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \frac{r_0}{r_0} = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \text{ vu } \phi_1 = 0 \text{ pour } r_1 = r_2.$$

4. $r_1^2 = (\vec{A_1 O} + \vec{OH})^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta = r^2 \left(1 + 2 \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right),$

et au 1^{er} ordre en $\frac{a}{r}$: $r_1 = r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$; en échangeant a et $-a$: $r_2 = r \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$.

$$\frac{r_1}{r_2} = 1 + \frac{2a}{r} \cos \theta ; \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{2a}{r} \cos \theta ; \phi_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{2a}{r} \cos \theta = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{2\pi r}.$$

5. $\vec{\text{grad}} \phi_1 = -\frac{\mathcal{M} \cos \theta}{2\pi r^2} \vec{u}_r - \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{2\pi r^2} \vec{u}_\theta$

Ecrivons que les lignes de courant vérifient $\vec{\text{grad}} \phi_1$ parallèle à $d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$:

$$\frac{dr}{V_r} = \frac{r d\theta}{V_\theta}.$$

$$\frac{dr}{\cos \theta} = \frac{r d\theta}{\sin \theta} \text{ soit } \frac{dr}{r} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta ; \ln \frac{r}{A} = \ln \sin \theta \Rightarrow r = A \sin \theta.$$

C'est un cercle de diamètre A centré sur Oy et passant par

$O \left(\sin \theta = \frac{r}{A} \right)$; on exclura le voisinage de O .

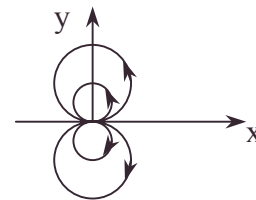
On complète par symétrie.

6.a. Soit $\vec{V}' = \vec{\text{grad}} \phi_1 + u \vec{x}$ car $\vec{x} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$.

$$\vec{V}' = \left[-\frac{\mathcal{M}}{2\pi r^2} + u \right] \cos \theta \vec{u}_r - \left[\frac{\mathcal{M}}{2\pi r^2} + u \right] \sin \theta \vec{u}_\theta \text{ car } \vec{x} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta.$$

L'équation différentielle des lignes de courant déterminée par $\vec{V}' // d\vec{OM}$ satisfait à :

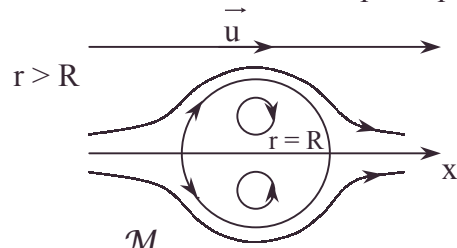
$$\frac{dr}{V_r'} = \frac{r d\theta}{V_\theta'} ; \text{ c'est-à-dire } \frac{dr}{\cos \theta \left[u - \frac{\mathcal{M}}{2\pi r^2} \right]} = \frac{r d\theta}{-\sin \theta \left[u + \frac{\mathcal{M}}{2\pi r^2} \right]}.$$



Marine

Une ligne de courant circulaire d'axe Oz s'écrit $r = R \quad \forall \theta$ soit $dr = 0 \quad \forall \theta$ et $d\theta$; injecté dans l'équation différentielle, le numérateur nul nécessite le dénominateur nul pour que le rapport soit fini $\Rightarrow R = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{2\pi u}}$.

b. L'allure des lignes de courant est intuitive après I.7.



7.a.α. Condition limite : $r \rightarrow \infty$; $\vec{V}' \rightarrow \vec{u}$

β. Condition limite en $r = R$: $\vec{V}_r' = \vec{0}$, vérifiée pour $\frac{\mathcal{M}}{2\pi R^2} = u$.

b. En $r = R$, $V_r' = 0$; $V_\theta' = 0$ pour $V_\theta' = 0$ soit pour $\sin \theta = 0$; $\theta = 0$ ou π .

$$\text{c. } \varphi_t = \varphi_1 + ur \cos \theta = u \cos \theta \left[\frac{R^2}{r} + r \right]$$

$$\Rightarrow V_r = u \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta ; V_\theta = -ru \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right).$$

d. \vec{V}_1 a comme analogue \vec{E}_1 créé par un fil infini placé en A_1 de charge linéique λ constante.

\vec{V}_2 a les mêmes analogies en inversant (cf. $-\lambda$) les lignes passant par A_2 soit \vec{E}_2 .

\vec{u} a comme analogues un champ uniforme \vec{E}_0 .

La superposition $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{u}$ est analogue à $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_0$ sans oublier a petit mais les conditions limites sur le cylindre $R = r$ ne sont pas analogues : $E_r \neq 0$ cf. théorème de Coulomb si on métallise la surface équipotentielle $r = R$ alors que $V_r = 0$.

8.a.c. Considérons un problème analogue :

Soit un fil électrique infini rectiligne parcouru par une intensité I ;

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta ; \text{rot } \vec{B} = \vec{0} \text{ sauf sur le fil.}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{V}_3 = \vec{0} \Rightarrow \text{il existe } \varphi_3 \text{ tel que } \text{grad } \varphi_3 = \vec{V}_3.$$

$$\text{b. } \oint_\Gamma \vec{V}_3 d\vec{\ell} = \iint_\Sigma \text{rot } \vec{V}_3 d\vec{S}.$$

• Si Γ n'entoure pas l'origine :

$$\text{rot } \vec{V}_3 = 0 \quad \forall d\vec{S} ; \oint \vec{V}_3 d\vec{\ell} = \oint \text{grad } \varphi_3 d\vec{\ell} = \varphi_3(A) - \varphi_3(A) = 0.$$

• Si Γ entoure l'origine :

calculons $\iint_\Sigma \text{rot } \vec{V}_3 d\vec{S}$ par l'intermédiaire d'une courbe Γ_1 circulaire de rayon r , entourant

$$\text{l'origine : } \oint_{\Gamma_1} \vec{V}_3 d\vec{\ell} = \int_\Gamma \frac{C d\ell}{2\pi r} = C.$$

II.1. $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_3$; si $\vec{V}' = \vec{0}$, $\vec{V} = \vec{V}_3$ cf. I.7.b.

Par continuité de \vec{V} (couche limite) : $\frac{C}{2\pi R} \vec{u}_\theta = \omega R \vec{u}_\theta$; $C = 2\pi R^2 \omega$.

$$\text{2. } \vec{V} = u \left[1 - \frac{R^2}{r^2} \right] \cos \theta \vec{u}_r + \left[\frac{R^2}{r} \omega - u \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \right] \vec{u}_\theta.$$

• analogie, condition limite, fil, symétrie

3. Appliquons la formule de Bernoulli le long d'une ligne de courant partant de l'infini

et aboutissant sur le cylindre : $p_0 + \frac{\rho}{2} u^2 = P(\theta) + \frac{\rho}{2} V_\theta^2(R)$.

$$V_\theta^2(R) = [R\omega - 2u \sin \theta]^2 = R^2 \omega^2 + 4u^2 \sin^2 \theta - \underbrace{4uR\omega \sin \theta}_{\text{terme de couplage}}.$$

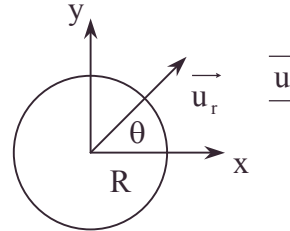
$$P(\theta) = P_0 + \frac{\rho}{2} (u^2 - R^2 \omega^2) + 2\rho u R \omega \sin \theta - 2\rho u^2 \sin^2 \theta.$$

4. $d\vec{F} = -P(\theta) dS \vec{u}_r$ avec $dS = hR d\theta$.

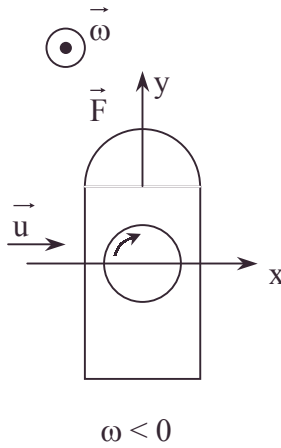
$$dF_x = -P(\theta) hR \cos \theta d\theta ; dF_y = -P(\theta) hR \sin \theta d\theta ; \theta \text{ variant de } 0 \text{ à } 2\pi.$$

On trouve $F_x = 0$; $F_y = -2\pi h R^2 \rho u \omega = -C_p u h$.

$$\vec{F} = \vec{u} \wedge h C_p \vec{z} = \vec{u} \wedge 2\pi h R^2 \rho \vec{\omega} \text{ avec } h = 1 \text{ m}.$$

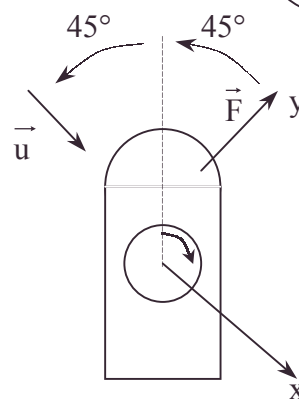


5.

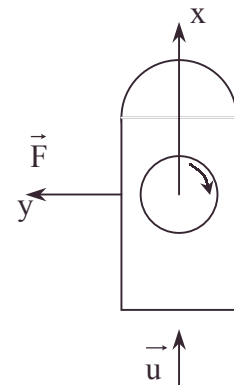


$$\omega < 0$$

vent de travers



vent de près

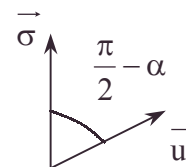
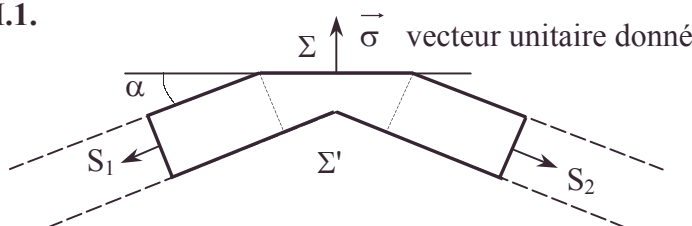


vent arrière

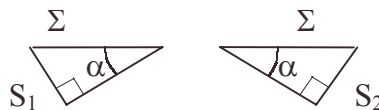
Le vent de travers est donc l'allure de vent la plus favorable.

6. Au travers : $F_{\max} = 2205 \text{ N}$.

III.1.



Soit une surface Σ' fermée (tube de champ formé sur S_1, S_2, Σ) ;
vu les triangles



$S_1 = S_2 = \Sigma \sin \alpha$; la formule d'Euler appliquée au système défini par Σ' en régime permanent s'écrit :

$$-\vec{F} = \iint_{\Sigma} \vec{V} \mu \vec{V} dS ; \text{ par symétrie, } \vec{F} = 2 Du \sin \alpha \vec{\sigma} = 2 \rho \Sigma u^2 \sin^2 \alpha \vec{\sigma} .$$

2. Projetons $\vec{\sigma}$ sur y : $\sigma_y = \cos \alpha$ (figure ci-contre).

$$F_y = 2 \rho \Sigma u^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha .$$

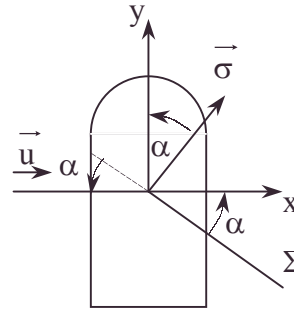
$$3. \frac{dF_y}{d\alpha} = 2 \rho \Sigma u^2 \sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) ;$$

on a un maximum pour $\tan \alpha = \sqrt{2}$ soit $\alpha = 54,7^\circ$, soit un vent de travers.

$$F_{y \max} = 2 \rho \Sigma u^2 0,385 ; \text{ A.N. : } F_{y \max} = 2502,5 \text{ N} .$$

$$F_{y \max}^{\text{voile classique}} = 1,13 F_{y \max}^{\text{voile Flettner}} ; F_{y \max}^{\text{voile classique}} > F_{y \max}^{\text{voile Flettner}}$$

ces forces sont néanmoins comparables mais les aires exposées au vent et les coûts de construction, d'entretien ne sont pas les mêmes.



3.3.3.3. Planche à voile

Les différentes parties sont largement indépendantes, à condition d'utiliser les résultats fournis par l'énoncé.

$$\text{Formulaire : } \vec{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} ;$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} ;$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} ;$$

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_2 = (\vec{V}_1 \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{V}_2 = V_{1x} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{V}_2) + V_{1y} \frac{\partial}{\partial y} (\vec{V}_2) + V_{1z} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{V}_2) ;$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} .$$

Écoulement d'un fluide autour d'un obstacle en mouvement

Dans cette partie, on considère un référentiel galiléen \mathcal{R}_g dans lequel un fluide parfait, compressible ou non, de masse volumique μ est initialement au repos. On néglige les effets de la pesanteur, si bien que les seules forces qui interviendront sur le fluide seront des forces de pression.

Un obstacle cylindrique \mathcal{C} , auquel est lié un trièdre direct Oxyz, d'axe Oz et de dimension infinie selon cet axe, se déplace à vitesse constante $\vec{V}_0 = V_0 \vec{i}$ selon l'axe Ox ($V_0 > 0$).

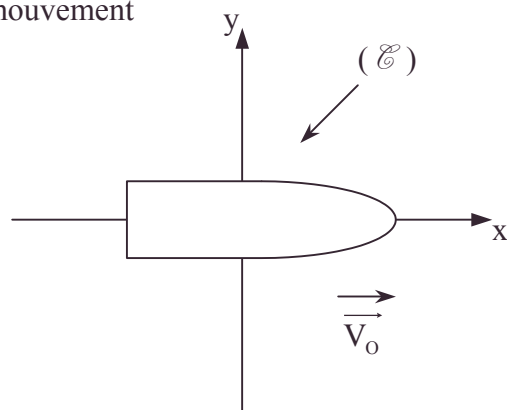


Figure 1

Il est défini par sa section droite dans le plan xOy par une relation du type $f(x, y) = 0$ (figure 1). On appelle \mathcal{R} le référentiel lié à l'obstacle et sauf indication contraire, les calculs seront menés dans ce référentiel. Dans ce référentiel, l'écoulement du fluide sera supposé stationnaire (c'est-à-dire indépendant du temps) et plan (c'est-à-dire indépendant de la coordonnée z).

Notations :

- formulaire d'analyse vectorielle, maximum, surface de contrôle, symétrie, théorème d'Euler, voile

$P(x, y) = P_0 + p(x, y)$: P pression du fluide au point $M(x, y)$, p_0 pression du fluide en l'absence d'obstacle, p surpression.

$\vec{V}(x, y) = \vec{w}(x, y) - \vec{V}_0$: \vec{V} vitesse du fluide au point $M(x, y)$ dans le référentiel

\mathcal{R} . On posera $\vec{w} = u\vec{i} + v\vec{j}$.

$\mu(x, y) = \mu_0 + \Delta\mu(x, y)$: μ masse volumique du fluide, μ_0 masse volumique du fluide en l'absence d'obstacle.

χ_s : coefficient de compressibilité isentropique du fluide.

\vec{F} : résultante des forces de pression exercées par le fluide sur la longueur L (selon Oz) de cylindre. On posera $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ (\vec{T} colinéaire à \vec{V}_0 appelée traînée, \vec{P} orthogonale à \vec{V}_0 appelée portance).

I. Conditions aux limites

1. Soit \vec{n} le vecteur normal à la surface de l'obstacle en un point $M_0(x_0, y_0)$ de cette surface. Quelle relation relie \vec{V}_0, \vec{w} et \vec{n} au point M_0 ?

2. Justifier le fait que pour x ou y tendant vers $\pm\infty$, $p, \Delta\mu, \vec{w}$ tendent vers 0.

II. Equations de l'écoulement peu perturbé

On suppose que les fonctions $p, u, v, \Delta\mu$ sont suffisamment petites, pour pouvoir négliger tout terme d'ordre supérieur ou égal à 2, faisant intervenir toute combinaison de ces variables ou de leurs dérivées (écoulement peu perturbé).

3. Donner trois équations scalaires déduites de l'équation d'Euler :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} \right) = -\text{grad } P,$$

et de l'équation de conservation de la matière : $\text{div}(\mu \vec{V}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$.

4. En déduire que $p = \mu_0 V_0 u$.

5.a. Donner l'équation à l'ordre 1 reliant $\Delta\mu$ à p , dans l'hypothèse où le fluide évolue isentropiquement à partir de l'état non perturbé du fait de la présence de l'obstacle.

b. On appelle C_0 la grandeur définie par $C_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$.

α. Montrer que C_0 est homogène à une vitesse.

β. Que vaut C_0 pour un fluide incompressible ?

γ. On suppose que le fluide est un gaz parfait de coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, de masse

molaire M , de température (dans l'état non perturbé) T_0 . Explicitez χ_s en fonction de P_0 et γ , puis C_0 en fonction de γ, T_0, M, R (constante des gaz parfaits).

δ. Application numérique :

$M = 29 \text{ g/mol}$; $T_0 = 298 \text{ K}$; $\gamma = 1,4$; $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}/\text{mol}$.

Calculer C_0 .

c.α. En déduire la relation reliant $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, et $\mathcal{M} = \frac{V_0}{C_0}$.

β. Pourquoi peut-on affirmer qu'un écoulement dans l'air avec une vitesse V_0 de 100 km/h est incompressible ?

III. Ecoulement peu perturbé incompressible

On se place dans le cadre de l'écoulement peu perturbé, pour un fluide incompressible.

6.a. Montrer que l'écoulement est irrotationnel.

b. Retrouver le résultat de 4. à l'aide du théorème de Bernoulli.

7. On considère une surface cylindrique \mathcal{S} de trace Σ dans le plan xOy , entourant l'obstacle et de hauteur L , selon Oz (figure 2). En faisant un bilan de quantité de mouvement pour le fluide compris dans le volume limité par la surface \mathcal{S} et l'obstacle \mathcal{E} ,

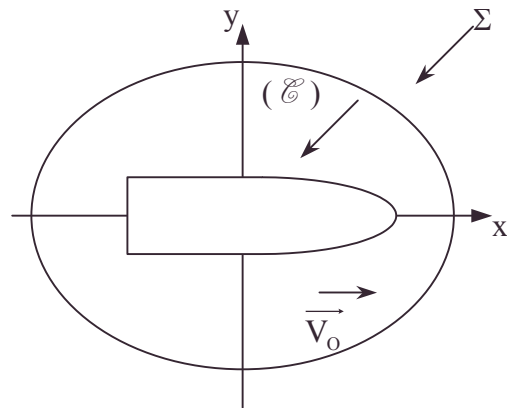


Figure 2

montrer que le fluide exerce sur la longueur L de l'obstacle une force \vec{F} donnée par :

$$\vec{F} = \mu_0 \left(\iint_{\mathcal{S}} \vec{w} (\vec{V}_0 \cdot d\vec{S}) - \iint_{\mathcal{S}} (\vec{V}_0 \cdot \vec{w}) d\vec{S} \right).$$

On pourra utiliser le fait que $p = \mu_0 \vec{V}_0 \cdot \vec{w}$.

8.a. Exprimer l'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} \vec{w} \wedge d\vec{S}$ en fonction de L et $\vec{C} = C\vec{k}$. (\vec{k} vecteur unitaire de l'axe Oz et C circulation de \vec{w} sur le contour Σ orienté par \vec{k}).

b.α. En déduire que $\vec{F} = -\mu_0 L \vec{V}_0 \wedge \vec{C}$.

β. Montrer que la traînée est nulle. L'expérience ne confirme pas ce résultat : comment peut-on lever ce paradoxe ?

9. Montrer que l'expression obtenue en 8.b. est aussi valable dans le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'un obstacle et en supposant que la perturbation créée par l'obstacle n'est négligeable qu'à grande distance de celui-ci. (Ce résultat est le théorème de Kutta-Joukowski).

IV. Ecoulement incompressible autour d'une plaque rectangulaire

L'obstacle est une plaque rectangulaire, de largeur 2ℓ , de longueur infinie selon Oz , centrée en O et faisant un angle α avec l'axe Ox (figure 3). On utilise un repère de projection $x'Oy'$, Ox' faisant un angle α avec Ox . La vitesse du fluide \vec{w} s'écrit alors $\vec{w} = u'\vec{i}' + v'\vec{j}'$.

On utilise la représentation complexe du plan $x'Oy'$ en posant $\delta = x' + iy'$ et $\varphi = u' - iv'$ ($i^2 = -1$).

10. On considère le champ de vitesse donné par : $\varphi_1 = \frac{iV_0\ell}{\delta - \ell}$.

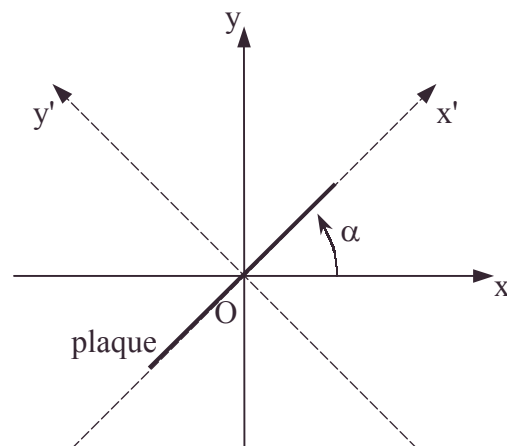


Figure 3

a. En utilisant une analogie avec le cours d'électromagnétisme, montrer que ce champ de vitesse correspond à un écoulement incompressible et irrotationnel (sauf en $\delta = \ell$).

b. Montrer que pour ce champ de vitesse, la vitesse sur le cercle de rayon ℓ et de centre O a une composante constante sur la direction Oy' .

On étudie le champ des vitesses défini par $\varphi = -\frac{2iV_0\ell \sin \alpha}{\delta - \ell}$ avec $\delta = x' + iy'$ et z' défini

par $2\delta = z' + \frac{\ell^2}{z'}$ et $|z'| > \ell$.

On admettra sans démonstration les résultats suivants :

- φ correspond à un écoulement incompressible en tout point.
- Dans tout l'espace, excepté le segment de longueur 2ℓ centré en O et selon l'axe Ox' :
 - φ correspond à un écoulement irrotationnel.
 - la relation entre $(X' Y')$ et (x', y') est bijective. (pour s'en convaincre il suffit

d'étudier l'équation du second degré vérifiée par z' : $2\delta = z' + \frac{\ell^2}{z'}$).

11.a.α. Déterminer x' et y' pour $z' = \ell(1 + \varepsilon)e^{i\theta}$ avec $\varepsilon \ll 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

β. Même question pour $z = re^{i\theta}$ avec $r \gg \ell$.

b. En déduire que l'écoulement ainsi défini vérifie bien les conditions aux limites imposées par le problème de l'obstacle rectangulaire.

12.a. Calculer les composantes de u' et v' de \vec{w} au niveau de la plaque. On distinguera la surface supérieure ($y' \rightarrow 0^+$) de la surface inférieure ($y' \rightarrow 0^-$). On pourra utiliser le paramètre θ défini par $x' = \ell \cos \theta$.

b. En déduire la pression ($p^- - p^+$) entre un point infiniment proche de la face inférieure ($y' \rightarrow 0^-$) de la plaque et un point infiniment proche de la face supérieure ($y' \rightarrow 0^+$) de la plaque, de même abscisse x' . Exprimer ce résultat en fonction de θ (avec $0 \leq \theta < \pi$).

c. Peut-on, par une intégration sur la surface de la plaque, en déduire la force qu'exerce le fluide sur la plaque ? Commenter.

13.a. Calculer \vec{w} à grande distance de la plaque. (On pourra utiliser les coordonnées polaires).

b. En déduire la circulation C de \vec{w} sur un cercle de centre O et de rayon $R \gg \ell$.

c. Calculer à l'aide de **8.b.**, la portance et la traînée correspondant à cet écoulement. Commenter.

14. En assimilant une voile de planche à voile à une surface de 6 m^2 d'un obstacle du type étudié ici, calculer la force de poussée exercée par un vent relatif (c'est-à-dire étudié dans le référentiel de la planche) de 36 km/h , faisant un angle de 10° avec la voile. On prendra $\mu_o = 1,3 \text{ g/l}$.

Conclusion.

A. Etude élémentaire du mouvement d'une planche à voile

Un ensemble planche à voile, véliplanchiste peut être assimilé à un système de masse m soumis à son poids, à une réaction de l'eau au niveau du flotteur et une poussée vélique au niveau de la voile.

Notation : \vec{V}_p vitesse de la planche dans le référentiel terrestre.

\vec{V}_a vitesse de l'air (vent absolu) dans le référentiel terrestre.

\vec{V} vitesse de l'air (vent relatif) dans le référentiel lié à la planche.

μ_a masse volumique de l'air, μ_e masse volumique de l'eau.

- analogie, condition limite, force portante, planche à voile, portance, poussée, traînée, voile

On suppose \vec{V}_p et \vec{V}_a orthogonales (allure de "largue") et on note $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère lié à la planche tel que \vec{V}_p est selon \vec{i} , \vec{V}_a selon \vec{j} et \vec{k} selon la verticale montante (figure 4). On suppose de plus que la vitesse de la planche est constante.

Pour des applications numériques, on prendra : $g = 10 \text{ m/s}^2$, $M = 80 \text{ kg}$.

$|\vec{V}_a| = 36 \text{ km/h}$ ("bon" force 5 sur l'échelle de Beaufort : vagues modérées, moutons, embruns).

On suppose que les fluides eau et air sont parfaits si bien que les actions de l'eau et du vent sur la planche peuvent se traduire approximativement de la façon suivante :

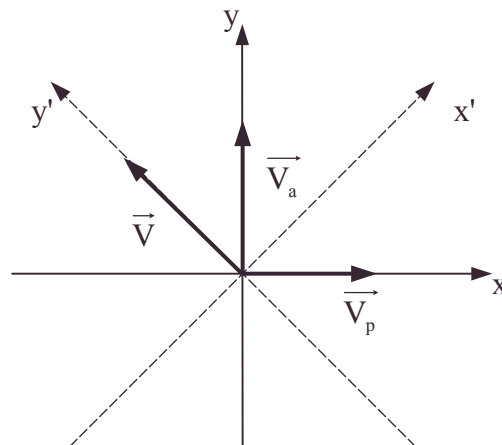


Figure 4

- Pour l'eau, $\vec{F}_e = -T_e \vec{i} + P_e \vec{k} - \pi_e \vec{j}$ avec $P_e = k_e L V_p^2 + \mu_e g V_{\text{immergé}}$ (L = longueur de flotteur en contact avec l'eau, $V_{\text{immergé}}$ = volume de flotteur immergé), $T_e = k'_e L V_p^2$, k_e et k'_e sont des termes constants dépendant de la forme du flotteur.

- Pour l'air $\vec{F}_a = P'_a \vec{i}' + T'_a \vec{j}'$ (\vec{j}' vecteur unitaire colinéaire au vent relatif, \vec{i}' vecteur orthogonal à \vec{j}' dans le plan xy tel que $\vec{i}' \cdot \vec{j}' > 0$ avec : $P'_a = k_a V^2$ et $T'_a = k_a \frac{V^2}{f}$ où f est une constante sans dimension appelée finesse de la voile caractéristique de la forme de la voile (en particulier f augmente quand le rapport hauteur de voile sur largeur de voile augmente) et k_a une constante.

15. Quelle justification peut-on donner aux termes P'_a , P_e et π_e ?

16. Montrer que si la vitesse de la planche est suffisante, T_e prend une valeur indépendante de V_a que l'on explicitera en fonction de k_e , k'_e , M et g . On supposera que cette condition est réalisée dans toute la suite.

17.a. Expliciter $\vec{F}_a = P'_a \vec{i}' + D'_a \vec{j}'$ en fonction de k_a , f , V_a , V_p .

b. Etudier $P_a = f(x)$ où $x = V_p / V_a$ pour une finesse $f = 3$ et un coefficient $k_a = 2,5$ unité SI. Représenter l'allure de la fonction $f(x)$.

c. En déduire l'ordre de grandeur de la vitesse V_p de la planche pour $\frac{k'_e}{k_e} = 0,2$.

Calculer pour cette valeur de vitesse la norme F_a de \vec{F}_a . Que penser de ces résultats numériques ?

d. Par quelle méthode peut-on compenser le terme de dérive D_a ?

18. Quels autres phénomènes peuvent limiter la vitesse de la planche ?

Centrale ; Durée : 4h

Corrigé

I.1. Dans \mathcal{R} , l'obstacle est fixe, l'écoulement est tangentiel :

- constante sans dimension de finesse de voile, dérive d'un point, dérive marine, échelle de Beaufort des vents, graphe, mouvement de dérive d'un point, ordre de grandeur, voile

$$\vec{V}(M_o) \cdot \vec{n} = 0 \text{ soit } \vec{w} \cdot \vec{n} = \vec{V}_o \cdot \vec{n}.$$

2. Loin de l'obstacle, le fluide n'est plus perturbé :

$$x, y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow p \rightarrow 0 ; \Delta\mu \rightarrow 0 ; w \rightarrow 0.$$

II.3.a. L'équation d'Euler s'écrit :

$$(\mu_o + \Delta\mu) \left[(\vec{w} - \vec{V}_o) \cdot \vec{\text{grad}} \right] (\vec{w} - \vec{V}_o) = -\vec{\text{grad}}(P_o + p), \text{ soit en mettant à part les termes d'ordre 0 : } (\mu_o + \Delta\mu) \left[(\vec{w} - \vec{V}_o) \cdot \vec{\text{grad}} \right] \vec{w} = -\vec{\text{grad}} p.$$

$$\text{Au second ordre près, on a : } -\mu_o (\vec{V}_o \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{w} = -\vec{\text{grad}} p ;$$

$$\mu_o V_o \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \text{ (1)} ; \mu_o V_o \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \text{ (2)}.$$

$$V_o \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0, \text{ l'équation de conservation } \text{div}[(\mu_o + \Delta\mu)(\vec{w} - \vec{V}_o)] = 0 \text{ s'écrit au second}$$

$$\text{ordre près : } \mu_o \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = V_o \frac{\partial(\Delta\mu)}{\partial x} \text{ (3)}.$$

4. (1) implique par intégration $\mu_o V_o u = p + g(y)$; or pour $x \rightarrow +\infty$, on a : $u \rightarrow 0, p \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \forall y \quad g(y) = 0 ; p = \mu_o V_o u \text{ (4)}.$$

5.a. La conservation de la masse $m = \mu V$ permet d'écrire : $\frac{\partial \ln m}{\partial P} = 0$ soit

$$0 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s \Rightarrow \chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s,$$

$$\text{soit } \chi_s \neq \frac{1}{\mu_o} \frac{\Delta\mu}{p}, p \text{ étant la variation de pression} \Rightarrow \Delta\mu = \mu_o \chi_s p \text{ (5)}$$

b.α. On rappelle les unités de : $\chi_s : \text{Pa}^{-1} = \text{kg}^{-1} \text{m.s}^{-2}$ et de $\mu_o = \text{kg.m}^{-3}$.

$$F = \text{kg.m.s}^{-2} = p_a \text{m}^2. \text{ L'unité de } C_o^2 \text{ est donc } \text{m}^2 \text{.s}^{-2} \text{ c.q.f.d.}$$

β. Pour un fluide incompressible : $\chi_s \rightarrow 0 ; C_o \rightarrow +\infty$.

γ. Pour un gaz parfait en écoulement isentropique $PV^\gamma = \text{cste}$ s'écrit :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0, \chi_s = \frac{1}{\gamma P_o} \Rightarrow C_o = \sqrt{\frac{\gamma R T_o}{M}}.$$

$$\delta. \text{AN : } C_o = 345,97 \text{ ms}^{-1} \text{ car } M = 29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}.$$

$$\text{c.α. (3) et (5)} \Rightarrow \mu_o \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = V_o \mu_o \chi_s \frac{\partial p}{\partial x} = \mu_o^2 V_o^2 \chi_s \frac{\partial u}{\partial x} \text{ vu (1)} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(1 - \frac{V_o^2}{C_o^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \text{ En posant } \mathcal{M} = \frac{V_o}{C_o} \text{ (cf. nombre de Mach), il vient}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} (1 - \mathcal{M}^2) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\beta. \text{AN : } V_o = 27,78 \text{ m.s}^{-1} ; \mathcal{M}^2 = 6,5.10^{-3} \ll 1 \text{ d'où } \text{div } \vec{w} \neq 0.$$

On peut considérer que l'écoulement est incompressible.

$$\text{III.6.a. } \vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\text{rot}} \vec{w} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu_o v_o} \frac{\partial p}{\partial y} ; (4) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu_o v_o} \frac{\partial p}{\partial y} ; \vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} .$$

b. La relation de Bernoulli est valable dans \mathcal{R} car l'écoulement est stationnaire et irrotationnel, le fluide étant parfait. On néglige la pesanteur :

$$P + \frac{1}{2} \mu_o V^2 = \text{cste} = P_o + \frac{1}{2} \mu_o V_o^2 \text{ à l'infini.}$$

$$P_o + p + \frac{1}{2} \mu_o [(u - V_o)^2 + v^2] = P_o + \frac{1}{2} \mu_o V_o^2 \Rightarrow p = \mu_o V_o u \text{ au second ordre près.}$$

7. On fait le bilan de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans le volume de contrôle limité par (\mathcal{S}) et (\mathcal{C}) .

$$\underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\mu_o \vec{V}) dt}_{=0 \text{ écoulement permanent}} + \iint_{\mathcal{C}+\mathcal{S}} \mu_o \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = -\vec{F} - \iint_{\mathcal{S}} P d\vec{S} ; P = P_o + p .$$

$$\text{Sur la surface } \mathcal{C} : (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = 0 .$$

$$\text{Il reste donc : } \vec{F} = -\mu_o \iint_{\mathcal{S}} \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{S}) - \iint_{\mathcal{S}} P d\vec{S} .$$

$$\text{On sait que : } \vec{V} = \vec{w} - \vec{V}_o$$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \vec{w} (\vec{w} \cdot d\vec{S}) - \vec{V}_o \iint_{\mathcal{S}} \vec{w} \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathcal{S}} \vec{w} (\vec{V}_o \cdot d\vec{S}) + \vec{V}_o \iint_{\mathcal{S}} \vec{V}_o \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{V}_o \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} (\text{div } \vec{V}_o) d\tau = 0 \text{ et } \iint_{\mathcal{S}} \vec{w} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} (\text{div } \vec{w}) d\tau = 0 \text{ car l'écoulement est}$$

incompressible dans \mathcal{R} aussi. D'autre part, $\iint_{\mathcal{S}} \vec{w} (\vec{w} \cdot d\vec{S})$ est négligeable car d'ordre 2.

$$\text{Il reste : } \iint_{\mathcal{S}} \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = -\iint_{\mathcal{S}} \vec{w} (\vec{V}_o \cdot d\vec{S}) .$$

$$\iint_{\mathcal{S}} P d\vec{S} = \underbrace{P_o \iint_{\mathcal{S}} d\vec{S}}_{=0} + \iint_{\mathcal{S}} p d\vec{S} ; p = \mu_o \vec{V}_o \cdot \vec{w} \Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} P d\vec{S} = \mu_o \iint_{\mathcal{S}} (\vec{V}_o \cdot \vec{w}) d\vec{S} .$$

$$\text{Finalement : } \vec{F} = \mu_o \left(\iint_{\mathcal{S}} \vec{w} (\vec{V}_o \cdot d\vec{S}) - \iint_{\mathcal{S}} (\vec{V}_o \cdot \vec{w}) d\vec{S} \right) .$$

$$\mathbf{8.a.} \quad d\vec{S} = d\vec{\ell} \wedge d\vec{z} .$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{w} \wedge d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{w} \wedge (d\vec{\ell} \wedge d\vec{z}) = \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{(\vec{w} \cdot d\vec{z})}_{=0} d\vec{\ell} - \iint_{\mathcal{S}} (\vec{w} \cdot d\vec{\ell}) d\vec{z} ;$$

En intégrant en $d\vec{z}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{w} \wedge d\vec{S} = -L \oint_{\Sigma} (\vec{w} \cdot d\vec{\ell}) \vec{k} \Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} \vec{w} \wedge d\vec{S} = -L C \vec{k} = -L \vec{C} .$$

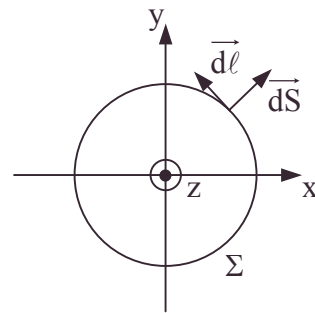
b.α. De **7.**, vu l'expression du double produit vectoriel donnée au début, l'expression de \vec{F} peut s'écrire :

$$\vec{F} = \mu_o \iint_{\mathcal{S}} \vec{V}_o \wedge (\vec{w} \wedge d\vec{S}) = \mu_o \vec{V}_o \wedge \iint_{\mathcal{S}} (\vec{w} \wedge d\vec{S}) \Rightarrow \vec{F} = -\mu_o L \vec{V}_o \wedge \vec{C} .$$

β. $\vec{F} \perp \vec{V}_o$, la traînée \vec{T} est nulle. Il faut considérer la viscosité du fluide pour lever le paradoxe.

9. Pour le calcul de \vec{F} , on a fait les hypothèses suivantes :

- fluide parfait, écoulement stationnaire ;
- w négligeable sur (\mathcal{S}) , c'est-à-dire écoulement peu perturbé sur (\mathcal{S}) .



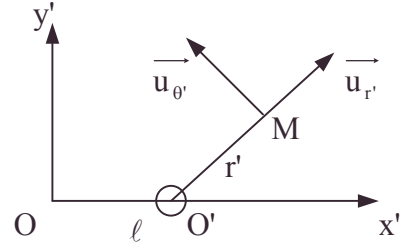
Il suffit donc de prendre une surface (\mathcal{S}) de grandes dimensions par rapport à l'obstacle, là où w peut être négligée et l'expression **8.b.** reste valable.

$$\text{IV.10.a. } \varphi_1 = \frac{iV_0\ell}{\delta - \ell} = \frac{iV_0\ell}{(x' - \ell) + iy'} = \frac{iV_0\ell[x' - \ell - iy']}{(x' - \ell)^2 + y'^2} = \frac{V_0\ell y'}{(x' - \ell)^2 + y'^2} + \frac{iV_0\ell(x' - \ell)}{(x' - \ell)^2 + y'^2}$$

et $\varphi = u' - i v'$ soit :

$$u' = \frac{V_0\ell y'}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \frac{1}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} ;$$

$$v' = \frac{-V_0\ell(x' - \ell)}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \frac{1}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} .$$



Considérons le champ magnétique créé par un fil infini colinéaire à z placé en $x' = \ell$ avec $r' = \sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}$; $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} \vec{u}_{\theta'}$

$$\vec{u}_{r'} \begin{vmatrix} \frac{x' - \ell}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \\ \frac{y'}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{u}_0 \begin{vmatrix} \frac{y'}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \\ -\frac{(x' - \ell)}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \end{vmatrix} ; \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \frac{y'}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}} \frac{(x' - \ell)}{\sqrt{(x' - \ell)^2 + y'^2}}$$

$\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ est analogue à $V_0\ell$. Par analogie, \vec{w} aura les mêmes propriétés que \vec{B} en

magnétostatique. Soit $\text{div } \vec{w} = 0$ et $\text{rot } \vec{w} = \vec{0}$ (sauf en $\delta = \ell$), cf. $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

$$\text{b. Sur le cercle } x'^2 + y'^2 = \ell^2 : v' = \frac{-V_0\ell(x' - \ell)}{\ell^2 + \ell^2 - 2x'\ell} = \frac{+V_0\ell(x' - \ell)}{2\ell(x' - \ell)} = \frac{V_0}{2} = \text{cste} .$$

$$\text{11.a.}\alpha. z' = \ell(1 + \varepsilon)e^{i\theta} \quad \varepsilon \ll 1 \quad \varepsilon \text{ est donc réel.}$$

$$2\delta = z' + \frac{\ell^2}{z'} = \ell \left[(1 + \varepsilon)e^{i\theta} + (1 - \varepsilon)e^{-i\theta} \right] .$$

$$2\delta \# 2\ell \cos \theta + 2i\ell \varepsilon \sin \theta \Rightarrow x' = \ell \cos \theta ; y' = \ell \varepsilon \sin \theta .$$

$$\beta. z' = re^{i\theta} ; 2\delta = re^{i\theta} + \frac{\ell^2}{re^{i\theta}} \# re^{i\theta} \text{ car } r \gg \ell ; \delta = x' + iy' = \frac{r}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Rightarrow x' = \frac{r}{2} \cos \theta ; y' = \frac{r}{2} \sin \theta .$$

$$\text{b.}\alpha. \text{ A l'infini, } z' = re^{i\theta} \text{ et } \varphi = -\frac{2iV_0\ell \sin \alpha}{re^{i\theta} - \ell} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 .$$

Donc, $u' \rightarrow 0, v' \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$; il est normal qu'il n'y ait plus influence de la plaque.

Les conditions limites sont vérifiées à l'infini.

β . Au voisinage de la plaque, $x' = \ell \cos \theta$ $y' \neq 0$ soit $\varepsilon \neq 0 \Rightarrow z' \neq \ell e^{i\theta}$ donc :

$$\varphi \# \frac{-2iV_0\ell \sin \alpha}{e^{i\theta} - 1} = \frac{-iV_0\ell \sin \alpha(e^{-i\theta} - 1)}{1 - \cos \theta} = \frac{V_0\ell \sin \alpha}{1 - \cos \theta} (-\sin \theta - i(\cos \theta - 1)) = u' - i v' .$$

Donc sur la plaque,

$$v' = -V_0 \sin \alpha = \vec{V}_0 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{n} = (u' \vec{i} + v' \vec{j} - \vec{V}_0) \cdot \vec{n} = 0 \text{ car } \vec{n} = \pm \vec{j} \text{ et } \vec{i} \perp \vec{n} .$$

Les conditions sont vérifiées sur l'obstacle.

• analogie, condition limite, développement au premier ordre ou plus, fil équilibre, force portante, portance, poussée d'Archimède, théorème de Bernoulli, traînée, turbulence, viscosité, voile

12.a. On sait que $\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$; $\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$.

Au niveau de la plaque : $u' = -V_o \sin \alpha \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = -V_o \sin \alpha \cotan \left(\frac{\theta}{2} \right)$; $v' = -V_o \sin \alpha$.

La surface supérieure correspond physiquement à $u' < 0$ soit $0 < \theta < \pi$;

La surface inférieure correspond physiquement à $u' > 0$ soit $-\pi < \theta < 0$.

b. $p = \mu_o \vec{V}_o \cdot \vec{w}$ (cf. II.4.) or, $\vec{V}_o = V_o \cos \alpha \vec{i}' - V_o \sin \alpha \vec{j}'$,

$$\Rightarrow \begin{aligned} p^+ &= \mu_o V_o^2 \left(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \cotan \frac{\theta}{2} \right) \\ p^- &= \mu_o V_o^2 \left(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \cotan \frac{\theta'}{2} \right), \text{ avec } \theta' = -\theta. \end{aligned}$$

On tire : $p^- - p^+ = \mu_o V_o^2 \sin 2\alpha \cotan \frac{\theta}{2}$ (θ variant de 0 à π).

c. $\vec{F} = \iint (p^- - p^+) dS \vec{j}' = \int_0^\pi (p^- - p^+) \vec{j}' L \sin \theta d\theta = \pi L \mu_o V_o^2 \sin 2\alpha \vec{j}'$;

pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on trouve une traînée nulle, ce qui est absurde. L'erreur vient du fait que le théorème de Bernoulli n'est pas applicable en $\theta = 0(\pi)$ ($\vec{\text{rot}} \vec{V} \neq \vec{0}$) aux extrémités de la plaque (effet de bord).

13.a. A grande distance " ℓ s'efface devant z " :

$$\varphi = -\frac{2iV_o \ell \sin \alpha}{re^{i\theta}} = \frac{2V_o \ell \sin \alpha}{r} (-\sin \theta - i \cos \theta).$$

$$\vec{w} \begin{cases} u' = \frac{-2V_o \ell \sin \alpha}{r} \sin \theta \\ v' = \frac{2V_o \ell \sin \alpha}{r} \cos \theta \end{cases}$$

b. Le cercle de rayon R est représenté par $\delta = Re^{i\theta}$, d'où :

$$2\delta = 2Re^{i\theta} = z' + \underbrace{\frac{\ell^2}{z'}}_{\neq 0} \# re^{i\theta} \text{ car } \left| \frac{\ell^2}{z'} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow r = 2R,$$

$$\text{or } \vec{u}_\theta \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{w} = \frac{V_o \ell \sin \alpha}{R} \vec{u}_\theta \Rightarrow C = 2\pi V_o \ell \sin \alpha.$$

c.8.b. $\Rightarrow \vec{F} = 2\pi \mu_o V_o \ell L \sin \alpha \vec{j} \Rightarrow \vec{\mathcal{P}} = \vec{F}$, la portance ; $\vec{T} = \vec{0}$, la traînée.

La turbulence et la viscosité du fluide créeront une traînée non nulle.

14. $S = 2 \ell L$; $F = \pi \mu_o V_o S \sin \alpha$; A.N. : $V_o = 10 \text{ m.s}^{-1}$; $F = 425,5 \text{ N}$ force honorable ni extrêmement forte, ni faible correspondant à un poids d'enfant.

B. Planche à voile

15. $\mu_e g V_{\text{immergé}}$: poussée d'Archimède due à l'eau.

$P_e = k_e L V_p^2$: portance due à l'eau selon \vec{k} .

P'_a : traînée due à l'air selon \vec{i} .

π_e : traînée due à l'eau selon \vec{j} .

16. Si V_p est suffisante, $P_e = k_e L V_p^2$ où P_e équilibre le poids $Mg \Rightarrow V_p^2 = \frac{Mg}{k_e L}$;

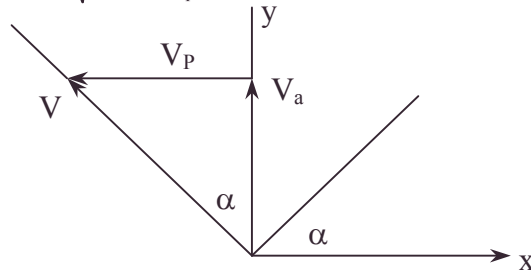
d'où : $T_e = \frac{k'_e}{k_e} Mg$ indépendant de V_a .

17.a. En projetant $\vec{F} = P'_a \vec{i} + T'_a \vec{j}$ sur \vec{i}, \vec{j} , on obtient : $P_a = P'_a \cos \alpha - T'_a \sin \alpha$;
 $D_a = P'_a \sin \alpha + T'_a \cos \alpha$.

vu la figure, $\cos \alpha = \frac{V_a}{\sqrt{V_a^2 + V_p^2}}$; $\sin \alpha = \frac{V_p}{\sqrt{V_a^2 + V_p^2}}$; $V = \sqrt{V_a^2 + V_p^2}$;

$$P_a = k_a \sqrt{V_a^2 + V_p^2} \left(V_a - \frac{V_p}{f} \right) ;$$

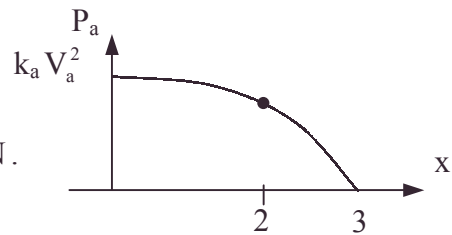
$$D_a = k_a \sqrt{V_a^2 + V_p^2} \left(V_p + \frac{V_a}{f} \right)$$



b. $P_a = k_a V_a^2 \sqrt{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{f} \right) ;$

$P_a \neq k_a V_a^2$ pour $x \neq 0$.

c.α. A.N. : $T_e = \frac{k'_e}{k_e} Mg$; $T_e = 160 \text{ N}$; $k_a V_a^2 = 250 \text{ N}$.



Le mouvement étant uniforme, $(\vec{F}_e + \vec{F}_a) \cdot \vec{i} = 0$; $P_a = T_e$.

Il faut résoudre : $\sqrt{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{3} \right) = \frac{160}{250} = 0,64 \Rightarrow x = 2,207 \Rightarrow V_p = x V_a$.

A.N. : $V_p = 79,45 \text{ km/h}$.

β. $F_a = \sqrt{P_a^2 + D_a^2}$, $D_a = k_a V_a^2 \sqrt{x^2 + 1} \left(x + \frac{1}{f} \right)$; D_a a la plus grande contribution.

A.N. : $F_a = 1547,1 \text{ N}$.

Les résultats numériques sont trop élevés. La suite le confirme.

d. C'est π_e qui compense D_a . On peut jouer sur l'inclinaison de la planche et sur la dérive.

18. Les autres limitations de la vitesse sont dues aux chocs sur la surface de l'eau (vagues avec ou sans déferlement turbulent), à la viscosité de l'eau, de l'air.

3.3.3.4. Modèles d'aéroglesseur

Modèle 1

Une plate-forme rectangulaire horizontale de centre C, de masse m, de largeur ℓ , d'épaisseur négligeable et de longueur L est en équilibre sous l'action d'un jet d'eau (de masse volumique ρ), sortant à la vitesse \vec{V}_0 uniforme d'une buse rectangulaire de

• aéroglesseur, dérive marine, viscosité

Marine

largeur ℓ_0 et de même longueur L . On désigne par O le centre de l'ouverture de la buse, Oz la verticale ascendante, Oy l'axe longitudinal de la buse.

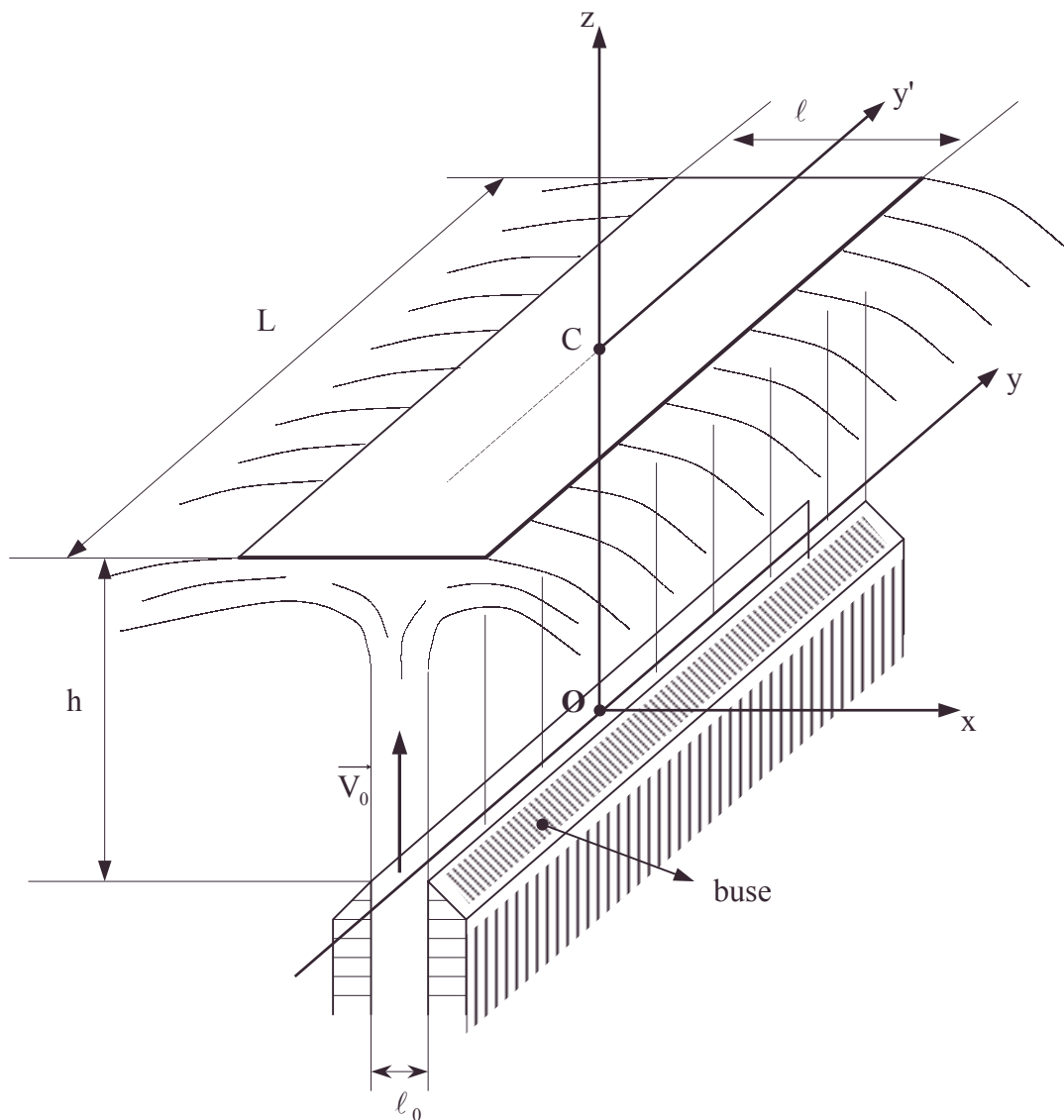
On recherche des équilibres pour lesquels la vitesse \vec{v} du fluide en chaque point vérifie

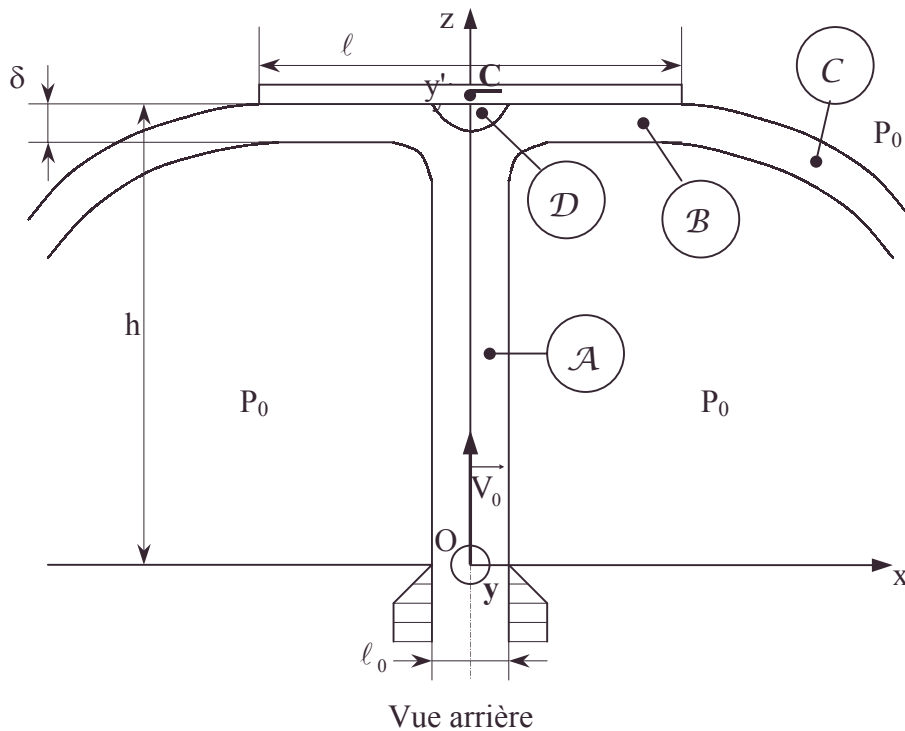
les conditions : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, $v_y = 0$. Enfin l'écoulement est irrotationnel. On supposera que

L est suffisamment grand devant ℓ pour que l'on puisse négliger la contribution des régions de l'espace où il n'en serait pas ainsi.

La pression ambiante est la pression atmosphérique, supposée uniforme, constante et égale à P_0 .

Soit h la cote par rapport à O atteinte par la plaque dans les conditions de l'équilibre.





On constate que le jet a sensiblement la forme donnée par la vue en coupe précédente, de sorte que l'écoulement du fluide correspond successivement :

- à un jet ascendant (partie (\mathcal{A})) dans une colonne sensiblement parallélépipédique de hauteur $(h - \delta)$, de largeur ℓ_0 et de longueur L ;
- à un écoulement axifuge (partie (\mathcal{B})) dans un parallélépipède de largeur ℓ et de hauteur δ , on supposera $\delta \ll h$; dans la partie (\mathcal{B}) de l'écoulement, le jet est supposé adhérer à la plaque par hypothèse ;
- à un jet libre (partie (\mathcal{C})) après avoir quitté la plaque.
- Il existe en outre une région (dénotée (\mathcal{D})) au voisinage de l'axe Cy' (qui est un axe de stagnation) pour laquelle l'approximation de la partie (\mathcal{B}) n'est pas valable.

On appellera "constantes de l'énoncé" les données $V_0, m, g, \ell_0, \ell, L$ et ρ .

δ et h sont des grandeurs que l'on cherchera à déterminer.

1. On s'intéresse à l'écoulement dans la partie (\mathcal{B}) et on pose : $\vec{v} = v_x(x, y, z) \vec{x}$;

a. Montrer que les hypothèses de l'énoncé conduisent à une expression bien définie pour \vec{v} que l'on donnera en fonction des constantes de l'énoncé, du paramètre δ et de \vec{x} . Vérifier que δ ne dépend pas de x .

b. Exprimer alors $P(z)$ dans la région (\mathcal{B}) ; en déduire :

α. Que la "force portante" du jet est due principalement aux phénomènes ayant lieu dans le voisinage immédiat du point C.

β. Que le problème doit conduire à une valeur faible de δ pour être cohérent.

2. On fait à présent l'hypothèse que le jet ascendant de la partie (\mathcal{A}) est un jet libre dès sa sortie de la buse.

a. Montrer alors que la hauteur h est complètement déterminée par la donnée du paramètre δ et la valeur des constantes de l'énoncé.

b. En déduire que δ , bien que faible, doit nécessairement être supérieur à $\frac{\ell_0}{2}$.

3. Pour obtenir une seconde relation entre h et δ , on applique le théorème d'Euler au volume de contrôle $(\mathcal{A}) \cup (\mathcal{B}) \cup (\mathcal{D})$.

a. Ecrire ce que donne ce théorème en projection suivant l'axe Oz. En tirer une expression de h affine en δ .

b. Compte tenu de la faiblesse de l'ordre de grandeur pour δ , montrer que le résultat du **a.** implique une condition nécessaire de minimum à donner à V_0 pour que l'équilibre soit possible, les autres constantes de l'énoncé étant données.

Application numérique : calculer cette borne minimum pour V_0 dans le cas d'un jet d'eau frappant une plaque métallique de masse volumique $\rho_1 = 5.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et pour épaisseur $e = 1 \text{ mm}$. On donne $\ell = 20 \text{ cm}$, $\ell_0 = 1 \text{ cm}$ et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

4. On se donne maintenant $V_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

a. En éliminant h entre les deux équations obtenues au **2.a.** et au **3.a.**, montrer que l'épaisseur δ obéit à une équation du troisième degré.

b. On pose $\omega = \frac{\delta}{\ell_0}$; mettre l'équation précédente sous la forme $\frac{1}{\omega^2} + A\omega + B = 0$, et

donner la valeur numérique des coefficients A et B.

c. Vérifier, à l'aide des deux valeurs numériques ainsi trouvées, que l'équation en ω possède bien une racine physiquement admissible. (N.B.: on pourra également vérifier que cette racine est également la seule racine réelle).

d. Donner la valeur numérique de δ avec au moins trois chiffres significatifs.

5. Avant d'en déduire une valeur de h , on demande de faire plusieurs "commentaires critiques" sur la valeur numérique obtenue dans la question **4.** :

a. Le résultat de la question **2.b.** est-il vérifié ?

b. On cherche à vérifier également la validité de l'hypothèse faite au **1.b.**.

Pour ce faire :

α. Donner la valeur de l'écart entre la pression sur la plaque dans la région (\mathcal{B}) et la pression ambiante.

β. Exprimer cet écart en valeur relative par rapport à la pression atmosphérique :

$$P_0 = 1,013 \text{ bar.}$$

γ. Comparer l'écart obtenu en **b.α.** à la valeur $\frac{mg}{S}$, pression moyenne exercée par la plaque sur le jet.

δ. Conclure sur la validité de l'hypothèse faite au **1.b.β.**.

6.a. Déduire de **4.d.** la valeur de h . Vérifier que h est bien grand devant ℓ et δ .

b. En utilisant le fait que la valeur numérique de δ trouvée précédemment satisfait à $h \gg \delta \gg \ell_0$, la réponse à la question **2.a.** permet de trouver immédiatement une valeur approchée simple pour h . Donner cette valeur sous forme littérale, puis numérique. L'approximation vous semble-t-elle valable ?

c. Expliquer pourquoi on ne peut faire une approximation analogue avec le résultat de la question **3.a.** et le vérifier.

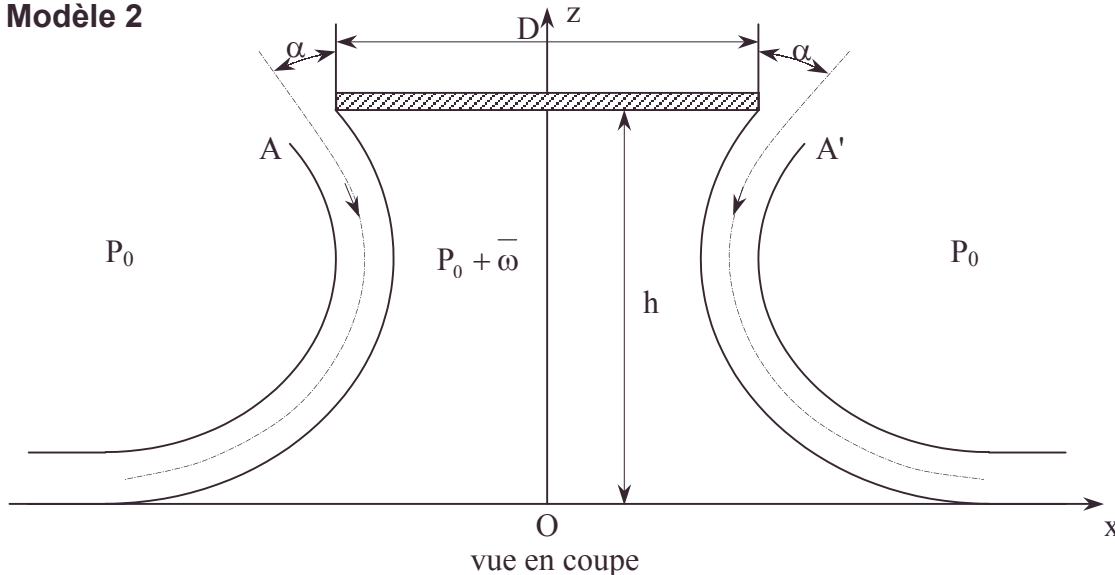
7. On désire déterminer le domaine des valeurs des différentes constantes du système pour lequel les approximations de l'énoncé sont valables. On raisonnera en se donnant les valeurs de ℓ_0, ρ, V_0, m et L qui gardent leur valeur numérique précédente et en cherchant les valeurs de ℓ correspondantes.

a. Donner, en fonction du paramètre δ , les expressions de $\ell(V_0, \ell_0, g, m, \rho, L)$ et de $h(V_0, g, \ell_0, \delta)$ d'abord sous forme littérale, puis sous forme numérique.

b. On considère que l'écoulement satisfera de manière suffisamment approchée les hypothèse du préambule si l'on a simultanément les inégalités $h > 100 \ell_0$ et $\delta < 10 \ell$.

En calculant numériquement les valeurs de $h(\delta)$ et $\ell(\delta)$ pour des valeurs judicieusement choisies de δ , donner l'intervalle des valeurs de la largeur de la plaque pour lesquelles le modèle étudié sera physiquement correct.

Modèle 2



Une plate-forme de largeur D , de longueur L unité suivant l'axe \vec{y} est en équilibre à l'altitude h au-dessus du sol sous l'effet de deux jets d'eau qu'elle émet à ses extrémités ; ces jets sont émis avec un angle α par rapport à la verticale ; l'écoulement de fluide y est stationnaire, la vitesse en chaque point est supposée parallèle au plan de section droite de la figure.

On fait de plus les hypothèses simplificatrices suivantes sur la structure de ces jets :

- Leur épaisseur dans le plan de section est suffisamment petite pour que l'on puisse la négliger devant D et h , ainsi que les expressions de type $\frac{V^2}{2g}$.

- Cette épaisseur reste constante d'un bout à l'autre du jet.
- La vitesse est constante sur toute section droite du jet.
- Les jets sont suffisamment rapides pour que leur énergie potentielle massique en chaque point reste négligeable devant leur énergie cinétique massique en ce point.
- Les jets se raccordent tangentiellement au sol.

On appellera Q le débit-masse par unité de longueur de chacun des jets, V_i le module des vitesses initiales (en A et A' de ces jets), V_f le module de leur vitesse quand ils atteignent le sol. Ces jets ont pour effet de créer une surpression $\overline{\omega}$ dans la poche d'air qu'ils enferment sous la plateforme. Cette surpression est supposée constante à l'équilibre. Dans le but de justifier les hypothèses, on demande de répondre aux questions suivantes :

1.a. Par hypothèse, h est majoré par 1 m. P_0 est la pression atmosphérique. De combien varie la pression P_0 sur une hauteur de 1 m ?

b. Peut-on, compte tenu de cet ordre de grandeur, considérer que P_0 est constant ? Justifier que $\overline{\omega} = P - P_0$ est constant.

2. Les lignes de courant sont supposées avoir la forme donnée par la figure ci-dessous par hypothèse. e, non nul bien sûr, reste très petit par rapport au rayon de courbure local.

a. Comparer V_{A_1} et V_{B_1} puis V_{A_2} et V_{B_2} :
(justification précise). Que pouvez-vous dire de $\frac{V_{A_1}}{V_{A_2}}$ compte tenu de $e \ll R$?

b. En déduire que l'épaisseur e du jet est constante.

3.a. Rappeler la différence essentielle distinguant la description eulérienne et la description lagrangienne de la mécanique.

b. Ecrire la loi locale de la mécanique des fluides en prenant la description lagrangienne. Projeter cette loi locale sur les axes intrinsèques \vec{N} et \vec{T} de la trajectoire. On appellera R le rayon de courbure de la trajectoire.

c. Montrer que la trajectoire est circulaire dans le cadre des hypothèses simplificatrices considérées, et exprimer ϖ en fonction du débit massique Q pour une longueur unité, de la vitesse moyenne V du jet, et du rayon moyen R de la trajectoire.

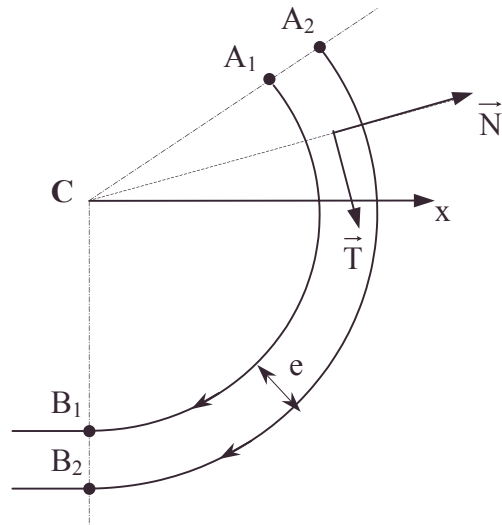
4.a. Exprimer la hauteur h en fonction du rayon de la trajectoire et de α , puis h en fonction de ϖ , Q , V et de α .

b. Appliquer le théorème d'Euler au jet $A_1B_1B_2A_2$.

Conclusion : les résultats sont-ils cohérents avec ce qui précède ?

5. La plate-forme possède la masse m par unité de longueur suivant Oy . L'eau entre dans la plate-forme par des canalisations souples horizontales.

En appliquant le théorème d'Euler, déterminer la force portante vue par cette plate-forme et donner son équation d'équilibre.



A_1A_2 est le trou dans le plan de figure de la section droite du jet en A ; B_1B_2 celle du jet en contact avec le sol, est située sur la verticale du centre de courbure Γ du jet en A.

Autres concours ; Durée : 3h30

Corrigé

Modèle 1

1.a.α. L'écoulement est irrotationnel :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial v_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} ;$$

Le fluide est incompressible : $\text{div } \vec{V} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$.

- v_x ne dépend pas de x, y, z, t est constant et uniforme.
- Exprimons la conservation de la masse pour la surface Σ de trace :

$$\rho L \ell_0 V_0 = \rho 2v_x L \delta \Rightarrow \vec{v} = \frac{V_0 \ell_0}{2\delta} \vec{x}$$

β. On en déduit que δ est indépendant de x vu $\text{div} \vec{V} = 0$.

b. L'équation d'Euler locale s'écrit : $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g} = \vec{0}$,

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ et } P(z) = -\rho g z + \text{cste}.$$

Dans (\mathcal{B}) , $|x| < \frac{\ell}{2}$; en $z = h - \delta$: $P(z) = P_0 \Rightarrow P = -\rho g z + P_0 + \rho g(h - \delta)$.

$h - \delta < z < h$; $P_0 - \rho g \delta < P(z) < P_0$. Or, $v_z = 0 \Rightarrow \iint v_z \rho \vec{v} d\vec{S} = 0$.

- La plaque subit son poids, une action du jet et une force de pression $-P_0 \ell L \vec{z}$.
- Le jet subit l'action de la plaque, son poids, l'action de l'atmosphère (de module inférieur à $P_0 \ell L$) et aucune autre force verticale (sauf en région \mathcal{D}).

α. Vu cette analyse défavorable, on en déduit que la lévitation de la plaque nécessite une autre cause, qu'on attribuera au voisinage de C (région \mathcal{D}).

β. En $z = h$ dans le modèle précédent $P = P_0 - \rho g \delta$.

La force de pression totale sur la plaque, particularité de (\mathcal{D}) mise à part, vaut selon Oz $-P_0 \ell L + (P_0 - \rho g \delta) \rho L = -\rho g \delta \ell L$.

La zone \mathcal{D} étant réduite ne pourrait compenser cette force si δ était important.

2.a. L'écoulement étant irrotationnel et permanent pour ce fluide parfait, écrivons la relation de Bernoulli en O et en un point M du jet : (modèle unidimensionnel) :

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = P(z) + \frac{1}{2} \rho v^2(M) + \rho g z;$$

dans (\mathcal{B}) , $|x| < \frac{\ell}{2}$, en $z = h - \delta$, $P(z) = P_0$; $v(M) = \frac{V_0 \ell_0}{2\delta} \Rightarrow h = \delta + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \left(1 - \frac{\ell_0^2}{4\delta^2} \right)$.

b. $h > \delta \Rightarrow \frac{\ell_0^2}{4\delta^2} < 1$ soit $\frac{\ell_0}{2} < \delta$.

3.a. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au fluide parfait présent dans $(\mathcal{A}) \cup (\mathcal{B}) \cup (\mathcal{D})$ en écoulement unidimensionnel permanent se réduit à :

$$\iint_{\Sigma_{ns}} \vec{V} \rho d\vec{S} = M \vec{g} - \iint_{\Sigma'} P d\vec{S} + \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}};$$

$\Sigma' = \Sigma$ diminuée de la surface de contact avec la plaque.

$$M = \rho g [(h - \delta) \ell_0 L + \delta \ell L].$$

• Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la plaque :

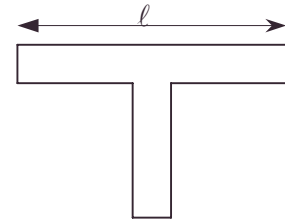
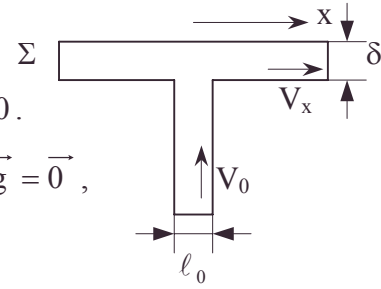
$$\vec{0} = m \vec{g} + \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} - L P_0 \ell \vec{z}; \text{ or, } \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} = -\vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}}.$$

Éliminons ce terme en additionnant les deux équations :

$$\iint_{\Sigma_{ns}} \vec{V} \rho d\vec{S} = (M + m) \vec{g} - \int_{\Sigma'} P d\vec{S} - L P_0 \ell \vec{z}; \text{ or, } - \iint_{\Sigma} P_0 d\vec{S} = - \iiint_{V_\Sigma} \vec{\text{grad}} P_0 d\tau = \vec{0},$$

car $P = P_0$ en Σ' sauf à la frontière de \mathcal{B} où $P_0 - \rho g \delta < P < P_0$ sur une zone verticale de surface $2L\delta$; au second ordre en δ , $\iint_{\Sigma'} P d\vec{S} = 0$ car δ étant petit, l'écart à P_0 contribue par un terme au plus en δ^2 sur la composante horizontale des forces, ce que l'on négligera.

- Bernoulli [formules de], conservation de la masse, équation d'Euler, principe fondamental de la dynamique, surface de contrôle, unidimensionnalité



Il reste $\iint_{\Sigma} \vec{V}_1 \vec{V} d\vec{S} = (M + m) \vec{g}$.

• Projétons sur Oz :

$$-D_m V_0 = -(M + m)g \text{ soit } \rho V_0^2 \ell_0 L = g[m + L\rho((h - \delta)\ell_0 + \delta\ell)],$$

$$\text{soit une relation affine de } h \text{ en } \delta : h = \left[\frac{V_0^2}{g} - \frac{m}{\rho \ell_0 L} \right] - \delta \frac{(\ell - \ell_0)}{\ell_0}.$$

b. En négligeant le terme d'ordre 1 en δ , il est indispensable que $V_0 > \sqrt{\frac{mg}{\rho \ell_0 L}}$.

$$\text{AN : } m = \rho_1 \ell L e ; V_{0\min} = \sqrt{\frac{\rho_1 \ell}{\rho \ell_0} e g} ; \text{AN : } V_{0\min} = 0,9905 \text{ m.s}^{-1}.$$

4.a. En éliminant h , il reste : $\delta + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} - \frac{V_0^2 \ell_0^2}{8g\delta^2} = \frac{V_0^2}{g} - \frac{m}{\rho \ell_0 L} - \frac{\delta \ell}{\ell_0} + \delta$, soit :

$$\frac{V_0^2}{8g} \left(\frac{\ell_0}{\delta} \right)^2 - \ell \left(\frac{\delta}{\ell_0} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} - \frac{m}{\rho \ell_0 L} \right) = 0.$$

En multipliant par $\left(\frac{\delta}{\ell_0} \right)^2$, on a l'équation du 3^e degré en $\omega = \frac{\delta}{\ell_0}$, et donc :

$$-\ell \omega^3 + \omega^2 \left(\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} - \frac{m}{\rho \ell_0 L} \right) + \frac{V_0^2}{8g} = 0.$$

b. En multipliant par $\frac{8g}{V_0^2 \omega^2}$, on obtient : $\frac{1}{\omega^2} - \frac{8g\ell}{V_0^2} \omega + 4 \left(1 - \frac{2gm}{V_0^2 \rho \ell_0 L} \right) = 0$.

$$A = -\frac{8g\ell}{V_0^2} ; \text{AN : } A = -0,1570 \text{ (sans unité).}$$

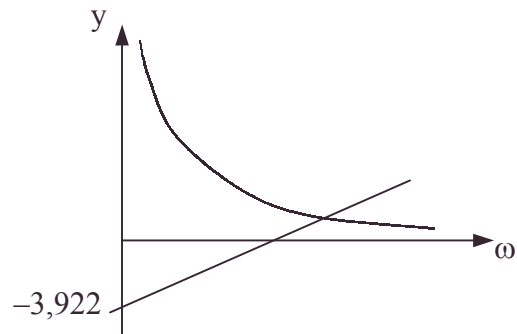
$$B = 4 \left(1 - \frac{2gm}{V_0^2 \rho \ell_0 L} \right) = 4 \left(1 - \frac{2g\rho_1 \ell e}{V_0^2 \rho \ell_0} \right) ; \text{AN : } B = 3,922 \text{ (sans unité).}$$

c. Pour utiliser la forme spécifique de l'énoncé, posons-nous le problème (à résolution graphique) de l'intersection de

$y = \frac{1}{\omega^2}$ et de la droite $y = -A\omega - B$.

$$\text{AN : } y = 0,1570\omega - 3,922.$$

Il existe une seule solution réelle physiquement acceptable puisque $\omega > 0$.



d. La résolution numérique de l'équation du 3^e degré : $-0,1570\omega^3 + 3,922\omega^2 + 1 = 0$ donne $\omega = 24,991 \Rightarrow \delta = 0,2499 \text{ m}$.

5.a. $\omega > \frac{1}{2}$ est vérifié.

b.α. L'écart de pression maximum vaut $\rho g \delta$.

$$\beta. \frac{P_0 - P}{P_0} = \frac{\rho g \delta}{P_0} ; \text{A.N. : } \frac{P_0 - P}{P_0} = 2,420.10^{-2}, \text{ soit } 2,5 \text{ \%.}$$

$$\gamma. \frac{mg}{S\rho g\delta} = \frac{\rho_1 e}{\rho\delta} ; \text{A.N. : } \frac{\rho_1 e}{\rho\delta} = 0,0200 \text{ soit } 2\% \Rightarrow \frac{mg}{S} \ll \rho g\delta.$$

δ. L'action du poids de la plaque est secondaire devant l'action de la pression qui doit pourtant être compensée (δ plutôt petit) ; on est dans le cadre de **1.b.**

$$\mathbf{6.a.} \quad h = \left[\frac{V_0^2}{g} - \frac{\rho_1 \ell e}{\rho \ell_0} \right] - \delta \frac{(\ell - \ell_0)}{\ell_0} ; \text{A.N. : } h = 5,345 \text{ m} ; h \gg \delta.$$

$h \gg \ell$ puisque $\delta > \ell$; $25 \text{ cm} > 20 \text{ cm} > 1 \text{ cm}$.

$$\mathbf{b.} \quad h \gg \delta \gg \ell_0 ; h = \delta + \frac{V_0^2}{2g} \left(1 - \frac{\ell_0^2}{4\delta^2} \right) \# \delta + \frac{V_0^2}{2g} \# \frac{V_0^2}{2g} ;$$

$$\text{A.N. : } \frac{V_0^2}{2g} = 5,097 \text{ m} ; \frac{\ell_0^2}{4\delta^2} = 4.10^{-4} \text{ que l'on peut qualifier d'infinitement petit d'ordre } 2 ;$$

$$\frac{\delta}{\frac{V_0^2}{2g}} = 4,9.10^{-2} \text{ qu'on peut qualifier d'infinitement petit d'ordre } 1.$$

Dans le domaine de l'ingénierie, les deux approximations sont acceptables ; on pourrait être plus exigeant et ne pas accepter de négliger δ devant h.

$$\mathbf{c.} \quad h = \left[\frac{V_0^2}{g} - \frac{\rho_1 \ell e}{\rho \ell_0} \right] + \delta - \frac{\ell \delta}{\ell_0} ; \text{AN : } h = 10,194 - 0,100 + 0,249 - 4,998.$$

$h \# \frac{V_0^2}{g} + \delta - \frac{\ell \delta}{\ell_0} \neq \frac{V_0^2}{g} - \frac{\ell S}{\ell_0}$ mais $\frac{\ell \delta}{\ell_0}$ est de l'ordre de $\frac{V_0^2}{g}$, la simplification analogue n'a pas sa raison d'être.

7.a. L'expression de h indépendante de m est :

$$h = \delta + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \left(1 - \frac{\ell_0^2}{4\delta^2} \right).$$

L'expression de ℓ dépendant de m consiste à éliminer h entre **2.a.** et **3.a.** :

$$\ell = \frac{\ell_0}{\delta} \left[\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \left(1 + \frac{\ell_0^2}{4\delta^2} \right) - \frac{m}{\rho \ell_0 L} \right] \# \frac{\ell_0}{\delta} \left[\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} - \frac{m}{\rho \ell_0 L} \right] \# \frac{\ell_0 V_0^2}{2\delta g} ;$$

$$h = 5,097 + \delta - \frac{1,274}{\delta^2} \cdot 10^{-4} ; \ell = \frac{4,997 \cdot 10^{-2}}{\delta} + \frac{1,274 \cdot 10^{-6}}{\delta^3}.$$

b.α. La valeur limite de δ assurant $h \gg 100 \ell_0$ est $\delta = 0,00557 \text{ m}$;
alors $\ell = 16,34 \text{ m}$; $\delta > 0,00577 \text{ m}$ convient.

β. La valeur limite de δ assurant $\delta < 10 \ell$ est $\delta = 0,708 \text{ m}$;
 $0,708 \text{ m} > \delta$ convient.

γ. L'ensemble des valeurs de ℓ compatible pour l'ensemble des valeurs de δ acceptables est : $0,0708 \text{ m} < \ell < 16,34 \text{ m}$.

Modèle 2

1.a. P_0 est la pression de l'eau au niveau du sol.

$$P_{\text{atm}} = P_0 - \rho g h ; \rho g h = 12,75 \text{ Pa} ; \frac{\Delta P}{P_0} = 1,26 \cdot 10^{-4}.$$

b. On peut considérer P_0 constant ; P étant constant, de même sous la plaque, $\varpi = P - P_0$ est constant en première approximation.

2. Appliquons la relation de Bernoulli sur la ligne de champ A_1B_1 , le fluide étant parfait et l'écoulement stationnaire.

$$P(A_1) + \frac{1}{2}\rho V_{A_1}^2 + \rho gh = P(B_1) + \frac{1}{2}\rho V_{B_1}^2 \text{ or } P(A_1) = P(B_1) = P_0.$$

On nous dit que l'énergie potentielle massique est négligeable devant l'énergie cinétique massique $\Leftrightarrow g \neq 0 \Rightarrow V_{A_1} \neq V_{B_1}$; de même, pour la ligne de champ A_2B_2 : $V_{A_2} \neq V_{B_2}$.

• Par continuité, $e \ll R \Rightarrow V_{A_1} \neq V_{A_2}$; de même, $V_{B_1} \neq V_{B_2}$.

b. La conservation du débit s'écrit : $\rho e_{A_1} L V_{A_1} = \rho e_{B_1} L V_{B_1} \Rightarrow e_{A_1} = e_{B_1}$; l'épaisseur du jet est constante.

3.a. • La vitesse au sens lagrangien $\vec{V}(t)$ est attachée au point matériel en mouvement.

• La vitesse au sens eulérien, $\vec{V}(M, t)$, est définie en un point fixe M, de même pour les autres grandeurs physiques.

b. $\rho \vec{a} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g}$ peut s'écrire vu $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} - \frac{V^2}{R} \vec{N}$;

$\rho \frac{dv}{dt} \vec{T} - \rho \frac{V^2}{R} \vec{N} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g}$; on négligera $\rho \vec{g}$ car son énergie potentielle massique associée est négligeable.

c. Multiplions par $\vec{N} d\ell$, $d\ell$ déplacement selon \vec{N} .

$$0 - \frac{\rho V^2}{R} d\ell = -\vec{\text{grad}} P \cdot \vec{N} d\ell = -dP, \text{ selon le déplacement envisagé.}$$

Assimilons e et $d\ell$, dP et ϖ : $\rho V^2 \frac{e}{R} = \varpi$.

Or, $\rho, V^2, e, \vec{\omega}$ sont des constantes, d'où le rayon de courbure est constant, les trajectoires sont des cercles. • Or, $Q = \rho e V \Rightarrow \varpi = \frac{QV}{R}$.

4.a.α. $h = R \sin \alpha + R = R(1 + \sin \alpha) = \frac{QV}{\varpi} (1 + \sin \alpha)$

β. Le principe fondamental de la dynamique appliquée au fluide contenu dans la surface de contrôle Σ : $A_1A_2B_2B_1$ de longueur unité en régime stationnaire s'écrit : $Q(\vec{V}_B - \vec{V}_A) = M\vec{g} - \iint_{\Sigma} P d\vec{S}$.

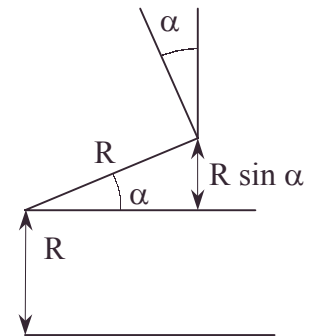
Si l'énergie potentielle massique est négligeable, on peut négliger le poids :

$$-\iint_{\Sigma} P d\vec{S} = -P_0 \int_{A_1B_1} d\vec{S} - (P_0 + \varpi) \int_{A_2B_2} d\vec{S} - \int_{A_1A_2} P d\vec{S} - \int_{B_1B_2} P d\vec{S}.$$

$e \ll R$; on peut négliger les deux dernières intégrales (cf. théorème de la moyenne) et confondre A_1B_1 et A_2B_2 : $-\iint_{\Sigma} P d\vec{S} \approx \varpi \int_{A_1B_1} d\vec{S}$; or, $d\vec{S} = -R \cos \theta d\theta \vec{x} - R \sin \theta d\theta \vec{z}$;

$$-\int_{\Sigma} P d\vec{S} \approx -\varpi R \vec{x} [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} - \varpi R \vec{z} [-\cos \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} ;$$

$$-\int_{\Sigma} P d\vec{S} = -\varpi R \vec{x} (1 + \sin \alpha) - \varpi R \vec{z} (-\cos \alpha) = Q(\vec{V}_B - \vec{V}_A) - \int_z P d\vec{S} = -QV \vec{x} - QV \sin \alpha \vec{x} + QV \cos \alpha \vec{z}$$



• accélération dans le tièdre de Frenet, Bernoulli [formules de], conservation du débit, énergie cinétique massique, énergie potentielle massique, équations d'Euler, incertitude, principe fondamental de la dynamique, surface de contrôle, théorème de la moyenne

Ainsi, $QV(1 + \sin \alpha) = \bar{\omega}R(1 + \sin \alpha)$ et $\bar{\omega}R \cos \alpha = QV \cos \alpha$.

- Les résultats sont cohérents entre eux : $\bar{\omega} = \frac{QV}{R}$.

5.a. La plaque est en équilibre : $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} + \bar{\omega}D\vec{z}$.

La force portante $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} = (-\bar{\omega}D + mg)\vec{z} = \left(-\frac{QV}{R}D + mg\right)\vec{z}$.

b. Appliquons le théorème d'Euler au fluide présent dans la surface de contrôle Σ de longueur unité et d'épaisseur faible, et donc de masse faible m_1 de poids négligeable:

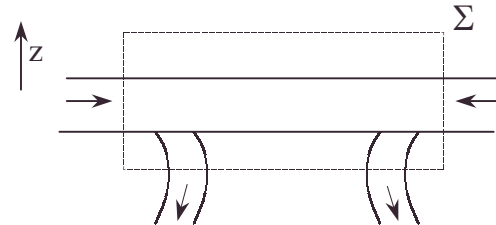
$$-2QV(\cos \alpha \vec{z}) = m_1 \vec{g} + \vec{F}_{\text{plaque} \rightarrow \text{fluide}}.$$

Vu le théorème de l'action et de la réaction, on tire de **a** :

$$2QV \cos \alpha = -\frac{QV}{R}D + mg \Rightarrow R = \frac{mg - 2QV \cos \alpha}{QVD};$$

$$\Rightarrow h = R(1 + \sin \alpha) = \frac{QVD(1 + \sin \alpha)}{mg - 2QV \cos \alpha}.$$

h est la hauteur d'équilibre permanent.



3.3.3.5. Navigation contre le vent

Bateau à hélice propulsée par une éolienne

Ce problème comprend deux parties : la première d'entre elles concerne le rendement d'une hélice. Les résultats essentiels en sont utilisés dans la seconde partie, qui concerne le fonctionnement d'un bateau à deux hélices, l'une fonctionnant dans l'air et l'autre dans l'eau.

Les étudiants sont instamment priés d'être rigoureux sur le signe des différentes grandeurs rencontrées dans le problème.

I. Rendement d'une hélice

On considère un fluide incompressible, de masse volumique ρ , animé d'un mouvement permanent et irrotationnel selon la direction déterminée par le vecteur unitaire \vec{i} . Une hélice est immergée dans ce fluide, et son axe de rotation, porté par la droite $x'x$, est parallèle au mouvement général du fluide. Cette hélice est supposée être plane. Le schéma ci-dessus précise le modèle et les notations. Un tube de courant, de symétrie circulaire autour de $x'x$, a une section droite d'aire variable $A(x)$.

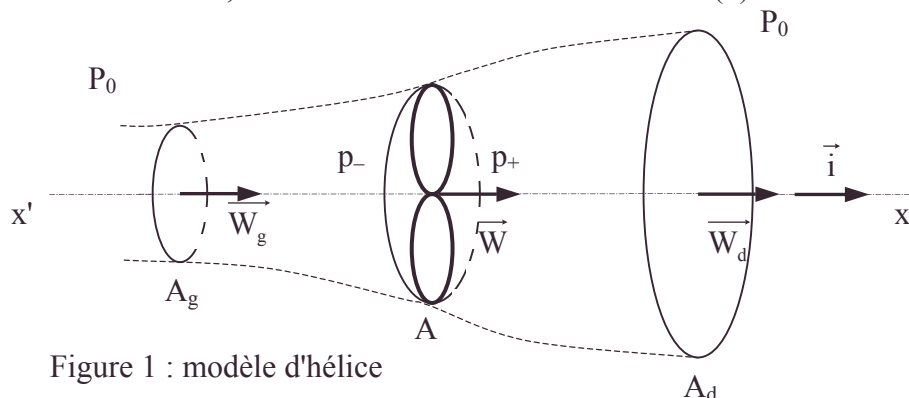


Figure 1 : modèle d'hélice

- éolienne, équilibre, force portante, hélice, navigation contre le vent, rendement, symétrie, théorème de l'action et de la réaction, théorème d'Euler, tube de courant

La zone extérieure à ce tube n'est pas affectée par le mouvement d'hélice, et la pression y est désignée par P_0 . Les phénomènes à l'intérieur du tube sont rapportés à un repère R_H lié à l'hélice. On suppose que la vitesse et la pression du fluide sont uniformes sur une section droite donnée du tube et que leur répartition obéit aux hypothèses suivantes.

- En amont de l'hélice (et suffisamment loin d'elle), la pression est P_0 , la vitesse du fluide est désignée par $\vec{W}_g = W_g \vec{i}$ ($W_g > 0$) et la section droite a une aire A_g .
- En aval de l'hélice (et suffisamment loin d'elle), la pression est P_0 , la vitesse du fluide est désignée par $\vec{W}_d = W_d \vec{i}$ ($W_d > 0$) et la section droite a une aire A_d .
- Au voisinage immédiat de l'hélice, et de part et d'autre de son plan, les pressions sont désignées par p_- et p_+ respectivement en amont et en aval.
- Dans le plan de l'hélice, la vitesse du fluide est désignée par $\vec{W} = W \vec{i}$ ($W > 0$) et la section droite a une aire A .

I.1. Dédire de la conservation du débit massique du fluide les deux relations liant les trois aires et les trois vitesses introduites ci-dessus.

2. Justifier l'applicabilité du théorème de Bernoulli au mouvement du fluide. Appliquer ce théorème aux parties du fluide situées en amont puis en aval de l'hélice, et en déduire la relation liant p_- , p_+ , W_g , W_d et ρ .

3. Soit $\vec{F} = F \vec{i}$ la force exercée par le fluide sur l'hélice. Appliquer le théorème fondamental de la dynamique au volume de fluide délimité par le tube de courant et les sections droites A_g et A_d ; en déduire l'expression de F .

4. Appliquer le même théorème à un volume extra plat entourant l'hélice, et en déduire les deux relations : $W = \frac{(W_g + W_d)}{2}$ et $F = 2\rho A(W_g - W)W$.

5. Dédire de la question ci-dessus l'expression de la puissance P reçue par l'hélice.

On pose $W = W_g t$, t étant une variable sans dimension.

Déterminer : – La valeur t_F qui rend F maximal, et les expressions F_m et P_F correspondantes de la force et de la puissance.
– La valeur t_P qui rend P maximal et les expressions P_m et F_P correspondantes de la puissance et de la force.

On pose $F = F_m x$ et $P = P_m y$:

– Tracer les courbes $x(t)$, $y(t)$ et $y(x)$. Commentaires.

6. Donner l'expression du flux de densité surfacique d'énergie transporté par un fluide incompressible, de masse volumique ρ et de vitesse W_g .

Le rendement r de l'hélice est défini comme le rapport de la puissance qu'elle reçoit à la puissance que recevrait l'aire A en absence de l'hélice ; en d'autres termes, on rapporte la puissance cédée à l'hélice à la puissance associée à l'énergie cinétique du fluide en l'absence d'hélice.

Donner, en fonction de t , l'expression du rendement de l'hélice et préciser la valeur numérique du rendement maximal r_m .

7. Applications numériques : calculer le flux de densité surfacique d'énergie et, dans les conditions correspondant à l'optimum de rendement, la puissance reçue par l'hélice et la force qu'elle reçoit du fluide.

On donne : $W = 10 \text{ m.s}^{-1}$; $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ (air) ; $A = 3 \text{ m}^2$.

II. Bateau à deux hélices

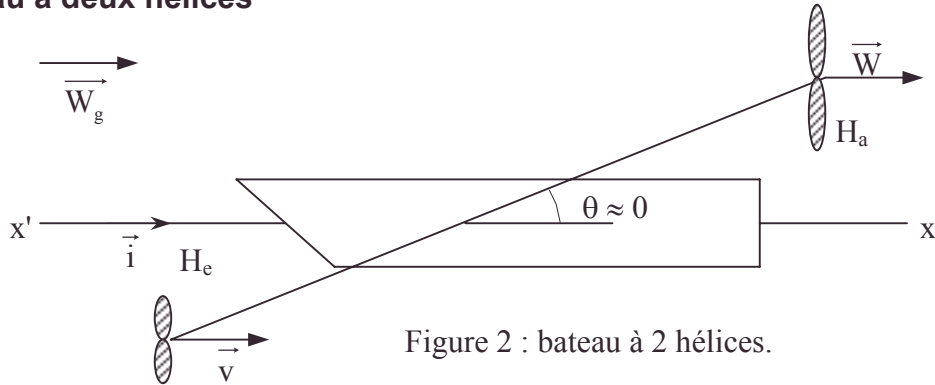


Figure 2 : bateau à 2 hélices.

La figure 2 indique comment un bateau à deux hélices peut avancer contre le vent : la coque de ce bateau est traversée par un axe qui lui est solide, et dont l'angle avec l'horizontale est considéré comme négligeable. Cet axe porte deux hélices H_a et H_e , d'aires respectives A_a et A_e ; la première travaille dans l'air (masse volumique ρ_a) et la seconde dans l'eau (masse volumique ρ_e). Le vent fait tourner H_a , qui entraîne H_e : le bateau peut effectivement avancer contre le vent.

Dans les deux paragraphes de cette partie, l'écoulement de l'air et de l'eau, supposés incompressibles, sera considéré comme permanent et irrotationnel.

A. Le bateau est maintenu fixe.

Les phénomènes sont rapportés à un repère R_H lié au bateau.

On pose que, dans ces conditions :

- Suffisamment loin de l'hélice H_a et de manière analogue à la situation de la première partie, les vitesses du vent sont respectivement \vec{W}_g et \vec{W}_d ; dans le plan de l'hélice H_a , la vitesse de l'air est \vec{W} .
- Suffisamment loin de l'hélice H_e , et de manière analogue à la situation de la première partie, les vitesses de l'eau sont respectivement $\vec{v}_g = \vec{0}$ et \vec{v}_d ; dans le plan de l'hélice H_e , la vitesse de l'eau est \vec{v} .

1. En adaptant certains résultats de la première partie, montrer que $\vec{v}_d = 2\vec{v}$ et que la force \vec{F}_e exercée par l'eau sur l'hélice H_e s'exprime par $\vec{F}_e = -2\rho_e A_e v^2 \vec{i}$.

On suppose maintenant, d'une part que l'hélice H_a travaille avec son rendement énergétique maximal, d'autre part que la puissance extraite du vent par H_a est intégralement transmise à l'eau par H_e (rendement de propulsion unitaire).

2. Exprimer alors \vec{F}_e en fonction des seules données A_a , A_e , ρ_a , ρ_e et W_g .

3. En déduire que le bateau ne peut effectivement avancer contre le vent que si ρ_a , ρ_e , A_a et A_e satisfont une inégalité très simple, que l'on établira.

B. Le bateau avance avec une vitesse uniforme

Les données seront ici relatives à un repère galiléen R_g lié au sol et les vitesses dans ce repère seront désignées par des majuscules avec astérisques. cependant, en fonction de ces données, on exprimera les divers résultats demandés dans le repère R_H . On suppose donc que la vitesse du vent par rapport au sol est $\vec{W}_g^* = W_g^* \vec{i}$ ($W_g^* > 0$) et que le bateau avance contre le vent avec la vitesse uniforme $\vec{U}^* = -U^* \vec{i}$ ($U^* > 0$).

1. Donner dans le cas d'une vitesse W^* quelconque dans le plan de l'hélice H_a l'expression de la force exercée sur cette hélice et de la puissance qu'elle reçoit ; en

- analogie, hélice, maximum, rendement

déduire les expressions W_m^* , F_p et P_m à l'optimum de rendement énergétique (en fonction de ρ_a , A_a , W_g^* et U^*).

2. Donner dans le cas d'une vitesse V^* quelconque dans le plan de l'hélice H_e l'expression de la force exercée sur cette hélice et celle de la puissance qu'elle reçoit.

3. On considère maintenant le cas de l'optimum de rendement de l'hélice H_a , le rendement de propulsion étant unitaire. Déterminer U^* en fonction de W_g^* et du rapport $\frac{\rho_a A_a}{\rho_e A_e}$. Commentaires.

4. Application numérique : Calculer $X^* = \frac{U^*}{W_g^*}$ et $Y^* = \frac{V^*}{W_g^*}$,

pour $\rho_a = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$; $\rho_e = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $A_a = 3 \text{ m}^2$; $A_e = 0,2 \text{ m}^2$.

5. On prend en compte, pour en finir, les frottements de l'eau sur la coque et on les modélise par une force dont le module s'écrit : $F_f = \frac{1}{2} \rho_e S C_f U^{*2}$.

S est la section transversale efficace du bateau et C_f le coefficient de frottement approprié.

Ecrire les deux équations couplées en X^* et en Y^* , correspondant aux rendements : optimal en puissance et unitaire en propulsion.

6. Application numérique : $S = 0,1 \text{ m}^2$ et $C_f = 0,2$.

On pourra trouver avantageux de poser : $\alpha = \left(\frac{\rho_a A_a}{\rho_e A_e} \right)$; $\alpha \beta = \left(\frac{3}{2} \right)^3 \left(\frac{S C_f}{A_e} \right)$;

Résoudre le système et commenter la solution.

7. Reprendre et discuter chacune des hypothèses du problème.

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

I.1. La conservation du débit massique donne : $\rho W_g A_g = \rho W A = \rho W_d A_d$;

comme ρ est constant, on tire : $W A = W_g A_g$ et $W A = W_d A_d$.

2.a. L'applicabilité du théorème de Bernoulli est : fluide incompressible, sans viscosité (elle n'est pas donnée), écoulement permanent, irrotationnel (ce qui permet l'application à tout le fluide en mouvement sans avoir à préciser de ligne de courant (ce qui a peu d'intérêt dans une description unidimensionnelle)). Nous l'avons donc pour un fluide parfait sauf sur l'hélice où il y a un transfert de puissance.

b.α. En amont, sur l'axe : $\frac{1}{2} \rho W_g^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho W^2 + p_-$;

β. En aval, sur l'axe : $\frac{1}{2} \rho W_d^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho W^2 + p_+$;

γ. Par soustraction : $p_+ - p_- = \frac{1}{2} \rho (W_d^2 - W_g^2)$.

3.a. Le théorème d'Euler appliqué au système matériel fluide délimité par le tube de courant et A_g , A_d en régime permanent s'écrit :

$$\bullet \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{D\vec{P}}{Dt} = \underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{\substack{=0 \\ \text{régime} \\ \text{stationnaire}}} + \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \vec{V} d\vec{S} = D_m (\vec{W}_d - \vec{W}_g) \text{ avec } D_m = \rho W A.$$

$$\bullet \vec{F}_{\text{ext}} = \underbrace{\vec{F}_{\text{hélice} \rightarrow \text{fluide}}}_{-\vec{F}} - \iint_{\Sigma} p d\vec{S} ; \text{ or, } p = p_0 \quad \forall M \text{ et } \iint_{\Sigma} p_0 d\vec{S} = - \iiint_{V_{\Sigma}} \text{grad } p_0 d\tau = \vec{0}$$

action - réaction

$$\bullet \vec{F} = -\rho A W (\vec{W}_d - \vec{W}_g).$$

$$\text{b. } F = \rho A W (W_g - W_d).$$

4.a. Le théorème d'Euler appliqué à un volume extra plat du tube de courant entourant l'hélice (selon le modèle unidimensionnel) s'écrit :

$$\bullet \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{D\vec{P}}{Dt} = \underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{\substack{=0 \\ \text{régime} \\ \text{stationnaire}}} + \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \vec{V} d\vec{S} = D_m (\vec{W}_+ - \vec{W}_-) = \vec{0}$$

$$\text{(cf. } \rho A_+ W_+ = \rho A_- W_- \text{ avec } A_+ = A_- = A \text{).}$$

$$\bullet \vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{hélice}} - \iint_{\Sigma} p d\vec{S} = \vec{0} ; \text{ On conservera partout la convention de la normale sortante.}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = - \iint_{\Sigma} p d\vec{S} = - \iint_{\Sigma_-} p d\vec{S} - \iint_{\Sigma_{\text{latérale}}} p d\vec{S} - \iint_{\Sigma_+} p d\vec{S} = (p_- A_- + 0 - p_+ A_+) \vec{i} ;$$

$$\text{or, } A_+ = A_- ; \vec{F} = (p_- - p_+) A \vec{i} = \frac{1}{2} \rho A (W_g^2 - W_d^2) \vec{i}.$$

b. Egalons les expressions **I.4.a.** et **I.3.a.** ; on en déduit : $W = \frac{1}{2} (W_g + W_d)$ et en remplaçant $W_d = 2W - W_g$ dans **I.3.b.**, $F = 2\rho A W (W_g - W)$.

$$\text{5.a. } P = \vec{F} \cdot \vec{W} = 2\rho A W^2 (W_g - W).$$

$$\text{b. } F = 2\rho A W_g^2 t (1-t) ; P = 2\rho A W_g^3 t^2 (1-t) ;$$

$$\text{c. } \frac{dF}{dt} = 2\rho A W_g^2 (1-2t) = 0 \text{ pour } t_F = 0,5 ; F_m = \frac{A}{2} \rho W_g^2 ; P_F = \frac{1}{4} \rho A W_g^3.$$

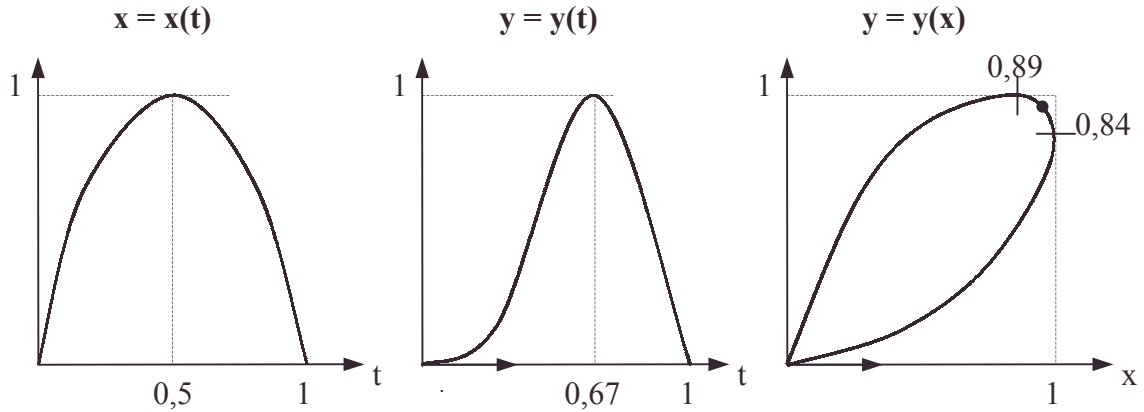
$$\text{d. } \frac{dP}{dt} = 2\rho A W_g^3 (2t - 3t^2) = 0 \text{ pour } t = 0 \text{ et } t_P = 0,67 ; t = 0, P = 0 \text{ est un minimum}$$

$$\text{et le seul maximum } P_m = \frac{8}{27} \rho A W_g^3 ; F_P = \frac{4}{9} A \rho W_g^2.$$

$$\text{e. On voit } F = F_m 4t(1-t) \text{ et } P = P_m \frac{27}{4} t^2(1-t)$$

$$\text{On déduit } x = 4t(1-t) \text{ et } y = \frac{27}{4} t^2(1-t) ; \frac{P}{F} = \frac{y}{x} = \frac{27}{16} t$$

$$\Rightarrow t = \frac{16}{27} \frac{y}{x} ; x = \frac{64}{27} \frac{y}{x} \left(1 - \frac{16}{27} \frac{y}{x} \right) \Rightarrow x^3 = \left(\frac{8}{9} y \right)^2.$$



f. Commentaire d'optimisation :

on a intérêt à fonctionner à t_p alors $P = P_m$ et $F = 0,89 F_m$ plutôt qu'à t_F où $F = F_m$ et $P = 0,84 P_m$; on peut s'interroger sur une optimisation intermédiaire à $y^2 + x^2$ maximum où visuellement, $P = 0,95 P_m$ et $F = 0,95 F_m$ pour $t = 0,60$.

6.a. Soit $\phi = \iint_{\Sigma} (\rho \mathbf{e}_c \cdot \vec{V}) d\mathbf{s} = \mathbf{e}_c \cdot D_m = \rho A W_g \cdot \frac{1}{2} W_g^2 \left(\text{cf. } \frac{DE_c}{Dt} \right)$.

$\frac{\phi}{A} = \frac{\rho}{2} W_g^3$; cette densité surfacique d'énergie cinétique est uniforme vu le modèle unidimensionnel.

b. $r = \frac{P}{\phi}$; $r = 4t^2(1-t)$.

c. $\frac{dr}{dt} = 4[2t - 3t^2] = 0$ pour $t = 0$ et $t_p = 0,67$ (cf. P_m).

$t = 0 \Rightarrow r = 0$ minimum ; le seul maximum est pour $t = t_p$; $r_{\max} = 0,592$.

7.a. $\frac{\phi}{A} = \frac{1}{2} \rho W_g^3 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{W}{t_p} \right)^3$; AN : $\frac{\phi}{A} = 1,99 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2}$.

b. $P_m = r_{\max} \phi$; AN : $P_m = 3,54 \text{ kW}$.

c. $F = \frac{4}{9} A \rho W_g^2 = \frac{4}{9} A \rho \left(\frac{W}{t_p} \right)^2$; AN : $F = 356,42 \text{ N}$.

II.A.1.a. Transposons $W = \frac{1}{2} (W_g + W_d) \Rightarrow v = \frac{1}{2} (0 + v_d) \Rightarrow \vec{v}_d = 2\vec{v}$.

b. Transposons $\vec{F} = 2\rho A W (W_g - W) \vec{i}$; $\vec{F}_e = 2\rho_e A_e v (0 - \vec{v}) = -2\rho_e A_e v^2 \vec{i}$.

2. Transposons $P_m = \frac{8}{27} \rho A W_g^3$: formule de Betz

$P_m = \frac{8}{27} \rho_a A_a W_g^3 = \underbrace{-\vec{F}_e \cdot \vec{v}}_{\substack{\text{(cf rendement unitaire} \\ \text{et signe adapté)}}} = 2\rho_e A_e v^3$.

On en déduit : $v = \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_a A_a}{2\rho_e A_e} \right)^{\frac{1}{3}} W_g$.

$\Rightarrow \vec{F}_e = -\frac{4}{9} (2\rho_e A_e)^{\frac{1}{3}} (\rho_a A_a)^{\frac{2}{3}} W_g^2 \vec{i}$.

• maximum, minimum, optimisation, unidimensionnalité

3. L'action de l'air est $\vec{F}_{a_p} = \frac{4}{9} A_a \rho_a W_g^2 \vec{i}$ cf. **I.5.d.**

On ne peut avancer contre le vent que si $(\vec{F}_a + \vec{F}_e) \vec{i} < 0$, soit $\rho_a A_a < 2\rho_e A_e$.

B.1. La loi de composition des vitesses donne $W = W^* + U^*$ et $W_g = W_g^* + U^*$; les formules de **I.4.** transcrites donnent :

$$\vec{F}_a = 2\rho_a A_a (W^* + U^*)(W_g^* - W^*) \vec{i} \text{ et } P_a = 2\rho_a A_a (W^* + U^*)^2 (W_g^* - W^*) ;$$

$$\text{or, } W_m = W_m^* + U^* \text{ et } W_m = W_g t \text{ avec } t = \frac{2}{3} \text{ (cf. } P_{a_m}) \text{ d'où : } W_m^* + U^* = \frac{2}{3} (W_g^* + U^*) ;$$

$$\text{soit } W_m^* = \frac{2}{3} W_g^* - \frac{1}{3} U^* \text{ et } P_{a_m} = \frac{8}{27} \rho_a A_a (W_g^* + U^*)^3 \text{ et } F_{a_p} = \frac{4}{9} \rho_a A_a (W_g^* + U^*)^2 .$$

$$\textbf{2.a. } \vec{F}_e = 2\rho_e A_e (V^* + U^*)(V_g^* - V^*) \vec{i} \text{ en transposant } \textbf{B.1.} ; \text{ or, } V_g^* = 0 , \text{ d'où : } \vec{F}_e = -2\rho_e A_e (V^* + U^*) V^* \vec{i} .$$

$$\textbf{b. De même, } P_e = 2\rho_e A_e (V^* + U^*)^2 (V_g^* - V^*) \text{ avec } V_g^* = 0 ; \\ P_e = -2\rho_e A_e (V^* + U^*)^2 V^* .$$

$$\textbf{3.a.} \bullet \text{ Le rendement étant unitaire soit transmission intégrale d'énergie de } H_a \text{ à } H_e : \\ P_{a_m} = |P_e| ; \text{ on a : } 2\rho_e A_e (V^* + U^*)^2 V^* = \frac{8}{27} \rho_a A_a (W_g^* + U^*)^3 .$$

$$\bullet U^* = \text{cste} \Rightarrow \vec{F}_a + \vec{F}_e = \vec{0} \text{ soit } \frac{4}{9} \rho_a A_a (W_g^* + U^*)^2 = 2\rho_e A_e (V^* + U^*) V^* .$$

En faisant le rapport $V^* + U^* = \frac{2}{3} (W_g^* + U^*)$ qui permet par son remplacement d'obtenir :

$$V^* = \frac{2}{9} \frac{\rho_a A_a}{\rho_e A_e} \frac{(W_g^* + U^*)^2}{W_g^* + U^*} = \frac{1}{3} \frac{\rho_a A_a}{\rho_e A_e} (W_g^* + U^*) \Rightarrow U^* = W_g^* \frac{2\rho_e A_e - \rho_a A_a}{\rho_e A_e + \rho_a A_a}$$

b. Commentaire : on retrouve $U^* > 0$ pour $2\rho_e A_e > \rho_a A_a$, condition pour avancer contre le vent de **II.A.3.**

$$\textbf{4.a. } X^* = \frac{U^*}{W_g^*} = \frac{2\rho_e A_e - \rho_a A_a}{\rho_e A_e + \rho_a A_a} ; \text{ AN : } X^* = 1,947 .$$

$$\textbf{b. } Y^* = \frac{V^*}{W_g^*} = \frac{\rho_a A_a}{\rho_a A_a + \rho_e A_e} ; \text{ AN : } Y^* = 0,0177 .$$

$$\textbf{5.} \bullet U^* = \text{cste} \Rightarrow \vec{F}_a + \vec{F}_e + \vec{F}_f = \vec{0} , \vec{F}_f = F_f \vec{i} .$$

$$\text{soit } \frac{4}{9} \rho_a A_a (W_g^* + U^*)^2 - 2\rho_e A_e V^* (U^* + V^*) + \frac{1}{2} \rho_e S C_f U^{*2} = 0 .$$

$$\text{soit, avec } \alpha \text{ et } \beta, X^* \text{ et } Y^* : Y^* (Y^* + X^*) = \frac{2}{9} \alpha (1 + X^*)^2 + \frac{2}{27} \alpha \beta X^{*2} [1] .$$

$$\bullet P_f = \vec{F}_f \cdot \vec{U}^* = -U^* \cdot F_f = -\frac{1}{2} \rho_e S C_f U^{*3} \text{ et } P_a + P_e + P_f = 0 ;$$

Or, l'énoncé impose un rendement optimal (cf. P_{ma}) et unitaire pour la transmission,

$$\text{soit : } \frac{8}{27} \rho_a A_a (W_g^* + U^*)^3 = 2\rho_e A_e (V^* + U^*)^2 V^* + \frac{1}{2} \rho_e S C_f U^{*3} ,$$

• Betz (formule de), rendement

soit avec α, β, X^* et Y^* , $Y^*(Y^* + X^*)^2 = \frac{4}{27}\alpha(1 + X^*)^3 - \frac{2}{27}\alpha\beta X^{*3}$ [2].

6. $\frac{[2]}{[1]} \Rightarrow X^* + Y^*$; $\frac{[1]^2}{[2]} \Rightarrow Y^* = Y^*(X^*) \Rightarrow$ par élimination de Y^* , il reste une équation pour donner $X^* \Rightarrow Y^*$.

A.N. : $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-2}$; $\alpha\beta = 0,3375$; $X^* = 0,44$ d'où $Y^* = 0,0299$.

X^* diminue de manière notable à cause des frottements visqueux (quadratiques à cette vitesse). L'augmentation de V^* traduit le meilleur prélèvement d'énergie du à la viscosité).

7. • L'incompressibilité de l'air est toujours vraie tant que $W_g \ll C_{son}$, ce qui est vrai.

- L'écoulement de l'air autour de l'hélice n'a pas de raison d'être irrotationnel (translation, modèle unidimensionnel).
- La turbulence n'est pas prise en compte, ce qui rend contestable le caractère parfaitement stationnaire de l'écoulement.
- Le rendement de propulsion unitaire n'est pas possible.

3.3.3.6. Effet de carène liquide : cause du naufrage d'un car-ferry

On se propose d'examiner comment le transport de liquide dans un navire contribue à déstabiliser ce navire vis à vis du roulis. C'est probablement à cet "effet de carène liquide" qu'est dû le naufrage du car-ferry Herald of Free Enterprise en mer du Nord : une importante quantité d'eau avait envahi les cales, une porte étant restée ouverte ; le navire, déstabilisé, s'était ensuite couché sur le côté...

On adopte le modèle suivant :

L'eau est un liquide de masse volumique ρ , en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme d'intensité \vec{g} ; cet équilibre de l'eau concerne aussi bien l'eau extérieure au navire que l'eau éventuellement embarquée ; cet équilibre est supposé maintenu quel que soit le mouvement du navire, ce qui permet d'utiliser le théorème d'Archimède.

On néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air devant celle exercée par l'eau.

Le navire est un solide creux, de centre d'inertie G , de masse M , non homogène.

La surface qui limite ce solide est un parallélépipède rectangle, d'axe parallèle à une direction \vec{u}_x horizontale, et de longueur h le long de \vec{u}_x ; sa section par un plan $X = \text{Cste}$, de largeur b , immergée à l'équilibre sur une profondeur a , est représentée sur la figure 1 ; enfin on suppose que G est à une hauteur c du fond du navire, et que la répartition des masses du navire ne dépend que de Z .

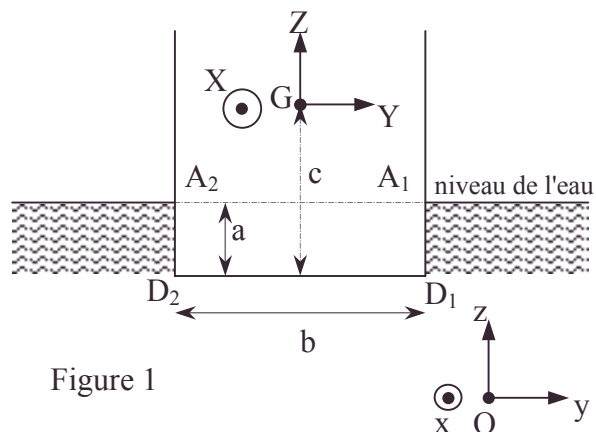


Figure 1

(Oxyz) : repère galiléen dont Oz est la verticale ascendante.

(GXYZ) : repère lié au navire.

GZ est perpendiculaire au fond du navire.

- Archimède [théorème d'], bilan de puissance, centre de masse, centre d'inertie, effet de carène liquide, équilibre, hélice, rendement, statique des fluides, turbulence, unidimensionnalité, viscosité, visqueux

1.a. Rappeler l'énoncé du théorème d'Archimède. En déduire la relation à l'équilibre entre ρ , a , b , h et M .

b. Montrer que cet équilibre est stable vis à vis des mouvements de translation du navire.

c. Cette stabilité vis à vis des translations est-elle remise en cause si le navire a embarqué de l'eau à fond de cale ?

Dans toute la suite, on suppose que à chaque instant, la somme des forces appliquées au navire est nulle, et on s'intéresse aux mouvements de rotation du navire autour de l'axe GX (roulis) dans le référentiel barycentrique $Gxyz$, repérés par l'angle θ conformément à la figure 2. $\theta = (Gy, GY)$

A_1A_2 : niveau de l'eau défini à la Figure 1 pour $\theta = 0$.

B_1B_2 : niveau de l'eau lorsque le navire a tourné de l'angle θ .

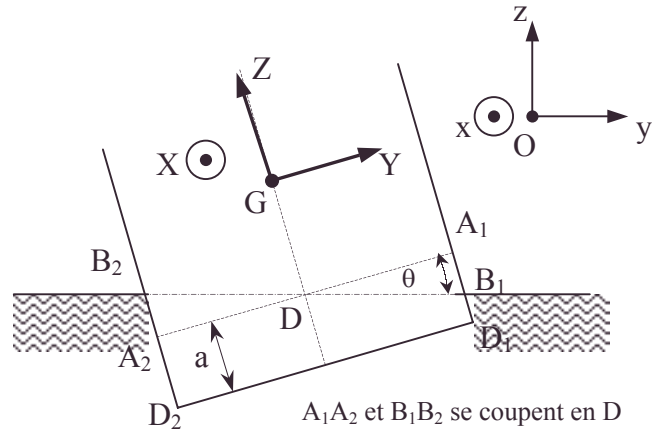


Figure 2

2. Dans cette question, le navire n'a pas embarqué d'eau à l'intérieur.

a. Montrer que les distances DB_1 et DB_2 sont égales.

b. Soient C_1 (resp. C_2) le centre d'inertie du prisme droit d'arête Dx , de section DA_1B_1 (resp. DA_2B_2), et de longueur h . Etablir l'expression du volume V du prisme de centre d'inertie C_1 en fonction de b , h et θ , à l'ordre 1 en l'infiniment petit θ .

Montrer que si C_0 désigne le centre de poussée à l'équilibre, point géométrique lié au bateau, et C le centre de poussée lorsque le navire a tourné de θ , on a la relation :

$\overrightarrow{C_0C} = \rho \frac{V}{M} \overrightarrow{C_1C_2}$. En déduire l'expression de $\overrightarrow{C_0C}$ à l'ordre 1 en l'infiniment petit θ sous

la forme : $\overrightarrow{C_0C} = f(a, b) \cdot \theta \cdot \vec{y}$, où $f(a, b)$ est une fonction de a et b à déterminer.

c. En déduire l'expression du moment en G de la poussée d'Archimède en fonction de M , g , a , b , c et θ , puis la condition de stabilité du navire vis à vis du roulis, portant sur a , b , c .

d. A-t-on intérêt à charger des automobiles sur le pont ou à fond de cale sur un car-ferry ? Justifier.

e. Vérifier que, b et c étant fixés, le choix $a = \frac{b}{\sqrt{6}}$ est le plus mauvais possible.

3. On envisage maintenant le cas où le navire a embarqué à fond de cale de l'eau sur une hauteur ka (soit un volume d'eau $kabh$) avec $0 \leq k \leq 1$. On suppose que cette eau n'est pas entraînée par la rotation du navire, c'est-à-dire que sa surface libre reste horizontale. En outre, on suppose que θ est suffisamment faible pour que l'eau couvre en permanence la totalité du fond du navire de surface bh .

a. Exprimer la nouvelle profondeur immergée a' en fonction de k et de a .

b. Déduire – sans calcul, mais avec un raisonnement soigné – de la question 2., l'expression du moment en G des forces exercées sur le navire par l'eau embarquée à l'intérieur du navire.

c. En déduire la nouvelle condition de stabilité du navire en fonction de k , a , b , c . Commenter l'effet de l'eau embarquée.

d. Vérifier que lorsque k tend vers 0, cette nouvelle condition se simplifie en $c < \frac{a}{2}$.

Comment expliquez-vous qu'on ne retrouve pas la condition obtenue en 2.c. ?

4. On envisage enfin le cas des navires transporteurs de gaz liquéfiés où on choisit de compartimenter la cale en $2n$ sous-cales étanche identiques de longueur $\frac{b}{2n}$. Pour

simplifier, on suppose que le gaz liquéfié transporté a la même masse volumique que l'eau. Lorsque les sous-cales sont toutes vides, le navire est immergé sur une profondeur a comme en 2.. On suppose dans la suite que toutes les sous-cales sont remplies sur une même hauteur ka .

Etablir la nouvelle condition de stabilité en fonction de n , k , a , b , c . (il est recommandé de se ramener au cas 3. de manière intuitive, avant de justifier le résultat par un raisonnement soigné). Commenter l'intérêt de compartimenter la cale.

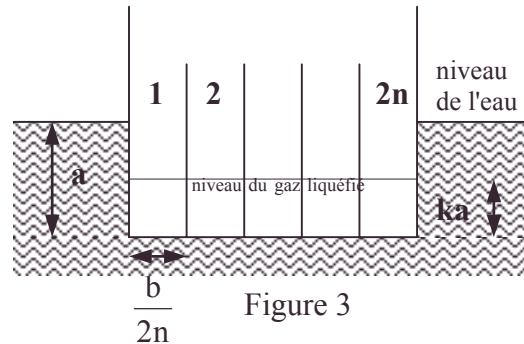


Figure 3

Centrale ; Durée : 2h

Corrigé

1.a.α. Tout corps plongé dans un liquide subit une force de bas en haut égale au poids de liquide déplacé et appliquée au centre d'inertie du liquide déplacé.

β. A l'équilibre de ce corps flottant : le poids est équilibré par la poussée d'Archimède : $Mg = \rho vg$; $M = \rho abh$.

b. Trois types de translation de base : selon Ox , Oy , Oz :

α. Selon Ox et Oy le système est invariant par translation, l'équilibre demeure.

β. Selon Oz , si a augmente, la poussée d'Archimède augmente et ramène à la position précédente ; inversement si a diminue, le poids ramène à la position d'équilibre. Conclusion : l'équilibre est stable vis à vis des mouvements de translation.

c. Si dans la position d'équilibre précédente on ajoute de l'eau à fond de cale, le poids à considérer est modifié ($M' = \rho a'bh$) et donc a devient a' mais les raisonnements identiques à 1.b. montrent que cet équilibre est stable vis à vis des translations.

2.a. $A_2D = A_1D$; $\widehat{A_1DB_1} = \theta = \widehat{A_2DB_2}$ (angles opposés par le sommet) ; angles droits en A_1 et A_2 . Les triangles A_1DB_1 et A_2DB_2 ayant un côté égal entre 2 angles égaux sont égaux : $\Rightarrow DB_2 = DB_1$.

b.α. Soit S la surface de la section DA_1B_1 ; $S = \frac{1}{2} DA_1 \cdot A_1B_1 = \frac{1}{8} b^2 \tan \theta$.

Le volume du prisme $V = Sh = \frac{1}{8} b^2 h \tan \theta$ et au 1^{er} ordre : $V = \frac{1}{8} b^2 h \theta$.

β. C_0 est le barycentre du liquide supposé présent dans le prisme de section $A_1A_2D_2D_1$;

C est le barycentre du liquide supposé présent dans le prisme de section $B_1B_2D_2D_1$.

$$\left(\int_{B_1B_2D_2D_1} dm \right) \overrightarrow{OC} = \int_{B_1B_2D_2D_1} \overrightarrow{ON} dm = \iiint_{A_1A_2D_2D_1} \overrightarrow{ON} dm - \iiint_{DA_1B_1} \overrightarrow{ON} dm + \iiint_{DA_2B_2} \overrightarrow{ON} dm$$

$$\rho abh \cdot \overrightarrow{OC} = \rho abh \overrightarrow{OC_0} - \overrightarrow{OC_1} \rho V + \rho V \overrightarrow{OC_2} ; \Rightarrow$$

- centre d'inertie, développement au premier ordre ou plus, équilibre, ordre, poussée d'Archimède, stabilité

$$\rho abh \cdot \overrightarrow{C_0 C} = \rho V C_1 C_2 ; \text{ or } \rho abh = M \text{ cf. 1.a. } \Rightarrow \overrightarrow{C_0 C} = \frac{\rho V}{M} \overrightarrow{C_1 C_2}.$$

Projetons C_1 et C_2 dans le repère DXYZ :

Le barycentre est au tiers (à partir de la base) de chaque médiane.

$$\overrightarrow{DC_1} = 2 \frac{b}{6} \vec{Y} - \vec{Z} \frac{b}{6} \tan \theta ;$$

$$\overrightarrow{DC_2} = -2 \frac{b}{6} \vec{Y} + \vec{Z} \frac{b}{6} \tan \theta.$$

$$\overrightarrow{C_1 C_2} = \overrightarrow{DC_2} - \overrightarrow{DC_1} = -\frac{2b}{3} \vec{Y}.$$

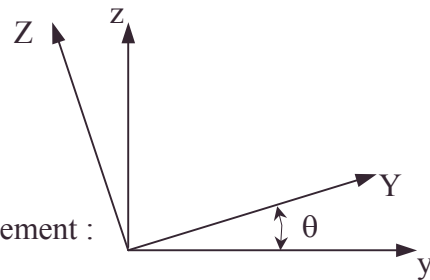
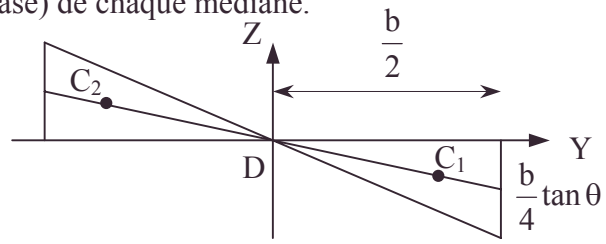
Projetons \vec{Y} dans Gxyz : $\vec{Y} = \vec{y} \cos \theta + \vec{z} \sin \theta ;$

$$\overrightarrow{C_1 C_2} = -\frac{2b}{3} (\vec{y} \cos \theta + \vec{z} \sin \theta) \text{ et au premier}$$

ordre en $\theta :$

$$\overrightarrow{C_0 C} = \frac{\rho V}{M} \overrightarrow{C_1 C_2} = -\frac{2b}{3} \rho \cdot \frac{1}{8} \frac{b^2 h \theta}{\rho abh} (\vec{y} + \vec{z} \theta) \text{ d'où finalement :}$$

$$\overrightarrow{C_0 C} = \frac{-b^2}{12a} \theta \vec{y} \Rightarrow f(ab) = \frac{-b^2}{12a}.$$



$$\text{c. } \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{Archimède}} = \overrightarrow{GC} \wedge (-\rho g \vec{V}) = (\overrightarrow{GC_0} + \overrightarrow{C_0 C}) \wedge (\rho g V) \vec{z} ; \text{ or } \overrightarrow{GC_0} = \left(-c + \frac{a}{2}\right) \vec{z} ;$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G^{\text{Archimède}} = \left(-c + \frac{a}{2}\right) (\vec{z} \cos \theta - \vec{y} \sin \theta) \wedge Mg \vec{z} + \left(\frac{-b^2 \theta}{12a} \vec{y}\right) \wedge Mg \vec{z} ; \text{ et au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } \theta$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G^{\text{Archimède}} = -\left(-c + \frac{a}{2}\right) Mg \theta \vec{x} - \frac{b^2}{12a} Mg \theta \vec{x} = -Mg \theta \left(\frac{b^2}{12a} - c + \frac{a}{2}\right) \vec{x}.$$

Ce moment est de rappel du type couple de torsion si $\mathcal{M}_{Gx} = -K\theta$ avec $K > 0$, soit :

$c < \frac{b^2}{12a} + \frac{a}{2}$. Cela assure la stabilité ; en effet, si $J \ddot{\theta} = -K\theta$: on a des oscillations, qui montrent le retour à la position d'équilibre $\theta = 0$ après en avoir été écarté.

d. La question précédente montre que c ne doit pas dépasser une limite c_e ; il vaut mieux diminuer c que l'augmenter. On doit prendre la précaution de remplir les cales plutôt que de charger le pont.

$$\text{e. } c_e = \frac{b^2}{12a} + \frac{a}{2} \text{ est la somme de deux termes, elle est minimale pour } \frac{b^2}{12a} = \frac{a}{2} \text{ quand}$$

le produit des deux termes est constant ; or $\frac{b^2}{12a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{b^2}{24} = \text{cste}.$

c_e est donc minimal pour $\frac{b^2}{12a} = \frac{a}{2}$ soit $a = \frac{b}{\sqrt{6}}$. Le couple de rappel est donc minimisé.

Ce choix est donc mauvais.

3.a. A l'équilibre, la poussée d'Archimède compense le poids de l'eau embarquée et le poids du bateau : $\rho a' b h g = Mg + \rho k a b h g$; or $Mg = \rho a b h \Rightarrow a' = a(1+k)$. Formellement a est remplacé par $a(1+k)$.

b. L'eau embarquée étant en équilibre a une action par son poids opposée à celle de la poussée d'Archimède du volume déplacé identique en force et en couple. On ne met pas en jeu a mais seulement ka .

De **2.** on déduit par remplacement de a par ka et g par $-g$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_G^{\text{poids eau embarquée}} = \rho g b h g \theta \left(\frac{b^2}{12ka} - c + \frac{ka}{2} \right) \vec{x}.$$

c. Le moment résultant en G de la poussée d'Archimède totale et du moment du poids d'eau embarquée s'écrit, vu $a' = a(1+k)$:

$$\mathcal{M}_{Gx} = -\rho g a b g (1+k) \left[\frac{b^2}{12a(1+k)} - c + \frac{a}{2}(1+k) \right] \theta + \rho a b h k g \left[\frac{b^2}{12ka} - c + \frac{ka}{2} \right] \theta ;$$

$$\mathcal{M}_{Gx} = -\rho g a b g \left(-c + \frac{a}{2}(1+2k) \right) \theta ; \text{ la stabilité (cf. } \ddot{\theta} = -K\theta \text{) exige :}$$

$$K = \rho g h a b g \left[-c + \frac{a}{2}(1+k) \right] > 0 \text{ soit } c < \frac{a}{2}(1+2k).$$

$$c_{e_2} = \frac{a}{2} + ka < c_{e_1} \text{ si } ka < \frac{b^2}{12a} \text{ soit si } k < \frac{b^2}{12a^2} ; c_{e_2} > c_{e_1} \text{ si } k > \frac{b^2}{12a^2}.$$

La stabilité diminue (à a et k donné) pour b grand : les bateaux plus "plats" qui remplissent d'eau leurs cales sont plus instables à k donné.

$$\text{d.}\alpha. k \rightarrow 0 \Rightarrow c < \frac{a}{2}.$$

\beta. Quand $k \rightarrow 0$, l'hypothèse selon laquelle l'eau recouvre la totalité du fond avec une surface libre horizontale n'est plus satisfaite.

4. Pour chaque sous-cale i de barycentre G_i , le raisonnement **3.b.** permet d'obtenir, en

$$\text{remplaçant } b \text{ par } \frac{b}{2n} : \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G_i}^{\text{poids liquide } i \text{ embarqué}} = \rho g h k a \frac{b}{2n} \theta \left(\frac{b^2}{48ka n^2} - c + \frac{ka}{2} \right) \vec{x} ;$$

Sa contribution en G s'écrit : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G^{\text{poids liquide } i \text{ embarqué}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G_i}^{\text{poids liquide } i \text{ embarqué}} + \overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{P}_i$, \vec{P}_i étant le poids embarqué i .

Le moment total : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G = 2n \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G_i} + \sum_i \overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{P}_i$; or, $\sum_i \overrightarrow{GG_i} \wedge \vec{P}_i = \vec{0}$ par symétrie

quand toutes les sous-cales sont occupées et le moment résultant en G de la poussée d'Archimède totale et du poids du liquide embarqué s'écrit :

$$\mathcal{M}_{Gx} = -\rho g h a b (1+k) \left[\frac{b^2}{12a(1+k)} - c + \frac{a}{2}(1+k) \right] \theta + 2n \rho g h \frac{kab}{2n} \left[\frac{b^2}{48an^2k} - c + \frac{ak}{2} \right] \theta ;$$

$$\mathcal{M}_{Gx} = -\rho g h a b \left[\frac{b^2}{12a} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) + \left(-c + \frac{a}{2}(1+2k) \right) \right] \theta.$$

$$\text{La nouvelle condition de stabilité (cf. } K > 0 \text{) est : } c < \frac{a}{2}(1+2k) + \frac{b^2}{12a} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right).$$

On voit que la condition de stabilité est favorisée par n élevé d'où l'intérêt de compartimenter la cale.

3.3.4. Océanographie physique

3.3.4.1. Houle

Nous étudions les déformations de la surface d'un fluide incompressible contenu dans un bassin d'extension horizontale infinie et de profondeur H .

Le bassin est surmonté par un gaz très léger si bien que la pression au-dessus du fluide P_0 est constante. Le fluide est placé dans le champ de gravité terrestre que nous prendrons uniforme et dérivant du potentiel $V(z) = g z$;

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$: accélération de la pesanteur.

Les coordonnées utilisées sont celles de la figure 1.

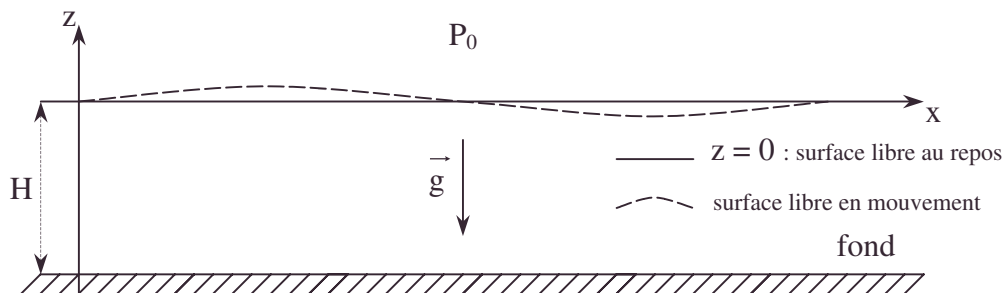


Figure 1

Nous nous intéressons à de petites déformations du type "ondes progressives" selon Ox (ceci représente bien la houle).

Toutes les grandeurs physiques génériquement désignées par ω s'écriront :

$$\omega(x, z, t) = \omega_e(x, z, t) + \delta\omega(x, z, t) ;$$

$\omega_e(x, z, t)$: valeur de ω au repos ;

$\delta\omega(x, z, t)$: perturbation de ω par rapport au repos ;

$$\delta\omega(x, z, t) = \delta\omega(z) \cos(kx - \omega t) = \text{Re} \left\{ \delta\mathcal{W}(z) e^{i(kx - \omega t)} \right\}.$$

1. A l'intérieur du fluide on a :

$$p(x, z, t) = p_e(x, z, t) + \delta p(x, z, t) ; \quad \vec{v}(x, z, t) = \delta \vec{v}(x, z, t) ;$$

$p(x, z, t)$ = pression dans le fluide ; $\vec{v}(x, z, t)$ = vitesse dans le fluide.

1. En appliquant au fluide considéré le principe fondamental de la dynamique, donner les relations liant $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z, \delta p$ et ρ , ρ étant la masse volumique du fluide.

2. Montrer que l'incompressibilité du fluide entraîne pour $\delta v(x, z, t)$ la relation :

$$\frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0.$$

3. Donner les expressions de $\delta \mathcal{P}(z), \delta \mathcal{V}_x(z)$ et $\delta \mathcal{V}_z(z)$ en fonction de 2 constantes.

2. Le bassin est infiniment profond ($H \rightarrow \infty$).

a. Montrer que l'une des constantes introduites en 1.3. est nulle.

b. On admet que l'amplitude du déplacement d'un petit élément τ du fluide est petite devant la longueur d'onde horizontale λ de la houle $\left(\lambda = \frac{2\pi}{k} \right)$.

Déterminer la trajectoire de cet élément.

c. En déduire la forme de la surface libre du fluide.

d. En écrivant les conditions aux limites à la surface libre du fluide, déterminer la relation entre le nombre d'onde k , la pulsation ω et g (relation de dispersion).

3. Le bassin a maintenant une profondeur finie H.

a. En exprimant les conditions aux limites, déterminer la relation entre k, ω , g et H.

b. Pour une période de la houle de 10 secondes, à partir de quelle profondeur peut-on considérer le bassin comme infiniment profond, si la précision requise sur le nombre d'onde n'est que de 1% ?

E.N.S. ; Durée : 1h

Corrigé

1.1. ρ est constant : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$, et à l'équilibre $\rho \frac{D\vec{v}_e}{Dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P_e = \vec{0}$.

Par soustraction, il vient $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0} - \overrightarrow{\text{grad}} (P - P_e) = -\overrightarrow{\text{grad}} \delta P$.

En linéarisant : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \approx \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, soit finalement $\rho \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} \delta P$.

2. L'incompressibilité se traduit par $\text{div } \vec{v} = 0$, soit $\text{div } \delta \vec{v} = 0$, ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0 ; \text{ comme } \frac{\partial}{\partial y} = 0, \text{ il reste } \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0.$$

$$3. (1.1.) \text{ s'écrit } \rho \frac{\partial \delta v_x}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x} \text{ ou aussi } -i\omega\rho\delta \mathcal{V}_x = -ik\delta \mathcal{P}. \quad ①$$

$$\rho \frac{\partial \delta v_y}{\partial t} = 0 \text{ ou aussi } -i\omega\rho\delta \mathcal{V}_y = 0.$$

$$\rho \frac{\partial \delta v_z}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial z} \text{ ou aussi } -i\omega\rho\delta \mathcal{V}_z = -\frac{d\delta \mathcal{P}}{dz}. \quad ②$$

$$\text{et l'incompressibilité } \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} = 0 \text{ ou aussi } +ik\delta \mathcal{V}_x + \frac{d\delta \mathcal{V}_z}{dz} = 0. \quad ③$$

Remplaçons $\delta \mathcal{V}_x$ et $\delta \mathcal{V}_z$ de ① et ② dans ③ : $k^2 \delta \mathcal{P} = \frac{d^2 \delta \mathcal{P}}{dz^2}$, de solution dépendant de deux constantes :

$$\delta \mathcal{P} = A e^{kz} + B e^{-kz}$$

$$① \Rightarrow \delta \mathcal{V}_x = \frac{k}{\omega\rho} A e^{kz} + \frac{k}{\omega\rho} B e^{-kz}$$

$$② \Rightarrow \delta \mathcal{V}_z = -\frac{ik}{\omega\rho} A e^{kz} + \frac{ik}{\omega\rho} B e^{-kz}$$

2.a. Quand $z \rightarrow -H$ et que $H \rightarrow +\infty$, $B e^{-kz} \rightarrow +\infty$ ce qui est impossible sauf si $B = 0$ ce qu'on adopte.

b. $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$, soit encore $\frac{d\delta \vec{OM}}{dt} = \delta \vec{v}$ et par intégration sur \mathbb{C} ,

$$\delta \chi = \frac{k}{-i\omega\rho} A e^{kz} \text{ et } \delta Z = \frac{-ik}{-i\omega^2\rho} A e^{kz}.$$

En notation réelle :
$$\begin{cases} x = x_e + \frac{A_1 k}{\omega^2 \rho} \sin(kx - \omega t) \\ z = z_e + \frac{A_1 k}{\omega^2 \rho} \cos(kx - \omega t) \end{cases} \begin{cases} \text{avec } A_1 \neq A e^{kz_e} \\ \text{car } A_1 \text{ petit cf. fonction de } \delta\omega \end{cases}$$

La trajectoire de l'élément est donc un cercle de centre la position de repos (en absence de perturbation) et de rayon $\frac{A_1 k}{\omega^2 \rho}$ (il diminue avec la profondeur comme A_1).

c. La surface libre est une surface isobare :

$$P_0 = p_e + \delta p = (P_0 - \rho g z) + \operatorname{Re}(A e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}).$$

Si la perturbation est faible $z \neq 0 : e^{kz} \neq 1$; on a : $\rho g z = A \cos(kx - \omega t)$ soit une forme sinusoïdale.

d. Identifions les points extrêmes des trajectoires circulaires avec les sommets de la surface libre. On obtient $\frac{A}{\rho g} = \frac{A k}{\omega^2 \rho}$ soit $\omega^2 = k g$.

3. Bassin de profondeur finie H

a. Condition limite : $z = -H$; du sol, l'eau ne sort ni ne rentre verticalement : $\delta V_z = 0$ (cf. $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$) soit $-A e^{-kH} + B e^{kH} = 0$.

$$\text{On a : } B = A e^{-2kH} \Rightarrow \delta \mathcal{V}_z = -\frac{2i k A}{\omega \rho} e^{-kH} \sinh(k(z+H)).$$

$$\delta \mathcal{V}_x = \frac{2kA}{\omega \rho} e^{-kH} \cosh(k(z+H)).$$

$$\delta \mathcal{P} = A e^{-kH} \cosh(k(H+Z)).$$

- Trajectoire d'un élément de position d'équilibre x_e, z_e .

$$\delta \chi = \frac{\delta \mathcal{V}_x}{-i \omega} \Rightarrow \delta \chi = \frac{kA}{\omega^2 \rho} e^{-kH} \cosh k(Z+H) \sin(kx - \omega t).$$

$$\delta Z = \frac{\delta \mathcal{V}_z}{-i \omega} \Rightarrow \delta Z = \frac{kA}{\omega^2 \rho} e^{-kH} \sinh k(Z+H) \cos(kx - \omega t).$$

La trajectoire de l'élément est une ellipse aplatie (par la profondeur).

- surface libre ;

$$P = p_e + G \delta p = (p_0 - \rho g z) + A e^{-kH} \underbrace{\cosh(H+z)}_{\neq \cosh kH} \cos(kx - \omega t)$$

$$z = A \frac{e^{-kH} \cosh kH \cos(kx - \omega t)}{\rho g} : \text{la surface libre est sinusoïdale sous faible amplitude.}$$

• Assimilons les points extrêmes supérieurs de la trajectoire des points $z_e = 0$ et de la surface libre. On a : $\frac{A e^{-kH} \cosh kH}{\rho g} = \frac{kA}{\omega^2 \rho} e^{-kH} \sinh kH$.

On obtient la relation de dispersion $\omega^2 = k g \tanh kH$.

$$\mathbf{b.} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{T \sqrt{\frac{g}{k}}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{T^2 g} = \frac{\omega^2}{g}.$$

On cherche H_1 telle que $k_1 = \frac{\omega^2}{g} \coth kH_1$ vérifie $\frac{k - k_1}{k} = 1\%$.

- condition limite, équilibre, identification, perturbation [méthodes des], surface libre, trajectoire

$$\text{Soit } 0,99 = \tanh kH_1 \Rightarrow H_1 = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \operatorname{arctanh} 0,99.$$

$$\text{A.N. : } H_1 = 66 \text{ m.}$$

3.3.4.2. Mascaret

Dans ce qui suit, nous considérons un liquide supposé parfait et incompressible ; il est soumis à la pesanteur (accélération g) ; sa masse volumique est ρ . Il est contenu dans un canal à fond horizontal, de section rectangulaire avec parois verticales, de largeur uniforme a . Ox est un axe horizontal parallèle au canal. Tous les frottements sont négligés. On dispose en travers du canal un panneau P , susceptible de se déplacer, mais assurant néanmoins une séparation étanche. Jusqu'à l'instant $t = 0$, le liquide et le panneau P sont immobiles. A l'instant $t = 0$, on fait brusquement passer la vitesse de P , parallèle à Ox , à une valeur Δu non nulle, constante positive.

Du côté où le panneau avance, le niveau du liquide monte ; de l'autre côté, le niveau s'abaisse. Nous supposons que, du premier côté, le liquide présente une discontinuité de hauteur (figure 1) : il y a ainsi une onde qui se manifeste au niveau du plan P_1 contenant cette discontinuité, et se propage dans le canal à la célérité c .

Soit h la hauteur initiale du liquide, qui reste la hauteur dans le canal au-delà de P_1

Soit h' , la hauteur de liquide entre P et P_1 , supposée constante. Le liquide situé, à un instant donné, entre P et P_1 , est supposé être au repos par rapport à P .

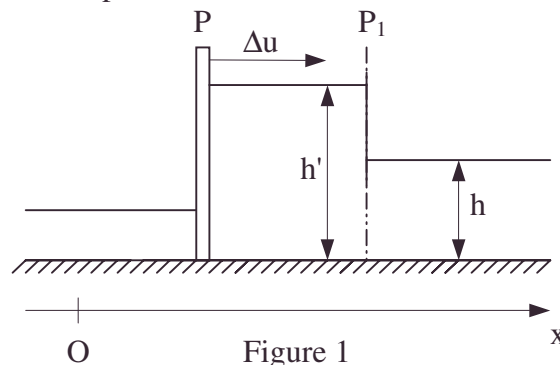


Figure 1

1.a. Quelle est la vitesse du liquide dans le canal au-delà du front d'onde P_1 ? (Justifier brièvement votre réponse).

b. Quelle serait cette vitesse, toutes les autres conditions étant maintenues, si le fluide était contenu dans un tuyau complètement rempli, (étant entendu qu'il n'y a plus alors de surélévation possible du fluide devant le panneau mobile) ?

Qu'est-ce qui marquerait alors le passage d'une onde ? Quelle en serait la célérité ?

2. Revenant aux conditions du problème, et exprimant la conservation de la matière, établir une première relation entre h , h' , C et Δu .

3. Soit deux plans B et B' , d'abscisses respectives x et $x + dx$ données, et \mathcal{T} la tranche de fluide comprise entre B et B' .

a. On suppose qu'à l'instant t le front d'onde P_1 est en B . Il est en B' à l'instant $t + dt$. Donner la relation entre dx et dt .

b. Par quelques schémas qualitatifs, montrer l'allure du fluide contenu dans la tranche \mathcal{T} entre les instants t et $t + dt$.

c. Quelle est la masse de \mathcal{T} à l'instant t ? à l'instant $t + dt$?

d. Exprimer la résultante des forces horizontales qui agissent sur (\mathcal{T}) en fonction de h , h' , ρ , g et a . On admettra, en le justifiant au besoin brièvement, que la répartition des pressions dans le fluide est hydrostatique.

e. En déduire une nouvelle relation entre h , h' , Δu , c et g .

4.a. Tirer de ce qui précède l'expression de c en fonction de h , h' et g .

b. Préciser la valeur limite c_e de c pour $\Delta h = h' - h$, $\Delta h \ll h$.

c. Calculer numériquement c_e pour $h = 1 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

5. On considère deux ondes de surélévation, D_1 et D_2 , se propageant dans le canal où le liquide est initialement au repos (figure 2). On supposera, pour simplifier, que les résultats obtenus précédemment s'appliquent à chacune des deux ondes D_1 et D_2 , (h' prenant respectivement les valeurs $h + \Delta h_1$ et $h + \Delta h_2$).

a. On se place dans la limite $\Delta h_1 \ll h, \Delta h_2 \ll h$; comment varie, au cours du temps, la distance entre les deux ondes ?

b. Comment convient-il de corriger qualitativement la réponse à la question précédente si l'on prend en compte l'influence des surélévations Δh_1 et Δh_2 ?

Quelle est alors l'évolution d'un profil de surface libre de liquide en forme de rampe (figure 3) ?

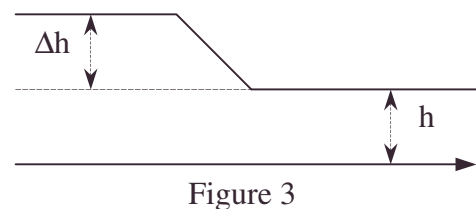
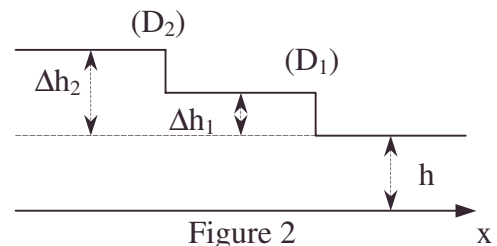
c. Les résultats précédents fournissent des éléments pour expliquer, au moins grossièrement, le phénomène de "mascaret", grosse vague isolée remontant les estuaires de certains fleuves à l'approche de la marée haute. Pouvez-vous très succinctement le commenter brièvement à la lumière des discussions précédentes en évaluant en particulier un ordre de grandeur de c ?

6. On considère maintenant la propagation des ondes du type précédent dans un courant de vitesse u uniforme, ($u > 0$), et on se place dans le cas $\Delta h \ll h$. Le débit volumique D_v du courant et la largeur a du canal étant imposée :

a. Montrer qu'il en résulte une relation entre u , h et D_v .

b. Montrer qu'il existe une hauteur critique h_c et donc une vitesse critique u_c définissant une zone de valeurs de h (et donc u) pour laquelle les ondes ne se propagent que vers l'aval (c'est-à-dire dans le sens du courant).

c. Calculer u_c et h_c pour $\frac{D_v}{a} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.



Centrale ; Durée 2h

Corrigé

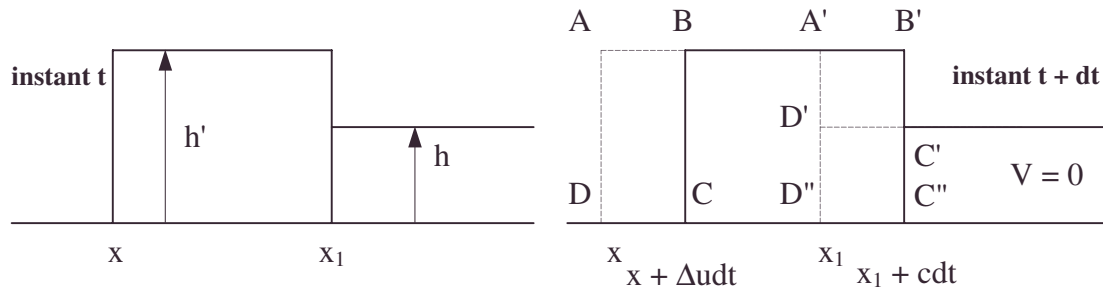
1.a. Avant l'arrivée de la manifestation de l'onde (ou ici de l'ébranlement avec discontinuité), aucune information ne laisse supposer qu'il y a un changement et $V = 0$.

b.α. Dans un tuyau rempli, le fluide transmet l'effet de pression immédiatement et par conservation du débit massique des fluides incompressibles $V = \Delta u$.

β. De fait, le fluide est légèrement compressible et transmet une information sur l'existence de la discontinuité avec une célérité (cf. son) c' telle que $c'^2 = (\chi_s \rho_0)^{-1} \gamma$.

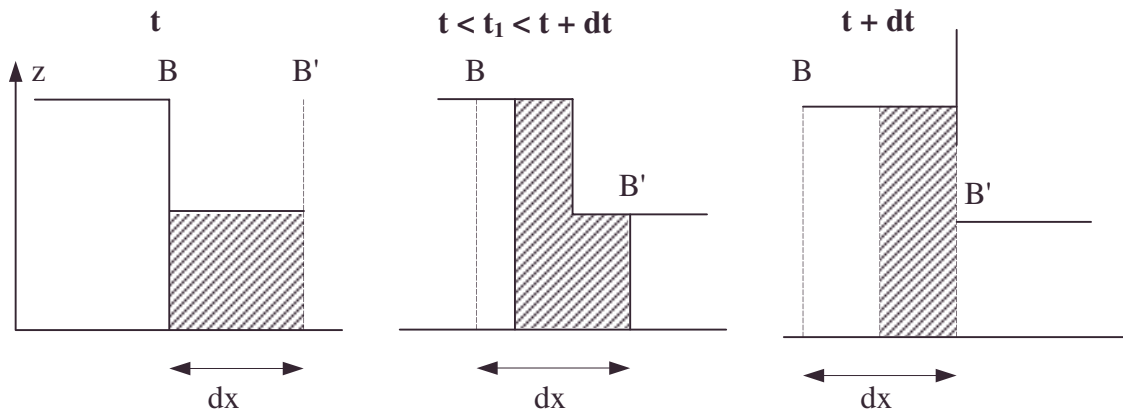
γ. On a une onde de choc avec discontinuité de vitesse : 0 devant, Δu derrière avançant à une vitesse c a priori différente de c' .

2. Ecrivons la conservation de la masse entre les plans P (vitesse Δu) et P_1 (vitesse c) entre les instants t et $t + dt$.



Le liquide du volume ABCD a été repoussé et tout se passe comme s'il se retrouvait en A'B'C'D' (la partie D''D'C''C'' ayant été absorbée et transformée d'un liquide immobile en un liquide de vitesse $v = \Delta u$, d'où : $\Delta u \cdot h' \cdot a = c(h' - h) \cdot a$; $\frac{h}{h'} = 1 - \frac{\Delta u}{c}$ ou $\frac{h' - h}{h'} = \frac{\Delta u}{c}$.

b. N.B. : B et B' n'ont plus le même sens qu'en 2.



On visualise autrement la conservation de la masse. La quantité supplémentaire de liquide à être animée de la vitesse Δu : $m(t)$ est hachurée à gauche et se retrouve ultérieurement (en hachuré).

c.α. $m(t) = \rho a h dx$.

β. $m(t + dt) = \rho a h' dx$.

d. $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \text{grad } p$; selon l'axe vertical, il n'y a pas de variation de V .

$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$. Répartition des pressions formellement hydrostatique.

$p = p_0 - \rho g(z - h')$ en B : répartition hydrostatique.

$p = p_0 - \rho g(z - h)$ en B' : répartition hydrostatique.

$p = p_0$ dans l'air.

$$\vec{F}_{\text{horizontale}} = \left(\iint_{\text{de B}}^{\text{plan}} p dS - \iint_{\text{de B'}}^{\text{plan}} p dS \right) \vec{x} = \rho g a \left(\frac{h'^2 - h^2}{2} \right) \vec{x}.$$

e. Appliquons le théorème de variation de la quantité de mouvement à \mathcal{T} :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{pesanteur}} + \vec{F}_{\text{sol sans frottement}}. \quad \mathcal{T} \text{ ayant pour masse } m(t).$$

Projetons sur Ox :

$$m(t) \frac{\Delta u}{dt} - 0 = \rho g a \frac{(h'^2 - h^2)}{2} \text{ soit } \rho a h c \Delta u = \rho g a \left(\frac{h'^2 - h^2}{2} \right) \text{ (vu } m = \rho a h dx \text{ et } dx = c dt).$$

$$\Rightarrow \Delta u h c = g \left(\frac{h'^2 - h^2}{2} \right).$$

$$4.a. \text{ vu } 2. \Delta u = c \frac{h' - h}{h} \Rightarrow c^2 = g \left(\frac{h + h'}{2} \right) \frac{h'}{h}; c = \sqrt{g \left(\frac{h + h'}{2} \right) \frac{h'}{h}};$$

$$b. h' = h + \Delta h; c = \sqrt{g \frac{(2h + \Delta h)}{2} \left(1 + \frac{\Delta h}{h} \right)} \rightarrow c_e = \sqrt{gh} \text{ quand } \Delta h \rightarrow 0.$$

$$c. AN: c_e = 3,16 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$5.a. c_1 = \sqrt{g \left(h + \frac{\Delta h_1}{2} \right) \left(1 + \frac{\Delta h_1}{h} \right)} \rightarrow c_e; c_2 = \sqrt{g \left(h + \frac{\Delta h_2}{2} \right) \left(1 + \frac{\Delta h_2}{h} \right)} \rightarrow c_e.$$

La distance entre les deux fronts ne varie pas, les deux vitesses étant égales.

$$c_1 = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta h_1}{h} \right); c_2 = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta h_2}{h} \right).$$

b.α. $c_2 > c_1$; la distance $D_1 D_2$ diminue.

β. La rampe s'étudie par la limite d'une fonction en escalier à p marches égales.



$$\Delta h_n = n \frac{\Delta h}{p}; c_n = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta h}{p} n \right); c_{n+1} = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta h}{p} (n+1) \right);$$

$$c_{n+1} - c_n = \sqrt{gh} \frac{3}{4} \frac{\Delta h}{p} \forall n; \text{ les marches d'escaliers vont toutes se rétrécir de même manière pour } p \text{ donné.}$$



La pente de la rampe va augmenter jusqu'à l'infini (au delà, il y aura déferlement avec l'instabilité connue).

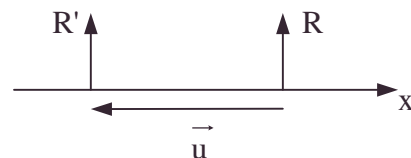
c. Lors de la marée montante, une masse d'eau poussée par l'océan arrive avec surélévation et vitesse à la rencontre d'eau plus tranquille de vitesse négligeable; il suffit d'ailleurs de changer de repère, par exemple dans le repère lié à l'eau du fleuve. La vitesse de l'eau du fleuve y est nulle. La rampe (cf. onde de la marée) avancera en se déformant et finit par constituer une barre déferlante.

Si $\Delta h \ll h$, $c = 3,16 \text{ m.s}^{-1} = 11,4 \text{ km/h}$.

La barre est stationnaire si $c = V_{\text{écoulement fleuve}}$ et elle avance si $c > V_{\text{écoulement fleuve}}$.

$$6.a. D_v = \iint \vec{V} \cdot d\vec{S} = u a h.$$

b. Vu 5.c., dans le repère R' lié au rivage, $c' = c - u = -u + \sqrt{gh}$; la barre du mascaret remonte le fleuve vers l'amont si $c' > 0 \Rightarrow \sqrt{gh} > u$,



d'où en remplaçant $h = \frac{D_v}{ua}$,

$$g \frac{D_v}{a} > u^3 \Rightarrow u_c = \left(\frac{g}{a} D_v \right)^{\frac{1}{3}} ; h_c = \left(\frac{D_v}{a g^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} ;$$

Propagation vers l'aval pour $u > u_c$ et $h < h_c$ soit $c' < 0$.

c. $u_c = 2,15 \text{ m.s}^{-1}$; $h_c = 0,464 \text{ m}$. Ces ordres de grandeur sont intéressants.

3.3.4.3. Résonance de marée

Aspect dynamique

On se propose d'étudier la propagation suivant Ox d'une onde de marée de longueur d'onde λ et de période τ dans un océan plan (figure 1), de profondeur h constante, constitué d'un liquide homogène, non visqueux, incompressible, de masse volumique ρ .

L'accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, dirigée suivant Oz, est uniforme.

La surface libre de l'océan définie par $P = P_0$ (P_0 pression atmosphérique, supposée uniforme et constante) a pour équation $z = s(x, t)$.

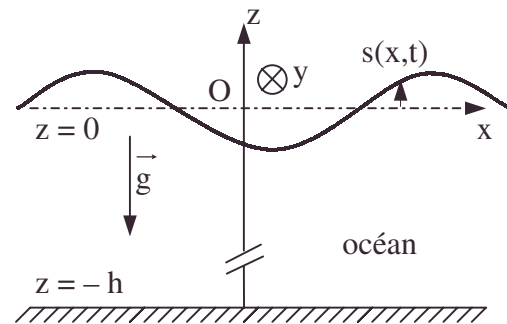


Figure 1

A l'équilibre, cette surface est le plan $z = 0$. On ne tiendra pas compte de l'accélération génératrice des marées.

Pour l'étude d'une onde de marée, les hypothèses suivantes sont raisonnables : l'amplitude a du mouvement de l'eau et la profondeur h de l'océan sont faibles devant la longueur d'onde λ : l'amplitude des marées (c'est-à-dire l'amplitude du mouvement vertical de l'eau) est faible devant h .

La vitesse de l'eau au point (x, y, z) à l'instant t est appelée $\vec{u}(x, y, t)$. Les composantes horizontales de la vitesse sont supposées ne pas dépendre de z .

Il n'y a pas de courant permanent.

1. Soit une grandeur $\alpha = \alpha_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right)$.

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, et montrer que ces quantités sont

respectivement de l'ordre de grandeur de $2\pi \frac{\alpha_0}{\lambda}$ et $2\pi \frac{\alpha_0}{\tau}$.

Pour les questions 2., 3., 4. et 5., on admettra que les solutions cherchées vérifient les mêmes propriétés d'ordre de grandeur des dérivées partielles, bien que l'on ne se restreigne alors pas à la propagation d'une onde sinusoïdale.

On s'aidera de cette propriété pour simplifier les équations obtenues, en comparant les différents termes entre eux.

2. En écrivant l'équation locale de conservation du volume du liquide incompressible, calculer la composante verticale de la vitesse u_z en fonction de $\frac{\partial u_x}{\partial x}$. En déduire que u_z

est petite par rapport à la composante horizontale u_x , dans la mesure où $h \ll \lambda$.

3. Montrer que la conservation du liquide entraîne également $\frac{\partial(h+s)}{\partial x} u_x + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$.

L'amplitude de la marée étant faible devant la profondeur, donner une forme simplifiée de cette relation.

4.a. Montrer que l'accélération d'une particule située en (x, y, z) à l'instant t s'écrit :

$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ et que la condition $a \ll \lambda$ permet de ne conserver que le

terme linéaire en vitesse (on remarquera que u_x est de l'ordre de grandeur de $\frac{a}{\tau}$).

b. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique pour le liquide. On négligera l'accélération du liquide suivant la verticale $\frac{\partial u_z}{\partial t}$ devant g .

En déduire la pression en tout point du liquide.

5.a. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $s(x, t)$. Quelle en est la solution générale ? Donner l'expression de la vitesse de propagation c .

b. Justifier l'approximation $\frac{\partial u_z}{\partial t} \ll g$.

6. On s'intéresse maintenant à la propagation suivant Ox d'ondes sinusoïdales dans un océan de longueur L et de profondeur h (voir figure 2). Quelles sont les fréquences d'oscillation possibles de la surface ?

(On pourra utiliser la notation complexe).

Application numérique : en déduire la longueur minimum d'un océan de profondeur $h = 3000$ m, oscillant avec une période $\tau = T_{L2} = 12$ heures 25 minutes.

Commentaires

7. Soit une baie rectangulaire de longueur L et de profondeur h (figure 3) s'ouvrant sur l'océan. Celui-ci impose la hauteur d'eau à l'entrée de la baie : $s(x=0, t) = s_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$.

Calculer la hauteur de la marée en tout point de la baie. Préciser la condition pour laquelle la marée devient très grande au fond de la baie.

Quels effets peuvent la limiter ?

Application numérique : les marées les plus fortes du monde sont observées dans la baie de Fundy (Canada) : longue de 270 km, cette baie a une profondeur moyenne $h_m = 73$ m. Sachant que l'amplitude de la marée (différence de hauteur entre la pleine et

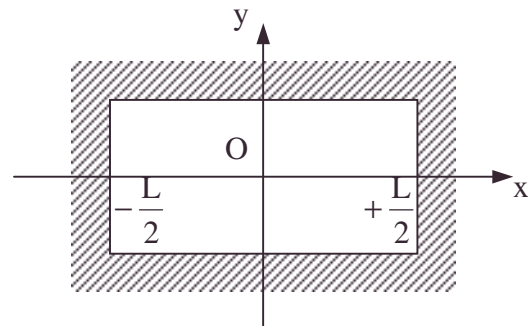


Figure 2

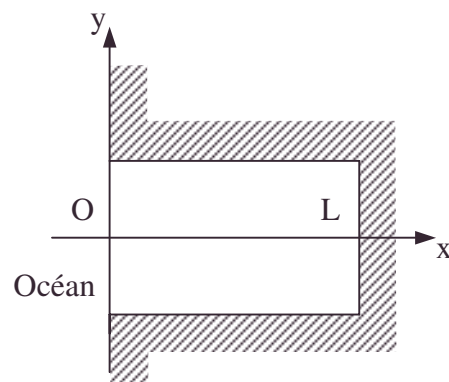


Figure 3

la basse mer) à l'entrée de la baie est de 2,2 m et sa période T_{L2} , quelle est l'amplitude de la marée au fond de la baie ? Y a-t-il haute mer au même instant dans toute la baie ?

ENS ; durée : 2 h.

Corrigé

1. En notation complexe : $\alpha = \alpha_0 e^{j2\pi\left(\frac{t-x}{\tau\lambda}\right)}$; $\frac{\partial\alpha}{\partial x} = -\frac{2\pi j}{\lambda}\alpha$; $\frac{\partial\alpha}{\partial t} = j\frac{2\pi}{\tau}\alpha$.

$\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ est de l'ordre de $2\pi\frac{\alpha_0}{\lambda}$; $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ est de l'ordre de $2\pi\frac{\alpha_0}{\tau}$.

2. $\text{div } \vec{V} = 0$ s'écrit $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$; or, $\begin{cases} u_x = u_x(x, t) \\ u_y = u_y(x, t) \end{cases}$ (cf. énoncé).

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial u_x}{\partial x}(x, t).$$

Intégrons : $u_z = -\frac{\partial u_x}{\partial x}z + c_1(x, y, t)$; or $\forall x, y$ l'eau ne sort ni ne rentre verticalement

en $z = -h$: $u_z(-h) = 0$:

$$c_1(x, y, t) = \frac{\partial u_x}{\partial x}(x, t) \cdot (-h) \Rightarrow u_z = -\frac{\partial u_x}{\partial x}(z + h) ;$$

Or, $|z| < h \Rightarrow |u_z| < \left|\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|(h + h)$, soit $|u_z| < \frac{2\pi}{\lambda}|u_x|2h$, ainsi si $|h| \ll \lambda$, $\frac{|u_z|}{|u_x|} \rightarrow 0$,

donc $|\vec{u}| \sim |u_x|$.

3. Considérons la masse m comprise à l'instant t entre les plans x et $x + \Delta x$:

$$m = \iiint \rho d\tau \quad ; \quad \frac{Dm}{Dt} = 0 = \frac{dm}{dt} + \iint \rho \vec{V} d\vec{S} \quad ; \quad m = \rho(h + s)L\Delta x, \quad L \text{ étant la dimension}$$

transversale.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(h + s)\rho L\Delta x + \underbrace{\rho L u_{(x+\Delta x, t)}(h + s)_{(x+\Delta x, t)} - \rho u_{x(x, t)}(h + s)_{(x, t)}}_{\rho L \frac{\partial}{\partial x}((h + s)u_x)\Delta x},$$

soit finalement, comme $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((h + s)u_x) = 0$.

$$4.a. a_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x}u_x + \overbrace{\frac{\partial u_i}{\partial y}u_y}^0 + \frac{\partial u_i}{\partial z}u_z \quad \forall i, \text{ soit } \vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}u_z.$$

$$\left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}|\vec{u}| = \frac{2\pi}{\lambda}|u_x| \text{ de l'ordre de } \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{\tau} \Rightarrow \left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}u_x\right| \text{ de l'ordre de } \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 ;$$

$$\left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right| = \frac{2\pi}{\tau}|\vec{u}| = \frac{2\pi}{\tau}|u_x| \text{ de l'ordre de } \frac{2\pi}{\tau}\frac{a}{\tau} \cdot \left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}u_z\right| = \left|\frac{\partial u_z}{\partial z}u_z\right| = \left|\frac{\partial u_x}{\partial x}u_z\right| \ll \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2.$$

a étant petit (cf. $a \ll \lambda$), on néglige les termes en $\frac{a^2}{\tau^2}$ devant $\frac{a}{\tau}$: $\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$.

b.α. $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g}$ s'écrit :

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} ; \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 ; \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g ;$$

si on néglige $\frac{\partial u_z}{\partial t} \ll g$, il reste : $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$.

β. $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow P = -\rho g z + f(x, y, t) ; \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall x, y :$

à la surface : $z = s(x, t) ; P = P_0 : P_0 = -\rho g s(x, t) + f(x, t)$.

On a déterminé : $P = -\rho g z + \rho g s(x, t) + P_0$.

5.a. $\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial s}{\partial x}$ soit $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} = -g \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$; or, d'après **3.**,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (u_x (s + h)) = u_x \frac{\partial (s + h)}{\partial x} + (s + h) \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \text{or, } s \ll h ; \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ et}$$

$$u_x \frac{\partial s}{\partial x} \text{ d'ordre supérieur, il reste : } \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial s}{\partial t} \text{ et donc } \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -g \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

On obtient : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ avec $c^2 = hg$.

La solution générale est de la forme : $s(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$.

Si on ignore le résultat précédent, on fait le changement de variable $x_1 = x - ct$;

$x_2 = x + ct$ et on trouve $\frac{\partial^2 s}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ qui permet de redémontrer le résultat.

b. $\left| \frac{\partial u_z}{\partial t} \right| = \frac{2\pi}{\tau} |u_z|$, or d'après **2.** $|u_z| < \frac{4\pi h}{\lambda} |u_x|$ soit $\left| \frac{\partial u_z}{\partial t} \right| < \frac{8\pi^2 h}{\tau \lambda} \frac{a}{\tau}$;

$\left| \frac{\partial u_z}{\partial t} \right| < \underbrace{\frac{8\pi^2 h}{\tau^2}}_{\text{fini}} \underbrace{\left(\frac{a}{\lambda} \right)}_{\substack{\text{infinitement} \\ \text{petit}}} ; \text{on a bien : } \left| \frac{\partial u_z}{\partial t} \right| \ll g_{\text{fini}}.$

6.a. On cherche une solution d'onde stationnaire de la forme complexe :

$s = A_1 e^{j(kx + \omega t)} + A_2 e^{-j(kx - \omega t)}$; l'eau ne rentrant ni ne sortant en $x = \pm \frac{L}{2} : u_x \left(\pm \frac{L}{2} \right) = 0$;

or, $\frac{\partial u_x}{\partial t} = -g \frac{\partial s}{\partial x} = -g A_1 j k e^{j(kx + \omega t)} + g A_2 j k e^{j(-kx + \omega t)}$;

$u_x = -g j \frac{k}{j\omega} (A_1 e^{jkx} - A_2 e^{-jkx}) e^{j\omega t}$; les conditions limites s'écrivent :

$$A_1 e^{jk \frac{L}{2}} - A_2 e^{-jk \frac{L}{2}} = 0 \text{ et } A_1 e^{-jk \frac{L}{2}} - A_2 e^{+jk \frac{L}{2}} = 0.$$

Ce système de Cramer en A_1, A_2 n'a de solutions non identiquement nulles que si le déterminant est nul, soit :

$$-(e^{j k L} - e^{-j k L}) = 0, \text{ ou : } \sin k L = 0 ; L k_n = n \pi \quad n \in \mathbb{Z} \text{ soit } \lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ et } v_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{n \sqrt{gh}}{2L}$$

• condition limite, Cramer (système de), développement au premier ordre ou plus, équation d'Euler, onde stationnaire

$$\text{b. AN : } \tau = T_{L_2} ; L_{\text{Min}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} c \tau = \frac{1}{2} \sqrt{gh} T_{L_2} ; \text{A.N. : } L_{\text{Min}} = 3832 \text{ km.}$$

Commentaires : le phénomène d'ondes stationnaires de marée (ou de résonance) exige une dimension longitudinale importante. On n'observe pas de marées importantes dans les lacs ou mers de dimensions inférieures à L_{Min} .

7. On cherche une solution d'onde stationnaire de la forme complexe :

$$s = A_1 e^{j(kx + \omega t)} + A_2 e^{j(-kx + \omega t)}.$$

$$\text{a. Condition limite en } x = 0 : s = s_0 e^{j\omega t} \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{\tau} ;$$

$$\text{or, } s = (A_1 + A_2) e^{j\omega t} \Rightarrow A_1 + A_2 = s_0.$$

$$\text{b. Condition limite en } x = L : u_x(L) = 0 ;$$

$$\text{or, } u_x = -g \frac{k}{\omega} (A_1 e^{jkx} - A_2 e^{-jkx}) e^{j\omega t} \text{ cf. 6.a. et } u_x(L) = 0 \text{ s'écrit } A_1 e^{jkl} - A_2 e^{-jkl} = 0$$

$$\text{On trouve } A_1 = \frac{s_0}{2} \frac{e^{-jkl}}{\cos kL} \text{ et } A_2 = \frac{s_0}{2} \frac{e^{jkl}}{\cos kL}, \text{ soit } s(x, t) = s_0 \frac{\cos k(x - L)}{\cos kL} e^{j\omega t}, \text{ soit}$$

$$\text{une forme réelle : } s = s_0 \frac{\cos k(x - L)}{\cos kL} \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

$$\text{c. La marée devient très grande au fond de la baie si } \cos kL = 0 \text{ soit } kL = (2p + 1) \frac{\pi}{2}, p \in \mathbb{Z}.$$

d. Les effets limitants sont la viscosité (négligée) et le frottement de l'eau sur le fond et les côtes.

$$\text{e. AN : en } x = L : S_{\text{demandé}} = \frac{s_0}{\cos kL} ; s_0 = 2,2 \text{ m} ; \tau = T_{L_2} ; k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ avec}$$

$$\lambda = c \tau \text{ et } c = \sqrt{h_m g}$$

$$S = \frac{s_0}{\cos \frac{2\pi L}{\sqrt{h_m g} T_{L_2}}} ; \text{AN : } S = 14,54 \text{ m (cf. } s_0 = 2,2 \text{ m)}.$$

$$\text{f. } s(x, t) = S \cos k(x - L) \cos \frac{2\pi t}{\tau}.$$

La haute mer est de moindre amplitude en général, mais est synchronisée avec la haute mer au fond de la baie. Il y a haute mer au même instant dans toute la baie. Il n'y a pas de propagation (onde stationnaire).

3.3.4.4. Modèles de courants marins

Dans cet énoncé on donne une seule fois la valeur numérique des grandeurs avec lesquelles on doit effectuer les applications numériques implicitement demandées.

La rotation de la terre est caractérisée par le vecteur $\vec{\Omega}$ dirigé selon l'axe sud-nord (figure 1) avec $\Omega = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

Le repère local R lié à la terre a :

- son axe Oz orienté selon la verticale ascendante du lieu ;
- son axe Ox orienté selon l'horizontale ouest-est ;
- son axe Oy orienté selon l'horizontale sud-nord (figure 1).

Soit :

- $\vec{V}(V_x, V_y, 0)$ le champ de vitesse d'un écoulement horizontal.
- \vec{g} le champ de pesanteur tel que $\vec{g} = -g\vec{z}$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
- ρ la masse volumique de l'eau ; $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$.
- μ le coefficient de viscosité de l'eau de mer ; $\mu = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s.}$
- λ la latitude du lieu ; $\lambda = 45^\circ$; on notera $\Omega_1 = \Omega \sin \lambda$.

1. Modèle du courant géostrophique

On étudie un écoulement marin permanent horizontal en un lieu de latitude λ ; on prendra ici pour la viscosité $\mu = 0$. La pression de l'air n'est pas uniforme dans **I** !

1. Montrer que : $\vec{0} = -\text{grad } P + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$.
2. Exprimer V_x et V_y en fonction de $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$; quelle est l'influence de \vec{g} ?
3. Exprimer \vec{V} en fonction de $(\text{grad } P - \rho \vec{g})$; comment sont positionnées lignes isobares et lignes de courant ?
4. En $z = 0$, on prendra ici $P = P_0 \exp\left(-\frac{r}{a_1}\right)$, r distance à O.

1. Tracer une ligne de courant de surface ; préciser sa nature ; l'orienter dans l'hémisphère nord.

On négligera l'éventuelle surélévation de la surface libre par rapport à l'horizontale.

2. AN : Trouver V en $r = 10 \text{ km}$; on donne $P_0 = 1,1 \text{ bar}$, $a_1 = 1000 \text{ km}$, $\lambda = 45^\circ$.

2. Modèle du courant d'Ekman

On étudie un écoulement marin permanent horizontal soumis à l'action du vent en un lieu de latitude λ , la pression de l'air étant uniforme, l'eau ayant un coefficient de viscosité μ différent de zéro.

1. Montrer $\vec{0} = \mu \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} - 2\rho \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{V}$ avec $\vec{\Omega}_1 = \Omega \sin \lambda \vec{z}$; quelle signification peut-on donner à Ω_1 ?
2. On pose $Z = V_x + jV_y$ (avec $j^2 = -1$). Trouver l'équation satisfaite par Z .
3. On adoptera un modèle de mer de profondeur infinie,
 - sans frottement au fond ;
 - avec un vent du sud imposant en surface : $\mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} \right)_z \neq 0 = T$.

On négligera l'éventuelle surélévation de la surface libre par rapport à l'horizontale.

1. Trouver le carré de $b_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{\frac{2\rho\Omega}{\mu}}$.

• équation d'Euler, force surfacique, latitude, mouvement sans frottement, surface libre, viscosité

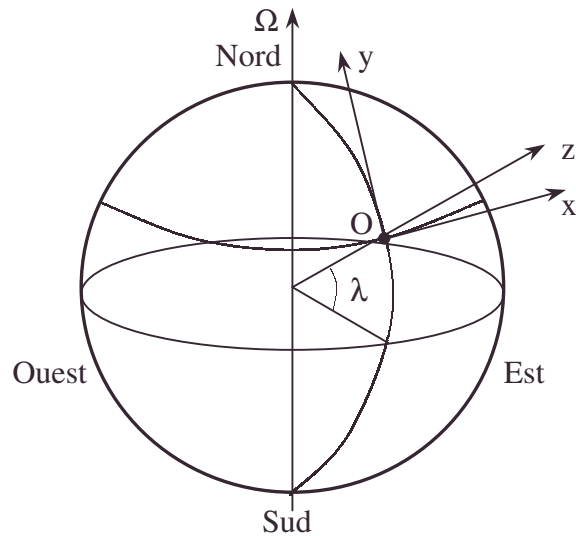


Figure 1

2. Montrer que $Z = C_1 \exp(b_1 z)$; calculer C_1 .

3. Trouver U_0 , a tels que dans l'hémisphère nord :

$$V_x = U_0 \exp(az) \cos(az + \pi/4) ; V_y = U_0 \exp(az) \sin(az + \pi/4) .$$

AN : $T = 10^{-2} \text{ N.m}^{-2}$.

4. Trouver la profondeur D où le courant a une direction opposée au courant de surface. AN : calculer D .

5. Montrer qu'on peut accepter l'hypothèse d'une mer de profondeur infinie dès que $H > D$, ou dès que $H > 2D$. Commenter.

6. Calculer le débit volumique d'eau traversant une surface verticale de hauteur infinie, de largeur unité .

- dans une direction perpendiculaire au vent.
- dans la direction du vent.

7. Faire un commentaire concernant la force de Coriolis appliquée à un tel volume ainsi que sur sa conséquence physique.

8. Préciser le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse en x , y donnés, quand z varie par rapport à la direction du vent ;

on mettra en évidence les points correspondant à $z = 0$, $z = -D$, $z = -2D \dots$

4. Considérons l'océan, l'été, comme formé de deux couches, sans interaction visqueuse entre elles :

la couche supérieure d'eau chaude est d'épaisseur $H > D$ de masse volumique ρ_1 ;

la couche inférieure d'eau, froide, a une masse volumique $\rho_2 > \rho_1$ (de salinité différente).

Etudions l'effet d'un vent permanent de sud caractérisé par T , s'exerçant sur une zone de mer de largeur L , le long d'une côte abrupte, orientée nord-sud.

Montrer qu'il doit se produire une remontée d'eau froide en surface dont on évaluera la vitesse verticale supposée uniforme.

AN : $L = 20 \text{ km}$, $\rho_1 = 1020 \text{ kg m}^{-3}$,
 $\rho_2 = 1030 \text{ kg m}^{-3}$.

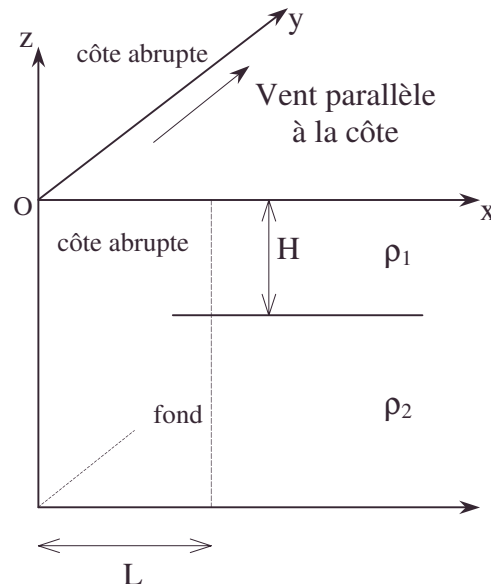


Figure 2

3. Modèle du courant de pente

On étudie un courant marin permanent horizontal en un lieu de latitude λ pour une surface libre de la mer de côte $\zeta(y)$, présentant une pente constante dans la direction Oy

soit $\frac{d\zeta}{dy} = -\gamma$; la pression de l'air est uniforme ; on suppose le champ de pression

hydrostatique dans l'eau.

l'eau possède un coefficient de viscosité μ différent de zéro.

1. Quelles sont les équations satisfaites par V_x et V_y ?

2. A quelle équation satisfait Z , dans l'hémisphère nord (on utilisera le paramètre b_1) ?

3. On adoptera un modèle de mer de profondeur infinie,

- sans frottement au fond ;
- sans entraînement par le vent en surface.

On négligera l'éventuelle surélévation de la surface libre par rapport à l'horizontale.

1. Trouver Z pour l'hémisphère nord. AN : $\gamma = 10^{-5}$.

2. Comparer à la question 1.2.

• Coriolis, mouvement sans frottement, océan à deux couches, remontée d'eau [upwelling des courants marins], salinité de l'eau de mer [Océanographie], surface libre, viscosité

3. Positionner cause et conséquence.

4. Commenter qualitativement la prise en compte d'une profondeur finie de l'ordre de D.

4. Intensification des courants sur le bord ouest des océans

On étudie un modèle d'écoulement marin permanent horizontal pour un océan homogène rectangulaire, limité par des côtes abruptes en $x = 0$, en $x = a$, en $y = 0$, en $y = b$, de profondeur H constante (au repos théorique) ; la pression de l'air est uniforme et l'eau a un coefficient de viscosité μ différent de zéro.

Quand les courants se manifestent, la profondeur devient $H + \zeta$ avec $\zeta(x, y)$ faible devant H . On notera $U_1(x, y)$ et $U_2(x, y)$ les valeurs moyennes de V_x et V_y sur une verticale en x, y donnés.

Les causes à considérer ici sont : la pression, l'effet de Coriolis, la viscosité, la force surfacique exercée par le vent selon Ox de valeur $-T \cos \pi \frac{y}{b}$ (T étant une constante), la force surfacique exercée par le fond, de la forme $-RU_1, -RU_2$ (R étant une constante).

1. Définir U_1 et U_2 par des intégrales. Ecrire l'équation locale de conservation de la masse en U_1 et U_2 .

2.1. Ecrire les équations d'Euler relatives à V_x et V_y .

2. Les intégrer de $-H$ à 0 pour une colonne de surface $dx dy$ afin d'obtenir les équations en U_1 et U_2 ... : T, b, R, ζ, y figureront.

3. Dériver la première par rapport à y et la seconde par rapport à x .

4. Justifier $\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = \Omega \frac{\sqrt{2}}{2R_T}$ avec $R_T = 6400 \text{ km}$; A.N.

5. Démontrer que : $T \frac{\pi}{b} \sin \pi \frac{y}{b} + 2\rho U_2 H \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \right) + R \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) = 0$.

6. En se restreignant au cas où on peut considérer comme constants $\alpha = 2\rho H \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}$

et $\gamma = \frac{\pi T}{bR}$, et en utilisant la fonction ψ telle que $U_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $U_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, montrer que

$$\Delta \psi + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \sin \pi \frac{y}{b}.$$

7. Montrer que la ligne $\psi = \text{cste}$ est une ligne de courant.

8. Montrer qu'on peut prendre $\psi(0, y) = \psi(a, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0$.

9. Vérifier que $\psi = \gamma \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \sin \pi \frac{y}{b} (-1 + p \exp Ax + (1-p) \exp Bx)$ vérifie cette

condition, A et B étant des constantes, moyennant une valeur de p qu'on déterminera en fonction de A, B et a .

10. On donne le tracé des lignes de courant correspondant aux valeurs de ψ : 0, 10, 20, 30, 40 sur la figure 3.

AN : $a = 10000 \text{ km}$, $b = 6283 \text{ km}$, $H = 200 \text{ m}$, $T = 0,01 \text{ Nm}^{-2}$, $R = 0,02$ unité SI.

Caractériser le phénomène physique : citer un grand courant marin auquel on pourrait appliquer ce modèle.

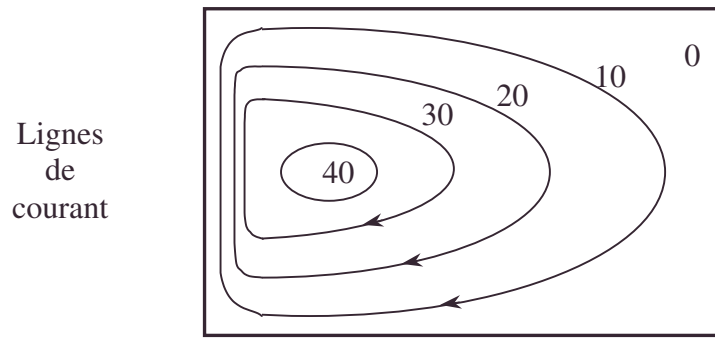


Figure 3

Autres concours ; Durée : 3 h

Corrigé

1.1. Le repère local n'est pas galiléen : il faut tenir compte des forces d'inertie ; la force d'inertie d'entraînement très faible est soit négligée, soit intégrée dans le poids. La force d'inertie de Coriolis en $-2\vec{\Omega} \wedge m\vec{V}$ devient ici la force volumique d'inertie de Coriolis $-2\vec{\Omega} \wedge \rho\vec{V}$.

Les équations d'Euler, en statique, s'écrivent : $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{0} = -\vec{\text{grad}} P + \rho\vec{g} - 2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{V}$.

2. Les projections sur les axes sont :

$$\text{Ox} : -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega V_y \sin \lambda = 0 \Rightarrow V_y = \frac{1}{2\rho\Omega_1} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

$$\text{Oy} : -\frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega V_x \sin \lambda = 0 \Rightarrow V_x = -\frac{1}{2\rho\Omega_1} \frac{\partial P}{\partial y}.$$

g n'intervient pas sur un écoulement horizontal.

$$\text{3. } \vec{\text{grad}} P - \rho\vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ -\rho g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{2\rho\Omega_1} \vec{z} \wedge (\vec{\text{grad}} P - \rho\vec{g}).$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} P = \frac{1}{2\rho\Omega_1} \vec{\text{grad}} P (\vec{z} \wedge \vec{\text{grad}} P) = 0.$$

$\vec{\text{grad}} P$ est normal à la ligne isobare ; \vec{V} qui est orthogonal à $\vec{\text{grad}} P$ est donc tangent à la ligne isobare.

Les lignes de courant sont donc des lignes isobares.

$$\text{4.1. En } z = 0, \vec{\text{grad}} P = \frac{dP}{dr} \vec{u}_r = -\frac{P_0}{a_1} e^{\frac{r}{a_1}} \vec{u}_r ; \vec{V} = \frac{\vec{z}}{2\rho\Omega_1} \wedge \vec{\text{grad}} P.$$

$V_\theta = -\frac{P_0}{2\rho\Omega_1 a_1} e^{\frac{r}{a_1}}$; tout cercle de centre O est une ligne de courant orientée dans le

sens des aiguilles d'une montre ; c'est aussi une ligne isobare.

$$\text{2. } V_\theta = 1 \text{ m.s}^{-1}.$$



2.1. x, y n'interviennent pas sur les causes $\Rightarrow \vec{V} = \vec{V}(z)$; $\vec{f}_{\text{viscosité}} = \mu \Delta \vec{V}$ se limite à :

$\vec{f}_{\text{viscosité}} = \mu \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$. Les équations d'Euler, en statique, s'écrivent avec ce terme

supplémentaire : $\vec{0} = (-\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g}) - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \mu \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$, soit en projections :

$$\textcircled{1} \quad 0 = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + 2\rho \Omega V_y \sin \lambda ; \quad \textcircled{2} \quad 0 = \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} - 2\rho \Omega V_x \sin \lambda ;$$

$$\text{moyennant } \overline{\Omega_1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \sin \lambda \end{vmatrix} : \text{ on écrit } \vec{0} = \mu \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} - 2\rho \overline{\Omega_1} \wedge \vec{V} .$$

Pour ce problème plan, l'influence de la rotation de la terre ne se manifeste que par $\overline{\Omega_1}$: c'est le vecteur de la rotation terrestre dans le repère local. A.N. : $\Omega_1 = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\textbf{2.} \quad \textcircled{1} + j\textcircled{2} \text{ s'écrit : } \mu \frac{d^2 Z}{dz^2} - 2j\rho \Omega_1 Z = 0, \text{ soit } \frac{d^2 Z}{dz^2} - 2ja^2 Z = 0 .$$

$$\textbf{3.1.} \quad b_1^2 = 2j \frac{\rho \Omega_1}{\mu} = 2ja^2 \Rightarrow Z = C_1 e^{b_1 z} + C_2 e^{-b_1 z} .$$

2. • Quand $z \rightarrow -\infty, |Z|^2 = V_x^2 + V_y^2 \rightarrow \infty$; cette énergie cinétique infinie est impossible $\Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow Z = C_1 e^{b_1 z}$.

$$\bullet \quad \frac{dZ}{dz} = b_1 C_1 e^{b_1 z} ; \quad \mu \frac{dZ}{dz} = \mu \frac{dV_x}{dz} + j\mu \frac{dV_y}{dz} ,$$

$$\text{et en } z = 0 ; \quad \mu \left(\frac{dZ}{dz} \right) = j\mu \left(\frac{dV_y}{dz} \right) = jT = \mu b_1 C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{jT}{\mu b_1}$$

$$\text{or } j = e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{2\rho\Omega_1}{\mu}} e^{j\frac{\pi}{4}} ;$$

$$C_1 = \frac{T e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\rho\mu\Omega_1}} .$$

3.

$$Z = \frac{T}{\sqrt{2\rho\Omega_1\mu}} \exp \left(j\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} z + j\frac{\sqrt{2}}{2} z \right) \sqrt{\frac{2\rho\Omega_1}{\mu}} \right) = U_0 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{\frac{\rho\Omega_1}{\mu}} (1+j)z} \text{ avec } U_0 = \frac{T}{\sqrt{2\rho\Omega_1\mu}} ;$$

$$Z = U_0 \exp \left(j\frac{\pi}{4} + j\sqrt{\frac{\rho\Omega_1}{\mu}} z \right) \exp \sqrt{\frac{\rho\Omega_1}{\mu}} z .$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= U_0 e^{az} \cos \left(az + \frac{\pi}{4} \right) \\ V_y &= U_0 e^{az} \sin \left(az + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \right\} \text{ avec } a = \sqrt{\frac{\rho\Omega_1}{\mu}}$$

$$\text{AN : } U_0 = 0,79 \text{ m.s}^{-1} ; a = 5,9 \text{ m}^{-1}$$

4. La phase augmente de π quand z augmente de $\frac{\pi}{a} = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho \Omega_1}}$;

$$D = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho \Omega_1}} : \text{AN} : D = 0,53 \text{ m}.$$

5. $|\vec{V}| = U_0 e^{az}$; pour $z < -D$: $|\vec{V}| < U_0 e^{-\pi}$ soit $|\vec{V}| < \frac{U_0}{23}$.

• A 4% de U_0 près, la vitesse est nulle, comme elle l'est au fond où $z = -\infty$.
On peut accepter, moyennant cette approximation, l'hypothèse de l'énoncé.

• Pour $z < -2D$; $|\vec{V}| < \frac{U_0}{535}$; à 0,2% de U_0 près, la vitesse est nulle comme elle l'est au fond (où $z = -\infty$) ; l'hypothèse est acceptable.

$$6.1. \int_{-\infty}^0 Z dz = \int_{-\infty}^0 V_x dz + j \int_{-\infty}^0 V_y dz = D_x + j D_y.$$

D_x = débit volumique traversant une surface verticale de hauteur infinie, de largeur unité, perpendiculairement au vent.

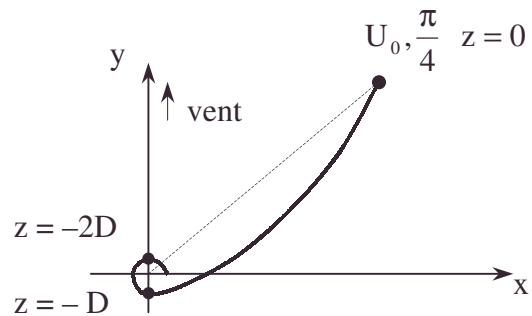
D_y = débit volumique dans des conditions analogues, selon le vent.

$$2. \int_{-\infty}^0 Z dz = U_0 e^{j\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^0 \exp az (1+j) dz = \frac{U_0}{a(1+j)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) \right) \left[\exp az (1+j) \right]_{-\infty}^0.$$

$$D_x = \int_{-\infty}^0 Z dz = \frac{T}{\sqrt{\frac{2\rho\Omega_1}{\mu}}} ; D_y = 0 ; \text{AN} : D_x = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 1,2 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

7. En absence de frottement au fond, la force de Coriolis totale s'oppose à l'action du vent et en conséquence, le flux d'eau est à 90° à droite du vent dans l'hémisphère nord.

8. En posant $\theta = \frac{\pi}{4} + az$, le lieu de l'extrémité de \vec{V} s'écrit, en polaire, $\rho = U_0 e^{\frac{\theta - \pi}{4}}$: spirale logarithmique.

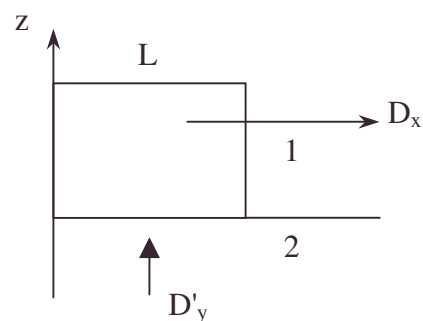


4. La couche supérieure perd par seconde la masse $\rho_1 D_x$; elle retrouve son état de masse par la montée d'eau froide $D'_y = \rho_2 V'_z L$.

$$V'_z = \frac{1 \cdot \rho_1 T}{\rho_2 L \sqrt{\frac{2\rho_1 \Omega_1}{\mu}}} = \frac{T}{\rho_2 L} \sqrt{\frac{\mu \rho_1}{2 \Omega_1}} ;$$

$$\text{AN} : V'_z = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$3.1. P = P_{z=0} + \rho g \zeta ; \overrightarrow{\text{grad}} P = \rho g \frac{d\zeta}{dy} \vec{y} = -\gamma \rho g \vec{y}.$$



• Coriolis, équation d'Euler, statique des fluides

L'équation d'Euler, en statique, s'écrit : $\vec{0} = -\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \mu \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$.

Les projections horizontales sont :

$$0 = 0 + 0 + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + 2\rho \Omega_1 V_y. \quad (1)$$

$$0 = -\gamma \rho g + 0 + \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} - 2\rho \Omega_1 V_x. \quad (2)$$

$$2. Z = V_x + j V_y; (1) + j(2) \Rightarrow \frac{d^2 Z}{dz^2} - b_1^2 Z = -\frac{\rho \gamma g j}{\mu}.$$

$$3.1. Z = \frac{\rho \gamma g j}{b_1^2 \mu} + C_1 e^{b_1 z} + C_2 e^{-b_1 z}.$$

• Comme précédemment au fond, il faut $C_2 = 0$.

• En surface, $\mu \frac{dZ}{dz} = 0 = b_1 C_1 \Rightarrow C_1 = 0$; $Z = \frac{\gamma g}{2\Omega_1}$; AN : $Z = 0,925 \text{ m.s}^{-1}$.

$$2. \text{ On retrouve } V_x = -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\gamma g}{2\Omega_1}, \text{ courant géostrophique.}$$

3. Ici encore, le courant est perpendiculaire à sa cause, la pente de la surface libre.

4. Par analogie avec 2., la zone à courant constant doit concerner la couche supérieure, d'épaisseur de l'ordre de D ; sinon le débit D_x précédemment défini serait infini. De fait, l'amortissement qui n'apparaît pas effectif dans ce modèle intervient.

$$4.1. U_1 = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 V_x dz; U_2 = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 V_y dz.$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit en V_x, V_y : $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$;

intégrons entre $-H$ et 0 selon Oz : $\frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^0 V_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^0 V_y dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} = 0$ [0].

$$2.1. \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + 2\rho \Omega_1 V_y - \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0; \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} - 2\rho \Omega_1 V_x - \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

$$2. \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \right)_0 - \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \right)_{-H} + 2\rho \Omega_1 H U_2 - \rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

$$\mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} \right)_0 - \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} \right)_{-H} - 2\rho \Omega_1 H U_1 - \rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

$$\text{soit : } -T \cos \frac{\pi y}{b} - R U_1 + 2\rho \Omega_1 H U_2 - \rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

$$-R U_2 - 2\rho \Omega_1 H U_1 - \rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

$$3. (1) T \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{b} - R \frac{\partial U_1}{\partial y} + 2\rho \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} H U_2 + 2\rho \Omega_1 H \frac{\partial U_2}{\partial y} - \rho g H \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$(2) 0 - R \frac{\partial U_2}{\partial x} - 2\rho \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} H U_2 - 2\rho H \frac{\partial U_1}{\partial x} - \rho g H \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0.$$

• analogie, condition limite, conservation de la masse, ordre de grandeur, vecteur vitesse complexe

4. $\Omega_1 = \Omega \sin \lambda$ avec la latitude fonction de y :

$$\lambda \neq \lambda_0 + \frac{y}{R_T}; \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} = 0; \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = \frac{d\Omega_1}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \text{ avec } \lambda_0 = 45^\circ.$$

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \right)_\lambda = \frac{\Omega \cos \lambda_0}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Omega}{R_T}; \text{A.N. : } \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \right) = 8.10^{-12} \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

5. En faisant ① – ② on obtient l'équation demandée .

$$6. \gamma \sin \frac{\pi y}{b} + \alpha U_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} = 0, \text{ soit } \gamma \sin \frac{\pi y}{b} - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Delta \psi = 0.$$

$$7. d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -U_2 dx + U_1 dy;$$

si $\psi = \text{cste}$, $d\psi = 0$; $\frac{dx}{U_1} = \frac{dy}{U_2}$, ce qui définit une ligne de courant.

8. L'écoulement étant tangent à la côte, la côte est une ligne de champ ; ψ étant défini à une constante près qui n'altère par U_1 , U_2 ; $\psi = \text{cste}$ peut être prise égale à 0 pour la ligne de courant identifiée à la côte.

9. $\psi = 0$ pour $y = 0$ et pour $y = b \quad \forall x$.

$$\psi = 0 \quad \forall y \text{ pour } x = 0$$

$$\text{et pour } x = a \text{ si } 0 = -1 + p e^{Aa} + (1-p) e^{Ba} \text{ soit } p = \frac{1 - e^{Ba}}{e^{Aa} - e^{Ba}}.$$

10. On observe le resserrement des lignes de courant à l'ouest, soit l'existence d'un débit volumique important à l'ouest des océans.

Ce modèle est acceptable grosso-modo pour le Gulf Stream dans l'Atlantique (Nord) et le Kuroshio dans le Pacifique (Nord).

3.3.4.5. Statique des marées

Voir page 336.

3.4. Théorème de Bernoulli

3.4.1. Vortex

Formulaire

a. \vec{a} et \vec{b} désignent deux vecteurs, $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla de dérivation usuel en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \quad [1]$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} \quad [2]$$

b. C est une courbe fermée orientée, S une surface s'appuyant sur C orientée par continuité avec C, dont \vec{n} désigne le vecteur normal à l'élément de surface dS. Pour une fonction f quelconque des coordonnées, on a la formule de Kelvin où P désigne un point courant de C ou de S : $\oint_C f(P) d\vec{\ell} = - \iint_S \vec{\nabla} f(P) \wedge \vec{n} dS$ [3].

c. Les composantes du rotationnel en coordonnées sphériques sont définies par rapport aux axes mobiles de la figure 1.

$$\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi ;$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) ;$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) ;$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right).$$

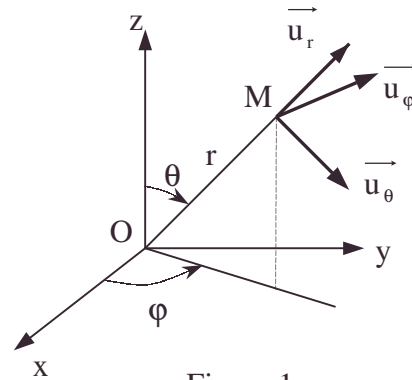


Figure 1

I. Préliminaires

On considère dans tout le problème un fluide parfait incompressible de masse volumique μ . La vitesse du fluide en un point M ($\vec{r} = \vec{OM}$) sera notée \vec{v} ou $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

La pression est P ou $P(\vec{r}, t)$. La dérivée matérielle en suivant le mouvement du fluide est notée par $\frac{D}{Dt}$ et l'on a, $\vec{\nabla}$ agissant sur les coordonnées d'espace, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$.

1. Rappeler l'équation d'Euler liant $\frac{D\vec{v}}{Dt}$, $\vec{\nabla} P$, μ et la densité massique des forces \vec{f}_m agissant sur le fluide.

2. En utilisant la formule [1], démontrer que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + V \right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ [4].

V est le potentiel dont dérive \vec{f}_m ($\vec{f}_m = -\vec{\nabla} V$) et $\vec{\Omega}$ est le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v}(\vec{r}, t) \quad [5], \text{ le rotationnel étant pris par rapport à } \vec{r} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}.$$

3. On supposera dans toute la suite du problème que $\vec{f}_m \equiv 0$.

Quand le fluide est en écoulement potentiel, ou irrotationnel, on pose :

• équation d'Euler, force massique, Kelvin [théorème de], opérateur nabla, théorème de Bernoulli, vecteur tourbillon, vortex

$\vec{v}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t)$ ou $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$, ϕ désignant le potentiel des vitesses.

a. Quelles sont les unités de $\vec{\Omega}$ et de ϕ ?

b. Ecrire, dans le cas d'un fluide en mouvement potentiel non nécessairement stationnaire, l'équation de Bernoulli reliant $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, v^2 et $\frac{P}{\mu}$.

II. Mouvements d'un objet dans un fluide parfait incompressible en écoulement potentiel

Dans cette partie on considère un corps quelconque en mouvement dans un fluide incompressible infini. La vitesse uniforme du corps est \vec{u} ; la vitesse à l'infini du fluide est nulle et on s'intéresse à la distribution des vitesses du fluide.

Pour la clarté du problème, il sera bon d'imaginer que l'on se place à un instant donné t et que l'on prend un instantané du champ des vitesses \vec{V} du fluide. On repère les points du fluide par leur position \vec{r} dans un référentiel (R) fixe, lié au fluide à l'infini. L'origine O est fixe mais coïncide, à t , avec un point du corps immergé (cf. figure 2).

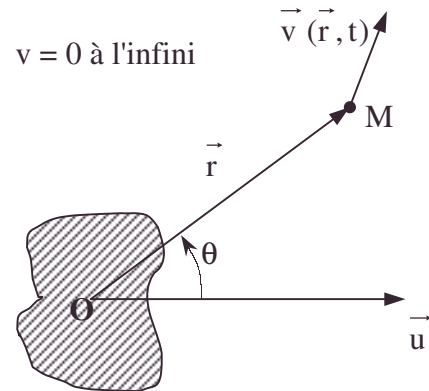


Figure 2

On admet que dans le référentiel en mouvement, lié au corps immergé, l'écoulement est stationnaire ; autrement dit, dans le référentiel fixe (R), les lignes du champ des vitesses sont entraînées à la vitesse uniforme \vec{u} et accompagnent l'objet en mouvement.

1. De la stationnarité, appliquée à $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et $\phi(\vec{r}, t)$, déduire que $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\phi$. [6]

2. Quelle relation existe entre les vitesses \vec{v} et \vec{u} à la surface du corps immergé ?

3. Montrer que l'on a dans tout le fluide l'équation de Laplace $\Delta\phi(\vec{r}, t) = 0$.

4. On se place loin du corps immergé et on cherche à déterminer la distribution des vitesses du fluide.

On admet dans toute la suite de la partie II. que le potentiel $\phi(\vec{r})$, pris à un instant donné, peut s'écrire, à grande distance ($\|\vec{r}\| = r$ grand) sous la forme :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{a}{r} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad [7] ; a \text{ et } \vec{A} \text{ sont indépendants de } \vec{r} \text{ et de } t.$$

Comme on a fixé t , \vec{r} désigne la position par rapport à un point du solide, pris comme origine.

a. Quelle est l'analogie électrostatique du potentiel ϕ donné par [7] ?

b. Ce potentiel ϕ satisfait-il, pour $r \neq 0$, à l'équation de Laplace ?

c. Montrer que l'expression du flux ψ de la vitesse \vec{v} à travers une sphère de grand rayon conduit à la conclusion que l'on a nécessairement $a = 0$.

5.a. Exprimer, en fonction de $\vec{A}, \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ et r , le champ des vitesses $\vec{v}(r)$ et donner les composantes de \vec{v} , en coordonnées sphériques r, θ, φ , l'axe Oz étant pris parallèle à \vec{A} .

b. Représenter les lignes du champ de vitesse à grande distance et donner leurs équations.

c. Montrer sans calcul, en ne faisant appel qu'à des arguments physiques, que \vec{A} doit être colinéaire à \vec{u} .

De quoi peut dépendre le coefficient de proportionnalité ?

6. La pression dans le fluide, à l'infini, est P_0 .

a. Donner, en fonction de $P_0, \mu, A = \|\vec{A}\|, u = \|\vec{u}\|, r$ et θ , la pression P à grande distance du corps immergé.

(θ est l'angle entre la vitesse \vec{u} et la direction d'observation \vec{r}).

(N.B. : On utilisera le résultat établi en **I.3.**)

b. En ne gardant que le terme prépondérant de P , représenter le diagramme polaire $P(\theta)$.

c. On considère une grande sphère de fluide entourant le corps en mouvement. Quelle est la force s'exerçant sur elle ? Ce résultat vous paraît-il surprenant ?

7. On considère désormais une sphère de rayon R immergée dans le fluide et animée de la vitesse \vec{u} . L'origine est prise au centre O de la sphère.

Vérifier que la solution $\varphi = -\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$, dont les questions précédentes ont montré la validité à grande distance dans le fluide, est aussi valable au voisinage de la sphère, et donner l'expression de \vec{A} qui permet de satisfaire à la relation établie en **II.2.**

8. A partir de l'expression de la vitesse, déterminer l'énergie cinétique totale E_c du fluide en mouvement quand on déplace la sphère à la vitesse \vec{u} .

Interpréter physiquement le résultat.

9.a. Déterminer la pression $P(\theta)$ sur la surface de la sphère en fonction de θ , angle entre \vec{u} et la direction d'observation \vec{r} ($\|\vec{r}\| = R$).

b. Tracer le graphe de $P(\theta)$ en coordonnées polaires.

10. Application numérique

On considère $R = 3 \text{ cm}, u = 1 \text{ cm/s}, \mu = 1 \text{ g/cm}^3, P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Donner successivement les valeurs numériques de A et E_c , énergie cinétique du fluide. Calculer $P(\theta) - P_0$ sur la

sphère en $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ et π .

III. Écoulement d'un fluide incompressible à grande distance d'une ligne de vortex

On considère dans toute cette partie des écoulements non potentiels, ou rotationnels, d'un fluide parfait incompressible : $\vec{\Omega}$, vecteur tourbillon, n'est pas identiquement nul.

L'intensité de vortex à travers une surface S est le flux k de $\vec{\Omega}$ à travers cette surface.

On appelle ligne de vortex une ligne tangente en chacun de ses points à $\vec{\Omega}$. Souvent les lignes de vortex sont associées en "tubes" et la définition de l'intensité de vortex correspond au flux à travers une section de ce tube, de la même façon que l'intensité I

d'un courant est définie comme le flux de la densité de courant \vec{j} à travers une section du conducteur.

De la même façon qu'en électromagnétisme pour un circuit en ARQS, on pourra imaginer que les dimensions transversales d'un tel tube tendent vers 0, le flux de $\vec{\Omega}$ restant égal à la valeur k : on aura alors une ligne de vortex associée à un flux k de vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$.

Dans toute cette partie on suppose que $\vec{\Omega}$ n'est différent de zéro que sur une ligne de vortex fermée C (analogue à une spire de courant) ou boucle de vortex.

1.a. En quelle unité s'exprime k ?

b. Montrer que la vitesse en un point M ($\vec{OM} = \vec{r}$) du fluide s'exprime comme :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t).$$

On donnera sans calcul l'expression de $\vec{\mathcal{A}}$ telle que $\text{div } \vec{\mathcal{A}} = 0$ dans le cas d'une ligne de vortex fermée C , pour laquelle le flux de $\vec{\Omega}$ vaut k .

(Attention à ne pas confondre $\vec{\mathcal{A}}$ avec le vecteur \vec{A} de **II**.)

2. On considère une boucle de vortex C qu'on pourra, par commodité, supposer circulaire, de petite taille et centrée en O . S est une surface s'appuyant sur C . On définit le moment du vortex $\vec{\mathcal{M}}$ par $\vec{\mathcal{M}} = k \iint_S d\vec{s}$.

a. Quelle est l'unité de $\vec{\mathcal{M}}$?

b. Montrer que, à grande distance \vec{r} , $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})$ s'exprime très simplement en fonction de $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{r} .

3.a. Montrer qu'à grande distance le champ de vitesse du fluide associé à une petite boucle de vortex s'écrit : $\vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$. [8]

Développer cette expression en supposant $\vec{\mathcal{M}}$ orienté suivant Oz .

b. Exprimer les composantes de \vec{v} en coordonnées sphériques ($\vec{\mathcal{M}}$ parallèle à Oz) et représenter schématiquement les lignes du champ de vitesse à grande distance.

4.a. Le champ de vitesse donné par [8] est-il celui d'un écoulement potentiel ? si oui, quel est le potentiel $\phi(\vec{r})$ associé ?

b. Les écoulements de fluide considérés en **II**. (corps immergé) et en **III**. (boucle de vortex) peuvent-ils être équivalents à grande distance ?

Si oui, donner la relation entre \vec{A} et $\vec{\mathcal{M}}$.

c. Les résultats trouvés ci-dessus en hydrodynamique vous rappellent-ils une équivalence bien connue en électromagnétisme ?

5.a. Dans le cas d'une sphère immergée, donner la relation d'équivalence entre \vec{u} et \vec{R} d'une part, $\vec{\mathcal{M}}$ d'autre part. Vérifier que les unités coïncident.

b. Application numérique : on considère une boucle de vortex de rayon $r_0 = 3$ cm. Quelle est l'intensité de vortex k nécessaire pour que ce vortex soit équivalent à la sphère en mouvement de la question **II.10**. ? Calculer le moment $\|\vec{\mathcal{M}}\|$ associé.

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

I.1. Les forces de pression exercées sur un système sont équivalentes à une répartition des forces volumiques $\vec{f}_v = -\vec{\text{grad}} P$. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide de masse dm d'un fluide parfait (incompressible, non visqueux).

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} dm = \sum_i \vec{f}_{v_i} d\tau = \left(-\vec{\text{grad}} P + \vec{f}_v^{\text{autre que P}} \right) d\tau. \text{ Or } dm = \mu d\tau, \mu \text{ constant.}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\vec{\text{grad}} P}{\mu} + \underbrace{\frac{\vec{f}_v}{\mu} d\tau}_{dm} \Rightarrow \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} \frac{P}{\mu} + \underbrace{\vec{f}_m}_{\text{densité massique}}.$$

2. Faisons $\vec{a} = \vec{b} = \vec{V}$ dans la formule [1] ;

$$\vec{\text{grad}} v^2 = \vec{\nabla}(v^2) = 2\vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v} + 2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \Rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} v^2 + \vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} ;$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) = -\vec{\text{grad}} \frac{P}{\mu} - \vec{\text{grad}} V \text{ s'écrit :}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} v^2 + \vec{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = -\vec{\text{grad}} \left(\frac{P}{\mu} + V \right) \text{ et finalement en écrivant } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{v} :$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\mu} + V \right) + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

3.a.α. $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{v}$ s'exprime en rad.s^{-1} (cf. interprétation de $\vec{\Omega}$ vecteur instantané de rotation de la particule fluide).

β. $\vec{v} = -\vec{\text{grad}} \varphi$; φ s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\text{b. } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} \varphi = \vec{\text{grad}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) ; [4] \Rightarrow \vec{\text{grad}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\mu} + V \right) = \vec{0} ;$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\mu} + 0 = f(t) ; f \text{ fonction arbitraire a priori.}$$

Des choix simplificateurs sont possibles

II.1. L'écoulement stationnaire dans le repère lié au corps immergé signifie que l'arrivée du fluide (et son comportement ensuite) reste identique $\forall t$.

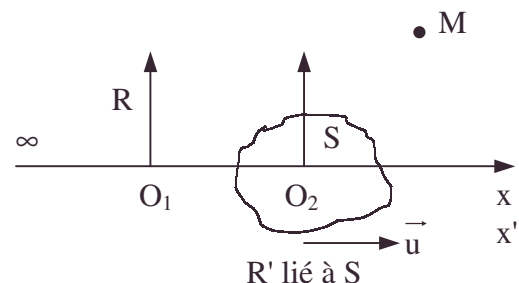
O_1 coïncide à l'instant t avec O_2 origine de R' lié à S .

Dans R , en M est défini $\vec{r}, \vec{v}(M, t), \varphi(M, t)$.

Dans R' en M est défini $\vec{r}', \vec{v}'(M), \varphi'(M)$.

$$\text{La combinaison des vitesses donne : } \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + u.$$

$$\text{On peut prendre : } \varphi' = \varphi - ux = \varphi - \vec{u} \cdot \vec{r}.$$



De la stationnarité $\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{r} - \vec{u} \cdot \vec{v}$; or $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$;

Si \vec{u} est indépendant de t, alors $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$.

2. Dans R' , le fluide n'entre pas (ni ne sort) de S.

$$\vec{v}'(M, t) \cdot \vec{n}_S = 0 \quad \forall M, t ; \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_S = \vec{v}' \cdot \vec{n}_S + \vec{u} \cdot \vec{n}_S \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n}_S = \vec{u} \cdot \vec{n}_S \quad \forall M, t .$$

3. $\text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow -\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0$ soit $\Delta \varphi(r, t) = 0$.

4.a. $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$; $\varphi = \frac{a}{r} + \frac{\vec{A} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$ ce qui est analogue au potentiel électrostatique :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ avec l'analogie transposant } a \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0}, \vec{A} \rightarrow \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} ; q \text{ charge}$$

ponctuelle en O, \vec{p} moment dipolaire en O.

Remarque : un ensemble de charges q_i situées en A_i admet un potentiel à grande distance $\left(\|\vec{OM}\| \gg \|\vec{OA_i}\| \right)$ dont les deux premiers termes sont, par développement

$$\text{limité, en } \frac{1}{r} : V = \frac{\sum q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sum q_i \vec{OA_i} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots$$

b. Par analogie avec le potentiel électrostatique, l'expression vérifiée par φ sera analogue à l'expression vérifiée par V.

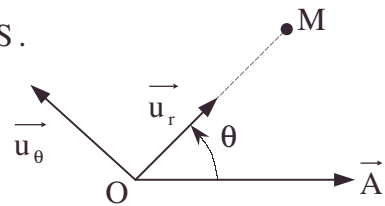
$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ or } \rho = 0 \text{ pour une charge ponctuelle } q \text{ en O et pour un moment}$$

dipolaire en O. $\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$.

Remarque : pour un fluide incompressible $\text{div} \vec{v} = 0$, en écoulement irrotationnel, $\Delta \varphi = 0$ est automatique.

c. Soit une sphère Σ de rayon R : $\psi = \oiint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oiint v_r dS$.

$$v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a}{r^2} + \frac{2A \cos \theta}{r^3} \text{ si } \theta = (\vec{A}, \vec{u}_r)$$



$$\psi = \frac{a}{r^2} \oiint dS + \frac{2A}{r^3} \oiint \cos \theta dS = \frac{a}{r^2} \cdot 4\pi r^2 + \frac{2A}{r^3} \int_0^{2\pi} \cos \theta 2\pi r \sin \theta r d\theta ;$$

$$\psi = 4\pi a + \frac{2A}{r} \cdot 2\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 4\pi a + 0 \text{ or } \psi \text{ est le débit volumique, et comme}$$

$\text{div} \vec{v} = 0$ pour un fluide incompressible, d'après Ostrogradsky $\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall \Sigma$ (sauf cas de source ou de puits). D'où : $\psi = 4\pi a = 0$; $a = 0$.

5.a.α. N'ayant pas dans l'énoncé, le gradient en coordonnées sphériques, écrivons (dans le but de faire les calculs en cartésiennes avec les formules données) :

Notation de l'énoncé : $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$.

$$\varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{r^2} ; \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{r^2} \right) = -(\vec{A} \cdot \vec{n}) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{A} \cdot \vec{n}) ;$$

• analogie, condition limite, développement au premier ordre ou plus, incompressibilité, Laplace [équation de]

$$\vec{v} = (\vec{A} \cdot \vec{n}) \frac{3}{r^3} \vec{u}_r - \frac{1}{r^3} \vec{A} ; \vec{v} = \frac{3(\vec{A} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{A}}{r^3} \text{ car } \vec{u}_r = \vec{n} .$$

$$\beta. \text{ Posons } \vec{A} = A\vec{z} = A(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) ;$$

$$\vec{v} = \frac{3A}{r^3} \cos\theta \vec{u}_r - \frac{A}{r^3} (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) = \frac{2A \cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + A \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta ;$$

$\forall M \in \text{plan m\u00e9ridien.}$

On aurait pu trouver \vec{v} par analogie avec le champ \vec{E} cr\u00e9\u00e9 par un dip\u00f4le \vec{p} (\vec{A} \u00e9tant l'analogie de $\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0}$).

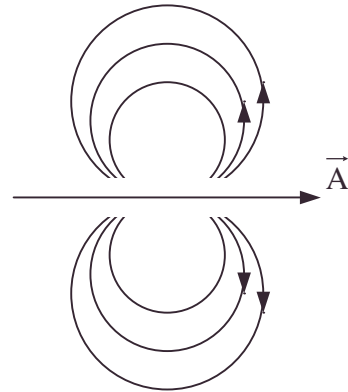
b. Trouvons les lignes de champ, ensemble de points M tels que $d\vec{OM} // \vec{v}$ dans un plan m\u00e9ridien :

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta ; \vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta ;$$

$$\text{Ecrivons } \frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta} \text{ soit } \frac{1}{2} \frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{r}{r_0} = \ln \sin\theta ;$$

$$r = r_0 \sin^2 \theta \text{ valable loin de O.}$$

c. La seule direction privil\u00e9gi\u00e9e de l'espace, \u00e9ventuellement axe de sym\u00e9trie cylindrique est celle de \vec{u} . L'allure des lignes de courant font jouer \u00e0 \vec{A} ce r\u00f4le de direction privil\u00e9gi\u00e9e de l'espace, axe de sym\u00e9trie cylindrique. Les directions de \vec{A} et de \vec{u} sont donc confondues : $\vec{A} = k\vec{u}$, k ne d\u00e9pend pas de t car \vec{A} et \vec{u} sont ind\u00e9pendants de t , mais d\u00e9pendent de la forme g\u00e9om\u00e9trique de S .



$$\mathbf{6.a.} \text{ D'apr\u00e8s I.3. } \frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t) = C \text{ en r\u00e9gime stationnaire.}$$

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} - \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{P_0}{\mu} + 0 + 0 \text{ (} r = \infty \text{)} \Rightarrow P = P_0 - \frac{\mu}{2} v^2 + \mu \vec{u} \cdot \vec{v}$$

On sait que \vec{u} est parall\u00e8le \u00e0 \vec{A} , origine des coordonn\u00e9es polaires.

Rempla\u00e7ons v par sa valeur trouv\u00e9e en **II.5.** :

$$P = P_0 - \frac{\mu A^2}{2r^6} (3\cos^2 \theta + 1) + \frac{\mu A u}{r^3} (3\cos^2 \theta - 1).$$

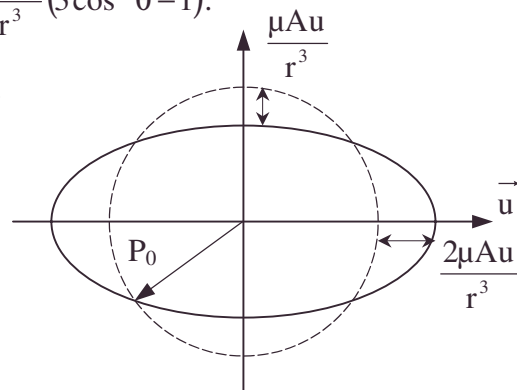
$$\text{A grande distance : } \frac{1}{r^6} \ll \frac{1}{r^3} \text{ d'o\u00f9 : } P = P_0 + \frac{\mu A u}{r^3} (3\cos^2 \theta - 1).$$

b. Repr\u00e9sentation polaire $P = P(\theta)$ \u00e0 r grand, fix\u00e9.

$$P = P_0 \text{ pour } 3\cos^2 \theta = 1 ;$$

$$\theta = \pm 54,74^\circ [180]$$

c. $\vec{F}_\Sigma = - \oint_{n_s} P d\vec{S}$; d'apr\u00e8s la sym\u00e9trie cylindrique d'un vecteur non-axial :



• analogie, diagramme polaire de la pression, ligne de champ.

$$F_x = F_y = 0 \quad \text{soit } F_z = -\iint P dS \cos \theta \quad (\text{selon } \vec{u}; \text{ voir figure ci-après})$$

$$F_z = -\int_0^\pi \left(P_0 + \frac{\mu A u}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \cos \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta ;$$

$$F_z = 2\pi r^2 \left[P_0 \frac{\cos^2 \theta}{2} + \frac{3\mu A u}{r^3} \frac{\cos^4 \theta}{4} - \frac{\mu A u}{r^3} \frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^\pi, \text{ donc } F_z = 0.$$

Ce résultat n'est pas surprenant car deux points opposés de la sphère Σ subissent deux forces pressantes opposées $P(r, \theta) = P(r, \pi - \theta)$.

7. D'après l'analogie électrostatique, nous savons que $\Delta \phi = 0$.

Contrôlons $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n}$ en $r = R$.

$$\phi = \frac{A \cos \theta}{r^2} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2A \frac{\cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + A \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta ;$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_r = 2 \frac{A \cos \theta}{R^3} ; \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = u \cos \theta .$$

Si $A = \frac{R^3 u}{2}$ alors $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n}$: c'est une solution acceptable car satisfaisant toutes les conditions. Comme il y a unicité de la solution, à défaut d'objection, c'est la solution.

$$\phi = \frac{u R^3}{2} \frac{\cos \theta}{r^2} .$$

$$8. E_c = \iiint_{\text{univers fluide}} \frac{1}{2} \mu v^2 d\tau = \iiint_{\text{univers fluide}} \frac{1}{2} \mu \frac{A}{r^6} (3 \cos^2 \theta + 1) d\tau .$$

Le volume le plus grand tel que l'intégrand soit constant est le manchon pelliculaire sphérique construit sur une couronne sphérique avec $d\tau = dS dr = 2\pi r \sin \theta r d\theta dr$

$$E_c = \frac{2\pi}{2} \mu A^2 \left(\int_R^\infty \frac{dr}{r^4} \right) \left(\int_0^\pi (3 \cos^2 \theta + 1) \sin \theta d\theta \right) = \frac{1}{2} \mu A^2 \frac{8\pi}{3R^3} ; \text{ or } A = \frac{1}{2} R^3 u .$$

$E_c = \frac{\pi}{3} \mu R^3 u^2$. En dépit de l'absence de viscosité (de frottement) la sphère écarte le fluide et lui transmet de l'énergie. Sa valeur est le quart de l'énergie cinétique d'une sphère de même masse volumique que le fluide avançant à la vitesse u .

9.a. D'après II.6.a. en remplaçant $A = \frac{1}{2} R^3 u$, on obtient pour $r = R$:

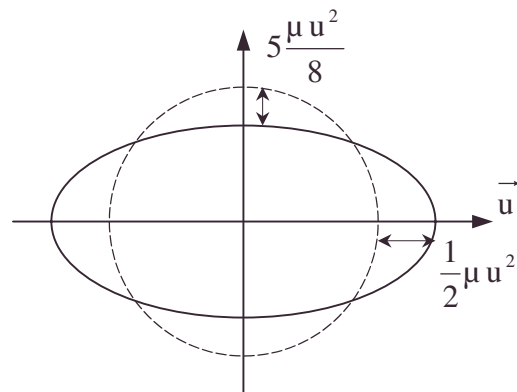
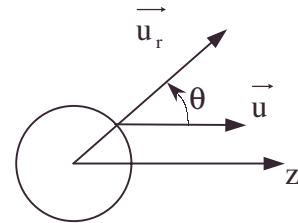
$$P(R, \theta) = P_0 + \frac{1}{8} \mu u^2 (9 \cos^2 \theta - 5) \quad \text{car il faut compter les termes en } \frac{1}{r^6} .$$

b. Représentation polaires de $P(R, \theta)$.

$$P = P_0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 9 \cos^2 \theta - 5 = 0 \\ \text{soit } \theta = \pm 41,81^\circ [180^\circ] \end{cases}$$

$$10.a. A = 1,35 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-1} .$$

$$b. E_c = 2,83 \cdot 10^{-6} \text{ J} .$$



c.

	θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
en Pa	$P - P_0$	$5 \cdot 10^{-2}$	$-6,25 \cdot 10^{-3}$	$-0,0625$	$-6,25 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$

On négligera $P - P_0$ devant $P_0 = 10^5$ Pa.

III.1.a. $k = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot d\vec{S}$ s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

b. $\text{div } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{\mathcal{A}}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{A}}$;

on voit l'analogie entre \vec{v} et \vec{B} , cf. $\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$;

or \vec{A} satisfait à $\overrightarrow{\Delta} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ et $\text{div } \vec{A} = 0$ dans l'A.R.Q.S.

$$\text{Ecrivons } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{2} \overrightarrow{\Delta} \vec{\mathcal{A}},$$

On peut construire $\vec{\mathcal{A}}$ dans l'analogie avec $\text{div } \vec{A} = 0$ et $\overrightarrow{\Delta} \vec{A} = -2\vec{\Omega}$, $2\vec{\Omega}$ étant analogue à $\mu_0 \vec{j}$.

A la solution magnétostatique $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{univers}} \frac{\vec{j}}{r} d\tau$ correspond l'analogie :

$$\vec{\mathcal{A}}(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{2\vec{\Omega}}{r} d\tau \quad \text{et pour un circuit filiforme : } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iint \vec{j} dS \right) \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{r} \text{ correspond}$$

$$\text{une boucle de vortex : } \vec{\mathcal{A}}(M) = \left(\iint \frac{\vec{\Omega} dS}{2\pi} \right) \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{r} \text{ soit } \vec{\mathcal{A}}(M) = \frac{k}{2\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{r}.$$

2.a. $\vec{\mathcal{M}} = k \iint_S d\vec{S}$ est l'analogie du moment magnétique d'une boucle de courant

$\vec{M} = i \iint_S d\vec{S}$, vu **III.1.** ; \mathcal{M} s'exprime en $\text{m}^4 \cdot \text{s}^{-1}$. cf. énoncé.

b. Connaissant $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$ en magnétostatique,

$$\text{on en déduit formellement : } \vec{\mathcal{A}}(M) = \frac{1}{2\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

3.a. Rappelons l'analogie entre le dipôle électrostatique, le dipôle magnétique, la boucle de vortex ; grandeurs analogues :

\vec{p}	\vec{M}	$\vec{\mathcal{M}}$
$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \frac{\vec{u}_r}{r^2}$	$\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{2\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\vec{u}_r}{r^2}$
$\vec{E} \left \begin{array}{l} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{array} \right.$	$\vec{B} \left \begin{array}{l} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} 2M \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} M \frac{\sin \theta}{r^3} \end{array} \right.$	$\vec{v} \left \begin{array}{l} v_r = \frac{1}{2\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \\ v_\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} \end{array} \right.$

$$\text{Or, } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right] \Rightarrow \vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^2} \right] \text{ et } \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{r^2} \right].$$

• analogie, boucle de vortex, unité

On a ainsi : $\vec{v} = \vec{\nabla} \left(-\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{2\pi r^3} \right)$ et vu [1]

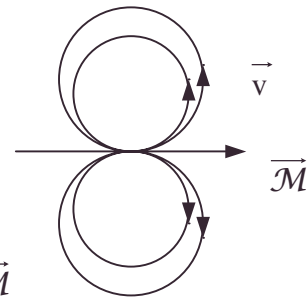
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\vec{\mathcal{M}}}{2\pi} \wedge \left(\underbrace{\vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)}_{\vec{0}} \right) + \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \vec{\text{rot}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{2\pi} \right)}_{\vec{0}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{2\pi} \right) + \underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{\nabla} \right)}_{\vec{0}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{2\pi} \right) \\ \Rightarrow \vec{v} &= \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{2\pi} \right) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad [8] \end{aligned}$$

Continuons les analogies :

$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{M}}{r^3}$	$\vec{v} = \frac{1}{2\pi} \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3}$
--	---	---

b. Vu 3.a. : $v_r = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{\pi r^3}$; $v_\theta = \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{2\pi r^3}$

4.a. Vu 3.a. $\varphi = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{2\pi r^2}$; l'écoulement est potentiel.



b. En comparant les formules, il suffit d'identifier $\vec{A} = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{2\pi}$.

Les écoulements sont alors équivalents.

c. C'est le formalisme déjà développé en **III.3.a.**

5.a. $\vec{A} = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{2\pi}$ or $\vec{A} = \frac{1}{2} R^3 \vec{u} \Rightarrow \frac{\vec{\mathcal{M}}}{2\pi} = \frac{1}{2} R^3 \vec{u}$. (cf. **2.a.**) ;

$\vec{\mathcal{M}}, \vec{A}$ et $R^3 \vec{u}$ sont en $m^4.s^{-1}$.

b. $\mathcal{M} = \pi R_0^2 k = \pi R^3 u \Rightarrow k = \frac{R^3}{r_0^2} u$ et $\mathcal{M} = \pi R^3 u$.

AN : $k = 3.10^{-4} m^2.s^{-1}$; $\mathcal{M} = 8,48.10^{-7} m^4.s^{-1}$.

3.4.2. Tourbillon dans un fluide parfait

Dans tout le problème, on ne considérera que des fluides parfaits incompressibles. De plus, l'écoulement sera permanent sauf aux questions **III.1.1.** et **III.1.2.** où il peut éventuellement être non stationnaire. Le but du problème est l'étude de tourbillons dans un fluide, placé dans un champ de pesanteur uniforme, vertical et dirigé vers le bas avec $g = 9,8 m.s^{-2}$. Il sera avantageux d'utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On notera ρ la masse volumique du fluide. Il est tout-à-fait possible d'utiliser, dans la suite du problème, un résultat donné par l'énoncé même s'il n'a pas été démontré.

I. Question préliminaire

On considère un conducteur cylindrique, infini, d'axe Oz, de rayon a et parcouru par un courant permanent d'intensité I . Le vecteur densité de courant \vec{j} dans le conducteur est uniforme et dirigé selon Oz : $\vec{j} = j\vec{e}_z$ avec $j > 0$. Déterminer le champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace et les lignes de champ de \vec{B} .

II. On définit la vorticité par $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ où \vec{v} est le champ de vitesses du fluide.

On notera Γ la circulation de la vitesse sur une courbe fermée : $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$.

On constate que, très souvent, dans un fluide, la vorticité se concentre en certaines régions de l'espace qui ont la forme de tubes, dits tubes de vorticité : la vorticité est nulle partout dans le fluide sauf à l'intérieur de ces tubes. Ce type d'écoulement correspond à des tourbillons ou vortex comme ceux des tornades et des cyclones ou des vidanges de récipient.

1. Quelles sont les équations locales vérifiées par \vec{v} ? En déduire une analogie entre \vec{v} et le champ magnétique \vec{B} .

Quelles sont, dans cette analogie, les grandeurs analogues de $\vec{\omega}$ et Γ ?

2. On modélise un vortex de la manière suivante (vortex de Rankine) : le tube de vorticité est un cylindre infini d'axe Oz et de rayon a . En dehors de ce cylindre la vorticité est nulle.   l'intérieur du cylindre elle est uniforme et dirigée selon Oz :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \text{ avec } \omega > 0.$$

1. Déterminer les lignes de courant et la vitesse \vec{v} en tout point de l'espace.

2.a.   une altitude z donnée, déterminer la pression p dans le fluide en fonction de r , distance à l'axe du vortex, en dehors du tube de vorticité, à une constante additive près.

b. Pourquoi les particules en suspension dans l'eau d'une baignoire ont-elle tendance à se concentrer au cœur du tourbillon lors d'une vidange ?

c. Justifier qualitativement pourquoi une tornade passant au-dessus d'une maison a tendance à en arracher la toiture considérée horizontale et plane pour simplifier.

3. Le tourbillon considéré a lieu dans un liquide. Le tube de vorticité cylindrique est de rayon a . La distance à l'axe du tube est r .

1. Déterminer l'équation de la surface libre du liquide pour $r > a$, l'altitude de la surface libre étant supposée nulle pour r infini.

2. Déterminer l'équation de la surface libre du liquide pour $r < a$.

3. Dessiner l'allure de la surface libre du vortex de Rankine.

III.1.1. On étudie l'évolution de la circulation de la vitesse en fonction du temps.

Le contour sur lequel on calcule la circulation de la vitesse est constitué de particules fluides qui se déplacent au cours du temps. Le contour se déplace donc lui aussi et peut éventuellement se déformer : au cours du temps, un élément de longueur $d\vec{\ell}$ du contour peut varier aussi bien en norme qu'en direction en fonction de la vitesse des particules de fluide constituant cet élément de longueur.

On réservera la lettre d aux dérivées ou aux différentielles par rapport aux coordonnées d'espace (ainsi $d\vec{\ell}$) et la lettre D   la dérivée totale par rapport au temps. On notera que $\vec{\ell}$ est le vecteur position de l'élément de longueur $d\vec{\ell}$, dans le cadre d'une description lagrangienne, et que $\vec{v} = \frac{D\vec{\ell}}{Dt}$.

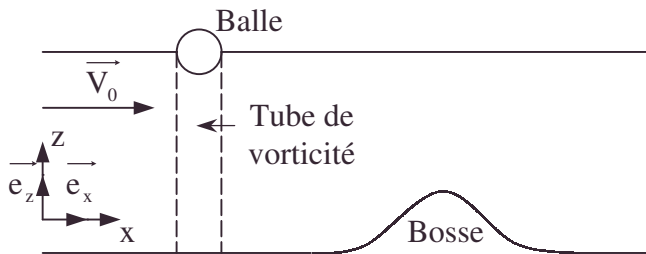
On suppose que les forces extérieures dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire que la densité volumique de force \vec{f}_v peut s'écrire comme le gradient d'un champ scalaire ϕ par :

$\vec{f}_v = -\text{grad}\phi$. Montrer que, dans ces conditions, la dérivée particulaire (ou dérivée en suivant le mouvement) de la circulation de la vitesse sur un contour fermé est nulle (théorème de Kelvin), c'est-à-dire : $\frac{D}{Dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

2. En déduire que si un fluide est en écoulement irrotationnel à un instant t , l'écoulement restera irrotationnel par la suite.

3. On considère un élément d'un tube de vorticité cylindrique d'axe Oz, de longueur " ℓ " et de section S. On suppose encore que la vorticité est uniforme dans le tube et orientée selon Oz. L'élément de tube subit un étirement qui augmente sa longueur de $d\ell$. Comment varie la vorticité ω ?

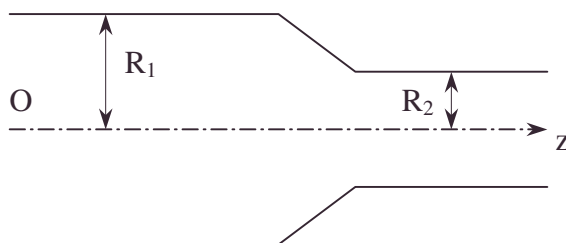
2. Un tube de vorticité vertical se déplace dans un liquide en mouvement. Loin du tourbillon, la vitesse, \vec{V}_0 , est uniforme : $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$, ($V_0 > 0$). (cf. figure ci-dessous).



Une balle flotte au-dessus du tube de vorticité et se déplace avec lui. Elle a donc un mouvement de rotation par rapport à l'axe du vortex qui passe également par un de ses diamètres.

Comment varie la vitesse de rotation de la balle lorsqu'elle passe au-dessus d'une bosse au fond du récipient ?

3. On étudie l'écoulement d'un liquide en écoulement permanent dans une canalisation cylindrique. Celle-ci est composée de deux parties successives, la première ayant un



rayon plus grand que la seconde. Les deux parties de la canalisation dont la section se rétrécit progressivement (cf. figure ci-contre). On se placera toujours très en dehors de cette portion de raccordement.

L'axe de la canalisation, horizontal et commun aux deux parties, est Oz. Dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , les coordonnées de la vitesse en un point du fluide sont (v_r, v_θ, v_z) . v_r est toujours nul. Les indices 1 sont relatifs à la partie de canalisation de grand rayon R_1 et les indices 2 à celle de petit rayon R_2 .

Il existe un "tube" de vorticité au centre de la conduite, d'axe Oz, de symétrie de révolution autour de Oz et de rayon variant si le rayon de la conduite varie. On étudie la vitesse en dehors de ce tube de vorticité. Il existe donc une composante orthoradiale de la vitesse v_θ non nulle.

La composante axiale V_z est uniforme sur une section.

a. Exprimer V_{z2} en fonction de V_{z1} , R_1 et R_2 .

b. On considère un point M_1 dans la partie de canalisation de rayon R_1 , hors du tube de vorticité, à une distance r_1 de l'axe, et de même un point M_2 dans la partie de rayon R_2 à une distance r_2 de l'axe. M_2 est choisi de telle manière que M_1 et M_2 se trouvent sur une même ligne de courant.

Montrer que les résultats du **III.1.** permettent d'exprimer v_{θ_2} (en M_2) en fonction de v_{θ_1} (en M_1), r_1 et r_2 , puis en fonction de v_{θ_1} , R_1 et R_2 .

Autres concours ; Durée : 1h30

Corrigé

I. Tout plan méridien est plan de symétrie : $\vec{B}(N)$ est orthoradial pour être perpendiculaire au plan méridien ; les lignes de champs sont des cercles. L'application du théorème d'Ampère sur un cercle γ de rayon r , centré sur Oz , orienté dans le sens trigonométrique, dans un plan de z donné, s'écrit $\oint_{\gamma} \vec{B}(N) d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\Sigma_{\gamma}} = \oint_{\gamma} B_{\theta} r d\theta$.

Vu la symétrie cylindrique, $\vec{B}(N, \theta, z)$ est indépendant de θ (et de z) : on peut sortir B_{θ} de l'intégrale. $2\pi r B_{\theta} = \mu_0 I_{\Sigma_{\gamma}}$.

a. $r > a$; $I_{\Sigma_r} = \pi a^2 j = I$; $B_{\theta} = \mu_0 \frac{a^2 j}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \forall z, \theta$.

b. $r < a$; $I_{\Sigma_r} = \pi r^2 j$; $B_{\theta} = \mu_0 \frac{r j}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad \forall z, \theta$.

II.1.a. L'incompressibilité se traduit par : $\text{div} \vec{v} = 0$.

L'introduction de $\vec{\omega}$ nous dit : $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\omega}$ ou $\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{\ell} = \iint \vec{\omega} d\vec{S}$.

b. En toute circonstance, la conservation du flux magnétique s'écrit

$\text{div} \vec{B} = 0$; dans l'approximation des régimes quasi stationnaires

$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, forme locale du théorème d'Ampère $\mu_0 I = \oint \vec{B} d\vec{\ell}$.

c. Analogie :

Magnétostatique	Fluide incompressible avec vorticité
\vec{B}	\vec{v}
$\mu_0 \vec{j}$	$\vec{\omega}$
$\mu_0 I_{\Sigma_{\gamma}}$	Γ

2.1. Les symétries et l'analogie nous donnent un champ \vec{v} orthoradial, des lignes de champ circulaires.

$$\oint \vec{v} d\vec{\ell} = v_{\theta} 2\pi r = \Gamma = \iint_{\Sigma} \vec{\omega} d\vec{S} = \omega S_{\Sigma}.$$

Si $r > a$, $v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{a^2}{2r} \omega$.

Si $r < a$, $v_{\theta} = \frac{\pi r^2 \omega}{2\pi r} = \frac{r \omega}{2} = \frac{r \Gamma_{\text{total}}}{2\pi a^2}$.

2.a. $r > a$: $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\omega} = \vec{0}$; or l'écoulement est permanent $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$. La relation de

Bernoulli s'écrit $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = K$; $p = \underbrace{(K - \rho g z)}_{\text{constante à } z \text{ donné}} - \rho \frac{a^4 \omega^2}{8r^2}$

- analogie, Bernoulli [formules de], incompressibilité, symétrie

b. Dans le plan z donné $\vec{f}_v = -\vec{\text{grad}} p = -\frac{\rho a^4 \omega^2}{4r^3} \vec{u}_r$, force volumique centripète.

Les particules se concentrent dans le tourbillon.

c. Au-dessus du toit : $V_s = \frac{a^2 \omega^2}{2r}$; $p_s = K' - \frac{\rho a^4 \omega^2}{8r^2}$;

En-dessous du toit : $V_I = 0$; $p_I = p_0$.

Pour ω élevé et r faible, $(p_I - p_s)S_{\text{aire toit}} = \left(\frac{\rho a^4 \omega^2}{8r^2} + p_0 - K' \right) S_{\text{aire toit}}$ peut être une force suffisante pour soulever le toit.

3.1. $r > a$; $v_\theta = \frac{a^2 \omega}{2r}$; la relation de Bernoulli s'écrit en régime permanent irrotationnel : $\frac{1}{2} \rho V^2 + p + \rho g z = K$.

A la surface libre :

$p = p_0, \forall z$; quand $r \rightarrow \infty, z \rightarrow 0$, niveau de référence non perturbé ($V_\infty = 0$) ;
 $0 + p_0 + 0 = K = p_0$.

$\rho g z + p_0 + \rho \frac{a^4 \omega^2}{8r^2} = p_0 \Rightarrow z = -\frac{a^4 \omega^2}{8gr^2}$, équation de la surface libre en cylindriques.

2. Les équations d'Euler s'écrivent :

$$\rho \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{=0} + \vec{\text{grad}} \frac{v_\theta^2}{2} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_\theta \right) = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g} \text{ or } v_\theta = \frac{r\omega}{2}.$$

Projetons **a.** selon \vec{u}_r : $\rho \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \omega^2}{8} \right) - \rho \frac{\omega^2 r}{2} = -\rho \frac{\omega^2 r}{4} = -\frac{\partial p}{\partial r}$.

b. selon \vec{u}_z : $0 + 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g$.

L'intégration immédiate donne : $p = P_1 - \rho g z + \frac{\rho \omega^2 r^2}{8}$.

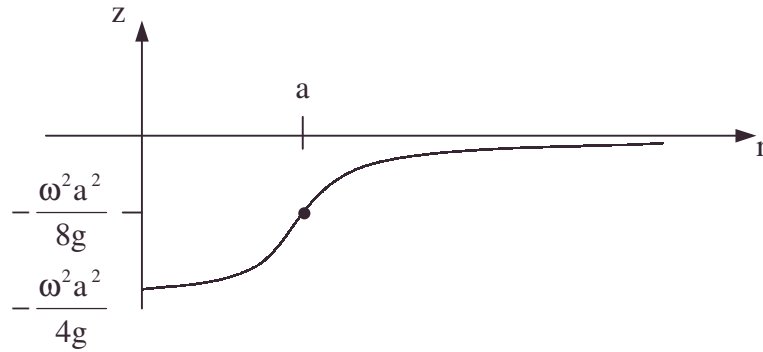
La surface libre est telle que $p = P_0$ et qu'il y a continuité en $r = a$.

$P_0 = P_1 - \rho g z(a) + \rho \omega^2 \frac{a^2}{8} \Rightarrow \rho g z(a) = -P_0 + P_1 + \rho \frac{\omega^2 a^2}{8} = -\frac{a^2 \omega^2}{8g} \rho g$ vu l'équation de la surface libre.

$\Rightarrow P_1 = P_0 - \frac{\rho a^2 \omega^2}{4} \Rightarrow \rho g z = P_1 - P_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{8}$, équation de la surface libre,

$\Rightarrow z = \frac{\omega^2}{4g} \left(\frac{r^2}{2} - a^2 \right)$, parabole de sommet $r = 0, z = \frac{-a^2 \omega^2}{4g}$.

3.



Dans un demi plan méridien

III.1.1.a. Les équations d'Euler s'écrivent pour un fluide incompressible dans le cadre

de l'énoncé :
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}\left(\frac{p+\phi}{\rho}\right).$$

$$\oint \frac{D\vec{v}}{Dt} d\vec{\ell} = \oint \text{grad}\left(\frac{p+\phi}{\rho}\right) d\vec{\ell} = \oint d\left(\frac{p+\phi}{\rho}\right) = 0.$$

b. La dérivation sous le signe $\int d$ d'un produit permet :

$$\frac{D}{Dt} \oint \vec{v} d\vec{\ell} = \oint \frac{D\vec{v}}{Dt} d\vec{\ell} + \oint \vec{v} \cdot d\left(\frac{D\vec{\ell}}{Dt}\right) = 0 + \oint \vec{v} d\vec{v} = \oint d\left(\frac{1}{2} \vec{v}^2\right) = 0.$$

2.a. $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \Gamma = \Gamma_0$ en suivant le mouvement des particules fluides (servant à définir les éléments de longueur en mouvement).

b. Vu **2.a.** si $\Gamma_0 = 0$ à $t = 0$; $\Gamma = 0 \forall t > 0$; or, $\Gamma = \oint_{\gamma} \vec{v} d\vec{\ell} = \iint_{\Sigma_{\gamma}} \vec{\omega} d\vec{S} = 0 \forall \Sigma_{\gamma}$ prise à l'instant t ;

$\Rightarrow \vec{\omega} = \text{rot} \vec{v} = \vec{0}$: écoulement irrotationnel donc pour $t > 0$.

3. Soit " ℓ " la longueur du tube de vortacité, défini comme un cylindre de particules fluides ayant la caractéristique d'avoir un mouvement de rotation, les autres particules ne l'ayant pas. Le volume ainsi défini reste constant vu **2.b.** pour un fluide incompressible sans amortissement possible car sans viscosité : " ℓ " $S = v_0$ or $\Gamma_0 = \omega S$ vu l'uniformité de la vortacité ;

$$\omega = \frac{\Gamma_0}{S} = \frac{\Gamma_0}{v_0} \ell ; \ln \omega = \ln \ell + \ln \frac{\Gamma_0}{v_0} \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\ell}{\ell}.$$

Si $d\ell$ augmente, ω augmente.

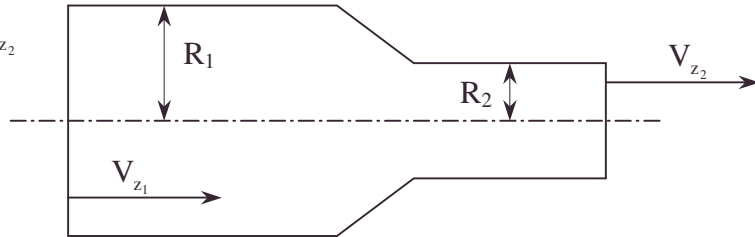
2. La rotation de la balle autour de Oz se comprend par adhérence : c'est-à-dire par l'absence de vitesse relative des points de la balle par rapport aux particules fluides supérieures décrivant des lignes de courant circulaires dans le repère en translation rectiligne uniforme avec le tube de vortacité à l'instant t .

Au dessus de la bosse, la diminution de " ℓ " entraîne une diminution de ω du fluide et par adhérence une diminution de la vitesse de rotation de la balle.

3.a. Exprimons l'incompressibilité du fluide sur la surface de contrôle visualisant V_{z_1}, V_{z_2}

$$D_{V_1} = D_{V_2} ; \pi R_1^2 V_{z_1} = \pi R_2^2 V_{z_2}$$

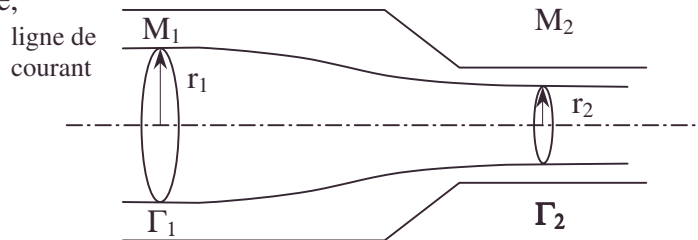
$$V_{z_2} = V_{z_1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2$$



b.α. Hors du tube de vorticité,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow v_{\theta_1} \cdot 2\pi r_1 = v_{\theta_2} \cdot 2\pi r_2$$

$$v_{\theta_2} = v_{\theta_1} \left(\frac{r_1}{r_2} \right).$$



β. L'incompressibilité du fluide exprimée sur le tube de courant représenté ci-dessus de section πr_1^2 définie par Γ_1 et πr_2^2 définie par Γ_2 donne :

$$V_{z_1} \pi r_1^2 = V_{z_2} \pi r_2^2 \Rightarrow \frac{V_{z_2}}{V_{z_1}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow v_{\theta_2} = v_{\theta_1} \frac{R_1}{R_2}. \text{ On voit l'effet}$$

de R_z sur la vitesse orthoradiale.

3.4.3. Houle sur fond horizontal

On considère un liquide parfait, incompressible, pesant de masse volumique ρ . Initialement, il est au repos entre un fond rigide, plan, horizontal, situé à la profondeur h en-dessous d'une surface libre prise comme plan $z = 0$ (figure 4). Au-dessus de la surface libre est situé un gaz de masse volumique négligeable devant ρ , soumis à la pression p_0 .

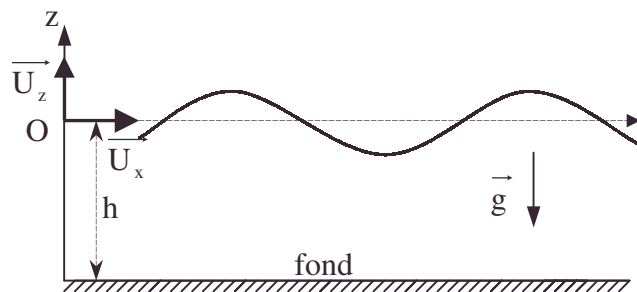


Figure 1

Nous supposons le liquide mis en mouvement sans choc, ce mouvement correspondant à des déplacements parallèles au plan xOz , et se propageant suivant Ox .

La vitesse d'un point M du fluide, de coordonnées x et z , à l'instant t , sera notée :

$\vec{V} = u(x, z, t) \vec{u}_x + v(x, z, t) \vec{u}_z$. On supposera $\|\vec{V}\|$ très inférieure à la célérité c de propagation de la perturbation.

1.a. Montrer que l'on a, à tout instant, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$.

b. On pose dorénavant : $\vec{V} = \vec{\text{grad}} \varphi(x, z, t)$, ce que l'on peut montrer être admissible pour de petits mouvements du fluide, et un traitement dynamique restreint aux termes du premier ordre au plus en \vec{V} . A partir de la relation fondamentale de la dynamique, et

pour ces "petits mouvements", établir la relation : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} = A(t)$ où p est la pression dans le liquide et $A(t)$ une fonction arbitraire du temps.

On prendra $A(t) = 0$; montrer que la description du mouvement n'en est pas affectée.

c. Compte tenu de **a.** et de l'hypothèse introduite en **b.** sur \vec{V} , quelle équation aux dérivées partielles satisfait la fonction ϕ ?

d. En utilisant les conditions aux limites, établir les relations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z = -h, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, 0, t) + g \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0, t) = 0.$$

2. On considère une onde pour laquelle la fonction ϕ est de la forme :

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t) \quad (k > 0, \omega > 0).$$

(La profondeur h est très grande devant l'amplitude de l'onde en tout point).

a. Exprimer $f(z)$ à une constante multiplicative près qu'on nommera B et la célérité c en fonction de g et de la longueur d'onde λ .

b. On suppose l'amplitude du déplacement des particules de fluide faible devant λ . Soit x_1 et z_1 les coordonnées au repos d'une telle particule, x et z ces coordonnées à l'instant t , quand la particule a été atteinte par l'onde.

Exprimer $(x - x_1)$, $(z - z_1)$ en fonction de x_1 , z_1 , t , B , k et ω .

c. En déduire que la trajectoire d'une particule est un cercle dont le rayon $r(z_1)$, pour une onde donnée, ne dépend que de la distance à la surface libre au repos. Etablir l'expression de $r(z_1)$. Représenter sur un schéma les différentes positions occupées, à un instant donné, par des particules de même z_1 , initialement alignées, dont les x_1 diffèrent de $\frac{\lambda}{8}$ les unes aux autres. Quelle est la forme de la surface libre ?

d. La distance de crête à crête d'une houle en eau profonde est de 80 m ; calculer c . La différence de niveau entre crête et creux étant de 1 m, calculer le rayon $r(z_1)$ des trajectoires pour $|z_1| = 3 \text{ m}$ et $|z_1| = 30 \text{ m}$.

3. On se place dans les mêmes hypothèses qu'en **2.** ci-dessus, mais en prenant en compte le caractère fini de la profondeur h .

a. Etablir la nouvelle expression de $\phi(z)$ à une constante multiplicative près. En déduire la relation de dispersion $\omega = f(k, g, h)$ et la célérité c en fonction de λ , g , h .

b. En transposant la méthode des questions **2.b.** et **2.c.**, déterminer la nature des trajectoires et leurs caractéristiques géométriques.

c. Calculer c pour $\lambda = 80 \text{ m}$, $h = 10 \text{ m}$. La différence de niveau entre crête et creux d'une houle étant 1 m, donner les valeurs numériques des caractéristiques des trajectoires de particules au voisinage de la surface et au voisinage du fond.

4. On reprend les conditions de la question **2.**, avec en particulier, une profondeur h infinie, mais pour un bassin limité, perpendiculairement à Ox , par deux parois verticales (plans $x = 0$ et $x = \ell$).

a. Exprimer la fonction potentiel ϕ et déterminer les valeurs possibles des longueurs d'onde λ pour lesquelles on peut conserver une fonction ϕ qui dépende sinusoidalement du temps t avec la pulsation ω .

b. Déterminer les trajectoires des particules du fluide.

c. Comment évoluent ces résultats pour un bassin de profondeur h finie ?

Centrale ; Durée 2h

• condition limite, dérivée partielle, développement au premier ordre ou plus, houle, séparation des variables, surface libre, trajectoire

Corrigé

1.a. Pour un fluide incompressible, $\text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$.

b. Ecrivons les équations d'Euler : $\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{2} V^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{g}$.

En se limitant au terme d'ordre 1 en \vec{V} , il reste :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = -\overrightarrow{\text{grad}} (\rho + \rho g z) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z + \frac{p}{\rho} \right) = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z + \frac{p}{\rho} = A(t), \quad A(t) \text{ étant arbitraire.}$$

Prenons $\varphi_1 = \varphi - \int_0^t A(t) dt$; $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_1 = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{V}$.

On a : $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g z + \frac{p}{\rho} = 0$; \vec{V} n'est pas affecté par le choix du second membre de la relation de Bernoulli en régime quasi stationnaire.

c. $\text{div } \vec{V} = 0$ s'écrit $\Delta \varphi = 0$.

d.α. Sur le fond, le liquide ne rentre ni ne sort : $v = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z = -h, t)$.

β. A la surface, $p = p_0$. Dérivons alors **1.b.** : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, z_s, t) + g \frac{dz_s}{dt} = 0$.

Remarquons : $\frac{\partial z_s}{\partial t} = v_z(x, z_s, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z_s, t)$ et en particulier pour les points $z \neq 0$ de

la surface. On a donc : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, 0, t) + g \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, 0, t) = 0$.

2.a. $\Delta \varphi = 0 \Rightarrow f''(z) - k^2 f(z) = 0$ soit $f(z) = A e^{-kz} + B e^{+kz}$; N.B. : A n'a rien à voir avec la notation précédente A(t).

$$V = \frac{df_z}{dz} \cos(kx - \omega t) = k (B e^{kz} - A e^{-kz}) \cos(kx - \omega t).$$

Or $V \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow -\infty$ à condition de considérer h comme infini cf. énoncé.

Alors, on simplifie : $f(z) = B e^{kz}$ car $A = 0$ est nécessaire.

vu **1.d.β.** on a : $(-\omega^2 + gk) \varphi = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{gk}$ et $c = v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$, soit $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$.

b. Vu l'hypothèse de déplacement d'amplitude faible $x \neq x_1$, $z \neq z_1$.

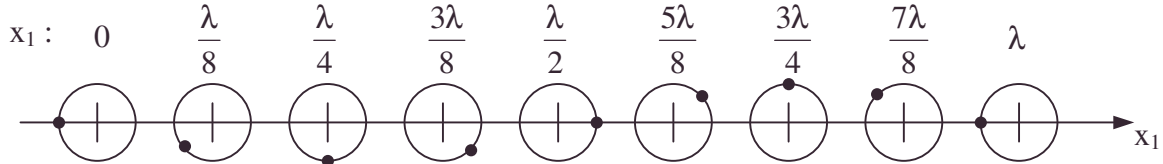
$$u = \frac{\partial (x - x_1)}{\partial t} \neq -k B e^{kz_1} \sin(kx_1 - \omega t);$$

$$\Rightarrow x - x_1 = -\frac{k}{\omega} B e^{kz_1} \cos(kx_1 - \omega t). \text{ De même :}$$

$$v = \frac{\partial (z - z_1)}{\partial t} \neq B k e^{kz_1} \cos(kx_1 - \omega t) \text{ et } z - z_1 = -\frac{k}{\omega} B e^{kz_1} \sin(kx_1 - \omega t).$$

c. $(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2 = \frac{k^2}{\omega^2} B^2 e^{2kz_1}$; la trajectoire d'une particule est donc un

cercle de centre (x_1, z_1) et de rayon $r(z_1)$ valant $\frac{k}{\omega} B e^{kz_1}$ qui ne dépend que de z_1 .



La surface libre reproduit ce déplacement vertical pour $z_1 = 0$. Elle est sinusoïdale dans l'approximation de l'énoncé.

d.α. $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$; A.N. : $\lambda = 80 \text{ m}$: $c = 11,2 \text{ m.s}^{-1}$.

β. $r(z_1) = \frac{k}{\omega} B e^{kz_1}$ avec $r(0) = \frac{k}{\omega} B \Rightarrow r(z_1) = r(0) e^{\frac{2\pi z_1}{\lambda}}$.

AN : $2r(0) = 1 \text{ m}$; $r(z_1) = 0,395 \text{ m}$ pour $z_1 = -3 \text{ m}$; $r(z_1) = 0,0474 \text{ m}$ pour $z_1 = -30 \text{ m}$.

3.a.α. $f(z) = A e^{-kz} + B e^{kz}$; $v = k(B e^{kz} - A e^{-kz}) \cos(kx - \omega t)$.

$v = 0$ pour $z = -h$ permet d'écrire : $\varphi = D \cosh(k(z+h)) \cos(kx - \omega t)$.

β. cf. 1.d.β. $\Rightarrow (-\omega^2 \cosh kh + gk \sinh kh) \cos(kx - \omega t) = 0$;

$\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$; or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

γ. $c = v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ soit $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$.

b.α. $u = \frac{\partial(x - x_1)}{\partial t} = -k D \cosh(k(z_1 + h)) \sin(kx_1 - \omega t)$,

$\Rightarrow x - x_1 = -\frac{k}{\omega} D \cosh(k(z_1 + h)) \cos(kx_1 - \omega t)$;

$v = \frac{\partial(z - z_1)}{\partial t} = k D \sinh(k(z_1 + h)) \cos(kx_1 - \omega t)$.

$\Rightarrow z - z_1 = -\frac{k}{\omega} D \sinh(k(z_1 + h)) \sin(kx_1 - \omega t)$.

β. $\left(\frac{x - x_1}{\frac{kD}{\omega} \cosh k(z_1 + h)} \right)^2 + \left(\frac{z - z_1}{\frac{kD}{\omega} \sinh k(z_1 + h)} \right)^2 = 1$; la trajectoire est une ellipse

de demi-grand axe horizontal $a = \frac{k}{\omega} |D| \cosh k(z_1 + h)$,

de demi-grand axe vertical $b = \frac{k}{\omega} |D| \sinh k(z_1 + h)$.

c. $c = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; AN : $c = 9,14 \text{ m.s}^{-1}$; $\frac{k}{\omega} D \sinh kh = 0,5 \text{ m}$.

$$z_1 = 0 : \quad a = 0,763 \text{ m} ; b = 0,50 \text{ m} \Rightarrow \frac{k}{\omega} D = 0,576.$$

$$z_1 = -10 : a = 0,576 \text{ m} ; b = 0 \text{ m} : \text{ellipse aplatie cf. } v = 0.$$

4.a. $u = 0$ pour $x = 0$ et $x = \ell$. Le bassin étant limité, il ne va pas y avoir une propagation durable. On va aboutir à un régime d'ondes stationnaires (cf. énoncé).

$$\varphi = f(z)g(x)\cos\omega t : \Delta\varphi = 0 \Rightarrow \frac{f''(z)}{f(z)} = -\frac{g''(x)}{g(x)} = k^2, k \in \mathbb{C}.$$

$$\alpha. f''(z) = k^2 f(z) ; f(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz}.$$

$$v = k(Be^{kz} - Ae^{-kz})g(x)\cos\omega t ; v = 0 \text{ pour } z = -\infty \Rightarrow A = 0 \text{ si } k \in \mathbb{R}^+.$$

$$\beta. g''(x) = -k^2 g(x) \Rightarrow g(x) = E_1 \cos kx + G \sin kx.$$

$$u = kf(z)\cos\omega t(-E_1 \sin kx + G \cos kx).$$

$$u = 0 \text{ en } x = 0 \quad \forall t \Rightarrow G = 0 ;$$

$$u = 0 \text{ en } x = \ell \quad \forall t \Rightarrow \sin k\ell = 0 \text{ soit } k = \frac{n\pi}{\ell} ; n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow k \in \mathbb{R}^+ ;$$

$$\varphi = Ee^{\frac{n\pi z}{\ell}} \cos \frac{n\pi}{\ell} x \cos \omega t.$$

$$\gamma. \text{ On voit que } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{\ell} \Rightarrow \lambda = \frac{2\ell}{n} \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

$$b. u = \frac{\partial(x - x_1)}{\partial t} = -E \frac{n\pi}{\ell} e^{\frac{n\pi}{\ell} z_1} \sin \frac{n\pi}{\ell} x_1 \cos \omega t ;$$

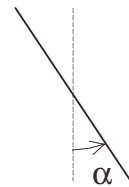
$$v = \frac{\partial(z - z_1)}{\partial t} = E \frac{n\pi}{\ell} e^{\frac{n\pi}{\ell} z_1} \cos \frac{n\pi}{\ell} x_1 \cos \omega t.$$

$$x - x_1 = -\frac{n\pi}{\ell\omega} E e^{\frac{n\pi}{\ell} z_1} \sin \omega t \sin \frac{n\pi x_1}{\ell} ; z - z_1 = \frac{n\pi}{\ell\omega} E e^{\frac{n\pi}{\ell} z_1} \sin \omega t \cos \frac{n\pi x_1}{\ell}.$$

Les trajectoires sont des segments de droites centrés sur x_1, z_1

$$\text{de demi-longueur : } e^{\frac{n\pi}{\ell} z_1} \frac{n\pi}{\ell} \frac{|E|}{\omega},$$

$$\text{d'angle avec la verticale : } \alpha = \frac{n\pi}{\ell} x_1 \text{ car } \tan \alpha = \tan \frac{n\pi x_1}{\ell}.$$



c. La reprise des calculs : $v(-h) = 0 ; u(0) = 0 ; u(\ell) = 0$ permet de trouver :

$$\varphi = F \cosh \frac{n\pi}{\ell} (z + h) \cos \frac{n\pi}{\ell} x \cos \omega t, \text{ d'où :}$$

$$x - x_1 = -F \frac{n\pi}{\ell\omega} \cosh \frac{n\pi}{\ell} (z_1 + h) \sin \omega t \sin \frac{n\pi x_1}{\ell} ;$$

$$z - z_1 = F \frac{n\pi}{\ell\omega} \sinh \frac{n\pi}{\ell} (z_1 + h) \sin \omega t \cos \frac{n\pi x_1}{\ell}.$$

les trajectoires sont des segments de droite centrées sur x_1, z_1 de demi-longueur :

$$|F| \frac{n\pi}{\ell\omega} \left(\sinh^2 \frac{n\pi}{\ell} (z_1 + h) \cos^2 \frac{n\pi x_1}{\ell} + \cosh^2 \frac{n\pi}{\ell} (z_1 + h) \sin^2 \frac{n\pi x_1}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ d'angle } \alpha \text{ avec la}$$

$$\text{verticale, tel que } \tan \alpha = \frac{\tan \frac{n\pi}{\ell} x_1}{\tanh \frac{n\pi}{\ell} (z_1 + h)}.$$

• condition limite, résonance, trajectoire

3.4.4. Modèles d'ondes de surface

L'objet de la première partie du problème est l'étude de certains écoulements irrotationnels d'un fluide incompressible pesant. Les résultats obtenus sont utilisés, dans la seconde partie, pour l'étude d'ondes à la surface d'une masse d'eau en contact avec l'atmosphère, l'eau et l'air étant considérés comme incompressibles.

On utilise un référentiel galiléen orthonormé direct $Oxyz$, avec Oz vertical ascendant.

Enfin, on adopte les données numériques suivantes :

$$\text{masse volumique de l'air : } \rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3} ;$$

$$\text{masse volumique de l'eau : } \rho' = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} ;$$

$$\text{Accélération de la pesanteur : } g = 9,8 \text{ m.s}^{-2} .$$

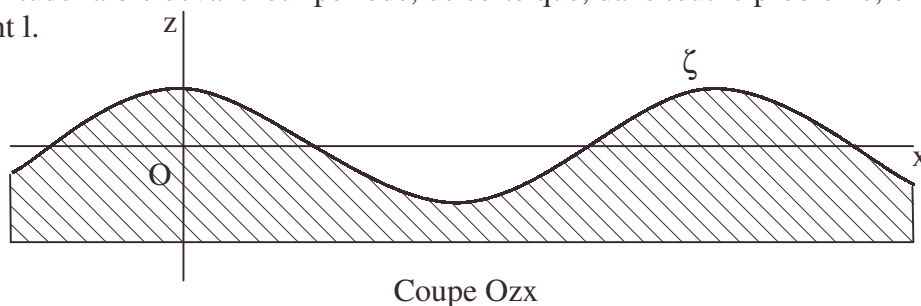
I. Soient P et \vec{v} la pression et la vitesse locales d'un fluide incompressible de masse volumique ρ , et Φ un potentiel des vitesses d'un écoulement irrotationnel de ce fluide.

1.a. Montrer que Φ vérifie en tout point du fluide une équation aux dérivées partielles du second ordre.

b. Si de plus l'écoulement est permanent, c'est-à-dire indépendant du temps, montrer que la fonction $\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + P + \rho gz$ est, dans le fluide, une constante C (relation de Bernoulli).

2. Dans cette question, le fluide occupe le demi-espace $z \geq 0$; son champ des vitesses est uniforme et horizontal : $\vec{v} = V\vec{e}_x$ où V est une constante réelle. Quel est à une constante près, le potentiel des vitesses ? En notant P_0 la pression à l'altitude $z = 0$, calculer la constante C de la relation de Bernoulli.

3. On note désormais Φ_0 le potentiel trouvé à la question précédente et on suppose, dans cette question **I.3.**, que la surface S limitant inférieurement le fluide présente des ondulations périodiques fixes : l'altitude ζ des points de cette surface est donnée par $\zeta(x, y) = a \cos kx$, où a et k sont des constantes positives ; de plus les ondulations ont une amplitude faible devant leur période, de sorte que, dans tout le problème, on néglige ka devant 1.



Ces ondulations perturbent l'écoulement permanent étudié en **I.2.** On cherche à rendre compte du nouvel écoulement permanent obtenu dans le demi-espace $z \geq \zeta$ en choisissant un potentiel des vitesses de la forme :

$\Phi(x, y, z) = \Phi_0(x, y, z) + f(z) \sin(kx + \alpha)$, où α est une constante ; on suppose en outre qu'à grande altitude, les caractéristiques de l'écoulement ne sont pas influencées par les ondulations de S , ce qui entraîne, en particulier, que Φ tend vers Φ_0 .

a. Déterminer la fonction f à un facteur constant près ; on posera $f(0) = A$.

b. Quelle est la direction de la vitesse \vec{v} du fluide au voisinage immédiat d'un point (x, y, ζ) quelconque de la surface ondulée S ? En déduire la relation qui lie $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ et les composantes dans le repère $Oxyz$ de \vec{v} au voisinage immédiat de S .

c. Montrer que $k|A| \ll |V|$ et établir que les vitesses déduites de Φ satisfont à la relation obtenue en **I.3.b.** si $\alpha = 0$ et si de plus on donne à A une valeur qu'on précisera en fonction de a et de V .

d. Vérifier que la constante C de la relation de Bernoulli est la même qu'en l'absence d'ondulations.

e. Au voisinage immédiat de la surface S , exprimer $P - P_0$ en fonction de ζ , V , k , ρ et g ; préciser les points où $P - P_0$ est maximal et ceux où il est minimal ; interpréter les résultats.

4. On étudie dans cette question la situation symétrique : un fluide incompressible de masse volumique ρ' s'écoule en régime irrotationnel et permanent au-dessous ($z \leq \zeta$) de la même surface ondulée S en restant au contact avec elle ; le fluide est animé d'une vitesse moyenne horizontale $V' \vec{e}_x$, où V' est une constante réelle ; le bassin contenant le fluide est de très grande profondeur, et loin de S , les ondulations de S ont une influence négligeable sur l'écoulement du fluide.

a. Déduire de Φ , par une transformation qu'on explicitera, le potentiel Φ' des vitesses de cet écoulement.

b. Soit P' la pression locale dans ce fluide ; en l'absence d'ondulations ($a = 0$), on la suppose égale à P_0 à la surface $z = 0$. Exprimer $P' - P_0$ au voisinage immédiat de la surface ondulée S .

II. Une masse d'eau en contact avec l'atmosphère est contenue dans un bassin de très grandes dimensions ; on néglige l'influence du fond et des rives du bassin. On étudie les petits mouvements de la surface de séparation de l'eau et de l'air autour de sa position d'équilibre $z = 0$ en notant $\zeta(x, y, t)$ la coordonnée verticale à l'instant t du point de cette surface de coordonnées horizontales x et y . On se borne aux mouvements en forme d'ondes sinusoïdales définies par : $\zeta(x, y, t) = a \cos(kx - \omega t)$ où ω est une constante réelle et a et k des constantes positives telles que $ka \ll 1$.

Les mouvements des deux fluides sont supposés irrotationnels et on note P_0 la pression atmosphérique à la surface $z = 0$ lors de l'équilibre final.

1. Dans cette question, l'air, de masse volumique ρ , et l'eau, de masse volumique ρ' , sont en moyenne immobiles ; ils sont chacun soumis seulement aux forces de pesanteur et aux forces de pression à leur interface.

a. Montrer que, par un changement de référentiel approprié, l'étude du mouvement de chaque fluide se ramène à celle d'un écoulement permanent irrotationnel, analogue à ceux étudiés en **I.3.** et **I.4.**, et dont on précisera les paramètres caractéristiques V et V' respectifs.

b. Ecrire la relation entre les pressions des fluides à l'interface ; en déduire la relation de dispersion liant k et ω pour ces ondes.

c. Calculer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g de ces ondes en fonction de k et des constantes du problème.

d. Application numérique : calculer v_ϕ et v_g pour des ondes de longueur d'onde $\lambda = 1 \text{ cm}$ et $\lambda = 10 \text{ m}$.

• analogie, Bernoulli [formules de], développement au premier ordre ou plus, équilibre, maximum, vitesse de phase, vitesse de groupe

2. Dans la question **II.1.**, on n'a pas tenu compte de la tension superficielle qui s'exerce à l'interface air-eau. Elle a pour seul effet d'introduire une discontinuité de pression de part et d'autre de l'interface, liée à la forme de la surface, et exprimée par :

$$P - P' = T \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \text{ où } P \text{ et } P' \text{ sont les pressions respectives dans l'air et dans l'eau à}$$

l'interface et où T est un coefficient qui, pour l'interface air-eau, vaut $T = 0,072 \text{ J.m}^{-2}$.

On tient compte dans toute la fin du problème de cette tension superficielle T , et dans la présente question **II.2.**, on suppose encore l'air et l'eau en moyenne immobiles.

a. Reprendre l'étude de la question **II.1.b.** et trouver la nouvelle relation de dispersion liant k et ω .

b. Montrer qu'il existe, suivant les valeurs de la longueur d'onde λ , deux situations, l'une analogue au cas de **II.1.**, et l'autre où l'influence de la tension superficielle est prédominante. Calculer pour l'interface air-eau l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de transition entre ces deux situations.

3. Dans cette question, on étudie l'influence du vent sur ces ondes. On suppose que l'air est animé d'une vitesse moyenne constante et uniforme $\vec{U} \vec{e}_x$, l'eau restant toujours en moyenne immobile, et on recherche comme en **II.2.** les ondes sinusoïdales se propageant suivant Ox à la surface de l'eau.

a. En procédant comme en **II.1.a.**, montrer que pour chacun des deux fluides on peut ramener cette étude à celle d'un écoulement permanent et préciser les paramètres V et V' correspondants.

b. En déduire la relation de dispersion liant k et ω .

c. A quelle condition liant U , k et les constantes du problème obtient-on des valeurs réelles pour ω ?

d. Quelle est la valeur maximale U_m de U pour que la condition précédente soit remplie pour tout $k > 0$? Lorsque $U = U_m$, quelle est la valeur k_m de k à laquelle ne correspond qu'une seule valeur ω_m de ω ?

e. Application numérique : calculer U_m , k_m , ω_m , la longueur d'onde λ_m et la vitesse de phase des ondes correspondantes.

Ecole Polytechnique ; Durée 3h

Corrigé

I.1.a. Pour un fluide incompressible $\text{div} \vec{V} = 0$; pour un écoulement irrotationnel $\vec{V} = \text{grad} \phi$; on en déduit $\text{div} \text{grad} \phi = 0$ soit $\Delta \phi = 0$.

b. L'équation d'Euler locale d'un fluide parfait pesant s'écrit :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{=0 \text{ en régime permanent}} + \underbrace{\rho \text{grad} \left(\frac{1}{2} V^2 \right)}_{= \text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 \right) \text{ cf. incompressible}} + \underbrace{\rho \underbrace{\text{rot} \vec{V}}_{=0 \text{ en écoulement irrotationnel}} \wedge \vec{V}}_{=0} = -\text{grad} P + \underbrace{\rho \vec{g}}_{= -\text{grad}(\rho g z) \text{ vu Oz}}.$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + P + \rho g z \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z + P = C, \text{ cste } \forall M.$$

2.a. $v_x = V \Rightarrow \phi = V.x + f(y, z)$; or $v_y = v_z = 0 \Rightarrow f(y, z) = \text{cste}$, d'où $\phi = V.x + \text{cste}$.

b. $C = \frac{1}{2} \rho V^2 + P_0 + 0$ en plaçant M en $z = 0$.

• analogie, équation d'Euler, Laplace [équation de], maximum, ordre de grandeur, tension superficielle

3.a. $\Delta\phi = \Delta\phi_0 + \Delta(f(z)\sin(kx + \alpha)) = 0 - k^2 f(z)\sin(kx + \alpha) + \frac{d^2 f}{dz^2} \sin(kx + \alpha) = 0$, d'où :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f(z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = A_+ e^{kz} + A_- e^{-kz}.$$

- L'influence de z est négligeable pour $z \rightarrow +\infty$, d'où $A_+ = 0$.
- $f = A_- e^{-kz}$; $f(0) = A_- = A \Rightarrow f(z) = A e^{-kz}$.

$$\text{b. } \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} = V + kAe^{-kz} \cos(kx + \alpha) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 - kAe^{-kz} \sin(kx + \alpha) \end{pmatrix}$$

Ecrivons la condition limite en tout point de S : $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Ainsi \vec{v} est tangent à S .

(car rien ne sort ni ne rentre en un point quelconque de S).

Déterminons un vecteur normal non unitaire à S dans le plan de symétrie xOz tel que

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = 0 :$$

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ z = \zeta \end{vmatrix} ; \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} \right) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -ka \sin kx + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{vmatrix} ; \text{ on prendra : } \vec{n} \begin{vmatrix} -ka \sin kx = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} ;$$

- $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ en $z = \zeta$ s'écrit :

$$\left(V + kAe^{-k\zeta} \cos(kx + \alpha) \right) \frac{d\zeta}{dx} + kAe^{-k\zeta} \sin(kx + \alpha) = 0.$$

c.α. $a \ll \frac{2\pi}{k}$ s'écrit sous une forme équivalente $ka \ll 1$ ainsi $e^{\pm ka} \approx 1$ et comme

$|kz| < ka$, $e^{-kz} \approx 1$, d'où $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ s'écrit avec $\frac{d\zeta}{dx} = -ka \sin kx$:

$$0 = -Vka \sin kx + kA \left(\underbrace{-ka \sin kx \cos(kx + \alpha)}_{\text{négligeable vu } ka \ll 1} + \sin(kx + \alpha) \right).$$

Il reste $V \sin kx = \frac{A}{a} \sin(kx + \alpha)$, $\forall x \Leftrightarrow V = \frac{A}{a}$ et $\alpha = 0$ (on écarte $\alpha = \pi$ et $A = -aV$, complication de notation ne changeant rien physiquement). $A = aV$.

β. $k|A| = |kaV| \ll |V|$ puisque $|ka| \ll 1$.

d. L'écoulement est stationnaire et irrotationnel pour un fluide incompressible, la relation de Bernoulli donne $\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z + P = C_1$.

Quand $z \rightarrow +\infty$ l'influence physique de ζ est nulle et le problème actuel s'identifie totalement avec la question **I.2.b.** : $C_1 = C = \frac{1}{2} \rho V^2 + P_0$.

$$\text{e.}\alpha. \frac{1}{2}\rho v_{\zeta}^2 + \rho g \zeta + P_{\zeta} = \frac{1}{2}\rho V^2 + P_0 ;$$

$$\text{or } v_{\zeta}^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{\zeta}^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{\zeta}^2 = V^2 \left(1 + k a e^{-k\zeta} \cos kx \right)^2 + V^2 a^2 k^2 e^{-2k\zeta} \sin^2 kx ;$$

$$v_{\zeta}^2 = V^2 \left(1 + \underbrace{2ka \cos kx}_{2k\zeta} + \dots \right) ; P - P_0 = \frac{1}{2}\rho(V^2 - V_{\zeta}^2) - \rho g \zeta = -\rho(g + kV^2)\zeta .$$

Remarque : la présence du terme en $\rho g \zeta$ dans $P - P_0$ oblige à considérer le terme du même ordre dans $V^2 - v_{\zeta}^2$.

β. $P - P_0$ est maximal pour ζ minimal soit les creux de S.

$P - P_0$ est minimal pour ζ maximal soit les bosses de S.

γ. L'effet physique est la somme de 2 termes :

– Le terme hydrostatique $-\rho g \zeta$;

– Un terme d'origine cinétique (de même signe que le précédent) dû à l'ondulation ζ (caractérisée par k et a) et à l'écoulement V .

4.a. V' joue le rôle de V mais à condition d'échanger l'orientation de z . Pour retrouver la valeur de ζ on changera a en $-a$.

De cette transformation d'écriture ($V \rightarrow V', z \rightarrow -z, a \rightarrow -a$) on passe de :

$$\phi = Vx + k_1 + a e^{-kz} \sin kx \text{ à } \phi' = V'x + k_2 - a V' e^{kz} \sin kx .$$

b. Le changement z en $-z$ doit être associé physiquement à la transformation d'écriture g en $-g$ sans oublier que ρ devient ρ' : $\frac{1}{2}\rho' v^2 + \rho' g z + P = C_2$.

En $|z| \rightarrow +\infty$, l'effet perturbateur de ζ s'efface, et $C_2 = C'_0$ (cf. C_0) = $\frac{1}{2}\rho' V'^2 + P_0$.

Moyennant ces modifications formelles, on obtient : $P' - P_0 = \rho'(-g + kV'^2)\zeta$ car tout se passe comme si on changeait k en $-k$ dans ϕ .

II.1.a.α. Introduisons un repère $R'(O', X, y, z)$ avec $\overrightarrow{O'X} // \overrightarrow{Ox}$ avec $\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right) = \frac{\omega}{k} \overrightarrow{e_x}$ tel

que $X = x - \frac{\omega}{k}t$. Dans ce nouveau repère, $\zeta = a \cos kX$, l'état de surface est alors permanent dans R' .

Ce changement de repère galiléen ne modifie pas les lois physiques et l'écoulement y est donc irrotationnel et satisfait aux lois trouvées dans **I**.

β. Dans R' , l'eau et l'air (immobiles dans R en moyenne) sont animés (en moyenne) d'une vitesse $V = V' = -\frac{\omega}{k}$.

b. La pression étant supposée continue (à défaut de connaître des causes de discontinuité cf. **II.2.**) et indépendante du repère ;

$$P = P' \text{ soit } P_0 - \rho(g + kV^2)\zeta = P_0 - \rho'(g - kV'^2)\zeta \text{ or } V^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} gk .$$

$$\text{c.}\alpha. v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \frac{g}{k}} .$$

• cinétique, écoulement irrotationnel, maximum, ordre de grandeur, vitesse de phase

$$\beta. v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ telle que } 2\omega \frac{d\omega}{dk} = \frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} g$$

et en remplaçant $\omega = kv_\phi$, $v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} \frac{g}{k}} = \frac{v_\phi}{2}$. On remarquera que $v_g v_\phi \neq \text{cste}$.

$$d.a. v_\phi = 0,1247 \text{ m.s}^{-1} ; v_g = 6,236.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\beta. v_\phi = 3,944 \text{ m.s}^{-1} ; v_g = 1,972 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$2.a. \text{ Dans } R', P - P' = T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X^2} = -T a k^2 \cos kx = -T k^2 \zeta, \text{ remplace } P = P' \text{ avec } V^2 = \frac{\omega^2}{k^2}.$$

$$-\rho \left(g + \frac{\omega^2}{k} \right) + \rho' \left(g - \frac{\omega^2}{k} \right) = -T k^2 \text{ ou } \omega^2 = k \left(\frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} g + \frac{T k^2}{\rho + \rho'} \right).$$

b.a. Situation analogue au **II.1.** où la tension superficielle est négligeable : il suffit d'avoir : $T k^2 \ll (\rho' - \rho) g$ soit $\lambda \gg 2\pi \sqrt{\frac{T}{(\rho' - \rho) g}}$.

\beta. Situation où la tension superficielle est prédominante :

$$T k^2 \gg (\rho' - \rho) g \text{ soit } \lambda \ll 2\pi \sqrt{\frac{T}{(\rho' - \rho) g}}.$$

$$\gamma. \text{ La longueur d'onde de transition } \lambda_T \text{ est donc : } \lambda_T = 2\pi \sqrt{\frac{T}{(\rho' - \rho) g}}.$$

$$AN : \lambda_T = 1,7.10^{-2} \text{ m.}$$

3.a.a. L'air est animé dans R (cf. **I.**) d'une vitesse moyenne U ;

$$\text{dans } R', \text{ l'air est animé d'une vitesse } V = U - \frac{\omega}{k}.$$

$$\beta. \text{ L'eau immobile dans R est animée dans } R' \text{ de la vitesse } V' = -\frac{\omega}{k}.$$

b. On adapte **II.1.b.** à ces nouvelles circonstances où $\rho \frac{\omega^2}{k}$ devient $\rho k \left(U - \frac{\omega}{k} \right)^2$:

$$P = P_0 - \rho \left(g + k \left(U - \frac{\omega}{k} \right)^2 \right) a \cos kX ; P' = P_0 - \rho' \left(g - k \frac{\omega^2}{k^2} \right) a \cos kX.$$

On étudie $\zeta = a \cos(kx - \omega t)$ dans R, soit $\zeta = a \cos kX$ dans R'.

$$\text{On écrit : } P - P' = T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X^2} = -T a k^2 \cos kX = -T k^2 \zeta.$$

$$\text{On tire : } \omega^2 - \frac{2\rho}{\rho' + \rho} k U \omega - k \left(\frac{\rho' - \rho}{\rho' + \rho} g + \frac{T k^2}{\rho' + \rho} - \frac{\rho k U^2}{\rho' + \rho} \right) = 0.$$

On retrouve le signe et l'origine des termes en U.

Remarque : on retrouve **II.2.a.** pour U = 0.

c. La résolution de ce trinôme du second degré en ω en fonction de k, U, ρ , ρ' , T exige pour sa résolution dans \mathbb{R} : $\Delta' = \frac{\rho^2 k^2 U^2 + k(\rho' + \rho)((\rho' - \rho)g + T k^2 - \rho k U^2)}{(\rho' + \rho)^2} \geq 0,$

ce qui s'écrit encore : $k[T(\rho' + \rho)k^2 - \rho \rho' U^2 k + (\rho' + \rho)(\rho' - \rho)g] \geq 0.$

• analogie, développement au premier ordre ou plus, tension superficielle, vitesse de groupe

d.α. $k > 0$. Etudions le signe du trinôme présent dans le crochet. Le trinôme du second degré en k précédent est, quel que soit k , du signe de $T(\rho'+\rho)$ (soit positif) s'il n'admet pas de solutions réelles (cf. cours sur le trinôme).

$$\text{Soit : } \Delta_1 = \rho^2 \rho'^2 U^4 - 4(\rho'+\rho)^2 (\rho'-\rho) T g \leq 0.$$

$$\text{Soit : } U \leq \sqrt{\frac{2(\rho+\rho')}{\rho\rho'}} \sqrt{(\rho'-\rho)gT}, \text{ ou } U \leq U_m \text{ avec } U_m = \sqrt{\frac{2(\rho+\rho')}{\rho'\rho}} \sqrt{(\rho'-\rho)gT}.$$

β. Si $U = U_m$, Les égalités se correspondent entre elles (cf. solution double),

$$\Delta_1 = 0 \quad \text{cf. } \mathbf{3.c.} \Rightarrow \omega_m = \frac{\rho k_m U_m}{\rho'+\rho} \text{ unique, or } \Delta_1 = 0 \text{ donne une solution double}$$

$$\Rightarrow k_m = \frac{\rho\rho' U_m^2}{2T(\rho'+\rho)} = \sqrt{\frac{(\rho'-\rho)g}{T}} \text{ en correspondance avec } \omega_m = \sqrt{\frac{2\rho}{\rho'(\rho'\rho)}} \sqrt{\frac{(\rho'-\rho)^3 g^3}{T}} \text{ et}$$

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 2\pi \sqrt{\frac{T}{(\rho'-\rho)g}} \lambda_m. \text{ On retrouve } \lambda_T.$$

$$v_\varphi = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\rho}{\rho'+\rho} \sqrt{\frac{2(\rho'+\rho)}{\rho'\rho}} \sqrt{(\rho'-\rho)gT} = \frac{\rho}{\rho+\rho'} U_m$$

$$\mathbf{e.} \quad U_m = 6,395 \text{ m.s}^{-1} ; k_m = 368,7 \text{ m}^{-1} ; \omega_m = 3,061 \text{ rad.s}^{-1} ; \lambda_m = 1,704 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$v_\varphi = 8,302 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

3.4.5. Vidange

Voir page 345.

3.4.6. Aéromoteur

Voir page 358.

3.4.7. Eolienne

Voir page 361.

3.4.8. Auget, rendement

Voir page 366.

3.4.9. Voile de Flettner

Voir page 381.

3.4.10. Pertes de charge

Voir page 465.

3.4.11. Oscillations de bassin de retenue

Voir page 474.

3.4.12. Compresseur à accélération angulaire permanente

Voir page 581.

3.5. Effets dissipatifs

3.5.1. Pertes de charges irrégulière et singulière en hydraulique

Un lac naturel sert de réservoir à un écoulement irrotationnel. L'eau retenue est pratiquement immobile à sa surface de cote z_0 . Une canalisation rectiligne de diamètre D conduit l'eau de la cote $z_1 \neq z_0$ jusqu'à un injecteur de diamètre D' de cote z_2 , où l'eau sort sous forme d'un jet cylindrique d'axe horizontal. On adopte le modèle de l'écoulement unidimensionnel stationnaire et on considère l'eau comme un fluide incompressible, sans viscosité, de masse volumique $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

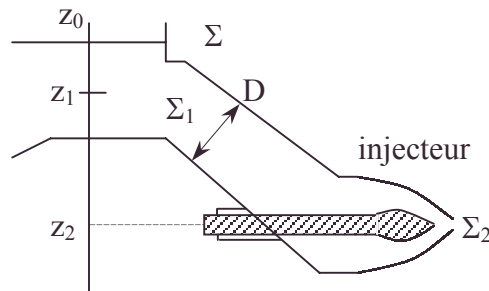


Figure 1

1. Du fait de la rugosité des parois intérieures et de la forme des raccords, on introduit la puissance \mathcal{P}_f des forces de frottement exercées sur le fluide, présent à l'intérieur de la surface de contrôle Σ ; cette surface de contrôle est constituée de la surface intérieure de la canalisation et des sections droites Σ_1 et Σ_2 d'entrée et de sortie de la canalisation munie de son injecteur (L est la longueur de la canalisation). Soit $q_v = \iint_{\Sigma_1} \vec{V} dS$ le débit volumique ; en appliquant le théorème de la puissance cinétique

du fluide présent dans Σ , démontrer que :
$$\left(\frac{1}{2} \rho V_2^2 + P_2 + \rho g z_2 \right) - (P_0 + \rho g z_0) = \frac{\mathcal{P}_f}{q_v},$$

l'indice 2 caractérisant vitesse, pression, cote de la section Σ_2 ; P_0 désigne la pression atmosphérique supposée uniforme. On appellera $\frac{\mathcal{P}_f}{q_v}$: perte de charge volumique (homogène à une pression).

2. Perte de charge régulière : du fait de la rugosité des parois, le fluide intérieur à Σ subit des forces opposées au mouvement ; ces forces sont réparties surfaciquement et uniformément sur toute la surface intérieure de la canalisation ; soit f_s le module de $\frac{d\vec{F}_f}{dS}$, $d\vec{F}_f$ désignant la force de frottement tangentielle exercée par la surface dS de paroi intérieure de la canalisation.

1. Calculer la perte de charge volumique dite régulière en fonction de f_s , L , D .
2. La rugosité croît avec le temps : justifier.
3. Proposer une méthode de mesure de la perte de charge volumique, dans le cas particulier d'une canalisation horizontale (ce qui n'est pas le cas ici).
4. λ étant un coefficient caractéristique constant pour l'écoulement envisagé, exprimer f_s , connaissant l'expression des spécialistes $\frac{\mathcal{P}_f}{q_v} = -\frac{\lambda L}{D} \frac{\rho V^2}{2}$, en fonction de

V_2 (vitesse de sortie de l'injecteur), λ , ρ , D , D' .

5. Commenter physiquement l'expression de f_s .
6. Calculer V_2 , vitesse de sortie de l'injecteur, et f_s .

• effets dissipatifs, force surfacique, hydraulique, incompressibilité, ingénierie, injecteur, perte de charge, rugosité, surface de contrôle, théorème de la puissance cinétique, unidimensionnalité

Application numérique :

$$z_1 - z_2 = 1000 \text{ m} ; P_1 = P_2 = P_0 = 1 \text{ bar} ; D = 0,8 \text{ m} ; D' = 0,12 \text{ m} ; \lambda = 2 \cdot 10^{-2} ;$$

$$L = 2500 \text{ m} ; g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}.$$

Le frottement est-il important ?

7. Montrer que tout se passe comme si le niveau z_1 était devenu $z_1 - kq_v^2$ mais sans frottement ; déterminer k .

8. Quelle serait la puissance de la pompe à faire fonctionner dans la canalisation, qui permettrait d'avoir une vitesse $V_2 = \sqrt{2g(z_0 - z_2)}$ à la sortie de l'injecteur ? Commenter.

3. Perte de charge singulière : soit un écoulement stationnaire unidimensionnel d'eau dans une conduite horizontale présentant un évasement brusque. Il se produit un décollement des lignes de courant et il y a création de zones à l'écart de ces lignes de courant (hachurées sur la figure 2).

Soit S_2 la section à partir de laquelle la paroi intérieure est à nouveau la surface latérale d'un tube de courant.

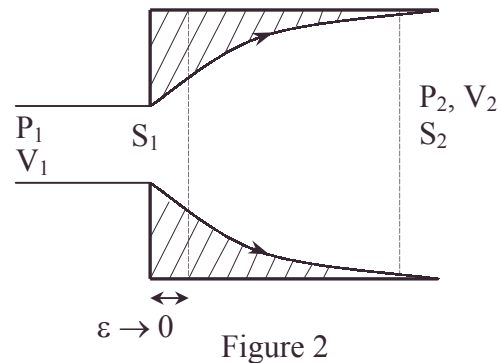


Figure 2

1. Appliquer le théorème d'Euler en projection horizontale au fluide présent dans le cylindre de section S_2 à droite et à gauche, celle de gauche étant très proche de l'évasement brusque (voir pointillés sur la figure 2).

En déduire l'expression de P_2 en fonction de P_1, V_1, V_2, ρ .

2. En déduire que la perte de charge volumique (dite singulière) est :

$$\frac{\mathcal{P}'_f}{q_v} = -\frac{\rho}{2}(V_1 - V_2)^2.$$

3. Montrer que c'est de la forme : $\frac{\mathcal{P}'_f}{q_v} = -J \frac{\rho V_1^2}{2}$ avec ici $J = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$.

4. Trouver J_0 quand $S_2 \rightarrow \infty$. Faire un commentaire.

4. La canalisation décrite au début présente maintenant des pertes de charge singulières en deux endroits de coefficients caractéristiques J_1 et J_2 .

On donne également λ .

1. Calculer la vitesse V_2 à la sortie de l'injecteur.

Application numérique : $J_1 = 0,5$; $J_2 = 1,2$.

2. Calculer la longueur de canalisation supplémentaire équivalente aux pertes de charges singulières dans le cadre des pertes de charges régulières. Conclure.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

1. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit : $\frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{pression} + \mathcal{P}_{pesanteur}$.

En régime permanent, la formule de Reynolds (bilan d'énergie) permet d'écrire :

- évasement brusque, injecteur, mouvement sans frottement, projections, Reynolds [formule de], théorème de la puissance cinétique, théorème d'Euler, tube de courant, unidimensionnalité

$$q_m \left(\frac{1}{2} V_2^2 - \frac{1}{2} V_1^2 \right) = \mathcal{P}_f + P_1 S_1 V_1 - P_2 S_2 V_2 + q_m g(z_1 - z_2).$$

$$\text{or, } q_m = \rho q_v = \rho S_1 V_1 = \rho S_2 V_2 ;$$

$$\left(\frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g z_2 + P_2 \right) - \left(\frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g z_1 + P_1 \right) = \frac{\mathcal{P}_f}{q_v}.$$

Or la relation de Bernoulli dans le réservoir en écoulement irrotationnel donne :

$$\frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g z_1 + P = 0 + \rho g z_0 + P_0.$$

$$\text{Finalement, } \left(\frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g z_2 + P_2 \right) - (\rho g z_0 + P_0) = \frac{\mathcal{P}_f}{q_v}.$$

$$\mathbf{2.1.} \quad F_f = \pi D L f_s \Rightarrow \mathcal{P}_f = -f_s \pi D L V ; q_v = \frac{\pi D^2}{4} V ; \frac{\mathcal{P}_f}{q_v} = -4 f_s \frac{L}{D}.$$

2. La puissance dissipée sert à désagréger les grains de ciment de la canalisation, et augmente aléatoirement (par turbulence) le relief initialement réduit pour éviter les pertes. Cette rugosité augmentera la turbulence etc...

3. Pour une canalisation horizontale, la mesure de $\frac{\mathcal{P}_f}{q_v}$ revient à la mesure de

$$P_2 - P_1 = \Delta p L, \Delta p \text{ étant la variation de pression sur un mètre de longueur.}$$

La variation étant régulière, on peut donc faire une mesure par 2 manomètres distants de 1 m.

$$\mathbf{4.} \quad f_s = \frac{\lambda \rho V^2}{8} = \frac{\lambda \rho}{8} V_2^2 \frac{D'^4}{D^4} \text{ vu la conservation du débit } \frac{V \pi D^2}{4} = V_2 \frac{\pi D'^2}{4}.$$

5. La force de frottement est d'autant plus grande que le fluide est dense. Le terme principal retenu est en V^2 et non en V comme pour les très faibles vitesses ; (cf. viscosité dans l'expérience de Millikan). λ de fait dépend de la viscosité, de la rugosité, de la turbulence...

$$\mathbf{6.a.} \quad P_2 = P_0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g(z_2 - z_1) = -\frac{\lambda L}{D} \rho \frac{V^2}{2} = -\frac{\lambda L}{D} \rho \frac{V_2^2}{2} \frac{D'^4}{D^4}.$$

$$V_2 = \left(\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 + \frac{\lambda L D'^4}{D^5}} \right)^{\frac{1}{2}} ; \text{A.N. : } V_2 = 137,84 \text{ m.s}^{-1}. \text{ Cette vitesse reste subsonique.}$$

$$\mathbf{b.} \quad f_s = \frac{\lambda \rho}{8} \frac{D'^4}{D^4} \frac{2g(z_1 - z_2)}{\left(1 + \frac{\lambda L D'^4}{D^5} \right)} ; \text{A.N. : } f_s = 24,0 \text{ N.m}^{-2}.$$

c. La vitesse est réduite de 3% : f_s a un rôle peu important apparemment sur V_2 mais est créatrice de dissipation par turbulence.

7. L'équation du **2.6.a.** montre qu'on peut substituer z_1 par :

$$z_1 - \frac{\lambda L}{g D} \frac{V_2^2}{2} \frac{D'^4}{D^4} = z_1 - \frac{k}{2} \left(V_2 \frac{\pi D'^2}{4} \right)^2, \text{ soit } k = \frac{16 \lambda L}{g D^5 \pi^2} \text{ A.N. : } k = 25,24 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-5}.$$

8. Pour compenser \mathcal{P}_f la pompe devrait fournir :

$$\mathcal{P} = -\mathcal{P}_f = \frac{\lambda \rho V^3}{8} \pi D L = \frac{\lambda \rho}{8 D^5} D'^6 \pi L \left(\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 + \frac{\lambda L}{D^5} D'^4} \right)^{\frac{3}{2}} ; \text{ A.N. : } \mathcal{P} = 1,4.10^8 \text{ W},$$

soit une puissance considérable.

3.1. $q_m(V_2 - V_1) = P_1 S_2 - P_2 S \Rightarrow P_2 = P_1 - \rho V_2(V_2 - V_1).$

2. Additionnons $\frac{1}{2}\rho V_2^2$ aux deux membres.

$$\frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_1 - \rho V_2^2 + \rho V_2 V_1 + \left(\frac{1}{2}\rho V_1^2 - \frac{1}{2}\rho V_1^2 \right) ;$$

$$\frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 - \frac{1}{2}\rho(V_2^2 + V_1^2 - 2V_1 V_2) ; \text{ vu 1. } \frac{\mathcal{P}_f}{q_v} = -\frac{1}{2}\rho(V_1 - V_2)^2.$$

3. $\frac{1}{2}\rho(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\rho V_1^2 \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right)^2 \Rightarrow J = \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right)$ or $S_2 V_2 = S_1 V_1 ;$

$$J = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2.$$

4. $J_0 = 1$; il s'agit d'une canalisation se déversant dans un réservoir de grande dimension.

4.1. Par analogie formelle avec les pertes régulières et vu les données disponibles,

$$\frac{1}{2}\rho V_2'^2 + \rho g(z_2 - z_1) = -\frac{\lambda L}{D} \rho \frac{V^2}{2} - J_1 \frac{\rho V^2}{2} - J_2 \frac{\rho V^2}{2} ; \text{ or, } V = V_2' \frac{D'^2}{D^2}.$$

$$V_2' = \left[\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 + \left(\frac{\lambda L}{D} + J_1 + J_2 \right) \frac{D'^4}{D^4}} \right]^{\frac{1}{2}} ; \text{ A.N. : } V_2' = 137,78 \text{ m.s}^{-1}.$$

2.a. Par analogie, $L_e = (J_1 + J_2) \frac{D}{\lambda}$; A.N. : $L_e = 68 \text{ m}.$

b. $L_e \ll L$

3.5.2. Oscillations amorties par viscosité

Le récipient cylindrique, de génératrices verticales, représenté sur la figure 1, contient un liquide homogène, de masse volumique $\rho = 1,08.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. On supposera ce fluide incompressible et parfait.

On prendra $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

On notera R_1 le rayon du récipient cylindrique et S_1 la section d'ouverture ($S_1 = 150 \text{ cm}^2$). La hauteur initiale de liquide est h_0 ($h_0 = 20 \text{ cm}$).

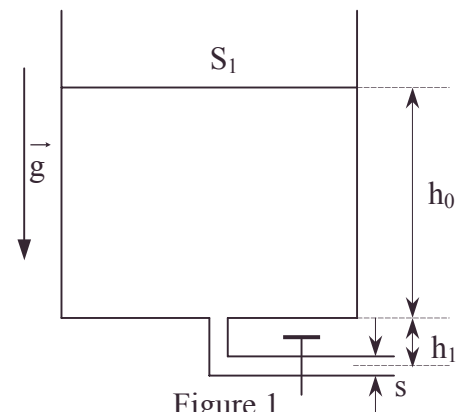


Figure 1

• analogie, conditions initiales, théorème d'Euler, viscosité

Au fond se trouve un coude à 90° , de section $s = 3 \text{ cm}^2$, fermé par un robinet. La hauteur h_1 du coude sera négligée devant h_0 .

1. Calculer littéralement la force totale due aux fluides et exercée sur une moitié (demi-cylindre) de la paroi verticale du récipient en fonction de ρ , g , R_1 et h_0 . Donner la valeur numérique de cette force. La paroi du cylindre subit-elle une force dépendant de la pression atmosphérique ?

On ouvre le robinet. Trois solutions sont alors envisagées :

1^{er} cas : le liquide s'écoule librement du récipient, la pression dans le fluide à la sortie du robinet est égale à la pression atmosphérique : 1 bar.

2. Calculer, littéralement puis numériquement, la vitesse v_1 du liquide au début de l'écoulement à la sortie du coude en admettant que l'on atteint immédiatement le régime permanent, et en mettant à profit la valeur petite du rapport s / S_1 .

3. Etablir l'expression du débit volumique initial de vidange.

4. Quelles sont la valeur littérale et la valeur numérique de la durée T de la vidange en admettant qu'à chaque instant la vidange se fait en régime permanent ?

5. Calculer, littéralement et numériquement, la force qu'exerce le liquide sur le coude après l'ouverture du robinet. On fera les approximations qui s'imposent.

2^{ème} cas : Le liquide, toujours supposé parfait, s'écoule dans un récipient [2], de section $S_2 = 300 \text{ cm}^2$, par l'intermédiaire d'un tube horizontal de section $s = 3 \text{ cm}^2$ et de longueur $L = 20 \text{ cm}$. On suppose que dans le tube l'écoulement s'effectue en bloc.

6. Montrer que le liquide va osciller autour d'une position d'équilibre (que l'on ne calculera pas). On établira pour cela l'équation différentielle du mouvement donnant la cote z_1 de la surface du liquide contenu en [1] (l'origine O correspondra à l'état d'équilibre).

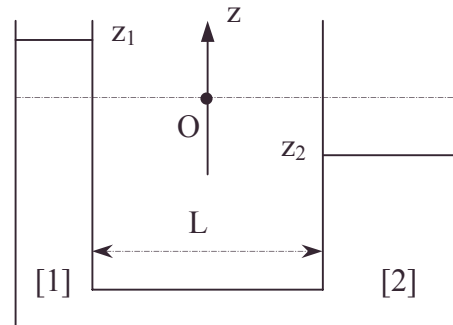


Figure 2

On s'appuiera de nouveau sur la petitesse des rapports s / S_1 et s / S_2 .

7. Donner l'expression algébrique de la période T_0 des oscillations du liquide. Quelle est numériquement la longueur d'un pendule simple de même période ?

3^e cas : Le dispositif précédent est conservé, mais de nouvelles conditions sont imposées. On suppose que l'écoulement dans le tube est à répartition parabolique :

$$v(r) = v(0) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ avec } v(r) : \text{vitesse du liquide à la distance } r \text{ de l'axe du tube,}$$

$v(0)$: vitesse sur l'axe, et R : rayon du tube.

8. Soit q_m le débit massique à travers une section droite de ce tube. On définit alors la vitesse débitante v_m par : $q_m = \rho \cdot s \cdot v_m$. Calculer v_m en fonction de $v(0)$.

9.1. Donner, en fonction de v_m , l'expression de l'énergie cinétique du liquide dans le tube de longueur L et de section s .

2. En déduire la nouvelle équation différentielle du mouvement en justifiant soigneusement la méthode adoptée.

3. Donner la nouvelle période T'_0 des oscillations en fonction de T_0 (valeurs algébrique et numérique).

10. On envisage maintenant un frottement visqueux dans le tube de sorte que l'énergie mécanique perdue par unité de temps soit égale à $\frac{8\eta L s v_m^2}{R^2}$; η définit le coefficient de viscosité.

- cinétique, conditions initiales, développement au premier ordre ou plus, équilibre, freinage visqueux, frottement visqueux, loi de Poiseuille, Poiseuille, vidange, viscosité,

1. Quelles sont les dimensions de η ?
2. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement de la surface libre du liquide, de cote z_1 , contenu en [1].
3. On constate que le liquide effectue un mouvement pseudo-périodique, de pseudo-période $T' = 7,7$ s, tel que l'amplitude soit réduite d'un facteur $1,23 \cdot 10^{-2}$ après un temps T' . En déduire le coefficient de viscosité η du liquide.
4. A partir de quelle valeur de η le mouvement est-il apériodique ?
11. Naturellement, un tel comportement pseudo-périodique est réminiscent de celui de circuits électriques. Pouvez-vous définir un tel circuit en y incluant deux capacités, C_1 et C_2 , qui constituent les "analogues" des deux récipients, de sorte que :
 - Certaines au moins des grandeurs électriques relatives à ce circuit aient le comportement pseudo-périodique décrit à la question 10.3.
 - Le nombre d'éléments de circuit sur lesquels il est possible de jouer, en modifiant leur valeur, permette de simuler une modification de S_1, S_2, s, L, ρ et η .
 Préciser :
 - les éléments qui doivent être introduits en plus de C_1 et C_2 .
 - les grandeurs électriques qui constitueront les analogues de z_1, z_2, v_m .
 - la manière dont sera traduite, au niveau du circuit, une variation de $S_1, S_2, s, L, \rho, \eta$.
12. Que devient l'équation différentielle établie en 6. quand on prend $S_2 \gg S_1$? Les approximations faites pour établir cette équation sont-elles cohérentes avec le comportement attendu ? Celui-ci se distingue-t-il de celui étudié à la question 2. ?

Centrale ; Durée 2h30

Corrigé

1.a. En hydrostatique : $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P + \rho \vec{g} = \vec{0}$;

O $\Rightarrow P = P_0 - \rho g z$, avec origine à la surface libre et la force due au liquide en présence d'air s'écrit :

$$\vec{dF} = (P - P_0) \vec{dS}_{n_s}$$

$$dF_x = (P - P_0) \cos \theta dS = -\rho g z \cos \theta dS$$

avec $dS = R_1 d\theta dz$.

$$F_x = \left(- \int_0^{h_0} \rho g z dz \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R_1 \cos \theta d\theta = \rho g R_1 h_0^2. \quad F_y = 0.$$

b. $F_x = 29,25$ N.

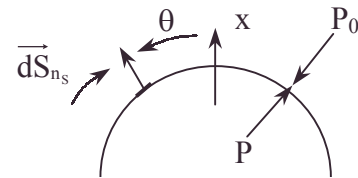
c. L'action de l'air et la partie de l'action du liquide qui dépendent de P_0 se compensent. F_x est indépendant de P_0 .

2. • Appliquons la formule de Bernoulli :

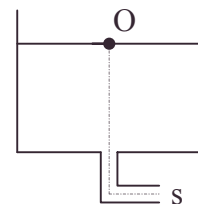
$$\frac{1}{2} \rho V_0^2 + P_0 = \frac{1}{2} \rho V_1^2 + P_0 - \rho g (h_0 + h_1).$$

• La conservation de la masse des fluides incompressibles s'écrit :

$$S V_1 = S_1 V_0 ; v_1^2 \left(1 - \left(\frac{s}{S_1} \right)^2 \right) = 2g(h_0 + h_1) \text{ vu } s \ll S_1 \text{ et } h_0 \ll h_1 ; v_1 = \sqrt{2gh_0}.$$



Vue de dessus



• analogie, Bernoulli [formules de], conservation de la masse, développement au premier ordre ou plus, dimension, statique des fluides, surface libre, unité, viscosité

A.N : $v_1 = 1,97 \text{ m.s}^{-1}$.

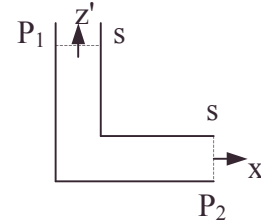
3. $D_{v_0} = sv_1 = s\sqrt{2gh_0}$. A.N : $D_{v_0} = 5,94.10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

4. Soit $h(t)$ la hauteur à l'instant t ; $v_1(t) = \sqrt{2gh(t)}$; or, $V_0 = \frac{s}{S_1}\sqrt{2gh(t)}$ et

$V_0 = -\frac{dh}{dt}$, soit : $\int_{h_0}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S_1}\sqrt{2g} \int_0^T dt$; soit $T = \frac{S_1}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$; A.N : $T = 10,10 \text{ s}$.

5. Appliquons le principe fondamental au liquide présent dans le coude dans l'A.R.Q.S.

Or, $\vec{F}_{\text{coude} \rightarrow \text{liquide}} = -\vec{F}_{\text{liquide} \rightarrow \text{coude}}$ d'après le théorème de l'action et de la réaction. Si on néglige h_1 , $P_1 = P_2 = P_0$ et $\vec{P}^{\text{poids}} \neq \vec{0}$.



La conservation du débit des fluides incompressibles donne :

$V_1 = V_2$ donc :

$\vec{F}_{\text{liquide} \rightarrow \text{coude}} = (-P_0 s + D_m V_1)(\vec{z}' + \vec{x})$ or $V_1 = \sqrt{2gh_0}$ et $D_{m_0} = \rho s \sqrt{2gh_0}$, d'où :

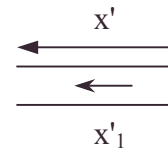
$\vec{F}_{\text{liquide} \rightarrow \text{coude}} = -(P_0 + 2\rho gh_0)s(\vec{z}' + \vec{x})$; $|\vec{F}_{\text{liquide} \rightarrow \text{coude}}| = (P_0 + 2\rho gh_0)s\sqrt{2}$;

A.N : $F_{\text{liquide} \rightarrow \text{coude}} = 44,22 \text{ N}$.

6. Soit x'_1 le déplacement (correspondant à z_1) dans le tube.

La conservation des volumes s'écrit : $S_1 z_1 = -S_2 z_2 = s x'_1$.

La conservation de l'énergie mécanique totale s'écrit :



$E_C = \frac{1}{2} \rho S_1 (\dot{z}_1 + h) z_1^2 + \frac{1}{2} \rho S_2 (h - \dot{z}_2) z_2^2 + \frac{1}{2} \rho s L \dot{x}_1'^2$.

$E_P = \rho g S_1 (z_1 + h) \left(\frac{z_1}{2} + h \right) + \rho g S_2 (h - z_2) \left(\frac{-z_2}{2} + h \right) + C_1 = \frac{\rho g}{2} (z_1^2 S_1 + z_2^2 S_2) + C_2$,

en se limitant aux termes du 2^{ème} ordre.

$E_C + E_P = \frac{1}{2} \rho S_1 \left[h \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) + \frac{S_1}{s} L \right] \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \rho g S_1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) z_1^2 = C'$.

h et L sont du même ordre ; S_1, S_2 de même, ce n'est pas le cas pour S_1 et s , et $L \frac{S_1}{s}$ est

le terme prépondérant dans $E_C \Rightarrow \frac{1}{2} \rho \frac{S_1}{s} L \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \rho S_1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right) z_1^2 = C'$;

en dérivant, on a : $\ddot{z}_1 + \frac{s(S_1 + S_2)}{S_1 S_2 L} g z_1 = 0$, le liquide oscille autour de la position $z_1 = 0$.

7.1. $\omega = \sqrt{\frac{s(S_1 + S_2)}{S_1 S_2}} g \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{S_1 S_2 L}{s(S_1 + S_2)g}}$; A.N : $T_0 = 5,18 \text{ s}$.

2. La période d'un pendule simple de longueur ℓ est : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \ell = \frac{S_1 S_2}{s(S_1 + S_2)} L$

A.N : $\ell = 6,67 \text{ m}$.

8. Ce profil montre l'existence de frottement due aux parois par exemple.

$$q_m = \rho \iint V ds = v(0) \rho \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = \rho v(0) \frac{\pi R^2}{2} = \rho \pi R^2 v_m ; v_m = \frac{v(0)}{2}.$$

$$9.1. E_C = \frac{1}{2} \rho \iiint V^2 d\tau = \frac{1}{2} \rho v(0)^2 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 2\pi r L dr = \frac{1}{6} \pi R^2 \rho L v(0)^2.$$

$$E_C = \frac{2}{3} \rho s L v_m^2 ; \text{ or } s v_m = S_1 \dot{z}_1 = -S_2 \dot{z}_2 \Rightarrow E_C = \frac{2}{3} \rho \frac{S_1^2}{s} L \dot{z}_1^2.$$

$$2. E_C + E_P = \frac{1}{2} \rho S_1 \left[h \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) + \frac{4}{3} \frac{S_1}{s} L \right] \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \rho g S_1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) z_1^2 = C'', \text{ ce qui suppose}$$

qu'il n'y ait aucun travail de frottement notable (vitesse nulle sur les bords du tuyau).

$L \frac{S_1}{s}$ est le terme prépondérant dans E_C .

$$\text{En dérivant, il reste : } \ddot{z}_1 + \frac{3s(S_1 + S_2)gz_1}{4S_1S_2L} = 0.$$

$$3. T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4S_1S_2L}{3s(S_1 + S_2)g}} = 2 \frac{T_0}{\sqrt{3}} ; \text{ AN : } T'_0 = 5,98 \text{ s.}$$

$T'_0 = 1,16 T_0$; le mouvement est plus lent.

10.1. $8\eta \frac{Ls}{R^2} v_m^2$ s'exprime en W, soit en $\text{Pa.m}^2.\text{m.s}^{-1}$, η s'exprime donc en $\text{W.s}^2/\text{m}^3$, soit en Pa.s^{-1} .

2. Le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(E_C + E_P) = -8\eta \frac{Ls}{R^2} v_m^2 = -\frac{8\eta Ls S_1^2}{R^2 s^2} \dot{z}_1^2 \text{ et vu 9.2. ,}$$

$$\frac{d}{dt}(E_C + E_P) = \frac{4}{3} \rho \frac{S_1^2}{s} L \ddot{z}_1 \dot{z}_1 + \rho g S_1 \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) \dot{z}_1 z_1 = -\frac{8\eta Ls S_1^2}{R^2 s^2} \dot{z}_1^2.$$

$$\ddot{z}_1 + \frac{6\eta}{\rho R^2} \dot{z}_1 + \frac{3s(S_1 + S_2)}{4S_1S_2L} g z_1 = 0.$$

3. Equation de la forme $\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ où quand $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$,

$$z = A e^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi\right).$$

La pseudo-période est la période du cosinus : $T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ avec $\omega_0^2 = \frac{3s(S_1 + S_2)g}{4S_1S_2L}$;

$$\lambda = \frac{3\eta}{\rho R^2} ; \text{ or } a = e^{-\lambda T'} = 1,23.10^{-2} \Rightarrow \eta = \frac{\rho R^2 \lambda}{3} = -\frac{\rho R^2}{3} \frac{\ln a}{T'} ;$$

$$\text{AN : } \eta = 1,96.10^{-2} \text{ Pa.s}^{-1}.$$

4. Le mouvement est apériodique pour $\omega_0^2 = \lambda^2$, soit $\eta = \frac{\rho R^2}{3} \sqrt{\frac{3s(S_1 + S_2)g}{4S_1S_2L}}$;

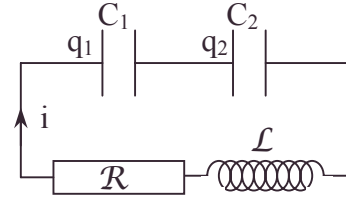
$$\text{AN : } \eta = 3,60.10^{-2} \text{ Pa.s}^{-1}.$$

11. Rappelons :

$$\text{l'énergie d'un condensateur : } W_C = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1},$$

$$\text{l'énergie d'une self : } W_L = \frac{1}{2} Li^2 \text{ avec } i = \frac{dq}{dt},$$

$$\text{la puissance } \mathcal{R} \text{ consommée par une résistance } \mathcal{R}_L^2.$$



On obtiendra une équation formellement analogue à **10.2.** grâce à $\frac{d}{dt}(W_C + W_L) = -Ri^2$.

- Il faut 2 condensateurs pour remplacer E_P , et une self pour remplacer le terme prépondérant de E_C dû au tube.

- La résistance traduit la puissance consommée par viscosité.

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \mathcal{L} \frac{di}{dt} + \mathcal{R}i = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{i}{\mathcal{L}} = 0;$$

$$\text{soit} \quad \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} \frac{dq_1}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{q_1}{\mathcal{L}} = 0.$$

Par comparaison avec $\ddot{z}_1 + \frac{6\eta}{\rho R^2} \dot{z}_1 + \frac{3s(S_1 + S_2)gz_1}{4S_1 S_2 L} = 0$.

- L'analogue de z_1 peut être i ou q , ou une grandeur proportionnelle.

- La conservation de la masse $S_1 \dot{z}_1 = -S_2 \dot{z}_2$ a pour analogue $i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt}$;

l'analogue de z_1 est donc $\frac{q_1}{S_1}$; l'analogue de z_2 sera $-\frac{q_2}{S_2}$; vu $v_m s = S_1 \dot{z}_1$ l'analogue de

v_m est donc $\frac{i}{s}$.

Si s est la section du fil, v_m se confond avec le vecteur densité de courant j .

- On traduira analogiquement une variation de S_1 par une variation de C_1 (de même pour S_2 et C_2).

- On traduira une variation de s (ou de L) par une variation de \mathcal{L} .

- De même, une variation de ρ (ou de η) par une variation de \mathcal{R} .

12. $S_2 \gg S_1$; **6.** devient $\ddot{z}_1 + \frac{sg}{S_1 L} z_1 = 0$; on a une oscillation alors qu'on a une analogie

avec **2.** Quand on part de [2] la disparition des termes en S_2 provient du terme en S_2 dans E_P qui disparaît.

Physiquement, on ne peut atteindre un niveau z_2 par échange des volumes entre 1 et 2 quand on part de **1** avec S_2 infini. On a un hiatus dialectique (cf. rupture de symétrie) dû aux hypothèses faites et aux réalités associées.

3.5.3. Oscillations de bassin de retenue

Le système (figure 1) comprend :

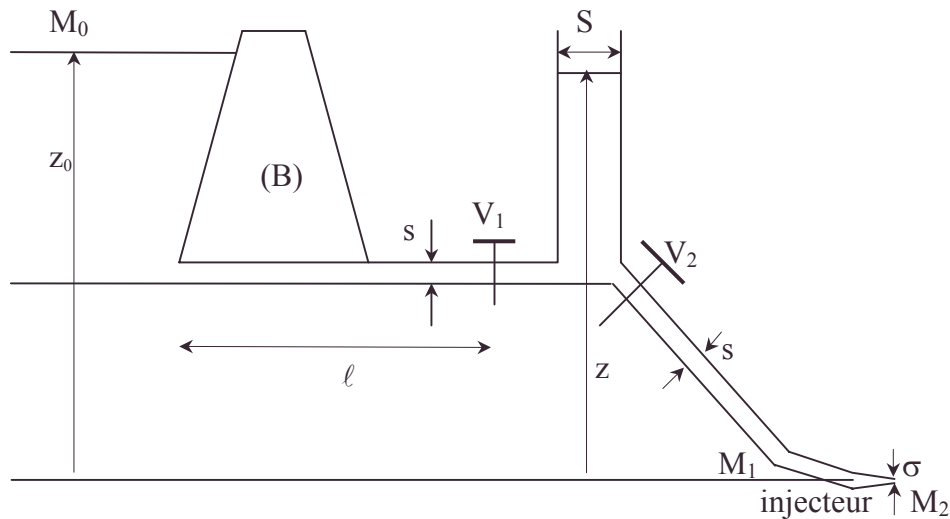


Figure 1

- Un lac de grande étendue retenu par un barrage (B) et dont le niveau z_0 mesuré par rapport à un niveau de référence (niveau de l'injecteur) demeure constant.
- Une conduite horizontale de section s , de longueur ℓ .
- Un réservoir d'équilibre de section $S \gg s$.

Le niveau de l'eau dans le réservoir est noté z .

- Une conduite forcée de section s terminée par un injecteur (figure 2) de section σ .
- deux vannes V_1 et V_2 permettant d'isoler le réservoir d'équilibre.

On note :

- g l'accélération de la pesanteur,
- ρ la masse volumique de l'eau,
- p_0 la pression atmosphérique.

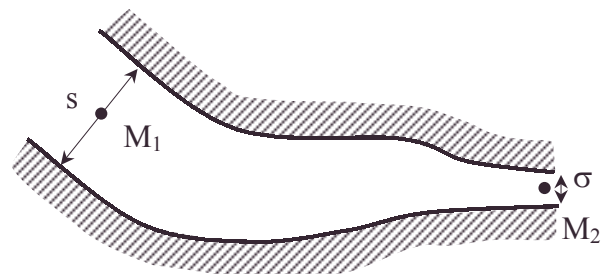


Figure 2

1. On modélise l'eau comme un fluide parfait incompressible.

1. La veine d'eau sort horizontalement de l'injecteur à l'air libre à la vitesse C_2 (Point M_2). Calculer C_2 .

2. Calculer la surpression P_{l_e} (pression effective ou surpression par rapport à la pression atmosphérique) au point M_1 situé à l'entrée de l'injecteur. Exprimer P_{l_e} en fonction de ρ , z_0 , g , σ et s .

3. Calculer le débit massique q_m et en déduire la puissance cinétique P_C disponible à la sortie de l'injecteur.

4. La vanne V_1 située à l'entrée du réservoir d'équilibre est fermée progressivement, la durée de la fermeture étant égale à T . Calculer la surpression Δp qui s'exerce sur la vanne, si on admet que la vitesse du liquide varie linéairement avec le temps.

Application numérique : $z_0 = 100 \text{ m}$; $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$; $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$;
 $\ell = 5000 \text{ m}$; $s = 5 \text{ m}^2$; $\sigma = 1 \text{ m}^2$; $T = 10 \text{ s}$.

- barrage, injecteur, surpression acoustique

2. Du fait de sa grande longueur, on doit tenir compte des frottements (pertes de charge) dans la conduite horizontale. Ces pertes sont modélisées de la façon suivante : lorsque l'eau circule du lac vers l'injecteur, tout se passe comme si le niveau du lac était abaissé d'une hauteur $\Delta z = kq_m^2$ proportionnelle au carré du débit massique. Application numérique : $k = 5,1 \cdot 10^{-9}$ S.I.

1. Calculer la nouvelle vitesse C'_2 de l'eau à la sortie de l'injecteur.

2. En déduire les nouvelles valeurs de $P'_C, P'_{1e}, \Delta p'$; grandeurs définies dans la partie 1

3. Etude des oscillations du niveau dans le réservoir d'équilibre

Les phénomènes étudiés sont suffisamment lents pour qu'on puisse considérer le régime comme quasi permanent ; l'eau sera assimilée à un fluide parfait incompressible.

1. Le réservoir d'équilibre étant isolé par la fermeture des vannes V_1 et V_2 , le niveau de l'eau dans le réservoir est $z_1 < z_0$; on ouvre alors rapidement la vanne V_1 , la vanne V_2 restant fermée. Soit alors C la vitesse de l'eau dans la conduite horizontale et z la cote de l'eau dans le réservoir à l'instant t ; établir une relation simple entre C et $\frac{dz}{dt}$.

2. En raisonnant sur le système matériel constitué par l'eau de la conduite horizontale, établir une relation simple entre z et $\frac{dC}{dt}$ et en déduire l'équation différentielle donnant $z(t)$; résoudre cette équation et calculer la période T_e des oscillations de l'eau dans le réservoir d'équilibre.

Application numérique : la section du réservoir d'équilibre est : $S = 2000 \text{ m}^2$.

4. Etude de la stabilité du système

On considère le système complet, les vannes V_1 et V_2 étant ouvertes ; on se place dans la situation dynamique transitoire proche du régime permanent en tenant compte des frottements dans la seule conduite horizontale.

Les contraintes d'exploitation imposent une puissance cinétique $P_C = P_0$ constante à la sortie de l'injecteur.

On note ; $q_m ; q'_m ; q''_m$ et $C ; C' ; C'' = \frac{dC}{dt}$ les débits massiques et les vitesses respectivement dans la conduite horizontale, la conduite forcée et le réservoir d'équilibre dont le niveau est noté z .

En régime permanent, les débits massiques seront notés $Q_m ; Q'_m ; Q''_m$ et le niveau du réservoir sera noté Z .

Enfin, les phénomènes qui se produisent en régime transitoire sont assez lents pour qu'on puisse utiliser les résultats et les méthodes du régime permanent.

1. Etablir une relation simple entre la puissance cinétique P_0 , q'_m et z .

2. En exprimant la conservation du débit massique, écrire une relation simple entre q_m , z et $\frac{dz}{dt}$.

3. En isolant le système matériel constitué par l'eau de la conduite horizontale et en tenant compte des frottements dans celle-ci, établir une relation entre z , $\frac{dC}{dt}$ et q_m .

4. On pose $y = z - z_0 + kQ_m^2$. Montrer qu'en régime permanent $y = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$.

En déduire que q_m peut s'écrire en 1^{ère} approximation (1^{er} ordre) :

$$q_m = Q_m \left(1 + ay + b \frac{dy}{dt} \right).$$

Préciser les expressions de a et de b en fonction de Z, ρ , S, Q_m .

5. En déduire l'équation différentielle linéaire du 2^{ème} ordre que vérifie y(t).

6. Montrer que la stabilité du régime permanent implique que la section S du réservoir d'équilibre soit supérieure à une valeur S_m que l'on calculera littéralement et numériquement.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

1.1. Vu la donnée numérique de z_0 (et non de z), appliquons la relation de Bernoulli entre M_0 et M_2 (les 2 vannes étant supposées ouvertes) $\frac{dz_0}{dt} = 0$;

$$\frac{p_0}{\rho} + gz_0 = \frac{p_0}{\rho} + 0 + \frac{C_2^2}{2} \Rightarrow C_2 = \sqrt{2gz_0} ; \text{AN : } C_2 = 44,27 \text{ m.s}^{-1}.$$

2. Appliquons la relation de Bernoulli entre M_1 et M_2 (sensiblement de même cote) :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{C_1^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{C_2^2}{2} ; \text{or la conservation de la masse s'écrit : } q_m = \rho s C_1 = \rho \sigma C_2.$$

$$P_{i_e} = p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} C_2^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2} \right) = \rho g z_0 \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2} \right) ; \text{AN : } P_{i_e} = 9,408 \text{ bars}.$$

$$3. q_m = \rho \sigma \sqrt{2gz_0} ; \text{AN : } q_m = 44,27 \cdot 10^3 \text{ kg.s}^{-1}.$$

$$P_C = \frac{1}{2} C_2^2 q_m = \rho \sigma (gz_0)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} ; \text{AN : } P_C = 43,38 \text{ MW}.$$

4. • Imaginons la fermeture de V_1 , comme une plaque qui descend verticalement et ferme la canalisation.

$V(N) = V(N') \rightarrow 0$ avec $P(N) = P(N')$ par continuité jusqu'à la fermeture.

• L'énoncé indique : $V(N) = at + b$, avec à $t = 0$,

$$vs = C_2 \sigma \text{ soit } b = \frac{C_2 \sigma}{s} \text{ et à } t = T, V(N) = 0 \text{ soit } a = -\frac{b}{T} = -\frac{C_2 \sigma}{T s}.$$

• Projetons selon Ox, l'équation d'Euler : $\rho a = \rho \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ car l'eau étant incompressible $V(0) = V(N)$ indépendant de x à t donné (de même a(N,t)).

• Intégrons de 0 à N :

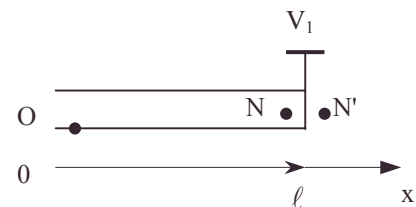
$$\rho a \ell = -(P(N) - P(O)) \Rightarrow P(O) - P(N') = \rho \frac{C_2 \sigma \ell}{s T} = \rho \frac{\sigma \ell}{s T} \sqrt{2gz_0} ; \text{or l'état hydrostatique supposera } P(O) = P(N), \text{ cette surpression va rapidement se propager et atteindre la vanne : } P(N) - P(N') = \Delta p = \rho \frac{\sigma \ell}{s T} \sqrt{2gz_0} ;$$

$$\text{AN : } \Delta p = 44,27 \text{ bars}.$$

2.1. Appliquons la relation de Bernoulli entre M_0 et M_2 :

$$\frac{p_0}{\rho} + g(z_0 - k q_m'^2) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} C_2'^2 \text{ avec } q_m' = \rho \sigma C_2'.$$

• Bernoulli [formules de], conservation de la masse, équation d'Euler, stabilité, surpression, Torricelli



$$z_0 = k\rho^2\sigma^2 C_2'^2 + \frac{1}{2} \frac{C_2'^2}{g} \Rightarrow C_2' = \sqrt{\frac{z_0}{\frac{1}{2g} + k\rho^2\sigma^2}} = \sqrt{\frac{2z_0g}{1 + 2gk\rho^2\sigma^2}} ; \text{AN : } C_2' = 42,21 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{2.a. } P'_c = \frac{1}{2} C_2'^2 q'_m = \frac{1}{2} \rho \sigma C_2'^3 = \frac{1}{2} \rho \sigma \left(\frac{2z_0g}{1 + 2gk\rho^2\sigma^2} \right)^{\frac{3}{2}} ; \text{AN : } P'_c = 37,60 \text{ MW.}$$

$$\text{b. } P'_{ie} = \frac{\rho}{2} C_2'^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2} \right) = \rho \frac{z_0g}{1 + 2gk\rho^2\sigma^2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{s^2} \right) ; \text{AN : } P'_{ie} = 8,552 \text{ bars.}$$

$$\text{c. } \Delta p' = \rho C_2' \frac{\sigma \ell}{sT} = \rho \frac{\sigma \ell}{sT} \sqrt{\frac{2gz_0}{1 + 2gk\rho^2\sigma^2}} ; \text{AN : } \Delta p' = 42,21 \text{ bars.}$$

Toutes les valeurs ont diminué.

3.1. La conservation de la masse s'écrit : $\rho s C = \rho S \frac{dz}{dt}$, C algébrique selon Ox orienté de

gauche à droite : $C = \frac{S}{s} \frac{dz}{dt}$.

2. L'eau étant incompressible, C(t) est indépendant du point de la canalisation vu la conservation de la masse $\rho C(M)s = \rho C(N)s$.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au fluide présent dans la canalisation horizontale limitée par une surface de contrôle Σ .

Soit $p = \rho s \ell C$ la quantité de mouvement.

Horizontalement, en l'absence de frottement ;

$$\frac{Dp}{Dt} = -s(P(N) - P(O)).$$



Les phénomènes étant suffisamment lents, prenons des distributions de pression quasi hydrostatiques ; le débit étant faible, on néglige les frottements et les vitesses :

$$P(O) = P(M_0) + \rho(z_0 - h)g ; P(N) = P(M_0) + \rho(z - h)g ,$$

$$\text{soit } P(O) - P(N) = \rho(z_0 - z)g .$$

$$\text{On a donc } \rho s \ell \frac{dC}{dt} = g \rho s (z_0 - z) , \text{ soit vu 3.1., } \ddot{z} + \frac{gs}{\ell S} (z - z_0) = 0 .$$

$$\text{On vérifiera : } z = z_0 + (z_1 - z_0) \cos \omega_e t \text{ avec } T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = 2\pi \sqrt{\frac{S\ell}{gs}} ; \text{AN : } T_e = 2838,5 \text{ s.}$$

Cette période mécanique est longue et justifie les hypothèses d'A.R.Q.S.

4.1. $P_0 = \frac{1}{2} q'_m C'^2$; or en appliquant la relation de Bernoulli entre le point M de la surface du réservoir d'équilibre et M_2 :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} V^2(M) + gz = \frac{P_0}{\rho} + \frac{C'^2}{2} + 0 , \text{ or } \rho S V(M) = \rho \sigma C' \Rightarrow V(M) \ll C' \text{ vu } S \gg \sigma .$$

$$\text{Il reste } C' = \sqrt{2gz} \Rightarrow P_0 = g z q'_m .$$

2. Exprimons la conservation de la masse de l'eau de la canalisation qui sert à augmenter le niveau du réservoir (algébriquement) et à assurer le débit de l'injecteur :

$$q_m = q'_m + q''_m = \frac{P_0}{gz} + \rho S \frac{dz}{dt} .$$

3. On reprend la question 3.2. en tenant compte du frottement, soit en remplaçant z_0 par $z_0 - kq_m^2$, on a : $\rho s \ell \frac{dC}{dt} = \rho g(z_0 - kq_m^2 - z)$.

4.a. En régime permanent : $q_m = Q_m$ et $\frac{dC}{dt} = 0 \Rightarrow y = z - z_0 + kQ_m^2 = 0 \forall t$ et sa dérivée $\frac{dy}{dt} = 0$.

b. $Q_m'' = 0 \Rightarrow Q_m = Q_m'$; or $Q_m' = \frac{P_0}{gZ}$ d'où $q_m' = \frac{P_0}{gZ} = Q_m \frac{Z}{Z}$.

Or, $z = y + z_0 - kQ_m^2$ et en régime permanent $Z = 0 + z_0 - kQ_m^2$, d'où $z = y + Z$.

• $q_m' = \frac{Q_m Z}{y + Z} = \frac{Q_m}{\left(1 + \frac{y}{Z}\right)} \approx Q_m \left(1 - \frac{y}{Z}\right)$; y étant du premier ordre.

• $q_m'' = \rho S \frac{dZ}{dt} = \rho S \frac{dy}{dt}$.

Finalement on a une expression linéarisée de $q_m = q_m' + q_m''$.

$q_m = Q_m \left[1 - \frac{y}{Z} + \frac{\rho S}{Q_m} \frac{dy}{dt}\right]$, y et $\frac{dy}{dt}$ étant petits, on en déduit : $a = -\frac{1}{Z}$; $b = \frac{\rho S}{Q_m}$

5. Rappelons $q_m = \rho s C \Rightarrow \rho s \frac{dC}{dt} = \frac{dq_m}{dt} = Q_m \left[-\frac{1}{Z} \frac{dy}{dt} + \frac{\rho S}{Q_m} \frac{d^2 y}{dt^2}\right]$. L'équation de 4.3.

s'écrit $\rho s \ell \frac{dC}{dt} = \rho g(z_0 - kq_m^2 - z)$ avec $z = y + Z$ et $z_0 = Z + kQ_m^2$.

• $q_m^2 = Q_m^2 \left[1 - \frac{y}{Z} + \frac{\rho S}{Q_m} \frac{dy}{dt}\right]^2 \approx Q_m^2 \left(1 - \frac{2y}{Z} + 2 \frac{\rho S}{Q_m} \frac{dy}{dt}\right)$ au 1^{er} ordre.

$$\Rightarrow \rho s \ell \frac{dC}{dt} = \ell Q_m \left[-\frac{1}{Z} \frac{dy}{dt} + \frac{\rho S}{Q_m} \frac{d^2 y}{dt^2}\right] = \rho g \left[Z + kQ_m^2 - kQ_m^2 \left(1 - \frac{2y}{Z} + \frac{2\rho S}{Q_m} \frac{dy}{dt}\right) - y - Z \right] ;$$

$$\rho S \ell \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \left[2k\rho^2 g Q_m S - \frac{\ell Q_m}{Z} \right] + \rho g y \left[1 - 2k \frac{Q_m^2}{Z} \right] = 0 .$$

6. Pour que cette équation soit de la forme $\ddot{y} + 2\lambda \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$, avec un régime stable, il faut $\lambda > 0$ et $\omega_0^2 > 0$, soit $2k\rho^2 g Q_m S - \frac{\ell Q_m}{Z} > 0$ soit $S > \frac{1}{2kg\rho^2 sZ}$ et $1 - 2 \frac{kQ_m^2}{Z} > 0$.

• Vu 2.1. : $\frac{P_0}{\rho} + gZ = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} C_2'^2 \Rightarrow Z = \frac{Z_0}{1 + 2gk\rho^2 \sigma^2}$,

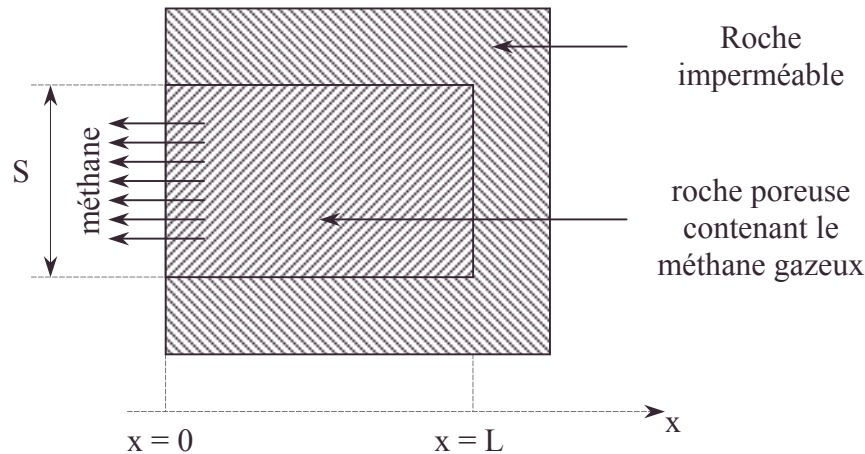
$\Rightarrow S_m = \frac{\ell}{2kg\rho^2 sZ} = \frac{\ell(1 + 2gk\rho^2 \sigma^2)}{2kg\rho^2 sZ_0}$;

AN : $S_m = 110,05 \text{ m}^2$.

• développement au premier ordre ou plus, effets dissipatifs, linéarisation, stabilité

3.5.4. Loi de Darcy pour les milieux poreux Exploitation de gaz naturel

On modélise un gisement de gaz naturel par une roche poreuse comprenant dans tout volume V un volume qV de méthane où la constante q est nommée la porosité de la roche. Cette roche poreuse a la forme d'un cylindre de section circulaire S et de longueur L (cf. figure 1), limité sur ses bords et sur la section $x = L$ par une roche imperméable. La section $x = 0$ modélise le puits d'extraction du méthane et on admettra que la pression $p(x = 0, t) = p_0$ y est maintenue constante à toute profondeur.



Hypothèses :

Figure 1.

- On néglige l'influence de la pesanteur.
- On suppose encore le problème unidimensionnel, de telle sorte que toutes les grandeurs physiques sont uniformes dans une section du cylindre ; on note x l'abscisse mesurée sur l'axe du cylindre, avec $0 \leq x \leq L$. On note $p(x, t)$ la pression et $\mu(x, t)$ la masse volumique du gaz dans une section d'abscisse x .
- On suppose la température $T = 300$ K uniforme.
- Dans toute cette partie, on assimile le méthane à un gaz parfait de masse molaire $M = 16 \text{ g.mol}^{-1}$. On rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
- L'écoulement du gaz naturel dans la roche poreuse, unidirectionnel selon l'axe u_x du cylindre, obéit à la loi de Darcy : la masse m de gaz qui traverse une section S de la roche poreuse d'abscisse x pendant une durée dt , comptée positivement dans le sens des x croissants, est de la forme $\delta m = -\mu \frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} S dt = -\frac{k}{v} \frac{\partial p}{\partial x} S dt$ où η est la viscosité du

mélange, μ sa masse volumique et k la perméabilité de la roche poreuse. μ et η dépendent de la pression ; en revanche k et la viscosité cinématique $v = \eta/\mu$ sont des constantes.

1. Exprimer la masse volumique $\mu(x, t)$ en fonction de la pression $p(x, t)$ et des constantes T , M et R .

2. Exprimer en fonction de $\mu(x, t)$, q , S et dx la masse de gaz naturel contenue à l'instant t entre les sections d'abscisses x et $x + dx$.

3. Exprimer en fonction de $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$, k , v , S , dx et dt , la variation de la masse de gaz naturel comprise entre les sections d'abscisse x et $x + dx$, pendant l'intervalle de temps dt .

• Darcy [convection dans les milieux poreux], masse volumique du méthane, milieux poreux, pores, porosité, unidimensionnalité, viscosité

4. En déduire que la pression $p(x, t)$ est solution d'une équation (E) de la forme $D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}$, où D est une constante qu'on exprimera en fonction de k , v , M , R , T et q . Citer un autre phénomène physique guidé par une équation aux dérivées partielles analogue.

5. Quelles sont les dimensions de D ? En déduire la dimension de la perméabilité k et calculer sa valeur pour $v = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $D = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $q = 0,15$. Proposer une interprétation intuitive de k au vu de son ordre de grandeur.

6. On cherche une solution de l'équation (E) de la forme :

$$p(x, t) = p_0 + p_1 \sin(\alpha x) \exp(-t/\tau).$$

où α et τ sont des constantes positives.

a. Déduire de la présence de la roche imperméable en $x = L$ les valeurs possibles de α en fonction de L et d'un entier n . Dans toute la suite, on adopte la plus petite des valeurs possibles de α .

b. Déterminer τ en fonction de D et L .

c. Exprimer la masse $m(t)$ de méthane contenue dans le gisement à la date t en fonction de p_0 , p_1 , S , L , q , M , R , T , D et t .

d. Sachant que $p_1 = 100 p_0$ et $L = 5 \cdot 10^3 \text{ m}$, calculer en années la date t^* à laquelle 95 % du méthane contenu dans le gisement a été récupéré, et commenter.

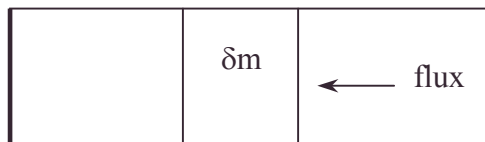
Banque BCPST ; Durée : 1h

Corrigé

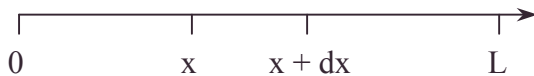
$$1. p dV = dm \frac{RT}{M} \Rightarrow \mu = \frac{dm}{dV} = \frac{pM}{RT} \Rightarrow \mu(x, t) = \frac{M}{RT} p(x, t).$$

$$2. \delta m = \mu q S dx.$$

3. forage



Pour le flux, vers le forage, il faut $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ pour avoir un mouvement de la zone riche vers la zone appauvrie en CH_4 .



$$\text{Bilan de masse de la tranche : } d\delta m = \frac{k}{v} S \left(\frac{\partial p}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \right) dt = \frac{k}{v} S \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx dt.$$

$$4. \frac{d\delta m}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} q S dx = \frac{M q S}{RT} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k S}{v} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k R T}{M q v} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \text{ soit } D = \frac{k R T}{M q v}.$$

On a une loi caractéristique des phénomènes de transport : diffusion (thermique ou de matière, d'électricité ou de quantité de mouvement).

5.a. D est en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ vu l'équation qui définit D .

$$\text{b. Les unités de } k \text{ et } \frac{v}{S} \frac{dp}{dx} \frac{dm}{dt} \text{ sont les mêmes vu 4.} \Rightarrow [k] = \frac{[L]^2 [T]^{-1} [M] [T]^{-1}}{\frac{[M] [L] [T]^{-2}}{[L]}};$$

$$[k] = [L]^2. \text{ L'unité de } k \text{ est le } \text{m}^2.$$

c. $k = \frac{p_v D M}{RT}$; A.N. : $k = 1,44 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$, sans doute l'aire moyenne d'un pore.

N.B. : la dimension $\sqrt{k} = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ permet le passage de molécules. On ne s'intéresse pas à l'aspect "fractal" de la porosité.

$$\mathbf{6.a.} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha p_1 \cos \alpha x e^{-\frac{t}{\tau}} ; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\alpha^2 p_1 \sin \alpha x e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

L'imperméabilité en $x = L$ exclut tout flux de gaz.

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L, t) \equiv 0 \Rightarrow \cos \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La plus petite valeur de n est : $n = 0$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2L}$.

$$\mathbf{b.} \quad p(x, t) = p_0 + p_1 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} p_1 \sin \frac{\pi x}{2L} e^{-\frac{t}{\tau}} ; \text{ reportons dans l'équation de 4.}$$

$$D\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{4L^2}{\pi^2 D} = \frac{4L^2 M q v}{\pi^2 k R T} ; \text{ A.N. : } L = 5 \text{ km} ; \tau = 3,38 \cdot 10^8 \text{ s}.$$

$$\mathbf{c.} \quad m_{\text{CH}_4} = \iiint \mu_{\text{CH}_4} d\tau = q \int_0^L \mu S dx = \frac{q M S}{RT} \int_0^L p(x, t) dx.$$

$$m(t)_{\text{CH}_4} = \frac{q M}{RT} S L \left[p_0 + \frac{2}{\pi} p_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

d. On cherche t^* tel que $m_{\text{CH}_4}(t^*) = 0,05 m_{\text{CH}_4}(0)$.

$$p_0 + \frac{2}{\pi} p_1 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,05 \left(p_0 + \frac{2 p_1}{\pi} \right) : t^* = 3,35 \tau.$$

A.N. : $t^* = 1,133 \cdot 10^9 \text{ s} = 13115 \text{ jours} = 36 \text{ ans}$.

C'est géologiquement court et révèle l'épuisement rapide des ressources fossiles. Au point de vue industriel, à court terme, on pourrait accélérer le pompage mécanique.

3.5.5. Résistance hydraulique Vaisseaux sanguins

Les parties **A.** et **B.** de ce problème sont entièrement littérales : la partie **A.** permet d'établir la loi de Poiseuille relative à l'écoulement d'un fluide visqueux ; l'expression de cette loi est donnée dans la question **A.4.b.**, permettant aux étudiants n'ayant pas réussi à la démontrer de poursuivre néanmoins la résolution du problème. La partie **B.** est presque totalement qualitative ; cependant, on se limitera à une argumentation claire reposant sur des notions physiques.

Les parties **C.**, **D.** et **E.** concernent l'application des lois précédemment établies à divers aspects de la circulation sanguine humaine.

A. Établissement de la loi de Poiseuille

On considère un tube cylindrique d'axe horizontal et de rayon intérieur a , rempli d'un fluide incompressible de masse volumique μ . On s'intéresse, au sein de ce fluide, à un cylindre coaxial au précédent, de rayon r ($0 < r < a$), compris entre les plans de section droite passant par les points A et B distants de ℓ (figure 1).

• loi de Poiseuille, résistance hydraulique, visqueux

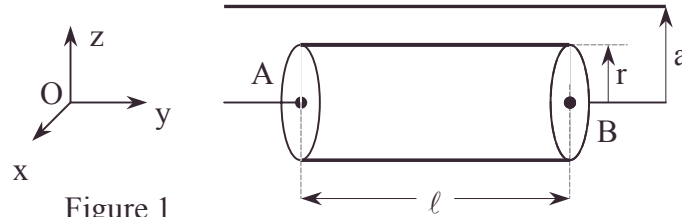


Figure 1

On adoptera un repère orthonormé Oxyz dont l'axe Oy est parallèle à l'axe du tube et Oz est la verticale ascendante.

1. Le fluide est immobile

a. Quelles sont les forces pressantes qui s'exercent sur les diverses parties du cylindre ci-dessus, de rayon r et de longueur ℓ ? Quelle est leur résultante (direction, sens, intensité) ? On notera p_0 la pression en A.

b. Retrouver le théorème d'Archimède, dans le cas particulier traité ici.

2. Le fluide considéré est maintenant en mouvement uniforme ; il s'agit d'un fluide très peu visqueux. Dans ces conditions, la vitesse v est en tout point la même, parallèle à Oy, et indépendante du temps.

a. Que peut-on dire des forces qui s'exercent sur le cylindre considéré à la question précédente ?

b. On appelle débit volumique, noté Q , le volume de fluide traversant une section droite du cylindre de rayon a par unité de temps. Etablir l'expression de Q .

3. Dans toute la suite du problème, on s'intéresse à des fluides visqueux : en d'autres termes, on ne néglige pas l'influence des forces de frottement au sein d'un fluide. On admet qu'au sein d'un tel fluide, dont la vitesse n'est pas uniforme, il existe une force de frottement qui s'oppose au glissement l'une par rapport à l'autre, de deux couches de fluide de vitesses différentes. Sur la surface latérale du cylindre (r, ℓ) défini précédemment s'exerce donc une force dont la direction est Oy et dont la norme par

unité de surface est : $\frac{\|\vec{F}\|}{S} = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right|$ où η est la viscosité du fluide.

On considère donc maintenant un écoulement de fluide visqueux dans le tube cylindrique de la figure 1, en régime permanent indépendant du temps. Du fait de la viscosité du fluide, sa vitesse, parallèle à l'axe Oy, devient une fonction $v(r)$ telle que $v(a) = 0$ (au contact de la paroi du tube), passant par un maximum au centre du tube. Pour maintenir cet écoulement, il est alors nécessaire d'exercer une différence de pression entre les points A et B, situés sur l'axe horizontal du tube ; la quantité $p_A - p_B$ est appelée perte de charge.

On pourra considérer que le tube est de rayon faible, de sorte que la pression ne varie pas sensiblement dans un de ses plans de section droite.

a. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le cylindre (r, ℓ) considéré dans les questions précédentes.

b. Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $v(r)$.

c. Déterminer le profil de vitesse caractérisé par la fonction $v(r)$. représenter graphiquement cette fonction.

4. Calcul du débit volumique Q du fluide

a. Quel est le débit élémentaire dQ du fluide s'écoulant entre deux cylindres de rayons r et $r + dr$?

b. Montrer que le débit total est donné par : $Q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{p_A - p_B}{\ell}$ ①.

• Archimède [théorème d'], force surfacique, glissement, graphe, loi de Poiseuille, maximum, perte de charge, unidimensionnalité, viscosité

Cette formule exprime la loi de Poiseuille.

c. On appelle vitesse moyenne v_m de l'écoulement, la vitesse qu'aurait le fluide s'il n'était pas visqueux, pour le même débit Q . Calculer v_m et comparer sa valeur à la vitesse maximale du fluide dans le cylindre.

B. Analogie électrique

En hydrodynamique, on définit la résistance hydraulique \mathfrak{R} d'un conducteur par le rapport entre la différence de pression entre ses extrémités et le débit du liquide (en régime permanent) : $p_A - p_B = \mathfrak{R}Q$ ②.

1. La relation ci-dessus est formellement analogue à la loi d'Ohm relative à la résistance d'un conducteur électrique, en régime indépendant du temps. Au-delà de cet aspect formel, justifier cette analogie ; on indiquera en particulier les grandeurs qui se correspondent, en s'appuyant sur des considérations concernant les quantités transportées ainsi que les forces qui permettent ce transport.

2. Rappeler la loi d'association des résistances électriques de conducteurs placés en série et en parallèle. En est-il de même pour les résistances hydrauliques dans un réseau de canalisations ? Justifier votre réponse.

3. Donner l'expression de la résistance électrique d'un conducteur cylindrique homogène de longueur ℓ , de rayon a , et constitué d'un métal de résistivité ρ . Calculer également la résistance hydraulique d'un tube cylindrique de rayon a , le longueur ℓ et où s'écoule un liquide de viscosité η , en se servant de la loi de Poiseuille. Comparer les deux expressions de la résistance obtenues : on insistera particulièrement sur leurs similitudes, que l'on justifiera, ainsi que sur leurs différences, que l'on tentera d'expliquer par des raisons physiques.

C. Quelques applications à la circulation sanguine humaine

Dans toute la suite du problème (parties C., D. et E.), on admettra que l'écoulement du sang dans les divers vaisseaux du système cardio-vasculaire obéit à la loi de Poiseuille (traduite par l'expression ①) établie dans la partie A., pour un cylindre d'axe horizontal. On se servira également de la résistance hydraulique définie dans la partie B. (relation ②).

On admettra également, dans toute la suite, que le sang présente les caractéristiques invariables suivantes, bien qu'il s'agisse d'une simplification :

masse volumique : $\mu = 1,06.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Viscosité : $\eta = 4,5.10^{-3} \text{ Pa.s}^{-1}$.

D'autre part, les pressions dont il est question dans la suite sont en fait des différences avec la pression atmosphérique normale, l'ensemble du système cardio-vasculaire étant en surpression par rapport à l'atmosphère ; on les désignera néanmoins par le terme de pressions.

1. La "tension artérielle" (TA) mesurée pour un adulte normal, en position couchée, à l'aide d'un brassard classique est de 13-8 (pression systolique et pression diastolique). Ces pressions sont données en cm de mercure, par tradition. A quelle valeur moyenne de la pression, exprimée en unités SI, ces nombres correspondent-ils ?

Dans toute la suite, les pressions dont il sera question sont les pressions moyennes au cours du temps, et donc supposées invariables.

Données : Masse volumique du mercure : $13,6.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Intensité du champ de pesanteur : $9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

2. La figure 2 ci-après concerne la circulation systémique, ou grande circulation (ventricule gauche \rightarrow oreillette droite) pour un adulte au repos. En ordonnées sur une échelle logarithmique, on a représenté (i) en trait plein la vitesse moyenne (au sens où celle-ci a été définie en A.4.c.) du sang en divers endroits de ce circuit, l'échelle correspondante étant figurée à gauche, et (ii) en traits pointillés, la surface totale de la section droite des divers vaisseaux, l'échelle correspondante étant figurée à droite.

a. Les variations respectives de ces deux quantités traduisent la constance d'une certaine grandeur physique : quelle est-elle ? On calculera sa valeur au départ pour l'artère aorte, pour les capillaires et à l'arrivée à la sortie de la veine cave à l'aide des valeurs lues sur la figure 2, et on vérifiera qu'elle est constante.

b. Quel est le temps nécessaire, pour un petit volume sanguin, pour parcourir toute la circulation systémique ? On estimera ce temps, dont il n'est pas demandé une valeur exacte, à l'aide de valeurs raisonnables pour un volume sanguin moyen de 5 litres pour les deux réseaux.

3. Pour l'homme normal, au repos, les pressions sont les suivantes :

Pression à la sortie du ventricule gauche :	13,5 kPa.
Pression à l'entrée des capillaires :	3,5 kPa.
Pression à la sortie des capillaires :	2,5 kPa.
Pression dans la veine cave :	1 kPa.

a. Si l'on admet que le débit dans la grande circulation est de $90 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, quelles sont les résistances hydrauliques du système artériel, des capillaires, et du système veineux ? Quelle est la résistance totale du circuit systémique ?

b. Typiquement, un capillaire sanguin a une longueur de 1 mm et son diamètre est de 8 μm . Quelle est sa résistance hydraulique ? Dédurre, de la question précédente, le nombre total de capillaires sanguins supposés tous identiques ; le résultat obtenu est-il en accord avec les données de la figure 2 ?

4. On place un individu sous perfusion.

Pour cela, on dispose d'une ampoule contenant de l'eau glucosée de masse volumique $\mu' = 1,02 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-1}$. et dont la surface libre (à la pression atmosphérique) est située à $h' = 80 \text{ cm}$ au-dessus de la veine du bras dans laquelle on introduit une aiguille horizontale, de longueur $\ell = 25 \text{ mm}$ et de diamètre intérieur $d = 0,5 \text{ mm}$. Un tuyau souple de diamètre intérieur 4 mm et de longueur convenable relie l'ampoule à l'aiguille.

Calculer le débit de ce système de perfusion ; commenter la valeur trouvée.

D. Régulation dans le système cardio-vasculaire

1. Le débit sanguin dans un organe quelconque dépend de divers facteurs :

- le débit total du cœur, lié essentiellement au rythme cardiaque ;
- la pression artérielle, intervenant dans la loi de Poiseuille ;
- la viscosité du sang, dépendant elle-même de divers phénomènes ;
- le rayon des vaisseaux alimentant l'organe, qui peut être modifié par vasodilatation ou vasoconstriction.

Parmi ces divers facteurs, quel est celui dont la variation relative a le plus d'influence ?

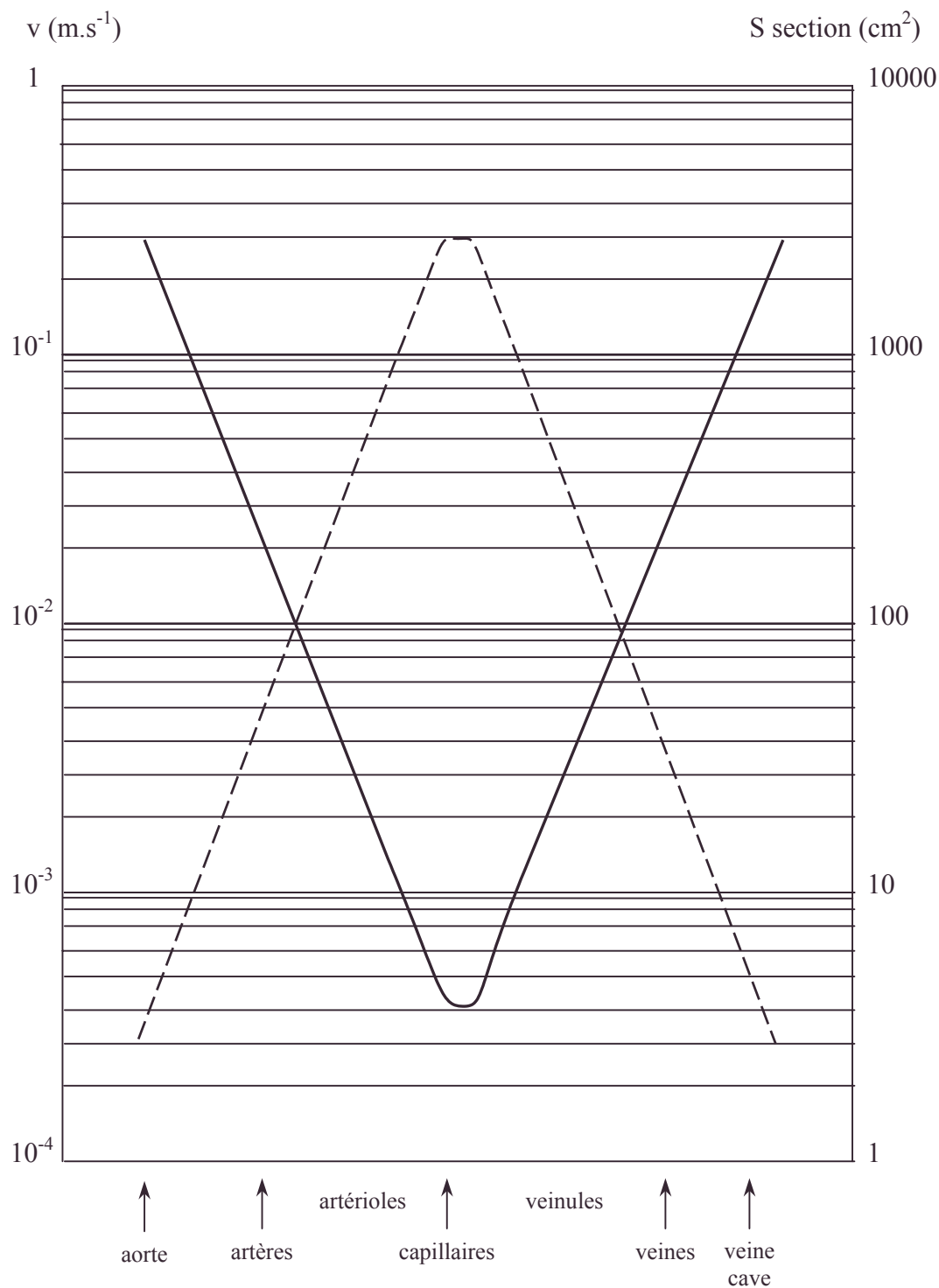


Figure 2

2. On peut schématiser la circulation systémique par la figure 3 :

- la branche 1, de débit Q_1 et de résistance \mathfrak{R}_1 , comprend des organes (cœur, cerveau) devant être alimentés à un débit le plus constant possible ;
- la branche 2, (débit Q_2 et résistance \mathfrak{R}_2) comprend le foie, les reins, le système digestif

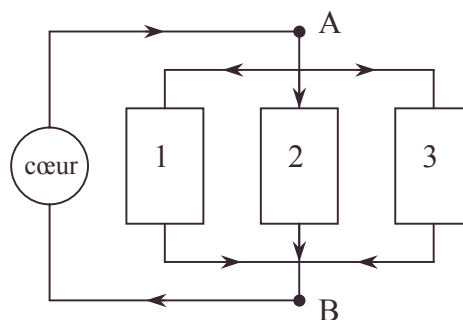


Figure 3

dont l'alimentation sanguine peut être temporairement réduite.

- la branche 3, (débit Q_3 et résistance \mathcal{R}_3) correspond à l'ensemble du système musculaire, dont les besoins dépendent évidemment de l'activité physique.

Pour un adulte au repos, le débit cardiaque est $Q_0 = 90 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et la différence de pression entre les systèmes artériel et veineux est : $\Delta p_0 = p_A - p_B = 12,5 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

Les flux sanguins se répartissent alors de la façon suivante :

$$Q_1 = 25 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} ; Q_2 = 40 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} ; Q_3 = 25 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

A l'aide des données ci-dessus, calculer les résistances des trois branches de la figure 3, ainsi que la résistance \mathcal{R}_0 équivalente à leur ensemble, caractérisant le système à l'état de repos. Comparer au résultat de la question **C.3.a**.

3. Au cours d'une activité physique importante, l'appareil musculaire demande une alimentation accrue en sang ; ceci est réalisé en diminuant la résistance vasculaire de la branche 3 : on admettra ici, à titre d'exemple, que sa valeur devient $\mathcal{R}'_3 = \frac{\mathcal{R}_3}{3}$.

Simultanément et par compensation, on réduit temporairement (pendant la durée de l'activité physique importante) l'alimentation de la branche 2 : sa résistance vasculaire est accrue et devient : $\mathcal{R}'_2 = 2\mathcal{R}_2$; enfin la résistance \mathcal{R}_1 de la branche 1 n'est pas modifiée. En admettant que le débit cardiaque n'est pas modifié et reste donc égal à Q_0 , calculer la nouvelle résistance \mathcal{R}' de l'ensemble. Que devient la différence de pression $\Delta p'$ entre A et B ? Calculer également les débits Q'_1 , Q'_2 et Q'_3 dans les 3 branches.

4. Dans la situation étudiée à la question précédente de résistance totale \mathcal{R}' , la pression artérielle est modifiée de façon importante ; en fait, dans le système cardio-vasculaire, il existe des mécanismes régulateurs qui, à partir des mesures faites par divers récepteurs (capteurs de pression), asservissent le rythme cardiaque à la pression artérielle ; ce processus de rétroaction permet ainsi de modifier le débit total du cœur en fonction des nécessités de l'organisme. Ce système d'asservissement fonctionne selon une relation de linéarité dans un domaine assez large, et peut être décrit par la fonction suivante : $Q = Q_0 - \alpha (\Delta p - \Delta p_0)$, où Q_0 et Δp_0 caractérisent l'état de repos (question **D.2.**), et Q et Δp un état différent du système. Pour l'organisme humain, α vaut $0,63 \cdot 10^{-7}$ unité S.I.

a. Représenter sur un graphe les diverses relations entre le débit total (en abscisse) et la différence de pression Δp (en ordonnée) rencontrées dans les questions **D.2.**, **D.3.** et **D.4.**

On précisera, sur cette figure, les points de fonctionnement du circuit de la figure 3 dans les divers cas : M_0 (état de repos), M' (question **D.3.**) et M'' (question **D.4.**).

b. Calculer, pour le système ainsi régulé, les débits sanguins dans les diverses parties : Q'' (total), Q''_1 , Q''_2 et Q''_3 , ainsi que la différence de pression $\Delta p''$ entre A et B.

c. Commenter les résultats obtenus dans les questions **D.2.**, **D.3.** et **D.4.b**.

E. Quelques considérations énergétiques

1. A partir des diverses grandeurs, et de leur valeur numérique, introduites dans les parties précédentes, établir une expression littérale, puis calculer numériquement, la puissance mécanique du cœur, relative à la circulation systémique, pour l'homme au repos. Commenter le résultat obtenu, en le comparant à la puissance totale consommée par le corps humain au repos, soit environ 100 W. Sous quelle forme apparaît finalement la puissance ainsi mise en jeu ? Donner une estimation quantitative raisonnable de l'effet ainsi provoqué.

2. On s'intéresse plus particulièrement à un vaisseau cylindrique horizontal, tel que celui envisagé tout au long de ce problème et de caractéristique (a, ℓ).

a. Exprimer la puissance mécanique nécessaire pour faire circuler le sang entre les plans de section droite passant par A et B et distants de ℓ (figure 1).

b. On considère la portion de fluide, de longueur ℓ , comprise entre les cylindres de rayons r et $r + dr$; à quelle force due à la viscosité cette portion est-elle soumise ? Quel est le travail de cette force par unité de temps ? En se servant de la fonction $v(r)$ et de sa dérivée dont les expressions ont été établies dans la partie A, retrouver l'expression de la puissance mécanique établie dans la question E.2.a.

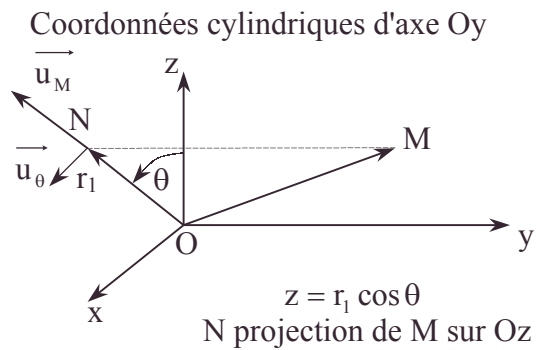
3. Les considérations énergétiques dont il est question dans cette dernière partie présentent-elles une analogie avec celles relatives à l'électrocinétique des régimes permanents ? Quelle loi ces phénomènes évoquent-ils ? Justifier votre réponse, en vous servant d'expressions quantitatives.

ENS ; Durée : 4h

Corrigé

A.1.a. Le principe de l'hydrostatique s'écrit
 $dp = -\mu g dz$,
 soit $p = p_0 - \mu g z = p_0 - \mu g r_1 \cos \theta$, sachant
 que $d\vec{f} = p d\vec{S}$.

α . Force pressante sur la base passant par A :



$$\vec{F}_A = \vec{y} \iint (p_0 - \mu g r_1 \cos \theta) r_1 dr_1 d\theta = \vec{y} p_0 \pi r^2 - \mu g \int_0^r r_1 dr_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_0$$

$\vec{F}_A = p_0 \pi r^2 \vec{y}$. On peut trouver le résultat évident et ne pas faire le calcul.

β . Force pressante sur la base passant par B ; on a en adaptant :
 $\vec{F}_B = -\vec{y} \iint p dS = -\vec{F}_A = -\pi r^2 p_0 \vec{y}$; force qui s'oppose à \vec{F}_A .

γ . Force pressante latérale (avec $dS = r d\theta dy$) :
 $\vec{F}_{\text{lat}} = -\iint (p_0 - \mu g r \cos \theta) r d\theta dy \vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{z} + \sin \theta \vec{x}$
 $= -\vec{z} \iint (p_0 - \mu g r \cos \theta) r d\theta dy \cos \theta - \vec{x} \iint (p_0 - \mu g r \cos \theta) r d\theta dy \sin \theta$

$$= -\vec{z} \left[p_0 r \int_0^\ell dy \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_0 - \mu g r^2 \ell \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{1}{2} \cdot 2\pi} \right] \dots$$

$$\dots - \vec{x} \left[p_0 r \ell \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_0 - \mu g r^2 \ell \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta}_0 \right]$$

$\vec{F}_{\text{lat}} = \pi \mu g r^2 \ell \vec{z}$. C'est aussi la force résultante.

• analogie, statique des fluides, viscosité

b. On retrouve bien que la résultante des forces de pression est la poussée d'Archimède car le poids de volume déplacé est : $g\mu\pi r^2\ell$.

2.a. Le repère lié au fluide est galiléen et le fluide y est au repos ;

$r < a$: $\vec{F}_{\text{poids}} + \vec{F}_{\text{Archimède}} = \vec{0}$: on rétablit bien l'expression précédente. Il n'y a pas de force selon Oy.

b. $Q = \iint \vec{V} d\vec{S} = \pi a^2 v$.

3.a. P est uniforme dans une section.

α. Force pressante sur la section de A : $\vec{F}_A = \vec{y} \pi r^2 p_A$.

β. Force pressante sur la section de B : $\vec{F}_B = -\vec{y} \pi r^2 p_B$.

γ. Le poids : $\vec{P} = -\pi r^2 \ell \mu g \vec{z}$.

δ. p varie de A à B ; pour chaque tranche d'épaisseur dy la pression extérieure ne peut être considérée comme constante car sinon la force résultante des forces de pression serait nulle.

On supposera que le modèle hydrostatique est acceptable pour la pression ainsi pour chaque tranche la résultante est la poussée d'Archimède ; au total, la résultante des forces de pression latérale vaut donc la poussée d'Archimède : $\ell \pi r^2 \mu g \vec{z}$.

ε. La force de viscosité, or si $\frac{dv}{dr} > 0$, $F_y > 0$, et si $\frac{dv}{dr} < 0$, $F_y < 0$

$$\Rightarrow F_y = \iint \eta \frac{dv}{dr}(r) \underbrace{dy r d\theta}_{dS} = 2\pi\eta\ell r \frac{dv}{dr}(r).$$

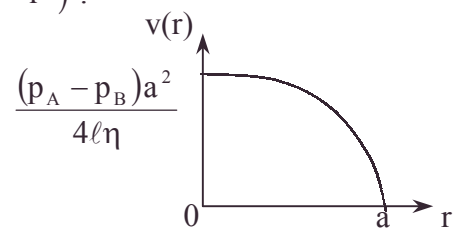
b. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit en mécanique des fluides des systèmes ouverts :

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \vec{F} \text{ avec } \frac{D\vec{P}}{Dt} = \underbrace{\iiint \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dm}_{=0} + \vec{y} \left[\underbrace{-\iint_{S_A} v \mu v dS + \iint_{S_B} v \mu v dS}_{0 \text{ car } v=v(r) \forall y} \right].$$

Il reste : $0 = (p_A - p_B) \pi r^2 + 2\pi\eta\ell r \frac{dv}{dr}$.

c. $dv = -(p_A - p_B) \frac{r}{2\eta\ell} dr \Rightarrow v(r) = \frac{(p_A - p_B)}{4\eta\ell} (a^2 - r^2)$:

on a un arc de parabole.



4.a. $dQ = v dS = \frac{p_A - p_B}{4\eta\ell} (a^2 - r^2) 2\pi r dr$.

b. $Q = \int dQ = \frac{p_A - p_B}{4\eta\ell} \int_0^a (a^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi a^4 (p_A - p_B)}{8\eta\ell}$. C'est la loi de Poiseuille.

c.α. En l'absence de viscosité et de rugosité, v serait constant sur une section.

$Q = \pi a^2 v_m \Rightarrow v_m = \frac{Q}{\pi a^2}$. Il s'agit d'une valeur moyenne sur une aire et non sur un intervalle linéaire d'intégration.

β. $v_{\text{max}} = \frac{(p_A - p_B) a^2}{4\eta\ell} = \frac{2Q}{\pi a^2}$.

• parabole, poussée d'Archimède, principe fondamental de la dynamique, rugosité, valeur moyenne, viscosité

$$\gamma \cdot v_{\max} = 2v_m.$$

B.1. On est dans le cadre des phénomènes de transport :

• Comparons un transport radial d'électricité dans un cylindre au problème hydraulique axial présent :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ s'écrit } j_r = -\gamma \frac{dV}{dr} \text{ et } I = 2\pi r \ell j_r = -2\pi r \ell \gamma \frac{dV}{dr}.$$

$$\frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dr} \text{ permet d'avoir } \int \frac{dF}{dS} dS = 2\pi r \ell \eta \frac{dv}{dr} \text{ puis l'équation différentielle :}$$

$$(p_a - p_b) \pi r^2 = -2\pi r \ell \eta \frac{dv}{dr}.$$

On voit l'analogie entre γ et η .

• L'intégration de la loi d'Ohm locale donne : $dV = -\frac{I dr}{2\pi r \ell \gamma}$; $V_C - V_D = RI$.

• L'intégration de l'équation mécanique en 2 étapes donne la loi de Poiseuille qu'on peut écrire : $p_A - p_B = \mathfrak{R}Q$.

• On voit l'analogie entre les grandeurs intensives P et V et les flux :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ et } Q = \iint \vec{V} \cdot d\vec{S}.$$

• Les 2 résistances analogues représentent des effets dissipatifs (dans les conducteurs ou les canalisations) mais les mouvements d'électricité et de liquide sont perpendiculaires.

2.a.α. L'association de résistances en parallèle utilise la loi aux nœuds :

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

β. L'association de canalisations en parallèle utilise la conservation du débit :

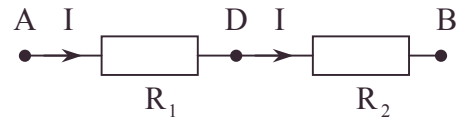
$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow \frac{p_A - p_B}{\mathfrak{R}} = \frac{p_A - p_B}{\mathfrak{R}_1} + \frac{p_A - p_B}{\mathfrak{R}_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} ; \text{ les lois sont les mêmes.}$$

b.α. L'association de résistances en série utilise la conservation de l'intensité dans les 2 conducteurs en série dans l'ARQS.

$$V_A - V_B = RI = V_A - V_D + V_D - V_B = R_1 I + R_2 I$$

$$R = R_1 + R_2.$$

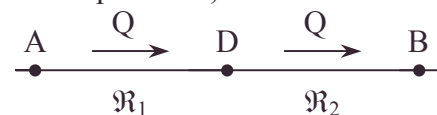


β. L'association de canalisations en série utilise la conservation du débit dans les 2 canalisations en série dans l'ARQS (ou pour un fluide incompressible).

$$p_A - p_B = \mathfrak{R}Q = p_A - p_D + p_D - p_B = \mathfrak{R}_1 Q + \mathfrak{R}_2 Q.$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 ; \text{ les lois sont les mêmes.}$$

Les analogies précédemment soulignées ont les mêmes conséquences formelles.



$$\mathbf{3.a.} \text{ On sait que } R = \rho \frac{\ell}{S} \Rightarrow R_{el} = \rho \frac{\ell}{\pi a^2} = \frac{\ell}{\gamma \pi a^2}.$$

• analogie, ARQS, conservation du débit, effets dissipatifs, loi de Poiseuille, viscosité

b. $\mathfrak{R}_{\text{hydraulique}} = \frac{p_A - p_B}{Q} = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4}$; l'analogie cesse ; on notera que les unités sont

différentes.

La répartition de vitesse non uniforme dans le cas de l'écoulement visqueux traduit un phénomène de transfert de quantité de mouvement ; la théorie classique de la mobilité des porteurs de charges dans un milieu conducteur fait intervenir un frottement dit visqueux mais qui est de fait une interaction quantique, non représentable aussi simplement pour expliquer le transfert de charge.

L'intérêt de la notion de résistance, dans les 2 cas, est de traduire une chute de grandeur intensive proportionnellement aux flux de charges ou de matière (par unité de temps) afin de traduire un effet dissipatif associé au transfert.

C. On prendra : 1 atm = 76 cm Hg = 101,4 kPa.

1. $\Delta p = \mu_{\text{Hg}} g h$; $h_1 = 13 \text{ cm}$; $p_s = 17,3 \text{ kPa}$.

$h_2 = 8 \text{ cm}$; $p_d = 10,7 \text{ kPa}$.

2.a. On constate : $\log v + \log S = \text{cste}$ soit $\log Q = \text{cste}$.

Le débit volumique est bien constant.

	v en m.s^{-1}	S en m^2	Q en $\text{cm}^3.\text{s}^{-1}$
Début de l'aorte	0,3	3.10^{-4}	90
Centre des capillaires	$4,2.10^{-4}$	0,2200	92
Fin de la veine cave	0,26	$3,4.10^{-4}$	88,4

Vu les interpolations visuelles, Q est constant à 2% près : $90 \text{ cm}^3.\text{s}^{-1}$.

b. $\tau = \frac{\ell}{v} = \frac{\ell S}{vS} = \frac{\text{volume sanguin}}{Q}$. On estime le volume sanguin à 5 litres, partagés à

moitié entre 2 réseaux (cf. 2 ventricules) ; $\tau = 28 \text{ s}$.

3.a.α. $\mathfrak{R} = \frac{\Delta p}{Q}$ en Pa.s.m^{-3} .

	Δp	\mathfrak{R} hydraulique
Système artériel	10 kPa	$1,11.10^8$
Capillaires	1 kPa	$0,11.10^8$
Système veineux	1,5 kPa	$0,17.10^8$

β. Q constant justifie un montage série :

$\mathfrak{R}_T = \mathfrak{R}_{\text{artères}} + \mathfrak{R}_{\text{capillaires}} + \mathfrak{R}_{\text{veines}}$; $\mathfrak{R}_T = 1,39.10^8 \text{ Pa.s.m}^{-3}$.

b.α. $\mathfrak{R} = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4}$; A.N. : $\mathfrak{R}_{1\text{cap}} = 4,5.10^{16} \text{ Pa.s.m}^{-3}$.

β. En supposant un montage parallèle pour obtenir $\mathfrak{R}_{\text{cap}} = 1,1.10^7 \text{ Pa.s.m}^{-3}$, on

obtient $n = \frac{\mathfrak{R}_{1\text{cap}}}{\mathfrak{R}_{\text{cap}}} = 4,1.10^9$; on obtient $S = n \frac{\pi \phi^2}{4} = 0,21 \text{ m}^2$, ce qui correspond à la

valeur lue à 6% près.

4. $\mathfrak{R} = \frac{8\eta\ell}{\pi a^4}$; vu la loi en a^{-4} on ne retient que la résistance de l'aiguille (dans le

montage en série avec le tuyau ;

A.N. : $a = 0,25 \text{ mm}$; $\mathfrak{R} = 1,7.10^{10} \text{ Pa.s.m}^{-3}$

$\Delta p = \mu' g h'$; A.N. : $\Delta p = 8 \text{ kPa}$.

$Q_{\text{perf}} = \frac{\Delta p}{\mathfrak{R}}$; A.N. : $Q_{\text{perf}} = 0,47 \text{ cm}^3.\text{s}^{-1}$.

• analogie, effet dissipatif, perfusion, tableau numérique, unité, visqueux

Ce supplément est faible par rapport au débit sanguin de $90 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\frac{Q_{\text{perf}}}{Q_{\text{sang}}} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

$$\text{D.1. } Q = \frac{\pi a^4}{8\eta \ell} \Delta p \Rightarrow \ln Q = \ln \frac{\pi}{8} + 4 \ln a + \ln \Delta p - \ln \eta - \ln \ell.$$

$$\frac{dQ}{Q} = 4 \frac{da}{a} + \frac{d\Delta p}{\Delta p} - \frac{d\eta}{\eta} - \frac{d\ell}{\ell}.$$

La variation relative qui a le plus de répercussion sur le débit est donc le rayon.

$$\text{2.a. } \mathfrak{R} = \frac{\Delta p}{Q};$$

$$\mathfrak{R}_1 = 5,0 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}; \mathfrak{R}_2 = 3,1 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}; \mathfrak{R}_3 = 5,0 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\text{b. Le montage parallèle donne } \frac{1}{\mathfrak{R}_0} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3}.$$

$$\mathfrak{R}_0 = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}; \text{ on trouve la même valeur qu'en C.3.a.}$$

Les 2 analyses se confortent l'une l'autre.

$$\text{3.a. Le montage parallèle donne : } \frac{1}{\mathfrak{R}'} = \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{2\mathfrak{R}_2} + \frac{3}{\mathfrak{R}_3}; \mathfrak{R}' = 1,053 \cdot 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\text{b. } \Delta p' = \mathfrak{R}' Q_0; \text{ A.N. : } \Delta p' = 9,4 \text{ kPa} \text{ soit une diminution de } \Delta p = p_s - p_d.$$

$$\text{c. } Q'_i = \frac{\Delta p'}{\mathfrak{R}_i} \text{ pour chaque branche.}$$

$$Q'_1 = 18,8 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}; Q'_2 = 15,0 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}; Q'_3 = 56,3 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les muscles voient leur irrigation sanguine augmentée par prélèvement sur les 2 autres branches.

4. Régulation cardiaque

$$\text{a. } \Delta p = \frac{Q_0 - Q}{\alpha} + \Delta p_0.$$

A.N. :

$$\alpha \text{D.2. : } M_0, \Delta p_0 = 12,5 \text{ kPa}.$$

$$Q = 90 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\beta \text{D.3. : } M', \Delta p' = 9,4 \text{ kPa}.$$

$$Q' = Q_0 - \alpha (\Delta p' - \Delta p_0).$$

$$Q' = 285,3 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

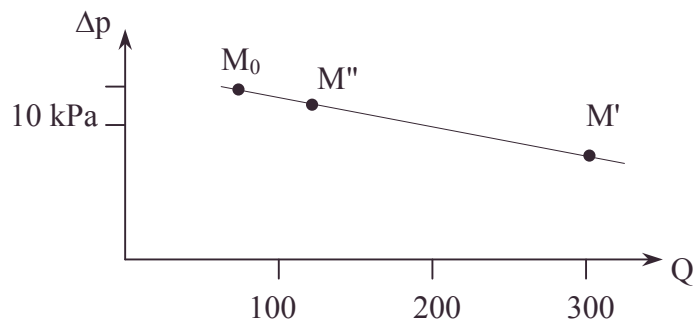
La linéarité de la relation implique une multiplication du débit par 3,2 mais la rétroaction va donner une amélioration.

b.α. Par rapport à la question **D.3.** caractérisée par \mathfrak{R}' fixé, passage indispensable car seule donnée autre que \mathfrak{R}_0 associée à $\Delta p_0, Q_0$; utilisons la rétroaction :

$$\Delta p'' = \mathfrak{R}' Q'' = \mathfrak{R}' (Q_0 - \alpha (\Delta p'' - \Delta p_0)); \Delta p'' = \frac{\mathfrak{R}' (Q_0 + \alpha \Delta p_0)}{(1 + \mathfrak{R}' \alpha)}.$$

$$\text{A.N. : } \Delta p'' = 12,1 \text{ kPa}.$$

$$Q'' = \frac{\Delta p''}{\mathfrak{R}'} = \frac{Q_0 + \alpha \Delta p_0}{1 + \mathfrak{R}' \alpha}; \text{ A.N. : } Q'' = 116 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}; \text{ on a } M'': 116 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}; 12,1 \text{ kPa}.$$



β. Vu le montage $Q''_i = \frac{\Delta p''}{\mathfrak{R}_i}$;

A.N. : $Q''_1 = 24,2 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; $Q''_2 = 19,3 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$; $Q''_3 = 72,5 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Les muscles sont mieux irrigués, les autres branches moins diminuées.

c. La rétroaction donne un débit proche de Q_0 et $\Delta p''$ proche de Δp_0 . Il y a régulation et adaptation.

E.1. $F = (p_A - p_B)S$

$p_A \quad \boxed{\hspace{2cm}} \quad p_B$

$\mathcal{P}_m = F \cdot V = (p_A - p_B) sV = \Delta p_0 Q_0$; A.N. : $\mathcal{P}_m = 1,125 \text{ W}$. Soit $\mathcal{P}_m = 1,1 \% \mathcal{P}_{\text{consommée}}$.

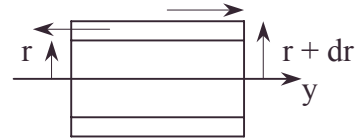
La puissance consommée sert au fonctionnement des organes et au maintien de la température du corps. Elle est assurée par l'apport énergétique issu de l'alimentation.

La puissance mécanique du cœur sert à vaincre la viscosité et assure le maintien de la circulation sanguine. Cette puissance mécanique est transformée en puissance calorifique (cf. température du corps).

2.a. $\mathcal{P}'_m = \Delta p Q = \Delta p^2 \frac{\pi a^2}{8\eta \ell}$.

b.α. Pour un manchon cylindrique :

$$df_y = \eta \left[2\pi r \ell \frac{dv}{dr} \right]_{r+dr} - \eta \left[2\pi r \ell \frac{dv}{dr} \right]_r = 2\pi \eta \ell d \left[r \frac{dv}{dr} \right].$$



or, $2\pi \eta \ell r \frac{dv}{dr} = -(p_A - p_B) \pi r^2 \Rightarrow df_y = -2(p_A - p_B) \pi r dr$.

β. $d\mathcal{P}'_m = df_y \cdot v = -\frac{2\pi r}{4\eta \ell} (p_A - p_B)^2 (a^2 - r^2) dr$.

En intégrant $\mathcal{P}'_m = -(p_A - p_B)^2 \frac{\pi a^2}{8\eta \ell} = -\mathcal{P}'_m$.

3. $\mathcal{P}'_m = \frac{\Delta p^2}{\mathfrak{R}}$ est l'analogue de $P = \frac{U^2}{R_{el}}$.

Les bilans énergétiques utilisent la notion de résistance de la même manière, sachant qu'il y a transposition des grandeurs intensives P et V vu l'analogie établie en B.

3.5.6. Géophysique de la lithosphère Equilibre de la plaque tectonique

Ce problème utilise le formalisme de la mécanique des fluides pour modéliser la dynamique de la partie la plus déformable du manteau terrestre que l'on appelle l'asthénosphère même si le manteau apparaît solide pour tous les phénomènes rapides comme la propagation des ondes sismiques.

Dans tout le problème, l'asthénosphère est assimilable à un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η et de densité ρ . La courbure de la terre est négligée et les écoulements sont confinés au plan xOz . L'axe Oz est dirigé vers le haut, le milieu est supposé infini dans la direction Oy . L'accélération de la gravité g est constante, parallèle et opposée à l'axe Oz .

A. Equilibre d'une plaque tectonique

On se place en régime permanent.

On considère une plaque tectonique aussi appelée plaque lithosphérique, de longueur L , d'épaisseur h_L qui se déplace suivant l'axe Ox , à une vitesse constante et uniforme V_0 . Les densités de la lithosphère et de l'asthénosphère sont ici supposées égales.

Cette plaque repose sur l'asthénosphère qui a une épaisseur h_A . On prendra l'origine des ordonnées sous la plaque, à la surface de l'asthénosphère.

On admettra que L est bien supérieur à h_L et h_A et que la vitesse dans l'asthénosphère $V_x(z)$ est parallèle à l'axe Ox .

Au bas de l'asthénosphère ($z = -h_A$) la vitesse est nulle. On note $p(x, z)$ la pression dans l'asthénosphère.

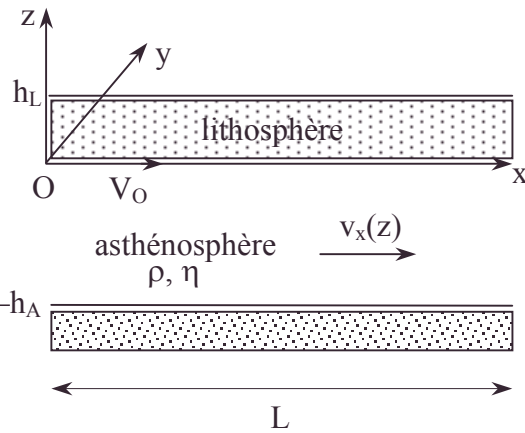


Figure 1

I.1. Faire un bilan des forces verticales et horizontales appliquées à une particule de fluide.

2. En admettant que le gradient horizontal de pression est nul, exprimer la pression en fonction de z . On négligera la pression à la surface de la plaque.

Calculer le profil de vitesse dans l'asthénosphère.

Quelle est la contrainte tangentielle visqueuse c'est-à-dire la densité surfacique de force τ qui s'exerce sous la plaque en mouvement ?

3. Exprimer en fonction de v_0 , h_L et h_A , le débit volumique D_V induit par le déplacement de la lithosphère et de l'asthénosphère par unité d'épaisseur suivant Oy .

II.1. Le déplacement global de matière en surface est maintenant compensé en profondeur par un flux de retour qui assure un débit volumique globalement nul.

Montrer que cela impose l'existence d'un gradient de pression horizontal constant $\frac{\partial P}{\partial x}$.

Calculer $\frac{\partial P}{\partial x}$ en fonction de h_L , h_A , v_0 et η ainsi que le profil de vitesse $v_x(z)$ résultant.

2. On pose $A = 6 \left(\frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2} \right)$.

A quelle profondeur la vitesse s'annule-t-elle dans l'asthénosphère ?

Quelle est la vitesse de retour maximale ?

Tracer $\frac{v_x(z)}{v_0}$ en fonction de $\frac{z}{h_A}$ en prenant $A = 4$.

3. Exprimer la contrainte tangentielle visqueuse qui s'exerce sous la plaque en mouvement en fonction de η , v_0 , h_L et h_A .

Comment se compare-t-elle à celle obtenue en **I.2.** ?

4. Montrer que l'existence d'un gradient de pression horizontal doit conduire à une inclinaison de la plaque (on admettra que l'inclinaison est suffisamment faible pour que la vitesse de l'écoulement dans l'asthénosphère reste horizontal).

Exprimer la différence de hauteur Δh entre les deux extrémités de la plaque.

5. La lithosphère est constituée du même matériau que l'asthénosphère et n'en diffère que par une température inférieure de ΔT . Les densités de la lithosphère et de l'asthénosphère jusqu'ici considérées comme égales sont légèrement différentes et seront notées ρ_L et ρ .

La plaque est entraînée dans son mouvement par le plongement dans l'asthénosphère de la lithosphère sous la forme d'une zone de subduction dont la largeur reste h_L et qui s'enfonce verticalement dans l'asthénosphère sur une profondeur H . La plaque en subduction garde sa température inférieure de ΔT à celle de l'asthénosphère environnante.

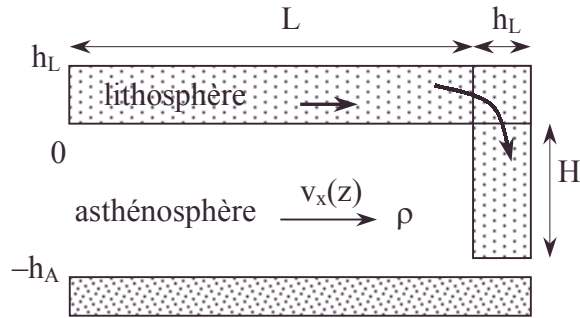


Figure 2

Le coefficient d'expansion thermique de la plaque est $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$.

Quel est le poids apparent ΔF de la zone en subduction par unité d'épaisseur suivant Oy ?

On effectuera l'application numérique avec les données suivantes :

$$\rho = 3200 \text{ kg.m}^{-3}, \quad g = 9,8 \text{ m.s}^{-2},$$

$$\alpha = 2.10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad h_L = 100 \text{ km}, \quad H = 300 \text{ km}, \quad \Delta T = 800 \text{ K}.$$

6. Nous admettons que les seules forces appliquées à la plaque en mouvement sont une traction horizontale et la friction visqueuse calculée en II.3., due à l'entraînement de l'asthénosphère. Nous admettons aussi que la force de traction est due à la zone de subduction et a pour module le poids apparent de cette zone.

Calculer la viscosité de l'asthénosphère en fonction de ΔF , h_L , L , $x = \frac{h_A}{h_L}$ et v_0 .

Tracer la courbe $\eta = f(x)$ avec $L = 6000 \text{ km}$ et $v_0 = 5 \text{ cm/an}$.

On fera varier h_A de 0 à l'épaisseur totale du manteau terrestre qui est de 3000 km.

7. Exprimer la différence de hauteur Δh entre les deux extrémités de la plaque en fonction de ΔF , ρ , g , h_L et x .

8. En fait, on n'observe pas dans le relief terrestre de signal topographique clairement associé au déplacement d'une plaque loin d'une dorsale. On s'imposera donc $\Delta h < 500 \text{ m}$.

Proposer des valeurs acceptables pour l'épaisseur de l'asthénosphère et sa viscosité.

9. Justifier le fait que l'écoulement dans l'asthénosphère soit qualifié d'écoulement rampant.

ENS ; Option BCPST ; Durée : 2h

Corrigé

I.1.a. Le poids $\vec{\rho g} dx dy dz$.

$$\text{b. La résultante des forces de pression : } -\vec{\text{grad}} p d\tau = \begin{vmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \\ 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \end{vmatrix}$$

c. La résultante des forces de viscosité (d'après Navier-Stokes) :

$$\eta \Delta \vec{V} \, d\tau \left| \begin{array}{l} \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dx dy dz \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Le bilan horizontal des forces est : $\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dx dy dz$.

Le bilan vertical des forces est : $\left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \right) dx dy dz$.

$$2. \frac{\partial P}{\partial x} = 0 ; \frac{D\vec{V}_x}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_x}{\partial t} + (\vec{V}_x \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_x = \vec{0} + \left| \begin{array}{l} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = \vec{0}$$

a. Les équations d'Euler s'écrivent : $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F}_V$.

$$\left| \begin{array}{l} 0 = 0 + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \Rightarrow v_x(z) = V_0 \left(\frac{z}{h_A} + 1 \right) \text{ pour satisfaire aux conditions en } z=0 \text{ et } z=-h_A \\ 0 = 0 \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \Rightarrow p(z) = -\rho g z + \rho g h_L \end{array} \right.$$

p_0 permet de soutenir la lithosphère.

b. L'approximation linéaire donne : $\frac{df_x}{ds} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = \eta \frac{V_0}{h_A}$ est la force surfacique due

à la viscosité dans l'asthénosphère ; la lithosphère entraîne l'asthénosphère par son mouvement.

La lithosphère solide subit une force surfacique de freinage opposée : $\tau_x = -\eta \frac{V_0}{h_A}$.

$$3. D_{V_{\text{asthénosphère}}} = \iint v_x dy dz = 1. \int_{-h_A}^0 V_0 \left(\frac{z}{h_A} + 1 \right) dz = \frac{V_0 h_A}{2} .$$

$$D_{V_{\text{lithosphère}}} = \iint V_0 dy dz = 1. V_0 \int_0^{h_L} dz = V_0 h_L .$$

soit un débit total, fluide et solide associés : $D_V = V_0 \left(h_L + \frac{h_A}{2} \right)$.

II.1. Il faut revenir sur l'hypothèse la plus simple de **I.2.** $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ qui n'a pas permis de trouver des lieux où $v_x < 0$.

Les équations d'Euler s'écrivent :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} ; 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \Rightarrow P(x, z) = -\rho g z + f(x) .$$

Reportons dans la première équation : $\frac{df}{dx} = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = K = \text{cste}$ car les 2 membres sont de variables différentes.

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = K \Rightarrow v_x(z) = \frac{K z^2}{2\eta} + A_1 z + B_1 \text{ qui satisfait aux conditions limites ;}$$

$$\alpha. v_x = V_0 \text{ en } z = 0 \Rightarrow B_1 = V_0.$$

$$\beta. v_x = 0 \text{ en } z = -h_A \quad 0 = \frac{K h_A^2}{2\eta} - A_1 h_A + V_0.$$

γ . On veut assurer :

$$0 = D_v = \int_0^{h_L} V_0 dz + \int_{-h_A}^0 v_x(z) dz = V_0 h_L + \left[\frac{K z^3}{6\eta} + \frac{1}{2} A_1 z^2 + V_0 z \right]_{-h_A}^0.$$

$$0 = \frac{K h_A^3}{6\eta} - \frac{A_1 h_A^2}{2} + V_0 (h_L + h_A).$$

On résout les 2 équations linéaires en A et K satisfaisant à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{K h_A^2}{2\eta} - A_1 h_A &= -V_0 \\ \frac{K h_A^3}{6\eta} - \frac{A_1 h_A^2}{2} &= -V_0 (h_L + h_A) \end{aligned} \right\} \quad K = \frac{\begin{vmatrix} -V_0 & -h_A \\ -V_0 (h_L + h_A) & -\frac{h_A^2}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{h_A^2}{2\eta} & -h_A \\ \frac{h_A^3}{6\eta} & -\frac{h_A^2}{2} \end{vmatrix}} = \frac{12\eta V_0}{h_A^3} \left(h_L + \frac{h_A}{2} \right)$$

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{h_A^2}{2\eta} & -V_0 \\ \frac{h_A^3}{6\eta} & -V_0 (h_L + h_A) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{h_A^2}{2\eta} & -h_A \\ \frac{h_A^3}{6\eta} & -\frac{h_A^2}{2} \end{vmatrix}} = \frac{2V_0}{h_A} \left(2 + \frac{3h_L}{h_A} \right).$$

$$\text{Ainsi } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{df}{dx} = \frac{12\eta V_0}{h_A^3} \left(h_L + \frac{h_A}{2} \right) = \frac{2\eta V_0 A}{h_A^2}$$

$$\text{et } v_x(z) = \frac{6V_0}{h_A^3} \left(h_L + \frac{h_A}{2} \right) z^2 + \frac{2V_0}{h_A} \left(2 + \frac{3h_L}{h_A} \right) z + V_0 = V_0 \left(A \left(\frac{z}{h_A} \right)^2 + (A+1) \frac{z}{h_A} + 1 \right).$$

Le profil de vitesse est parabolique.

$$2.a. v_x(z_1) = 0 = V_0 \left(A \left(\frac{z_1}{h_A} \right)^2 + (A+1) \frac{z_1}{h_A} + 1 \right).$$

$$\frac{z_1}{h_A} = \frac{-(A+1) \pm \sqrt{(A+1)^2 - 4A}}{2A} = \frac{-(A+1) \pm (A-1)}{2A}.$$

$$z_{11} = -h_A \text{ et } z_{12} = -\frac{h_A}{A} : \text{ la nouvelle valeur intéressante.}$$

• Cramer (système de), maximum

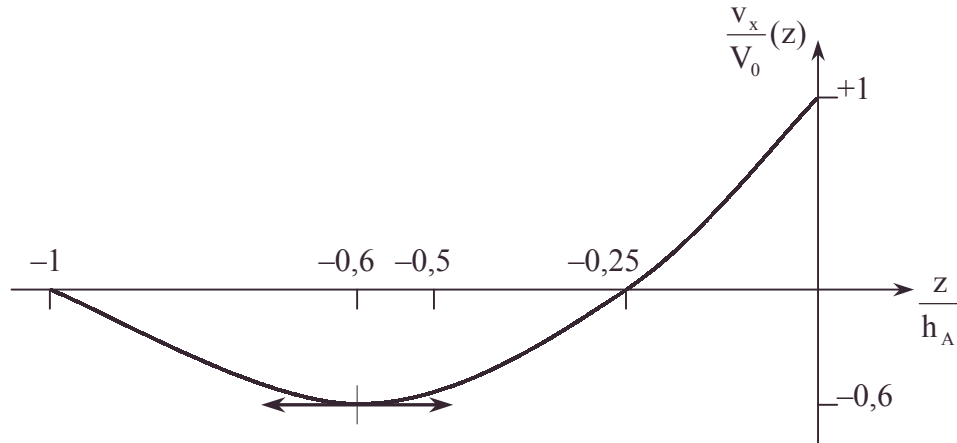
Le courant de retour se situe entre $-h_A < z < -\frac{h_A}{A}$.

$$\text{b. } \frac{dv_x}{d\left(\frac{z}{h_A}\right)} = 2V_0A\left(\frac{z}{h_A}\right) + (A+1)V_0 = 0 \text{ pour } \frac{z_2}{h_A} = -\frac{A+1}{2A}.$$

nous avons un maximum pour la vitesse du courant de retour.

$$v_x(z_2) = \frac{-V_0}{4A}(A-1)^2; \text{ A.N. : si } A=4, z_2 = -\frac{5}{8}h_A; v_x(z_2) = -\frac{9}{16}V$$

c.



$$3. \frac{df_x}{dS} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = \eta V_0 \left[\frac{2Az}{h_A^2} + \frac{(A+1)}{h_A} \right].$$

En $z=0$, $\tau_x = -\frac{\eta V_0}{h_A}(A+1) = -\frac{2\eta V_0}{h_A} \left(3\frac{h_L}{h_A} + 2 \right)$, il s'agit toujours d'un freinage de la lithosphère. La valeur est 5 fois plus importante qu'en **I.2.** pour $A=4$.

$$4. \text{ L'intégration de } \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{2A\eta V_0}{h_A^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \text{ s'écrit :}$$

$$P(x, z) = -\rho g z + \frac{2\eta A V_0 x}{h_A^2} + P(0, 0).$$

Qualitativement, l'augmentation de P avec x entraîne un soulèvement de la plaque du côté de $x=L$ d'où une inclinaison liée au terme correctif introduit $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2\eta A V_0}{h_A^2}$.

Ecrivons l'équilibre d'une tranche dx de lithosphère (de longueur unité en y).

$-\rho h_L g dx + P dx = 0$ selon l'axe des z (en considérant l'angle d'inclinaison comme petit).

$$\text{Détaillons : a. } \left. \begin{array}{l} \text{en } x=0 \\ z=0 \end{array} \right\} -\rho h_L g + P(0, 0) = 0. \quad (1)$$

$$\text{b. en } \left. \begin{array}{l} x=L \\ z=\Delta h \end{array} \right\} -\rho h_L g + P(0, 0) - \rho g \Delta h + 2\eta A V_0 \frac{L}{h_A^2} \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \Delta h = \frac{2\eta A V_0 L}{\rho g h_A^2} = \frac{12\eta V_0 L}{\rho g h_A^2} \left(\frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2} \right).$$

5. Le poids apparent est le poids diminué de la poussée d'Archimède (pour l'unité de longueur selon Oy).

• développement au premier ordre ou plus, équilibre, fil, force surfacique, freinage, graphe, poussée d'Archimède

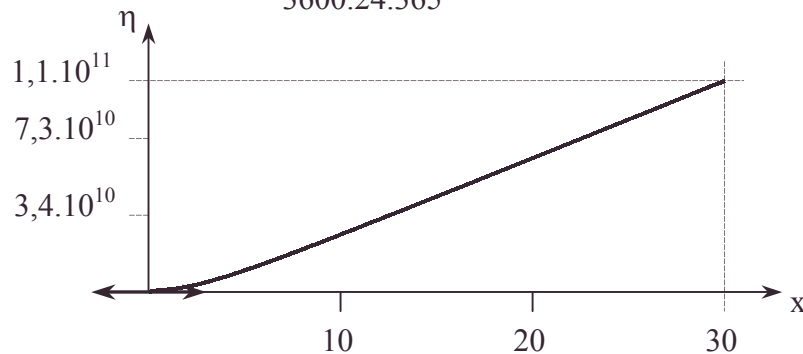
$$\Delta F = \rho_L g h_L H - \rho g h_L H \text{ avec } \rho_L = \rho(1 - \alpha \Delta T) \text{ avec } \Delta T > 0.$$

$$\Delta F = -\alpha \rho g h_L H \Delta T \text{ (dirigé vers le bas comme } g \text{)} ; \text{ A.N. : } \Delta F = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ N.m}^{-1}.$$

6. Le poids apparent joue le rôle d'une tension pour un fil immobile;
Le PDF (du quasi équilibre) s'écrit (pour une largeur unité selon Oy) :

$$\tau_x L + \Delta F = 0 ; \Delta F = \frac{2\eta V_0}{h_L x} \left(\frac{3}{x} + 2 \right).$$

$$\eta = \frac{h_L x^2 \Delta F}{2V_0 L(2x+3)} ; \text{ A.N. : } \eta = \frac{10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^{13} x^2}{\frac{2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^6}{3600 \cdot 24 \cdot 365} (2x+3)} = 7,88 \cdot 10^{19} \frac{x^2}{2x+3}.$$



- η minimum en $x = 0$
- dès que $3 \ll 2x$ par exemple pour $x = 15$: $\eta \approx 3,94 \cdot 10^{19} x$.

$$7. \Delta h = 2 \cdot \frac{h_L \Delta F x^2}{2V_0 L(2x+3)} \cdot 6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{V_0 L}{\rho g h_L^2 x^2} = \frac{3}{h_L x} \frac{\Delta F (x+2)}{(2x+3) \rho g}.$$

$$8. \Delta h = 1,435 \cdot 10^4 \frac{x+2}{x(2x+3)} \text{ (en m)}.$$

A.N. : pour $\Delta h = 500 \text{ m}$, on trouve $x = 15 \Rightarrow h_A = 1500 \text{ km}$. $\eta = 5,4 \cdot 10^{20} \text{ Pl}$.

$$9. \text{ Le nombre de Reynolds : } R = \frac{\rho V h_A}{\eta} = \frac{3200 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 1500 \cdot 10^3}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 5,4 \cdot 10^{20}}.$$

A.N. : $R = 1,4 \cdot 10^{-20}$; ce régime lent à forte viscosité est bien un écoulement rampant.

3.5.7. Rebond postglaciaire quaternaire Géophysique du néolithique

Ce problème utilise le formalisme de la mécanique des fluides pour modéliser la dynamique de la partie la plus déformable du manteau terrestre que l'on appelle l'asthénosphère même si le manteau apparaît solide pour tous les phénomènes rapides comme la propagation des ondes sismiques. Le début (question I.) permet de démontrer quelques résultats littéraires nécessaires aux questions suivantes. Ces questions ne sont pas difficiles et leurs réponses n'auront pas de poids important dans la notation. Les étudiants pourront donc admettre les résultats des questions I. plutôt que de leur consacrer trop de temps.

Dans tout le problème, l'asthénosphère est assimilable à un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η et de viscosité ρ . La courbure de la terre est négligée et les écoulements sont confinés au plan xOz . L'axe Oz est dirigé vers le haut, le milieu est supposé infini dans la direction Oy . L'accélération de la gravité g est constante, parallèle et opposée à l'axe Oz .

- asthénosphère, écoulement bi-dimensionnel, écoulement rampant, force surfacique, géophysique, graphe, minimum, néolithique, nombre de Reynolds, poiseuille, viscosité

On considère un écoulement bi-dimensionnel d'un fluide newtonien incompressible qui peut dépendre du temps t et où le champ de vitesse est donné par $\vec{v} = (v_x(x, z, t), v_z(x, z, t))$. La figure 3 montre les contraintes visqueuses tangentielles et normales qui s'appliquent sur une particule de fluide macroscopiquement petite.

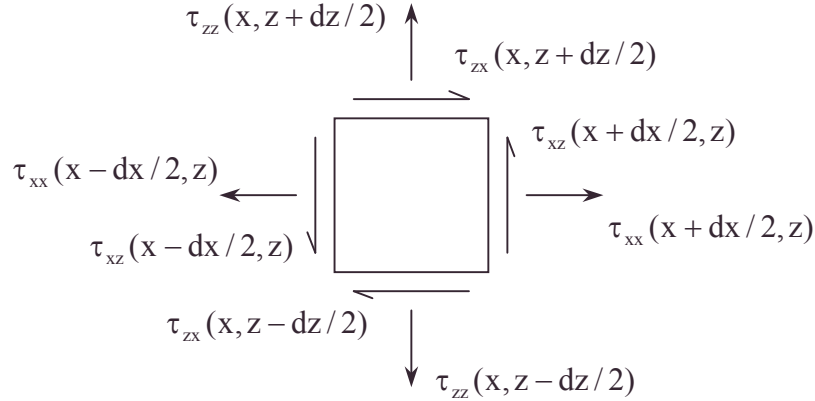


Figure 1

Par exemple, sur la face verticale située à $x + dx/2$ s'exercent des contraintes tangentielles visqueuses suivant Oz , $\tau_{xz}(x + dx/2, z)$ et une contrainte normale visqueuse suivant Ox , $\tau_{xx}(x + dx/2, z)$. Par convention, on considérera que les contraintes sont positives dans les directions indiquées par les flèches de la figure 3.

I.1. Montrer que l'équilibre en rotation de la particule de fluide soumise aux moments des forces visqueuses tangentielles implique : $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

2. Montrer que les forces de viscosité par unité de volume ont pour composantes f_x et f_z telles que : $f_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$; $f_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$.

3. Exprimer les débits massiques qui traversent les quatre faces de la surface de contrôle correspondant à la particule dessinée sur la figure 1.

En déduire qu'un fluide incompressible bi-dimensionnel vérifie : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$.

4. Le fluide considéré est newtonien de viscosité η . Dans le cas d'un écoulement bi-dimensionnel les contraintes visqueuses sont données par :

$$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \tau_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Exprimer pour ce fluide incompressible les deux équations différentielles qui relient f_x à v_x , et f_z à v_z .

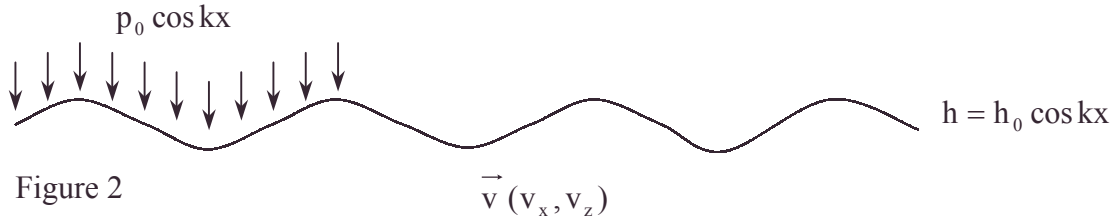
5. Montrer que l'équation du mouvement à deux dimensions d'un fluide newtonien incompressible de densité ρ et de pression p s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) v_x \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) v_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \rho g.$$

On modélise le manteau terrestre par un demi-espace visqueux newtonien incompressible qui vérifie donc les équations **I.3.** et **I.5.** On néglige l'existence de la lithosphère flottant au-dessus et on admet que l'asthénosphère s'étend jusqu'à une profondeur infinie. On applique sur cette surface une pression variant sinusoïdalement,

$p_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Sous cette pression, la surface se déforme et présente une topographie $h = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. On notera $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et on admet que cette topographie reste faible c'est-à-dire que $kh_0 \ll 1$. Les quantités p_0 et h_0 sont indépendantes de x et z mais pourront dépendre du temps t .



II.1. Compte tenu d'une viscosité de l'ordre de 10^{20} Pl, expliquer pourquoi on négligera les termes d'accélération locale et convective, même en régime dépendant du temps.

2. On cherche une solution de l'écoulement induit par une pression sinusoïdale en surface sous la forme :

$$v_x(x, z) = U(z) \sin kx,$$

$$v_z(x, z) = V(z) \cos kx,$$

$$p(x, z) = -\rho g z + P(z) \cos kx.$$

Ecrire le système des trois équations différentielles vérifiées par $U(z)$, $V(z)$ et $P(z)$.

3. Montrer que $V(z)$ vérifie une équation différentielle du quatrième ordre dont les solutions sont e^{+kz} , e^{-kz} , ze^{-kz} et ze^{+kz} .

4. Montrer que l'on doit choisir $v_z(x, z)$ sous la forme :

$v_z(x, z) = (A + Bkz)e^{kz} \cos kx$, où A et B sont indépendants de x et z . Donner les expressions de $v_x(x, z)$, $p(x, z)$ et $\tau_{zz}(x, z)$ en fonction des paramètres A et B .

5. Les conditions aux limites sur la surface déformée sont telles que la vitesse horizontale est nulle sur la surface déformée et que la force surfacique verticale est égale à la pression appliquée, c'est-à-dire que :

$$v_x(x, h_0 \cos kx) = 0, \quad p(x, h_0 \cos kx) - \tau_{zz}(x, h_0 \cos kx) = p_0 \cos kx.$$

En se plaçant toujours dans le cas $kh_0 \ll 1$, exprimer les constantes A et B en fonction de ρ , g , h_0 , p_0 , η et k .

6. Tracer schématiquement l'allure des lignes de courant dans l'asthénosphère jusqu'à la profondeur $1/k$.

7. En identifiant la vitesse verticale en surface à dh/dt , montrer que l'amplitude de la topographie vérifie : $\alpha \frac{dh_0}{dt} + h_0 = -\beta p_0$, où $\alpha = \frac{2\eta k}{\rho g}$ et $\beta = \frac{1}{\rho g}$.

Quelle est la dimension et la signification physique de α ? Qu'exprime l'équation précédente en régime permanent ?

III. Au temps t_0 , il y a 100000 ans, commença la dernière glaciation. A cette époque un refroidissement du climat conduisit à la formation de vastes calottes de glace sur l'Amérique du Nord et la Scandinavie. On admettra que la quantité de glace des calottes a cru linéairement jusqu'à $t_M = -10000$ ans pour atteindre une épaisseur H_M .

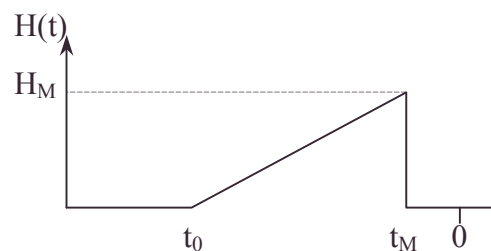


Figure 3

- condition limite, développement au premier ordre ou plus, dimension, force surfacique, ordre de grandeur, séparation des variables, unité, viscosité

Un brusque réchauffement climatique fit alors fondre très rapidement les calottes glaciaires. On est actuellement au temps 0, c'est-à-dire 10000 ans après la fonte des calottes. On supposera que le modèle plan et bi-dimensionnel précédemment développé s'applique.

On admettra que la hauteur de glace $h_g(x, t)$ a vérifié $h_g(x, t) = H(t)(1 + \cos kx)$, où $H(t)$ est donné par le graphe de la figure 3.

1. Dessiner l'allure d'une calotte glaciaire suggérée par l'énoncé du problème.

2. Appliquer une pression $p_0(t)$ uniforme à la surface de l'asthénosphère la déforme-t-elle ? Au temps $t = t_0$, la surface de la terre était sans déformation. La densité de la glace étant $\rho_g = 1000 \text{ kg/m}^3$, calculer l'enfoncement du niveau du sol h_M sous le poids de la glace à $t = t_M$ en fonction de $\rho_g, \rho, H_M, t_M, t_0$ et α .

3. Calculer la vitesse maximale du soulèvement actuel et la profondeur actuelle des régions qui furent couvertes de glace en fonction de h_M, α et t_M .

4. L'étude géologique des paléo-rivages de la mer Baltique permet de mesurer la valeur du paramètre α avec une bonne précision. On observe que $\alpha = 4500$ ans. En admettant que la calotte Scandinave avait une période spatiale caractéristique $\lambda = 3000 \text{ km}$, quelle est la viscosité du manteau terrestre ?

5. La calotte Scandinave avait une épaisseur maximale de 3 km. Quelle est la vitesse actuelle maximum de surrection de la Scandinavie ?

6. Quelle est l'amplitude actuelle de la dépression qui demeure au dessous des zones précédemment glacées de Scandinavie ? La baie d'Hudson et la mer Baltique correspondent à des dépressions postglaciaires. La mer Baltique est couverte de 80 m d'eau. Le modèle que vous avez développé permet-il de prédire son avenir ?

ENS ; Option BCPST ; Durée : 3h

Corrigé

I.1. L'équilibre suppose le moment des forces nul pour la rotation autour de \vec{M}_y .

$$-\tau_{zx}\left(x, z + \frac{dz}{2}\right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zx}\left(x, z - \frac{dz}{2}\right) dx dy \frac{dz}{2} \\ + \tau_{xz}\left(x + \frac{dx}{2}, z\right) dz dy \frac{dx}{2} + \tau_{xz}\left(x - \frac{dx}{2}, z\right) dz dy \frac{dx}{2} = 0.$$

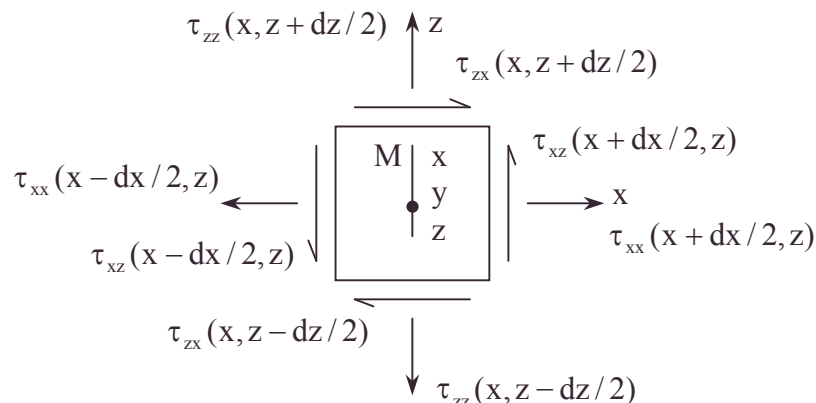


Figure 1

Faisons le développement limité de chaque terme par rapport à x, z .

- développement au premier ordre ou plus, écoulement bi-dimensionnel, équilibre, graphe, maximum, théorème du moment cinétique, viscosité

$$0 = - \left(\tau_{zx} \left(x, z \right) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) - \left[\tau_{zx} \left(x, z \right) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \left(- \frac{dz}{2} \right) \right] + \tau_{xz} \left(x, z \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \tau_{xz} \left(x, z \right) \dots$$

$$\dots + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \left(- \frac{dx}{2} \right) \Rightarrow -2\tau_{zx} \left(x, z \right) + 2\tau_{xz} \left(x, z \right) = 0$$

2.a. Projetons les différentes forces sur M_x et faisons le même développement limite :

$$F_x = \left(\tau_{xx} \left(x + \frac{dx}{2}, z \right) - \tau_{xx} \left(x - \frac{dx}{2}, z \right) \right) dydz + \left(\tau_{zx} \left(x, z + \frac{dz}{2} \right) - \tau_{zx} \left(x, z - \frac{dz}{2} \right) \right) dxdy =$$

$$\left[\tau_{xx} \left(x, z \right) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} - \tau_{xx} \left(x, z \right) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz +$$

$$\left(\tau_{zx} \left(x, z \right) + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} - \tau_{zx} \left(x, z \right) \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dxdydz = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dxdydz.$$

On peut donc considérer la force volumique selon M_x : $f_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$.

b. De même selon l'axe M_z : $f_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$.

3.a. Bilan de débit selon \vec{M}_x

$$\rho v_x \left(x + \frac{dx}{2}, z \right) dydz - \rho v_x \left(x - \frac{dx}{2}, z \right) dydz = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dxdydz.$$

b. Bilan de débit selon \vec{M}_z

$$\rho v_z \left(x, z + \frac{dz}{2} \right) dxdy - \rho v_z \left(x, z - \frac{dz}{2} \right) dxdy = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dxdydz.$$

c. Bilan global : $\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dxdydz$.

d. La non compressibilité implique l'égalité de la quantité de matière entrante et sortante soit un bilan nul pour le volume $dxdydz$. On en déduit $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, soit

encore $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, relation habituelle des fluides incompressibles.

4. Remplaçons :

$$\mathbf{a.} \quad f_x = 2\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \right) = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial v_x}{\partial z^2} \right) + \eta \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_0.$$

$$f_x = \eta \Delta v_x.$$

b. De même, $f_z = \eta \Delta v_z$.

5. Les équations d'Euler deviennent les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g} + \vec{f}_v^{\text{viscosité}};$$

$$\text{or } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}, \text{ d'où en projections selon } Ox \text{ et } Oz,$$

• conservation de la masse, convection, développement au premier ordre ou plus, équations d'Euler, force volumique, incompressibilité, projections, viscosité

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

II.1.a. L'amortissement dû à la viscosité est très important, le régime transitoire dure très peu et le régime permanent est rapidement installé : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \rightarrow \vec{0}$: l'accélération locale tend vers zéro.

b. Terme $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$: accélération convective, dans une convection très lente (\vec{v} infiniment petit) est un terme d'ordre 2 négligeable devant les termes en η .

2.a. $\text{div } \vec{v} = 0$ s'écrit $k U(z) \cos kx + \frac{dV}{dz} \cos kx = 0$. On a $\frac{dV}{dz} + kU = 0$ ①.

b. I.5. \Rightarrow selon Ox : $0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$ donne :

$$kP \sin kx + \eta \left(-k^2 U \sin kx + \frac{d^2 U}{dz^2} \sin kx \right) = 0. \text{ On a : } \frac{d^2 U}{dz^2} - k^2 U = -\frac{k}{\eta} P \quad ②.$$

c. De même selon Oz : $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \rho g$.

$$-\frac{dP}{dz} \cos kx + \eta \left(-k^2 V \cos kx + \frac{d^2 V}{dz^2} \cos kx \right) = 0; \text{ on a : } \frac{d^2 V}{dz^2} - k^2 V = \frac{1}{\eta} \frac{dP}{dz} \quad ③.$$

3.a. ① $\Rightarrow U = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dz}$.

② s'écrit : $\frac{1}{k^2} \left(\frac{d^3 V}{dz^3} - k^2 \frac{dV}{dz} \right) = \frac{P}{\eta}$ que l'on reporte dans ③ ;

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - k^2 V = \frac{1}{k^2} \left(\frac{d^4 V}{dz^4} - k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} \right) \Rightarrow \frac{d^4 V}{dz^4} - 2k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} + k^4 V = 0.$$

b. On vérifie les solutions proposées :

α. $e^{kz} : e^{kz} (k^4 - 2k^4 + k^4) = 0$ de même e^{-kz} .

β. $ze^{kz} : e^{kz} [4k^3 + k^4 z - 2k^2 (2k + k^2 z) + k^4 z] = 0$; de même ze^{-kz} .

Variante : on peut trouver l'équation caractéristique, en cherchant la solution sous la forme $e^{rz} : r^4 - 2k^2 r^2 + k^4 = 0$.

$$r^2 = k^2 \pm \sqrt{k^4 - k^4} = k^2 \Rightarrow r = \pm k \text{ d'où 2 solutions "indépendantes" :}$$

$e^{\pm kz} \cdot \sqrt{k^4 - k^4} = 0$ nous place dans le régime critique et nous conduit comme pour l'équation $\frac{d^2 V}{dt^2} + 2\lambda \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0$ à la solution en $te^{\lambda t}$ et donc ici en 2 solutions indépendantes en $ze^{\pm kz}$.

4.a. Prenons la solution générale comme combinaison linéaire des solutions indépendantes précédentes, en adaptant la notation au résultat proposé.

$$V = (A + Bkz)e^{kz} + (C + Dkz)e^{-kz}.$$

• condition limite

On ne peut avoir de grande vitesse dans ce milieu ce qui serait le cas pour $z \rightarrow -\infty$ à moins que $C = D = 0$, qui s'impose donc comme nécessité physique.

On en déduit $v_z = (A + Bkz)e^{kz} \cos kx$.

$$\text{b. } \textcircled{1} \Rightarrow U = -\frac{1}{k} \frac{dV}{dz} = -[(A + B) + Bkz]e^{kz} \Rightarrow v_x = -((A + B) + Bkz)e^{kz} \sin kx.$$

$$\text{c. } \textcircled{2} \Rightarrow P = \frac{\eta}{k^2} \left(\frac{d^3 V}{dz^3} - k^2 \frac{dV}{dz} \right) = 2k\eta B e^{kz} \Rightarrow p = -\rho g z + 2k\eta e^{kz} \cos kx.$$

$$\text{d. L'énoncé donne : } \tau_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2k\eta [(A + B) + Bkz]e^{kz} \cos kx.$$

5.a. $z = h_0 \cos kx$ sur la surface déformée : on a :

$$0 = v_x = -[(A + B) + Bkh_0 \cos kx]e^{kh_0 \cos kx} \sin kx, \forall x.$$

Or $kh_0 \ll 1$; il faut avoir $A + B = 0$.

$$\text{b. } \downarrow p_0 \cos kx \\ \downarrow \tau_{zz} \uparrow p(x, z)$$

Ecrivons l'équilibre : $p_0 \cos kx = p(x, z) - \tau_{zz}$; en $z = h_0 \cos kx$:

$$p_0 \cos kx = -\rho g h_0 \cos kx + 2k\eta B e^{kh_0 \cos kx} \cos kx - 2k\eta \left[\underbrace{(A + B)}_0 + Bkh_0 \cos kx \right] e^{kh_0 \cos kx} \cos kx$$

$kh_0 \ll 1$ permet de simplifier, on a en particulier $e^{kh_0 \cos kx} = 1$.

$$p_0 = -\rho g h_0 + 2k\eta B \Rightarrow B = \frac{p_0 + \rho g h_0}{2k\eta} = -A.$$

6.

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = -\frac{p_0 + \rho g h_0}{2k\eta} k z e^{kz} \sin kx \\ v_y = 0 \\ v_z = -\frac{p_0 + \rho g h_0}{2k\eta} (1 - kz) e^{kz} \cos kx \end{array} \right.$$

Le mouvement d'une particule fluide a lieu dans un plan $y = \text{cte}$.

La ligne de courant est définie telle que $d\vec{OM} // \vec{v}$.

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z} \text{ soit } \frac{dx}{kz \sin kx} = \frac{dz}{(1 - kz) \cos kx}.$$

$$\frac{\cos kx}{\sin kx} dx = \frac{kz}{1 - kz} dz = \frac{kz - 1 + 1}{1 - kz} dz = -dz + \frac{dz}{1 - kz}.$$

$$\ln |\sin kx| = kz - \ln |1 - kz| + \text{cte}.$$

$$\ln (\sin kx (1 - kz) e^{kz}) = \text{cte} \Rightarrow |\sin kx| = \frac{K}{(1 - kz) e^{kz}}, \quad K \text{ étant une constante positive}$$

(différente de k) caractérisant la ligne de courant.

$$x = \frac{1}{k} \arcsin \frac{K}{(1 - kz) e^{kz}}.$$

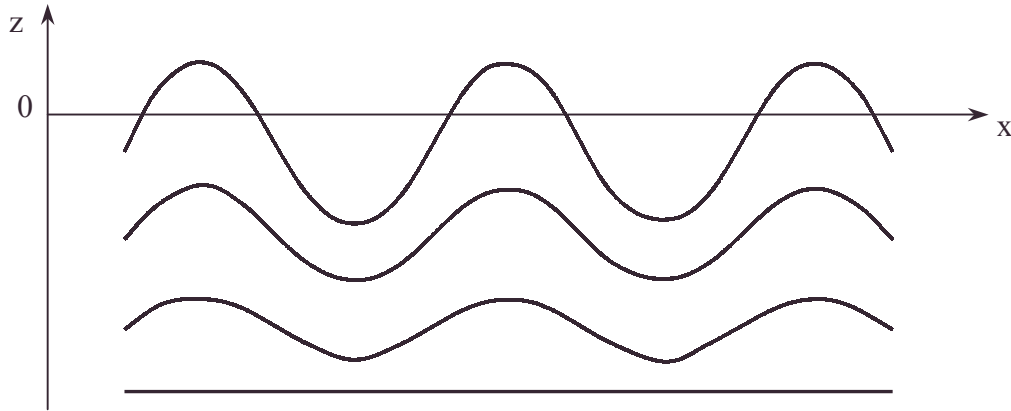
On prend la courbe symétrique par rapport à la 1^{ère} bissectrice pour obtenir $z = z(x)$.

• développement au premier ordre ou plus, équilibre, particule fluide

La constante spatiale d'amortissement de e^{kz} est $\frac{1}{k}$.

La variation en z est notable tant que $z < -\frac{1}{R}$, ce qui est le cadre de l'énoncé ; au delà, l'effet est très amoindri.

Allure des lignes de courant :



7.a. En $z = h_0 \cos kx$, écrivons : $\frac{dh}{dt} = v_z(x, h_0 \cos kx)$ avec $h = h_0(t) \cos kx$ pour introduire le temps, selon le modèle suggéré par l'énoncé.

$$\frac{dh_0}{dt} \cos kx = -\frac{(p_0 + \rho g h_0)}{2k\eta} (1 - kh_0 \cos kx) e^{kh_0 \cos kx} \cos kx.$$

Vu la simplification de l'énoncé $kh_0 \ll 1$, il reste :

$$\frac{dh_0}{dt} = -\frac{(p_0 + \rho g h_0)}{2k\eta} \Rightarrow \frac{2k\eta}{\rho g} \frac{dh_0}{dt} + h_0 = -\frac{p_0}{\rho g} \Rightarrow \alpha = \frac{2k\eta}{\rho g} \text{ et } \beta = \frac{1}{\rho g}$$

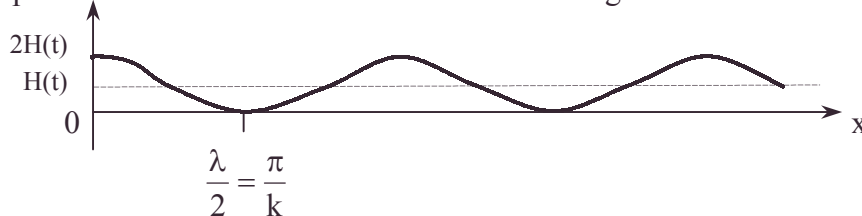
b. $\alpha = \tau$, constante de temps d'un système d'ordre 1 s'exprime en seconde.

c. En régime permanent amorti, si $\frac{dh_0}{dt} = 0$ et donc aussi $\frac{dp_0}{dt} = 0$; $h_0 = -\frac{p_0}{\rho g}$.

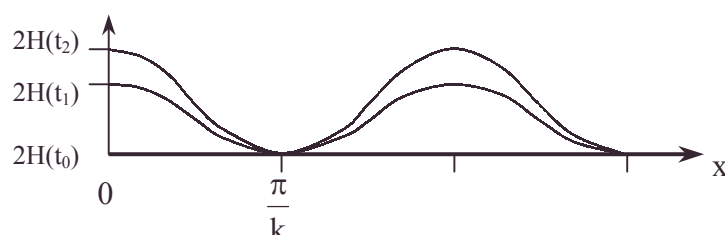
Pression et déformation sont de signes opposés ; on peut parler de déphasage spatial de π . Autrement dit, un maximum de pression donne un creux.

III.1. A un décalage d'origine des cotes en $H(t)$ près vers le bas, on retrouve la forme de l'énoncé en **II.** : $h = h_0 \cos kx$ avec $h_0(t) = H(t)$.

On fixe t pour donner l'allure de la surface de la calotte glaciaire en fonction de x .



A 2 époques différentes, $t_M > t_2 > t_1 > t_0$.



• développement au premier ordre ou plus, graphe, maximum

avec des écarts d'altitude en x donné proportionnels à la durée comptée à partir de t_0 cf. figure 3.

2.a. Une pression uniforme ne crée pas de déformation de la surface. En estimant la déformation et la variation de p comme dues à la hauteur de glace,

$$p_0(t) = \rho_g g H_g(t) = \rho_g g \frac{H_M(t-t_0)}{t_M-t_0}, \quad \frac{2k\eta}{\rho g} \frac{dh_0}{dt} + h_0 = -\frac{\rho_g g H_M(t-t_0)}{\rho g(t_M-t_0)}.$$

- L'équation sans second membre admet une solution de la forme $e^{-\frac{t-t_0}{\alpha}}$.
- La solution particulière de l'équation avec second membre est de la forme $At + B$.

On vérifie la solution $h_0(t) = \frac{\rho_g}{\rho} \frac{H_M}{t_M-t_0} \left(t_0 e^{-\frac{(t-t_0)\rho g}{2k\eta}} - t \right)$; c'est le maximum visible

pour $\cos kx = 1$.

En particulier $t = t_0, h_0(t) = 0$.

On voit la déformation du sol, conséquence de l'augmentation de la calotte glaciaire.

$$\text{b. } h_M = h_0(t_M) = \frac{\rho_g}{\rho} \frac{H_M}{t_M-t_0} \left(t_0 e^{-\frac{(t_M-t_0)\rho g}{2k\eta}} - t_M \right).$$

3. $\alpha \frac{dh_0}{dt} + h_0 = 0$ avec $h_0 = h_M$ à $t = t_M$ donne comme solution pour $t > t_M$:

$$h_0(t) = h_M e^{-\frac{(t-t_M)\rho g}{2k\eta}} \Rightarrow v_z = \frac{dh_0}{dt} = -\frac{\rho_g}{2k\eta} h_M e^{-\frac{(t-t_M)\rho g}{2k\eta}}. \text{ Le maximum de réaction à la}$$

discontinuité climatique a été à $t = t_M + 0$ (pour $\cos kx = 1$).

La profondeur actuelle (à $t = 0$) est $h_M e^{\frac{t_M}{\alpha}}$ avec t_M négatif.

$$\text{4. } \alpha = \frac{2\eta k}{\rho g} = 4500 \text{ ans ; } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ avec } \lambda = 3000 \text{ km.}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\alpha \rho g \lambda}{4\pi} ; \text{ A.N. : } \eta = 10^{21} \text{ Pl.}$$

$$\text{5. } \left(\frac{dh_0}{dt} \right)_0 = \frac{h_M}{\alpha} e^{\frac{t_M}{\alpha}} ; \text{ A.N. : } \frac{dh_0}{dt} = 2,5 \text{ mm.an}^{-1}.$$

$$\text{6.a. } h_0(0) = h_M e^{\frac{t_M}{\alpha}} ; \text{ A.N. : } h_0(0) = 11,3 \text{ m.}$$

b. Si $h_0(0) = 80 \text{ m}$ pour la mer Baltique, la zone à 11,3 m disparaîtra avant le relèvement du fond de la mer Baltique, qui risque donc de devenir une mer intérieure (on associe ici le Danemark à la Scandinavie).

3.5.8. Flexion et torsion d'une aile d'avion

Voir page 285.

3.5.9. Navigation contre le vent

Voir page 407.

3.6. Mécanique des milieux continus

MMC

3.6.1. Acoustique des milieux continus

Voir page 1286.

3.6.2. Barrage parallélépipédique

Voir page 327.

3.6.3. Barrages prismatique et voûte

Voir page 331.

3.6.4. Lithosphère

Voir page 492.

3.6.5. Rebond post glaciaire

Voir page 498.

3.6.6. Flexion et torsion couplée d'une aile d'avion

Voir page 285.

3.6.7. Ondes de torsion

Voir page 1308.

3.6.8. Antenne de poursuite de missile

Voir page 315.

3.6.9. Bulle, tension superficielle, cavitation

Voir page 551.

3.6.10. Modèle d'ondes de surface

Voir page 458.

3.6.11. Statique et dynamique d'un système de levage

Voir page 162.

3.6.12. Capteur d'accélération avec jauge de contrainte

Voir page 851.

3.6.13. Propagation d'onde dans un milieu anisotrope, biréfringence

Voir page 1207.

3.6.14. Loi de Darcy pour les milieux poreux

Voir page 479.

4. Thermodynamique

Appartient aux programmes de MPSI, PCSI

4.1. Gaz parfait

Appartient aussi aux programmes de PTSI, BCPST1, TPC1

4.1.1. Cycle de Carnot

On rappelle que le rendement ρ d'un cycle moteur est le rapport entre le travail ($-W$) fourni au milieu extérieur et la chaleur Q_1 reçue par le système au cours d'un cycle. Le rendement maximal d'un cycle de Carnot (2 isothermes et 2 adiabatiques) est

$\rho_M = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, T_1 et T_2 étant les températures auxquelles se font les échanges thermiques ($T_1 > T_2$).

L'objet du problème est d'étudier les relations qui peuvent exister entre le rendement maximal d'un cycle de Carnot et d'autres caractéristiques de ce cycle. On se limite à l'étude du cas d'un gaz parfait.

I.a. Le point A étant fixé, on veut en réglant convenablement les transformations AB, BC, CD et DA que la plus grande pression atteinte au cours du cycle, P_C , ne dépasse pas une certaine valeur P_{\max} . P_C étant constamment fixé à cette valeur, quelle est en fonction de P_C et de P_A l'expression de la plus grande valeur possible de ρ_M ? Quelle est la température T_1 correspondante ?

b. Quelle serait alors la valeur du travail fourni ($-W$) au cours d'un cycle ?

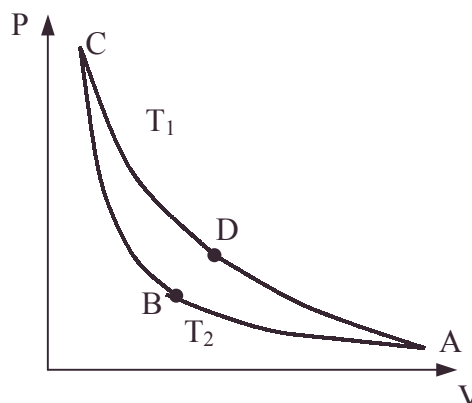
c. Calculer la valeur limite de ρ_M définie en **I.a.** lorsque :

- le gaz utilisé (l'air) est assimilable à un gaz parfait diatomique pour lequel $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est constamment

égal à 1,4 ;

– la position de A correspond à $P = 1$ bar et $T = 298$ K ;

– $P_{\max} = 60$ bars.



II.a. Le point A étant fixé, établir en fonction de ρ_M et de P_C l'expression du travail fourni ($-W$) au cours d'un cycle accompli par n moles de gaz.

b. La valeur de P_C étant de plus fixée, on recherche la valeur de ρ_M pour laquelle le travail fourni est maximal. Etablir l'expression qui permet de calculer ρ_M .

c. Calculer les valeurs de ρ_M et de ($-W$) définies en **II.a.** ainsi que la valeur de T_1 correspondante lorsque :

- on utilise 1 g. du gaz défini en **I.c.** dont la masse molaire serait égale à 29 g.mol^{-1}
- la position de A correspond à $P = 1$ bar, $T_A = 298$ K.
- $P_C = 60$ bars.

III. Tracer le cycle correspondant aux conditions **II.c.** dans un diagramme P, V . On rappelle $R = 8,32 \text{ joules.degré}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

CCP ; Durée 1h

Corrigé

I.a. Dans le cycle de Carnot, on a pour les transformations adiabatiques réversibles qui assurent le rendement maximum : $PT^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \text{cste}$.

Aussi on a pour BC $P_B T_2^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = P_C T_1^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$ [1] et pour DA $P_A T_2^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = P_D T_1^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$ [2].

Pour les transformations isothermes, on a [3] : $P_A V_A = P_B V_B$ et [4] $P_C V_C = P_D V_D$.

Pour exprimer $\frac{T_2}{T_1}$ en fonction de P_A, P_C , on part de [1] et [3]

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_B}{P_C} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left[\frac{P_A}{P_C} \frac{V_A}{V_B} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} ; \text{ pour optimiser } \rho_M = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left[\frac{P_A}{P_C} \frac{V_A}{V_B} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

il faut minimiser $\frac{V_A}{V_B}$; or, $V_A \geq V_B$, on prendra $V_A = V_B \Rightarrow \rho_M^{\max} = 1 - \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} ;$

$$T_1 = T_2 \left(\frac{P_C}{P_A} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

b. Divisons [1] par [2] : $\frac{P_B}{P_A} = \frac{P_C}{P_D} = 1$; l'isotherme CD (comme AB) tend vers 0.

$$\rho_M^{\max} = \frac{-W_{ABCD}}{Q_{CD}} \text{ or } Q_{CD} \rightarrow 0 \Rightarrow -W_{ABCD} \rightarrow 0 \text{ vu } \rho_M^{\max} \text{ fini.}$$

On comprend l'usage du conditionnel dans la question posée.

c. A.N. : $\rho_M^{\max} = 0,690$; $T_1 = 960$ K.

II.a. $\rho_M = \frac{-W}{Q_{CD}} ;$

$$\text{or } Q_{CD} = -W_{CD} = \int_C^D P dV = nRT_1 \int_C^D \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = nRT_1 \ln \frac{P_C}{P_D} \text{ d'après [4].}$$

$$\text{Eliminons } T_1 \text{ et } P_D \bullet \rho_M = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{T_2}{1 - \rho_M}.$$

(T_2 est connu, c'est la température en A fixé.)

$$\text{D'après (2), } \bullet P_D = P_A \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = P_A (1 - \rho_M)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} ; \text{ aussi,}$$

$$-W = \rho_M \cdot nR \cdot \frac{T_2}{1 - \rho_M} \ln \left[\frac{P_C}{P_A} (1 - \rho_M)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] = \frac{\rho_M}{M} \frac{mRT_2}{1 - \rho_M} \left[\ln \frac{P_C}{P_A} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(1 - \rho_M) \right]$$

b. Dérivons $\ln(-W)$ par rapport à ρ_M :

$$\frac{d(-W)}{(-W)d\rho_M} = \frac{1}{\rho_M} + \frac{1}{1 - \rho_M} + \frac{\frac{-\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{1 - \rho_M}}{\ln \frac{P_C}{P_A} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(1 - \rho_M)} = 0.$$

$$\frac{\ln \frac{P_C}{P_A} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(1-\rho_M) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_M}{\rho_M(1-\rho_M) \left[\ln \frac{P_C}{P_A} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(1-\rho_M) \right]} = 0 \Rightarrow \rho_M = \ln(1-\rho_M) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{P_C}{P_A}.$$

c. On cherche les solutions de $x - a - \ln(1-x) = 0$, par ordinateur avec $a = \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{P_C}{P_A}$ où $P_C = 60$ bars, $P_A = 1$ bar, $\gamma = 1,4$. On trouve $x = 0,4922$.

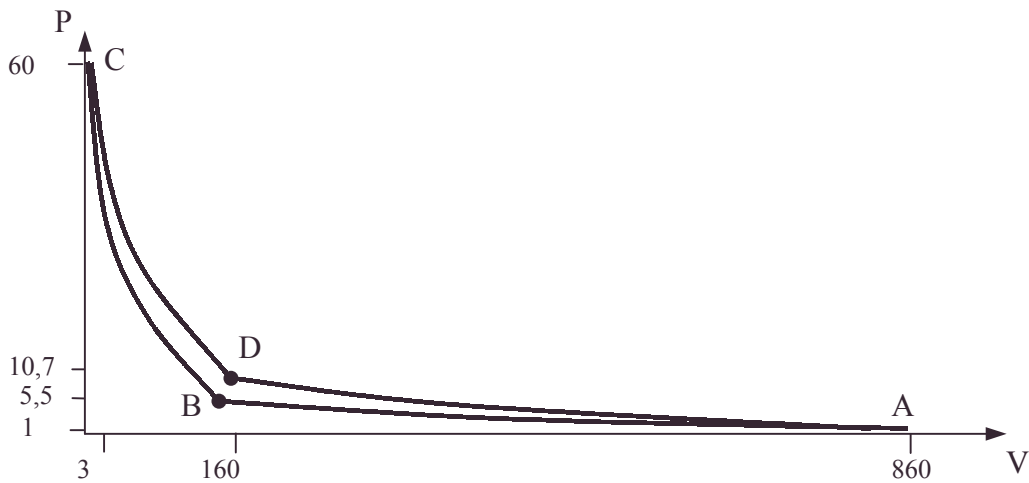
or $\rho_M = x$ et $T_1 = \frac{T_A}{1-\rho_M}$ vu $T_2 = T_A$ et $T_1 = 586,8$ K.

A.N. : On trouve $\rho_M = 0,4922 \Rightarrow -W_{II,a} = 142,7$ J.

$$\text{III. } P_B = P_C \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad V_A = \frac{m}{M} \frac{RT_2}{P_A}; \quad V_C = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{P_C};$$

$$P_D = P_A \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad V_B = \frac{m}{M} \frac{RT_2}{P_B}; \quad V_D = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{P_D};$$

	A	B	C	D
dm ³	0,855	0,153	0,028	0,157
P _{bar}	1,000	5,600	60,00	10,71



4.1.2. Atmosphère et ballon Transformation polytropique

Dans tout le problème, les gaz seront assimilés à des gaz parfaits et leur mélange à un mélange idéal : l'hélium est donc considéré comme un gaz parfait de masse molaire

$$M' = 4.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} \text{ et l'air comme un gaz parfait de masse molaire}$$

$$M = 29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}.$$

On rappelle que la constante des gaz parfaits vaut $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ et qu'une pression de 1 atm. est égale à 101325 Pa.

Première partie

1.1. Etablir la condition d'équilibre d'un volume élémentaire $d\tau$ de fluide au repos, placé au voisinage d'un point M où la pression vaut $p(M)$ et la masse volumique $\rho(M)$, soumis au champ de pesanteur caractérisé par le vecteur \vec{g} .

2. En déduire la pression dans l'air atmosphérique à l'altitude z en supposant l'air en équilibre isotherme à la température T_0 et le champ de pesanteur uniforme dans le domaine d'étude. On notera p_0 la pression à l'altitude $z = 0$. Peut-on interpréter le résultat obtenu ?

Application numérique : calculer p à l'altitude $z = 5$ km, sachant que $p_0 = 1$ atm, $T_0 = 273$ K et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

3. En fait la température décroît avec l'altitude selon une loi affine : $T = T_0 (1 - kz)$.

On pose $\alpha = \frac{M_g}{kRT_0}$ et pour simplifier les expressions on pourra écrire :

$$\beta = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} = \frac{(M_g - kRT_0)}{M_g}.$$

Exprimer la pression $p(z)$ en fonction de z , p_0 , k et α puis en fonction de T , T_0 , p_0 et α .

Exprimer la masse volumique ρ de l'air en fonction de la pression et de la masse volumique ρ_0 (P_0, T_0) ; $k = 2,39 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$.

Application numérique : calculer la température T , la pression p et la masse volumique à l'altitude $z = 5$ km.

4. On considère les transformations réversibles d'un gaz parfait définies par l'équation infinitésimale : $a \frac{dp}{p} + (1 - a) \frac{dT}{T} = 0$ avec a constante numérique caractéristique de la transformation appelée polytropique.

Le gaz parfait est caractérisé par un coefficient γ constant (rapport de sa capacité calorifique molaire à pression constante C_p et de sa capacité calorifique molaire à volume constant C_v : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$). Montrer que ces transformations polytropiques peuvent

correspondre à des transformations réversibles – isobares – isothermes – isochores – adiabatiques.

On indiquera à chaque fois l'équation caractéristique de la transformation finie et la valeur de a correspondante.

L'équilibre de l'air envisagé à la question **1.3.** est-il polytropique ?

Deuxième partie

On peut considérer que dans une zone de l'atmosphère terrestre d'environ 10 km d'épaisseur ($0 < z < 10$ km) l'air est caractérisé par $\alpha = 5,35$ et que le champ de pesanteur est constant ($g = 10 \text{ m.s}^{-2}$).

Un aérostat est constitué par une enveloppe remplie d'hélium (dont le volume V ne peut dépasser la valeur maximale V_{\max}) à laquelle est attachée une nacelle. L'ensemble enveloppe, nacelle, accessoires et passagers a une masse M_0 . Il y a constamment communication entre l'air atmosphérique et le gaz du ballon ce qui assure l'équilibre mécanique et thermique entre les deux fluides.

1. Faire le bilan des forces appliquées à l'aérostat. Exprimer la force résultante \vec{R} en fonction de \vec{g} , α , M_0 , V , des masses molaires M et M' , de la masse volumique ρ_0 de l'air $\rho_0 = \rho(T_0, p_0)$, et de la pression p .

A quelle condition, liant le volume initial V_0 et la masse M_0 , le ballon pourra-t-il s'élever ?

2. Exprimer la force résultante \vec{R} en fonction de \vec{g} , M_0 , V , M , M' , $\rho_{He}(T, p)$. Quels sont les termes de cette expression qui varient lorsque l'altitude z augmente ? Expliquez pourquoi l'ascension est la succession d'une phase à masse constante et d'une phase à volume constant.

3. Quelle est l'altitude d'équilibre, appelée plafond, de l'aérostat ?

A.N. : calculer le plafond pour un aérostat caractérisé par $V_{max} = 700 \text{ m}^3$, $V_0 = 400 \text{ m}^3$, $M_0 = 450 \text{ kg}$.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1.1. Ecrivons l'expression du principe fondamental de la dynamique pour $dm = \rho d\tau$:

$$d\tau \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = d\tau (\rho \vec{g} - \text{grad } p) ; \text{ au repos } \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{0} \Rightarrow \rho \vec{g} - \text{grad } p = \vec{0} .$$

2.a. Appliquons la loi des gaz parfaits à l'élément de volume $d\tau$; $pV = \frac{m}{M}RT_0$ s'écrit

$$\rho d\tau = \frac{dm}{M}RT_0 = \frac{\rho}{M}d\tau RT_0 \text{ soit } \rho = \frac{PM}{RT_0} .$$

b. Projétons l'équation 1.1. sur l'axe des z ascendant : $-\rho g dz = dp$,

$$\text{soit } \frac{dp}{p} = \frac{-Mgz}{RT_0} ; p = p_0 \exp -\frac{z}{a} ; \text{ AN : } p = 0,5279 \text{ atm} .$$

On fera une analogie avec le facteur de Boltzmann en thermodynamique statistique qui règle le nombre de particules n d'énergie E : $n = n_0 \exp \frac{-EN_A}{RT_0}$, n étant à l'origine de p

avec $EN_A = Mgz$ (N_A nombre d'Avogadro).

3.a. Remplaçons T_0 par $T_0(1 - kz)$. L'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\frac{dp}{p} = \frac{-Mg}{RT_0} \frac{dz}{1 - kz} \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = \alpha \ln(1 - kz) \Rightarrow p = p_0(1 - kz)^\alpha .$$

$$\text{b. L'équation peut s'écrire en } T : \frac{dp}{p} = \alpha \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = \alpha \ln \frac{T}{T_0} \text{ soit } p = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\alpha .$$

$$\text{c. } \rho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0} \text{ permet d'écrire } \rho = \frac{Mp}{RT} = \frac{\rho_0 T_0}{p_0} \frac{p}{T} = \rho_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{p}{p_0} = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta .$$

$$\text{d. AN : } T = 240,4 \text{ K} ; p = 0,5067 \text{ atm} ; \rho = 0,7450 \text{ kg.m}^{-3} ; \alpha = 5,346 ; \beta = 0,8129 .$$

4. Calculons a pour les cas particuliers évoqués. L'obtention d'une valeur de a justifie a posteriori l'existence de a et de la transformation associée.

$$\text{a. Pour une isobare } dp = 0, \text{ il reste } (1 - a) \frac{dT}{T} = 0 \Rightarrow a = 1 .$$

$$\text{b. Pour une isotherme } dT = 0, \text{ il reste } a \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow a = 0 .$$

c. Pour une isochore $dV = 0$, avec $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ soit $\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}$; or $\frac{dp}{p} = \frac{a-1}{a} \frac{dT}{T}$;

l'identification de $\frac{a-1}{a}$ à 1 exige a infini.

d. Pour une adiabatique réversible, $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ et $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$;

soit aussi $pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_0 T_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$; ainsi $\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$; or $\frac{dp}{p} = \frac{a-1}{a} \frac{dT}{T}$;

l'identification donne $a = 1 - \gamma$.

e. Equation caractéristique finie associée à $\frac{a dp}{p} + (1-a) \frac{dT}{T} = 0$; par intégration, $p^a T^{1-a} = \text{constante}$ permet la vérification.

a. $\Rightarrow p = \text{cste}$; b. $\Rightarrow T = \text{cste}$; c. $\Rightarrow \frac{p}{T} = \text{cste}$; d. $\Rightarrow p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste}$,

f. L'équation différentielle associée à 1.3. est $\frac{dp}{p} = \alpha \frac{dT}{T}$; or $\frac{dp}{p} = \frac{a-1}{a} \frac{dT}{T}$.

L'identification donne $a = \frac{1}{1-\alpha}$; l'équilibre est donc polytropique.

2.1.a. Forces exercées : $M_0 \vec{g}$; $\rho_{\text{He}} V \vec{g}$; $-\rho V \vec{g}$ (poussée d'Archimède).

or $\rho = \frac{Mp}{RT}$ et $\rho_{\text{He}} = \frac{M'p'}{RT'}$; M' , p' , T' caractérisant He.

Avec $p = p'$ et $T = T'$ vu l'équilibre mécanique et thermique ; on a $\rho_{\text{He}} = \rho \frac{M'}{M}$

et $\rho_{\text{He}} V \vec{g} = \rho \frac{M'}{M} \vec{g} V$.

b. $\vec{R} = \left[M_0 + \rho \left(\frac{M'}{M} - 1 \right) V \right] \vec{g}$ soit $\vec{R} = \left[M_0 - \rho_0 V \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(1 - \frac{M'}{M} \right) \right] \vec{g}$.

c. Le ballon s'élève si $R_z > 0$ (axe des z ascendant) quand $V = V_0$, donc si $M_0 < \frac{M-M'}{M} \rho_0 V_0$.

2.2.a. En remplaçant $\rho = \rho_{\text{He}} \frac{M}{M'}$, $\vec{R} = \left[M_0 + \rho_{\text{He}} V \left(1 - \frac{M}{M'} \right) \right] \vec{g}$.

b. V et ρ_{He} varient avec z .

c. cf. 1.3. $\rho' = \rho'_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta = \rho'_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\alpha\beta} = \rho'_0 (1-kz)^{\alpha\beta} = \frac{m'}{V}$.

$\frac{d\rho'}{\rho'} = -\frac{dV}{V} + \frac{dm'}{m'} = -\alpha\beta k \frac{dz}{(1-kz)}$; pour $dz > 0$: $d\rho' < 0$ compatible avec la théorie de

l'énoncé soit : • $dV' > 0$, $dm' = 0$.
• $dV' = 0$, $dm' < 0$.

La sécurité de l'ascension exige la surveillance de la sortie de gaz, soit un régime compatible avec une ascension stable, contrôlée, continue.

La condition d'équilibre thermomécanique empêche a priori le transfert de masse : le gaz sert à gonfler le ballon jusqu'à V_{\max} : on a d'abord la montée à masse constante (R_z constant).

à V_{\max} , alors $dV' = 0$, $dm' < 0$: c'est la phase à volume constant avec éjection de gaz.

2.3.a. L'altitude d'équilibre correspond à $\vec{R} = \vec{0}$ soit :

$$0 = M_0 - \rho_0 V_{\max} \left(1 - \frac{M'}{M}\right) (1 - kz_p)^{\alpha-1} \Rightarrow z_p = \frac{1}{k} \left[1 - \left(\frac{M_0 M}{\rho_0 V_{\max} (M - M')} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right];$$

$$z_p = \frac{1}{k} \left[1 - \left(\frac{M_0 R T_0}{p_0 (M - M') V_{\max}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right]$$

b. A.N. : $z_p = 4,988 \text{ km}$.

4.1.3. Atmosphère et aérostats

Introduction

Dans ce problème, on établit dans la partie **A.** quelques propriétés physiques de l'atmosphère terrestre, et dans la partie **B.**, on étudie les comportements possibles, dans cette atmosphère, d'un ballon rempli de gaz. Bien que la seconde partie puisse être traitée sans avoir résolu la première, cette démarche est déconseillée car elle présente de plus grandes difficultés. La résolution de ce problème fait appel à de nombreuses approximations. Certaines sont explicitement mentionnées dans l'énoncé, d'autres sont seulement suggérées. Dans tous les cas, les approximations utilisées doivent être justifiées sur la base de la précision attendue pour les résultats calculés. Le niveau de précision recherché est donné, soit par les approximations explicites de l'énoncé, soit par le nombre de chiffres significatifs des données.

Données

Constante des gaz parfaits :	$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
Accélération de la pesanteur à l'altitude 0 km :	$g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
Rayon terrestre :	$R_T = 6370 \text{ km}$.
Pression à l'altitude 0 km :	$P_0 = 101325 \text{ Pa}$.
Température à l'altitude 0 km :	$T_0 = 288 \text{ K}$.

A. Propriétés physiques de l'atmosphère terrestre

On assimilera la terre à une sphère dont la structure présente la symétrie sphérique. On négligera par ailleurs ses différents mouvements (rotation autour du soleil et rotation propre) et on admettra que sa surface constitue localement un référentiel galiléen (l'axe z est dirigé verticalement vers le haut).

1. Calculer la variation relative de l'accélération de la pesanteur, $\frac{g(z) - g_0}{g_0}$;

Application numérique pour $z = 10 \text{ km}$.

Dans la suite du problème, on se limitera à des altitudes inférieures à 10 km et on supposera $g = g(z) = g_0$.

2. L'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$; ce gaz est en équilibre hydrostatique et les variables caractéristiques (pression p_a et température T_a) ne dépendent que de l'altitude z .

Ecrire l'expression donnant la dérivée verticale de la pression $\frac{dp_a}{dz}$ en fonction des autres paramètres. Exprimer la masse volumique ρ_a de l'air en fonction de p_a et T_a et des constantes R et M_a . Quelle est sa valeur ρ_0 à l'altitude 0 km ? En déduire l'équation différentielle liant la pression p_a à l'altitude z pour un profil de température $T_a(z)$ donné.

3. Dans cette question on supposera l'atmosphère isotherme : sa température $T_a(z)$ est partout égale à T_0 . Etablir les expressions de p_a et ρ_a en fonction de z en faisant intervenir la quantité $H_a = \frac{RT_a}{M_a g}$. Pourquoi H_a est-elle appelée "échelle de hauteur" ?

Calculer sa valeur numérique. Quelle est son interprétation graphique ?

4. Ecrire un développement limité à l'ordre 1 des expressions obtenues à la question **A.3.** pour $\frac{p_a}{p_1}$ et $\frac{\rho_a}{\rho_1}$ en fonction d'une petite variation d'altitude δz autour d'une altitude quelconque z_1 telle que $p_a(z_1) = p_1$ et $\rho_a(z_1) = \rho_1$. Quelle condition doit satisfaire δz pour pouvoir utiliser ces développements limités ?

5. En réalité, l'atmosphère n'est pas isotherme : il y règne un gradient de température $\frac{dT_a}{dz}$. Dans la troposphère (entre $z = 0$ et $z = 11$ km), on prendra ce gradient constant et

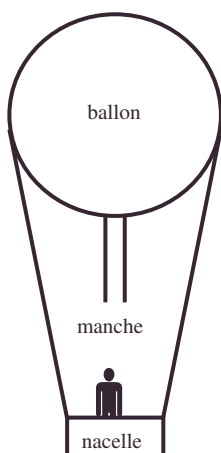
égal à $\gamma = -6,5 \text{ km}^{-1}$. Pouvez-vous trouver des raisons physiques à l'existence de ce gradient négatif ?

Etablir les expressions de p_a et ρ_a en fonction de z dans la troposphère en intégrant l'équation différentielle trouvée à la question **A.2.** après avoir séparé les variables.

6. Ecrire un développement limité à l'ordre 1 des expressions obtenues à la question **A.5.** pour $\frac{p_a}{p_1}$ et $\frac{\rho_a}{\rho_1}$ en fonction d'une petite variation d'altitude δz autour d'une altitude quelconque z_1 telle que $p_a(z_1) = p_1$ et $\rho_a(z_1) = \rho_1$.

Application numérique : quelle est la variation relative de pression $\frac{\delta p}{p}$ correspondant à une variation d'altitude $\delta z = 10 \text{ m}$ autour d'une altitude $z_1 = 3 \text{ km}$?

B. Etude des aérostats.



sphérique de rayon $r_b = 8 \text{ m}$, une manche cylindrique de hauteur $h = 4 \text{ m}$ et de rayon $r_m = 0,5 \text{ m}$ et une nacelle. La masse totale de l'ensemble (sans le gaz) est de $m_b = 900 \text{ kg}$, y compris les passagers et le lest.

Le ballon est gonflé avec du méthane, gaz parfait de masse molaire $M_g = 16,0 \text{ g.mol}^{-1}$.

Dans toute la suite, sauf dans les questions **B.6.** et **B.7.**, on admettra que V_b , volume du ballon incluant celui de la manche, est invariable.

On suppose également que la température du gaz est, à chaque altitude et à chaque instant, égale à celle de l'air à la même altitude. Il sera commode de repérer la position du ballon dans l'atmosphère par l'altitude du centre de la sphère.

On admet, dans cette partie **B**, que la pression et la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude vérifient $p_a = p_0 \left(1 + \gamma \frac{z}{T_0}\right)^{-\frac{M_a g}{R\gamma}}$ et $\rho_a = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{-(1 + \frac{M_a g}{R\gamma})}$ où les constantes sont celles de l'introduction et de la partie **A**. On notera p_g et ρ_g la pression et la masse volumique du gaz.

1.a. Le ballon et la manche sont remplis de gaz, la nacelle est maintenue au sol. L'altitude du ballon (du centre de la sphère) est $z = 20$ m. Comment varie la pression du gaz à l'intérieur du ballon ?

b. Calculer numériquement la pression de l'air (à l'extérieur) et du gaz (à l'intérieur).

α. en bas de la manche.

β. en haut de la manche.

γ. au milieu du ballon.

δ. en haut du ballon.

On présentera les résultats sous forme de tableau. Il est possible d'utiliser les développements limités trouvés dans la partie **A**.

Déduire de la question précédente que le gaz est en surpression par rapport à l'air.

Calculer la valeur de cette surpression aux points **α**, **β**, **γ**, **δ** de la question **B.1**.

2. Quel est l'effet de cette surpression ? A quoi sert la manche ?

3. Comment s'appelle la résultante des forces de pression exercées par l'air sur le ballon ? Donner sans calculs sa direction et son sens. Calculer sa norme $F_A(z)$, pour le ballon situé à une altitude z quelconque ($0 \text{ km} \leq z \leq 10 \text{ km}$). Pour faire ce calcul, on pourra utiliser la masse volumique de l'air à l'altitude du centre du ballon, après avoir justifié cette approximation. Calculer numériquement cette force pour $z = 20$ m, 1 km, 2 km et 10 km.

4. On ferme la manche (pour ne pas perdre de gaz) et on libère la nacelle. Calculer la masse totale. Pour faire ce calcul, on pourra utiliser la masse volumique du gaz au centre du ballon, après avoir justifié cette approximation. Ecrire l'équation donnant l'altitude jusqu'à laquelle le ballon va monter. Calculer numériquement cette altitude.

Cette position d'équilibre est-elle stable ? Quelle sera alors la température du gaz au centre du ballon ? Calculer la pression du gaz et celle de l'air environnant. Quelles en seraient les conséquences probables ?

5. On recommence l'expérience en laissant la manche ouverte. Exprimer la masse de gaz m_g présente dans l'enveloppe à une altitude z en fonction de la force calculée à la question **B.3**. En déduire l'équation donnant l'altitude maximale du ballon. Calculer numériquement cette altitude.

Comparer avec celle trouvée à la question **B.4**. et expliquer la différence.

6. Dans cette question, le ballon n'est pas rempli de gaz (ballon flasque). La nacelle est retenue au sol par une amarre. On gonfle progressivement le ballon jusqu'à ce que la tension de l'amarre (force ascensionnelle) soit $f_a = 1000$ N. La manche est laissée ouverte, et on libère la nacelle. Exprimer la résultante des forces de pression exercées par l'air sur le ballon en fonction de la masse de gaz présente dans l'enveloppe.

En déduire qu'il existe une altitude z_f en dessous de laquelle la force ascensionnelle reste constante. Ecrire l'équation donnant z_f . Calculer numériquement z_f .

Décrire le comportement du ballon en dessous et au dessus de cette altitude.

Calculer l'altitude maximale atteinte par le ballon.

7. Une fois le ballon arrivé à son altitude maximale, décrire sans calculs ce qui se passe si on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre :

- a. vers le bas
b. vers le haut.

Que se passe-t-il si le ballon perd un peu de gaz ? Quelle sera sa nouvelle altitude d'équilibre ?

A quoi sert le lest ?

ENS ; Option BCPST ; Durée : 2h

Corrigé

A.1. On sait que la pesanteur est un champ en $\frac{1}{r^2}$ d'où $g_z = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$

$$\Rightarrow \frac{g(z) - g_0}{g_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} - 1 = -2 \frac{z}{R_T} \text{ après développement limité au 1^{er} ordre pour } z$$

de l'ordre de 10 km (cf. A.N.).

AN : $\frac{g(z) - g_0}{g_0} = -3,14 \cdot 10^{-3}$; les résultats ultérieurs auront donc une incertitude relative inférieure à $3 \cdot 10^{-3}$.

2.a. $\frac{dp_a}{dz} = -\rho_a g$ d'après la statique des fluides.

b. Une masse d'air dm_a occupant le volume dV_a , satisfait la loi des gaz parfaits

$$p_a dV_a = \frac{dm_a}{M_a} RT_a \Rightarrow \rho_a = \frac{dm_a}{dV_a} = \frac{p_a M_a}{RT_a}.$$

$$c. \rho_0 = \frac{p_0 M_a}{RT_0} ; \text{AN : } \rho_0 = 1,228 \text{ kg.m}^{-3}.$$

$$d. \frac{dp_a}{p_a} = -\frac{M_a g dz}{RT_a(z)}.$$

$$3.a. \frac{dp_a}{p_a} = \frac{-M_a g dz}{RT_0} = \frac{-dz}{H_a} \Rightarrow p_a = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H_a}\right).$$

$$b. \rho_a = \frac{p_a M_a}{RT_0} = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H_a}\right).$$

$$c. \ln \frac{\rho_a}{\rho_0} = -\frac{z}{H_a} ; \text{ dans un diagramme semi-logarithmique, quand } z \text{ varie de } H_a,$$

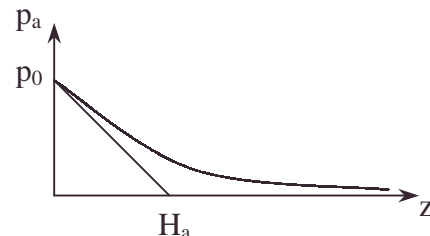
$\ln \frac{\rho_a}{\rho_0}$ varie d'une unité. H_a constitue une longueur de référence, fixe une échelle de hauteur.

$$d. H_a = \frac{RT_a}{M_a g} ; \text{AN : } H_a = 8413 \text{ m.}$$

e. La tangente en $z = 0$ de la courbe $p_a = p_a(z)$ coupe l'axe des z en $z = H_a$.

$$4.a. \text{ Vu 3.a., } p_1 = p_0 \exp\left(\frac{-z_1}{H_a}\right) ; p_a = p_0 \exp\left(\frac{-(z_1 + \delta z)}{H_a}\right) ;$$

$$\Rightarrow p_a = p_1 \exp\left(\frac{-\delta z}{H_a}\right) \Rightarrow p_a = p_1 \left(1 - \frac{\delta z}{H_a} + o\left(\left(\frac{\delta z}{H_a}\right)^2\right)\right).$$



b. De même, $\rho_a = \rho_1 \exp\left(\frac{-\delta z}{H_a}\right) \Rightarrow \rho_a = \rho_1 \left(1 - \frac{\delta z}{H_a} + o\left(\frac{\delta z}{H_a}\right)^2\right)$.

c. Il faut $\left|\frac{\delta z}{H_a}\right| \ll 1$, condition de linéarisation.

5.a. L'atmosphère est chauffée par le sol, qui a absorbé le rayonnement et la zone extérieure perd de l'énergie par rayonnement $\Rightarrow \frac{dT}{dz} < 0$; $\gamma = \frac{dT_a}{dz} \Rightarrow T_a = T_0 + \gamma z$.

b. 2.d. $\Rightarrow \frac{dp_a}{p_a} = \frac{-M_a g}{R(T_0 + \gamma z)} dz \Rightarrow \ln \frac{p_a}{p_0} = -\frac{M_a g}{R\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma z}{T_0}\right)$

$$\Rightarrow p_a = p_0 \left(1 + \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}} = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}}.$$

c. $\rho_a = p_a \frac{M_a}{RT_a} \Rightarrow \rho_a = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\left(1 + \frac{M_a g}{R\gamma}\right)}$.

6.a. $p_1 = p_0 \left(1 + \frac{\gamma z_1}{T_0}\right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}}$; $p_a = p_0 \left(1 + \frac{\gamma(z_1 + \delta z)}{T_0}\right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}}$; $\frac{p_a}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma \delta z}{T_0}\right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}}$;

$$\frac{p_a}{p_1} = 1 - \frac{M_a g}{R\gamma} \cdot \frac{\gamma \delta z}{T_1} + o\left(\frac{\delta z}{T_0}\right)^2 \text{ avec } T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\gamma z_1}{T_0}\right).$$

b. $\rho_1 = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma z_1}{T_0}\right)^{\left(\frac{M_a g}{R\gamma} + 1\right)}$; $\rho_a = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma(z_1 + \delta z)}{T_0}\right)^{\left(\frac{M_a g}{R\gamma} + 1\right)}$;

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = \left(1 + \frac{\gamma \delta z}{T_0}\right)^{\left(\frac{M_a g}{R\gamma} + 1\right)} = 1 - \left(\frac{M_a g}{R\gamma} + 1\right) \frac{\gamma \delta z}{T_1} + o\left(\frac{\delta z}{T_0}\right)^2.$$

c. Vu 2.d. on a toujours $\frac{\delta p_a}{p_a} = \frac{-M_a g \delta z}{RT_a}$; A.N. : $T_a = T_1 = 268,5 \text{ K}$;

$$\frac{\delta p}{p} = -1,275 \cdot 10^{-3} \text{ pour } \delta z = 10 \text{ m.}$$

B.1.a. Par analogie avec l'air (cf.A.6.) $\frac{p_g}{p_{1g}} = \left(1 + \frac{\gamma \delta z}{T_0}\right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}} = \left(1 + \frac{\gamma \delta z}{T_1}\right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}},$

avec l'équilibre mécanique $p_{1g} = p_{1a}$ au bas de la manche.

On a donc intérêt à prendre z_1 au bas de la manche. AN : $z_1 = 8 \text{ m}$.

$$p_g = p_0 \left(1 + \frac{\gamma z_1}{T_0} \right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}} \left(1 + \frac{\gamma \delta z}{T_1} \right)^{\frac{-M_a g}{R\gamma}} \text{ avec } \delta z = z - z_1.$$

b.

	z (m)	$\delta z = z - z_1$ (m)	p_a (Pa)	p_g (Pa)	$p_g - p_a$ (Pa)
α	8	0	101229	101229	0
β	12	4	101181	101202	21,6
γ	20	12	101084	101149	64,7
δ	28	20	100988	101096	107,7

Le gaz est en surpression car $p_g - p_a \geq 0$.

2.a. L'effet de la surpression est de maintenir le ballon sphérique (gonflé).

b. La manche assure une surpression suffisante pour la partie basse du ballon ; elle constitue un frein à l'éjection turbulente de gaz.

3.a. La résultante des forces de pression exercées s'appelle la poussée d'Archimède.

b. Elle est verticale et dirigée de bas en haut.

c. Elle est égale en module au poids de fluide (air) déplacé.

$$F_A(z) = V_b \rho_a(z) g \text{ avec } V_b = \frac{4}{3} \pi r_b^3 + \pi r_m^2 h ;$$

$\rho_a(z)$ est la masse volumique de l'air à l'altitude du centre du ballon.

d. On peut numériquement négliger le volume de la manche devant le volume de la sphère. Vu la symétrie de la sphère et **A.6.b.** (en associant 2 éléments de volume égaux symétriques par rapport au plan horizontal passant par le centre),

$$\iiint_{\Sigma} \rho_a d\tau = \rho_a(\text{centre}) \frac{4}{3} \pi r_b^3, \text{ ce qui justifie la formule.}$$

e.

z(m)	20	1000	2000	10000
$F_A(N)$	25822	23470	21244	8686

4.a. En négligeant la surpression du gaz intérieur par rapport à l'air : $p_a \approx p_g$

$$\rho_g(z) = \frac{p_g M_g}{RT_g} = \frac{p_a M_g}{RT_a} = \frac{M_g}{M_a} \frac{p_a M_a}{RT_a} = \frac{M_g}{M_a} \rho_a(z) \text{ vu } T_a = T_g \text{ cf. énoncé.}$$

$$m_g(20 \text{ m}) = \iiint_{\Sigma} \rho_g(N) d\tau = \rho_g(\text{centre}) V_b = \frac{M_g}{M_a} \frac{F_A(20 \text{ m})}{g} ;$$

$$m_t = m_g + m_b = \frac{M_g}{M_a} \frac{F_A(20)}{g} + m_b.$$

b. La justification est la même qu'en **B.3.d.**

c. AN : $m_g = 1452,2 \text{ kg}$; $m_t = 2352,2 \text{ kg}$.

d. Le ballon sera en équilibre lorsque la force d'Archimède équilibre le poids :

$$F_A = m_t g \text{ soit } \rho_a(z) V_b g = \frac{M_g \rho_a(20)}{M_a} V_b g + m_b g ,$$

$$\text{soit } \rho_a(z) = \frac{m_b}{V_b} + \frac{M_g}{M_a} \rho_a(20) \text{ et } \mathbf{A.6.b.} \Rightarrow z_c = \left[\left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{1 + \frac{M_g g}{R\gamma}}} - 1 \right] \frac{T_0}{\gamma}.$$

e. $z_c = 1172 \text{ m}$.

f. Si $z < z_c$, la poussée d'Archimède augmente et fait monter le ballon vers $z = z_c$.

• analogie, poussée d'Archimède, surpression, tableau numérique

Si $z > z_c$, la poussée d'Archimède diminue et le poids ramène le ballon en direction de $z = z_c$, l'équilibre est stable.

g. $T_c = \frac{Mp_c}{R\rho} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma z_c}{T_0} \right)$; AN : $T_c = 280,4$ K.

h. $p_{geq} = \frac{m_g}{M_g} \frac{RT_c}{V_b}$; AN : $p_{geq} = 98514$ Pa.

i. $p_{aeq} = p_0 \left(\frac{T_c}{T_0} \right)^{-\frac{M_a g}{R\gamma}}$ cf. **A.5.b.** ; AN : $p_{aeq} = 87983$ Pa.

j. Une surpression de 10531 Pa causerait l'éclatement. Cet éclatement aurait lieu avant d'atteindre cet équilibre.

5.a. $m_g(z) = \rho_g V_b = \frac{p_g M_g}{RT_g} V_b = \frac{p_a M_g V_b}{RT_a} = \frac{M_g}{M_a} \rho_a(z) V_b = \frac{M_g}{M_a} \frac{F_A(z)}{g}$ en négligeant

$p_g - p_a$ devant p_a , condition usuelle.

b. L'équation donnant l'équilibre s'écrit:

$$\rho_a(z) V_b g = V_b \frac{M_g}{M_a} \rho_a(z) g + m_b g \Rightarrow \rho_a(z) = \frac{m_b}{V_b \left(1 - \frac{M_g}{M_a} \right)} \Rightarrow z'_c \text{ vu } \mathbf{B.4.d.}$$

c. A.N. : $z'_c = 2744$ m.

d. L'altitude est supérieure, car le poids a diminué, vu l'éjection de gaz (pour assurer $p_a = p_g$ au bas de la manche) alors que la poussée d'Archimède conserve les mêmes possibilités.

6.a. Tant que le ballon est flasque, il n'y a pas de surpression intérieure; le gaz ne s'échappe pas car son expansion pendant la montée sert à gonfler le ballon.

(N.B. on conserve $p_a = p_g$ au bas de la manche : l'air n'entre donc pas dans cette ascension quasi statique.)

Comme le gaz a même volume, même température et même pression que l'air déplacé, la poussée d'Archimède s'écrit comme précédemment :

$$F_A = g m_{air} = g m_g \frac{M_a}{M_g} = \text{constante.}$$

b. $f_a = F_A - m_t g = m_a$ avec $m_t = m_g + m_b$.

Comme F_A et $m_t g$ restent constants, la force ascensionnelle restera constante dans la phase où le ballon n'est pas complètement gonflé ; z_f est cette altitude limite au-dessus de laquelle le gaz s'échappera (le volume restant alors égal à V_b)

$$\mathbf{c.} \quad f_a = g V_b \rho_a(z_f) - m_b g - \rho V_b \rho_a(z_f) \frac{M_g}{M_a} \Rightarrow \rho_a(z_f) = \frac{m_b + \frac{f_a}{g}}{V_b \left(1 - \frac{M_g}{M_a} \right)}.$$

d. cf. **B.4.d.** $z_f = 1685$ m.

e. $z < z_f$; le ballon monte à masse constante et V variable.

$z > z_f$; le ballon monte à volume constant V_b et masse variable.

f. On se retrouve dans les mêmes conditions d'équilibre que **B.5.c.** ; $z'_c = 2744$ m.

7.a. Si on écarte le ballon vers le bas, la pression de l'air augmente, le gaz se contracte ; le ballon perd du volume. On a un ballon flasque, fonctionnant à force ascensionnelle

• Archimède [théorème d'], équilibre, poussée d'Archimède, stabilité, surpression, transformation quasi statique

constante; comme elle était nulle à son altitude maximale le ballon restera là où on l'a mis.

b. Si on écarte le ballon vers le haut, la pression de l'air diminue, le gaz se dilate et s'échappe.

Or, $f_a = gV\rho_a \left(1 - \frac{M_g}{M_a}\right) - m_b g \Rightarrow \frac{df_a}{f_a} = \frac{dV}{V} + \frac{d\rho_a}{\rho_a}$. En $z \neq z_f$, le volume varie

lentement vu la manche : $\frac{df_a}{f_a} \neq \frac{d\rho_a}{\rho_a}$ est donc négative, le ballon va redescendre et se

retrouver flasque avec une force ascensionnelle constante et négative vu $V < V_b$ et **6.c.** ; le ballon continuera à descendre jusqu'au sol. L'équilibre n'est pas stable.

c. Si le ballon perd un peu de gaz, il est dans une situation analogue à la précédente ; $z = 20 \text{ m}$ est la nouvelle altitude d'équilibre.

d. Le lest sert à éviter cette échéance en diminuant subitement le poids et en rendant la force ascensionnelle positive.

4.1.4. Moteurs à combustion interne

– Ne pas confondre masse utile (combustion), masse admise (cylindrée), masse totale. Le nombre de moles total est supérieur au nombre de moles admises par cycle, lui-même supérieur au nombre de moles utiles par cycle.

– Le volume du carburant est très inférieur à celui de l'air.

Tout ceci peut être vérifié numériquement dans le problème. D'autre part, des interprétations de l'énoncé un peu différentes donnent des valeurs numériques différentes, mais voisines.

I. Moteur à essence (Cycle de Beau de Rochas)

1. On rappelle que le cycle d'un moteur traditionnel d'automobile peut être schématisé par le diagramme de la figure 1, en coordonnées P–V (cycle de Beau de Rochas).

- Admission de A à B ;
- Compression adiabatique réversible de B à C ;
- Combustion interne du mélange de C à D ;
- Détente adiabatique réversible de D à E ;
- Refroidissement de E à B ;
- Echappement de B à A.

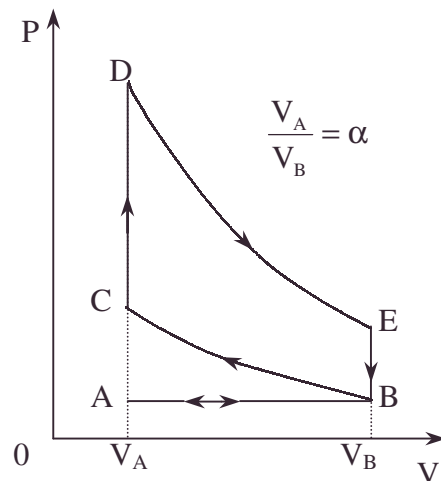


Figure 1

La quantité de chaleur reçue provenant exclusivement de la combustion interne, calculer le rendement η (c'est-à-dire le rapport entre travail fourni et quantité de chaleur reçue) du cycle, sous les hypothèses précédentes, en fonction de γ et du taux de

compression $\alpha = \frac{V_B}{V_A}$.

2. Sur la fiche technique d'un véhicule de grande série, on lit les mentions suivantes:

- Cylindrée : 2664 cm^3 ($V_B - V_A$) ;
- Taux de compression α : 8,65 ;
- Consommation à 160 km/h : 19,5 litres de supercarburant pour 100 km ;
- Vitesse à 5000 tours/minute : 160 km/h.

On admettra pour simplifier (cela ne change rien à la thermodynamique du problème) que le moteur de cette voiture a un cylindre unique, dont un cycle prend deux tours de l'arbre moteur.

La température des gaz à l'admission sera prise égale à 77°C . Calculer la température des gaz en fin de compression.

3. Le supercarburant utilisé pour les véhicules est assimilable à un isomère de l'octane (composition chimique C_8H_{18}) de masse volumique 720 kg/m^3 .

On donne $M_{\text{C}} = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M_{\text{H}} = 1 \text{ g.mol}^{-1}$.

Quelle est la masse de carburant admise à chaque cycle à 160 km/h ?

$$\gamma_{\text{air}} = 1,4 ; \quad M_{\text{air}} = 29 \text{ g.mol}^{-1}.$$

4. Quelle est la masse d'air admise à chaque cycle ?

5. La combustion (supposée complète) de l'isooctane dégage une énergie de 5497 kJ par mole. Quel est, en joules par gramme, le pouvoir calorifique du mélange admis dans le cylindre ?

6. Quelles seraient la température de fin de combustion T_D et la température de fin de détente T_E dans le cadre des hypothèses du problème ?

7. Si le moteur fonctionnait exactement selon le cycle de Beau de Rochas, quelle serait sa puissance en chevaux ($1 \text{ cheval} = 736 \text{ watts}$) ?

8. La fiche technique donne : puissance à $5000 \text{ tours/minute}$: 125 chevaux .

Quelles explications voyez-vous à cette valeur numérique ?

II. Moteur Diesel

1. Le cycle d'un moteur Diesel peut être schématisé par le diagramme de la figure 2 en coordonnées P - V :

- Compression adiabatique réversible de l'air, de A à B ;
- Combustion à pression constante, par injection de carburant, de B à C ;
- Détente adiabatique réversible de C à D ;
- Refroidissement de D à A .

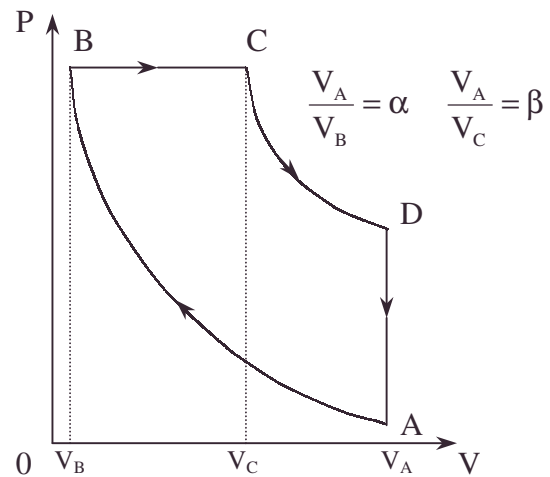


figure 2

La quantité de chaleur reçue de la source chaude provenant exclusivement de la combustion interne, montrer que le rendement η du cycle (rapport entre le travail fourni et la quantité de chaleur reçue de la source chaude), sous les hypothèses précédentes, en

fonction de γ et des rapports volumétriques, $\alpha = \frac{V_A}{V_B}$ et $\beta = \frac{V_A}{V_C}$, vaut :

$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha^\gamma} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha^\gamma}{\beta^\gamma}}{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$$

2. Sur la fiche technique d'un véhicule de grande série à moteur diésel, on lit les mentions suivantes :

- Cylindrée : 1471 cm^3 ($V_A - V_B$) ;
- Taux de compression (α) : $23,5$;

• *adiabatique, adiabatique réversible, Beau de Rochas [cycle de], combustion interne [moteur à], consommation d'essence, cylindrée de moteur à combustion interne, Diesel [cycle de], moteur, octane [indice d' des carburants], rendement, taux de compression, température de fin de combustion, travail*

- Consommation à 136 km/h : 11,4 litres de gas-oil pour 100 km ;
- Vitesse à 5000 tours/minute : 136 km/h.

On admettra pour simplifier (cela ne change rien à la thermodynamique du problème) que le moteur de cette voiture a un cylindre unique, dont un cycle prend deux tours de l'arbre moteur.

La température des gaz à l'admission sera prise égale à 77° C. Calculer la température des gaz en fin de compression.

3. Le gas-oil utilisé pour les moteurs diesel est un hydrocarbure de haute masse molaire, de masse volumique 800 kg /m³.

Quelle est la masse de carburant injectée à chaque cycle à 136 km/h ?

4. Quelle est la masse d'air admise à chaque cycle ?

5. La combustion (supposée complète) des hydrocarbures lourds dégage une énergie de 46,82 kilo joules par gramme ; quelle serait la température T_C en fin de combustion, dans le cadre des hypothèses du problème ?

6. En déduire le rapport volumétrique V_D/V_C (qui détermine le point de la course du piston où l'injection doit cesser).

7. Que vaut alors le rendement théorique η ?

8. Quelle serait la puissance, en chevaux (1 cheval = 736 watts), de ce moteur, fonctionnant exactement selon le cycle de la figure 2 ?

9. La fiche technique donne : puissance à 5000 tours/minute : 50 chevaux.

Quelles explications voyez-vous à cette valeur numérique ?

CCP ; Durée : 2 h

Corrigé

I. Moteur à essence

$$1. \eta = \left| \frac{W}{Q_{CD}} \right| \quad \text{or pour un cycle } \Delta U = 0 = W + Q_{CD} + Q_{EB}$$

$$Q_{CD} = n_{Cv} (T_D - T_C) ; Q_{EB} = n_{Cv} (T_B - T_E) \Rightarrow \eta = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C}$$

Afin d'introduire les volumes indispensables pour introduire α , écrivons la loi

TV ^{$\gamma-1$} = cste , pour les adiabatiques réversibles (cf. PV ^{γ} = cste).

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} ; T_E V_E^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} ; \text{or } V_D = V_C = V_A \text{ et } V_E = V_B ;$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_E}{V_D} \Rightarrow T_B = T_C \alpha^{1-\gamma} ; T_E = T_D \alpha^{1-\gamma} .$$

$$\eta = 1 + \frac{T_C \alpha^{1-\gamma} - T_D \alpha^{1-\gamma}}{T_D - T_C} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} ; \text{AN : } \eta = 0,578.$$

$$2. T_C = T_B \alpha^{\gamma-1} ; \text{AN : } T_B = 350 \text{ K} \Rightarrow T_C = 829,6 \text{ K}.$$

$$3. \text{Masse consommée pour 100 km : } m_1 = 720.19,5.10^{-3} \text{ kg}.$$

$$\text{Nombre de cycles pendant 100 km : } N_1 = \frac{1}{2} \frac{5000}{60} \frac{3600}{160} 100$$

$$\text{Masse par cycle : } m = \frac{m_1}{N_1} = 1,498.10^{-4} \text{ kg /cycle, ce qui est faible.}$$

4. Le volume d'air admis à chaque cycle est pratiquement (V_B – V_A) car le volume de carburant est négligeable.

$$P_{\text{air}} \# P_{\text{atmosphérique}} = P^0 = 10^5 \text{ Pa}.$$

• *adiabatique réversible, cheval vapeur, diesel, Laplace (formule isentropique de), moteur, quantité d'air admis à chaque cycle d'un moteur à combustion interne, rendement, température de fin de combustion*

$$m' = \mu_{\text{air}} (V_B - V_A) = \frac{P_{\text{air}} M_{\text{air}}}{RT_{\text{admission}}} (V_B - V_A) ; \text{AN : } m' = 2,655 \cdot 10^{-3} \text{ kg /cycle.}$$

On voit $m \ll m'$.

$$5. P_C = 5497 \cdot 10^3 \cdot \frac{m}{M_{\text{octane}}} \cdot \frac{1}{(m + m')} ;$$

AN : $M_{\text{octane}} = 114 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $P_C = 2575 \text{ J/g}$ de mélange admis.

$$6.a. \text{ Par cycle, } Q = 5497 \cdot 10^3 \cdot \frac{m}{M_{\text{octane}}} = P_C (m + m') = n C_V (T_D - T_C) \text{ avec } n = \frac{P_0 V_B}{RT_B}.$$

$T_D = T_C + T_B \frac{R}{C_V} \frac{Q}{P_0 V_B}$; vu : $\gamma = 1,4$; $C_P - C_V = R$; $C_V = \frac{5}{2} R$ car l'air est un gaz diatomique.

$$T_D = T_C + T_B \cdot \frac{2}{5} \frac{P_C (m + m')}{P_0 V_B} ; V_B - V_A = V_B \left(1 - \frac{V_A}{V_B} \right) \Rightarrow V_B = \frac{V_B - V_A}{1 - \frac{1}{\alpha}}.$$

$$\text{AN : } V_B = \frac{2664 \cdot 10^{-6}}{1 - \frac{1}{\alpha}} = 3012 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 ; T_D = 4187 \text{ K.}$$

$$b. T_E = T_D \alpha^{1-\gamma} ; T_E = \alpha^{1-\gamma} \left(T_C + T_B \cdot \frac{2}{5} \frac{Q}{P_0 V_B} \right) ; \text{AN : } T_E = 1766 \text{ K.}$$

$$7. \text{ Par cycle } W = \eta Q ; \text{ nombre de cycles par seconde : } N = \frac{1}{2} \cdot \frac{5000}{60} \Rightarrow P = N_1 W.$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{5000}{60} \left(1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} \right) P_C (m + m') ; \text{AN : } P = 236,3 \text{ chevaux.}$$

8. $P_{\text{réel}} = 125$ chevaux : il y a des pertes de puissance (moteur, accessoires...)

II. Moteur Diesel

$$1. \eta = \left| \frac{W}{Q_{BC}} \right| ; \text{ pour un cycle, } \Delta U = 0 = W + Q_{BC} + Q_{DA}.$$

$$Q_{BC} = n C_P (T_C - T_B) ; Q_{DA} = n C_V (T_A - T_D) \Rightarrow \eta = 1 + \frac{C_V}{C_P} \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}.$$

Introduisons les volumes des adiabatiques réversibles :

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \cdot T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \text{ or } V_D = V_A ;$$

$$T_B = T_A \alpha^{\gamma-1} ; T_C = T_D \beta^{\gamma-1}.$$

Pour la transformation isobare :

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \Rightarrow T_C = T_B \cdot \frac{V_C}{V_B} = T_B \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Rightarrow T_C - T_B = T_B \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = T_A \alpha^{\gamma-1} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = T_A \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

De même,

$$T_D = \frac{T_C}{\beta^{\gamma-1}} = T_B \frac{\alpha}{\beta^{\gamma-1}} = T_A \alpha^{\gamma-1} \frac{\alpha}{\beta^{\gamma}} \Rightarrow T_D - T_A = T_A \left(\frac{\alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma}} - 1 \right) \Rightarrow \eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\beta \left(1 - \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma}} \right)}{\alpha^{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)}.$$

2. $T_B = T_A \alpha^{\gamma-1}$; AN : $T_A = 350 \text{ K} \Rightarrow T_B = 1237,4 \text{ K}$.

3. Masse consommée pour 100 km : $m_1 = 800 \cdot 11,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$.

Nombre de cycles pour 100 km : $N_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5000}{60} \cdot \frac{3600}{136} \cdot 100$.

$m_{\text{par cycle}} = \frac{m_1}{N_1}$; AN : $m_{\text{par cycle}} = 8,269 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$.

4. $m' = \mu_{\text{air}} (V_B - V_A) = \frac{P_{\text{air}} \cdot M_{\text{air}}}{RT_{\text{admission}}} (V_B - V_A)$; AN : $P_{\text{air}} = 10^5 \text{ Pa}$,

$m' = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cycle}$.

5. Par cycle : $Q = 46,82 \cdot 10^3 \text{ m}$ et aussi $Q = n C_P (T_C - T_B)$; Vu $\gamma = 1,4$;

$C_P - C_V = R$, $C_V = \frac{5}{2} R$; $C_P = \frac{7}{2} R$; $n = \frac{P_0 V_A}{RT_A}$; $T_C = T_B + \frac{2}{7} T_A \frac{Q}{P_0 V_A}$;

or $V_A - V_B = V_A \left(1 - \frac{V_B}{V_A} \right) \Rightarrow V_A = \frac{V_A - V_B}{1 - \frac{1}{\alpha}} \Rightarrow T_C = T_B + \frac{2}{7} \frac{T_A Q \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)}{P_0 (V_A - V_B)}$

AN : $V_A = \frac{1471 \cdot 10^{-6}}{1 - \frac{1}{\alpha}} = 1,536 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $T_C = 3758 \text{ K}$ (T élevée !).

6. $\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \beta = \frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \alpha \frac{T_B}{T_C} = \frac{\alpha}{1 + \frac{2}{7} \cdot \frac{T_A}{T_B} \cdot \frac{Q}{P_0 V_A}}$; AN : $\beta = 7,80$.

7. Vu la formule $\eta = 0,630$.

8. $P = W \cdot N^{\text{bre}} \text{ de cycles /s} = \eta Q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5000}{60}$; AN : $P = 138,1 \text{ chevaux}$.

9. Il y a des pertes de puissance à l'intérieur du moteur, dans les accessoires (alternateur, ventilateur, pompe à eau), dans les organes de transmission (boîte de vitesses, cardans) avec irréversibilité...

4.2. Les deux principes

Appartiennent aux programmes de PTSI, BCPST1, TPC1

4.2.1. Pompe à chaleur

Les différentes parties sont entièrement indépendantes.

I. On considère un gaz G monoatomique dont l'équation caractéristique relative à un gramme de gaz s'exprime par la relation : $P(V-b) = r.T$, où P est la pression du gaz, T sa température absolue et V son volume ;

b et r sont des constantes : $b = 5,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$; $r = 2,08 \text{ J.K}^{-1} \cdot (\text{gramme})^{-1}$.

Le rapport des chaleurs massiques du gaz G à pression et volume constants est :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} ; c' \text{ est une constante indépendante de } V \text{ et de } T.$$

1. Calculer la chaleur massique à volume constant c_v .

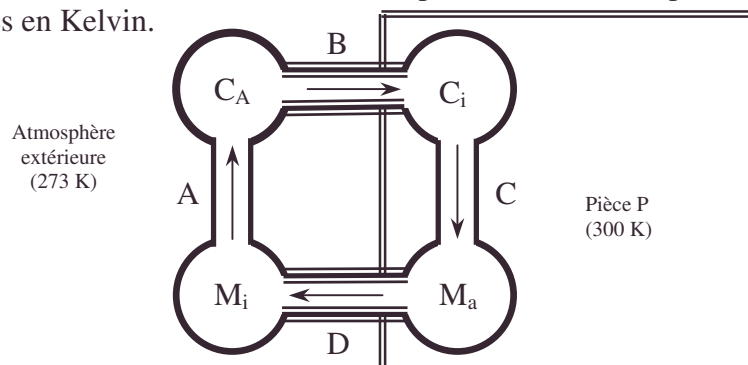
2. Etablir les expressions de l'énergie interne U et de l'entropie S d'une masse du gaz G égale à un gramme.

3. Une certaine quantité de gaz G est détendue adiabatiquement et réversiblement de la pression $P' = 10^6 \text{ N/m}^2$ à la pression $P = 10^5 \text{ N/m}^2$. La température initiale du gaz étant 273 K , calculer sa température après la détente.

4. Le gaz pris à 273 K et à la pression $P_0 = 10^6 \text{ N/m}^2$ est amené adiabatiquement à la pression $P = 10^5 \text{ N/m}^2$ par une détente de Joule-Thomson (détente isenthalpique). Calculer sa température après la détente.

II. On se propose d'utiliser, pour maintenir la température d'une pièce à 300 K , un appareil de chauffage utilisant un cycle de transformations du gaz G . Une masse donnée de gaz G , enfermée dans l'appareil, y décrit de façon continue un cycle fermé ABCD (voir figure). Le gaz se trouve en A à la température de 273 K (qui est celle de l'atmosphère extérieure) et à la pression $P_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$. Il est alors comprimé adiabatiquement par un compresseur C_A qui l'amène en B à la température de 300 K . La canalisation B est calorifugée et permet au gaz de pénétrer sans perte de chaleur dans la pièce P où un compresseur C_i lui fait subir une compression isotherme qui l'amène en C à la pression $P = 10^6 \text{ N/m}^2$. Le gaz subit alors une détente adiabatique dans un moteur à air comprimé M_a ; cette détente l'amène en D à la température de 273 K dans un tube calorifugé, d'où il passe enfin dans un moteur M_i où il subit une détente isotherme qui le ramène en A dans les conditions initiales. Le gaz G reprend ensuite indéfiniment le même cycle. On supposera que la totalité du travail fourni par le gaz dans les détentes est récupérable sur l'arbre des moteurs M_i et M_a , et que l'ensemble de l'appareil fonctionne de façon réversible.

1. Tracer sur un diagramme de Clapeyron (p, v) le cycle décrit par un gramme de gaz G et en déterminer les points remarquables pour lesquels on donnera les valeurs numériques des variables d'état, les volumes étant exprimés en m^3 , les pressions en N/m^2 et les températures en Kelvin.



- adiabatique réversible, chaleur massique à volume constant, compresseur, compression, diagramme de Clapeyron, énergie interne, entropie, équation d'état d'un gaz réel, isenthalpique, Joule-Thomson, moteur, moteur à air comprimé, pompe à chaleur, travail

2. Quel est l'"organe" chauffant de l'appareil ? Quelle quantité de chaleur Q la circulation d'un gramme de gaz apporte-t'elle à la pièce P ?

3. Calculer le travail total W que l'on doit dépenser pour fournir à la pièce cette quantité de chaleur Q .

4. Quelle quantité de chaleur Q' pourrait-on obtenir en dissipant la même énergie W dans un radiateur électrique (en supposant le rendement égal à l'unité) ?

5. En déduire le "rendement" de ce mode de chauffage, et commenter le résultat obtenu.

III. La température extérieure est supposée égale à $T_1 = 260$ K. On veut maintenir dans un bâtiment une température constante, soit $T_2 = 290$ K. Par un système de chauffage central au fuel, on dépensait jusqu'alors a litres de fuel par jour (environ 25 l) ce qui fournissait la quantité de chaleur q par jour nécessaire à compenser les déperditions de chaleur. Un conseiller n° 1 vient proposer un dispositif qu'il déclare thermodynamiquement plus avantageux. Il déclare que lorsqu'on brûlera a litres de fuel, il extraira la quantité de chaleur Q des gaz chauds pour assurer la vaporisation de l'eau d'une chaudière auxiliaire à la température $T_3 = 480$ K puis prendra deux machines thermiques réversibles fonctionnant l'une entre T_1 et T_2 , l'autre entre T_2 et T_3 .

1. Représenter sur un schéma les trois sources de chaleur et les deux machines thermiques. Faire figurer les transferts d'énergie sous forme thermique et mécanique, ainsi que le sens de ces transferts.

2. Calculer le temps t (en jours) pendant lequel le chauffage sera assuré avec a .

3. Un conseiller n° 2 propose de brûler a litres de fuel pour en extraire la quantité de chaleur q afin d'assurer la vaporisation de l'eau d'une chaudière auxiliaire à $T_4 = 530$ K. Il utilisera deux machines thermiques réversibles entre T_1 et T_2 et T_1 et T_4 respectivement.

1. Calculer le temps de chauffage t' (en jours) pendant lequel le chauffage sera assuré avec a .

2. Le système du conseiller n° 2 est-il préférable à celui du conseiller n° 1 ou est-ce l'inverse ?

Le système le plus économique tire-t'il cet avantage de la température à laquelle fonctionne la chaudière auxiliaire, ou cet avantage se maintient-il pour $T_4 = T_3$? Pouvez-vous donner une interprétation qualitative soit de la supériorité de l'un des deux systèmes sur l'autre (pour une température donnée de la chaudière auxiliaire), soit de l'identité de leurs performances ?

4. La durée du chauffage fonctionnant avec a augmentant avec la température de la chaudière auxiliaire, un conseiller n° 3 prétend qu'il pourrait (en utilisant le même dispositif que ses prédécesseurs) augmenter indéfiniment cette durée de chauffage. Montrez-lui qu'il se trompe.

Centrale ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. $dQ = c_p dT + k dP = c_v dT + l dV$; pour identifier les termes en dT , faisons

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV \quad \text{d'où} \quad dQ = \left[c_p + k \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \right] dT + k \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV,$$

avec $k = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$, 2^{ème} formule de Clapeyron (démonstration classique en écrivant dH et dS différentielles totales).

En identifiant : $c_V = c_P - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$. Or $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{r}{P}$ et $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{r}{V-b} = \frac{P}{T}$.

$c_V = c_P - r$; avec $\frac{c_P}{c_V} = \gamma$, $c_V = \frac{r}{\gamma-1}$; AN : $c_V = 3,12 \text{ JK}^{-1}\text{g}^{-1}$.

2.a. $dU = c_V dT + (1-p) dV$ avec $l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$; 1^{ère} formule de Clapeyron (dU et dS différentielles totales ; $l = P \Rightarrow dU = c_V dT$;

$$\Rightarrow U = U_0 + \frac{r}{\gamma-1} (T - T_0).$$

$$\text{b. } dS = c_V \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} dv = \frac{r}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + r \frac{dV}{V-b} \Rightarrow S = S_0 + \frac{r}{\gamma-1} \ln \frac{T}{T_0} + r \ln \left(\frac{V-b}{V_0-b} \right) ;$$

$$S = S_0 + \frac{r\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T}{T_0} - r \ln \frac{P}{P_0}.$$

3. $\Delta S = 0$ donne la formule connue $T = T' \left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$; AN : $T = 108,7 \text{ K}$ avec $\gamma = 1,67$.

4. $\Delta H = 0$; or $H = U_0 + \frac{r}{\gamma-1} (T - T_0) + PV = U_0 + \frac{r}{\gamma-1} (T - T_0) + rT + bP$

$$H' = U_0 + \frac{r}{\gamma-1} (T' - T_0) + rT' + bP' \Rightarrow T = T' + \frac{b(\gamma-1)}{r\gamma} (P' - P) ; \text{ AN : } T = 271,98 \text{ K}.$$

II.1. Diagramme

$$\text{A : } P_A = P_0 ; V_A = \frac{rT_A}{P_A} + b$$

$$\text{A.N. : } P_A = 10^5 \text{ Pa ; } V_A = 5,684 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ; T_A = 273 \text{ K}.$$

$$\text{B : } P_B = P_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ; V_B = \frac{rT_B}{P_B} + b.$$

$$\text{A.N. : } P_B = 1,27 \cdot 10^5 \text{ Pa. } V_B = 4,935 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ; T_B = 300 \text{ K}.$$

$$\text{C : } P_C = P ; V_C = \frac{rT_C}{P_C} + b ; \text{ A.N. : } V_C = 0,699 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ; T_C = T_B = 300 \text{ K}.$$

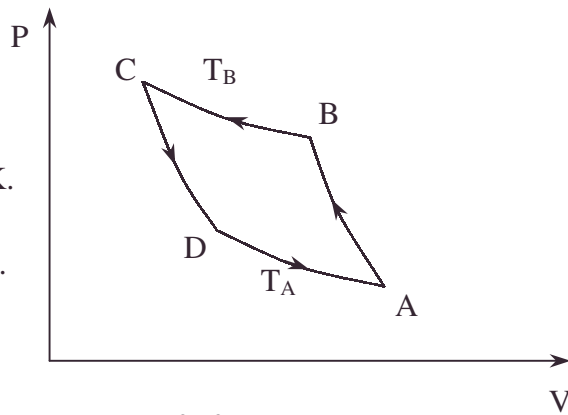
$$\text{D : } P_D = P_C \left(\frac{T_D}{T_C} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ; V_D = \frac{rT_D}{P_D} + b ; \text{ A.N. : } P_D = 7,900 \cdot 10^5 \text{ Pa ; } V_D = 0,725 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ; T_D = T_A = 273 \text{ K}.$$

2. L'organe chauffant est C_i qui assure la compression isotherme pendant la transformation BC ;

$$\text{or } Q_{BC} = -W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p dV = rT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V-b} = rT_B \ln \frac{V_C-b}{V_B-b}.$$

$$\text{La pièce reçoit } Q = -Q_{BC} = -rT_B \ln \frac{V_C-b}{V_B-b} = rT_B \ln \frac{P_C}{P_B}.$$

$$\text{AN : } Q = 1,288 \cdot 10^3 \text{ J.g}^{-1}.$$



$$3. W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$

$$W = \frac{r}{\gamma-1} (T_B - T_A) + r T_B \ln \frac{P_C}{P_B} + \frac{r}{\gamma-1} (T_D - T_C) - r T_D \ln \frac{P_D}{P_A}.$$

$$W = r T_B \ln \frac{P_C}{P_B} - r T_D \ln \frac{P_D}{P_A} ; \text{ or } \frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_C}{T_D} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{P_C}{P_D} \Rightarrow \frac{P_C}{P_B} = \frac{P_D}{P_A}.$$

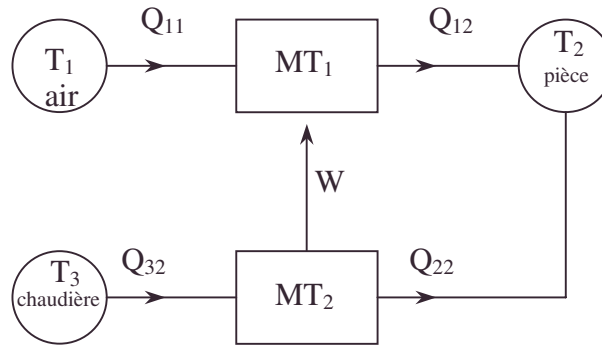
$$\Rightarrow W = r (T_B - T_A) \ln \frac{P_C}{P_B} ; W = \frac{(T_B - T_A)}{T_B} Q ; \text{ AN : } W = 116 \text{ J.g}^{-1}.$$

$$4. \text{ Avec un rendement supposé de 1, } Q' = W ; \text{ AN : } Q' = 116 \text{ J.g}^{-1} \ll Q.$$

$$5. \text{ L'efficacité } \eta = \frac{Q}{W} = \frac{T_B}{T_B - T_A} ; \text{ AN : } \eta = 11,10.$$

On obtient beaucoup plus d'énergie (sous forme thermique) qu'on en fournit.

III.1.



2. Considérons $MT = MT_1 + MT_2$, machine réversible fonctionnant avec 3 sources ;

$$\text{l'égalité de Clausius donne : } \frac{Q_{11}}{T_1} + \frac{Q_{32}}{T_3} - \frac{(Q_{12} + Q_{22})}{T_2} = 0 ;$$

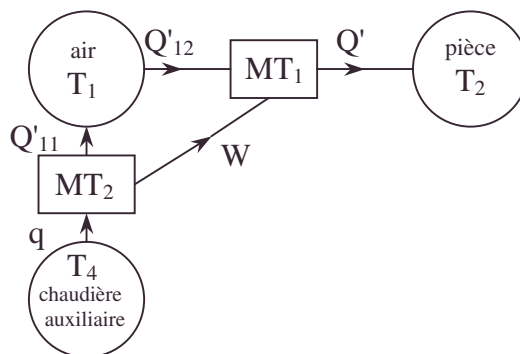
la conservation de l'énergie (pour MT non dissipative) donne :

$$Q_{11} + Q_{32} = Q_{12} + Q_{22} = Q ;$$

$$\text{on en déduit : } Q_{32} = \frac{1 - \frac{T_1}{T_2}}{1 - \frac{T_1}{T_3}} Q ; Q_{11} = \frac{\frac{T_1}{T_2} - \frac{T_1}{T_3}}{1 - \frac{T_1}{T_3}} Q.$$

$$t = \frac{Q}{q} \quad \text{avec } q = Q_{32} \Rightarrow t = \frac{1 - \frac{T_1}{T_3}}{1 - \frac{T_1}{T_2}} ; \text{ AN : } t = 4,43 \text{ jours.}$$

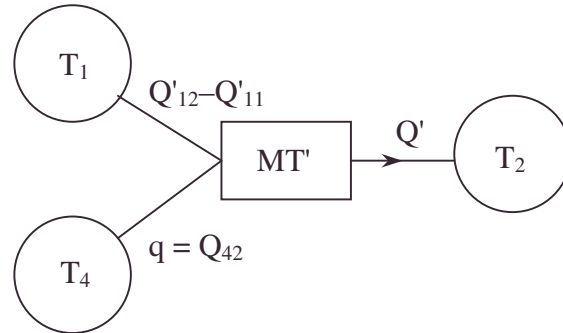
3.a.



Considérons $MT' = MT_1 + MT_2$:

On a remplacé T_3 par T_4

$$t' = \frac{Q}{q} = \frac{1 - \frac{T_1}{T_4}}{1 - \frac{T_1}{T_2}} ; \text{AN : } t' = 4,92 \text{ jours.}$$



b. $t' > t$, mais si $T_4 = T_3$; $t' = t$.

- L'amélioration apparente est due à l'utilisation d'une source $T_4 > T_3$.
- Elle ne se maintient pas pour $T_4 = T_3$.

Le conseil n° 2 est meilleur en pratique, mais sans principe nouveau.

4. Durée limite quand T_3 ou $T_4 \rightarrow +\infty$: $t_{\text{lim}} = \frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_2}}$; AN : $t_{\text{lim}} = 9,67$ jours.

Le conseiller n°3 se trompe.

4.2.2. Ballon sonde avec chauffage du gaz

Dans tout le problème, les fluides utilisés sont assimilés à des gaz parfaits de même composition avec le rapport des capacités calorifiques massiques à pression et volume constants $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{constante}$. On posera $r = \frac{R}{\mathcal{M}}$ avec \mathcal{M} = masse molaire de l'air

et R = constante des gaz parfaits.

Un ballon-sonde est composé d'une enveloppe parfaitement souple et imperméable à la chaleur, contenant une masse m d'air constante occupant le volume V et une résistance de chauffage R_C de volume négligeable. La température T et la pression P de la masse m sont supposées uniformes dans tout le ballon. Sous cette enveloppe est placée une nacelle de volume négligeable contenant une pile électrique. La masse de l'enveloppe et de la nacelle avec tous les accessoires est M .

A l'altitude z où évolue le ballon, la température est T_z , la pression P_z et la masse volumique ρ_z . L'axe Oz est vertical ascendant, l'origine O étant prise au niveau du sol.

La température T_z décroît jusqu'à 11 km puis reste constante pour des altitudes supérieures; la pression P_z obéit à la loi classique de l'atmosphère en équilibre mécanique et thermique.

- L'accélération de la pesanteur g est supposée constante.
- Le système thermodynamique étudié est la masse m d'air.
- Dans tout le problème, les frottements seront négligés.

1. Avec les hypothèses faites, relier P et P_z .

2. En faisant un bilan des forces en présence, quelle relation limite doit-il exister entre T et T_z pour que l'ascension du ballon soit quasi statique ?

3. Lors d'une ascension élémentaire les forces de pression travaillent lorsque le ballon se déplace et se déforme simultanément. On admettra que l'on peut calculer le travail élémentaire résultant en faisant la somme algébrique de deux travaux :

- l'un correspondant à la déformation du ballon à pression constante,
- l'autre au déplacement du ballon à volume constant dans l'atmosphère (ce dernier travail est égal à celui de la poussée d'Archimède considérée comme force unique).

• *adiabatique réversible, , équilibre, transformation quasi statique, travail*

Ecrire l'expression générale du premier principe de la thermodynamique appliqué à la masse m lors d'une ascension élémentaire dz à vitesse constante.

4. Lors d'une ascension élémentaire dz où T serait maintenue constante grâce à la pile, quelle est l'énergie élémentaire δW_{el} fournie par la pile ?

Une telle ascension est-elle possible si $z < 11\text{ km}$? Justifier.

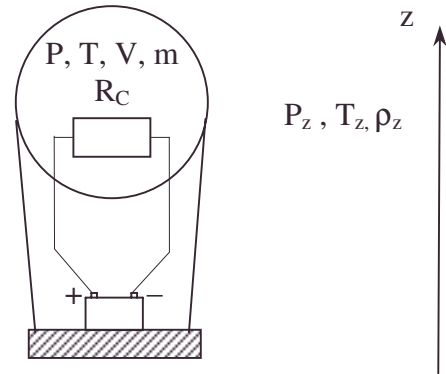
5. Si on ne fait passer aucun courant dans la résistance R_C , quelle doit être la loi de variation $T_z = f(z)$ pour que l'ascension soit "réversible" ?

Est-il possible de réaliser une telle ascension au-dessus de 11 km ? Justifier.

6. Application numérique.

- $V = 20\text{ m}^3$ (volume du ballon au sol).
- $P_z = 10^5\text{ Pa}$ au sol.
- $T_z = 15^\circ\text{ C}$ au sol.
- $\mathcal{M} = 29\text{ g.mol}^{-1}$ (masse molaire de l'air).
- $R = 8,31\text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- $M = 10\text{ kg}$.
- $g = 9,81\text{ m.s}^{-2}$.

Calculer m ainsi que l'énergie fournie par la pile lors d'une ascension où $T = \text{cste}$, lorsque z varie de 1 km.



CCP ; Durée : 1h

Corrigé

1. L'enveloppe étant parfaitement souple, $PdS = P_zdS \Rightarrow P = P_z$.

2. Pour le système global, écrivons le P.F.D.

$$(m + M)\vec{a} = (M + m)\vec{g} + (-\rho_z V \vec{g}) \quad \text{cf. poids et poussée d'Archimède.}$$

$$\text{Pour une ascension quasi statique } \vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \rho_z V = (M + m). [1]$$

Pour un gaz parfait, l'équation d'état donne :

$$\text{– Pour le gaz intérieur } PV = mRT. [2]$$

$$\text{– Pour le gaz extérieur en contact } P_z d\tau = dmr T_z \Rightarrow P_z = \rho_z r T_z. [3]$$

$$\text{Eliminons } P_z = P \text{ et } V \text{ entre [1], [2] et [3] ; il reste } \frac{T}{T_z} = \frac{M + m}{m}.$$

3. Ecrivons le premier principe de la thermodynamique à un système en mouvement : $d(U + E_C) = dW_{\text{pression}} + dQ_{\text{ext}} + dW_{\text{autre}}$, U énergie interne du gaz intérieur dans son repère ; or $dE_C = 0$ à vitesse constante.

$$\text{Le travail de la force d'Archimède s'écrit: } d\mathcal{E} = \rho_z V g dz \text{ or } dP_z = -\rho_z g dz = dP ; \\ \Rightarrow d\mathcal{E} = -VdP.$$

$$mc_v dT + 0 = -PdV - VdP + dQ_{\text{ext}} - (M + m)gdz = -d(PV) + dQ - (M + m)gdz ;$$

Cette expression sera simple d'usage.

4. En admettant un rendement de chauffage parfait $dQ = dW_{el}$, si T est constant $dT = 0 \Rightarrow PV = \text{cste}$ soit $d(PV) = 0$; il reste $dW_{el} = (M + m)gdz$.

Si $z < 11\text{ km}$, T_z décroît ; or pour l'ascension quasi statique, $T = \frac{M + m}{m} T_z$; T décroît

ce qui est contraire à l'hypothèse de 4. ; impossibilité donc de la modélisation.

5. S'il n'y a pas de chauffage (cf. aucun courant) et que la transformation est réversible, on peut appliquer PV^γ constante, ou son équivalent $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{constante}$:

• enveloppe d'aérostat parfaitement souple, Laplace (formule isentropique de), P.F.D., poussée d'Archimède, premier principe de la thermodynamique, rendement, transformation quasi statique, travail

$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$. Or, vu $T = \frac{M+m}{m} T_Z$; $\frac{dT}{T} = \frac{dT_Z}{T_Z}$; de plus $dP = dP_Z = -\rho_Z g dz$, vu l'équilibre de l'atmosphère, l'élimination de P et T grâce à $P_Z = \rho_Z r T$ donne :

$$-\frac{g}{r} dz + \frac{\gamma}{1-\gamma} dT_Z = 0, \text{ soit } T_Z = T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{r} z.$$

Cette décroissance est impossible pour $z > 11$ km, où $T_Z = \text{constante}$. L'ascension "réversible" est donc alors impossible.

6.a. Au sol, $T = T_0 \frac{M+m}{m}$ or $P_0 V_0 = m r T \Rightarrow m = \frac{\mathcal{M} P_0 V_0}{R T_0} - M$; AN : $m = 14,23$ kg.

b. $dW_{el} = (M+m)gdz \Rightarrow W_{el} = (M+m)g\Delta z$; AN : $W_{el} = 237,7$ kJ.km⁻¹.

4.2.3. Compresseurs

L'objet de ce problème est l'étude d'un compresseur qui aspire en régime permanent un débit d'air aux conditions de pression et température P_1, T_1 dans une tuyauterie de section S_1 constante et de grande dimension. Cet air est refoulé dans une tuyauterie de section S_2 constante et de grande dimension aux conditions P_2, T_2 (voir figure 1).

Dans tout le problème, les travaux considérés seront rapportés à l'unité de masse d'air.

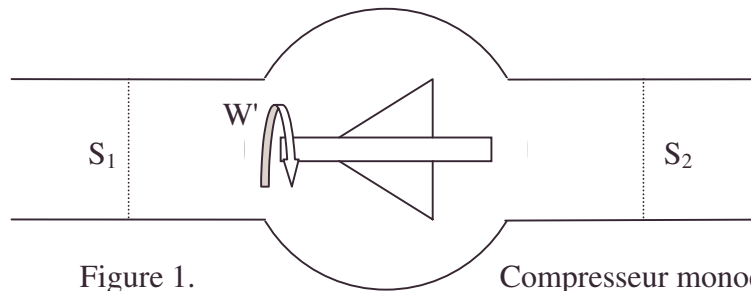


Figure 1.

Compresseur monoétage.

Dans le carter du compresseur, l'air est brassé par des aubes entraînées par un moteur électrique fournissant au fluide un travail utile noté W' . L'énergie cinétique macroscopique sera négligée dans tout le problème et les transformations seront toutes quasi statiques. L'air sera considéré comme un fluide non pesant et obéissant aux relations des gaz parfaits.

On notera respectivement $\overline{C_p}, \overline{C_v}$ (supposés indépendants de la température), la chaleur massique à pression constante et la chaleur massique à volume constant; r la constante massique des gaz parfaits. La dernière question (**II.8.**) peut être traitée de façon indépendante en admettant le résultat de la question **I.2.a.**

I. Etablissement de relations générales

1. Pour une compression quelconque, adiabatique ou non, en utilisant le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé que l'on précisera, relier la variation d'enthalpie de l'air à la traversée du compresseur à la chaleur Q échangée avec l'extérieur et au travail W' défini ci-dessus. On raisonnera entre deux instants voisins de sorte que la masse d'air aspiré soit prise uniquement dans le tuyau d'entrée et celle comprimée soit rejetée dans le tuyau de sortie. Que vaut cette variation d'enthalpie pour le gaz parfait ?

2.a. Si la transformation envisagée est réversible, montrer que $W' = \int_1^2 V dP$.

b. Le frottement visqueux entre le fluide et les aubes n'est pas négligeable.

• *adiabatique, aube, compresseur, énergie cinétique macroscopique négligée en thermodynamique, équilibre, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, isentropique, moteur, r la constante massique des gaz parfaits, travail, variation d'enthalpie*

En admettant ce phénomène dissipatif comme seule cause d'irréversibilité et appelant δS_f la création élémentaire d'entropie correspondante, donner la nouvelle expression du travail W' . Interpréter le résultat.

II. Transformations thermodynamiques dans le compresseur

On se propose maintenant de comparer divers rendements caractérisant la qualité de la transformation thermodynamique dans le compresseur.

1. La compression réelle est adiabatique et avec frottements visqueux: que peut-on dire pour cette transformation réelle de la variation d'entropie ΔS_{re} à la traversée de la machine ?

A partir du résultat **I.1.**, exprimer le travail utile réel W'_{re} mis en jeu dans ce compresseur en fonction des températures T_1 et T_2 .

2. Si la compression était isentropique de T_1, P_1 à la même pression P_2 que la compression réelle et à une température notée T_{2is} , exprimer le travail utile W'_{is} en fonction de T_1 et T_{2is} .

3. On appelle compression polytropique une transformation non adiabatique et sans frottement qui partant du même état initial T_1, P_1 aboutit au même état final T_2, P_2 que la transformation réelle et ayant à chaque instant de la transformation la même variation d'entropie que la transformation réelle. Les deux transformations ont la même représentation dans le diagramme (T, S) . Que peut-on dire de la variation d'entropie ΔS_{pol} ? Exprimer le travail polytropique élémentaire $\delta W'_{pol}$ en fonction de P, T .

4.a. On appelle rendement isentropique du compresseur le rapport $\eta_{is} = W'_{is} / W'_{re}$; donner son expression en fonction de $\gamma, P_1, T_1, P_2, T_2$.

b. On appelle rendement polytropique du compresseur le rapport

$$\eta_{pol} = \delta W'_{pol} / \delta W'_{re} ; \text{ donner son expression en fonction de } \gamma, T, P.$$

c. On admet que ce rendement reste constant tout au long de la compression,

montrer que T et P sont reliés par une relation de la forme $TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cste}$.

Exprimer η_{pol} en fonction de n et γ .

5.a. Pour une transformation quelconque entre les états (T_0, P_0) et (T, P) , donner l'expression de la variation d'entropie ΔS .

b. En déduire l'équation d'une isobare dans le diagramme entropique $(S \text{ en abscisses}, T \text{ en ordonnées})$.

6. Représenter sur un même diagramme entropique

- les isobares P_1 et P_2
- la compression isentropique de T_1, P_1 à T_{2is}, P_2 .
- la compression réelle de T_1, P_1 à T_2, P_2
- l'isotherme réversible de T_1, P_1 à T_1, P_2 .

7. Evaluer par des aires sur ce diagramme (T, S) : le travail réel W'_{re} de (P_1, T_1) à (P_2, T_2) , le travail isentropique W'_{is} de (P_1, T_1) à (P_2, T_{2is}) ainsi que le travail polytropique W'_{pol} de (P_1, T_1) à (P_2, T_2) et le travail W_f des pertes par frottement dans le cas réel. Pour ce faire, le fluide pourra décrire des cycles à trois points en introduisant le point correspondant à l'état du gaz (P_2, T_1) . Relier ces travaux.

8. On s'intéresse maintenant à une compression étagée avec refroidissement intermédiaire (figure 2). Le compresseur précédent est donc constitué de deux petits compresseurs isentropiques (1^{er} compresseur de 1 à 1', 2^e compresseur de 1'' à 2). Entre les deux compresseurs, on effectue un refroidissement isobare réversible (de 1' à 1'') de sorte que $T_{1''} = T_1$.

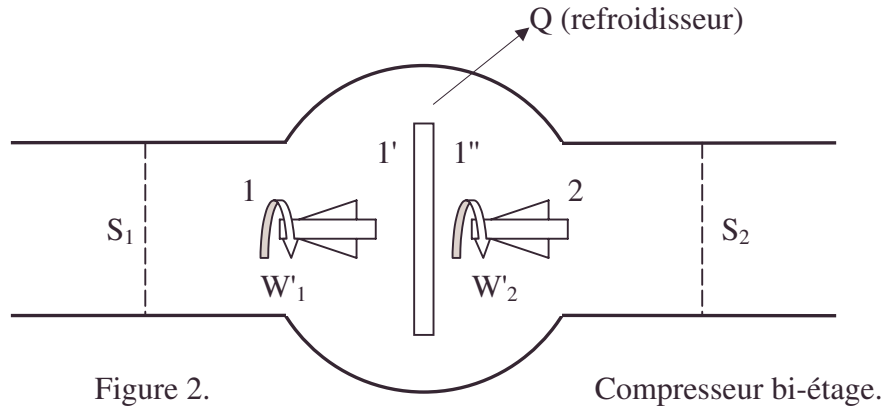


Figure 2.

Compresseur bi-étage.

a. Calculer les travaux utiles W'_1 (de 1 à 1'), W'_2 (de 1'' à 2), W'_3 (de 1' à 1'') et le travail utile total W' en fonction de γ , r , T_1 et des rapports de pression $x_1 = P'_1 / P_1$, $x_2 = P_2 / P'_1$.

b. Le rapport $a = P_2 / P_1$ étant donné, pour quelle valeur de x_1 ce travail W' est-il minimal ?

c. Quel intérêt y-a-t-il à utiliser un compresseur à 2 étages au lieu d'un compresseur monoétage ?

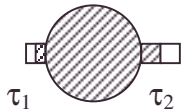
CCP ; Durée : 2h

Corrigé

I.1.a. Prenons comme système : l'air présent entre les deux traits pointillés à l'instant t.

b. $\Delta U = Q + W_{\text{pression}} + W'$.

Vu l'analogie avec la détente de Joule Thomson, $W_{\text{pression}} = P_1 \tau_1 - P_2 \tau_2$, τ_1 et τ_2 étant les volumes entrant et sortant pendant Δt , durée du cycle.



La partie commune reste la même en régime stationnaire pour les 2 états, et par définition, $\Delta H = \Delta U + 0 + P_2 \tau_2 - P_1 \tau_1$,

car $\Delta(PV)_{\text{partie commune}} = 0$ et $\Delta H = Q + W'$.

c. Soit $dH = \delta Q + \delta W'$ pour une transformation quasi statique infinitésimale.

d. $dH = \bar{C}_P dT$ d'où $\Delta H = \bar{C}_P (T_2 - T_1)$ pour un gaz parfait.

2.a. Si la transformation est réversible, $\delta Q = TdS = \bar{C}_P dT - VdP$ pour le gaz parfait

\Rightarrow I.1.c,d. s'écrit : $\bar{C}_P dT = \bar{C}_P dT - VdP + dW' \Rightarrow dW' = VdP$ et $W' = \int_1^2 VdP$.

b. La transformation n'est plus réversible (re signifie réel).

$dS = \frac{dQ_{\text{re}}}{T} + \delta S_f \Rightarrow \delta Q_{\text{re}} = TdS - T\delta S_f$ avec $TdS = \bar{C}_P dT - VdP$;

I.1.c,d. s'écrit :

$\bar{C}_P dT = \bar{C}_P dT - VdP - T\delta S_f + dW' \Rightarrow dW' = VdP + T\delta S_f$ et $W' = \int_1^2 VdP + \int_1^2 T\delta S_f$.

c. Pour la même transformation $T_1, V_1, P_1 \rightarrow T_2, V_2, P_2$ vu $\delta S_f \geq 0$ d'après le 2^{ème} principe : le travail nécessaire est plus grand, une transformation irréversible est moins efficace, il faut compenser la dégradation de l'énergie.

II.1.a. $\Delta S_{\text{re}} > \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{re}}}{T} \Rightarrow \Delta S_{\text{re}} > 0.$
cf. Clausius

b. $\Delta H = Q_{\text{re}} + W'_{\text{re}} + \bar{C}_P(T_2 - T_1) \Rightarrow W'_{\text{re}} = \bar{C}_P(T_2 - T_1).$

2. $\Delta S = 0$ implique réversibilité et adiabaticité.

cf. **II.1.b.** $W'_{\text{is}} = \bar{C}_P(T_{2\text{is}} - T_1)$; on a la relation sur P_2 due à la transformation

isentropique réversible : $P_2^{1-\gamma} T_{2\text{is}}^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma \Rightarrow W'_{\text{is}} = \bar{C}_P T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1.$

3.a. $\Delta S_{\text{pol}} = \Delta S_{\text{re}} \Rightarrow \Delta S_{\text{pol}} > 0.$

b. La transformation est sans frottement, non dissipatrice, donc réversible.

$\delta S_f = 0$ vu **I.1.c.d.** $\Rightarrow dW'_{\text{pol}} = VdP = \frac{RT}{M} \frac{dP}{P} = rT \frac{dP}{P}.$

4.a. $\eta_{\text{is}} = \frac{W'_{\text{is}}}{W'_{\text{re}}} = \frac{T_{2\text{is}} - T_1}{T_2 - T_1}; \eta_{\text{is}} = \frac{T_1 \left[\left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} - 1 \right]}{T_2 - T_1}.$

b. $\eta_{\text{pol}} = \frac{\delta W'_{\text{pol}}}{\delta W'_{\text{re}}} = \frac{rT}{\bar{C}_P dT} \frac{dP}{P} = \frac{r}{\bar{C}_P} \frac{T}{P} \frac{dP}{dT};$ or $r = \bar{C}_P - \bar{C}_V$ et $\frac{r}{\bar{C}_P} = 1 - \frac{1}{\gamma};$

$\eta_{\text{pol}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dT}.$

c. Si $\eta_{\text{pol}} = \text{cste} : \frac{dT}{T} + \left(\frac{\frac{1}{\gamma} - 1}{\eta_{\text{pol}}} \right) \frac{dP}{P} \Leftrightarrow TP^{\frac{1}{\gamma}-1} = \text{cste}.$

La relation s'identifie avec $TP^{\frac{1-n}{n}} = \text{cste}$ pour $\frac{1-n}{n} = \frac{\frac{1}{\gamma}-1}{\eta_{\text{pol}}}$ qui permet de trouver une expression de n non demandée.

$\eta_{\text{pol}} = \frac{1 - \frac{1}{\gamma}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\gamma-1}{n-1} \cdot \frac{n}{\gamma}.$

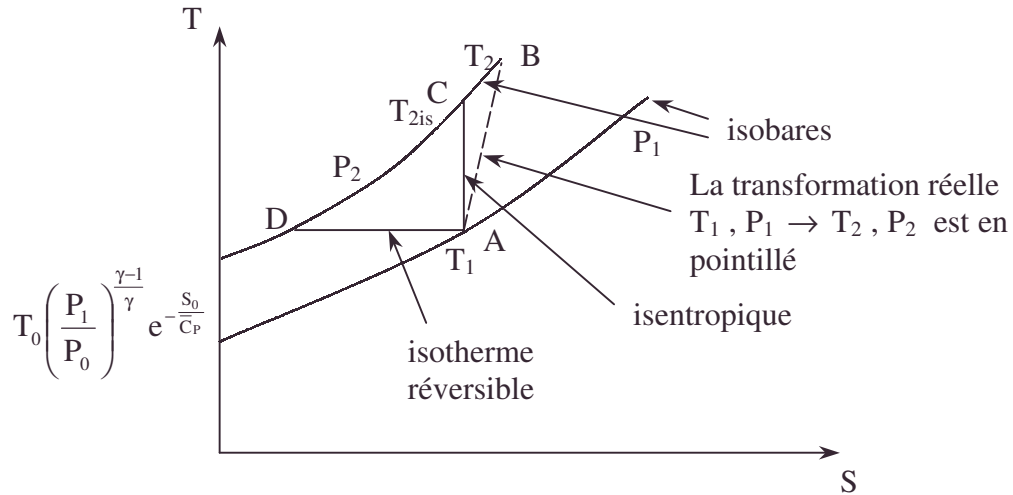
5.a. Imaginons une transformation réversible de mêmes états initial et final:

$dS = \bar{C}_P \frac{dT}{T} - \frac{VdP}{T} = \bar{C}_P \frac{dT}{T} - r \frac{dP}{P}; \Delta S = S - S_0 = \bar{C}_P \ln \frac{T}{T_0} - r \ln \frac{P}{P_0};$

b. $\frac{S - S_0 + r \ln \frac{P}{P_0}}{\bar{C}_P} = \ln \frac{T}{T_0} \Rightarrow T = T_0 \exp \left(\frac{S + r \ln \frac{P}{P_0} - S_0}{\bar{C}_P} \right) = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{S-S_0}{\bar{C}_P}};$

L'équation d'une isobare dans le diagramme T, S est une exponentielle.

6.



La compression polytropique obéit à $TP^{\frac{1-n}{n}} = T_0P_0^{\frac{1-n}{n}} \Rightarrow \frac{P}{P_0} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{n}{n-1}}$.

Or, pour un gaz parfait, $S - S_0 = \bar{C}_P \ln \frac{T}{T_0} - r \ln \frac{P}{P_0} = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{r n}{n - 1} \ln \frac{T}{T_0}$;

$S - S_0 = r \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{n}{n - 1} \right] \Rightarrow T = T_0 \exp \left[\frac{(S - S_0)(\gamma - 1)(n - 1)}{r(n - \gamma)} \right]$ équation de la transformation polytropique.

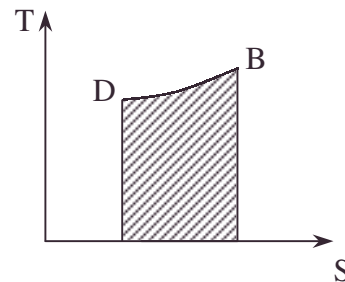
Exponentielle de pente grande quand n voisin de γ , représentant aussi la transformation réelle (AB sur le graphe).

7.a. $W'_{re_{AB}} = \bar{C}_P(T_2 - T_1) = \Delta H_{AB}$; or $\Delta H_{AB} = \Delta H_{AD} + \Delta H_{DB} = 0 + \Delta H_{DB}$, D point de l'isobare P_2 de température T_1 ; or $dU = TdS - PdV$ et $dH = TdS + VdP$;

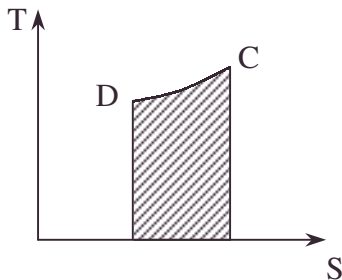
$$\Rightarrow \Delta H_{DB} = \int_D^B TdS + 0.$$

$$W'_{re_{AB}} = \int_D^B TdS, \text{ soit l'aire comprise entre DB}$$

(sur l'isobare P_2) et l'axe $T = 0$.



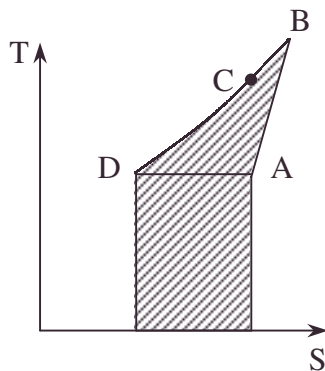
$$\text{b. } W'_{is_{AC}} = \bar{C}_P(T_{2is} - T_1) = \Delta H_{AC} = \Delta H_{AD} + \Delta H_{DC} = 0 + \int_D^C TdS.$$



Soit l'aire comprise entre DC (sur l'isobare P_2) et l'axe $T = 0$.

C point de l'isobare P_2 de même entropie que l'état initial. cf. T_{2is} .

c.



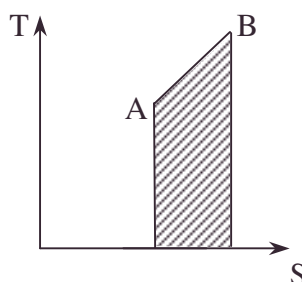
$$dW'_{\text{pol}} = rT \frac{dP}{P};$$

$$\text{or } TdS = T\bar{C}_P \frac{dT}{T} - r \frac{TdP}{P} = dH - dW'_{\text{pol}};$$

$$\int_A^B TdS = \int_A^B dH - \int_A^B dW'_{\text{pol}} \quad \text{or} \quad \int_A^B dH = \int_D^B TdS;$$

$W'_{\text{polAB}} = \int_D^B TdS - \int_A^B TdS$ soit l'aire hachurée ;
différence d'aire entre W'_{reAB} et l'aire comprise entre AB et l'axe $T = 0$.

d.



$$\text{or } W_f = W'_{\text{reAB}} - W'_{\text{polAB}} = \int_A^B TdS,$$

soit l'aire comprise entre AB et l'axe $T = 0$.

e. $W'_{\text{isAC}} < W'_{\text{polAB}} < W'_{\text{reAB}}$

8.a.α. $W'_1 = W_{\text{isAC}} = \bar{C}_P T_1 \left[\left(\frac{P'_1}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

$$W'_1 = \frac{r\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (\text{cf. II.2.})$$

β. $W'_2 = W_{\text{isDE}} = \frac{r\gamma}{\gamma-1} T_1 \left(x_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$ par analogie formelle.

γ. $W'_3 = W_{\text{PCD}} = \int_C^D VdP = 0$ car le refroidissement est isobare.

δ. $W' = W_{\text{isAC}} + W_{\text{isDE}} + W_{\text{PCD}} = \frac{r\gamma}{\gamma-1} T_1 \left[x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + x_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right].$

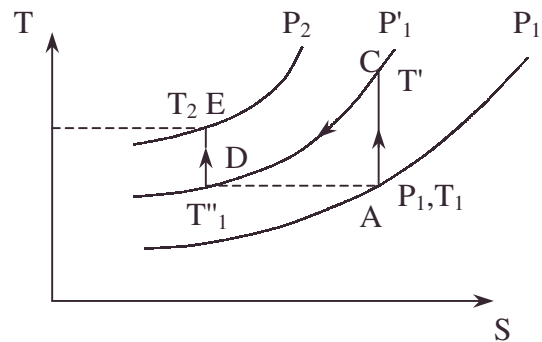
b. $a = x_1 \cdot x_2.$

$$\Rightarrow W' = \frac{rT_1\gamma}{\gamma-1} \left(x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - 2 \right); \quad \frac{\partial W'}{\partial \left(x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} = 0 = \frac{rT_1\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right) \Rightarrow x_{1m} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ est une fonction monotone croissante de x_1 .

x_1	$-x_{1m}$	0	x_{1m}
$\frac{\partial W'}{\partial \left(x_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}$	+	-	+
$W'(x_1)$	↗	↘	↗

• analogie



Il s'agit bien d'un minimum de W' pour $x_{1_m} = a^{\frac{1}{2}}$. On peut le remarquer sans tableau de variation en traçant la courbe

$$\text{c. } W'_{\min, 2 \text{ étages}} = \frac{2rT_1\gamma}{\gamma-1} \left(a^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right); \text{ or } W'_{1 \text{ étage}} = \frac{\gamma r}{\gamma-1} T_1 \left(a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right); \text{ cf. 8.a.}\alpha.$$

cas que l'on prendra comme à 1 étage à identifier.

$$W'_{1 \text{ étage}} - W'_{\min, 2 \text{ étages}} = \frac{rT_1\gamma}{\gamma-1} \left[a^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right]^2 > 0.$$

Pour un même taux de compression optimisé, on peut économiser de l'énergie avec un compresseur à 2 étages $W'_{\min, 2 \text{ étages}} < W'_{1 \text{ étage}}$.

4.2.4. Cycle de Stirling Moteur à fils de caoutchouc

I. Thermodynamique d'un fil de caoutchouc

Les paramètres thermodynamiques d'un fil de caoutchouc sont la longueur L , la tension F et la température T . Au voisinage d'une température moyenne T_m , d'une longueur moyenne L_m et d'une tension moyenne F_m , l'équation d'état est linéarisable et prend la forme : $F(L, T) = F_m + \rho (L - L_m) + \sigma (T - T_m)$ où ρ et σ sont des constantes positives. Le travail élémentaire reçu quand le fil s'allonge de dL lors d'une transformation réversible est noté $\delta W = F dL$. On désigne par C_L la capacité calorifique du fil à longueur constante et on note la chaleur reçue dans une transformation élémentaire par $\delta Q = C_L dT + h dL$, h étant a priori une fonction de T et de L . On suppose enfin que C_L est indépendant de la température.

1. A l'aide de l'expression différentielle des deux principes de la thermodynamique, exprimer h en fonction de T et de σ .

2. Montrer que C_L ne dépend pas de L : on dira que C_L est une constante.

3. Donner l'expression de l'entropie du fil, $S(T, L)$, en fonction de la longueur L , de la température T et de T_m, L_m, C_L et σ . On posera $S_m = S(T_m, L_m)$.

4. On tire sur le fil de façon isotherme. Quel est le signe de la variation d'entropie ?

Déterminer l'expression et indiquer le signe de la variation d'entropie d'une mole de gaz parfait dont le volume augmente de façon isotherme ; commenter le résultat obtenu, sachant que le fil de caoutchouc est un polymère constitué de longues chaînes de molécules.

5. Déterminer l'expression de l'énergie libre \mathcal{F} du fil ; on posera $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}(T_m, L_m)$; retrouver ainsi qu'à température constante, le fil se comporte comme un ressort élastique, dont on déterminera la raideur.

Pour ce qui suit, on rappelle que dans le diagramme de Clapeyron d'un gaz, le volume est en abscisse et la pression en ordonnée; on conviendra ici d'appeler le diagramme de Clapeyron du fil le diagramme où la longueur L est en abscisse et la tension F en ordonnée.

6. Représenter qualitativement un cycle de Carnot moteur dans le diagramme de Clapeyron, en indiquant le sens de circulation sur le cycle. On précisera en outre les relations $F(L)$ associées aux transformations réversibles dans ce cycle.

- compresseur, développement au premier ordre ou plus, énergie libre, entropie, fil de caoutchouc, graphe, minimum, moteur, optimisation, relation de Clapeyron, Stirling [cycle de], taux de compression, transformation élémentaire, travail, variation d'entropie

II. Moteur d'Archibald

Une roue circulaire de rayon R tourne sans frottement avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe horizontal perpendiculaire au plan de la figure et passant par son centre C . La moitié inférieure de la roue est en équilibre thermique avec un bain d'eau chaude à la température T_1 , la moitié supérieure est à la température T_2 de l'atmosphère ($T_1 > T_2$). D'un point O fixe, situé dans le plan de la roue, sur l'horizontale passant par le centre C tel que $OC = a$, avec a très petit devant R , rayonnent $2N$ fils de caoutchouc analogues à celui qui est décrit dans la première partie, et fixés régulièrement à la périphérie de la roue:

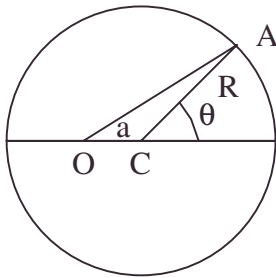


figure 1 : Roue du moteur à caoutchouc

Pour des raisons de clarté, a n'a pas été représenté très petit devant R .

La position d'un fil particularisé OA étant déterminée par l'angle θ entre OC et CA (fig.1), les autres fils font avec OC des angles $\theta + p\pi/N$, $\theta + 2p\pi/N$ (p entier variant de 1 à $2N - 1$) et ainsi de suite.

En accord avec l'hypothèse des équilibres thermiques de la roue, on admet que cette dernière tourne suffisamment lentement pour que chaque fil franchissant l'horizontale prenne sa nouvelle température instantanément, c'est-à-dire que l'excursion du fil dans l'atmosphère (ou le bain d'eau chaude) se fait à température constante T_2 (ou T_1).

1. Cycle de Stirling

1. Donner l'expression de la longueur du fil particularisé OA en fonction de a , R et θ , en négligeant le terme du deuxième ordre en a/R .

2. Soit A' le point du diagramme de Clapeyron correspondant à la longueur et la température la plus élevée; tracer qualitativement le schéma du cycle moteur A' , B' , C' et D' décrit par ce fil quand la roue fait un tour (cycle de Stirling).

2. Rendement

1. Donner l'expression de la quantité de chaleur Q_1 reçue par le fil OA de la part de la source chaude, en fonction de T_1 , T_2 , σ , C_L et a .

2. Donner de la même manière l'expression de la quantité de chaleur Q_2 reçue par ce fil de la part de la source froide et en déduire le travail fourni lors d'un tour de la roue.

3. Retrouver directement l'expression de ce travail à partir de la considération du cycle de la question II.1.2.

4. Donner, en négligeant toujours le terme du deuxième ordre en a/R , l'expression du moment \mathcal{M} par rapport à C de la tension du fil appliquée à la roue. Retrouver ainsi l'expression du travail reçu par un fil pour un tour de roue.

5. Exprimer le rendement η du système au cours d'un cycle en fonction de T_1 , T_2 , σ , a et C_L .

3. Performances

1. Soit η_c l'expression du rendement de Carnot d'un moteur ditherme travaillant entre une source chaude, à la température T_1 , et une source froide, à la température T_2 ; exprimant le rendement η de la question II.2.5. sous la forme $\eta = \alpha \eta_c$, donner l'expression de α .

2. L'ensemble des transformations ($B' \rightarrow C'$ et $D' \rightarrow A'$) est-il adiabatique ? Expliquer qualitativement pourquoi le rendement dans un cycle de Stirling est plus faible que le rendement dans un cycle de Carnot.

4. Applications numériques

On adoptera les valeurs numériques suivantes.

$$T_1 = 340 \text{ K.} \quad T_2 = 300 \text{ K.} \quad a = 2 \text{ cm.} \quad \sigma = 10^{-2} \text{ N.K.}^{-1}.$$

$$C_L = 3,3 \text{ J.K.}^{-1}. \quad 2N = 32. \quad \omega = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}.$$

1. Calculer les valeurs numériques respectives du rendement et de la puissance du moteur.

2. On désire utiliser ce dispositif pour pomper de l'eau dans le désert, la nappe étant à une profondeur de 10 m. Quel serait le débit de la pompe ainsi constituée ? Recommanderiez-vous l'utilisation d'un tel appareil ?

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

$$\text{I.1. } dU = C_L dT + (h + F) dL ; dS = \frac{C_L}{T} dT + \frac{h}{T} dL.$$

Ecrivons que dU et dS sont des différentielles totales exactes par le théorème de Schwartz sur les dérivées partielles croisées :

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_L + \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L \text{ et } \frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_L - \frac{h}{T^2} \Rightarrow h = -T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L = -\sigma T.$$

$$2. \text{ Reportons dans } \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T : \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = 0.$$

$$3. \text{ Intégrons } dS : S = S_m + C_L \ln \frac{T}{T_m} - \sigma (L - L_m).$$

$$4.a. \text{ Variation isotherme d'entropie : } S_2 - S_1 = -\sigma (L_2 - L_1) ; L_2 > L_1 \Rightarrow S_2 - S_1 < 0.$$

$$b. \text{ Pour un gaz parfait : } l = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = p = \frac{nRT}{V} = \frac{RT}{V} \text{ car } n = 1 ;$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} dV = \frac{C_V}{T} dT + R \frac{dV}{V}.$$

$$\text{et la variation isotherme d'entropie s'écrit } S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} ; V_2 > V_1 \Rightarrow S_2 - S_1 > 0.$$

c. L'entropie est une mesure du désordre microscopique. On conçoit l'augmentation des possibilités de désordre (complexions) quand on augmente le volume d'un gaz ($S_2 - S_1 > 0$). L'étirement d'un fil de caoutchouc constitué de longues chaînes moléculaires amène, au contraire, un ordre dans la direction de l'étirement $S_2 - S_1 < 0$.

$$5.a. \mathcal{F} = U - TS \Rightarrow d\mathcal{F} = dU - d(TS) = TdS + FdL - TdS - SdT = FdL - SdT ;$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T = F = F_m + \rho (L - L_m) + \sigma (T - T_m) ;$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}_m + F_m (L - L_m) + \frac{1}{2} \rho (L - L_m)^2 + \sigma (T - T_m) (L - L_m) + f(T) ;$$

$$\text{Vérifions } \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_L = -S ;$$

$$\sigma (L - L_m) + f'(T) = -S_m - C_L \ln \frac{T}{T_m} + \sigma (L - L_m) \Rightarrow f'(T) = -S_m - C_L \ln \frac{T}{T_m} ;$$

$$f(T) = -S_m (T - T_m) + K - C_L T \ln \frac{T}{T_m} + C_L (T - T_m) + K ;$$

• désordre microscopique [cf Boltzmann], énergie libre, moteur, relation de Clapeyron, rendement, variation d'entropie

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_m - C_L T \ln \frac{T}{T_m} + C_L (T - T_m) + K - S_m (T - T_m) + F_m (L - L_m) + \frac{1}{2} \rho (L - L_m)^2 + \sigma (T - T_m) (L - L_m) ; \text{ aussi, } K = 0.$$

b. pour une transformation isotherme entre les points (T, L_0) et (T, L) ,

$$\mathcal{F}(T, L) - \mathcal{F}(T, L_0) = \sigma (T - T_m) (L - L_0) + \frac{1}{2} \left[(L - L_m)^2 - (L_0 - L_m)^2 \right] + F_m (L - L_0).$$

Pour préparer l'analogie avec le ressort, nous prenons comme état initial de référence (T, L_0) tel que $\mathcal{F}(T, L_0) = 0 = F_m + \rho (L_0 - L_m) + \sigma (T - T_m)$; ce qui permet :

$$\mathcal{F}(T, L) - \mathcal{F}(T, L_0) = \frac{1}{2} \rho \left[(L - L_m)^2 - (L_0 - L_m)^2 \right] - \rho (L_0 - L_m) (L - L_0) = \frac{1}{2} \rho (L - L_0)^2.$$

Or à T donné, pour un ressort $E_p = \frac{1}{2} k (L - L_0)^2 = \mathcal{F}_1(T, L) - \mathcal{F}_1(T, L_0)$. Le fil de caoutchouc isotherme est donc équivalent à un ressort, celui-ci étant de raideur $k = \rho$.

6. Un cycle de Carnot est constitué de 2 isothermes et 2 adiabatiques réversibles.

– Equation d'une isotherme dans le nouveau diagramme de Clapeyron :

$F_T = g_1(T) + \rho L$ avec $g_1(T) = F_m + \sigma (T - T_m) - \rho L_m$. C'est une fonction affine.

– Equation d'une isentropique donnée par $S = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T$;

$$S = S_m + C_L \ln \frac{T}{T_m} - \sigma (L - L_m) \Rightarrow \ln \frac{T}{T_m} = \frac{S - S_m}{C_L} + \frac{\sigma}{C_L} (L - L_m) ;$$

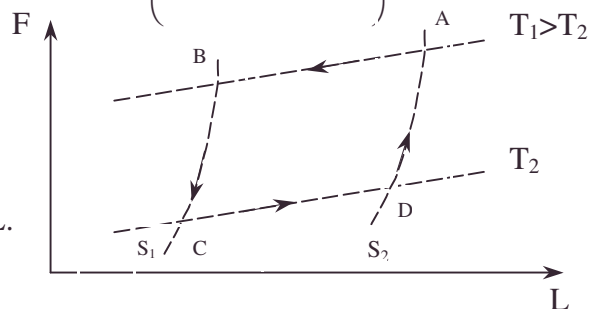
$$\Rightarrow T = T_m e^{\frac{S - S_m - \sigma L_m}{C_L}} e^{\frac{\sigma L}{C_L}} \Rightarrow F = F_m + \rho (L - L_m) + \sigma T_m \left(e^{\frac{\sigma L}{C_L}} e^{\frac{S - S_m - \sigma L_m}{C_L}} - 1 \right) ;$$

$$F_S = \rho L + \sigma T_m e^{\frac{S - S_m - \sigma L_m}{C_L}} e^{\frac{\sigma L}{C_L}} + K_1.$$

Le cycle est moteur si $W < 0$ d'où

$\oint F dL < 0$ avec le sens indiqué.

Remarquons que F augmente avec T et L .



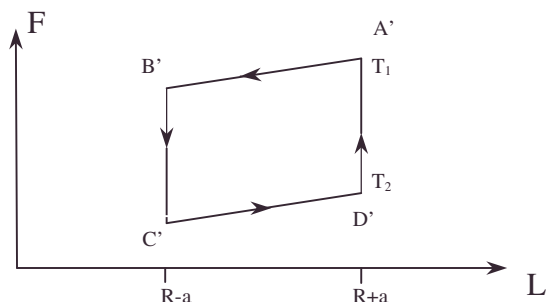
$$\text{II.1.1. } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} \Rightarrow OA^2 = OC^2 + CA^2 + 2 \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta.$$

$$OA = R \left(1 + \frac{a^2}{R^2} + \frac{2a}{R} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}} = R \left(1 + \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a}{R} \cos \theta - \frac{1}{8} 4 \frac{a^2}{R^2} \cos^2 \theta \dots \right).$$

$$OA = R \left(1 + \frac{a}{R} \cos \theta \right) \text{ en négligeant les termes en } \frac{a^2}{R^2}.$$

2. Graphe ci-contre :

on déduit alors du diagramme que le sens de rotation de A est négatif.



• *adiabatique réversible, analogie, développement au premier ordre ou plus, diagramme de Clapeyron, identification, isentropique, moteur*

2.1. $dQ = C_L dT + h dL$ avec $h = -\sigma T$.

Pour la transformation D'A'B' dans le milieu de l'eau chaude, le fil reçoit :

$$Q_1 = C_L (T_1 - T_2) - \sigma T_1 (L_{B'} - L_{D'}) = C_L (T_1 - T_2) + 2\sigma a T_1.$$

2.a. Pour la transformation B'C'D' dans le milieu froid,

$$Q_2 = C_L (T_2 - T_1) - \sigma T_2 (L_{D'} - L_{B'}) = -C_L (T_1 - T_2) - 2\sigma a T_2.$$

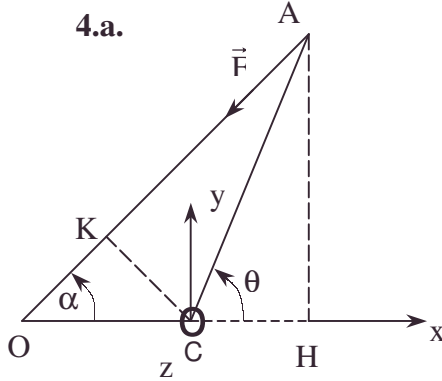
b. Pour un cycle $\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$;

$W = -(Q_1 + Q_2) = -2a\sigma(T_1 - T_2)$; $W < 0$; le cycle est moteur.

3. $-W$ représente l'aire du cycle.

Soit $W = -(F(A') - F(D'))(L_{D'} - L_{C'}) = -\sigma(T_1 - T_2).2a$.

4.a.



$$\vec{\mathcal{M}}_C = \vec{CA} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_C = \vec{CO} \wedge \vec{F} + \underbrace{\vec{OA} \wedge \vec{F}}_{\vec{0}} = aF \sin \alpha \vec{z}$$

$$\text{or } \sin \alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{R \sin \theta}{R \left(1 + \frac{a}{R} \cos \theta\right)} \Rightarrow$$

$$\vec{\mathcal{M}}_C = \frac{aF \sin \theta}{1 + \frac{a}{R} \cos \theta} \vec{z} ;$$

avec $F = F_m + \rho(R + a \cos \theta - L_m) + \sigma(T - T_m)$.

$$\vec{\mathcal{M}}_C = a \left(F_m + \rho(R + a \cos \theta - L_m) + \sigma(T - T_m) \right) \frac{\sin \theta}{1 + \frac{a}{R} \cos \theta} \vec{z}.$$

b. La roue (solide) reçoit de la part d'un fil un travail :

$$\mathcal{E} = \int_0^T \vec{\mathcal{M}}_C \cdot \vec{\Omega} dt = + \int_0^{-2\pi} \mathcal{M}_{C_z} d\theta \text{ vu le sens de rotation ;}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & + a \left(F_m + \rho R - \rho L_m - \sigma T_m \right) \underbrace{\int_0^{-2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{1 + \frac{a}{R} \cos \theta}}_0 + \sigma a T_1 \int_0^{-\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{1 + \frac{a}{R} \cos \theta} \dots \\ & + \sigma a T_2 \int_{-\pi}^{-2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{1 + \frac{a}{R} \cos \theta} + a^2 \rho \underbrace{\int_0^{-2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta}{1 + \frac{a}{R} \cos \theta}}_0. \end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = -\sigma a T_1 \frac{R}{a} \ln \frac{1 - \frac{a}{R}}{1 + \frac{a}{R}} + \sigma a T_2 \frac{R}{a} \ln \left(\frac{1 - \frac{a}{R}}{1 + \frac{a}{R}} \right) = \sigma R (T_2 - T_1) \ln \left(1 - \frac{2a}{R} \right) \text{ et après dévelop-}$$

pement limité : $\mathcal{E} = -2a\sigma(T_2 - T_1) \Rightarrow W = -\mathcal{E} = -2a\sigma(T_1 - T_2)$.

$$5. \eta = \frac{2N|W|}{2N.Q_1} = \frac{2a\sigma(T_1 - T_2)}{C_L(T_1 - T_2) + 2a\sigma T_1}.$$

3.1. On sait : $\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$; divisons numérateur et dénominateur de η par T_1 , il reste :

$$\eta = \frac{2a\sigma\eta_c}{C_L\eta_c + 2a\sigma} = \alpha\eta_c \text{ avec } \alpha = \frac{2a\sigma}{2a\sigma + C_L\eta_c} = \frac{2a\sigma T_1}{2a\sigma T_1 + C_L(T_1 - T_2)} < 1.$$

Aussi $\eta < \eta_c$.

$$2. \int_{B'}^{C'} dQ = C_L(T_2 - T_1) \text{ et } \int_{D'}^{A'} dQ = C_L(T_1 - T_2).$$

L'ensemble des transformations citées, quoique isolément non adiabatiques, est globalement adiabatique.

Le rendement du cycle de Stirling présente des irréversibilités qui réduisent son rendement. (cf. variations brusques de T).

4.a.α. $\eta = 1,214 \cdot 10^{-4}$.

β. $P = \frac{2NW}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 2a\sigma(T_1 - T_2) \cdot 2N = 2 \frac{Na}{\pi} \sigma \omega(T_1 - T_2)$; AN : $P = 0,512 \text{ W}$.

b.α. La pompe doit fournir pour chaque masse d'eau remontée m un travail

$$\tau = mgh \Rightarrow P = D_m g h \Rightarrow D_m = \frac{P}{gh} \text{ avec } h = 10 \text{ m}.$$

AN : $D_m = 5,22 \text{ g.s}^{-1}$ ($D_m = 18,8 \text{ kg/h}$).

β. Le débit est faible ; il sera diminué par l'évaporation ; le caoutchouc fatigue sous les contraintes mécaniques et thermiques, le rendement thermique est faible : je ne recommande pas l'utilisation industrielle de ce moteur.

4.2.5. Interaction entre deux galaxies gazeuses en rotation

Dans le cas où le référentiel propre d'un système macroscopique est non-galiléen, l'existence de forces affecte ses propriétés thermodynamiques. L'objet de cette partie est l'étude de cette influence dans le cas d'un gaz parfait en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen. Soit K le référentiel du laboratoire et K' le référentiel de même origine que K et en rotation uniforme par rapport à K . La vitesse angulaire constante de K' par rapport à K est $\vec{\Omega}$.

Une grandeur X , selon qu'elle sera considérée dans le référentiel K ou K' , sera notée X ou X' .

1. La valeur de la dérivée d'une grandeur X par rapport au temps t dépend, en général, du référentiel K ou K' dans lequel est effectuée la dérivation; aussi dans le présent problème, est-il nécessaire d'indiquer le référentiel par rapport auquel s'effectue la dérivation par un indice ; $dX/dt|_K$ et $dX/dt|_{K'}$ désignent respectivement les dérivées dans K et K' .

a. Rappeler la formule qui lie les dérivées $\vec{dA}/dt|_K$ et $\vec{dA}/dt|_{K'}$ d'un même vecteur \vec{A} dans K et K' .

b. Soit un ensemble de particules interagissant entre elles avec une énergie potentielle U . Soit m_i la masse de la particule i , \vec{r}_i sa position, \vec{v}_i sa vitesse dans le référentiel K et \vec{v}'_i celle dans le référentiel K' . L'objet de cette question est d'établir la relation qui existe entre les énergies E et E' .

• *adiabatique, astrophysique, dérivée d'une grandeur dans un repère donné, moteur, rendement, théorème d'Euler, travail*

α. Supposons que U , fonction des positions \vec{r}_i , puisse dépendre aussi explicitement du temps par suite de l'existence d'un champ extérieur variable dans le temps. Montrer dans ces conditions que l'énergie $E = E_C + U = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U$;

U satisfait la relation $\left. \frac{dE}{dt} \right|_K = \frac{\partial U}{\partial t}$.

Cette relation peut servir à définir l'énergie E' dans K' , car elle garantit sa conservation dans le temps dès que U ne dépend pas explicitement du temps.

Nous chercherons donc l'énergie E' telle que $\left. \frac{dE'}{dt} \right|_{K'} = \frac{\partial U}{\partial t}$.

β. Pour cela, montrer que $\left. \frac{dE_C}{dt} \right|_K = \left. \frac{dE_C}{dt} \right|_{K'}$;

γ. Calculer la différence $\left(\left. \frac{dU}{dT} \right|_{K'} - \left. \frac{dU}{dT} \right|_K \right)$.

δ. En déduire que $\left. \frac{d(E - \vec{M} \cdot \vec{\Omega})}{dt} \right|_{K'} = \frac{\partial U}{\partial t}$.

Ainsi, on prendra désormais $E' = E - \vec{M} \cdot \vec{\Omega}$.

$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$ est le moment cinétique total dans K par rapport à l'origine O .

Désormais, l'axe \vec{Oz} sera pris suivant $\vec{\Omega}$, et M_z et $\vec{M} \cdot \vec{\Omega}$ seront écrits simplement sous la forme M et $M\Omega$.

2. Considérons maintenant un système macroscopique tournant autour de l'axe \vec{Oz} du référentiel K avec une vitesse angulaire constante Ω . Nous admettrons que la relation $E' = E - M\Omega$ démontrée dans le cas des lois de la mécanique est vérifiée aussi dans le cas des lois de la thermodynamique à la condition de substituer aux grandeurs mécaniques E' , E , M les grandeurs thermodynamiques correspondantes qui sont leurs valeurs moyennes temporelles.

Montrer que, dans une transformation infinitésimale engendrée par l'application d'un couple de moment de force \vec{C} , $dW|_K = dW|_{K'} + \Omega dM$, où dM est la variation de M dans cette transformation.

En déduire que la différentielle de l'énergie E est $TdS + \Omega dM$. T est la température absolue du système et S son entropie. Ecrire les différentielles de l'énergie libre $F = E - TS$, de l'énergie E' et de l'énergie libre $F' = E' - TS$.

3. Considérons maintenant deux systèmes en interaction faible et formant un ensemble globalement isolé. Ils sont supposés en rotation autour d'axes parallèles à des vitesses qui peuvent être distinctes. Chacun est et reste en permanence en équilibre interne, mais l'équilibre de l'ensemble n'est pas forcément réalisé et il peut y avoir un transfert d'énergie et de moment cinétique entre les deux parties. Leurs températures sont T_1 et T_2 et leurs vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2 . Etablir le bilan d'énergie et de moment cinétique dans une transformation infinitésimale satisfaisant les conditions qui viennent d'être énoncées. Déduire du second principe de la thermodynamique les conditions d'équilibre. Commenter ce résultat. Montrer que si $T_1 = T_2$, le transfert de moment cinétique s'effectue dans un sens déterminé que l'on précisera.

4. Etudions maintenant certains coefficients thermodynamiques d'un système macroscopique en rotation et montrons qu'ils ont des signes déterminés. Ce système, dont les grandeurs seront notées sans indice, est en interaction faible avec un très gros système, dont les grandeurs seront notées avec l'indice 0. Ces deux systèmes sont dans les conditions de la question 3., à la seule différence que la taille du gros système est telle que sa température T_0 et sa vitesse de rotation Ω_0 peuvent être considérées comme constantes. Etablir les bilans d'énergie, de moment cinétique et d'entropie dans une transformation infinitésimale. En déduire que $A = E - T_0 S - \Omega_0 M$ est minimum lorsque l'équilibre est réalisé pour l'ensemble des deux systèmes. Réaliser le développement de cette fonction A au deuxième ordre en dT et dM autour de l'équilibre. Montrer que cela conduit à des signes déterminés pour la capacité calorifique de moment $C_M = T \partial S / \partial T \Big|_M$ et pour $\partial M / \partial \Omega \Big|_T$. Commenter ces résultats. De façon analogue à l'expression de la différence $C_P - C_V$ entre les capacités calorifiques à pression et à volume constants dans un fluide, montrer que la différence entre la capacité calorifique angulaire $C_\Omega = T \partial S / \partial T \Big|_\Omega$ et la capacité calorifique de moment C_M peut être exprimée à l'aide des dérivées $\partial M / \partial T \Big|_\Omega$ et $\partial M / \partial \Omega \Big|_T$.

En déduire le signe de $C_\Omega - C_M$ et celui de C_Ω .

5. Considérons maintenant le cas d'un gaz parfait de masse molaire m . Soient N moles de ce gaz contenues dans un récipient cylindrique de rayon σ , de hauteur h et tournant autour de son axe de révolution à la vitesse Ω . La distance perpendiculaire à l'axe pris comme axe \vec{Oz} est $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nous admettrons que la densité de molécules (nombre de moles de particules par m^3) ne dépend que de r et est donnée par $\rho(r) = \rho_0 \exp\left(\frac{1}{2} m \Omega^2 r^2 / RT\right)$. R est la constante des gaz parfaits et ρ_0 une constante

que l'on déterminera en imposant que le nombre total de moles dans le système soit effectivement N . Il est commode d'introduire dans ces calculs les paramètres

$I_0 = \frac{1}{2} N m \sigma^2$ et $\chi = \frac{I_0 \Omega^2}{N R T}$. Calculer le moment d'inertie I du gaz par rapport à l'axe de

révolution et montrer que M , le moment cinétique, est égal à $I_0 g(\chi) \Omega$ où $g(\chi)$ est une fonction que l'on déterminera. On précise que l'intégrale donnant I se calcule aisément à l'aide d'une intégration par partie. Tracer $g(\chi)$ et donner les deux premiers termes de ses développements limités au voisinage de $\chi = 0$ et $\chi = \infty$. Commenter les résultats.

Calculer la vitesse de rotation du gaz pour $r = \sigma$, $\chi = 1$, $T = 300K$ et $m = 32g.mol^{-1}$, $R = 8,32J.mol^{-1}.K^{-1}$. Est-ce une rotation particulièrement rapide ?

6. Déterminer l'expression de $F'(T, \Omega)$ à T fixée en intégrant sur Ω l'expression de la différentielle de l'énergie libre F' obtenue à la question 1. ;

On introduira $F'(T, \Omega = 0) = F_0(T)$ et $G(\chi) = \int_0^\chi g(\chi') d\chi'$.

Calculer $G(\chi)$ en tenant compte du fait que $\frac{d\chi}{(e^\chi - 1)} = d[\ln(e^\chi - 1) - \chi]$ et en prenant la

limite pour ϵ tendant vers zéro de $\int_\epsilon^\chi g(\chi') d\chi'$.

En déduire $S(T, \Omega)$, $E'(T, \Omega)$, et $E(T, \Omega)$.

Pour $\Omega = 0$, l'entropie et l'énergie seront notées $S_0(T)$ et $E_0(T)$.

Commenter les résultats obtenus pour $S(T, \Omega) - S_0(T)$ et $E(T, \Omega) - E_0(T)$.

7. Supposons maintenant que le gaz parfait en l'absence de rotation a une capacité calorifique molaire constante RC_0 . Dans ce cas, $E_0(T) = NRC_0 T$. Cherchons à

• capacité calorifique molaire, dérivée partielle, développement au premier ordre ou plus, énergie libre, équilibre, facteur de Boltzmann, graphe, moment d'inertie, travail, variation d'entropie, variation d'énergie

déterminer le travail minimal W nécessaire pour mettre en rotation le système, c'est-à-dire pour passer de l'état d'équilibre $\underline{1}$ caractérisé par $\Omega = 0$ et à une température T_1 , à l'état d'équilibre $\underline{2}$ caractérisé par $\Omega \neq 0$ et une température T_2 . Comment la température T_2 est-elle déterminée pour que le travail soit effectivement le plus petit possible ? Afin de répondre à cette question, on tracera schématiquement sur un même diagramme d'axes (S, E) les courbes $S(E, \Omega=0)$ et $S(E, \Omega)$ et on introduira les variables $\chi_1 = \frac{I_0 \Omega^2}{NRT_1}$ et $\chi_2 = \frac{I_0 \Omega^2}{NRT_2}$. Calculer W en fonction de χ_1 et de χ_2 et écrire

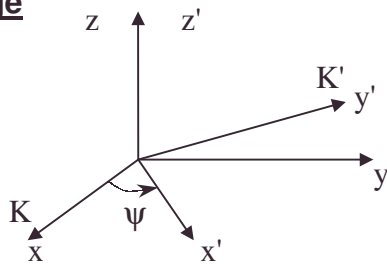
l'équation qui détermine χ_2 en fonction de χ_1 . En déduire l'expression de W en fonction de χ_1 pour $\chi_1 \ll 1$ en vous contentant des deux premiers termes du développement limité. Commenter.

8. Envisageons maintenant la transformation d'un état d'équilibre $\underline{3}$ caractérisé par $\Omega \neq 0$ et une température T_3 à l'état d'équilibre $\underline{4}$ caractérisé par $\Omega = 0$, une température T_4 et obtenu en supposant que le système ait été arrêté sans échange d'énergie avec l'extérieur. Calculer T_4 en utilisant le paramètre χ_3 défini comme précédemment. En déduire la variation d'entropie ΔS du système au cours de la transformation. Développer au premier ordre l'expression de ΔS en fonction de χ_3 pour $\chi_3 \ll 1$. Que faut-il penser du signe de ΔS ?

ENS ; Durée : 2h

Corrigé

1.a.



$$\left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_K = \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]_{K'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}.$$

b. U et E_c sont évidemment énergies potentielle et cinétique:

$$\alpha. dU = \sum_i (\vec{\nabla}_i U) d\vec{r}_i + \frac{\partial U}{\partial t} dt; dE_c = \sum_i m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i;$$

$$\left[\frac{dE}{dt} \right]_K = \left[\frac{dE_c}{dt} \right]_K + \left[\frac{dU}{dt} \right]_K = \sum_i m_i \vec{v}_i \left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right]_K + \sum_i (\vec{\nabla}_i U) \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right]_K + \frac{\partial U}{\partial t};$$

$$\text{or pour chaque particule } i : m_i \left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right]_K = \vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i U;$$

$$\text{d'où } m_i \vec{v}_i \left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right]_K = -\vec{\nabla}_i U \cdot \vec{v}_i = -\vec{\nabla}_i U \cdot \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right]_K; \text{ ainsi, } \left[\frac{dE}{dt} \right]_K = \frac{\partial U}{\partial t};$$

$$\beta. \left[\frac{dE_c}{dt} \right]_{K'} = \sum_i m_i \vec{v}_i \left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right]_{K'} \text{ avec } \left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right]_{K'} = \left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right]_K - \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_i \text{ (cf. 1.a.)}.$$

$$\left[\frac{dE_c}{dt} \right]_K = \sum_i m_i \vec{v}_i \left[\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right]_K - \sum_i m_i \underbrace{\vec{v}_i (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_i)}_0 = \left[\frac{dE_c}{dt} \right]_K$$

$$\begin{aligned}
\gamma. \left[\frac{dU}{dt} \right]_{K'} - \left[\frac{dU}{dt} \right]_K &= \sum_i \left[\left(\vec{\nabla}_i U \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right]_{K'} - \left(\vec{\nabla}_i U \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Big|_K \Big] = - \sum_i \underbrace{\left(\vec{\nabla}_i U \right) \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i \right)}_{\text{produit mixte}} \\
&= \left(- \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{\nabla}_i U \right) \vec{\Omega} ; \text{ or } \vec{\nabla}_i U = -m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_K ; \\
\text{et } \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_K &= \frac{d \left(\sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \right)}{dt} \Big|_K = \underbrace{\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right]_K}_{\vec{0}} \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_K ; \\
\left[\frac{dU}{dt} \right]_{K'} - \left[\frac{dU}{dt} \right]_K &= \frac{d \left[\sum_i \left(\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \right) \right]}{dt} \Big|_K \cdot \vec{\Omega} = \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_K \cdot \vec{\Omega} ; \\
\delta. \left[\frac{d \left[E - \vec{M} \vec{\Omega} \right]}{dt} \right]_{K'} &= \left[\frac{dE}{dt} \right]_{K'} - \vec{\Omega} \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{K'} - \underbrace{\vec{M} \frac{d\vec{\Omega}}{dt}}_{\vec{0}} \Big|_{K'} \\
&= \left[\frac{dE}{dt} \right]_{K'} - \vec{\Omega} \left[\left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_K - \vec{\Omega} \wedge \vec{M} \right] = \left[\frac{dE_c}{dt} \right]_{K'} + \left[\frac{dU}{dt} \right]_{K'} - \vec{\Omega} \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_K + 0 \\
\left[\frac{d \left[E - \vec{M} \vec{\Omega} \right]}{dt} \right]_{K'} &= \left[\frac{dE_c}{dt} \right]_K + \left[\frac{dU}{dt} \right]_K + \vec{\Omega} \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_K - \vec{\Omega} \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_K = \left[\frac{dE}{dt} \right]_K = \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_K . \\
2.a. \vec{C} &= \sum_i \vec{C}_i ; dW \Big|_K = \sum_i dW_i \Big|_K = \sum_i \left(-\vec{\nabla}_i U \right) d\vec{r}_i \Big|_K = \sum_i \left(-\vec{\nabla}_i U \right) \left(d\vec{r}_i \Big|_{K'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i dt \right) . \\
&= dW' \Big|_{K'} + \vec{\Omega} \left(\sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_K \right) dt = dW \Big|_{K'} + \vec{\Omega} \cdot \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_K dt ; \\
\text{ainsi } dW \Big|_K - dW \Big|_{K'} &= \Omega dM .
\end{aligned}$$

Tout se passe comme si dans K il y avait un terme supplémentaire de travail : ΩdM .

b. E étant assimilé à l'énergie interne macroscopique moyennée dans K,
 $dE = dQ + dW_{\text{macroscopique}} = TdS_{\text{si réversible}} + \underbrace{\Omega dM}_{\text{seul terme macroscopique apparent ici}}$

c. $dF = dE - TdS - SdT = -SdT + \Omega dM$.

d. $dE' = dE - Md\Omega - \Omega dM = TdS - Md\Omega$ (cf. transformation de Legendre).

e. $dF' = dE' - TdS - SdT = -SdT - Md\Omega$.

3.a. Ecrivons les relations de conservation pour l'ensemble isolé :

$$dE_1 + dE_2 = 0 ; \quad dM_1 + dM_2 = 0 .$$

$$\text{b. } dS_{\text{ens}} = dS_1 + dS_2 = \frac{dE_1 - \Omega_1 dM_1}{T_1} + \frac{dE_2 - \Omega_2 dM_2}{T_2} \text{ et vu 3.a.}$$

$dS_{\text{ens}} = dE_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + dM_1 \left(-\frac{\Omega_1}{T_1} + \frac{\Omega_2}{T_2} \right) = 0$ car S_{ensemble} est maximale pour un système thermiquement isolé à l'équilibre et ce quel que soient les variations dE_1 , dM_1 .

$$\Rightarrow T_1 = T_2 ; \quad \frac{\Omega_1}{T_1} = \frac{\Omega_2}{T_2} \Rightarrow \Omega_1 = \Omega_2 .$$

c. C'est l'obtention classique de paramètres intensifs uniformes à l'équilibre.

• *équilibre, inégalité de Clausius, maximum, travail*

$$\text{d. Si } T_1 = T_2, dS_{\text{ens}} = dM_1 \left(\frac{-\Omega_1}{T_1} + \frac{\Omega_2}{T_2} \right) = \frac{dM_1}{T_1} (\Omega_2 - \Omega_1).$$

L'évolution se faisant pour un système thermiquement isolé avec $dS_{\text{ens}} \geq 0$, on a, si $\Omega_2 > \Omega_1$, $dM_1 > 0$.

Le moment cinétique du sous-système tournant le plus lentement augmente grâce à la diminution du moment cinétique du sous-système tournant le plus rapidement.

On peut parler de transfert de moment cinétique du plus rapide en direction du plus lent, comme il y a transfert de chaleur d'un système de T élevée en direction d'un système de T basse.

4.a. Bilan d'énergie dans une transformation infinitésimale (cf. **3.a.**) : $dE + dE_0 = 0$.

b. Bilan de moment cinétique (cf. **3.a.**) : $dM + dM_0 = 0$.

c. Bilan d'entropie (cf. **3.d.**) : $dS + dS_0 \geq 0$.

d. $dA = dE - T_0 dS - \Omega_0 dM \leq -dE_0 + \Omega_0 dM_0 + T_0 dS_0$,

car $dE + dE_0 - T_0 (dS + dS_0) - \Omega_0 (dM + dM_0) \leq 0$.

Au voisinage de l'équilibre du très gros système peu perturbé par l'autre.

$dE_0 = 0$; $dM_0 = 0$; $dS_0 = 0 \Rightarrow dA \leq 0$ soit $A_{\text{final}} - A_{\text{initial}} < 0$, soit $A_{\text{eq final}} < A_{\text{initial}}$.

On voit l'analogie avec $dG \leq 0$ à T et P constant, A comme G ont un minimum à l'équilibre de l'ensemble.

e. Comme en **3.**, l'équilibre est pour $T = T_0$.

$$A - A_{\text{équilibre}} = \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{\text{eq}} (T - T_{\text{eq}}) + \left(\frac{\partial A}{\partial M} \right)_{\text{eq}} (M - M_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_{\text{eq}} (T - T_{\text{eq}})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_{\text{eq}} (M - M_{\text{eq}})^2 + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T \partial M} \right)_{\text{eq}} (M - M_{\text{eq}})(T - T_{\text{eq}}).$$

Soit avec la notation différentielle dA , dT et dM (T et M étant des variables indépendantes) :

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{\text{eq}} dT + \left(\frac{\partial A}{\partial M} \right)_{\text{eq}} dM + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_{\text{eq}} dT^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_{\text{eq}} dM^2 + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T \partial M} \right)_{\text{eq}} dT dM.$$

$$dA = dE - T_0 dS - \Omega_0 dM = (T - T_0) dS + (\Omega - \Omega_0) dM \text{ cf. 2.b.}$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M dT + \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T dM.$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_M = (T - T_0) \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M, \left(\frac{\partial A}{\partial M} \right)_T = (T - T_0) \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T + (\Omega - \Omega_0).$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_M = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M + (T - T_0) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial T^2} \right)_M; \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_T = (T - T_0) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right)_T + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right)_T;$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_{M_{\text{eq}}} = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{M_{\text{eq}}}; \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_{T_{\text{eq}}} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right)_{T_{\text{eq}}}.$$

Or A étant minimal à l'équilibre, il faut :

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_{M_{\text{eq}}} \geq 0; \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_{T_{\text{eq}}} \geq 0 \text{ (cf. concavité vers le haut ou stabilité d'un équilibre).}$$

f. On en déduit $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M > 0$ soit $C_M > 0$. S croît avec T (cf. désordre croissant avec T).

$$\mathbf{g.} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M} \right)_{T_{\text{eq}}} > 0 \text{ soit } \left(\frac{\partial M}{\partial \Omega} \right)_{T_{\text{eq}}} > 0.$$

La vitesse de rotation croît avec le moment cinétique ; le moment cinétique augmente quand Ω augmente.

h.α. Ecrivons que dE et dS sont des différentielles totales :

$$dS = \frac{C_M}{T} dT + \frac{\ell}{T} dM ; dE = T dS + \Omega dM = C_M dT + (\ell + \Omega) dM.$$

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{C_M}{T} \right)}{\partial M} \right]_T = \left[\frac{\partial \left(\frac{\ell}{T} \right)}{\partial T} \right]_M ; \left[\frac{\partial (C_M)}{\partial M} \right]_T = \left[\frac{\partial (\ell + \Omega)}{\partial T} \right]_M \Rightarrow \ell = -T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_M.$$

$$\mathbf{\beta.} \text{ Identifions } dS = \frac{C_M}{T} dT + \frac{\ell}{T} dM \text{ et } dS = \frac{C_\Omega}{T} dT + \frac{h}{T} d\Omega ,$$

$$\text{grâce à } dM = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_\Omega dT + \left(\frac{\partial M}{\partial \Omega} \right)_T d\Omega$$

$$\text{L'identification du coefficient de } dT \text{ donne : } C_M - C_\Omega = T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_M \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_\Omega :$$

$$\text{or } \left(\frac{\partial M}{\partial \Omega} \right)_T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_M \left(\frac{\partial T}{\partial M} \right)_\Omega = -1 \Rightarrow C_M - C_\Omega = \frac{-T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_\Omega^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial \Omega} \right)_T}.$$

$$\mathbf{i.} \quad \text{Vu } \mathbf{4.f.}, C_M - C_\Omega \leq 0 ; \text{ or } C_M > 0 \Rightarrow C_\Omega > 0.$$

5.a. Déterminons ρ_0 :

$$m_\sigma = N.m = \iiint \rho d\tau = 2\pi h \rho_0 \int_0^\sigma r e^{\left(\frac{1}{2} m \frac{\Omega^2}{RT} r^2 \right)} dr = \frac{2\pi h \rho_0}{\frac{m \Omega^2}{RT}} \left[\exp \frac{1}{2} m \frac{\Omega^2 r^2}{RT} \right]_0^\sigma ;$$

$$\text{or } \chi = \frac{1}{2} m \frac{N \sigma^2 \Omega^2}{NRT} = \frac{1}{2} m \frac{\Omega^2 \sigma^2}{RT} \Rightarrow \rho_0 = \frac{Nm^2 \Omega^2}{2\pi h RT} \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{2} m \frac{\Omega^2 \sigma^2}{RT}} - 1} = \frac{Nm}{\pi h \sigma^2} \frac{\chi}{e^\chi - 1}.$$

$$\mathbf{b.} I = \int r^2 dm = \int_0^\sigma r^2 \rho(r) \cdot 2\pi r h dr.$$

$$\text{Posons } u = r^2 ; du = 2r dr ; \rho(r) = \frac{Nm}{\pi h \sigma^2} \frac{\chi}{e^\chi - 1} \exp \left(\frac{1}{2} m \frac{\Omega^2 u}{RT} \right).$$

$$I = \frac{Nm}{\sigma^2} \frac{\chi}{e^\chi - 1} \int_0^{\sigma^2} u \exp \left(\frac{\chi}{\sigma^2} u \right) du.$$

Intégrons par partie :

$$I = \frac{Nm}{\sigma^2} \frac{\chi}{e^\chi - 1} \left[\frac{\left[u \exp \left(\frac{\chi}{\sigma^2} u \right) \right]_0^{\sigma^2}}{\frac{\chi}{\sigma^2}} - \int_0^{\sigma^2} \frac{\exp \frac{\chi u}{\sigma^2}}{\frac{\chi}{\sigma^2}} du \right].$$

$$I = \frac{Nm}{\sigma^2} \frac{\chi}{e^\chi - 1} \left[\frac{\sigma^4 \exp \chi}{\chi} - \frac{\sigma^4}{\chi^2} (\exp \chi - 1) \right] = \frac{2I_0}{e^\chi - 1} \left[e^\chi - \frac{e^\chi - 1}{\chi} \right];$$

$$I = 2I_0 \left[\frac{e^\chi}{e^\chi - 1} - \frac{1}{\chi} \right].$$

c. Comme pour un solide, on a formellement :

$$M = I\Omega = I_0 g(\chi) \Omega \text{ avec } g(\chi) = 2 \left[\frac{e^\chi}{e^\chi - 1} - \frac{1}{\chi} \right].$$

$$\text{d. } \chi \rightarrow 0; g(\chi) = 2 \left[\frac{\chi e^\chi - e^\chi + 1}{\chi(e^\chi - 1)} \right] = 2 \left[\frac{\chi(1 + \chi + \frac{\chi^2}{2}) - (1 + \chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{6}) + 1}{\chi \left(\chi + \frac{\chi^2}{2} \right)} \right]$$

$$g(\chi) = 2 \frac{\chi^2}{2} \frac{\left(1 + \frac{2\chi}{3}\right)}{\chi^2} \left(1 + \frac{\chi}{2}\right) = 1 + \frac{\chi}{6}. \text{ cf. 7.c.}$$

On remarquera l'ordre 3 du développement limité au numérateur pour obtenir finalement l'ordre 1 exact dans le résultat.

$$\text{e. } \chi \rightarrow \infty, g(\chi) = 2 - \frac{2}{\chi}.$$

f. Graphe ci-contre :

$$\text{g. } \chi \rightarrow \infty, g(\chi) \rightarrow 2, M \rightarrow 2 I_0 \Omega$$

On retrouve la stricte proportionnalité de M et $\Omega \quad \forall \Omega$, caractéristique d'un solide tournant.

$$\text{h. } \chi = 1 \Rightarrow \Omega = \left(\frac{2RT}{m\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\Rightarrow v = \sigma \Omega = \left(\frac{2RT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ AN : } v = 394,97 \text{ m.s}^{-1}. \text{ Vitesse grande sur terre (supérieure à}$$

Mach 1) mais pas dans l'espace. Rappelons $V(\text{Terre}/R_{\text{Copernic}}) = 30 \text{ km.s}^{-1}$.

6.a. Intégrons $dF' = -SdT - Md\Omega$ à T fixée.

$$F' = F_0(T) - \int_0^\Omega I_0 g(\chi) \Omega' d\Omega' = F_0(T) - \frac{NRT}{2} \int_0^\chi g(\chi') d\chi' \text{ avec } \chi' = \frac{I_0 \Omega'^2}{NRT};$$

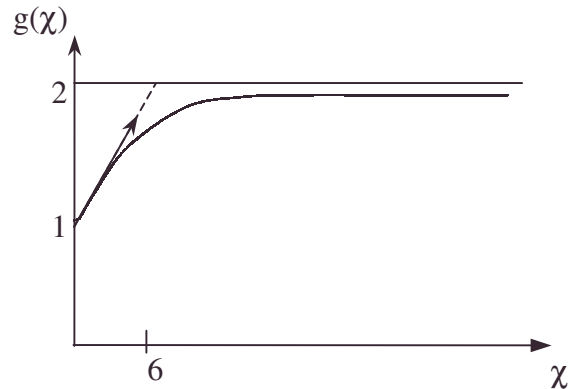
$$F' = F_0(T) - NRT \frac{G(\chi)}{2}.$$

$$\text{b. } G(\chi) = 2 \int_0^\chi \left[1 + \frac{1}{e^{\chi'} - 1} - \frac{1}{\chi'} \right] d\chi' = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\chi' + [\ln(e^{\chi'} - 1) - \chi'] - \ln \chi' \right]_\varepsilon^\chi.$$

Cf. énoncé

$$G(\chi) = 2 \ln \left(\frac{e^\chi - 1}{\chi} \right) - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 2 \ln \left(\frac{e^\chi - 1}{\chi} \right).$$

$$\text{Remarque : pour } \chi \text{ petit, } G(\chi) = \int_0^\chi \left(1 + \frac{\chi'}{6} \right) d\chi' = \chi + \frac{\chi^2}{12}. \text{ cf. 7.c.}$$



$$\Rightarrow F' = F_0(T) - NRT \ln \left[\frac{e^\chi - 1}{\chi} \right] \text{ avec } \chi = \frac{I_0 \Omega^2}{NRT}.$$

$$\text{c. Vu 2.e. ; } S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_\Omega = - \left(\frac{\partial F_0}{\partial T} \right)_\Omega + \frac{RNG(\chi)}{2} + \frac{NRT}{2} \frac{dG}{d\chi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_\Omega ;$$

$$S = S_0(T) + NR \frac{G(\chi)}{2} - \frac{NRT}{2} g(\chi) \frac{I_0 \Omega^2}{NRT^2} ;$$

$$S = S_0(T) + NR \frac{G(\chi)}{2} - I_0 \frac{\Omega^2}{2T} g(\chi) = S_0(T) + \frac{NR}{2} (G(\chi) - \chi g(\chi)) ;$$

$$S = S_0(T) + NR \left[\ln \left(\frac{e^\chi - 1}{\chi} \right) - \frac{\chi e^\chi}{e^\chi - 1} + 1 \right].$$

$$\text{d. } E' = F' + TS ; E' = F_0 + TS_0 - \frac{NRT}{2} \chi g(\chi) \Rightarrow E' = E_0 + NRT \left(1 - \frac{\chi e^\chi}{e^\chi - 1} \right).$$

$$\text{e. } E = E' + M\Omega = E' + NRT \chi g(\chi) = E_0 + \frac{NRT}{2} \chi g(\chi) = E_0(T) + NRT \left[\frac{\chi e^\chi}{e^\chi - 1} - 1 \right].$$

$$\text{f. } S - S_0 = \frac{NR}{2} \left[\ln \left(\frac{e^\chi - 1}{\chi} \right) - \frac{\chi e^\chi}{e^\chi - 1} + 1 \right] < 0 \text{ cf. graphe tracé à l'ordinateur ;}$$

Ω fait diminuer S au voisinage de 0 ;

$E - E_0 = NRT \left[\frac{\chi e^\chi}{e^\chi - 1} - 1 \right] > 0$ cf. graphe tracé à l'ordinateur , Ω fait augmenter E au voisinage de 0.

7.a. $S - S_0 < 0$, à T et Ω donnés (ou à E et Ω donnés car $S = S(T, \Omega)$ et $E = E(T, \Omega)$ permet d'extraire sur des intervalles $T = T(E, \Omega) \Rightarrow S = S_1(E, \Omega)$).

$$M = M_0 \text{ et } \mathbf{1.2.b.} \Rightarrow dE_0 = TdS_0 = NRC_0 dT ;$$

$$dS_0 = NRC_0 \frac{dT}{T} = NRC_0 \frac{dE_0}{E_0} ; \frac{dS_0}{dE_0} > 0.$$

D'où l'allure des courbes :

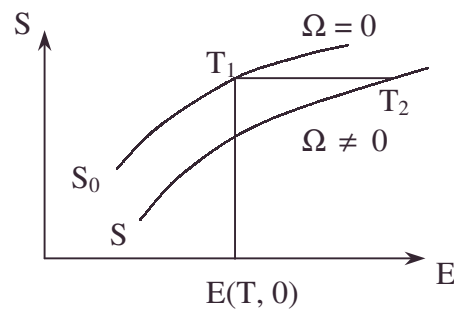
$$\text{b. } E_2 - E_1 = Q + W.$$

L'optimisation exige la réversibilité, or les échanges thermiques étant lents par rapport aux transferts mécaniques; $Q = 0$ et $S_2 - S_1 = 0$. Ceci donne le travail minimal (sans irréversibilité).

$$W = E(T_2, \Omega) - E(T_1, 0) \text{ avec } T_2 \text{ telle que } S(T_2, \Omega) = S(T_1, 0).$$

$$\text{c. } S(T_2, \Omega) = S_0(T_2) + \frac{NR}{2} (G(\chi_2) - \chi_2 g(\chi_2)) = S_0(T_1) + \frac{NR}{2} (G(0) - 0.g(0)) = S_0(T_1)$$

$$\text{or, } dS_0 = NRC_0 \frac{dT}{T} \Rightarrow S_0(T_2) - S_0(T_1) = NRC_0 \ln \frac{T_2}{T_1} = NRC_0 \ln \frac{\chi_1}{\chi_2} ;$$



ainsi, $\text{NRC}_0 \ln \frac{\chi_2}{\chi_1} = \frac{\text{NR}}{2} (G(\chi_2) - \chi_2 g(\chi_2))$, ce qui détermine χ_1 en fonction de χ_2 , et inversement (fonction monotone).

On vérifie : $\chi_2 \ll 1 \Rightarrow \chi_1 \ll 1$ car on est au voisinage du zéro des deux membres.

$$\text{Démonstration : } G(\chi_2) - \chi_2 g(\chi_2) = \chi_2 \left(1 + \frac{\chi_2}{12} \right) - \chi_2 \left(1 + \frac{\chi_2}{6} \right) = -\frac{\chi_2^2}{12}$$

$$\chi_2 - \chi_1 = \frac{I_0 \Omega^2}{\text{NR}} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \right) \ll 1 \Rightarrow T_1 \# T_2 \text{ soit } \frac{\chi_2 - \chi_1}{\chi_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\chi_2}{\chi_1} - 1 ;$$

$$C_0 \ln \frac{\chi_2}{\chi_1} = C_0 \ln \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) = C_0 \frac{T_1 - T_2}{T_1} = -\frac{\chi_2^2}{24} \Rightarrow \chi_1 \text{ et } \chi_2 \text{ du même ordre.}$$

$$\text{d. } W = E(T_2, \Omega) - E(T_1, 0) = E_0(T_2) - E_0(T_1) + \frac{\text{NRT}_2}{2} \chi_2 g(\chi_2) ;$$

$$W = \text{NRC}_0(T_2 - T_1) + \frac{1}{2} I_0 \Omega^2 \left(1 + \frac{\chi_2}{6} \right) \text{ or } \text{NRT}_1 = \frac{I_0 \Omega^2}{\chi_1} \Rightarrow$$

$$W = \text{NR} \frac{\chi_1^2}{24} T_1 + \frac{1}{2} I_0 \Omega^2 \left(1 + \frac{\chi_1}{6} \right) = \frac{I_0 \Omega^2}{2} \left(1 + \frac{\chi_1}{4} \right) \text{ car } \text{NRT}_1 = \frac{I_0 \Omega^2}{\chi_1}.$$

Si le système était rigide, $W_R = \frac{1}{2} I_0 \Omega^2$.

Ainsi : $W > W_R$ et $T_2 > T_1$ vu la démonstration.

8.a. La conservation de l'énergie s'écrit: $E(T_3, \Omega) = E(T_4, 0)$.

$$\text{et vu l'expression de } E : T_4 = T_3 \left(1 + \frac{\chi_3 g(\chi_3)}{2C_0} \right),$$

$$\text{b. } S_4 - S_3 = S(T_4, 0) - S(T_3, \Omega) = \text{NRC}_0 \ln \frac{T_4}{T_3} - \frac{\text{NR}}{2} (G(\chi_3) - \chi_3 g(\chi_3))$$

$$S_4 - S_3 = \text{NR} \left(\frac{\chi_3}{2} g(\chi_3) - \frac{G(\chi_3)}{2} + \frac{\chi_3}{2} g(\chi_3) \right) = \text{NR} \left(\chi_3 g(\chi_3) - \frac{G(\chi_3)}{2} \right).$$

c. Si $\chi_3 \ll 1$ on a les développements :

$$S_4 - S_3 = \text{NR} \left(\chi_3 + \frac{\chi_3^2}{6} - \left(\frac{\chi_3}{2} + \frac{\chi_3^2}{24} \right) \right) = \text{NR} \frac{\chi_3}{2} \left(1 + \frac{\chi_3}{4} \right) = \frac{1}{2} \frac{I_0 \Omega^2}{T_3} \left(1 + \frac{\chi_3}{4} \right).$$

d. $S_4 - S_3 > 0$, pour l'évolution spontanée d'un système isolé ; le calcul **8.c.** confirme.

4.3. Changement d'état

Appartient aux programmes de BCPST1 et 2, PT, TSI2, TPC1 et 2

4.3.1. Atmosphères sèche et humide

Dans tout ce problème, l'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits.

Données numériques au niveau du sol :

($z = 0$) ; $T_0 = 288 \text{ K}$; $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; $R = 8,31 \text{ J.mole}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $g = 9,81 \text{ m.s.}^{-2}$.

I. Question préliminaire

Etablir la relation fondamentale de la statique des fluides qui sera utilisée dans toutes les questions du problème.

II. Etude d'une atmosphère sèche

$\gamma = 1,4$ (constant) ; $M_a = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

1. Atmosphère isotherme à la température T_0 .

a. Etablir la loi de variation de la pression atmosphérique P en fonction de l'altitude z .

b. Application numérique : calculer la pression à l'altitude $z = 8 \text{ km}$.

2. Atmosphère isentropique :

a. La quantité de chaleur reçue au cours d'une transformation réversible élémentaire par l'unité de masse d'atmosphère est donnée par l'expression : $\delta Q = c_p dT + k dP$.

Montrer que la température T à l'altitude z est donnée par une expression de type :

$$T = T_0 (1 - \alpha z).$$

b. En déduire l'évolution de la pression atmosphérique P en fonction de l'altitude z .

c. Application numérique: calculer la pression à l'altitude $z = 8 \text{ km}$.

III. Etude d'une atmosphère humide

On appelle le titre massique en eau d'une atmosphère humide le rapport

$$x = \frac{m_{\text{vapeur}}}{m_{\text{vapeur}} + m_{\text{air}}}.$$

Ce titre étant faible, on considérera dans toute cette partie que la masse du mélange gazeux reste pratiquement constante et sera prise égale à l'unité.

En première approximation, on admettra que la quantité de chaleur reçue au cours d'une transformation élémentaire réversible par l'unité de masse du mélange est donnée par l'expression $\delta Q = c_{pm} dT + k_m dP + L dx$; T , P , x sont des variables indépendantes ;

$c_{pm} = 1015 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$;

$\gamma_m = 1,4$; $L = 2,49.10^6 \text{ J.kg}^{-1}$: chaleur latente de vaporisation de l'eau.

La pression partielle p_e de la vapeur d'eau supposée saturante est donnée par la formule: $p_e = 1,082.10^2 T - 2,946.10^4$; p_e et T sont en unité SI.

1.a. Calculer le titre massique en eau x de l'atmosphère humide en fonction des masses molaires respectives M_e et M_a et des pressions partielles respectives p_e et p_a de l'eau vapeur et de l'air.

b. Application numérique : $M_e = 18 \text{ g.mole}^{-1}$; $M_a = 29 \text{ g.mole}^{-1}$;
pression du mélange au sol $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; $T_0 = 288 \text{ K}$.

2.a. Calculer la variation dx du titre en eau (au cours d'une petite variation d'altitude) en fonction des variations des pressions partielles p_e et p_a .

b. En faisant les approximations nécessaires, expliciter dx en fonction des variations de la température T et de la pression P du mélange.

• *chaleur latente, changement d'état, développement au premier ordre ou plus, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, isentropique, mélange idéal, statique des fluides, titre massique, transformation élémentaire, vapeur saturante, vaporisation*

3.a. En considérant l'atmosphère isentropique, exprimer le gradient dT/dz en fonction des données.

b. Application numérique : établir la loi de variation de la température avec l'altitude au voisinage du sol et conclure.

CCP ; Durée : 1h

Corrigé

I. Question préliminaire : les équations d'Euler en mécanique des fluides s'écrivent :

$$\begin{array}{l} \vec{Z} \uparrow \\ \vec{g} = -g\vec{Z} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g} ; \\ \text{en statique } \vec{V} \equiv \vec{0} ; \\ \vec{0} = -\vec{\text{grad}} p + \rho \vec{g} . \end{array}$$

et en multipliant par $-d\vec{OM}$: $0 = dP + \rho g dz$.

Les forces de pression équilibrent le poids en statique.

II.1.a. $PV = \frac{m}{M}RT$ s'écrit pour un mini système : $PdV = dm \frac{RT}{M}$ soit $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{PM}{RT}$.

$$dP = -\rho g dz = \frac{-PM dz}{RT_0} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{-gM dz}{RT_0} \Rightarrow P = P_0 \exp -\frac{Mgz}{RT_0}.$$

b. AN : $P = 38637 \text{ Pa}$ (attention : prendre $M = 29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$).

2.a. Pour l'unité de masse, on a le volume $u = \frac{1}{\rho}$ et pour un gaz parfait :

$$\text{cf. } \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = 0 ; k_m = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -u .$$

Pour une transformation isentropique, $dQ = 0 = c_p dT - \frac{1}{\rho} dP$;

$$\text{soit } dT = \frac{dP}{c_p \rho} = \frac{-g dz}{c_p} \Rightarrow T = T_0 \left(1 - \frac{gz}{c_p T_0} \right) ;$$

soit de la forme $T = T_0 (1 - \alpha z)$ avec $\alpha = \frac{g}{c_p T_0}$;

$$\text{Or, } c_p - c_v = \frac{R}{M} ; c_v = \frac{c_p}{\gamma} \Rightarrow c_p = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} \Rightarrow \alpha = \frac{g(\gamma - 1)M}{R\gamma T_0} .$$

AN : $\alpha = 3,40.10^{-5} \text{ m}^{-1}$.

$$\text{b. } \frac{dP}{P} = \frac{-gM}{RT} dz = \frac{-gM}{RT_0 (1 - \alpha z)} dz .$$

$$\text{En utilisant } u = 1 - \alpha z : P = P_0 \left(1 - \frac{g(\gamma - 1)M}{R\gamma T_0} z \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} .$$

c. AN : $P = 32967 \text{ Pa}$.

$$\text{III.1.a. } PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow m = M \frac{PV}{RT} \Rightarrow m_a = M_a p_a \frac{V}{RT} ; m_v = M_e \frac{p_e V}{RT} .$$

$$x = \frac{M_e p_e \frac{V}{RT}}{M_e \frac{p_e V}{RT} + M_a \frac{p_a V}{RT}} \Rightarrow x = \frac{M_e p_e}{M_e p_e + M_a p_a}.$$

b. $z = 0$; $T_0 = 288 \text{ K}$; $p_e = 1701,6 \text{ Pa}$; $p_a = P - p_e$;

A.N. : $p_a = 98298,4 \text{ Pa} \Rightarrow x = 0,0106$.

2.a. Dérivons logarithmiquement : $\frac{dx}{x} = \frac{M_e dp_e}{M_e p_e} + \frac{M_e dp_e + M_a dp_a}{M_e p_e + M_a p_a}.$

$$dx = \frac{M_e}{(M_e p_e + M_a p_a)^2} (dp_e (M_a p_a + 2M_e p_e) + M_a p_e dp_a).$$

b. $P = p_a + p_e \Rightarrow dp_a = dP - dp_e$ or $dp_e = adT$ car $p_e = aT + b$.

$$dx = \frac{M_e}{(M_e p_e + M_a p_a)^2} (adT(p_a M_a - M_a p_e + 2M_e p_e) + M_a (aT + b)dP).$$

Vu les valeurs numériques **1.b.** $M_e p_e \ll M_a p_a$; $p_a \gg p_e$; $\Rightarrow p_a \approx P$.

$$dx = \frac{M_e}{M_a} a \frac{dT}{P} + \frac{M_e}{M_a} (aT + b) \frac{dP}{P^2}.$$

3.a. Pour l'atmosphère isentropique,

$$dQ = 0 = c_{pm} dT + k_m dp + L dx ; \text{ de plus } dP = -\rho g dz \text{ et } \rho = \frac{M_a P}{RT} \text{ vu } \mathbf{2.b.}$$

L'hypothèse gaz parfait donne : $k_m = -u = -\frac{1}{\rho} \Rightarrow c_{pm} dT - \frac{dP}{\rho} + L dx = 0.$

En remplaçant ρ , dx et dP , on tire : $\frac{dT}{dz} = \frac{-g}{c_{pm} + L \frac{M_e a}{M_a P}} \left(1 - M_a \frac{(aT + b)L}{PRT} \right).$

Remarque : au voisinage du sol : $\left(\frac{dT}{dz} \right)_0 = \frac{-g}{c_{pm} + \frac{LM_e a}{M_a P_0}} \left(1 - M_a \frac{(aT_0 + b)L}{P_0 R T_0} \right).$

AN : $\left(\frac{dT}{dz} \right)_0 = -2,49.10^{-3} \text{ km}^{-1}.$

b. En linéarisant : $T = T_0 + z \left(\frac{dT}{dz} \right)_0 = T_0 \left(1 + \frac{z}{T_0} \left(\frac{dT}{dz} \right)_0 \right) ;$

de la forme $T = T_0 (1 - \alpha_1 z)$ avec $\alpha_1 = -\frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dz} \right)_0.$

$\alpha_1 = 8,64.10^{-6} \text{ m}^{-1}$ or $\alpha = 3,40.10^{-5} \text{ m}^{-1}.$

L'humidité tempère les modifications de température (cf. L de l'eau important).

4.3.2. Bulle, tension superficielle, cavitation

Notation : on désignera par P , T , V , U , S , G , la pression, la température thermodynamique, le volume, l'énergie interne, l'entropie et l'enthalpie libre d'un système.

• cavitation, dérivation logarithmique, développement au premier ordre ou plus, énergie interne, enthalpie, enthalpie libre, entropie, gradient, grandeur extensive, grandeur molaire [grandeur intensive], isentropique, linéarisation, tension superficielle, vaporisation, vapeur saturante

Soit z la grandeur molaire associée à la grandeur extensive Z . (exemple : g = enthalpie libre molaire).

Données :

$L = 40,62 \text{ kJ.mol}^{-1}$: enthalpie molaire de vaporisation de l'eau, considérée comme indépendante de la température dans le domaine étudié.

$P_{100} = 1,013 \text{ bar}$: pression de vapeur saturante de l'eau à 100°C .

$T = \theta + 273,1$; θ étant la température en $^\circ\text{Celsius}$.

$R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$: constante des gaz parfaits.

$\sigma = 50,0 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$: tension superficielle de l'eau supposée constante.

$v_1 = 18,0 \text{ cm}^3.\text{mol}^{-1}$: volume molaire de l'eau liquide, supposé constant.

I. Equilibre liquide-vapeur

1. On considère une mole d'un corps pur sous forme monophasée.

Par application des deux principes de la thermodynamique, donner l'expression de dg , différentielle de $g(T, P)$. On rappelle que $G = U + PV - TS$.

2. Soit $\Delta G = g_2 - g_1$ l'enthalpie libre molaire de changement de phase d'un corps pur:

1 \rightleftharpoons 2. Que vaut ΔG à l'équilibre thermodynamique ?

Donner alors la relation liant dg_1 et dg_2 .

3. Application : Les deux phases sont à la même température et à la même pression P . Donner la relation liant dT et dP à l'équilibre thermodynamique.

4. Exemple : En précisant les approximations effectuées, donner l'expression de la pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température, soit $P_1(T)$.

Calculer la pression de vapeur saturante à 120°C , soit P_{120° . Dans la suite, on prendra $P_{120^\circ} = 2,00 \text{ bar}$.

II. Tension superficielle

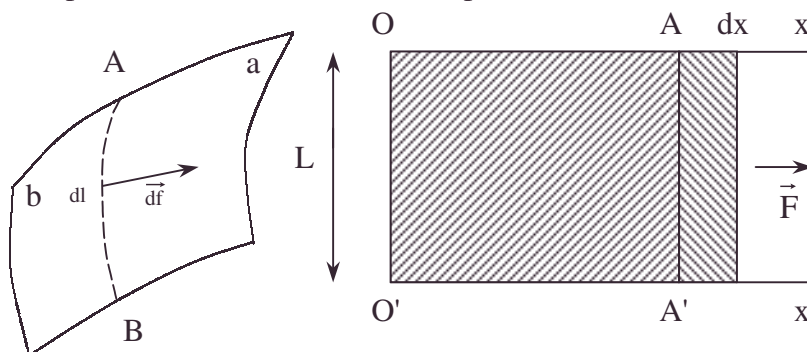
Quand deux fluides sont en contact, il existe une mince couche superficielle dont les propriétés sont nettement différentes de celles des deux phases volumiques. Young a proposé un modèle simplifié pour lequel tout se passe, au point de vue mécanique, comme si les deux fluides étaient séparés par une membrane sans épaisseur et uniformément tendue.

1. On considère donc une membrane élastique comme par exemple une membrane de caoutchouc. Pour définir la tension de cette membrane en tout point M , il suffit d'imaginer sur celle-ci une courbe AB , la séparant en deux régions a et b . Au travers de l'élément de longueur dl de la courbe, la région a exerce sur la région b une force \vec{df} normale à la courbe, dans le plan de la membrane, d'intensité $df = \sigma dl$, avec σ appelée ici tension superficielle et ayant la même valeur en tout point de la membrane.

Une membrane élastique rectangulaire $OAA'O'$ s'appuie sur OO' , Ox et $O'x'$ et AA' .

Un opérateur effectue un déplacement élémentaire dx de AA' .

Donner l'expression du travail δW de cet opérateur.



2. Dans le cas du contact entre les deux fluides, donner l'expression du travail nécessaire pour augmenter de $d\Omega$ l'aire Ω de la surface de séparation.

III. Bulle de vapeur dans un liquide

On considère de l'eau liquide avec en son sein une bulle sphérique de rayon r contenant uniquement de la vapeur. La température du système (liquide + vapeur + interface) est uniforme. Les grandeurs relatives aux liquides seront indicées par l et celles de la vapeur par v : par exemple, P_l , P_v , v_l , v_v , s_l , s_v , la pression, le volume molaire, l'entropie molaire. P_l et P_v sont considérées séparément comme uniformes.

Le déplacement des bulles lié à la poussée d'Archimède n'est pas pris en compte.

1. Relations fondamentales

a. Equilibre mécanique : formule de Laplace

Exprimer le travail élémentaire des forces de pression P_v et P_l pour une variation dr du rayon de la bulle. Montrer que $P_v - P_l = \frac{2\sigma}{r}$ (formule de Laplace).

Cette relation pourra être appliquée dans toute la suite du problème.

b. Equilibre thermodynamique

Donner la relation liant les différentielles dT , dP_v et dP_l , quand les deux phases se trouvent à l'équilibre thermodynamique. On ne cherchera pas à exploiter la formule de Laplace et on pourra utiliser les résultats du I.1. et I.2.

2. Système en équilibre à température constante T : Formule de Kelvin

a. Soit $P_v(r)$ la pression dans la bulle à équilibre. Exprimer dP_v en fonction de dr .

b. On pose P_s , la pression de vapeur saturante dans une bulle de rayon infini à la température T . Déterminer la formule de Kelvin donnant $\ln \left(\frac{P_v}{P_s} \right)$ en fonction de r , avec

les mêmes approximations qu'au I.4. sur les volumes molaires. Une bulle de vapeur d'eau peut-elle exister à 100°C sous une pression de 1,013 bar dans le liquide ?

c. On se place à 120°C .

Tracer sur un même graphique :

- la courbe $P_v^K(r)$ donnée par la formule de Kelvin ;
- les courbes $P_v^L(r)$ données par la formule de Laplace, pour $P_l = 0,1$ bar, puis 0,5 bar et enfin pour 1 bar. On limitera le graphique de 0 à $1\mu\text{m}$ pour r et de 0 à 4 bars pour P .

Déterminer graphiquement dans les trois cas le rayon de la bulle à l'équilibre.

Que vaut P_v dans chacun des cas ? Commenter.

Que se passe-t-il si P_l devient égale puis supérieure à P_s ?

d. A partir du graphique ci-dessus, donner la stabilité de l'équilibre thermodynamique d'une bulle. On justifiera la réponse en partant d'une variation élémentaire du rayon à P_l et T constantes.

e. Soit r_g le rayon de la bulle à l'équilibre. Exprimer $\Delta G(r)$ quand on fait varier le rayon de la bulle à partir de r_g , la pression P_l et la température étant maintenues constantes. Commenter.

3. Système en équilibre à pression P_l constante : Formule de Thomson

a. Compte tenu de cette hypothèse sur P_l , donner la relation entre dT et dP_v , conséquence de l'équilibre thermodynamique entre les deux phases.

b. Donner alors l'équation liant dP_v à dT dans le cas où L est supposée indépendante de r et la vapeur toujours considérée comme un gaz parfait.

c. En déduire la formule de Thomson liant T et r pour une pression P_l donnée sachant que $P_v(100^\circ\text{C}, r \rightarrow \infty) = P_v(100^\circ\text{C}) = P_{100^\circ}$.

• équilibre, équilibre thermodynamique, formule de Thévenin, graphe, Kelvin [formule de], poussée d'Archimède, stabilité, travail, vapeur saturante, variation d'enthalpie libre [changement d'état], volume molaire [mélanges binaires]

d. Pour l'eau liquide sous 1,013 bar, calculer T puis θ pour $r = 10 \mu\text{m}$, $1 \mu\text{m}$, et $0,1 \mu\text{m}$. Si aucun germe ne vient donner naissance à des bulles de plus de $0,1 \mu\text{m}$, à quelle température l'eau pourra-t-elle être portée sans ébullition sous 1,013 bar ?

IV. Formation d'une bulle de vapeur à température constante T à partir d'un germe gazeux

On suppose que dans la bulle de vapeur se trouve un gaz inerte vis-à-vis de l'eau, par exemple de l'air. La quantité de ce gaz est telle que s'il était seul à la température T , il occuperait une sphère de rayon r_0 à la pression P_0 . On notera σ la tension relative à ce gaz.

On supposera que σ n'a pas été modifié, que les gaz sont parfaits et on ne se préoccupe toujours pas du mouvement des bulles dû à la poussée d'Archimède. P_v désignera la pression partielle de la vapeur dans la bulle.

1. Equilibre mécanique

Donner la nouvelle expression de P_v en fonction de P_l et de r en tenant compte de la pression du gaz inerte dans la formule de Laplace.

2. Rayon de la bulle à l'équilibre

En supposant a priori que le rayon de la bulle n'a pas d'influence sur la pression P_v à l'équilibre thermodynamique, déterminer graphiquement (0 à $1 \mu\text{m}$, 0 à 10 bars) ou numériquement les valeurs possibles de r à l'équilibre pour l'eau à 120°C avec $P_l = 0,1 \text{ bar}$, $P_0 = P_{120^\circ}$, et $r_0 = 0,1 \mu\text{m}$. Quelle est la stabilité correspondant à chaque solution ?

3. Equilibre thermodynamique à température constante T

En intégrant la relation **IV.1.** à la formule de Kelvin, déterminer l'expression $\phi(r) = \ln \frac{P_v}{P_s}$, en fonction de r quand l'équilibre thermodynamique est réalisé, P_s

désignant toujours la pression de vapeur saturante à la température T pour un rayon infini de la bulle. Vérifier l'hypothèse précédente.

CCP ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. $dU = TdS - PdV$; Or $G = U + PV - TS$; $\Rightarrow dG = -SdT + VdP$ et pour le système constitué d'une mole : $dg = -sdT + vdP$.

2.a. Traitons le changement de phase comme une réaction chimique: $1 \rightleftharpoons 2$ mettant en jeu une quantité quelconque. On a, à T et P donnés, $dG = \Delta G d\xi$.

L'évolution est soumise à T et P constant à $dG \leq 0$.

L'équilibre correspond à un minimum de $G(\xi)$ soit $\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{T,P} = 0 \Rightarrow \Delta G = 0$.

$$\text{b. } g_1 = g_2 \Rightarrow dg_1 = dg_2.$$

3. Appliquons **1.** et **2.b.** : $-s_1dT + v_1dP = -s_2dT + v_2dP$.

On obtient $\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{L}{T(v_2 - v_1)} \Rightarrow L = T(v_2 - v_1) \frac{dP}{dT}$ (formule de Clapeyron).

4. $v_1 \ll v_g$ numériquement ; $v_2 = \frac{RT}{P}$: loi des gaz parfaits pour 1 mole.

$$dP = \frac{LP}{RT^2} dT \text{ soit } \frac{dP}{P} = \frac{L}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln \frac{P}{P_{100}} = \frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_{100}} - \frac{1}{T} \right).$$

• Clapeyron [formule pour les changements d'état du premier ordre], développement au premier ordre ou plus, équilibre, équilibre thermodynamique, forme différentielle canonique des fonctions d'état de la thermodynamique, Kelvin [formule de], minimum, pression de vapeur saturante, solution graphique, variation d'enthalpie libre [changement d'état]

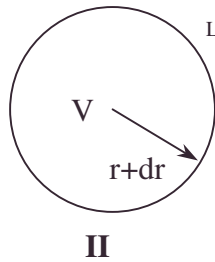
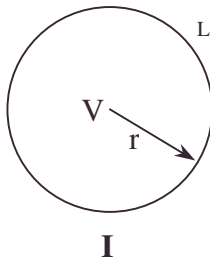
$$P = P_{100^\circ} e^{\frac{L}{RT_{100}}} e^{-\frac{L}{RT}} ; \text{AN : } P_{120^\circ} = 1,973 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

II.1. Si le déplacement est réversible, infiniment lent $\vec{F} + \int d\vec{f} = \vec{0}$;

$$F_x = \sigma \int dl = \sigma L ; \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \sigma L dx.$$

2. $Ldx = d\Omega \Rightarrow \delta W = \sigma d\Omega$ pour l'opérateur extérieur, le travail des forces superficielles opposées est $dW_s = -\sigma d\Omega$.

III.1.a.



Pour une variation du rayon dr :

α. $\delta W_v = +P_v dV = +P_v 4\pi r^2 dr$.

β. $\delta W_l = -P_l 4\pi r^2 dr$.

γ. $\Omega = 4\pi r^2 \Rightarrow d\Omega = 8\pi r dr \Rightarrow dW_s = -\sigma d\Omega = -\sigma 8\pi r dr$.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$dE_c = dW = dW_v + dW_l + dW_s.$$

A l'équilibre mécanique, $E_c = 0$, minimum de E_c ; $dE_c = 0 = dW$.

$$(P_v - P_l)4\pi r^2 dr - \sigma 8\pi r dr = 0 \Rightarrow P_v - P_l = \frac{2\sigma}{r}.$$

b. I.2.b s'écrit $dg_v = dg_l$, soit $-s_v dT + v_v dP_v = -s_l dT + v_l dP_l$

$$\Rightarrow v_v dP_v - v_l dP_l = (s_v - s_l) dT ; \quad v_v dP_v - v_l dP_l = \frac{L}{T} dT.$$

2.a. à T constant, $dT = 0 \Rightarrow v_v dP_l = v_l dP_v$; or $P_v - P_l = \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow dP_v - dP_l = -2\sigma \frac{dr}{r^2}$; en

éliminant dP_l , il reste: $(v_v - v_l) dP_v = 2\sigma v_l \frac{dr}{r^2} \Rightarrow dP_v = \frac{2\sigma v_l}{v_v - v_l} \frac{dr}{r^2}.$

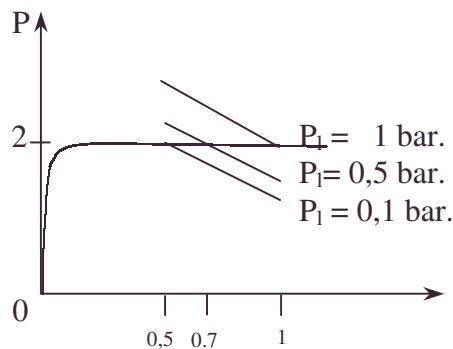
b. α. $v_e \ll v_v$; $v_v = \frac{RT}{P_v}$: on obtient $dP_v = \frac{2\sigma v_l}{RT} \frac{P_v dr}{r^2} \Rightarrow \ln \frac{P_v}{P_s} = \frac{-2\sigma v_l}{RT r}$;

$$P_v = P_s e^{\frac{-2\sigma v_l}{RT r}}.$$

β. $P_v < P_s$, vu la détermination de la constante, il ne peut exister avec un rayon fini de bulle à $P_v = P_s$ (cf. instabilité des bulles à l'ébullition).

c. $T = T_{120}$: $P_s = 2 \text{ bar}$, si r en m et P en bar.

$$P_v = 2e^{\frac{-5,5 \cdot 10^{-10}}{r}} ; P_v = P_e + \frac{10^{-6}}{r}.$$



$P_l \text{ bar}$	0,1	0,5	1
$r_{\mu m}$	0,526	0,667	1,000
$P_v \text{ bar}$	2	2	2

L'intersection de P_v et P_l donne le rayon à l'équilibre.

• développement au premier ordre ou plus, équilibre, graphe, Kelvin [formule de], minimum, solution graphique, stabilité, tableau numérique, théorème de l'énergie cinétique, travail

P_v est constant au millièème près pour $r > \frac{2\sigma v_l}{RT \cdot 10^{-3}}$ soit $r > 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Si $P_l \rightarrow P_s$, $r \rightarrow \infty$:

Si $P_l > P_s$, il n'y a plus d'équilibre stable possible (instabilité de l'ébullition).

d. Imaginons une variation $dr > 0$ à P_l et T constants, P_v diminue d'après la formule de Laplace;

or d'après **III.2.a.**, dr est de même signe que dP_v , la bulle aura tendance à rétrécir, après avoir augmenté. On a stabilité.

$$\text{e. } \Delta G = g_v(r) - g_l(r); \text{ or } g_l(r_g) = g_v(r_g) \text{ et } dg_v = v_v dP_v - s_v \underbrace{dT}_0.$$

$$\text{or } v_v = \frac{RT}{P_v}, dg_v = RT \frac{dP_v}{P_v} \Rightarrow g_v = g_v(r_g) + RT \ln \frac{P_v(r)}{P_v(r_g)}.$$

$$\text{or } \ln \frac{P_v(r)}{P_v(r_g)} = \ln \frac{P_v(r)}{P_s} - \ln \frac{P_v(r_g)}{P_s} = \frac{2\sigma v_l}{RT} \left(\frac{1}{r_g} - \frac{1}{r} \right) \text{ d'après la formule de Kelvin.}$$

g_l indépendant pratiquement de r dans le voisinage de r_g : $g_l(r) \approx g_l(r_g)$. (cf. la faible dilatabilité du liquide comparée au gaz).

$$\text{Finalement, } \Delta G = \frac{2\sigma v_l}{RT} \left(\frac{1}{r_g} - \frac{1}{r} \right).$$

Commentaire :

$r > r_g$; $\Delta G > 0$, on a la transformation $v \rightarrow l$, le rayon va diminuer.

$r < r_g$; $\Delta G < 0$, on a la transformation $l \rightarrow v$, le rayon va augmenter.

On a bien un équilibre stable.

$$\text{3.a. } dP_l = 0 ; \text{ il reste dans III.1.b. } v_v dP_v = \frac{LdT}{T}.$$

$$\text{b. } v_v = \frac{RT}{P_v} \Rightarrow \frac{dP_v}{P_v} = \frac{LdT}{RT^2}.$$

$$\text{c. En intégrant : } \ln P_v = K - \frac{L}{RT} ; \text{ or } P_v - P_l = \frac{2\sigma}{r} ;$$

$$\text{on obtient: } \ln \left(P_l + \frac{2\sigma}{r} \right) = K - \frac{L}{RT} ; r \rightarrow \infty, P_v = P_l = P_{100} \text{ à } T = T_{100} ;$$

$$\Rightarrow K = \ln P_{100} + \frac{L}{RT_{100}} \Rightarrow \ln \left(\frac{P_l}{P_{100}} + \frac{2\sigma}{rP_{100}} \right) = \frac{L}{R} \left[\frac{1}{T_{100}} - \frac{1}{T} \right] ;$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_{100}} - \frac{R}{L} \ln \left(\frac{P_l}{P_{100}} + \frac{2\sigma}{rP_{100}} \right) ;$$

$$\text{d. } P_l = P_{100} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{T_{100}} - \frac{R}{L} \ln \left(1 + \frac{2\sigma}{rP_{100}} \right).$$

En conséquence, pour des bulles stables de $r < 0,1 \mu\text{m}$, $T > 456,1 \text{ K}$.

Ainsi, pour $r < 0,1 \mu\text{m}$ sous 1,013 bar, on peut monter jusqu'à $183,1 \text{ }^\circ\text{C}$ vu le tableau ci-après.

r en μm	10	1	0,1
T en K	375,7	393,6	456,1
θ en $^{\circ}\text{C}$	102,7	120,6	183,1

IV.1. La loi des gaz parfaits appliquée à l'air s'écrit à T constant,

$$P_0 \frac{4}{3} \pi r_0^3 = P_{\text{air}} \frac{4\pi}{3} r^3 \Rightarrow P_{\text{air}} = P_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3.$$

Les raisonnements précédents se retrouvent avec une nouvelle pression $P'_v = P_v + P_{\text{air}}$ remplaçant P_v précédent.

La formule de Laplace s'écrit : $P'_v - P_l = \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow P_v = P_l + \frac{2\sigma}{r} - P_0 \frac{r_0^3}{r^3}.$

2. Il faut résoudre à T_{120} , $P_v \neq P_{s120}$ soit $P_v \neq 2$ bars.

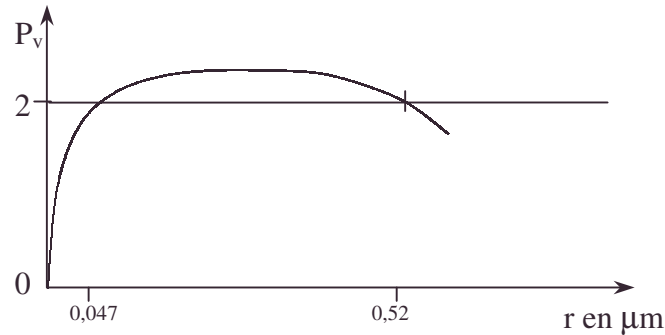
$$\text{avec } r \text{ en m : } 2 \cdot 10^5 = 0,1 \cdot 10^5 + \frac{0,1}{r} - 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{10^{-21}}{r^3},$$

$$\text{soit avec } r_1 \text{ en } \mu\text{m : } 2 = 0,1 + \frac{1}{r_1} - \frac{2 \cdot 10^{-3}}{r_1^3}. \text{ On trouve } r = 0,047 \mu\text{m} \text{ et } r = 0,52 \mu\text{m}.$$

L'analyse formelle du graphique $P_v = P_l + \frac{2\sigma}{r} - P_0 \frac{r_0^3}{r^3}$ donne la situation $r = 0,52 \mu\text{m}$

stable par analogie avec **III.2.d.**

$r = 0,047 \mu\text{m}$ est une position instable : $dr > 0$ entraîne l'augmentation de P_v donc la poursuite de l'expansion. cf. **III.2.a.**



$$3. v_v dP_v = v_l dP_l \text{ (cf. III.1.b.)}; \text{ or } P'_v - P_l = \frac{2\sigma}{r}, \text{ soit } dP_v = dP_l - \frac{2\sigma dr}{r^2} + 3 \frac{P_0 r_0^3}{r^4} dr;$$

$$v_v = \frac{RT}{P_v} \text{ et } v_l \ll v.$$

$$RT \frac{dP_v}{P_v} = 2\sigma v_l \frac{dr}{r^2} - 3P_0 v_l \frac{r_0^3}{r^4} dr \Rightarrow \ln \frac{P_v}{P_s} = \frac{-2\sigma v_l}{RT r} + \frac{P_0 r_0^3 v_l}{RT r^3}.$$

Le terme $\frac{P_0 r_0^3 v_l}{RT r^3}$ est le terme correctif par rapport à la question **III.2.b.**, il décroît quand

r croît (il est d'ailleurs petit au voisinage de $r = 1 \mu\text{m}$), on comprend donc que le tracé de $P_v(r)$ soit peu différent et que le rayon de la bulle n'a pas d'influence dès que r n'est pas trop petit comme en **III.2.c.**

- analogie, cavitation, désaimantation adiabatique [obtention de très basses températures], graphe, refroidissement par détente adiabatique, solution graphique, stabilité

4.3.3. Refroidissement par détente ou désaimantation adiabatique

Le texte est long, mais de nombreuses questions correspondent à des réponses très courtes, ne demandant pas de calculs.

A. Détente adiabatique d'un gaz

On considère un gaz évoluant de l'état d'équilibre, défini par les variables V (volume), P (pression), T (température), S (entropie), à un état infiniment voisin défini par :

$$(V + dV, P + dP, T + dT, S + dS).$$

1. Quel est le transfert thermique élémentaire δQ reçu par le gaz si la transformation est réversible? Quelle interprétation peut-on en donner si on se place dans le plan (T, S) avec S en abscisse et T en ordonnée ?

2. Rappeler l'identité thermodynamique exprimant dU , dH et dG différentielles de l'énergie interne, de l'enthalpie et de l'enthalpie libre en fonction des variables d'état précédemment définies.

3. On utilise les coefficients calorimétriques C_p et k pour exprimer, dans une transformation élémentaire réversible, le transfert thermique $\delta Q = C_p dT + k dP$.

- Comment s'appelle C_p ? Exprimer C_p et k à l'aide de dérivées partielles de S .
- En traduisant que l'expression précédente de dG est une différentielle totale, exprimer k en fonction d'une dérivée partielle de V .

4.a. Donner, pour un gaz parfait, en introduisant le coefficient γ , l'expression de C_p et dH .

b. On suppose pour ce gaz parfait, γ constant, et on considère une détente isentropique dans laquelle la pression passe de P_i à P_f la température de T_i à T_f .

- Donner T_f en fonction de T_i et des pressions.
- Préciser si T_f est plus petite ou plus grande que T_i .
- Représenter dans un diagramme de Watt (P, V) les deux transformations : adiabatique réversible $(P_i, T_i \rightarrow P_f, T_f)$ et isotherme réversible $(P_f, T_f \rightarrow P_i, T_i)$.

• Que peut-on dire de $|T_f - T_i|$ si $T_i \rightarrow 0$? Peut-on espérer atteindre une température finale faible par une suite finie de [détente adiabatique, compression isotherme] ?

B. Détente de Joule-Kelvin

Un fluide s'écoule dans une canalisation calorifugée indéformable présentant un étranglement. Les grandeurs seront affectées de l'indice 1 à 2 pour désigner les grandeurs en amont ou en aval de l'étranglement : Σ_i (section), P_i (pression), T_i (température) et c_i (vitesse macroscopique d'écoulement en régime stationnaire).

On notera par des petites lettres les grandeurs massiques correspondant à l'énergie interne U , à l'enthalpie H , à l'entropie S et à l'énergie mécanique E : u_i , h_i , s_i et e_i .

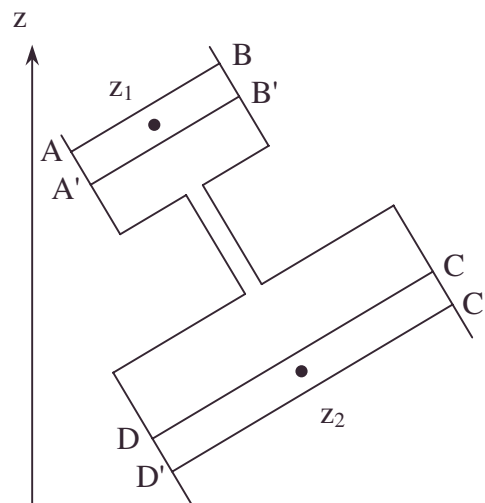


Figure 1

• adiabatique, adiabatique réversible, capacités calorifiques molaires en fonction de gamma, dérivée partielle, désaimantation adiabatique, détente de Joule-Thomson, détente de Kelvin, énergie interne, énergie mécanique massique, enthalpie, enthalpie libre, entropie, équilibre, forme différentielle canonique des fonctions d'état de la thermodynamique, isentropique, relation de Clapeyron, transformation élémentaire

On considère à l'instant t la portion de fluide ABCD (figure 1). A l'instant $t + dt$ sa position correspond à A'B'C'D'.

On note z_1 et z_2 les cotes des centres de masse des portions AA'BB' et CC'DD'.

1. Montrer que $h_1 + e_1 = h_2 + e_2$ (relation $[\alpha]$) et expliciter e_i en fonction de c_i et z_i . Dans le cas d'un écoulement isotherme d'un fluide incompressible, comment se simplifie la relation précédente ?

Comment s'appelle cette relation en dynamique des fluides ?

2. On se place dans le cas de la relation $[\alpha]$ et on néglige les variations de vitesse ($c_1 \approx c_2$) et d'énergie potentielle de pesanteur ($z_1 \approx z_2$). On suppose de plus que ($T_1 = T, P_1 = P$) et ($T_2 = T + dT, P_2 = P + dP$).

Comment s'exprime alors la relation $[\alpha]$?

3. Pour un gaz parfait de masse molaire M exprimer, pour la transformation ($P_i - P_f$), la variation d'entropie massique Δs et l'entropie massique créée s_c .

Le signe de s_c était-il prévisible ?

4. On s'intéresse à la variation élémentaire de température dT . On pose $\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_h$,

coefficient de Joule-Kelvin. Exprimer pour un gaz quelconque, dT en fonction de μ et de dP , et donner μ en fonction de C_p , m , T , dP et d'une dérivée partielle de v volume massique. Que vaut μ pour un gaz parfait ? Le résultat est-il surprenant ?

5. Préciser le signe de μ pour qu'une telle détente s'accompagne d'un refroidissement (effet Joule-Kelvin).

6. Application : cas de l'hélium.

En accord avec Hill et Lounasmaa, l'équation correspondant à l'inversion de l'effet Joule Kelvin est, pour l'hélium, $P = -20,73 + 5,37.T - 0,1303.T^2$ avec P en bar.

Quelle est la température maximale d'inversion de l'effet Joule-Kelvin ? Quelle est la pression maximale possible ? Tracer le graphe $T = T(P)$ et préciser sur ce diagramme les zones où l'hélium peut être refroidi par détente de Joule-Kelvin.

Historiquement, Kapitza fut le premier à obtenir de l'hélium liquide en utilisant les deux procédés évoqués.

C. Désaimantation d'un sel paramagnétique

Les méthodes précédentes permettent d'obtenir de très basses températures (1 K pour l'hélium). Pour atteindre des températures plus faibles, Giauque et Debye suggérèrent d'effectuer une désaimantation adiabatique d'un sel paramagnétique. Cette partie évoque ce procédé. On considère un milieu magnétique pour lequel on note \vec{B} le champ magnétique, \vec{H} l'excitation magnétique et \vec{M} l'aimantation. On rappelle l'expression du travail élémentaire fourni par unité de volume, pour faire varier réversiblement le champ de B à $B + dB$: $\delta W_{vol} = \delta w = H dB$.

1.a. Donner la relation générale entre \vec{B} , \vec{H} et \vec{M} . En déduire que le travail élémentaire δw est la somme de deux termes.

b. Dans le cas du vide, quel serait le travail élémentaire par unité de volume (δw_{vid}), pour faire varier le champ de B à $B + dB$. On l'explicitera en fonction de H uniquement. Déduire des expressions précédentes le travail élémentaire reçu par unité de volume (δw_{mil}), par le milieu magnétique pour faire varier l'aimantation de M à $M + dM$.

2.a. $du = Tds + \mu_0 HdM$. Justifier cette identité thermodynamique exprimant la variation élémentaire d'énergie interne volumique $u_{vol}(s, M) = u$. Que représente s ?

- coefficient de Joule-Kelvin, coefficient de Joule-Thomson, dérivée partielle, désaimantation adiabatique [obtention de très basses températures], entropie massique créée, graphe, maximum, relation de Clapeyron

b. Comment définirait-on la fonction enthalpie libre généralisée volumique g ? Exprimer sa différentielle. Quelle relation entre dérivées partielles peut-on en tirer ?

c. On introduit les coefficients calorimétriques volumiques c_H et β définis par :

$$ds = \frac{c_H}{T} dT + \frac{\beta}{T} dH \text{ avec } c_H = c_H(T, H) \text{ et } \beta = \beta(T, H).$$

A l'aide des relations précédentes, exprimer β sous forme d'une dérivée partielle de M et montrer que $\left(\frac{\partial c_H}{\partial H}\right)_T = \mu_0 T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial T^2}\right)_H$.

3. On se place dans le cas d'un milieu paramagnétique suivant la loi de Curie $M = \frac{aH}{T}$ avec a constant.

a. Exprimer β et $\left(\frac{\partial c_H}{\partial H}\right)_T$ en fonction de H et T .

b. A température constante T_i , exprimer le transfert thermique volumique reçu Q_v lorsque H passe réversiblement de H_i à $H_f > H_i$. Préciser le signe de ce transfert.

c. Aux températures considérées, la capacité thermique volumique c_H est nulle à excitation nulle. Donner $c_H(T, H)$.

d. On procède à une désaimantation adiabatique réversible : $(T_i, H_0) \rightarrow (T_f, H_i)$. Donner T_f .

Application numérique :

[Giauque 1926] : $T_i = 1,5K$, $H_0 = 3820 A/m$ et $H_i = 636 A/m$.

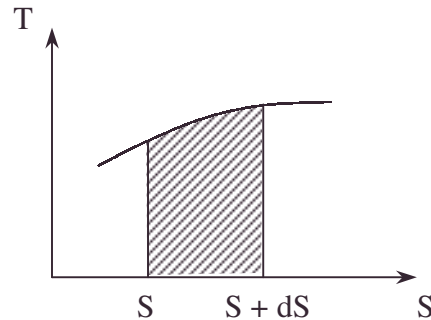
Air ; durée : 4h.

Corrigé

A.1. $\delta Q_{rev} = TdS$,

avec $dS = m \frac{C_v}{T} dt + \frac{\ell}{T} dV = m \frac{C_p}{T} dT + \frac{h}{T} dP$.

Dans le diagramme, TdS représente l'aire hachurée. (cf. interprétation différentielle).



2. $dU = \delta Q_{rev} + \delta W = TdS - PdV$;

$H = U + PV \Rightarrow dH = TdS + VdP$.

$G = H - TS \Rightarrow dG = -SdT + VdP$.

3. C_p capacité thermique à pression constante du système.

$$dS = \frac{C_p}{T} dT + \frac{k}{T} dP = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_P dP \Rightarrow C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P ; k = T \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T.$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T dP = -SdT + VdP \Rightarrow S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P ; V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T.$$

Or, la condition de Schwarz $\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P}\right) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial P \partial T}\right)$ traduit dG différentielle totale,

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \Rightarrow k = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \text{ cf. relation de Clapeyron.}$$

• capacités calorifiques en fonction de γ , condition de Schwarz, dérivée partielle, désaimantation adiabatique, enthalpie libre, forme différentielle canonique des fonctions d'état de la thermodynamique, loi de Curie [pour la susceptibilité magnétique d'un milieu paramagnétique], relation de Clapeyron

4.a.α. $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$; or pour un gaz parfait $C_p - C_v = nR$ vu la définition de C_p ici.

$$C_v = \frac{C_p}{\gamma} \Rightarrow C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}.$$

β. Pour un gaz parfait $dH = C_p dT$ s'écrit $dH = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} dT$.

b.α. Une détente isentropique (adiabatique réversible) de gaz parfait satisfait à ;

$$T_f P_f^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_i P_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (\text{variante de } P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \text{ associée à } PV = nRT).$$

$$\text{Pour une détente } P_f < P_i ; T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} < T_i.$$

Le graphique suivant le manifeste.

β. En effet, B est commun aux deux courbes et en B :

$$\text{pour l'isotherme : } PV = nRT_f \Rightarrow VdP + PdV = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_f} = -\frac{P_f}{V_f}.$$

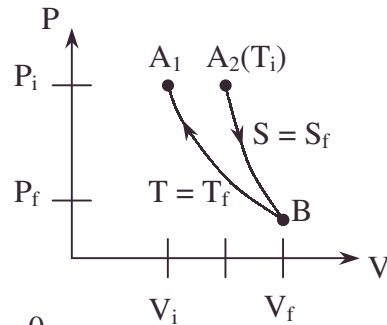
$$\text{Pour l'isentropique : } PV^\gamma = P_f V_f^\gamma \Rightarrow V^\gamma dP + \gamma P V^{\gamma-1} dV = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{S_B} = -\gamma \frac{P}{V} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{S_B}}{\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_f}} = \gamma > 1, \text{ d'où la position relative des 2 courbes en B.}$$

γ. à P_i donné, vu la position relative des 2 courbes : $V_{A_2} > V_{A_1} \Rightarrow T_i > T_f > 0$.

$$T_i \rightarrow 0 \Rightarrow T_f \rightarrow 0.$$

δ. Chaque séquence (détente isentropique, compression isotherme) fait diminuer la température ; mais l'existence de la matière empêchant $V = 0$ (à P donné), on ne peut atteindre $T = 0$.



B.1.a. En régime stationnaire adiabatique, tout se passe comme si la portion ABB'A' se retrouvait en DCC'D' sous l'action des forces pressantes ; le bilan énergétique s'écrit avec $AA' = d\xi$; $BB' = d\xi$.

$$dm \left[\left(u_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + gz_2 \right) - \left(u_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + gz_1 \right) \right] = P_1 \Sigma_1 d\xi_1 - P_2 \Sigma_2 d\xi_2 = P_1 \frac{dm}{\mu_1} - P_2 \frac{dm}{\mu_2},$$

$$\text{soit } u_2 + \frac{1}{2} c_2^2 + gz_2 + \frac{P_2}{\mu_2} = u_1 + \frac{1}{2} c_1^2 + gz_1 + \frac{P_1}{\mu_1} \text{ en séparant les variables.}$$

$$\text{Or, } h = u + \frac{P}{\mu} \Rightarrow (\alpha) h_1 + e_1 = h_2 + e_2 \text{ avec } e_i = \frac{1}{2} c_i^2 + gz_i.$$

b. Dans un repère lié au fluide, l'unité de masse échange $dQ = c_v dT + \ell dV$ pour les variables T et $V \Rightarrow dU = c_v dT + (\ell - p) dV$, et pour un écoulement isotherme incompressible, $dU = 0 \Rightarrow u_2 = u_1$; il reste, vu $\mu_1 = \mu_2$:

• *adiabatique, Bernoulli [formules de], Clapeyron, comparaison des compressibilités isentropique et isotherme [formule de Reech], dérivée partielle, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, graphe, isentropique, Laplace (formule isentropique), Reech*

$$\frac{1}{2}c_2^2 + gz_2 + \frac{P_2}{\mu} = \frac{1}{2}c_1^2 + gz_1 + \frac{P_1}{\mu} \text{ relation de Bernoulli.}$$

2. Si $c_1 \neq c_2$ et $z_1 \neq z_2$, (α) s'écrit $h_1 = h_2$, transformation isenthalpique.

3. Dans un repère lié au fluide, l'unité de masse est décrite par $dS = dS_{\text{échangée}} + dS_{\text{créée}} = 0 + dS_{\text{créée}}$.

$$\text{Or, } dh = Tds + vdP = 0 \Rightarrow ds = -\frac{vdP}{T} = -\frac{R}{M} \frac{dP}{P} \Rightarrow \Delta s = -\frac{R}{M} \ln \frac{P_f}{P_i} = s_c.$$

Vu $P_f < P_i$. Le signe + est associé à l'irréversibilité (associée au déplacement fini irréversible) de la transformation adiabatique.

4. La transformation de Joule-Kelvin est isenthalpique (cf. condition de B.2.)

$$dh = c_p dT + (k + v) dP = 0 ;$$

$$\left(\frac{dT}{dP} \right)_h = \mu = -\frac{k + v}{c_p} \Leftrightarrow dT = \mu dP \text{ dans ce cadre, et si la masse est l'unité,}$$

$$\mu = \frac{T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P - v}{c_p} \text{ vu l'expression de } k \text{ vu en A.3.}$$

Si $v = \frac{RT}{MP}$, $\mu = 0$ cf. 2^{ème} loi de Joule, résultat classique.

5. $dT < 0$ et $dv > 0 \Rightarrow \mu < 0$.

6. Parabole de Hill-Lounasmaa : figure ci-jointe.

α . On voit que pour $P = 0$, $T_{\max} = 36,9 \text{ K}$.

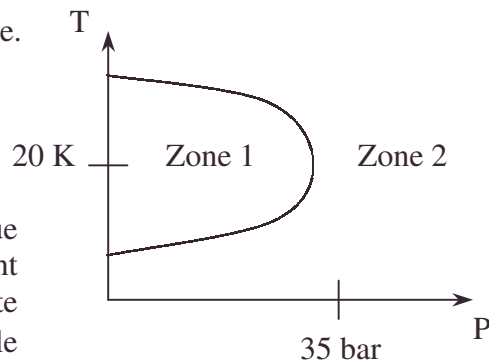
β . On a $\frac{dP}{dT} = 0$ pour $5,37 - 2,0,1303T = 0$,

soit $T = 20,7 \text{ K}$ et $P_{\max} = 34,7 \text{ bar}$.

γ . $\mu = 0$ sépare les 2 zones citées (technique du régionnement) ; la zone 2 contient le point $p = 1 \text{ bar}$; $T = 273 \text{ K}$, où l'hélium se comporte comme un gaz réel normal, soit $\mu < 0$, d'où le régionnement complet.

Zone 2 : $\mu < 0$.

Zone 1 : $\mu > 0$.



C.1.a. $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, soit $B = \mu_0 (H + M)$ pour un modèle unidimensionnel

$$dw = HdB = \mu_0 HdH + \mu_0 HdM, \text{ somme de deux termes.}$$

b. Dans le vide, $M = 0$; $B = \mu_0 H$: $dw_{\text{vide}} = \mu_0 HdH$, en prenant en référence $\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}$ avec \vec{j} notation identique dans le vide et dans le milieu magnétique.

Le 2^{ème} terme de C.1.a. caractérise la variation de l'aimantation du milieu magnétique. (Ensemble de moments magnétiques situés dans le vide caractérisé par M localement) $\Rightarrow dw_{\text{mil}} = \mu_0 HdM$.

2.a. $dU = dQ + dW$ s'écrit ici $du = Tds + \mu_0 HdM$ pour l'unité de volume de matière magnétique, en séparant encore l'étude énergétique du vide et des dipôles magnétiques caractérisant la matière magnétique.

s représente l'entropie volumique de cette matière. N.B.: $s = 0$ pour le vide.

b. $g = u + Pv - Ts$ est la définition adaptée à l'étude des gaz où $dW = -PdV$;

vu l'expression de dW_{mil} , ici on prendra $g^* = u - \mu_0 HM - Ts$.

• adiabatique, coefficient de Joule-Thomson, dérivée partielle, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, irréversibilité, isenthalpique, Joule-Kelvin, relation de Bernoulli, unidimensionnalité

$$dg^* = du - \mu_0 HdM - \mu_0 MdH - Tds - sdT = -sdT - \mu_0 MdH.$$

$dg^* = -sdT - \mu_0 MdH$ est une différentielle totale (cf. A.3.):

$$s = -\left(\frac{\partial g^*}{\partial T}\right)_H; \mu_0 M = -\left(\frac{\partial g^*}{\partial H}\right)_T; \text{ or } \frac{\partial^2 g^*}{\partial T \partial H} = \frac{\partial^2 g^*}{\partial H \partial T} \Rightarrow -\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T = -\mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H.$$

$$\text{c.}\alpha. ds = \frac{c_H dT}{T} + \frac{\beta}{T} dH \text{ est une différentielle totale } \Rightarrow \beta = T \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T.$$

$$\text{soit } \beta = \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H.$$

$$\beta. \text{ La même procédure appliquée à } s \text{ donne } \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H = \frac{C_H}{T}; \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_T = \frac{\beta}{T};$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial H} = \frac{\partial^2 s}{\partial H \partial T} \text{ s'écrit } \frac{1}{T} \left(\frac{\partial c_H}{\partial H}\right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\beta}{T}\right)\right]_H = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial T^2}\right)_H$$

$$\text{d'où } \left(\frac{\partial c_H}{\partial H}\right)_T = \mu_0 T \left(\frac{\partial^2 M}{\partial T^2}\right)_H$$

$$\text{3.a. } \beta = -a\mu_0 \frac{H}{T}; \frac{\partial c_H}{\partial H} = 2\mu_0 \frac{aH}{T^2}.$$

$$\text{b. } dQ_{\text{volumique}} = Tds = \beta dH = -\frac{a\mu_0}{T} HdH;$$

$Q_V = -\frac{\mu_0 a}{2T} (H_f^2 - H_i^2) < 0$ si $a > 0$, ce qui est le cadre de la loi de Curie des composés paramagnétiques.

c. L'intégration de 3.a. donne $c_H = \mu_0 \frac{aH^2}{T^2}$ vu l'indication donnée à $H = 0$.

$$\text{d. } ds = \mu_0 \frac{aH^2}{T^3} dT - \frac{a\mu_0}{T^2} HdH = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dH}{H};$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{H_2}{H_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{H_2}{H_1} \Rightarrow T_f = \frac{T_i H_i}{H_0}; \text{ AN : } T_f = 0,25 \text{ K}.$$

Le sel était $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3$, sulfate de gadolinium ; Gd est un lanthanide paramagnétique .

4.3.4. Supraconductivité : Etat sans effet Joule

Lorsque l'induction magnétique extérieure uniforme B_a devient supérieure à une valeur critique B_c , fonction de la température, la supraconductivité est "détruite" et le métal revient à l'état normal. L'induction critique B_c varie avec la température selon la loi

$$B_c = B_0 \left[1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right], \text{ où } T_0, \text{ température de}$$

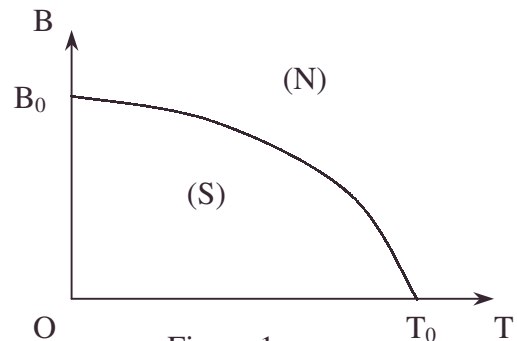


Figure 1

• condition de Schwarz, dérivée partielle, loi de Curie [pour la susceptibilité magnétique d'un milieu paramagnétique], relation de Clapeyron, sulfate de gadolinium [désaimantation adiabatique]

transition sous induction nulle, et B_0 sont des constantes dépendant du métal.

La courbe $B_c(T)$ délimite dans le diagramme (B, T) deux régions où le métal est soit dans l'état normal (N) soit dans l'état supraconducteur (S) (figure 1).

On suppose que lorsque le métal, placé dans un champ magnétique extérieur uniforme d'induction \vec{B}_a , est dans l'état supraconducteur (S), le moment magnétique par unité de

volume \vec{J} (ou intensité d'aimantation) est donné par $\vec{J} = -\frac{\vec{B}_a}{\mu_0}$ et que l'induction

magnétique est nulle en tout point de ce métal. Lorsqu'il est dans l'état normal (N), l'intensité d'aimantation \vec{J} est nulle et \vec{B} à l'intérieur du métal est égal à \vec{B}_a .

L'expérience montre que la transition entre les deux états est réversible. On se propose de l'étudier du point de vue thermodynamique. On raisonnera par la suite sur l'unité de volume du métal et on considérera la masse volumique comme invariable au cours des diverses transformations.

1. On montre que le travail magnétique fourni par l'extérieur à l'unité de volume du métal, pour faire varier l'aimantation de dJ est $\delta W = B_a dJ$. Par analogie avec l'expression du travail des forces de pression dans un gaz et de l'enthalpie libre correspondante, introduire la fonction enthalpie libre G du problème relative à la quantité de matière de l'unité de volume.

Etudier et tracer les variations de $\left(\frac{\partial G}{\partial B_a}\right)_T$ dans les états (N) et (S) en fonction de B_a .

2. Que peut-on dire de G pour une transition à champ et température donnés ?

En déduire que si $G_N(B_a, T)$ et $G_S(B_a, T)$ sont les fonctions enthalpies libres du métal dans l'état normal et l'état supraconducteur, on a le long de la courbe de transition : $dG_S = dG_N$.

3. Calculer alors $S_N - S_S$ sur la courbe de transition en fonction de B_c et $\frac{dB_c}{dT}$;

(S_N et S_S sont les entropies par unité de volume dans chaque état).

En déduire qu'il existe une chaleur latente L de changement d'état de (S) vers (N), dont on donnera l'expression en fonction de T , B_0 et T_0 .

Préciser le signe et tracer les variations de L avec la température.

4. On appelle C_N et C_S les capacités calorifiques (rapportées à l'unité de volume), à induction constante, dans les états normal et supraconducteur.

Calculer $C_S - C_N$ à la transition en fonction de T , B_c et des dérivées de B_c par rapport à T .

On montrera d'abord que $\left(\frac{\partial S_S}{\partial B_a}\right)_T = \left(\frac{\partial S_N}{\partial B_a}\right)_T = 0$.

Expliciter $C_S - C_N$ en fonction de T , B_0 et T_0 et tracer la courbe $C_S - C_N$ en fonction de T .

5. Montrer que $G_N(B_a, T)$ est indépendant de B_a .

On posera alors $G_N(B_a, T) = G_N(T)$.

La capacité calorifique (rapportée à l'unité de volume) d'un métal normal, aux très basses températures est donnée par $C_N = \gamma T$ où γ est une constante. Déterminer $G_N(T)$.

N.B. On utilisera le troisième principe de la thermodynamique d'après lequel $S = 0$ à $T = 0$ K. $G_N(T)$ est alors définie à une constante additive près que l'on déterminera de telle façon que $G_N(0) = 0$.

6. Calculer $G_S(B_a, T) - G_S(0, T)$. En utilisant les propriétés de G_S et G_N à la transition, déterminer complètement $G_S(B_a, T)$.

7. Les déterminations expérimentales de capacité calorifique dans l'état supraconducteur et en champ nul montrent que $C_S(0, T)$ varie suivant une loi en T^3 . Trouver l'expression de γ qui rend compte de ce fait expérimental. Donner les expressions $G_N(T)$ et $G_S(B_a, T)$ contenant comme seules constantes μ_0 , B_0 , T_0 .

Construire dans un diagramme (G, T) et pour des valeurs de B_a différentes, les courbes représentant les variations de $G_N(T)$ et $G_S(B_a, T)$.

Délimiter, en le justifiant physiquement, les domaines de variation correspondant à la stabilité de l'état normal ou de l'état supraconducteur.

Etudier les tangentes aux points de transition.

Que représente physiquement la quantité d'énergie $\frac{B_c^2}{2\mu_0}$?

8. Application numérique : dans le cas de l'aluminium, $B_0 = 1,05 \cdot 10^{-2}$ T ; $T_0 = 1,18$ K.

Calculer : – L'énergie à 0 K, $\frac{B_0^2}{2\mu_0}$, rapportée à la mole d'aluminium.

– Le coefficient γ de la capacité calorifique à l'état normal, par mole d'aluminium.

– Le saut de chaleur spécifique $C_S - C_N$ à $T = T_0$, rapporté à une mole d'aluminium.

On donne pour l'aluminium : – La masse volumique : $\rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3$ kg.m⁻³.

– La masse molaire : $M_{Al} = 27$ g.mol⁻¹.

ENS ; Durée : 1h30

Corrigé

1.a. Pour un fluide on définit $G = U + PV - TS$ sachant $dU = TdS - PdV \Rightarrow dG = -SdT + VdP$.

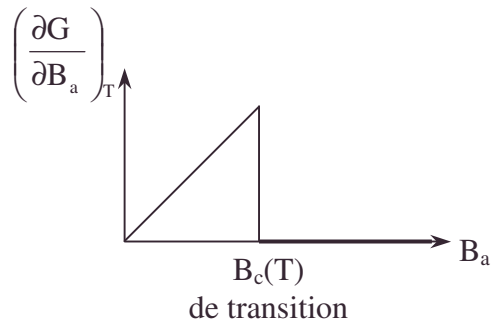
Pour le milieu magnétique $dU = TdS + B_a dJ$: le produit PV doit être remplacé formellement par le produit $-JB_a$

$\Rightarrow G = U - JB_a - TS$ est le potentiel thermodynamique adapté à notre étude.

b. On a : $dG = -SdT - JdB_a$ par analogie ou par calcul ;

$$\text{Aussi } \left(\frac{\partial G}{\partial B_a} \right)_T = -J, \text{ or } \vec{J} = \frac{-\vec{B}_a}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial G}{\partial B_a} \right)_T = 0 \text{ dans l'état (N) où } \vec{J} = \vec{0} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial B_a} \right)_T = \frac{B_a}{\mu} \text{ dans l'état (S).} \end{cases}$$



• déterminations expérimentales, état supraconducteur, forme différentielle canonique des fonctions d'état de la thermodynamique, graphe, ingénierie, point de transition[changement d'état], stabilité, variation d'enthalpie libre [changement d'état]

2.a. Pour un fluide, $dG = -SdT + VdP$; les transitions de phase à T et P constants se font à G constant : $\left. \begin{matrix} dT = 0 \\ dP = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow dG = 0$.

De même, pour le matériau étudié, $dG = -SdT - JdB_a$, les transitions de phase à T et B_a donnés ($dT = 0, dB_a = 0 \Rightarrow dG = 0$) se font à G constant.

b. $G = n_N G_N + n_S G_S$ quand les deux phases coexistent ;

$n_N + n_S = N_T \Rightarrow dn_N + dn_S = 0$; à T et B_a donnés : G_N et G_S sont constants et $dG = 0$ or $dG = (G_N - G_S)dn_N = 0 \Rightarrow G_N(B_a, T) = G_S(B_a, T)$.

On en déduit $dG_N = dG_S$ le long de la courbe de transition, ensemble de points où coexistent les deux phases.

3.a. $dG_S = -S_S dT - J_S dB_c$ car $B_a = B_c$ sur la courbe de transition.

$dG_N = -S_N dT$ car $J_N = 0$.

$$dG_S = dG_N = -S_N dT = -S_S dT - J_S \frac{dB_c}{dT} dT \Rightarrow S_N - S_S = \frac{-B_c}{\mu_0} \frac{dB_c}{dT}.$$

b. L'état le plus ordonné est (S) vu son ordre magnétique $\Rightarrow S_N - S_S = \frac{L}{T}$.

$$L = -T \frac{B_c}{\mu_0} \frac{dB_c}{dT} = -\frac{2B_0^2}{\mu_0} \frac{T^2}{T_0^2} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right).$$

Ce changement d'état n'est possible que pour $T < T_0$.

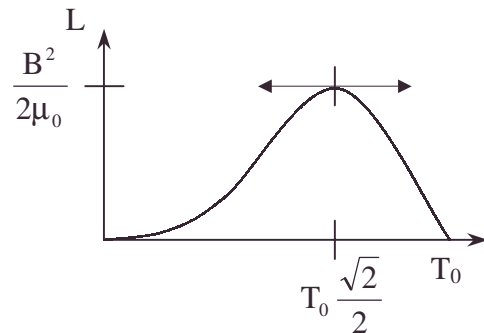
$L = 0$ pour $T \geq T_0$;

Pour $T < T_0$, $L > 0$:

le signe de L est naturellement positif.

$$\text{Vu } \frac{dL}{dT} = \frac{-4B_0^2}{\mu_0 T_0^2} T \left(1 - \frac{2T^2}{T_0^2} \right), \text{ pente finie en } T = T_0 ;$$

$$\text{pente nulle en } T = 0 \text{ et } T = T_0 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



La courbe est donc très différente de celle d'un changement d'état physique du 1^{er} ordre

4.a.α. G_N ne dépend pas de B_a puisque $\left(\frac{\partial G_N}{\partial B_a} \right)_T = 0$ (cf. courbe **1.b.**).

Sa dérivée $S_N = -\left(\frac{\partial G_N}{\partial T} \right)_{B_a}$ n'en dépend pas non plus : $\left(\frac{\partial S_N}{\partial B_a} \right)_T = 0$.

β. $G_S = -S_S dT - J_S dB_0$;

le théorème de Schwarz permet l'égalité $\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial B_a} = \frac{\partial^2 G}{\partial B_a \partial T}$,

$\Rightarrow -\left(\frac{\partial J_S}{\partial T} \right)_{B_a} = -\left(\frac{\partial S_S}{\partial B_a} \right)_T$; or $\left(\frac{\partial J_S}{\partial T} \right)_{B_a} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_a}{\partial T} \right)_{B_a} = 0$ car T et B_a sont des variables indépendantes.

Conclusion : $\left(\frac{\partial S_S}{\partial B_a} \right)_T = \left(\frac{\partial S_N}{\partial B_a} \right)_T = 0$.

• condition de Schwarz, courbe de transition de supraconductivité, dérivée partielle, graphe, identification, variation d'entropie

b. Avec les variables T et B_a , la forme différentielle dQ s'écrit : $dQ = C dT + A dB_a$ pour chaque état, C et A coefficients calorimétriques adaptés.

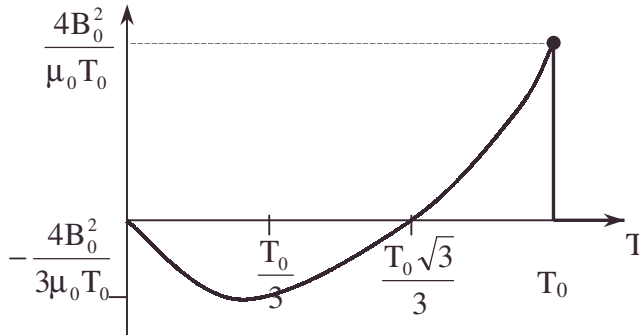
$$dS = \frac{dQ}{T} = C \frac{dT}{T} + A \frac{dB_a}{T} \text{ dans le cadre de réversibilité de l'énoncé.}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{B_a} = \frac{C}{T} \Rightarrow \frac{C_S}{T} - \frac{C_N}{T} = \frac{\partial}{\partial T} (S_S - S_N) = - \frac{\partial}{\partial T} L = \frac{d}{dT} \left(\frac{B_c}{\mu_0} \frac{dB_c}{dT} \right);$$

$$C_S - C_N = \frac{T}{\mu_0} \left[\left(\frac{dB_c}{dT} \right)^2 + B_c \left(\frac{d^2 B_c}{dT^2} \right) \right] = - \frac{2B_0^2 T}{\mu_0 T_0^2} \left(1 - 3 \frac{T^2}{T_0^2} \right)$$

$$\frac{d(C_S - C_N)}{dT} = - \frac{2B_0^2}{\mu_0 T_0^2} \left(1 - 9 \frac{T^2}{T_0^2} \right) : \quad C_S - C_N \text{ décroît pour } T < \frac{T_0}{3}.$$

$$C_S - C_N \text{ croît pour } T_0 > T > \frac{T_0}{3}.$$



Il n'y a plus de transition pour $T > T_0$.

$$\text{Pour } T = \frac{T_0}{3}, C_S - C_N =$$

$$- \frac{2B_0^2 T_0}{\mu_0 3 T_0^2} \left(1 - \frac{T_0^2}{3 T_0^2} \right) = - \frac{4B_0^2}{3 \mu_0 T_0};$$

On notera le changement de signe de $C_S - C_N$ à $T = T_0 \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$5. G_N \text{ ne dépend pas de } B_a \text{ puisque } \left(\frac{\partial G_N}{\partial B_a} \right)_T = 0 \text{ cf. courbe 1.b.} \Rightarrow G_N = G_N(T);$$

$$\text{De même, sa dérivée } S_N = - \left(\frac{\partial G_N}{\partial T} \right)_{B_{La}} = S_N(T).$$

$$dS_N = \frac{C_N}{T} dT = \gamma dT \Rightarrow S_N = \gamma T + S(T=0) = \gamma T \text{ vu le troisième principe, où } S(0) = 0.$$

$$\Rightarrow dG_N = -S_N dT = -\gamma T dT \Rightarrow G_N = -\frac{1}{2} \gamma T^2 + G(T=0), \Rightarrow G_N = -\frac{1}{2} \gamma T^2 \text{ vu l'énoncé.}$$

$$6.a. \text{ Vu 1.b. } dG_S = \frac{B_a}{\mu_0} dB_a \text{ à } T \text{ fixé} \Rightarrow G_S(B_a, T) - G_S(0, T) = \frac{B_a^2}{2\mu_0}.$$

$$b. \text{ A la transition } B_a = B_c, G_S(B_c, T) = G_N(T) = -\frac{1}{2} \gamma T^2,$$

$$6.a. \Rightarrow G_S(0, T) = G_S(B_c, T) - \frac{B_c^2}{2\mu_0} = -\frac{1}{2} \gamma T^2 - \frac{B_c^2}{2\mu_0},$$

$$G_S(B_a, T) = G_S(0, T) + \frac{B_a^2}{2\mu_0} = -\frac{1}{2} \gamma T^2 + \frac{B_a^2 - B_c^2}{2\mu_0} = - \left[\frac{1}{2} \gamma T^2 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right)^2 \right] + \frac{B_a^2}{2\mu_0}$$

en séparant les termes en T et B_a .

• *graphe, troisième principe de la thermodynamique, variation d'enthalpie libre [changement d'état]*

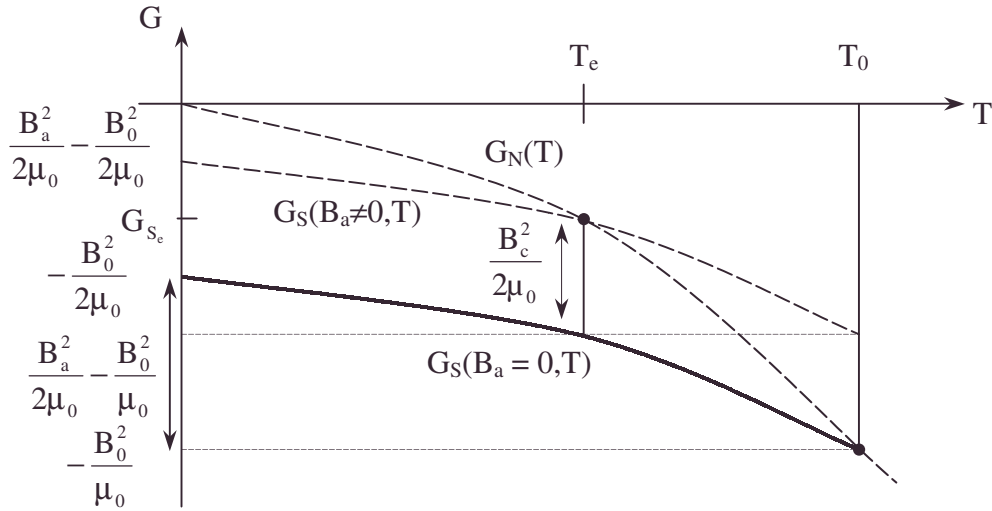
$$7.a. C_S = C_N - \frac{2B_0^2 T}{\mu_0 T_0^2} \left(1 - \frac{3T^2}{T_0^2} \right) = T \left(\gamma - \frac{2B_0^2}{\mu_0 T_0^2} \right) + \frac{6B_0^2}{\mu_0 T_0^4} T^3.$$

La loi en T^3 implique le coefficient de T nul soit $\gamma = \frac{2B_0^2}{\mu_0 T_0^2}$.

b. On remplace γ .

$$G_N(T) = -\frac{1}{\mu_0} B_0^2 \frac{T^2}{T_0^2}; G_S(B_a, T) = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^4 + \frac{B_a^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0}.$$

$$c. \frac{dG_N}{dT} = -\frac{2B_0^2}{\mu_0 T_0^2} T; \left(\frac{\partial G_S}{\partial T} \right)_{B_a} = -\frac{2B_0^2}{\mu_0 T_0^4} T^3.$$



d.α. La courbe $G = G_N(T)$ caractérise l'état (N).

β. L'état stable est de G le plus bas. L'état supraconducteur (S) existe de manière stable si $0 \leq B_a \leq B_c$ à $T < T_0$, donné. L'équilibre existe à l'intersection de $G_S(B_a, T)$ et de $G_N(T)$ définie par T_e , G_{S_c} et l'état supraconducteur subsiste quand on diminue B_a à T_e donné. Il existe à $T < T_e$ entre $G_S(B_a \neq 0, T)$ et $G_S(B_a = 0, T)$.

Les états supraconducteurs existent dans la zone comprise entre G_N et $G_S(B_a = 0, T)$ à $T > T_e$.

$$e. S_S = -\left(\frac{\partial G_S}{\partial T} \right)_{B_a} = S_N = -\left(\frac{dG_N}{dT} \right) \text{ pour } T = T_0 \text{ car } L = 0. \text{ Cet équilibre se fait alors}$$

pour $B = B_a$.

Aussi $G_S = G_S(B_a = 0, T)$ et $G_N = G_N(T)$ ont même tangente en $T = T_0$.

$$\text{Remarquons : } G_S(B_a, 0) - G_S(B_a, T_0) = \frac{B_a^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \left(\frac{B_a^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{\mu_0} \right) = \frac{B_0^2}{2\mu_0}.$$

$$f. \frac{B_c^2}{2\mu_0} = G_N(T) - G_S(0, T) = G(B_c, T) - G_S(0, T).$$

C'est l'enthalpie libre à fournir à T donné pour obtenir l'état normal à partir de l'état supraconducteur existant à $B_c = 0$.

C'est aussi l'enthalpie libre à fournir à T donné pour passer de l'état supraconducteur à $B_a = 0$ à $B_a = B_c$.

8. Pour une mole, le volume est $\frac{M_{Al}}{\rho_{Al}}$.

a. L'énergie demandée d'une mole est $\frac{B_0^2}{2\mu_0} \cdot \frac{M_{Al}}{\rho_{Al}} = 4,39 \cdot 10^{-4} \text{ J.mol}^{-1}$.

b. $\gamma_{mol} = \gamma \frac{M_{Al}}{\rho_{Al}} = \frac{2B_0^2}{\mu_0 T_0^2} \cdot \frac{M_{Al}}{\rho_{Al}} = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ J.K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

c. $(C_S - C_N)_{mol} = \frac{4B_0^2}{\mu_0 T_0^2} \cdot \frac{M_{Al}}{\rho_{Al}} = 2,97 \cdot 10^{-3} \text{ J.K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

4.3.5. Machine frigorifique

Voir page 588.

4.3.6. Génie chimique d'une unité de production d'ammoniac

Voir page 1499.

4.3.7. Tirage d'un cristal de germanium

Voir page 688.

4.3.8. Mélanges binaires

Voir page 688.

4.4. Systèmes ouverts

appartiennent aussi aux programmes de PSI, PC, PT, TSI1 et 2, TPC2

4.4.1. Détente de Joule - Thomson

On recherche une première information sur 3 procédés envisageables pour le refroidissement d'un gaz (Questions 1. à 6.).

1. Dans le premier, le gaz contenu dans un cylindre fermé par un piston est détendu adiabatiquement tout en maintenant sur la face externe du piston une pression très peu inférieure à la pression du gaz dans le cylindre.

En assimilant celui-ci à un gaz parfait et en notant :

- P_1 et T_1 sa pression et sa température absolue au début de la détente ;
- $a = \frac{P_1}{P_2}$ le rapport des pressions initiale et finale,

exprimer la variation de température du gaz en fonction de T_1 et de a .

Calculer sa valeur dans le cas où : $T_1 = 298$ K, $P_1 = 10$ bars, $P_2 = 1$ bar,

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ sera considéré comme constant et égal à 1,4.

2. Dans le second procédé, le gaz toujours contenu dans un cylindre fermé par un piston est détendu adiabatiquement alors que la pression exercée par le milieu extérieur sur la face externe du piston est constante. En raison des frottements, le piston se fixe à une position d'équilibre où la pression du gaz égale la pression extérieure. En assimilant le gaz à un gaz parfait et en notant :

- P_1 et T_1 sa pression et sa température absolue au début de la détente ;
- P_e la pression extérieure ;

Exprimer la variation de température du gaz en fonction de T_1 , P_1 , P_e quand le piston est fixé dans sa position d'équilibre.

Calculer sa valeur dans le cas où $T_1 = 298$ K, $P_1 = 10$ bars, $P_e = 1$ bar,

$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ (constant).

3. Dans le troisième procédé, on détend adiabatiquement le gaz en le faisant circuler sans vitesse notable dans une conduite comportant une section étranglée. Les grandeurs intensives sont supposées uniformes dans chacun des domaines séparés par l'étranglement.

Les pressions en amont et en aval de l'étranglement sont notées respectivement P_1 et P_2 , $P_1 > P_2$. Quelle est la variation de température subie par une certaine masse de gaz parfait, quand le régime permanent étant établi, elle a franchi l'étranglement ?

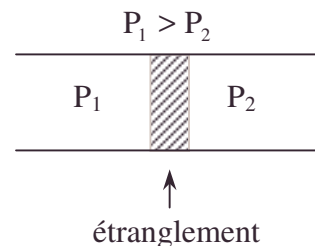
On utilisera sans la redémontrer la caractéristique thermodynamique de cette transformation.

4. On utilise pour l'opération décrite en 3., une mole d'un gaz réel satisfaisant à

l'équation de Van Der Waals : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$.

Etablir dans ce cas l'expression de $\frac{dT}{dP}$. Peut-on préciser a priori le signe de $\frac{dT}{dP}$?

5. Pour une équation de Van Der Waals relative à une mole d'hélium, les paramètres



• *adiabatique, coefficient de Joule-Thomson, développement au premier ordre ou plus, équation d'état de Van Der Waals, équilibre*

a, b, r exprimés en unités S.I. ont les valeurs :

$$a = 3,45 \cdot 10^{-3} ; b = 2,37 \cdot 10^{-5} ; r = R = 8,32.$$

Calculer pour la détente décrite en 4. le coefficient $\frac{dT}{dP}$:

a. Quand le gaz en amont est à une pression de 10 bars et à une température de 298 K.

b. Quand le gaz en amont est à une pression de 12 bars et à une température de 10 K. On prendra C_p constant et égal à $20,9 \text{ joules.mole}^{-1}.\text{kelvin}^{-1}$.

6. Quelles indications peut-on tirer de cette étude pour le choix d'un procédé de refroidissement d'un gaz ?

7. Calculer la variation de l'entropie d'une mole de gaz dans chacune des transformations faites dans les conditions décrites dans les questions 1., 2., 3.

Quel est le signe de cette variation dans les conditions décrites en 4. ?

8. Question indépendante des précédentes.

Est-il licite de dire : un système étant dans un état donné, réalisons la même transformation de ce système (c'est-à-dire la même variation des paramètres) par un processus adiabatique réversible, puis par un processus adiabatique irréversible ? Justifier la réponse.

Rappels : – On prendra pour les calculs : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$;

$$R = 8,32 \text{ joule.mole}^{-1}.\text{degré}^{-1} ;$$

– On note : C_p la chaleur spécifique molaire à une pression constante;

C_v la chaleur spécifique molaire à volume constant,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

CCP ; Durée : 1h

Corrigé

1. On a pour une transformation adiabatique réversible $PT^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \text{cste}$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_2 - T_1 = T_1 \left(a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) ; \text{AN : } T_2 - T_1 = -143,7 \text{ K.}$$

2. On a une transformation adiabatique irréversible vu les frottements.

Ecrivons le bilan énergétique :

$$U_2 - U_1 = W + 0 \text{ avec } U_2 - U_1 = n C_v (T_2 - T_1) ; W = -P_e \int dV = -P_e (V_2 - V_1).$$

$$C_v = \frac{R}{\gamma-1} ; P_e V_2 = nRT_2 \text{ et } P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{\gamma} \left(1 + (\gamma-1) \frac{P_e}{P_1} \right)$$

$$\text{On en déduit : } T_2 - T_1 = -\frac{\gamma-1}{\gamma} T_1 \left(1 - \frac{P_e}{P_1} \right) ; \text{AN : } T_2 - T_1 = -76,6 \text{ K.}$$

3. On a $\Delta U + \Delta E_c = W + 0$ avec $W = P_1 V_1 - P_2 V_2$, et ici $E_c \equiv 0$.

$$U_2 - U_1 = P_1 V_1 - P_2 V_2 \Rightarrow H_2 - H_1 = 0 ;$$

$$\text{or } H_2 - H_1 = n C_p (T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 - T_1 = 0.$$

4. Si $dQ = C_o dT + h_1 dP$; $dS = C_p \frac{dT}{T} + \frac{h_1}{T} dP$; d'après le théorème de Schwartz,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial P} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{h_1}{T} \right) = -\frac{h_1}{T^2} + \frac{\partial h_1}{\partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial T} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{C_p}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial C_p}{\partial P}.$$

• *adiabatique, adiabatique réversible, chaleur spécifique molaire, entropie, équation d'état de Van Der Waals, irréversibilité, isenthalpique, Laplace (formule isentropique de), refroidissement en thermodynamique, relation de Clapeyron, variation d'entropie*

Or $dH = C_p dT + (h_1 + v) dP$ d'où d'après le théorème de Schwartz,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial T \partial P} = \frac{\partial h_1}{\partial T} + \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial T} = \frac{\partial C_p}{\partial P}.$$

En éliminant $\frac{1}{T} \frac{\partial C_p}{\partial P}$, on tire $h_1 = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$, relation de Clapeyron.

Exprimons le caractère isenthalpique d'une transformation différentielle :

$$dH = n C_p dT + (h_1 + V) dP = 0 \quad \text{avec } h_1 = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P - V}{C_p}.$$

Vu l'équation de Van Der Waals avec $n = 1$,

différentions l'équation de Van Der Waals à P constant :

$$r dT = \left[P + \frac{a}{V^2} + (V - b) \left(\frac{-2a}{V^3} \right) \right] dV = \left[\frac{rT}{V - b} - \frac{2a}{V^3} (V - b) \right] dV$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{r}{\frac{rT}{V - b} - \frac{2a}{V^3} (V - b)} \quad \text{d'où}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{1}{C_p} \frac{rT \left(1 - \frac{V}{V - b} \right) + \frac{2a}{V^2} (V - b)}{\frac{rT}{V - b} - \frac{2a}{V^3} (V - b)}$$

Le signe de $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$ à T et V donnés se déduit de cette formule ; ce signe n'est pas évident a priori ; à T et P donnés, il faut calculer V par l'équation de Van Der Waals.

5.a. $V = 0,00250 \text{ m}^3 \Rightarrow \left(\frac{dT}{dP} \right) = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ K.Pa}^{-1}.$

b. $V = 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \Rightarrow \left(\frac{dT}{dP} \right) = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ K.Pa}^{-1}.$

6. On doit préférer l'efficacité des transformations quasi réversibles et se méfier des basses températures à P moyen (cf. changement de signe de $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$).

7.a. Dans [1] : $\Delta S_1 = 0 \text{ J.K}^{-1}$

b. Dans [2] : Pour un gaz parfait $dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{V}{T} dP$; or $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$;

$$\Delta S_2 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad \text{avec } P_2 = P_e ; \text{ AN : } \Delta S_2 = 10,50 \text{ J.K}^{-1}.$$

c. Dans [3] : $T_2 = T_1$.

$$\Delta S_3 = -R \ln \frac{P_2}{P_1} ; \text{ AN : } \Delta S_3 = 19,16 \text{ J.K}^{-1}.$$

d. Dans [4] : $dS > \frac{dQ}{T} \Rightarrow \Delta S_4 > 0$. Une transformation isenthalpique n'est pas

isentropique en général.

8. Soit **A** l'état initial, **B** l'état final.

• *adiabatique, adiabatique réversible, capacités calorifiques molaire en fonction de gamma, coefficient de Joule-Thomson, dérivée partielle, efficacité, équation de Van Der Waals, inégalité de Clausius, irréversibilité, isenthalpique, isentropique, variation d'entropie*

- Si la transformation est adiabatique réversible $S(B) - S(A) = 0$;
- Si la transformation est adiabatique irréversible $S(B) - S(A) > 0$.

La deuxième transformation ne peut aboutir au même état final que celui de la première transformation car S est une fonction d'état : la proposition citée est donc fausse.

4.4.2. Tuyère et turbine

I.1. Une masse unitaire m de gaz parfait subit une transformation adiabatique quelconque (réversible ou non). L'état initial du gaz est défini par sa pression P_1 et sa température T_1 . A l'état final, sa température est T_2 . On donne pour le gaz étudié

$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ (les chaleurs massiques étant supposées indépendantes de la température).

a. Exprimer la variation d'énergie interne $U_2 - U_1$ et le travail W des forces extérieures lors de la transformation.

Application numérique : $m = 1\text{ kg}$; $T_1 = 273\text{ K}$; $T_2 = 200\text{ K}$; Calculer W .

On prendra pour constante des gaz parfaits $R = 8,32\text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Le gaz utilisé est de masse molaire $M = 32\text{ g.mol}^{-1}$.

b. La transformation précédente est supposée réversible ;

exprimer le rapport $\frac{P_2}{P_1}$ où P_2 représente la pression dans l'état final.

Application numérique : calculer ce rapport dans les conditions définies précédemment. On donne $P_1 = 3.10^5\text{ Pa}$. Calculer P_2 et les volumes V_1 et V_2 occupés par le gaz dans les états initial et final.

c. La transformation précédente est supposée irréversible. Exprimer l'inégalité vérifiée par le rapport $\frac{P_2}{P_1}$. Avec les données de T_1 , T_2 et P_1 précédentes, exprimer

numériquement les inégalités vérifiées par P_2 et V_2 .

2. Les récipients R_1 et R_2 (figure 1) contiennent tous deux des gaz parfaits identiques. Les pressions et températures respectives, supposées constantes au cours de la transformation, sont notées P_1 , T_1 et P_2 , T_2 (Les volumes des récipients sont supposés très grands). Le piston p est soumis d'une part à la pression du gaz contenu dans le cylindre C et d'autre part à la pression atmosphérique extérieure P_{atm} supposée constante. Le déplacement du piston est mécaniquement réversible.

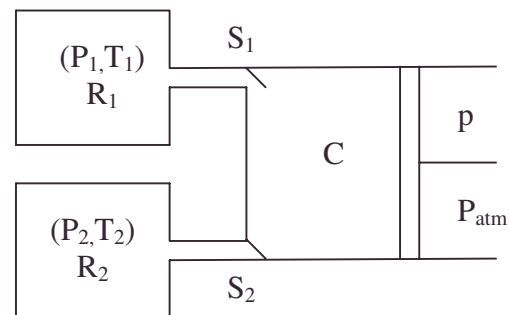


Figure 1

La transformation étudiée dans cette question est la suivante :

- Etat (A) : le cylindre C est de volume nul, les soupapes S_1 et S_2 sont fermées.
- Transformation de (A) à (B) : La soupape S_1 est ouverte, une masse m de gaz est admise, sous la pression P_1 , à la température T_1 dans le cylindre C .
- Transformation de (B) à (C) : Les soupapes S_1 et S_2 sont fermées. Le gaz subit dans le cylindre C une transformation adiabatique quelconque. L'état (C) est donné par la pression P_2 et la température T_2 .

- Transformation de (C) à (D) : Le gaz contenu dans le cylindre C est refoulé dans le récipient R_2 sous la pression P_2 et à la température T_2 (La soupape S_2 est ouverte; la soupape S_1 est fermée).
- L'état (D) est identique à l'état (A) : le volume du cylindre est nul.

a. Représenter dans un diagramme de Clapeyron $P = f(V)$ la transformation précédente. On représentera sur le diagramme, en traits pleins, l'allure de la transformation thermodynamiquement réversible et en pointillés l'allure de la transformation thermodynamiquement irréversible [il est rappelé que la transformation (B) – (C) est adiabatique quelconque].

Pour faciliter le tracé de ces transformations, on pourra utiliser les données des questions **I.1. a** et **b** et calculer les coordonnées (P , T , V) des états (A), (B), (C) et (D) lors de la transformation réversible.

b. En raisonnant sur la masse unitaire m , calculer le travail W' que fournirait un opérateur actionnant le piston dans les conditions mécaniques réversibles. Montrer que ce travail est égal à la variation d'enthalpie $H_2 - H_1$ de la masse unitaire m de gaz.

Calculer numériquement le travail W' avec les valeurs numériques de la question **I.1.**

N.B. : – Pour la démonstration demandée dans la question **I.2.b**, on rappelle que le piston p subit, entre autres, la pression atmosphérique extérieure P_{atm} .

3. Le gaz du réservoir R_1 est supposé à présent se détendre dans une tuyère horizontale isolée thermiquement du milieu extérieur.

En régime permanent, dans une section droite, les vitesses sont égales et normales à la section, la pression et la température y sont uniformes et ont une valeur indépendante du temps. Le gaz entre dans la tuyère avec une vitesse v_1 supposée négligeable, sous la pression p_1 à la température T_1 . Il en sort animé d'une vitesse v_2 sous la pression P_2 à la température T_2 .

a. Deux plans AB et CD liés au gaz et situés à l'instant t , respectivement dans la partie amont (entrée du gaz) et dans la partie aval (sortie du gaz) se trouvent, à un instant $t + \Delta t$ en A'B' et C'D' (figure 2).

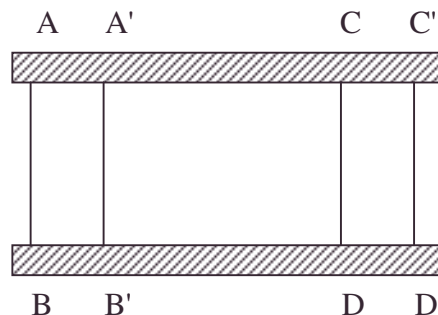


Figure 2

Exprimer le travail reçu de l'extérieur pendant le temps Δt pour la masse de gaz qui occupe le volume ABCD à l'instant t ; on désignera par V_1 le volume qu'occupe la masse de gaz qui s'est écoulée dans la tuyère pendant le temps Δt dans les conditions qui règnent à l'entrée (P_1 , T_1) et

par V_2 le volume occupé, dans les conditions de sortie (P_2 , T_2), pour la même masse de gaz. Les frottements sont supposés négligeables.

En déduire que lorsqu'une masse m de gaz passe adiabatiquement des conditions d'entrée dans la tuyère aux conditions de sortie, il existe la relation suivante :

$H + E_C = \text{constante}$, où H et E_C sont respectivement l'enthalpie et l'énergie cinétique de la masse m à l'entrée ou la sortie de la tuyère.

Applications numériques : Calculer la vitesse v_2 d'éjection des gaz à la sortie de la tuyère en utilisant les données du **I.1.**

b. Le gaz sortant de la tuyère est utilisé pour actionner une turbine. A l'entrée de la turbine, le gaz a une pression P_2 , une température T_2 et une vitesse v_2 . A la sortie, il a mêmes pression et température, sa vitesse est négligeable. Déterminer le travail W'' récupéré sur l'arbre de la turbine par le passage d'une masse unitaire m de gaz.

• *adiabatique réversible, Bernoulli [formules de], capacités calorifiques molaire en fonction de gamma, énergie cinétique macroscopique négligée en thermodynamique, enthalpie, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, travail, turbine, tuyère, variation d'énergie interne, variation d'enthalpie*

Le calculer en utilisant les données précédentes et celles du **I.1**. On donne la célérité c

du son : $c = \left(\frac{\gamma RT}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$.

CCP ; Durée : 2h30

Corrigé

1.a.α. $C_p - C_v = R \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$; $dU = nC_v dT \Rightarrow U_2 - U_1 = \frac{mR}{M(\gamma - 1)}(T_2 - T_1)$.

AN: $U_2 - U_1 = -47,45 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

β. $W = \Delta U$: $W = \frac{mR}{M(\gamma - 1)}(T_2 - T_1)$; AN : $W = -47,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

b.α. Pour une transformation adiabatique réversible :

$PT^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{cste} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$; AN : $\frac{P_2}{P_1} = 0,3365$.

β. $P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$; AN : $P_1 = 3.10^5 \text{ Pa} \Rightarrow P_2 = 100962 \text{ Pa}$.

γ. $V_i = \frac{m}{M} \frac{RT_i}{P_i}$; A.N. : $V_1 = 236,6 \text{ l}$; $V_2 = 515,0 \text{ l}$.

c.α. Calculons la variation d'entropie du gaz parfait avec $\delta Q = nC_p dT + h_1 dP$ et $dH = nC_p dT = \delta Q - PdV + PdV + Vd = nC_p dT + (h_1 + V)dP \Rightarrow h_1 = -V$.

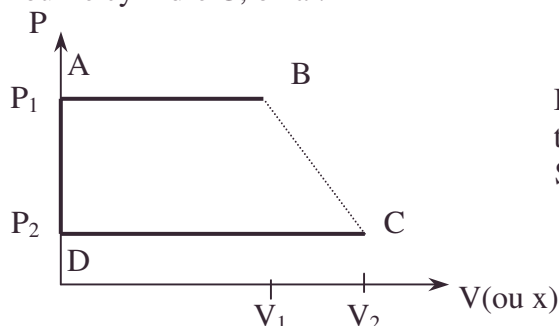
$dS = nC_p \frac{dT}{T} + \frac{h_1}{T} dP$ soit $\frac{h_1}{T} = -\frac{V}{T} = -\frac{nR}{P}$.

$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \Rightarrow C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \Rightarrow \Delta S = nR \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1} = nR \ln \left[\frac{\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\frac{P_2}{P_1} \right)} \right]$.

Or pour une transformation adiabatique irréversible, $\Delta S > 0 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} < \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$.

β. $P_2 < P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow \text{A.N. : } P_2 < 100962 \text{ Pa}$; $V_2 = \frac{mRT_2}{MP_2} \Rightarrow \text{A.N. : } V_2 > 515 \text{ l}$.

2.a. Pour le cylindre C, on a :



BC est en pointillé car la transformation est irréversible. Son tracé est approximatif.

- adiabatique, capacités calorifiques molaire en fonction de gamma, inégalité de Clausius, irréversibilité, Laplace (formule de), premier principe de la thermodynamique, variation d'entropie

$$\mathbf{b.} dW_{AB} = F_{\text{op}_x} dx = (P_{\text{atm}} - P_1) S dx \Rightarrow W_{AB} = (P_{\text{atm}} - P_1) V_1$$

$$\text{de même, } W_{CD} = -(P_{\text{atm}} - P_2) V_2 ; - \int_B^C P dV + 0 = \Delta U_{BC} .$$

$$W_{BC} = - \int_B^C (P - P_{\text{atm}}) dV = \Delta U_{BC} + P_{\text{atm}} (V_2 - V_1) = \frac{m}{M} \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) + P_{\text{atm}} (V_2 - V_1) .$$

$$W' = - \oint_{ABCD} P dV = P_2 V_2 - P_1 V_1 + \frac{mR}{M(\gamma - 1)} (T_2 - T_1) = \frac{mR\gamma}{M(\gamma - 1)} (T_2 - T_1)$$

$$\text{car } P_2 V_2 - P_1 V_1 = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) ; \text{ on peut écrire } W' \text{ sous la forme :}$$

$$W' = P_2 V_2 - P_1 V_1 + (U_2 - U_1) = H_2 - H_1 ; \text{ A.N. : } W' = -66,43 \text{ kJ.kg}^{-1} .$$

3.a.α. Dans le repère du laboratoire, on a $\Delta U + \Delta E_c = W + Q$; ΔU est estimée dans le repère lié au gaz.

$$U_2 + E_{C_2} - U_1 - 0 = W + 0 ; \text{ or } W = - \int P_1 dV - \int P_2 dV = P_1 V_1 - P_2 V_2 ,$$

$$\text{avec } V_1 = V_{AA'B'B} \quad \text{et } V_2 = V_{CC'D'D} .$$

$$\mathbf{\beta.} U_2 - U_1 + E_{C_2} = P_1 V_1 - P_2 V_2 ; H_2 + E_{C_2} = H_1 + 0 \Rightarrow H + E_C = \text{cste} .$$

$$\mathbf{\gamma.} E_{C_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 \text{ et } H_2 - H_1 = n C_p (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) ;$$

$$\mathbf{\beta.} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2R\gamma}{(\gamma - 1)M} (T_1 - T_2)} ; \text{ A.N. : } v_2 = 364,5 \text{ m.s}^{-1} .$$

Comparons à la célérité du son : $c_2 = 269,7 \text{ m.s}^{-1}$; $v_2 > c$;

le fonctionnement hypersonique remet en cause le bilan énergétique.

$$\mathbf{b.} \Delta(U + E_c) = W'' + 0 \text{ fonctionnement adiabatique de la turbine ;}$$

$$\text{or } \Delta U = n C_v (T_1 - T_2) = 0 :$$

$$W = -W'' \text{ Le travail récupéré sur l'axe est perdu pour le système.}$$

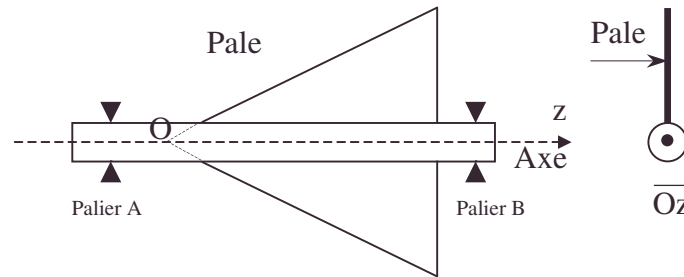
$$W'' = E_C ; W'' = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = -W' ; \text{ A.N. : } W'' = 66,43 \text{ kJ.kg}^{-1} .$$

4.4.3. Compresseur à accélération angulaire permanente

Le compresseur à un étage peut être modélisé mécaniquement par un axe cylindrique plein homogène de rayon R et de longueur L , de masse volumique ρ dans lequel sont encastrées n pales minces, d'épaisseur e , triangulaires, régulièrement réparties et faites du même matériau que l'axe (la figure ci-après montre l'implantation de ces pales et leurs dimensions).

Le mouvement de rotation du compresseur est rapporté à un référentiel galiléen \mathcal{R} (Oxyz) d'axe horizontal \overrightarrow{Oz} .

• *adiabatique, Bernoulli [formules de], compresseur, travail, turbine, variation d'énergie interne, variation d'enthalpie, vitesse hypersonique*



1. Soit ω la vitesse de rotation de (Σ) autour de \vec{Oz} , J étant le moment d'inertie de l'ensemble tournant (Σ) par rapport à son axe de symétrie Oz ; donner l'expression de l'énergie cinétique de (Σ) dans le référentiel \mathcal{R} .

2. Pour tester la qualité des paliers de rotation A et B, on arrête, à un instant donné, l'entraînement du compresseur alors que sa vitesse angulaire de rotation est ω_0 . En supposant que l'on néglige le couple résistant de l'air brassé, et sachant que l'ensemble (Σ) est à l'arrêt complet au bout d'un temps τ , déterminer l'expression du couple axial \vec{C}_f dû aux frottements en A et B et supposé constant.

3. Afin d'obtenir un échauffement $\Delta T = T_2 - T_1$ de l'air comprimé dont on donne la chaleur massique C_p à pression constante pour un débit massique D_m (dans le cadre d'une transformation adiabatique), on redémarre le compresseur et on l'entraîne à l'aide d'un moteur électrique de couple constant C_m .

Calculer à l'instant t la puissance sur l'arbre $P_m(t)$ que doit développer ce moteur pour que l'ensemble ait une accélération angulaire constante $\dot{\omega}_0$ dans ces conditions d'emploi.

CCP

Corrigé

Remarque : la figure indique qu'une pale a cette forme :



1. $E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$.

2. Après suppression de l'entraînement : le théorème du moment cinétique s'écrit : $J \frac{d\omega}{dt} = C_f$. Soit $\omega = \frac{C_f}{J} t + \omega_0 \Rightarrow \vec{C}_f = -\frac{\omega_0 J}{\tau} \vec{z}$.

3. Appliquons le premier principe de la thermodynamique, dans le cadre eulérien de la mécanique des fluides en négligeant l'énergie cinétique de l'air :

$$\frac{D}{Dt} \left[\int u dm \right] + \frac{DE_c}{Dt} = P_{\text{moteur}} + P_{\text{frottement}} + P_{\text{pression}} + P_{\text{thermique ext}}.$$

avec un modèle d'écoulement permanent, unidimensionnel, incompressible et avec

$\omega = \dot{\omega}_0 t$ pour le rotor, on a :

$$D_m \left[\left(u_2 + \frac{P_2}{\mu} \right) - \left(u_1 + \frac{P_1}{\mu} \right) \right] + J \dot{\omega} \omega = (C_m + C_f) \omega = P_m - \omega_0 \frac{\dot{\omega}_0 t}{\tau} J ;$$

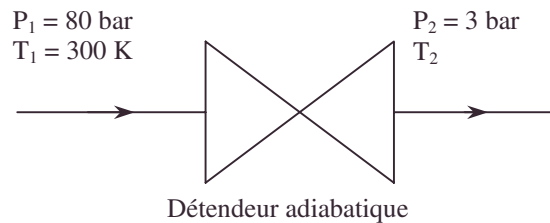
$$P_m = \frac{J \dot{\omega}_0 \omega_0 t}{\tau} + D_m (h_2 - h_1) + J \dot{\omega}_0 t = \frac{J \dot{\omega}_0}{\tau} t \omega_0 + D_m C_p (T_2 - T_1) + J \dot{\omega}_0^2 t ;$$

$$P_m = D_m C_p (T_2 - T_1) + J \dot{\omega}_0 t \left(\frac{\omega_0}{\tau} + \dot{\omega}_0 \right), \quad C_f \text{ étant supposé constant.}$$

• adiabatique, compresseur, détenteur adiabatique, moteur, premier principe de la thermodynamique, théorème du moment cinétique, unidimensionnalité

4.4.4. Détendeur adiabatique d'un gazoduc

Le gaz naturel est transporté à haute pression dans un gazoduc avant d'être détendu, la plupart du temps en plusieurs étapes, dans la région d'utilisation. C'est à l'une de ces détentes que cette étude est consacrée.



Nous supposons le gaz constitué uniquement de méthane ($M = 16 \text{ g.mol}^{-1}$) ; les effets de la pesanteur seront négligés. Son débit massique D est de $2,5 \text{ kg.s}$.

La pression en amont du détendeur est $P_1 = 80 \text{ bar}$ et sa température $T_1 = 300 \text{ K}$.

La pression en aval est $P_2 = 3 \text{ bar}$.

Les canalisations amont et aval ont le même rayon $r = 25 \text{ cm}$.

1. Nombre de foyers alimentés par le gazoduc

On peut lire dans une brochure de Gaz de France (GDF) : "Le gaz naturel est puissant. Son pouvoir calorifique est de 10 th/m^3 . La thermie (th) est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1°C la température de 1000 l d'eau". La capacité thermique massique de l'eau sera prise égale à $4,18 \text{ kJ.}^\circ\text{C}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

En admettant que ces données font référence au gaz dans les conditions de température (avant combustion) et de pression d'utilisation domestique (20°C soit 293 K et 1 bar soit 10^5 Pa) et que le méthane obéit dans ce cas à l'équation du gaz parfait ($R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$), déterminer en kJ.kg^{-1} le pouvoir calorifique massique du gaz naturel. Calculer le nombre de foyers alimentés par le gazoduc pour une consommation moyenne de 3 kW par foyer.

2. Etude de la détente

Le détendeur fonctionne en régime permanent. Il est adiabatique et l'extérieur ne lui apporte aucune puissance mécanique.

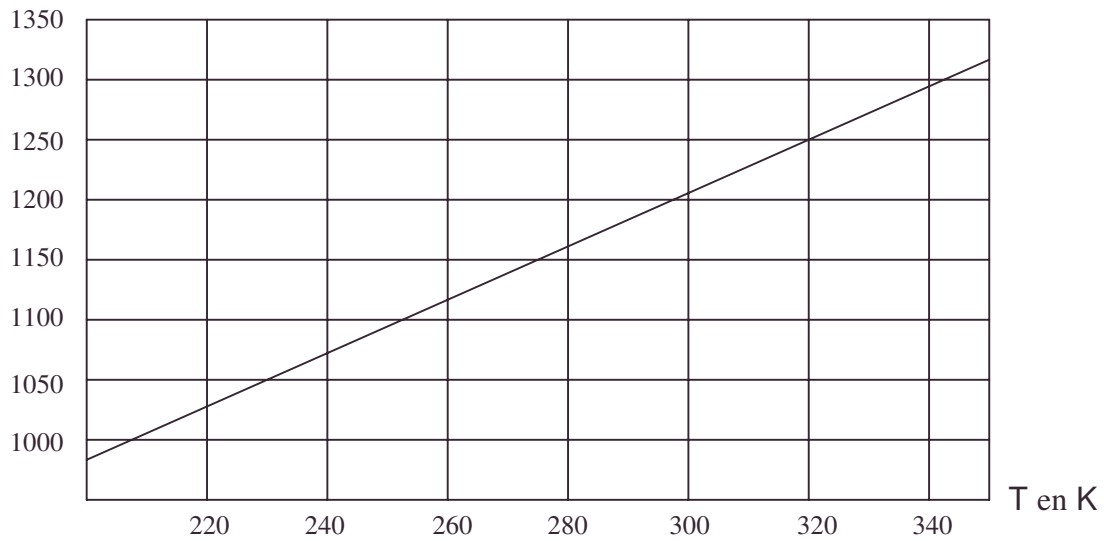
On utilisera dans la suite les données thermodynamiques ci-dessous pour le méthane dans lesquelles h , s et v désignent l'enthalpie massique, l'entropie massique et le volume massique.

Sous 80 bar et à 300 K : $h = 1120 \text{ kJ.kg}^{-1}$; $s = 9,10 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $v = 0,0170 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$ pour le méthane gazeux.

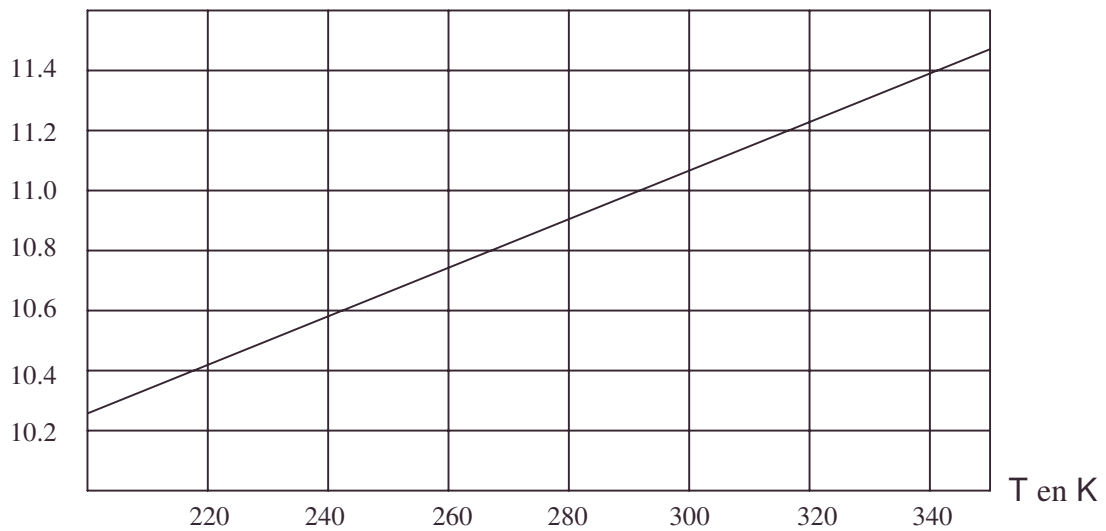
Sous 3 bar , la température d'équilibre liquide vapeur est de 128 K .

Dans ces conditions, pour le liquide saturant $h_L = 342 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et pour la vapeur saturante $h_v = 820 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $s_v = 9,13 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

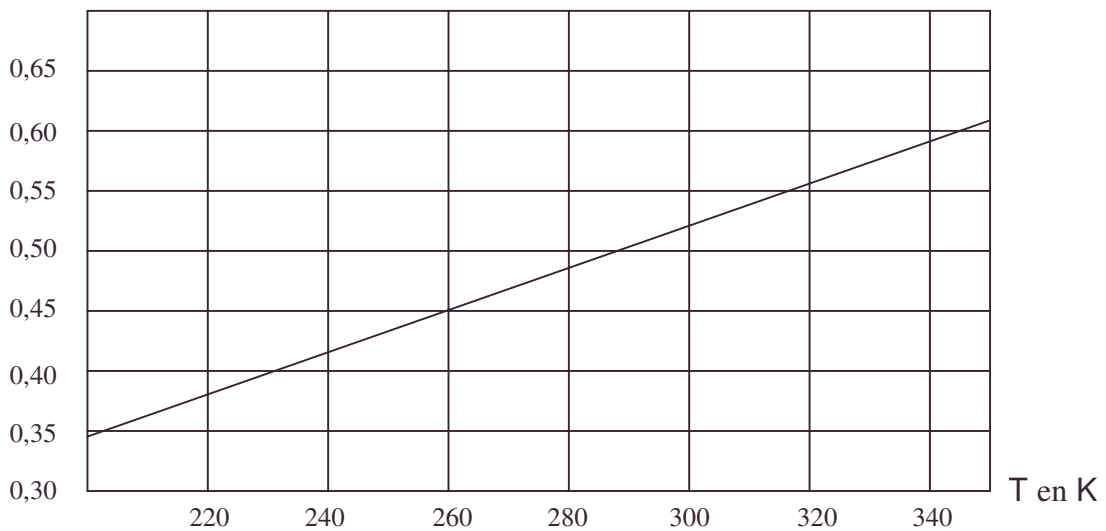
i. Enthalpie massique du méthane sous 3 bar en kJ.kg^{-1} en fonction de la température en K



ii. Entropie massique du méthane sous 3 bars en $\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ en fonction de la température en K



iii. Volume massique du méthane sous 3 bars en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$ en fonction de la température en K



1. Température du méthane à la sortie du détendeur

Quel nom propre associe-t-on à cette détente ? Quel intérêt présente-t-elle pour l'étude des fluides ? Montrer que les enthalpies massiques amont h_1 et aval h_2 du méthane sont égales si l'on ne prend pas en compte son énergie cinétique.

Déterminer la température T_2 (en K) du méthane à la sortie du détendeur.

2. Vitesse du gaz en amont et en aval du détendeur

Déterminer les modules c_1 et c_2 des vitesses supposées uniformes du gaz dans la canalisation en amont et en aval du détendeur. L'hypothèse concernant l'énergie cinétique est-elle vérifiée ?

3. Réchauffement du gaz en aval du détendeur**a. Capacité thermique du méthane**

Sous 3 bars et entre 260 K et 300 K, on suppose que l'enthalpie massique h du gaz a pour différentielle $dh = c_p dT$ où c_p est une constante. Calculer c_p .

b. Etude du transfert thermique avec l'atmosphère

La paroi de la canalisation est faite en acier de conductivité thermique $K = 30 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ et d'épaisseur $e = 3 \text{ mm}$. La canalisation est plongée dans l'atmosphère à la température $T_1 = 300 \text{ K}$. On supposera que la température du gaz $T(x)$, la température $T_i(x)$ de la face interne de la paroi et la température $T_e(x)$ de sa face externe ne dépendent que de l'abscisse x le long de l'axe de la canalisation, l'origine étant prise à la sortie du détendeur.

A l'interface gaz/acier le flux thermique $d\phi_{\text{ith}}$ à travers la surface d'aire dS orientée vers l'intérieur obéit à la loi des transferts thermiques conducto-convectifs :

$$d\phi_{\text{ith}} = h_i [T_i(x) - T(x)] dS, \text{ pour laquelle } h_i = 60 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}.$$

De même, à l'interface acier/atmosphère, le flux thermique $d\phi_{\text{eth}}$ à travers la surface d'aire dS orientée vers l'intérieur a pour expression : $d\phi_{\text{eth}} = h_e [T_1 - T_e(x)] dS$ avec $h_e = 30 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

On note $d\phi_{\text{th}}$ la puissance thermique reçue par le gaz sur une longueur dx de canalisation. En précisant l'analogie avec la loi d'Ohm en électricité, montrer que pour l'étude de $d\phi_{\text{th}}$, une longueur dx de canalisation peut se modéliser par l'association en série de trois résistances thermiques s'exprimant en fonction de h_i , h_e , K , e , r et dx . L'épaisseur e étant faible devant le rayon r , on assimilera la paroi de la canalisation à une couche plane d'épaisseur e et d'aire égale à celle d'une surface cylindrique de rayon $r + \frac{e}{2}$. Exprimer $d\phi_{\text{th}}$ sous la forme $d\phi_{\text{th}} = G [T_1 - T(x)] dx$ en donnant G en fonction des valeurs littérales. Pour la suite, on prendra $G = 31,5 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

c. Evolution de la température du gaz le long de la canalisation

En appliquant à la longueur dx de canalisation un raisonnement thermodynamique identique à celui utilisé pour l'étude du détendeur, donner l'équation liant la variation d'enthalpie massique dh du méthane, D et $d\phi_{\text{th}}$.

En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ puis résoudre et donner littéralement $T(x)$.

Application numérique

Pour quelle valeur de x la température du gaz est-elle revenue à 0°C ?

3. Récupération éventuelle de la puissance mécanique

A la place du détendeur, un ingénieur envisage de placer une turbine afin de récupérer la puissance mécanique disponible, l'état du gaz en amont étant toujours décrit par P_1 , T_1 et la pression en aval valant encore P_2 . On supposera la détente adiabatique réversible.

• *adiabatique réversible, analogie, enthalpie, entropie, résistance thermique, réversibilité thermodynamique, turbine*

1. Pourquoi la présence de la turbine permet-elle de supposer la détente idéalement réversible ?

2. A partir des données, calculer l'entropie s_L du liquide saturant à la pression P_2 .

3. Quel serait l'état du méthane à la sortie de la turbine ?

4. Donner alors la puissance mécanique récupérée par la turbine.

5. En fait de telles installations ne sont pas réalisées par GDF. Pourquoi ?

CCP ; Durée : 1h30

Corrigé

1.a. $Q = mC\Delta T$, on assimile 1 litre d'eau à 1 kg.

$$1 \text{ th} = 1000.4,18.10^3.1 = 4,18.10^6 \text{ J.}$$

b. Masse de méthane dans 1 m^3 sous 1 bar à 20°C .

$$m = \frac{MPV}{RT} ; \text{A.N. : } m = 0,657 \text{ kg.}$$

$$\text{c. Pouvoir calorifique : } \frac{Q}{m} = \frac{10.4,18.10^6}{0,657} = 63,6.10^6 \text{ J/kg.}$$

d. Nombre de foyers alimentés : N.

Soit P la puissance consommée par foyer ; la puissance consommée égale la puissance livrée.

$$NP = D. \frac{Q}{m} \Rightarrow N = \frac{DQ}{mP} ; \text{A.N. : } N = 53000.$$

2.1.a. La détente adiabatique décrite est étudiée sous le nom de détente de Joule-Thomson.

b. Pour un gaz parfait, $\Delta T = 0$ dans le cours cf. 2.c.

c. Le bilan énergétique pour un écoulement unidimensionnel stationnaire adiabatique non dissipatif donne : $\frac{V^2}{2} + u + \frac{P}{\mu} + gz = \text{cste}$ pour l'unité de masse. Si on

néglige $\frac{V^2}{2}$ et si Δz est nul, il reste $u + \frac{P}{\mu} = \text{cste}$.

Or pour l'unité de masse : $h = u + \frac{P}{\mu}$, donc $h_1 = h_2$.

d. Pour $T_1 = 300 \text{ K}$, $P_1 = 80 \text{ bar}$; $h_1 = 1120 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

En utilisant la courbe i, à $h_2 = 1120 \text{ kJ.kg}^{-1}$ correspond $T_2 = 265 \text{ K}$.

$$2. D = c_i \mu_i \pi r^2 = c_i \frac{P_i M}{RT_i} \pi r^2 \Rightarrow c_i = \frac{DRT_i}{P_i M \pi r^2}.$$

$$\text{A.N. : } i = 1 \quad c_1 = \frac{2,5.8,314.300}{80.10^5.16.10^{-3}.\pi.(0,25)^2} = 0,248 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$i = 2 \quad c_2 = \frac{2,5.8,314.265}{3.10^5.16.10^{-3}.\pi.(0,25)^2} = 5,84 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\frac{c_1^2}{2} = 0,03 \text{ J.kg}^{-1} \text{ est bien négligeable devant } h_1 = 1120 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

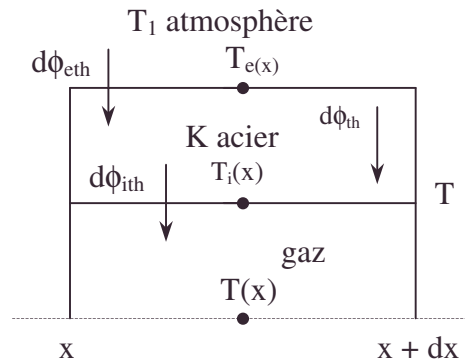
$$\frac{c_2^2}{2} = 17 \text{ J.kg}^{-1} \text{ est bien négligeable devant } h_1 ; \text{l'hypothèse est vérifiée.}$$

• adiabatique, détente de Joule-Thomson, énergie cinétique macroscopique négligée en thermodynamique, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, résistance thermique, solution graphique, unidimensionnalité

3.a. $c_p = \frac{dh}{dT}$: on mesure la pente de la courbe i (assimilable à une droite) ;

A.N. : $c_p = \frac{1325 - 965}{350 - 200} = 2,4 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

b. $R_{el} = \frac{\Delta U}{\iint \vec{j} dS}$; $R_{th} = \frac{\Delta T}{\iint \vec{j}_{th} dS} = \frac{\Delta T}{P_{th}}$.



La propagation de la puissance thermique est radiale centripète.

$d\phi_{eth} = d\phi_{th} = d\phi_{ith}$ en régime stationnaire évoque le montage de résistances en série où $I_1 = I_2 = I_3$.

$$\langle\langle R_1 \rangle\rangle = \frac{T_1 - T_e}{d\phi_{eth}} = \frac{1}{h_e dS} = \frac{1}{2h_e \pi \left(r + \frac{e}{2}\right) dx} \text{ car } d\phi_{eth} = h_e (T_1 - T_e) dS.$$

$$\langle\langle R_2 \rangle\rangle = \frac{T_e - T_i}{d\phi_{th}} = \frac{e}{K dS} = \frac{e}{2K \pi \left(r + \frac{e}{2}\right) dx} \text{ car } d\phi_{th} = j_{th, cond} dS = K \frac{T_e - T_i}{e} dS.$$

$$\langle\langle R_3 \rangle\rangle = \frac{T_i - T}{d\phi_{ith}} = \frac{1}{h_i dS} = \frac{1}{2h_i \pi \left(r + \frac{e}{2}\right) dx} \text{ car } d\phi_{ith} = h_i (T_i - T) dS.$$

$$T_1 - T = T_1 - T_e + T_e - T_i + T_i - T = (\langle\langle R_1 \rangle\rangle + \langle\langle R_2 \rangle\rangle + \langle\langle R_3 \rangle\rangle) d\phi_{th}$$

$$d\phi_{th} = \frac{T_1 - T}{\langle\langle R_1 \rangle\rangle + \langle\langle R_2 \rangle\rangle + \langle\langle R_3 \rangle\rangle} = \frac{(T_1 - T) 2\pi \left(r + \frac{e}{2}\right) dx}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_i}} \Rightarrow G = \frac{2\pi \left(r + \frac{e}{2}\right)}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_i}}.$$

A.N. : $G = 31,54 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

c.α. Le bilan thermique s'écrit en régime stationnaire unidimensionnel $D[h(x+dx) - h(x)] = d\phi_{th}$, en négligeant la variation d'énergie cinétique.

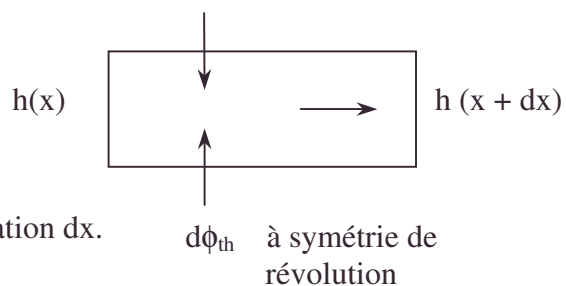
Ainsi $Ddh = d\phi$ pour la longueur de canalisation dx .

$$Dc_p dT = G(T_1 - T) dx \Rightarrow \frac{dT}{T_1 - T} = \frac{G}{Dc_p} dx.$$

$$\ln \frac{T_1 - T}{A} = -\frac{G}{Dc_p} x \Rightarrow T_1 - T = A \exp - \frac{Gx}{Dc_p}.$$

$A =$ constante à déterminer : à la sortie du détendeur $T = T_2$ soit en $x = 0$, origine habile pour le début de la canalisation $\Rightarrow A = T_1 - T_2$.

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \exp - \frac{Gx}{Dc_p}.$$



- *adiabatique réversible, condition limite, énergie cinétique macroscopique négligée en thermodynamique, équilibre, irréversibilité, unidimensionnalité*

β. On obtient $T_3 = 273 \text{ K}$ pour $x = L$.

$$\ln \frac{T_1 - T_3}{T_1 - T_2} = \frac{-LG}{Dc_p} \Rightarrow L = \frac{Dc_p}{G} \ln \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_3} ; \text{A.N. : } L = 45,3 \text{ m.}$$

3.1. Le paramètre vitesse angulaire de rotation est contrôlable et permet une mesure de l'irréversibilité tolérable.

$$2. s_v - s_L = \frac{L}{T_{eq}} = \frac{h_v - h_L}{T_{eq}} \Rightarrow s_L = s_v - \frac{h_v - h_L}{T_{eq}}$$

$$\text{A.N. : } s_L = 9,13 - \frac{820 - 342}{128} = 5,40 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

3. Pour une détente adiabatique réversible $s_2 = s_1 = 9,10 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ vu l'énoncé.

s_2 est intermédiaire entre s_L et s_v : on est à l'équilibre.

Le titre massique de la vapeur dans le mélange x satisfait à

$$s_2 = x s_v + (1 - x) s_L \Rightarrow x(s_v - s_L) = s_2 - s_L ;$$

$$x = \frac{s_2 - s_L}{s_v - s_L} ; \text{A.N. : } x = 0,992 : \text{on est proche de l'état vapeur sans liquide.}$$

4. Le bilan énergétique en régime stationnaire unidimensionnel s'écrit :

$$D(h_2 - h_1) = -P_m \text{ avec } h_2 = x h_v + (1 - x) h_L = 816 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

$$\text{A.N. : } P_m = 2,5.(1120 - 816) = 760 \text{ kW.}$$

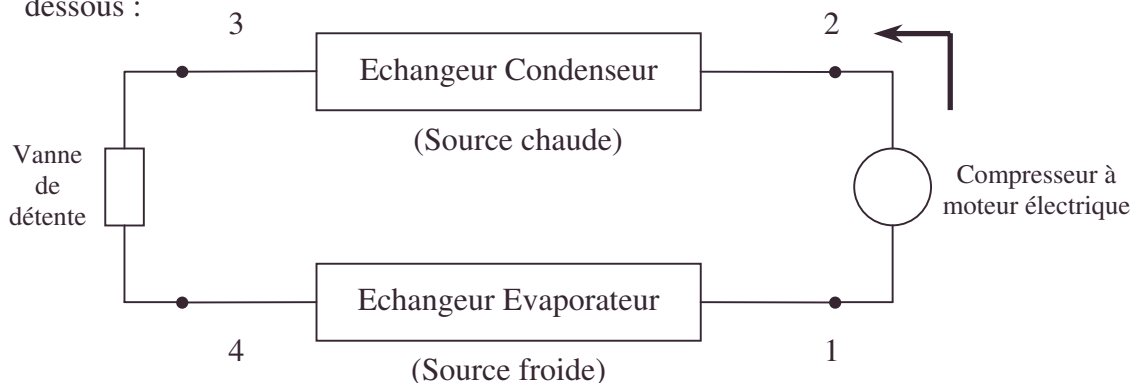
5. L'investissement, la régulation, l'entretien pour la turbine sont plus élevés que pour un détendeur.

4.4.5. Machine frigorifique Diagramme de Mollier

Une machine frigorifique est utilisée dans un pays chaud pour maintenir à 0°C un local contenant des denrées périssables. Cette machine contient un fluide frigorigène de type fréon dont le diagramme température - entropie massique ($t - s$) est joint. Le mélange liquide-vapeur est situé dans la zone centrale sous la courbe de saturation. Sur ce diagramme apparaissent les isobares et les isenthalpes.

Cette machine ditherme qui fonctionne en régime permanent échange de la chaleur avec une source chaude à 40°C (atmosphère extérieure) et une source froide à 0°C (local réfrigéré).

Le schéma général de fonctionnement avec sens de circulation du fluide est défini ci-dessous :



Compte tenu du faible débit de fréon circulant dans les tuyauteries de la machine, les variations d'énergie cinétique seront négligées dans tout le problème.

• compresseur, diagramme de Molier, énergie cinétique macroscopique négligée en thermodynamique, enthalpie, entropie, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, premier principe de la thermodynamique, titre massique, transformation élémentaire, travail, turbine, unidimensionnalité

1.1. Pour une transformation élémentaire d'une masse unité de fluide, on pose :

dw : travail massique total échangé avec l'extérieur,

dq : chaleur massique échangée avec l'extérieur,

h : enthalpie massique.

Montrer que le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire : $dh = dw' + dq$.

Donner l'expression de dw' en fonction de dw et des variables pression P et volume massique v éventuellement différentielles.

2. Lorsque la masse unité, choisie comme système thermodynamique, traverse le compresseur, montrer que la différence entre $w_{1 \rightarrow 2}$ et $w'_{1 \rightarrow 2}$ est égale à $P_1 v_1 - P_2 v_2$, les indices 1 et 2 se rapportant aux conditions d'entrée et de sortie du compresseur.

Quelle est la signification physique de $w'_{1 \rightarrow 2}$?

Cette relation s'appliquera à tous les éléments constitutifs du système.

Dans tout le problème, on supposera que l'état du fluide n'est pas modifié dans les tuyauteries de liaison entre 2 éléments consécutifs.

3. Lorsque la masse unité de fluide décrit un cycle, quelle est la relation entre $\Sigma w'_{\text{cycle}}$ et Σw_{cycle} ?

Dans toute la suite du problème, on adoptera la formulation : $\Delta h = w' + q$ pour étudier l'évolution de la masse unité entre l'entrée et la sortie de chaque élément.

2. Le cycle décrit par le fréon présente les caractéristiques suivantes :

- La compression de 1 à 2 est adiabatique et réversible ;
- Le passage dans les deux échangeurs (condenseur et évaporateur) est isobare de 2 à 3 et de 4 à 1 ;
- La vanne est considérée comme un tuyau indéformable et ne permettant pas les échanges de chaleur.

1. Montrer que dans la vanne de 3 à 4 la détente est isenthalpique.

2. Grâce au calcul de la variance lors des changements d'état d'un corps pur dans le condenseur et l'évaporateur, retrouver la propriété remarquable liant les isothermes et les isobares (dans la zone mélange liquide – vapeur).

3. La température du fréon lors de l'évaporation dans l'évaporateur est -10°C .

- La pression de fin de compression en 2 est 15 bars.
- Le point 3 est du liquide saturé.
- La quantité de chaleur échangée dans l'évaporateur avec le local permet une évaporation complète du fréon venant de 4 et conduit la vapeur de façon isobare jusqu'à la température de -10°C (point 1), état saturé.

Placer les 4 points du cycle 1 – 2 – 3 – 4 sur le diagramme joint, y représenter le cycle et déterminer, par lecture et interpolation linéaire sur ce même diagramme, les valeurs de P , t , h , s en ces différents points.

Regrouper les résultats dans un tableau.

Si le compresseur était adiabatique mais non réversible, comment se situerait sa température de sortie sous la même pression P_2 par rapport à la température t_2 ?

4. Comment peut-on trouver, de deux façons différentes, sur le diagramme la valeur de la chaleur latente massique ℓ de vaporisation du fréon à une température t_0 donnée ?

Application numérique :

Si $P_0 = 3$ bars, quelles sont les valeurs de ℓ et de t_0 ?

Peut-on trouver la valeur de ℓ , t , s au point critique représenté sur le diagramme ?

Quelle conclusion peut-on en déduire ?

• *adiabatique, adiabatique réversible, compresseur, condenseur, efficacité, état de vapeur saturée, évaporateur, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, isenthalpique, palier de changement d'état, point critique, quantité de chaleur massique, solution graphique, système diphasé, tableau numérique, théorème des moments, titre massique en liquide, titre massique en vapeur., travail, vaporisation, variance*

5. Si au lieu d'évaporer toute la masse de 1 kg définie en 2.4. on ne fait changer d'état qu'une fraction x donnée, comment peut-on trouver le point correspondant au mélange liquide vapeur ainsi obtenu, et réciproquement ? x s'appelle le titre en vapeur.

On montrera que x peut s'exprimer en fonction de longueurs mesurées sur le palier de changement d'état à la température considérée.

6. Utiliser les résultats de 2.5. pour calculer le titre x en vapeur du point 4 de la machine frigorifique. Peut-on définir un titre y en liquide ? Quelle est sa valeur en 3 ?

7. En utilisant les résultats de 2.3., calculer les quantités de chaleur massique q_c et q_f échangées par le fréon avec l'extérieur (q_c est échangée de 2 à 3 et q_f de 4 à 1).

Calculer de même le travail absorbé lors de la compression de 1 à 2 $w'_{1 \rightarrow 2}$.

Pourquoi définit-on l'efficacité de la machine frigorifique étudiée par $\varepsilon = \frac{q_f}{w'_{1 \rightarrow 2}}$?

La calculer.

Construire sur le diagramme ($t - s$) ci-joint le cycle d'une machine de Carnot frigorifique passant par 1 (2 isothermes et 2 adiabatiques réversibles) qui fonctionnerait entre -10°C et t_3 et qui, pour l'isotherme t_3 décrirait la totalité du palier de liquéfaction. calculer l'efficacité de la machine de Carnot.

8. Donner l'expression de c_p (capacité calorifique massique à pression constante) en un point du domaine vapeur homogène, en fonction des variations élémentaires de T et s (T désigne la température exprimée en Kelvin).

Déterminer l'ordre de grandeur de c_p au voisinage du point 1 par lecture sur le diagramme joint. (Pour cela on pourra prendre une variation de 10°C autour du point 1 dans le domaine vapeur).

3. Etude d'un effet de séparation des phases et du réchauffage dans le compresseur

Les questions 3.1. et 3.2. sont indépendantes.

1. Effet d'une détente fractionnée avec séparation des phases liquide et vapeur

On suppose qu'en 3 au lieu de détendre le fréon directement de 3 à 4 (de P_3 à P_4) on fait une première détente isenthalpique de P_3 à $P_{3'} = \sqrt{P_3 P_4}$ puis on sépare les phases liquide et vapeur apparues en 3'. La phase liquide saturée ainsi obtenue à $P_{3'}$ et $t_{3'}$ est alors détendue dans une deuxième vanne isenthalpique jusqu'à P_4 de l'étude précédente, le point obtenu sur le diagramme s'appelle 4'.

Calculer $P_{3'}$ et lire sur le diagramme $t_{3'}$, les titres en vapeur en 3' et en 4' ; en déduire la chaleur de q_f de 4' à 1.

Dans une machine à séparation de phases, la vapeur saturée obtenue et séparée en 3' est réintroduite en cours de compression (nécessité d'un compresseur à 2 étages). Cette opération permet de minimiser le travail absorbé lors de la compression : on admet qu'il est alors égal à 85% du travail calculé à la question 2.7.

Calculer le nouveau coefficient ε .

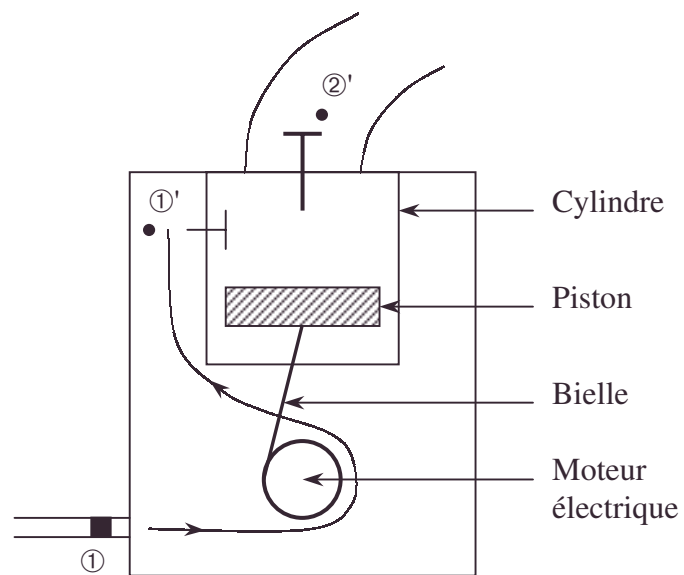
Que peut-on en conclure ?

2. Effet d'un réchauffage dans le compresseur

Le fréon venant du point 1 entre dans l'enceinte contenant le piston, le cylindre, la bielle et le moteur électrique d'entraînement.

De 1 à 1' le fréon est réchauffé de façon isobare par les pertes effet Joule du moteur électrique d'entraînement, puis de 1' à 2' comprimé par le piston.

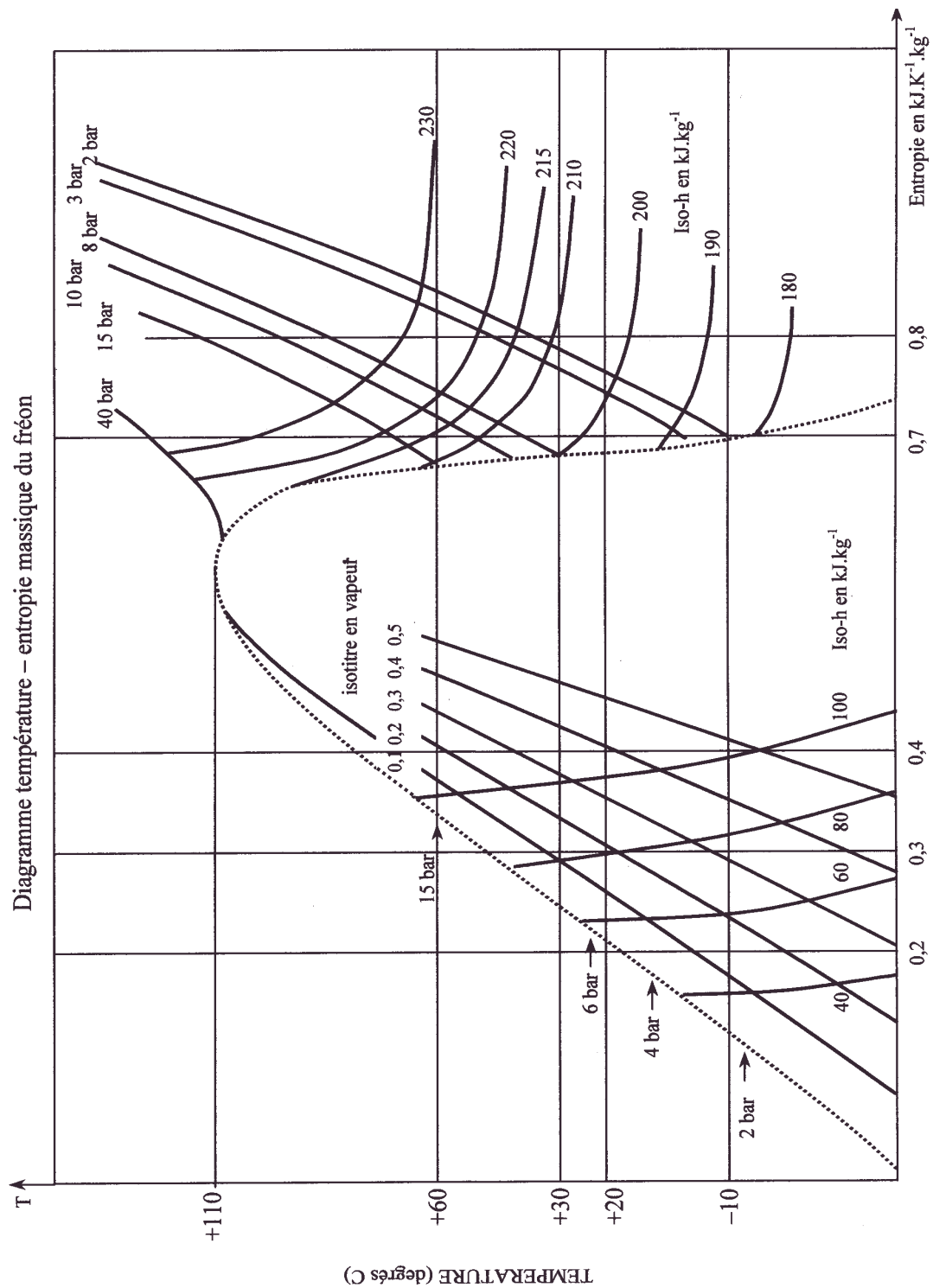
Le point 1 reste le même qu'à la question 2.3., $P_{2'} = P_2$. Déterminer graphiquement et par un procédé itératif les points 1' et 2' sachant que de 1' à 2' on reste adiabatique et sans frottement et que les pertes par effet Joule du moteur électrique sont égales à 20% de l'énergie électrique absorbée.



Calculer w' électrique ainsi que $w'_{1 \rightarrow 2}$, absorbé par le fréon lors de la compression en raisonnant sur l'unité de masse.

Le rendement mécanique est égal à 1.

Calculer la puissance électrique du moteur si le débit horaire de fréon est de 73 kg.h^{-1} .



CP ; Durée : 2h.

- grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, rendement, travail, unidimensionnalité

Corrigé

1.1.



a.α. En régime stationnaire unidimensionnel, le bilan énergétique pour le système matériel compris entre 1 et 2 s'écrit : $D \left(\left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) \right) = \dot{W} + \dot{Q}$.

En négligeant énergies massiques cinétique et potentielle, il reste :

$D(u_2 - u_1) = \dot{W} + \dot{Q}$ avec $W = W' + W_1$, W_1 travail des forces de pression ; soit pour l'unité de masse et en prenant 1 et 2 voisins, on peut écrire : $du = dw + dq$.

β. En régime stationnaire unidimensionnel, le bilan énergétique pour le système matériel compris entre 1 et 2 s'écrit :

$$D \left(\left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \right) - \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \right) \right) = \dot{W}' + \dot{Q} ; \text{ or } h = u + \frac{P}{\rho}.$$

En négligeant énergies massiques cinétique et potentielle, il reste $D(h_2 - h_1) = \dot{W}' + \dot{Q}$; soit pour l'unité de masse et en prenant 1 et 2 voisins, on peut écrire : $dh = dw' + dq$.

$$\gamma. w = w' + w_1 \Rightarrow dw = dw' + dw_1 ; \text{ or } dw_1 = -Pdv ; dw' = dw + Pdv.$$

$$2. h = u + Pv ; \text{ on a vu : } D(u_2 - u_1) = \dot{W} + \dot{Q} \Rightarrow u_2 - u_1 = w_{12} + q \quad ①$$

$$D(h_2 - h_1) = \dot{W}' + \dot{Q} \Rightarrow h_2 - h_1 = w'_{12} + q \quad ②$$

① - ② s'écrit : $(h_1 - u_1) - (h_2 - u_2) = w_{12} - w'_{12} = P_1 v_1 - P_2 v_2$. w' est un travail de transvasement soit tout travail mécanique autre que celui des forces de pression.

$$3. \text{ Pour un cycle vu } 2. : 1 = 2 \Rightarrow \Sigma w - \Sigma w' = 0.$$

2.1. La vanne étant supposée parfaite, $W'_{34} = 0$; sans échange de chaleur $q_{34} = 0$;

On a une détente isenthalpique (cf. étude de Joule-Thomson).

2. L'équilibre fréon_{liq} \rightleftharpoons fréon_{vap} considéré comme un équilibre chimique obéit à la règle des phases ; la variance $v = 2 - 1 + 2 - 2 = 1$.

Une transformation isobare (P fixée) est aussi isotherme, vu $P = P(T)$, lors d'un changement d'état.

On a une variable à considérer : le titre massique de la vapeur x dans le mélange liquide-vapeur.

3.a. Coordonnées des 4 points : on lit les valeurs non données parce que l'énoncé nous indique l'état liquide ou vapeur ; ce qui nous donne les valeurs de s et de h ; on lit les valeurs à l'intersection des courbes caractérisant le point. Le diagramme figure plus loin.

	x, état physique	P	t	h en kJ.kg ⁻¹	s en kJ.kg ⁻¹ .K ⁻¹
1	x = 1 ; vapeur saturée	On lit : 2,2 bar	-10°C	On lit : h ₁ = 184	On lit : s ₁ = 0,7
2	x = 1 ; vapeur sèche	Vu l'énoncé : 15 bar	Par intersection : 67°C	216,5	Vu l'énoncé : s = 0,7
3	x = 0 ; liquide saturé	Vu l'énoncé : 15 bar	On lit : +60°C	On lit : h ₃ = 96	On lit : s ₃ = 0,335
4	x = 0,368 ; liquide + vapeur	Vu l'énoncé : 2,2 bar	-10°C	Vu l'énoncé : h ₄ = 96	On lit : S ₄ = 0,37

• changement d'état, compresseur, détente de Joule-Thomson, équilibre de changement d'état, incertitude, irréversibilité, isenthalpique, point critique, solution graphique, tableau numérique, titre massique, transvasement, travail, variance

b. Si le compresseur était irréversible : $s_2 - s_1 > 0$, soit $s_2 > s_1$
d'où sur l'isobare $P_2 = 15$ bars : $t'_2 > t_2$ avec $t_2 = 67^\circ\text{C}$.

4.a. A t_0 donné on a : $h_v - h_\ell = \ell$; $s_v - s_\ell = \frac{\ell}{T_0}$.

b. A.N. : sous 3 bars, on lit l'apparition du fréon liquide à $t_0 = 0^\circ\text{C}$. On lit alors à cette température pour l'état vapeur : $s_v = 0,695 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $h_v = 185 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et pour l'état liquide $s_\ell = 0,14 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $h_\ell = 37 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

On trouve $\ell = 148 \text{ kJ.kg}^{-1}$ d'après $h_v - h_\ell = \ell$.

et $\ell = 151 \text{ kJ.kg}^{-1}$ d'après $\ell = \frac{s_v - s_\ell}{T_0}$, soit un écart acceptable de 2%.

Les lectures sont cohérentes vu les incertitudes de lecture.

c. Au point critique, le palier isotherme isobare est réduit à un point : $s_v = s_\ell$,
 $\Rightarrow \ell = 0$, on lit $t_c = 112^\circ$; $s_c = s_v = s_\ell = 0,565 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

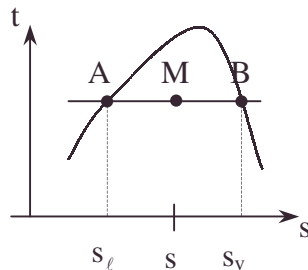
On lit $h_c = h_v = h_\ell = 183 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

On en déduit que l'isenthalpique qui passe par le point critique passe quasiment par le point étudié en **b.** : 273 K, 3 bar.

5.a. Un point du palier isotherme isobare de titre vapeur x a pour abscisse $s = S_v + S_\ell = x s_v + (1-x) s_\ell$; $s = x (s_v - s_\ell) + s_\ell$, son ordonnée t étant connue.

b. La connaissance de x ou de s (à t donnée) est donc équivalente.

c.



$$s - s_\ell = AM = x(s_v - s_\ell)$$

$$s_v - s_\ell = AB \Rightarrow x = \frac{AM}{AB}$$

C'est le "théorème" des moments".

6.a. On lit $AM = 5,6 \text{ cm}$, $AB = 13 \text{ cm} \Rightarrow x = 0,43$.

L'interpolation entre les valeurs des courbes isotitres à $t = -10^\circ\text{C}$ donne 0,44.

b. $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x = \frac{MB}{AB}$; A.N. : $y = 0,57$.

7. A pression constante, $W' = \int V dP = 0$;

a. $q_c = h_3 - h_2$; A.N. : $q_c = -119,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

b. $q_f = h_1 - h_4$; A.N. : $q_f = 88 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

c. $w'_{12} = h_2 - h_1$ car $q_{12} = 0$; A.N. : $w'_{12} = 32,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

w'_{12} est le travail de transvasement reçu par le fluide dans ce contexte technique.

Le coefficient ε est bien le coefficient de caractérisation économique.

$$\varepsilon = \frac{\text{énergie utile par cycle}}{\text{énergie payée par cycle}} ; \varepsilon = \frac{q_f}{w'_{1 \rightarrow 2}} ; \text{A.N. : } \varepsilon = 2,71.$$

d. Il s'agit d'un rectangle constitué de deux isothermes -10° , $+60^\circ$ et de deux isentropiques $s_1 = 0,7 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $s_3 = s_4 = 0,335 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ passant par les extrémités du palier de liquéfaction à $t = 60^\circ\text{C}$.

• courbe de rosée, courbes isotitres du diagramme de Mollier, efficacité, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, isenthalpique, isentropique, isotitre, solution graphique, système diphasé, théorème des moments, transvasement, travail

$$\text{e. } \varepsilon_1 = \frac{q_{14}}{w_{12'}} = \frac{T_1(s_1 - s_{4_1})}{h_{2_1} - h_1} = \frac{263(0,7 - 0,335)}{210 - 184} ; \text{ A.N. : } \varepsilon = 3,7.$$

$$\text{8.a. } ds = c_p \frac{dT}{T} + \frac{k}{T} dP ; c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p ; \text{ on assimilera à } c_p = T_1 \left(\frac{\Delta s}{\Delta T} \right)_{pf}.$$

$$\text{b. A.N. : } c_p = 263 \cdot \frac{0,022 \cdot 10^3}{10} = 575 \text{ J kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

3.1.a. A.N. : $P_{3'} = \sqrt{15 \cdot 2,2} = 5,74 \text{ bar}$. On repère l'isobare par interpolation qui se poursuit par une horizontale dans la zone diphasée.

b. A l'intersection de l'isenthalpe de 3 et du segment à $P_{3'}$, on lit : $t_{3'} = 22^\circ\text{C}$.

c. En 3', on lit : $x_{3'} = 0,3$, ($y_{3'} = 0,7$).

d. Vu le tracé approximatif de l'isenthalpique tracée passant par l'extrémité de l'isotherme $t_{3'}$, situé sur la courbe "de rosée" (caractérisant le liquide saturé), on trouve une intersection avec l'isotherme t_4 en $x_{4'} = 0,18$; ($y_{4'} = 0,82$).

e. $q_{f'} = h_1 - h_{4'}$; A.N. : $q_{f'} = 184 - 55 = 129 \text{ kJ.kg}^{-1}$. (référence 1 kg du nouveau mélange).

$Q_{f'} = y_{3'} q_{f'} = 90,3 \text{ kJ.kg}^{-1}$. (référence 1 kg de l'ancien mélange puisque la vapeur est recyclée).

f. $W'_{\text{compression}} = 0,85 \cdot 32,5 = 27,6 \text{ kJ.kg}^{-1}$ vu l'énoncé.

$$\text{g. } \varepsilon = \frac{Q_{f'}}{W'_{\text{comp}}} ; \text{ A.N. : } \varepsilon = 3,27.$$

Le travail de compression étant diminué, l'efficacité s'en trouve augmentée.

2. L'énergie se répartit : $Q_{11'} = 0,2 W_{e\ell} = h_{1'} - h_1$; $0,8 W_{e\ell} = W''_{\text{compression}} = h_{2'} - h_{1'}$ et

$Q_{2'11} = 0$ et $Q_{2'11} = 0$ car $W'_{11} = 0$.

a. 1^{ère} étape de l'itération par lecture :

$$W''_{\text{compression}} = 32,5 \text{ kJ.kg}^{-1} \Rightarrow W_{e\ell} = 40,5 \text{ kJ.kg}^{-1} \Rightarrow Q_{11'} = 8,1 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

$$\Rightarrow h_{1'} - h_1 = 8,1 \text{ kJ.kg}^{-1} \Rightarrow h_{1'} = 192,1 \text{ kJ.kg}^{-1} \Rightarrow h_{2'} = 224,6 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

1' est à l'intersection de l'isobare 2,2 bar et de l'isenthalpique 192 kJ kg⁻¹

$\Rightarrow 2'$ est à l'intersection de l'isobare 15 bar et de l'isentropique de 1' (c'est-à-dire $s = 0,75 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{J}^{-1}$).

On trouve alors $h_{2'} = 228 \text{ kJ.kg}^{-1}$. On a une procédure de vérification satisfaisante.

b. 2^{ème} étape de l'itération :

$$W''_{\text{compression}} = h_{2'} - h_{1'} = 228 - 192 = 36 \text{ kJ.kg}^{-1}, W_{e\ell} = 45 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

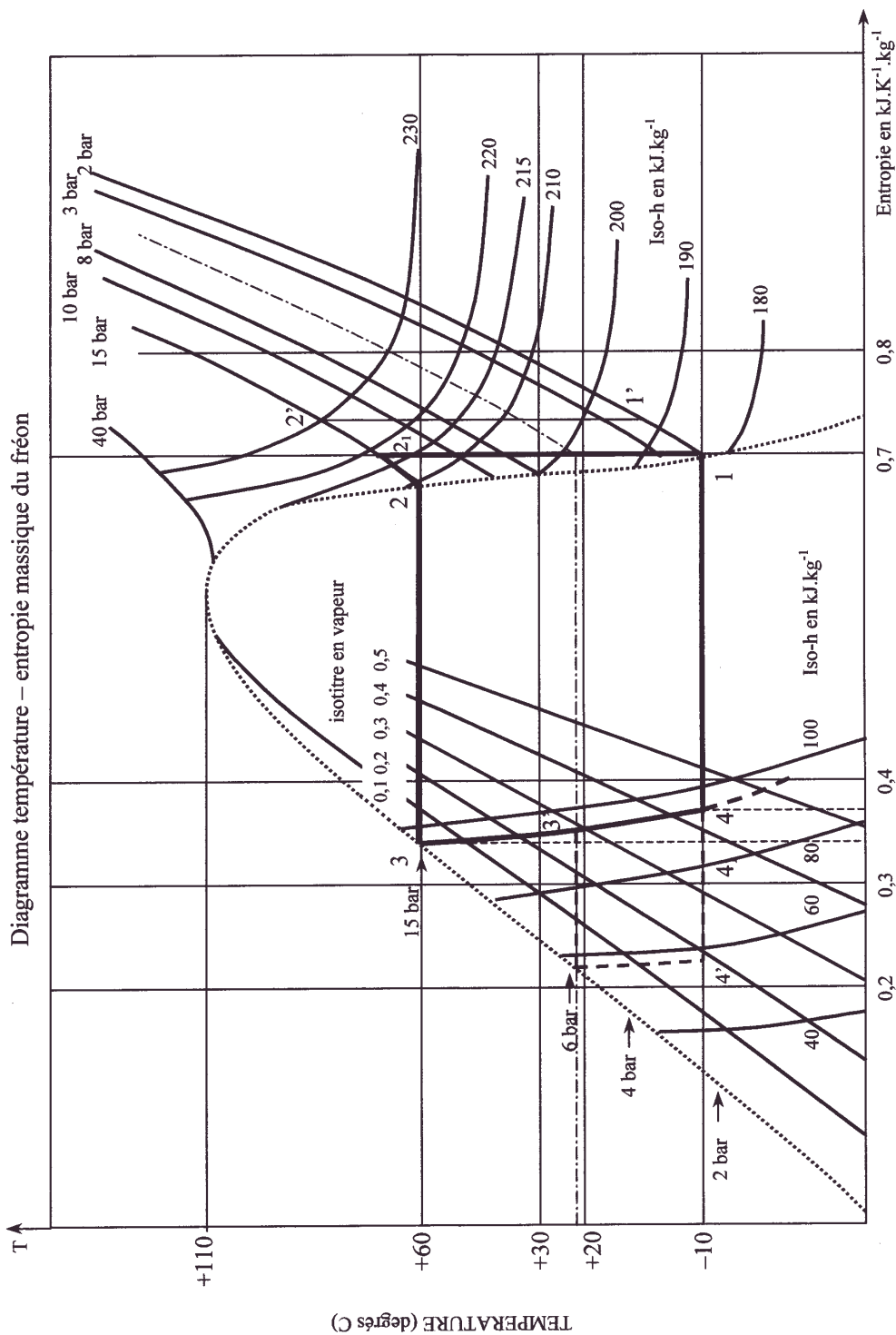
$$h_{1'} = h_1 + 0,2 W_{e\ell} = 193 \text{ kJ.kg}^{-1} \Rightarrow h_{2'} = 229 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

1' est à l'intersection de l'isobare 2,2 bar et de l'isenthalpique 193 kJ.kg⁻¹ ; par la procédure précédente, 2' est sur l'isentropique de 1'. On trouve $h_{2'} = 230 \text{ kJ.kg}^{-1}$, ce qui est stable aux erreurs près et confirme la rapide convergence de l'itération.

On adoptera $W_{\text{comp}} = 36 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $W_{e\ell} = 45 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

$$\text{c. } P = DW_{e\ell} ; \text{ A.N. : } P = 912 \text{ W}.$$

d



4.5. Thermodynamique statistique

Son étude est limitée en MPSI, PCSI, PTSI, BCPST1 ;
elle n'appartient pas au programme de TSI1

4.5.1. Etude cinétique des gaz

Application aux fuites

Données numériques :

Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$.
Constante des gaz parfaits :	$R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.
Constante de Boltzmann :	$k = R/N_A$.
Masse atomique de l'hélium :	4 g.mol^{-1}
Masse atomique de l'azote :	14 g.mol^{-1}

On prendra :

$V_1 = 2$ litres	$\frac{C_p}{C_v} = \gamma = \frac{5}{3}$ pour un gaz monoatomique
$P_1 = 1$ mm de mercure	
760 mm de mercure correspondent à 10^5 Pa	
$T_1 = 273 \text{ K}$.	$\frac{C_p}{C_v} = \gamma = \frac{7}{5}$ pour un gaz diatomique
$V_2 = 10$ litres.	
$S = 1 \mu\text{m}^2 = 10^{-12} \text{ m}^2$.	

Les applications numériques seront faites en identifiant successivement le gaz G_1 au gaz hélium puis au gaz azote.

On rappelle que :

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} ; I_1 = \int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} ; I_p = \int_0^\infty x^p \cdot e^{-x^2} dx ;$$

$$I_{p+2} = I_p \cdot \frac{p+1}{2} = \frac{p+1}{2} \cdot \int_0^\infty x^p \cdot e^{-x^2} dx .$$

Les diverses questions sont assez largement indépendantes. On peut par ailleurs admettre l'expression littérale du **8.a.** pour traiter d'autres questions.

La loi de distribution de Maxwell donne pour une population de N molécules d'un gaz parfait – molécules de masse m – le nombre dN de ces molécules dont la vitesse de translation a ses composantes comprises entre v_x et $v_x + dv_x$; v_y et $v_y + dv_y$; v_z et $v_z + dv_z$.

$$\frac{dN}{N} = a^3 e^{-B(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z ; a \text{ est indépendant de } v_x ; v_y ; v_z .$$

On a une distribution isotropique des vitesses.

1. Exprimer a en fonction de B .

2. On pose $dN' = N \cdot p(u) du$; $\frac{dN'}{N}$ représente la proportion des molécules dont la vitesse a son module compris entre u et $u + du$. Etudier la fonction de distribution $p(u)$ du module u de la vitesse : allure de la courbe, valeurs de u pour lesquelles $p(u)$ admet une tangente horizontale (valeurs exprimées en fonction de B).

3. Exprimer en fonction de B la vitesse arithmétique moyenne \bar{u} et la vitesse quadratique moyenne u^* .

4. Exprimer en fonction de m (masse de la molécule), de T (température thermodynamique du gaz), de k (constante de Boltzmann), les quantités B ; \bar{u} ; u^* .

5. Applications numériques du 4. ; $T = 300 \text{ K}$.

a. Pour le gaz monoatomique : hélium.

b. Pour le gaz diatomique diazote (aux températures des données numériques).

• constante de Boltzman, graphe, identification, loi de distribution de Maxwell [thermodynamique statistique], mm de mercure, suite, théorie cinétique des gaz, thermodynamique statistique

6. On considère l'enceinte E_1 de volume V_1 contenant le gaz parfait G_1 sous la pression P_1 et à la température T_1 . Donner l'expression littérale du nombre N_1 de molécules de G_1 contenues dans E_1 . Application numérique.

7. E_1 est en contact avec l'enceinte E_2 de volume V_2 où on fait régner par pompage permanent un vide considéré comme parfait. E_1 est muni d'un robinet R . par ouverture et fermeture rapide de R , on laisse échapper un petit nombre ΔN_1 de molécules de G_1 dans E_2 , et cela d'une manière adiabatique. Donner l'expression littérale de la température T^* de ces molécules juste après qu'elles aient quitté E_1 .

8. R est fermé. E_1 , par suite d'un choc, a, dans une paroi mince, une minuscule ouverture de section S . On suppose qu'à travers S , on a une fuite isotherme de dN'_1 molécules de G_1 dans E_2 pendant la durée dt .

a. Etablir la relation : $dN'_1 = -N_1 \frac{\overline{S u_1}}{4V_1} dt$;

$\overline{u_1}$ représente la vitesse arithmétique moyenne des molécules de G_1 .

Le signe $-$ rend compte vis-à-vis de E_1 de la diminution du nombre N_1 de molécules qu'il contient.

b. Donner l'expression littérale de la pression instantanée P_1 de G_1 dans E_1 .

c. Donner l'expression littérale de la durée t_2 (à partir de l'instant où est apparue la fuite) telle que P_1 soit moitié de sa valeur initiale.

9. On reprend l'étude du **8.**, en supposant qu'à l'instant où apparaît la fuite, l'enceinte E_2 est vide mais que le pompage a été arrêté. La fuite est toujours supposée isotherme.

a. Donner l'expression littérale de la pression instantanée P'_1 dans E_1 .

b. Donner l'expression littérale de la durée t'_2 (à partir de l'instant où est apparue la fuite) telle que P' soit moitié de sa valeur initiale.

10. Applications numériques des questions **7.**, **8.** et **9.**

11. Un gaz parfait G est réparti entre les enceintes E_1 et E_2 , les pressions très faibles y étant respectivement P_1 et P_2 et les températures T_1 et T_2 . Une minuscule ouverture de section S fait communiquer les deux enceintes, l'équilibre thermodynamique de chaque enceinte n'étant pas perturbé.

On dit qu'il y a équilibre moléculaire entre les deux enceintes quand le débit total de molécules à travers la paroi est nul.

Déduire de la condition d'équilibre moléculaire une relation simple entre les pressions P_1 , P_2 et les températures thermodynamiques T_1 , T_2 .

ENS ; Durée : 2h

Corrigé

1. L'idée du calcul de la constante inconnue réside dans la "normalisation" :

$$N = \iiint d^3N$$

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3N}{dv_x dv_y dv_z} dv_x dv_y dv_z = Na^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z .$$

$$\frac{1}{a^3} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bv_x^2} dv_x \right]^3$$

$$\text{et avec } X = v_x^2 \text{ et } x^2 = Bv_x^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2 \int_0^{+\infty} e^{-BX^2} dX} = \frac{\sqrt{B}}{2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{B}{\pi}} .$$

• *adiabatique, équilibre moléculaire [thermodynamique statistique], équilibre thermodynamique, normalisation*

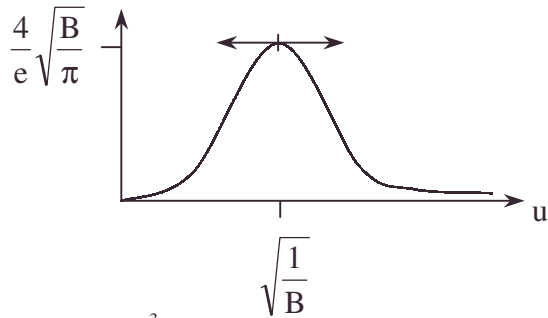
2. Envisageons l'intégration en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses et vu l'isotropie sphérique, de même que l'on passe de l'élément de volume $dx dy dz$ à $4\pi r^2 dr$, on remplace $dv_x dv_y dv_z$ par $4\pi u^2 du$:

$$dN = N a^3 e^{-Bu^2} 4\pi u^2 du \Rightarrow p(u) = 4\pi \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 e^{-Bu^2}.$$

$$\frac{dp}{du} = 4\pi \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} (1 - Bu^2) \cdot 2u e^{-Bu^2}.$$

$$\frac{dp}{du} = 0 \text{ pour } u = \sqrt{\frac{1}{B}} \text{ et } u = 0.$$

$$p_M = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{B}{\pi}} \text{ et } p_m = 0.$$



$$3.a. \quad \bar{u} = \int_0^{+\infty} u p(u) du = 4\pi \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-Bu^2} du = \frac{4\pi B^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx \frac{1}{(\sqrt{B})^4} \quad \text{avec}$$

$$x^2 = Bu^2.$$

$$\bar{u} = \frac{4}{\sqrt{\pi B}} I_3 = \frac{4}{\sqrt{\pi B}} \cdot \frac{(1+1)}{2} I_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi B}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi B}}.$$

$$b. \quad u^{*2} = \int_0^{\infty} u^2 p(u) du = 4\pi \frac{B^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} u^4 e^{-Bu^2} du = 4 \frac{B^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx \cdot \frac{1}{(\sqrt{B})^5}.$$

$$u^{*2} = \frac{4 I_4}{\sqrt{\pi} B} = \frac{4 \cdot 3}{2\sqrt{\pi} B} I_2 = \frac{6}{B\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{B\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2B}.$$

$$u^* = \sqrt{\frac{3}{2B}}.$$

$$4.a. \text{ La loi de Boltzmann en } \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}\right) \text{ donne } B = \frac{m}{2kT} \text{ ou encore } B = \frac{M}{2RT}.$$

$$b. \text{ On en déduit : } \bar{u} = 2\sqrt{\frac{2kT}{m\pi}} ; u^* = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

On n'a fait intervenir que l'énergie cinétique de translation dans la loi de Boltzmann, ce qui est un modèle insuffisant pour N_2 .

$$5.a. \text{ He a une masse molaire } M_{\text{He}} = 4.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} ; T = 300 \text{ K}.$$

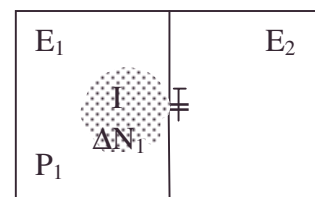
$$B_1 = 8,02.10^{-7} \text{ s}^2.\text{m}^{-2} ; \bar{u}_1 = 1260 \text{ m.s}^{-1} ; u_1^* = 1367,7 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$b. \text{ N}_2 \text{ a une masse molaire } M_{\text{N}_2} = 28.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}.$$

$$B_2 = 56.10^{-7} \text{ s}^2.\text{m}^{-2} ; \bar{u}_2 = 476 \text{ m.s}^{-1} ; u_2^* = 517 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$6. P_1 V_1 = nRT_1 = \frac{N_1}{N_A} RT ; N_1 = \frac{P_1 V_1}{kT_1} ;$$

$$A.N. ; N_1 = \frac{10^5}{760} \cdot \frac{2.10^{-3} \cdot 6,02.10^{23}}{8,31.273} = 7.10^{19} \text{ molecules}$$



• adiabatique, Boltzmann [formule de], Boltzmann [théorie thermodynamique statistique de], espace des vitesses [thermodynamique statistique], premier principe de la thermodynamique

7. Pour le système contenant ΔN_1 molécules, $\Delta U = W$ car le phénomène rapide est adiabatique.

$$\frac{\Delta N_1}{N_A} C_V (T^* - T_1) = P_1 \Delta V_1 > 0 \quad \text{car seule } P_1 \text{ est notable, } \Delta V_1 \text{ caractérisant les } \Delta N_1$$

molécules à l'état I.

$$\frac{\Delta N_1}{N_A} C_V (T^* - T_1) = \frac{\Delta N_1}{N_A} R T_1 ; T^* = T \frac{(R + C_V)}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} T_1 = \gamma T_1.$$

On a supposé ΔN_1 , T_1 et T^* permettant un calcul statistique.

8.a. Considérons l'ensemble des cylindres de base S et de hauteur $V_x dt$; il faut traiter statistiquement les molécules qui sortiront effectivement ; chaque cylindre contient un nombre N

de molécules, tel que $N = \frac{N_1}{V_1} S V_x dt$, et le nombre à trouver :

$$-dN'_1 = dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-BV_y^2} dV_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-BV_z^2} dV_z \int_0^{+\infty} a^3 \frac{N_1}{V_1} S V_x e^{-BV_x^2} dV_x \quad \text{en}$$

appliquant la loi donnée car il faut considérer tous les cas en V_y et V_z et seulement les cas favorables pour V_x .

$$-dN'_1 = dt \cdot \left(\frac{2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \right)^2 \cdot \left(\frac{B}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{N_1}{V_1} S \frac{1}{2B} = \frac{1}{2} dt \frac{N_1}{V_1} \frac{S}{\sqrt{\pi B}}.$$

Or $\overline{u_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi B}}$ à la température T_1 de E_1 .

$$dN'_1 = -\frac{N_1}{V_1} \frac{S \overline{u_1}}{4} dt.$$

b. T_1 restant constant, $\frac{dN_1}{N_1} = -\frac{S \overline{u_1}}{4 V_1} dt \Rightarrow N_1 = N_0 e^{-\frac{S \overline{u_1}}{4 V_1} t}.$

Or,
$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{N_1}{V_1} \frac{RT_1}{N_A} \\ P_0 &= \frac{N_0}{V_1} \frac{RT_1}{N_A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_1 = P_0 e^{-\frac{S \overline{u_1}}{4 V_1} t}$$

c. t_2 correspond à $P_1 = \frac{P_0}{2}.$

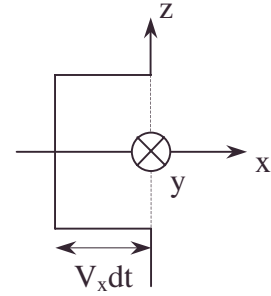
$$-\ln 2 = -\frac{S \overline{u_1}}{4 V_1} t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4 V_1}{S \overline{u_1}} \ln 2.$$

9.a. $N_1 + N_2 = N_0 ; dN_1 + dN_2 = 0.$

$$dN_1 = -\frac{S \overline{u_1}}{4 V_1} N_1 dt + \frac{S \overline{u_2}}{4 V_2} N_2 dt \text{ vu 2 effets contraires.}$$

Or, $\overline{u_1} = \overline{u_2}$ vu l'hypothèse de fuite isotherme et $N_2 = N_0 - N_1$.

$$dN_1 = \frac{S \overline{u_1}}{4} dt \left[\frac{N_0}{V_2} - N_1 \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right) \right] = \frac{S \overline{u_1}}{4} dt \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} \right) \left(\frac{N_0 V_1}{V_1 + V_2} - N_1 \right).$$



N_1	E_2
E_1	N_2

$$\frac{dN_1}{dt} + S \overline{u_1} \frac{V_1 + V_2}{4V_1 V_2} N_1 = S \frac{\overline{u_1} N_0}{4V_2}.$$

$$N_1 = \frac{V_2}{V_1 + V_2} N_0 \exp \frac{-S \overline{u_1} (V_1 + V_2)}{4V_1 V_2} t + \frac{N_0 V_1}{V_1 + V_2}.$$

$$P_1' = N_1 \frac{kT_1}{V_1} = \frac{N_0 kT_1}{V_1 + V_2} + \frac{kT_1 V_2 N_0}{(V_1 + V_2) V_1} \exp \left(\frac{-S \overline{u_1} (V_1 + V_2)}{4V_1 V_2} t \right).$$

b. t_2' correspond à $P_1' = \frac{P_0}{2}$; $P_0 = N_0 \frac{kT_1}{V_1}$.

$$\exp \left(\frac{-S \overline{u_1} (V_1 + V_2)}{4V_1 V_2} t_2' \right) = \frac{kT_1 \left(\frac{1}{2V_1} - \frac{1}{V_1 + V_2} \right)}{\frac{kT_1 V_2}{(V_1 + V_2) V_1}} = \frac{(V_2 - V_1)}{2V_2}.$$

$$t_2' = \frac{4V_1 V_2}{S \overline{u_1} (V_1 + V_2)} \ln \frac{2V_2}{V_2 - V_1} \text{ possible seulement si } V_2 \geq V_1, \text{ ce qui est évident pour}$$

avoir la possibilité $P' = \frac{P_0}{2}$ à T constant.

10. Applications numériques.

7. $T_{\text{He}}^* = 455 \text{ K}$; $T_{\text{N}_2}^* = 382,2 \text{ K}$.

8. $t_{2, \text{He}} = 4,38 \cdot 10^6 \text{ s}$; $t_{2, \text{N}_2} = 1,16 \cdot 10^7 \text{ s}$.

9. $t_{2, \text{He}}' = 4,9 \cdot 10^6 \text{ s}$; $t_{2, \text{N}_2}' = 1,28 \cdot 10^7 \text{ s}$.

11. $dN_1 = -\frac{N_1 \overline{u_1}}{4V_1} S dt$; $dN_2 = -\frac{N_2 \overline{u_2}}{4V_2} S dt$.

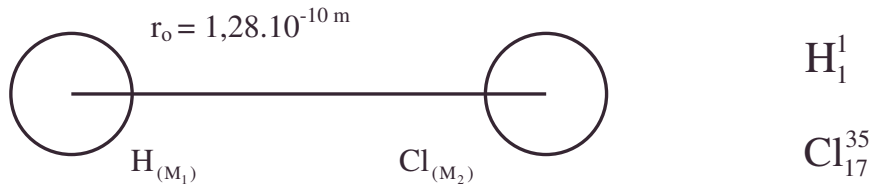
Le débit total nul suppose $dN_1 = dN_2$ soit $N_2 \frac{\overline{u_2}}{V_2} = N_1 \frac{\overline{u_1}}{V_1}$.

Or $\overline{u_1} = 2 \sqrt{\frac{2RT_1}{M\pi}}$; $\overline{u_2} = 2 \sqrt{\frac{2RT_2}{M\pi}}$ et $\frac{N_1}{V_1} = \frac{P_1}{kT_1}$; $\frac{N_2}{V_2} = \frac{P_2}{kT_2}$,

d'où $P_2 \frac{\sqrt{T_2}}{T_2} = P_1 \frac{\sqrt{T_1}}{T_1}$ soit $\frac{P_2}{\sqrt{T_2}} = \frac{P_1}{\sqrt{T_1}}$, condition d'équilibre moléculaire.

4.5.2. Interaction de dipôles : Molécules de HCl

On se propose de discuter de quelques propriétés physiques d'une molécule diatomique. On discutera du cas de HCl où les deux atomes sont nettement différents. Une telle molécule sera considérée comme le système suivant :



On considérera les deux atomes ponctuels et on appellera r_0 leur distance d'équilibre statique.

I. Etude du mouvement de vibration

On peut calculer les interactions entre un atome d'hydrogène et un atome de chlore et justifier ainsi la formation de la molécule. L'énergie potentielle d'interaction est très bien modélisée par l'expression suivante : $V(r) = D(1 - e^{-\alpha(r-a)})^2$ où r représente la distance entre les deux atomes et où les coefficients D , α et a sont déterminés expérimentalement (tous positifs).

1. Tracer qualitativement l'allure de $V(r)$. Discuter la forme pour $(\alpha(r-a)) \gg 1$; $\alpha(r-a) \ll -1$. Signification physique de D ? Calculez la distance d'équilibre r_0 en fonction des paramètres.

2. On veut étudier les vibrations de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre. On se place dans l'hypothèse de l'oscillateur harmonique. En modélisant la molécule par deux masses M_1 et M_2 reliées par un ressort de raideur K , effectuez le calcul du mouvement de vibration de cet oscillateur à une dimension. Donnez la pulsation ω en fonction de K , M_1 , M_2 .

3. En revenant à l'expression exacte de l'énergie potentielle, donnez l'expression de ω en fonction de D , α , M_1 , M_2 .

4. A.N. : Cette molécule échange de l'énergie avec le milieu extérieur sous forme de photons dont la pulsation est précisément ω . Calculez la longueur d'onde de ces photons ; les situer dans le spectre électromagnétique par rapport au domaine visible. Calculez leur énergie que l'on appellera énergie caractéristique de vibration E_V .

$$D = 6,5 \cdot 10^{-19} \text{ J et } \alpha = 2 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}.$$

II. Etude du mouvement de rotation.

On étudie le mouvement de rotation de cette molécule dans le repère du centre de masse. On négligera les petites variations de la distance entre les deux atomes : c'est-à-dire que l'on prendra $r = \text{constante} = r_0$.

Les atomes sont toujours supposés ponctuels.

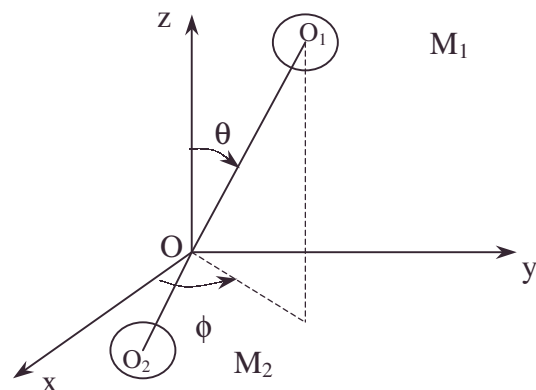
$$r_1 = OO_1 ; r_2 = OO_2 ; r_0 = r_1 + r_2.$$

1. Les paramètres du problème sont :

$$\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \left(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} \right);$$

Exprimez l'énergie cinétique de rotation E_c de ce système en fonction de ces paramètres et du moment d'inertie I .

$$I = \mu r_0^2 ; \mu = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} = \text{masse réduite.}$$



• développement au premier ordre ou plus, énergie de vibration moyenne [thermodynamique statistique], équilibre, graphe, masse réduite, photon, quantité de mouvement et énergie cinétique [Mécanique rationnelle]

2. Les paramètres intéressants pour une description physique générale d'un tel système sont $\theta, \phi, P_\theta, P_\phi$ avec $P_\theta = \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right)_{\theta, \phi, \dot{\phi}}$ et $P_\phi = \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} \right)_{\theta, \phi, \dot{\theta}}$. En termes de moments

cinétiques, quelle est la signification de P_ϕ et P_θ ? Montrez que $E_c = \frac{P_\theta^2}{2I} + \frac{P_\phi^2}{2I \sin^2 \theta}$.

3. Cette molécule fait partie d'un gaz maintenu à la température T . Elle sera distribuée dans ses énergies possibles suivant la distribution de Boltzmann.

Un état de rotation de la molécule d'énergie E_c est défini par la donnée des paramètres $\theta, \phi, P_\theta, P_\phi$ à la précision $d\theta, d\phi, dP_\theta, dP_\phi$.

La probabilité d'un tel état est $dp = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_c} d\theta d\phi dP_\theta dP_\phi$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

(k_B = constante de Boltzmann).

Justifiez physiquement qu'aux températures usuelles d'existence de cette molécule on puisse, sans corrections relativistes, prendre comme domaine de variation de P_θ et

P_ϕ , $-\infty$ à $+\infty$ pour décrire tous les états possibles de la molécule ; quels sont les domaines de variation de ϕ, θ ?

– Calculez le coefficient de norme Z ; (pour ceci traduire simplement le fait que la molécule se trouve avec certitude dans un de ses états possibles).

– On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

– Ecrire sous forme intégrale l'expression de l'énergie cinétique de rotation moyenne de cette molécule $\langle E_c \rangle$. Vérifiez la relation très simple entre $\langle E_c \rangle$ et Z :

$$\langle E_c \rangle = - \frac{d \ln(Z)}{d\beta}.$$

– On rappelle que pour une grandeur A pouvant prendre une des valeurs A_i avec la probabilité p_i la valeur moyenne de A s'écrit : $\langle A \rangle = \sum_i p_i A_i$.

– Donnez en fonction de T l'expression de $\langle E_c \rangle$.

– AN : faire le calcul de $\langle E_c \rangle$ à $T = 300$ K et comparer cette énergie à l'énergie caractéristique de vibration E_v .

– La contribution à la capacité calorifique de cette molécule des degrés de liberté de rotation est $C_r = \frac{d \langle E_c \rangle}{dT}$; calculer C_r .

– On considère un ensemble de N_A molécules identiques constituant un gaz parfait. (N_A = nombre d'Avogadro). Quelle est la capacité calorifique due au mouvement de rotation de cet ensemble de molécules ?

III. Interaction entre molécules

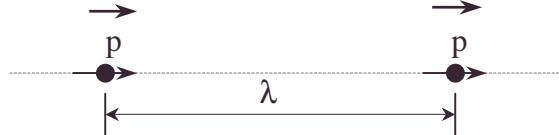
On veut aborder ici une étude qui précisera le domaine de validité de l'hypothèse du gaz parfait. Un atome d'hydrogène (ou de chlore) est un système électrostatique présentant la symétrie sphérique quand il est seul dans l'espace. Cette symétrie est rompue lors de la formation de la molécule HCl et une telle molécule possède un moment dipolaire électrostatique p . ($p = 0,34 \cdot 10^{-30}$ C.m).

– En admettant que la dissymétrie de charge n'intéresse que la charge $q = |e|$, e charge de l'électron, calculez quelle est la distance séparant les barycentres des charges + et – dans cette molécule qui est neutre. Comparez à r_0 : conclusion ?

Dans la suite on s'intéressera aux interactions électrostatiques dipolaires de ces molécules qui ont chacune un moment dipolaire P qui sera constant.

1. Soit un dipôle \vec{p} : rappeler l'expression du champ électrostatique créé dans tout l'espace par ce dipôle.

2. Soient deux dipôles en configuration relative simple suivante :



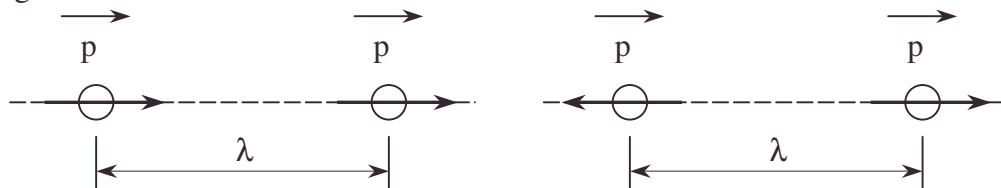
On veut estimer numériquement l'énergie d'interaction dans le cas du gaz chlorhydrique ou chlorure d'hydrogène. Il faut estimer λ distance moyenne entre deux molécules. On fera cette estimation pour un gaz considéré comme parfait dans les conditions suivantes : pression $P = 10^5 \text{ Pa}$, $T = 300 \text{ K}$.

Calculez dans ces conditions le volume moyen par molécule que l'on écrira sous la forme λ^3 .

Quelle est l'énergie d'interaction ?

A.N. : Calculez l'énergie d'interaction de ces deux dipôles. Comparer cette énergie à l'énergie moyenne de rotation à la même température : conclusion ?

3. Donnez l'expression de la force d'interaction entre deux molécules dans les deux configurations suivantes :



Précisez bien dans votre réponse la nature de cette force (répulsive, nulle, attractive). Comment sont modifiées d'après vous les conclusions précédentes lorsque l'on tient compte du fait que ces molécules tournent ?

Constantes
Physiques

Vitesse de la lumière (vide)	c	$2,998 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Charge de l'électron	$ e $	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron (e')	m_e	$0,911 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
Masse du proton (P)	M_p	$1836m_e = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron (N)	M_n	$1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Planck	h	$6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}$
Nombre d'Avogadro	N	$6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

CCP ; Durée 2h

Corrigé

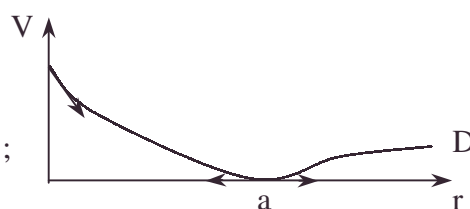
I.1.a. $D(1 - e^{-\alpha a})^2$

b. • $\alpha(r - a) \gg 1$; $e^{-\alpha(r-a)} = 0$; $V = D$.

La droite $V = D$ est asymptote.

• $\alpha(r - a) \ll 1$; $e^{-\alpha(r-a)} = 1 - \alpha(r - a)$;

$$V = D\alpha^2(r - a)^2 ;$$



• condition limite, équilibre, graphe, minimum, minimum de l'énergie potentielle, stabilité

La courbe est assimilable à une parabole de sommet $r = a$, $V = 0$.

c. $D = \lim_{r \rightarrow \infty} V$: D est le potentiel à l'infini.

d. La position d'équilibre stable correspond au minimum de l'énergie potentielle donc pour $r_0 = a$.

2.a. Dans le repère barycentrique des 2 masses d'origine O , prenons le problème équivalent d'un point M de masse $\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ soumis à la même force que M_2 .

$$\text{On a : } M_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} = +K(\overrightarrow{O_1 O_2} - (\overrightarrow{O_1 O_2})_0) ; M_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OO_2}}{dt^2} = -K(\overrightarrow{O_1 O_2} - (\overrightarrow{O_1 O_2})_0) .$$

$$\text{Posons : } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_1 O_2} = \overrightarrow{OO_2} - \overrightarrow{OO_1} ;$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{OO_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} = -K(\overrightarrow{O_1 O_2} - (\overrightarrow{O_1 O_2})_0) \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) ;$$

$$\text{Soit : } \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = -K(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_0) .$$

$$\text{b. } \omega = \left[\frac{K(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

$$\text{3. } \vec{F} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -2D\alpha(1 - e^{-\alpha(r-a)}) \vec{u}_r = -2D\alpha^2(r-a) \vec{u}_r \text{ en linéarisant ;}$$

$K = 2D\alpha^2$ par identification.

$$\omega = \alpha \left(\frac{2D}{M_1 M_2} (M_1 + M_2) \right)^{\frac{1}{2}} ; .$$

$$\text{4. AN : } M_1 = m_e + M_p ; M_2 = 17(m_e + M_p) + 18M_n$$

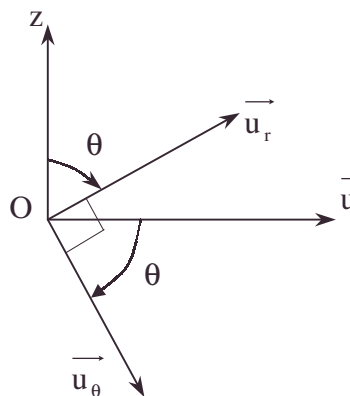
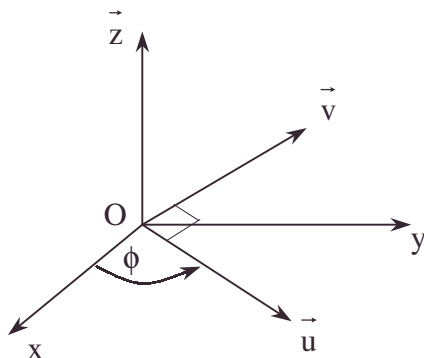
$$\text{a. } \lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} ;$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\alpha} \left(\frac{M_1 M_2}{2D(M_1 + M_2)} \right)^{\frac{1}{2}} ; \text{AN : } \omega = 5,653.10^{14} \text{ rad.s}^{-1} ; \lambda = 3,332.10^{-6} \text{ m.} \in \lambda_{\text{infrarouge}}$$

$$\lambda_{\text{infrarouge}} > \lambda_{\text{rouge}} > \lambda_{\text{bleu}} .$$

$$\text{b. } E_v = h\nu = \frac{h}{T} = \frac{h\omega}{2\pi} = \frac{h\alpha}{2\pi} \left[\frac{2D}{M_1 M_2} (M_1 + M_2) \right]^{\frac{1}{2}} ; \text{AN : } E_v = 5,962.10^{-20} \text{ J.}$$

II.1. Dans le plan Ozu :



• constante de Planck, énergie de vibration moyenne[thermodynamique statistique], linéarisation

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\Omega} \text{ avec } \vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} \vec{v} + \dot{\vec{\phi}} \vec{z} \text{ (soit } \vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} \vec{v} + \dot{\phi} \cos \theta \vec{u}_r - \dot{\phi} \sin \theta \vec{u}_\theta \text{)} ;$$

$$\text{or, } \vec{\sigma}_0 = \vec{OO}_1 \wedge M_1 \vec{V}_1 + \vec{OO}_2 \wedge M_2 \vec{V}_2 ; \text{ et } M_1 \vec{OO}_1 + M_2 \vec{OO}_2 = \vec{0} ,$$

$$\text{d'où } M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 = \vec{0} .$$

$$\text{or, } \vec{OM} = \vec{OO}_1 + \vec{OO}_2 = \vec{OO}_2 - \vec{OO}_1 \Rightarrow \vec{OO}_2 = \frac{M_1 \vec{OM}}{M_1 + M_2} \text{ et } \vec{OO}_1 = \frac{-M_2 \vec{OM}}{M_1 + M_2} ;$$

$$\text{Ainsi, } \vec{V}_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right) ; \vec{V}_1 = \frac{-M_2}{M_1 + M_2} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right) \text{ avec } \frac{d\vec{OM}}{dt} = r_0 \frac{d\vec{u}_r}{dt} = r_0 \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r .$$

$$\vec{\sigma}_0 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \vec{OM} \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right) = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} r_0 \vec{u}_r \wedge r_0 \frac{d\vec{u}_r}{dt} = I \vec{u}_r \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r) ;$$

en développant le double produit vectoriel :

$$\vec{\sigma}_0 = I \vec{\Omega} - I (\vec{u}_r \cdot \vec{\Omega}) \vec{u}_r = I (\dot{\vec{\theta}} \vec{v} - \dot{\psi} \sin \theta \vec{u}_\theta) ;$$

$$\text{ou } \vec{\sigma}_0 = I \dot{\vec{\theta}} \vec{v} - I \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta \vec{u} + I \dot{\psi} \sin^2 \theta \vec{z} \Rightarrow E_c = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) .$$

2.a. $P_\theta = I \dot{\theta}$; $P_\phi = I \sin^2 \theta \dot{\psi}$; $P_\theta = \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{v}$ et $P_\phi = \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{z}$, projections de $\vec{\sigma}_0$ dans le repère (O, \vec{u} , \vec{v} , \vec{z}) sur les axes des rotations en θ , en ϕ (cf. $\vec{\Omega}$).

$$\text{b. On tire } \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{I} ; \dot{\psi} = \frac{P_\phi}{I \sin^2 \theta} ; \Rightarrow E_c = \frac{P_\theta^2}{2I} + \frac{P_\phi^2}{2I \sin^2 \theta} .$$

3.a. Tous les mouvements sont possibles : $\dot{\theta} \in \mathbb{R}$, de même P_θ ; de même $\dot{\phi} \in \mathbb{R}$ et $P_\phi \in \mathbb{R}$; $\theta \in [0, \pi]$; $\phi \in [0, 2\pi]$.

b. On pourrait faire des corrections relativistes mais la probabilité des valeurs grandes étant très faible, la correction serait faible ; la très grande majorité des molécules sont dans le domaine non relativiste avec E_c de l'ordre de $k_B T$. (cf. écart type).

c. La condition de normalisation est $\iiint dp = 1$:

$$1 = \frac{1}{Z} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-P_\theta^2}{2Ik_B T \sin^2 \theta}} dP_\theta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-P_\phi^2}{2Ik_B T}} dP_\phi \right) ;$$

vu la formule donnée :

$$Z = 2\pi \int_0^\pi \sqrt{2\pi I \sin^2 \theta k_B T} \cdot \sqrt{2\pi I k_B T} d\theta = 4\pi^2 I k_B T \int_0^\pi \sin \theta d\theta ;$$

$$Z = 8\pi^2 I k_B T = 8\pi^2 \frac{I}{\beta} .$$

$$\text{d. } \langle E_c \rangle = \int E_c dp = \frac{1}{Z} \iiint \left(\frac{P_\theta^2}{2I} + \frac{P_\phi^2}{2I \sin^2 \theta} \right) e^{\frac{-\beta P_\theta^2}{2I}} e^{\frac{-\beta P_\phi^2}{2I \sin^2 \theta}} d\theta d\phi dP_\phi dP_\theta .$$

$$\text{e. Rappelons } \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx \text{ et calculons : } \frac{d \ln Z}{d\beta} = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} ;$$

$$\text{or } Z = \iiint e^{-\beta E_c} d\theta d\phi dP_\phi dP_\theta ;$$

• dérivation sous le signe intégrale, élection de valence, élection de conduction, moment cinétique, normalisation, ordre de grandeur, quantité de mouvement et énergie cinétique [Mécanique rationnelle]

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\beta} = \iiint (-E_c) e^{-\beta E_c} d\theta d\phi dP_\phi dP_\theta = -z \langle E_c \rangle ; \text{ on a donc } \langle E_c \rangle = -\frac{d \ln z}{d\beta}.$$

$$\text{f. } \frac{d \ln z}{d\beta} = \frac{1}{z} \frac{dz}{d\beta} = -\frac{8\pi^2 \frac{I}{\beta^2}}{8\pi^2 \frac{I}{\beta}} = -\frac{1}{\beta}.$$

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{\beta} = K_B T ; \text{ AN : } \langle E_c \rangle = 4,141.10^{-21} \text{ J.}$$

$\Rightarrow \langle E_v \rangle = 14,39 \langle E_c \rangle ; \langle E_c \rangle \ll \langle E_v \rangle$. Il y a une théorie quantique mieux adaptée.

g. $C_r = k_B$.

h. Pour 1 mole, l'énergie est multipliée par N_A et sa dérivée aussi

$$"C_r" = N_A k_B = R. \quad \text{AN : } "C_r" = 8,313 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

III. $p = ed$; AN : $d = 2,122.10^{-12} \text{ m}$ or $r_o = 1,28.10^{-10} \text{ m}$

donc $d = 1,658.10^{-2} r_o$ et $d \ll r_o$.

Le champ d'un dipôle peut donc s'appliquer ici.

$$1. E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^3} ; E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_o r^3}.$$

$$2.a. V = \frac{RT}{P^0} = N_A \lambda^3 ; \lambda^3 = \frac{RT}{N_A P^0} = \frac{k_B T}{P^0} ; \text{ AN : } \lambda^3 = 4,141.10^{-26} \text{ m}^3.$$

$$b. E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = \frac{-p^2}{2\pi\epsilon_o \lambda^3} ; \text{ AN : } |E_p| = 5,025.10^{-26} \text{ J.}$$

On a pris $\frac{1}{4\pi\epsilon_o} = 9.10^9$; $|E_p| = 1,213.10^{-5} \langle E_c \rangle : |E_p| \ll \langle E_c \rangle$.

$$3.a. F_r = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{r=\lambda} = \pm \frac{3p^2}{2\pi\epsilon_o \lambda^4} \text{ en prenant comme origine la molécule de gauche.}$$

b. Force attractive : - pour la configuration $\begin{array}{cc} \longrightarrow & \longrightarrow \\ \longleftarrow & \longrightarrow \end{array}$

Force répulsive : + pour la configuration $\begin{array}{cc} \longleftarrow & \longrightarrow \end{array}$

c. Quand les molécules tournent aléatoirement du fait des chocs, les orientations mutuelles varient de façon aléatoire, la force moyenne est nulle.

On n'aborde pas ici la théorie des forces de Van der Waals.

4.5.3. Conductivité du silicium

Application à la tension de seuil d'une diode

Nous étudierons les propriétés d'un monocristal semi-conducteur de silicium. Les électrons de valence, dans un tel cristal supposé parfait, sont solidement liés à l'édifice cristallin et ne peuvent contribuer au transport du courant.

Cependant, un apport d'énergie convenable peut arracher un électron de valence à la liaison dont il fait initialement partie, et le libérer dans le réseau cristallin. Il devient alors un électron de conduction. Cette rupture laisse un "trou" positif susceptible de se déplacer dans le cristal.

On admettra que ces deux types de transporteurs de courant, les électrons de conduction et les trous positifs, peuvent être traités théoriquement comme des particules de même masse m .

m : masse de l'électron, corrigée en tenant compte de la théorie quantique.

• *électron de conduction, électrons de valence, énergie cinétique de rotation moyenne [thermodynamique statistique], force de Van der Waals [voir liaisons en Chimie], monocristal semi-conducteur de silicium., semi-conducteur, trou positif dans un semi conducteur*

Du point de vue quantique, on établit que les électrons, dans le cristal, ne peuvent occuper que des niveaux d'énergie discrets représentés à l'aide du diagramme suivant relatif à 1 mètre cube d'échantillon (figure 1).

La bande énergétique (V) est affectée aux électrons de valence, et la bande (C) aux électrons de conduction. Chacune de ces bandes est d'ailleurs résoluble en une multiplicité de niveaux différents. Le principe d'exclusion de Pauli s'applique.

Lorsqu'un électron est promu de la bande de valence à la bande de conduction, à la place de l'électron de valence initial subsiste un trou positif susceptible de se déplacer dans la bande de valence.

A. Conductivité du silicium pur

Elle est assurée par les électrons de la bande de conduction et par les trous positifs de la bande de valence.

1. La probabilité pour qu'un niveau énergétique W soit occupé par un électron est

$$f(W) = \frac{1}{1 + e^{\frac{W - W_F}{kT}}}; \quad W_F \text{ étant appelé niveau de}$$

Fermi ; $k = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

a. En déduire la probabilité $f'(W)$ pour qu'un niveau énergétique W de la bande de valence soit occupé par un trou.

b. Donner les expressions de $f(W)$ quand $\frac{W - W_F}{kT} \gg 1$ et de $f'(W)$ quand $\frac{W_F - W}{kT} \gg 1$, ce que l'on rencontrera dans la suite. Commenter brièvement.

2. Le nombre d'états quantiques possibles par unité de volume dans un intervalle d'énergie dW est :

$$\text{dans la bande de conduction } N(W)dW = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (W - W_C)^{\frac{1}{2}} dW, \text{ avec}$$

$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$; W_C = énergie inférieure de la bande de conduction avec $W_C > W_V$.

$$\text{dans la bande de valence } N(W)dW = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (W_V - W)^{\frac{1}{2}} dW,$$

avec W_V = énergie supérieure de la bande de valence.

On supposera que la bande de conduction s'étend jusqu'à $+\infty$ et que la bande de valence s'étend jusqu'à $-\infty$. On donne $\int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

a. Calculer le nombre d'électrons n_i par unité de volume, dans la bande de conduction.

b. Calculer le nombre de trous p_i par unité de volume dans la bande de valence.

c. Montrer que les résultats peuvent être mis sous la forme :

• bande énergétique à niveaux multiples [conductivité en physique du solide], développement au premier ordre ou plus, niveau de Fermi [bandes d'états énergétiques], principe d'exclusion de Pauli, probabilité, statistique de Fermi-Dirac

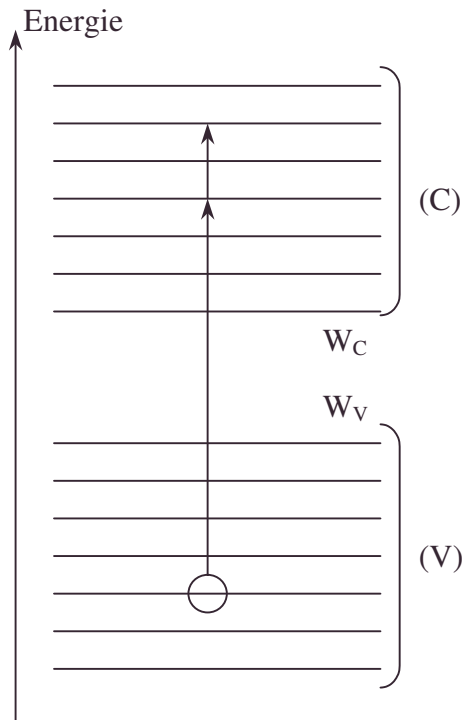


Figure 1

$$n_i = N_C e^{\frac{W_F - W_C}{kT}} ; p_i = N_V e^{\frac{W_V - W_F}{kT}} \text{ avec } N_C = N_V.$$

3. Quelle relation a-t-on entre p_i et n_i ? En déduire W_F en fonction de W_C et W_V .

Démontrer que $n_i = N_C e^{\frac{-(W_C - W_V)}{2kT}}$.

4. On désigne par μ_p et μ_n les mobilités respectives des trous et des électrons.

Exprimer la conductivité électrique γ du silicium pur.

Calculer la valeur commune de n_i et de p_i à $T = 300$ K. Calculer N_C .

A.N. : on donne : $\mu_n = -0,12 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $\mu_p = +0,05 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $\gamma = 1,59 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$;

$$W_C - W_V = 1 \text{ eV} ; e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

B. Conductivité du silicium dopé

1.a. Montrer que les concentrations des électrons libres et des trous positifs, dans un échantillon de semi-conducteur en équilibre, obéissent à une loi d'action de masse analogue celle qui régit les dissociations moléculaires en chimie.

La relation de dissociation se formule ici :



n et p désignant respectivement le nombre d'électrons de conduction et de trous positifs par mètre cube d'échantillon, établir la relation $np = K(T)$ (L'activité des électrons de valence restant sensiblement égale à 1) où $K(T)$ est une constante de dissociation qui ne dépend que de la température T .

b. Calculer : $\frac{\partial (\ln K)}{\partial T}$ dans le cas du silicium.

Peut-on simplifier l'expression aux températures usuelles, grâce à une approximation légitime ? Quelle est la loi de thermodynamique chimique qui est retrouvée ?

A.N. à $T = 300$ K.

2. Un cristal de silicium contient généralement des impuretés, atomes étrangers qui se substituent, dans le réseau cristallin, à certains atomes du semi-conducteur, et qui introduisent dans la structure cristalline :

a. soit des électrons (de conduction) en excès ;

b. soit des trous positifs en excès.

Dans le cas a., les atomes étrangers sont dits atomes donneurs. Ce sont par exemple des atomes pentavalents tels que le phosphore P, qui échangent 4 électrons par covalence avec les atomes de semi-conducteur voisins et libèrent leur cinquième électron par ionisation.

Dans le cas b., ils sont dits atomes accepteurs. Un exemple est fourni par l'aluminium Al, élément trivalent qui échange 3 électrons par covalence avec les atomes voisins, la quatrième liaison restant incomplète c'est-à-dire présentant un "trou" positif. Ce trou positif pourra migrer, un électron de valence voisin venant occuper sa place initiale. L'atome d'aluminium est alors ionisé.

Ces mécanismes sont schématisés sur la figure 2.

Dans la suite, on admettra que le nombre de transporteurs excédentaires (électrons ou trous positifs) ainsi introduits est égal au nombre d'atomes d'impuretés (donneurs ou accepteurs). On désignera par N_d et N_a les

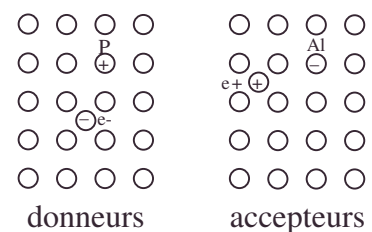


Figure 2

Les cercles non marqués représentent les atomes du semi-conducteur considéré (silicium) dans le réseau cristallin.

• analogie, conductivité électrique, cristal de silicium dopé, élection de conduction, élection de valence, équilibre, loi d'action de masse, mobilité d'un porteur de charge

$$f'(W) = 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{W-W_F}{kT}}} = \frac{e^{\frac{W-W_F}{kT}}}{1 + e^{\frac{W-W_F}{kT}}} = \frac{1}{e^{-\frac{(W-W_F)}{kT}} + 1}.$$

b.α. $f(W) = e^{-\frac{(W-W_F)}{kT}}$ cf. loi de Boltzmann.

β. $f'(W) = e^{-\frac{(W_F-W)}{kT}}.$

2.a. Le nombre d'électrons correspond au nombre d'états remplis ; il faut donc tenir compte de la probabilité $f(W)$ d'occupation.

$$n_i = \int_{W_C}^{+\infty} N(W) f(W) dW, \text{ avec } f(W) = e^{-\frac{(W-W_F)}{kT}};$$

$$n_i = \int_{W_C}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (W - W_C)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{W-W_F}{kT}} dW.$$

$$\text{Posons } u^2 = \frac{W - W_C}{kT}; \quad \frac{W - W_F}{kT} = \frac{W - W_C}{kT} + \frac{W_C - W_F}{kT}.$$

$$(W - W_C)^{\frac{1}{2}} = u\sqrt{kT}; \quad dW = 2u kT du.$$

$$n_i = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{3}{2}} 2 e^{-\frac{(W_C-W_F)}{kT}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du.$$

$$n_i = 2 \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(W_C-W_F)}{kT}}.$$

b. $p_i = \int_{-\infty}^{W_V} N(W) f'(W) dW, \text{ avec } f'(W) = e^{-\frac{(W_F-W)}{kT}}.$

$$p_i = \int_{-\infty}^{W_V} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (W_V - W)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(W_F-W)}{kT}} dW.$$

$$\text{Posons } u^2 = \frac{W_V - W}{kT}; \quad \frac{W_F - W}{kT} = \frac{W_F - W_V}{kT} + u^2.$$

$$(W_V - W)^{\frac{1}{2}} = u\sqrt{kT}; \quad dW = -2u kT du.$$

$$p_i = -\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{8\pi^2 m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} 2 e^{-\frac{W_F-W_V}{kT}} (kT)^{\frac{3}{2}} \int_{+\infty}^0 u^2 e^{-u^2} du.$$

$$p_i = 2 \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(W_F-W_V)}{kT}}.$$

c. de la forme proposée, avec $N_C = N_V = 2 \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$

3. $n_i = p_i \Rightarrow W_C - W_F = W_F - W_V \Rightarrow W_F = \frac{W_V + W_C}{2} \Rightarrow W_C - W_F = \frac{W_C - W_V}{2}.$

alors $n_i = p_i = N_C e^{-\frac{(W_C-W_V)}{2kT}}.$

4. Rappels : • la mobilité μ est définie formellement par $\vec{v} = \mu \vec{E}$.

• $q_p = +e$; $q_n = -e$.

$$\vec{j} = n_i q_n \vec{v}_n + p_i q_p \vec{v}_p = [n_i e |\mu_n| + p_i e \mu_p] \vec{E} = \gamma \vec{E}.$$

$$\gamma = p_i e \mu_p + n_i e |\mu_n| = e n_i (\mu_p + |\mu_n|).$$

$$n_i = p_i = \frac{\gamma}{e(\mu_p + |\mu_n|)}; \text{A.N.: } n_i = 5,85 \cdot 10^{16} \text{ électrons ou trous par m}^3.$$

$$N_C = n_i e^{\frac{(W_C - W_V)}{2kT}}; \text{A.N.: } N_C = 1,73 \cdot 10^{17} \text{ particules par m}^3.$$

B.1.a. A partir des expressions citées en A. : $n.p = 4 \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^3 e^{\frac{W_V - W_C}{kT}} = K(T).$

A.N. : $K = 3,42 \cdot 10^{33} \text{ particules}^2/\text{m}^6.$

b. $\frac{\partial \ln K}{\partial T} = \frac{3}{T} + \frac{W_C - W_V}{kT^2}$. $W_C - W_V$ est le gap énergétique.

or, $3kT \ll W_C - W_V$ aux températures usuelles ; $\frac{\partial \ln K}{\partial T} = \frac{W_C - W_V}{k} \cdot \frac{1}{T^2}.$

On a la loi de Van t'Hoff. A.N. : $\frac{\partial \ln K}{\partial T} = 0,13.$

2.a. $n - p = N_d$; le dopage N impose $n \gg p \Rightarrow n \approx N_d$;

$$\underbrace{np}_{\text{vu l.}} = n_i^2 \Rightarrow p = \frac{n_i^2}{N_d}.$$

A.N. : $n_N = 3 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$; $p_N = 1,14 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$; $\gamma' \approx e n_N |\mu_n| = 5,76 \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$

b. $\frac{\gamma'}{\gamma} = 3622$; l'amplification est notable et ajustable.

c. Le nouveau niveau de Fermi W'_F satisfait formellement

$$n_N = N_C e^{\frac{(W_C - W'_F)}{kT}} ; p_N = N_C e^{\frac{(W'_F - W_V)}{kT}}.$$

$$\frac{n_N}{p_N} = e^{\frac{2W'_F - W_V - W_C}{kT}} = e^{\frac{2(W'_F - W_F)}{kT}}.$$

$$W'_F - W_F = \frac{kT}{2} \ln \frac{n_N}{p_N} ; \text{A.N.: } W'_F - W_F = 0,21 \text{ eV}.$$

3.a. De manière analogue :

$$n_P = \frac{n_i^2}{N_a} \text{ avec } p_P \approx N_a ;$$

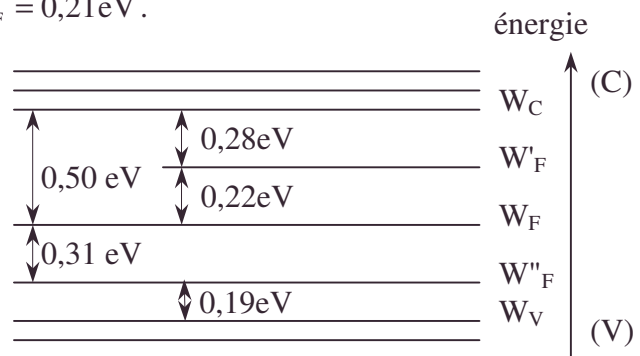
$$n_P = 3,42 \cdot 10^{11} \cdot \text{m}^{-3} \quad p_P = 10^{22} \cdot \text{m}^{-3}.$$

b. Le nouveau niveau de Fermi W''_F satisfait formellement ;

$$n_P = N_C e^{\frac{(W_C - W''_F)}{kT}} ; p_P = N_C e^{\frac{(W''_F - W_V)}{kT}}.$$

$$\frac{n_P}{p_P} = e^{\frac{2W''_F - W_V - W_C}{kT}} = e^{\frac{2(W''_F - W_F)}{kT}} \Rightarrow W''_F - W_F = -\frac{kT}{2} \ln \left(\frac{p_P}{n_P} \right) ; \text{A.N.: } W''_F - W_F = -0,31 \text{ eV}.$$

• analogie, gap énergétique [entre bandes d'états du silicium], le nouveau niveau de Fermi, loi d'action de masse, loi de Van t'Hoff, probabilité



C.1. La probabilité P pour qu'une particule ait une énergie supérieure à eV_0 s'écrit :

$$P = \frac{\int_{eV_0}^{+\infty} e^{-\frac{W}{kT}} dW}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{W}{kT}} dW} = e^{-\frac{eV_0}{kT}} \text{ or } P \approx \frac{p'_p}{p_p} \text{ car } p'_p \ll p_p \Rightarrow p'_p = p_p e^{-\frac{eV_0}{kT}}.$$

$$2. p'_p = p_n \Rightarrow V_0 = \frac{kT}{e} \ln \frac{p_p}{p_n} ; \text{A.N. : } V_0 = -0,53 \text{ V}.$$

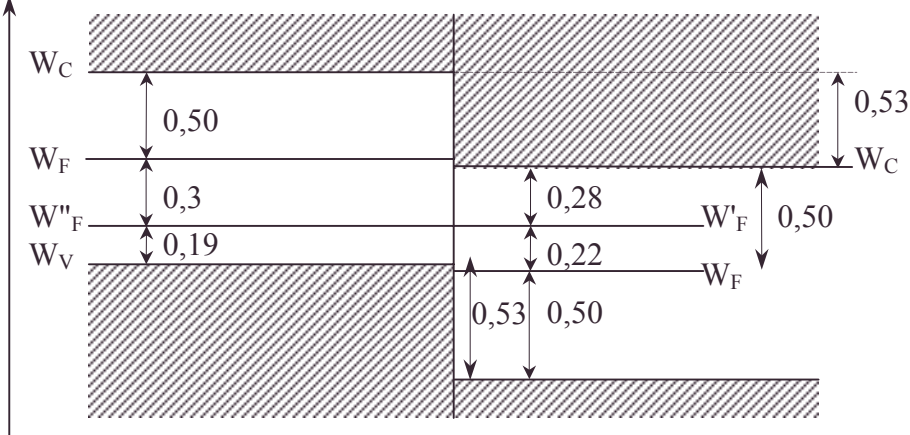
$$3. p_p = N_V e^{-\frac{(W'_F - W_V)}{kT}} \Rightarrow p'_p = N_V e^{-\frac{W'_F - W_V + eV_0}{kT}} ; p_n = N_V e^{-\frac{(W'_F - W_V)}{kT}}.$$

or $p_n = p'_p \Rightarrow W'_F = W''_F + eV_0$ avec $V_0 = V_n - V_p$; on a : $eV_0 = W'_F - W''_F$.

A.N. : $W'_F - W''_F = W'_F - W_F - (W''_F - W_F)$.

On a bien : $W'_F - W''_F = 0,22 + 0,31 = 0,53 = 0,53 \text{ eV}$ avec $V_0 = 0,53 \text{ V}$.

4. énergie
(en eV)



On voit bien le lien entre la tension de seuil d'une diode jonction et les niveaux d'énergie de Fermi.

4.5.4. Interaction laser jet de molécules ou d'atomes ionisés

Données : Charge du proton : $q = 1,60 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

Unité de masse atomique : $1 \text{ u.m.a.} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

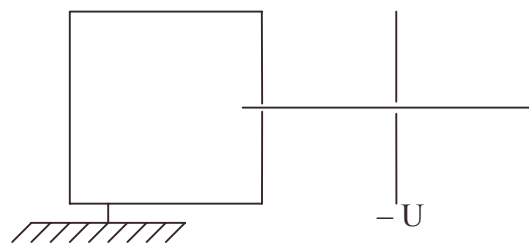
Constante de Boltzmann : $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

Vitesse de la lumière : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Le but du problème est l'étude des caractéristiques d'un faisceau d'ions moyennement accéléré ($\approx 10 \text{ keV}$) et de son interaction avec un faisceau lumineux.

Les parties II et III sont indépendantes.

On ne demande pas une très grande précision dans les tracés graphiques ; en conséquence, il est inutile d'utiliser un papier millimétré.



Chambre à ionisation C

Figure 1.

I. On considère les ions M^+ de masse m , formés dans une chambre d'ionisation C . A la sortie de cette chambre, ces ions de vitesse v sont accélérés par une tension négative $-U$ ($U > 0$) (cf. Figure 1). On obtient ainsi en ajoutant quelques lentilles électrostatiques de focalisation dont on ne tiendra pas compte un faisceau d'ions très peu divergent.

1. Calculer la vitesse V des ions dans le faisceau. On l'exprimera en fonction de v et V_0 , vitesse qui serait atteinte par les ions si leur vitesse initiale à la sortie de la chambre C était nulle. Application numérique : calculer V et V_0 pour $U = 10^4$ V, $m = 138$ u.m.a. et $v = 1000$ m.s⁻¹.

2. En réalité, les ions formés dans la chambre d'ionisation n'ont pas tous la même vitesse mais possèdent une distribution des vitesses donnée par :

$$N(v)dv = N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \quad (\text{distribution de Maxwell})$$

N_0 est le nombre total d'ions, $N(v)dv$ est le nombre d'ions dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$, k est la constante de Boltzmann.

a. Calculer la vitesse moyenne v_m des ions à la sortie de la chambre d'ionisation en fonction de T , k et m . Application numérique : $T = 10^4$ K et $m = 138$ u.m.a.

b. Tracer qualitativement la courbe $N(v)$; déterminer son maximum. Montrer que cette courbe possède une certaine largeur à mi-hauteur Δv et que Δv est du même ordre de grandeur que v_m .

3. Dans toute la suite, on suppose pour simplifier que la distribution de vitesse des ions dans la chambre d'ionisation est une fonction crêneau centrée autour de v_m et de largeur totale $\Delta v = v_m$.

a. Quel est le nombre d'ions $N(V)dV$ dont la vitesse dans le faisceau est comprise entre V et $V + dV$? Représenter cette fonction $N(V)$.

b. Quelle est la largeur totale hors tout ΔV_1 de cette distribution de vitesse en fonction de v_m et V_0 ? Pour calculer ΔV_1 , on se placera dans le cas où $v_m \ll V_0$ et on pourra utiliser un développement limité pour calculer V en fonction de v . Quel est l'effet de l'accélération des ions par le potentiel U sur leur distribution de vitesse ?

c. Application numérique : calculer ΔV_1 pour $T = 10^4$ K, $U = 10^4$ V, $m = 138$ u.m.a.

4. Quelle devrait être la température T' de la chambre d'ionisation pour que la largeur de la distribution de vitesse des ions avant accélération soit égale à ΔV_1 ?

Application numérique : calculer T' pour la valeur de ΔV_1 calculée au 3.b.

On donne toujours $m = 138$ u.m.a.

5. Jusqu'ici, nous avons considéré que la tension U était déterminée avec une précision infinie. En réalité, les générateurs de tension ne sont pas infiniment stables, et la tension

U varie au cours du temps entre les valeurs $U - \frac{\Delta U}{2}$ et $U + \frac{\Delta U}{2}$.

On pose $\alpha = \frac{\Delta U}{U}$ ($\alpha \ll 1$).

a. Montrer qu'en moyenne au cours du temps, la vitesse V_0 varie entre $V_0 - \frac{\Delta V_0}{2}$ et $V_0 + \frac{\Delta V_0}{2}$. Calculer ΔV_0 en fonction de α et V_0 .

b. Calculer, en tenant compte à la fois de la dispersion initiale des vitesses et de celle induite par l'instabilité en tension du générateur, la dispersion totale ΔV des vitesses des ions dans le faisceau.

• constante de Boltzmann., développement au premier ordre ou plus, dispersion des vitesses [thermodynamique statistique], distribution de Maxwell, graphe, largeur à mi-hauteur des bandes d'énergie, maximum, ordre de grandeur, u.m.a.

c. Représenter qualitativement la courbe donnant ΔV en fonction de V_0 pour T et α fixés. Montrer que cette courbe passe par un minimum. Calculer les coordonnées de ce minimum.

d. Application numérique : calculer ΔV , V_0 et U pour le minimum de dispersion des vitesses avec les données suivantes : $\alpha = 10^{-4}$, $T = 10^4$ K, $m = 138$ u.m.a.

II. On s'intéresse dans cette deuxième partie à la dissociation par un faisceau lumineux d'ions moléculaires de type A_2^+ . On suppose que cette photodissociation est réalisée par un faisceau lumineux polarisé dont le champ électrique est parallèle à Ox . Dans le cas étudié, la transition responsable de cette photodissociation est une transition dite parallèle : ceci signifie que la probabilité par unité de temps de dissocier la molécule est égale à $p \cos^2 \psi$ où ψ est l'angle entre l'axe Ox et l'axe internucléaire AA^+ (cf. Figure 2). p est proportionnel à l'intensité lumineuse.

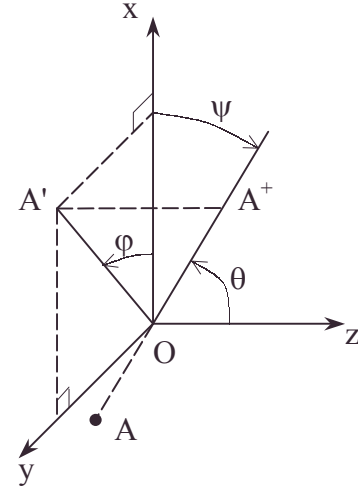


Figure 2.

On appelle θ l'angle entre l'axe Oz et AA^+ et φ l'angle entre Ox et OA' où A' est la projection de A^+ sur le plan xOy .

1. On suppose de plus qu'avant de subir la photodissociation, les molécules sont au repos, orientées de façon aléatoire, et qu'ensuite les deux fragments A^+ et A s'éloignent dans la direction AA^+ avec des vitesses respectives \vec{u} et $-\vec{u}$.

La photodissociation est observée à l'aide d'un détecteur qui compte le nombre d'ions $A^+ n(\theta, \varphi) d\Omega$ qui arrivent par unité de temps dans un angle solide $d\Omega$ autour de la direction θ, φ .

a. Calculer $n(\theta, \varphi)$. On appellera n le nombre d'ions éclairés en permanence par le faisceau lumineux.

b. Représenter la courbe $n(\theta, \varphi)$ en fonction de θ pour une valeur particulière de φ (on fera varier θ entre 0 et π).

2. En réalité, avant d'être photodissociés, les ions A_2^+ sont accélérés à la vitesse V parallèle à Oz par le dispositif décrit en I. Le processus de photodissociation décrit jusqu'ici (II.1.) correspond en fait à ce qui se passe dans le repère du centre de masse de l'ion A_2^+ . On considère négligeable dans toute la suite du II. la dispersion de vitesse ΔV des ions A_2^+ .

a. Soit \vec{V}' la vitesse de l'ion A^+ après photodissociation. Calculer V' en fonction de u , θ et V . Calculer également θ' , l'angle entre \vec{V}' et l'axe Oz .

b. En réalité $u \ll V$, exprimer V' en fonction de u , θ et V , en négligeant les termes en u^2/V^2 .

c. Montrer que le faisceau d'ions A^+ obtenu après photodissociation possède une certaine divergence $\Delta\theta'$ et une certaine dispersion de vitesse $\Delta V'$. Calculer $\Delta V'$ et $\Delta\theta'$.

d. Application numérique : calculer V , u , $\Delta\theta'$ et $\Delta V'$ pour un faisceau d'ions de molécules O_2^+ .

On donne $U = 10^4$ V, $m_{O_2^+} = 32$ u.m.a., $m_{O^+} = 16$ u.m.a. et $W = \frac{1}{2} m_{O_2^+} u^2 = 0,1$ eV.

• angle solide, développement au premier ordre ou plus, graphe, minimum, photodissociation, probabilité par unité de temps de dissocier la molécule

3. L'énergie des ions A^+ produits par photodissociation est mesurée par un analyseur en énergie.

On appelle E' l'énergie des ions A^+ formés, on pose $E = \frac{1}{2} m_{A^+} V^2$ et $W = \frac{1}{2} m_{A^+} u^2$.

On suppose que la divergence angulaire $\Delta\theta'$ du faisceau n'apporte pas de perturbation dans l'analyse en énergie des ions A^+ .

- a. Exprimer E' en fonction de E , W et θ . On négligera les termes en W/E .
- b. Calculer le nombre d'ions A^+ $n(E')dE'$ dont l'énergie est comprise entre E' et $E' + dE'$.
- c. Représenter la courbe $n(E')$ en fonction de E' .
- d. Expliquer comment l'analyse en énergie des photofragments permet à la fois de mesurer W et d'étudier leur distribution angulaire.
- e. La résolution en énergie de l'analyseur n'est pas infinie. On la définit comme étant égale à $\beta = \frac{E'}{\Delta E'}$, où $\Delta E'$ est l'incertitude sur la mesure de E' (qui est donc connu à $\pm \Delta E'$ près). Calculer la valeur minimum W_{\min} de W que l'on peut mesurer.

f. Application numérique : calculer W_{\min} en eV pour $\beta = 10^3$ et $E = 5.10^3$ eV.

III. Dans cette troisième partie, on s'intéresse à l'interaction entre un ion atomique de type M^+ , de masse m , et un faisceau laser dont la fréquence ν est supposée parfaitement définie. L'ion atomique possède un certain nombre de niveaux d'énergie possible théoriquement E_0, E_1, E_2 , etc. Dans toute la suite, on ne considérera que les niveaux E_0 et E_1 . En l'absence de toute perturbation extérieure l'ion se trouve dans l'état d'énergie le plus bas E_0 , appelé état fondamental. Lorsqu'il est éclairé par un faisceau laser, l'ion possède une certaine probabilité par unité de temps d'absorber un photon et de se retrouver dans le niveau d'énergie E_1 , appelé état excité.

Cette probabilité est maximum pour $h\nu = h\nu_0 = E_1 - E_0$ et on admettra qu'elle est

égale à : $p(\nu) = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + \Gamma^2} p_0$ où p_0 est proportionnel à l'intensité du laser.

Γ est la probabilité par unité de temps que possède l'ion dans l'état excité E_1 d'émettre un photon et de retomber dans l'état fondamental E_0 .

1. A l'instant $t = 0$, l'ion se trouve dans l'état d'énergie E_1 . Calculer la probabilité $P(t)$ qu'il s'y trouve encore au bout d'un temps t . Interpréter Γ comme étant l'inverse de la durée de vie du niveau E_1 .

2. On considère un nombre n d'ions au repos qu'on éclaire, à partir de l'instant $t = 0$, avec un faisceau laser de fréquence ν . On appelle n_1 le nombre d'ions dans l'état excité E_1 et n_0 le nombre d'ions dans l'état fondamental E_0 .

- a. Ecrire une équation différentielle reliant $\frac{dn_1(t)}{dt}$ à $n_1(t)$ et $n_0(t)$.
- b. On suppose qu'on a atteint un régime stationnaire. Calculer alors n_1 en fonction de n_0 , $p(\nu)$, et Γ . Calculer également le nombre de photons $n_p(\nu)$ émis par l'ion par unité de temps.
- c. On suppose $p(\nu) \ll \Gamma$, montrer qu'alors on a toujours $n_0 \approx n$. Tracer la courbe $n_p(\nu)$ en fonction de ν . Montrer qu'on observe un phénomène de résonance (résonance optique). Quelle est la largeur totale à mi-hauteur $\Delta\nu_0$ de la résonance ?

3. On suppose maintenant que les ions M^+ possèdent tous la même vitesse parallèle à Oz, noté v_z et que le faisceau laser de fréquence ν se propage dans le sens négatif de l'axe Oz. (Figure3).

a. Montrer que la fréquence de l'onde lumineuse dans le référentiel de l'ion est

$$\nu_{\text{ion}} = \nu \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) \text{ donné.}$$

b. Exprimer $n_p(\nu, v_z)$ en fonction de $\nu_0, p_0, \nu, v_z, \Gamma, C$ vitesse de la lumière et n , nombre d'ions éclairés en permanence par le faisceau laser.

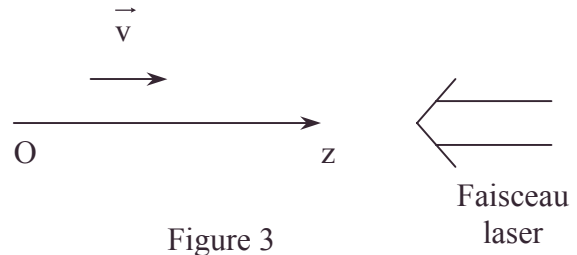


Figure 3

4. On considère dans cette question **III.4.** que les ions sont situés dans une source isotrope à la température T , du type de la chambre d'ionisation C du **I.** La distribution de vitesses des ions est donnée par la formule de Maxwell :

$$dn(v_x, v_y, v_z) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

$dn(v_x, v_y, v_z)$ est le nombre d'ions dont les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse v sont comprises entre v_x et $v_x + dv_x, v_y$ et $v_y + dv_y$ et v_z et $v_z + dv_z$. Le faisceau laser se propage toujours dans le sens négatif de l'axe Oz.

a. Calculer le nombre de photons $n_p(\nu)$ émis par les ions lorsque la fréquence du laser est ν . On exprimera $n_p(\nu)$ sous forme d'une intégrale en fonction de v_z que l'on ne calculera pas explicitement pour l'instant. On donne l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

b. On donne $\Gamma = 10^7 \text{ s}^{-1}, T = 10^4 \text{ K}$ et $m = 138 \text{ u.m.a.}, \nu_0 = 5.10^{14} \text{ Hz}$. Montrer que la fonction à intégrer pour obtenir $n_p(\nu)$ est le produit d'une fonction de v_z très étroite centrée autour d'une valeur $v_z(\nu)$ que l'on calculera, et d'une fonction qui varie beaucoup plus lentement.

c. En déduire la dépendance en ν de la courbe $n_p(\nu)$. Quelle est la largeur totale à mi-hauteur $\Delta\nu$ de la résonance en fonction de T, m et c ? Calculer $\Delta\nu$ numériquement avec les données du b.

5. Le faisceau laser éclaire maintenant le faisceau d'ions M^+ étudié en **I.** Le faisceau d'ions de divergence négligeable se propage dans le sens positif de l'axe Oz, et le faisceau laser de fréquence ν , dans le sens négatif de Oz. La distribution de vitesse des ions est caractérisée par une largeur ΔV autour d'une vitesse moyenne V (V et ΔV ont été calculés en **I.**).

a. Calculer pour quelle fréquence ν' du laser se produit la résonance optique.

b. Quelle est la largeur $\Delta\nu'$ de cette résonance lorsqu'on néglige la largeur due à Γ ?

c. Application numérique : calculer $\Delta\nu'$ lorsque $\nu_0 = 5.10^{14} \text{ Hz}, U = 10^4 \text{ V}, T = 10^4 \text{ K},$

$$\frac{\Delta U}{U} = 10^{-4}, m = 138 \text{ u.m.a.}$$

d. Quel est l'intérêt du dispositif du **I.** pour l'étude des niveaux d'énergie des ions, avec un laser ?

e. Pour observer la résonance optique dans le dispositif étudié, est-il indispensable de faire varier ν , fréquence du laser ? Que peut-on faire varier à la place ?

6. On considère maintenant un faisceau d'ions soumis à la tension $-U(z)$ représentée sur la figure 4 : à la sortie de la chambre d'ionisation les ions sont portés au potentiel $-U_1$, puis au point de coordonnée z_1 , on applique un champ électrique \vec{E} uniforme,

parallèle à Oz, qui porte le potentiel à la valeur $-U_2$ au point z_2 . Ensuite, le potentiel reste fixé à cette valeur. Le faisceau laser se propage toujours dans le sens négatif de l'axe Oz. On appelle V_1 et V_2 les vitesses moyennes des ions correspondant respectivement aux potentiels U_1 et U_2 .

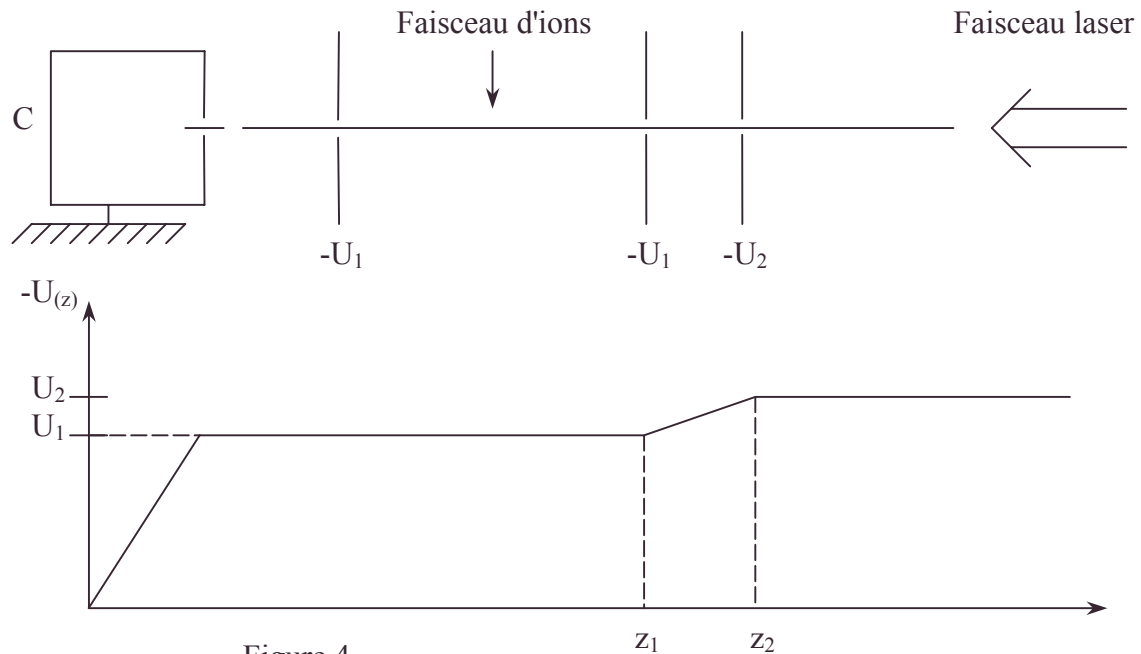


Figure 4.

a. La fréquence ν du laser est telle que la résonance optique se produit entre z_1 et z_2 . A quelles inégalités doit satisfaire ν pour qu'il en soit ainsi ?

b. On suppose que $U_2 - U_1 \ll U_1$ et qu'en conséquence, la dispersion de vitesse ΔV des ions n'est pas modifiée par la petite variation de tension $U_2 - U_1$.

La fréquence du laser est fixe et satisfait aux inégalités du a. Montrer que les ions n'absorbent de façon notable les photons $h\nu$ que sur une petite longueur Δz centrée autour d'une certaine valeur z_0 (qui dépend de V). Calculer Δz en fonction de ΔV , m , E et V vitesse des ions au point z_0 .

c. Application numérique : calculer Δz avec les données suivantes : $U_1 = 10^4 \text{ V}$; $\frac{\Delta U}{U} = 10^{-4}$; $T = 10^4 \text{ K}$ et $E = 10^3 \text{ V.m}^{-1}$. Pour ce calcul on admettra que $V \approx V_1$.

d. Les ions excités par le laser dans l'état E_1 retombent dans l'état fondamental en émettant un photon avec une probabilité $\Gamma = 5.10^6 \text{ s}^{-1}$ par unité de temps. Calculer en fonction de z le nombre $n'(z)dz$ de photons émis par les ions entre z et $z + dz$. On appellera $n_0 dz$ le nombre de photons émis entre z_0 et $z_0 + dz$. On pourra considérer que la vitesse V des ions varie peu entre z_1 et z_2 .

e. Représenter $n'(z)$ en fonction de z pour $z_1 < z < z_2$.
On donne $z_0 - z_1 = 1 \text{ cm}$ et $z_2 - z_1 = 10 \text{ cm}$.

f. En déduire une méthode simple de mesure de Γ . quelle inégalité doit-il exister entre Δz et Γ pour que cette méthode soit valable ?

ENS ; Durée : 4h

Corrigé

I.1. Ecrivons la conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 - qU$. ①

$$\text{si } v = 0 ; \frac{1}{2}mV_0^2 - qU = 0 ; V_0 = \left(\frac{2qU}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On tire de 1., en remplaçant qU : $V = (v^2 + V_0^2)^{\frac{1}{2}}$.

AN : $V_0 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$; $V = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$. Les valeurs sont quasi égales.

$$\mathbf{2.a.} \quad v_m = \frac{\int_0^\infty vN(v)dv}{\int_0^\infty N(v)dv} \quad \text{avec} \quad N_0 = \int_0^\infty N(v)dv.$$

$$v_m = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv ; \text{ sachant } \int u e^{u^2} du = \frac{1}{2} e^{u^2} + \text{cte} ;$$

$$\text{posons } u^2 = -\frac{mv^2}{2kT} ; 2u du = -\frac{m}{2kT} v dv.$$

$$\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv = \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \int_0^{-\infty} u^3 e^{u^2} du.$$

$$\text{Rappelons } \int x dy = [xy] - \int y dx \text{ avec } dy = u e^{u^2}, x = u^2, y = \frac{1}{2} e^{u^2}.$$

$$\int_0^{-\infty} u^3 e^{u^2} du = \left[\frac{1}{2} u^3 e^{u^2} \right]_0^{-\infty} - \int_0^{-\infty} u e^{u^2} du = 0 - \left[\frac{1}{2} e^{u^2} \right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}.$$

$$v_m = \left(\frac{8kT}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} ; \text{ AN : } v_m = 1,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1} ; \text{ vitesse hypersonique (dans le vide).}$$

$$\mathbf{b.} \quad N(v) = N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} > 0.$$

Points particuliers : $v = 0$; $N = 0$; $v \rightarrow +\infty$; $N \rightarrow 0$.

$$\text{Extremums déterminés par } \frac{dN}{dv} = N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(-\frac{v^3 m}{kT} + 2v \right).$$

$$\frac{dN}{dv} = 0 : \text{ pour } v = 0 \text{ et pour } v_{\max} = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ maximum puisque } N > 0.$$

$$N_{\max} = N_0 \frac{8\pi kT}{me} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} : \text{ posons } X = \frac{mv^2}{2kT} = \frac{4v^2}{\pi v_m^2}.$$

Largeur à mi-hauteur où $N = \frac{1}{2} N_{\max}$; calculons X.

X satisfait à $X = \frac{1}{2} e^{X-1}$ que l'on peut résoudre graphiquement par intersection de $y = X$

et de $y = \frac{1}{2} e^{X-1}$.

On trouve $X_1 = 0,23$, soit $v_1 = 0,42 v_m$.

$X_2 = 2,68$, soit $v_2 = 1,45 v_m$.

On en déduit $\Delta v = v_2 - v_1 = 1,03 v_m$,

c'est-à-dire v_m à 3% près.

$$3.a. \int dN = N_0 = \int_{\frac{v_m}{2}}^{\frac{3v_m}{2}} N_1 dv = N_1 v_m.$$

Dans C, chambre d'ionisation, différencions
le résultat de 1. :

$$v dv = V dV \Rightarrow dv = \frac{V dV}{\sqrt{V^2 - V_0^2}}.$$

$$dN = N_1 dv = \frac{N_0}{v_m} \frac{V dV}{\sqrt{V^2 - V_0^2}} = N(v) dV,$$

$$\Rightarrow N_v = \frac{dN}{dV} = \frac{N_0}{v_m} \frac{V}{\sqrt{V^2 - V_0^2}}.$$

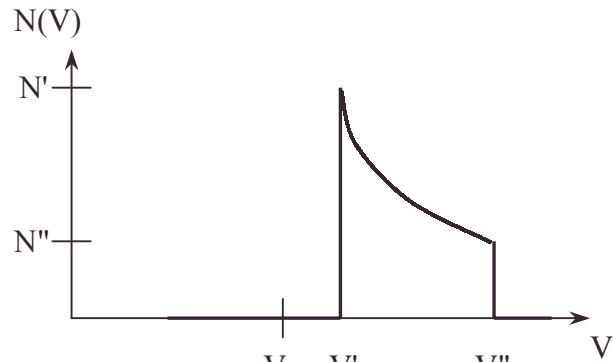
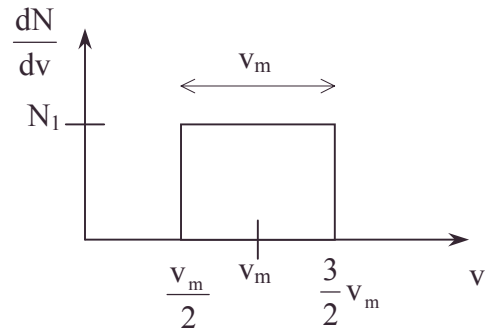
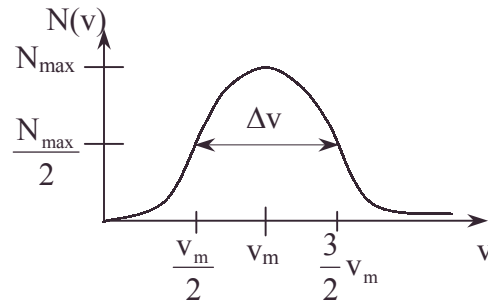
Or, $V^2 = v^2 + V_0^2$,

l'intervalle $\frac{v_m}{2} < v < \frac{3v_m}{2}$ donne :

$V' < V < V''$ avec :

$$V' = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{4} v_m^2}; \quad V'' = \sqrt{V_0^2 + \frac{9}{4} v_m^2}.$$

On vérifie $\frac{N'}{N''} = 3$ (cf. $\sqrt{9}$).



$$b. \Delta V_1 = V'' - V' = V_0 \left(1 + \frac{9v_m^2}{8V_0^2} \dots \right) - V_0 \left(1 + \frac{v_m^2}{8V_0^2} \dots \right) = \frac{v_m^2}{V_0}.$$

$\Delta V_1 \ll v_m$; l'accélération (cf. V_0) fait diminuer la dispersion des vitesses ; c'est un facteur d'ordre ; il y a regroupement dans l'espace des vitesses.

$$c. \Delta V_1 = \frac{v_m^2}{V_0} = 13 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$4. \Delta V_1 = \Delta v = 1,03 \left(\frac{8kT'}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T' = \frac{m\pi}{8k} \left(\frac{\Delta V_1}{1,03} \right)^2 ; \text{A.N. : } T' = 1 \text{ K}.$$

On voit l'effet d'ordre de V_0 . On pourrait parler de refroidissement.

$$5.a. V_0 = \left(\frac{2qU}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln V_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{2qU}{m} ; \text{différencions : } \frac{dV_0}{V_0} = \frac{1}{2} \frac{dU}{U}.$$

$$\text{avec } dU = \pm \frac{\Delta U}{2} \text{ et } dV = \pm \frac{\Delta V_0}{2}, \text{ on tire } \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta U}{U} = \frac{\alpha}{2} ; \Delta V_0 = \frac{\alpha V_0}{2}.$$

b. En supposant les variations faibles, au 1^{er} ordre, on a additivité :

• développement au premier ordre ou plus, diminution de désordre, incertitude, refroidissement d'ions,
solution graphique

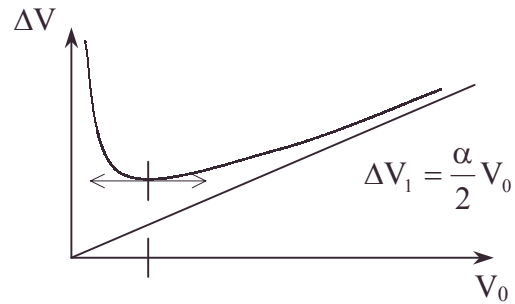
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_0 = \frac{v_m^2}{V_0} + \frac{\alpha}{2} V_0.$$

c. $V_0 \rightarrow 0$; $\Delta V_1 \rightarrow +\infty$; ;

$$V_0 \rightarrow \infty ; \frac{\Delta V_1}{\frac{\alpha}{2} V_0} \rightarrow 1.$$

on a 2 asymptotes : $V_0 = 0$;

$$\Delta V = \frac{\alpha V_0}{2}.$$



Vu le signe +, présent dans ΔV , la courbe reste au-dessus de l'asymptote oblique.
Le minimum d'une somme de termes de produit constant est obtenu pour l'égalité des termes (la dérivation confirme) : $\frac{v_m^2}{V_0} = \frac{\alpha}{2} V_0$ soit $V_{0_{\min}} = v_m \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$; $\Delta V_{\min} = v_m \sqrt{2\alpha}$.

d. AN : $\Delta V = 17 \text{ m.s}^{-1}$ (voisin de ΔV_1) ; $V_{0_{\min}} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$ (voisin de V_0)

$$U = \frac{mV_0^2}{2q} = 2,2 \cdot 10^4 \text{ V (augmentation notable par rapport à 1.)}$$

II.1. $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta (\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y)$.

a. • La probabilité \mathcal{P}' , par unité de temps de dissocier les ions moléculaires A_2^+ est $p \cos^2 \psi$ pour une direction ψ strictement donnée.

• La probabilité d \mathcal{P}' par unité de temps de dissocier les ions moléculaires A_2^+ , dont l'axe se trouve dans l'angle $d\Omega$ dans le voisinage de la direction définie par ψ , s'écrit : $d\mathcal{P}' = p \cos^2 \psi \frac{d\Omega}{4\pi}$ (règle de proportionnalité).

• Le nombre d'ions A^+ qui arrivent dans l'angle $d\Omega$ s'écrit :

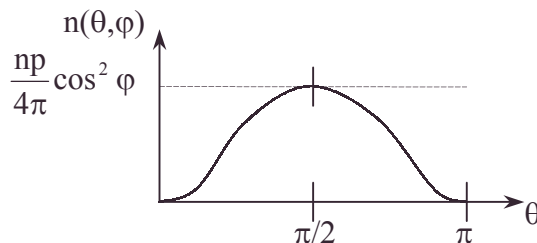
$$dN_1 = n d\mathcal{P}' = n p \cos^2 \psi \frac{d\Omega}{4\pi} = n(\theta, \varphi) d\Omega \Rightarrow n(\theta, \varphi) = p \frac{n \cos^2 \psi}{4\pi}.$$

– Substituons $\cos^2 \psi$ par son expression en θ, φ .

$$\cos \psi = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = \sin \theta \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos^2 \psi = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi.$$

– Finalement, $n(\theta, \varphi) = \frac{n}{4\pi} p \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$.

b.



2.a.α. Le centre de masse de A_2^+ a la vitesse \vec{V} . Dans le repère du centre de masse, A^+ a la vitesse relative \vec{u} ; la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{u} \Rightarrow \vec{V}' \cdot \vec{V}' = (\vec{V} + \vec{u}) \cdot (\vec{V} + \vec{u}) = V^2 + u^2 + 2Vu \cos \theta.$$

• développement au premier ordre ou plus, graphe, minimum

$$V' = (V^2 + u^2 + 2Vu \cos \theta)^{\frac{1}{2}} = V \left(1 + \frac{u^2}{V^2} + 2 \frac{u}{V} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\beta. \vec{V}' \cdot \vec{u}_z = V' \cos \theta' \Rightarrow \cos \theta' = \frac{(\vec{V} + \vec{u}) \cdot \vec{u}_z}{V'} = \frac{V + u \cos \theta}{V \left(1 + \frac{u^2}{V^2} + \frac{2u}{V} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}}$$

car $\vec{V} // Oz$ et $\vec{u} // \vec{u}_r$

$$\theta' = \arccos \left[\frac{1 + \frac{u}{V} \cos \theta}{\left(1 + \frac{u^2}{V^2} + \frac{2u}{V} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

$$b. u \ll V \Rightarrow V' = V \left(1 + \frac{u}{V} \cos \theta \right);$$

$$c. \alpha. \sin^2 \theta' = 1 - \cos^2 \theta' = \frac{V^2 \left(1 + \frac{u^2}{V^2} + 2 \frac{u}{V} \cos \theta \right) - V^2 \left(1 + \frac{2u}{V} \cos \theta + \frac{u^2}{V^2} \cos^2 \theta \right)}{V^2 \left(1 + \frac{u^2}{V^2} + \frac{2u}{V} \cos \theta \right)};$$

$$\sin^2 \theta' = \frac{\left(\frac{u^2}{V^2} \right) \sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{2u}{V} \cos \theta + \frac{u^2}{V^2} \right)} \# \frac{u^2}{V^2} \sin^2 \theta; \sin \theta' = \frac{u}{V} \sin \theta; \theta' = \frac{u}{V} \sin \theta.$$

Quand $\sin \theta$ varie entre -1 et 1 , θ' varie entre $-\frac{u}{V}$ et $\frac{u}{V}$; $\Delta \theta' = \frac{2u}{V}$.

$\beta.$ Quand $\cos \theta$ varie entre -1 et $+1$, V' varie entre $V \left(1 - \frac{u}{V} \right)$ et $V \left(1 + \frac{u}{V} \right)$;

$$\Delta V' = 2u.$$

$$d. V \# \sqrt{\frac{2qU}{m_{O_2^+}}}; \text{A.N.: } V = 2,5 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}; u = \sqrt{\frac{2W}{m_{O_2^+}}}; \text{A.N.: } u = 1,1 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1};$$

$$\Delta \theta' = \frac{2u}{V}; \text{A.N.: } \Delta \theta' = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 0,5^\circ.$$

$$\Delta V' = 2u; \text{A.N.: } \Delta V' = 2,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}.$$

3.a. Le faisceau est considéré comme parallèle, vu $u \ll V$ vu $\Delta \theta'$ négligeable.

$$E' = \frac{1}{2} m_{A^+} V'^2 = \frac{1}{2} m_{A^+} (V^2 + u^2 + 2Vu \cos \theta).$$

$$E' = E + W + 2\sqrt{WE} \cos \theta = E \left(1 + 2\sqrt{\frac{W}{E}} \cos \theta + \frac{W}{E} \right), \text{ et vu les ordres de grandeur}$$

$W \ll E$, on ne conserve que le 2^{ème} terme correctif :

$$E' = E \left(1 + 2\sqrt{\frac{W}{E}} \cos \theta \right) = E + 2\sqrt{WE} \cos \theta \text{ d'où on pourra tirer } \cos \theta = \frac{E' - E}{2\sqrt{WE}}.$$

b. $dE' = -2\sqrt{WE} \sin \theta d\theta$ à W et E donnés, évidences expérimentales.

Le bilan sur le nombre d'ions A^+ : $dN_2 = n(E')dE' = -n(E')2\sqrt{WE} \sin \theta d\theta$, comparé à celui du **II.1.**, $dN_1 = n(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$, nécessite l'intégration en φ de 0 à 2π (ou de 2π à 0).

$$dN_2 = \frac{np}{4\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{np}{4} \sin^3 \theta d\theta.$$

$$\Rightarrow n(E') = -\frac{np}{8\sqrt{WE}} \sin^2 \theta = -\frac{np}{8\sqrt{WE}} (1 - \cos^2 \theta) = -\frac{np}{8\sqrt{WE}} \left[1 - \frac{(E' - E)^2}{4WE} \right],$$

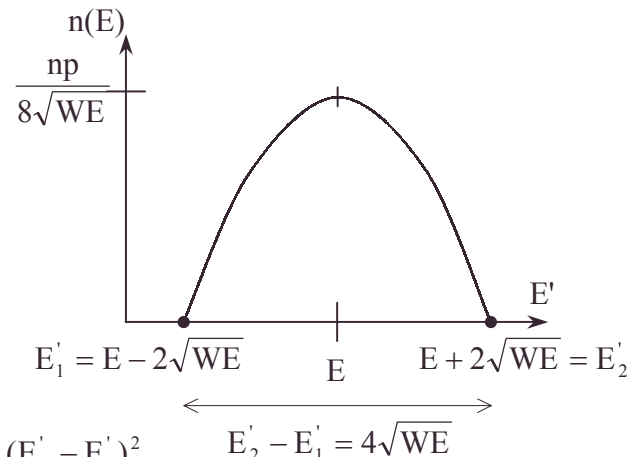
cette intégration donnant une incohérence $n(E') < 0$ nous oblige à changer les bornes d'intégration en φ ce qui ne change pas le domaine d'intégration mais permet l'obtention du signe attendu (et par là même le respect de la démarche mathématique sur les bornes d'intégrales multiples rarement explicitée en physique).

$$dN_2 = \frac{np}{4\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{2\pi}^0 \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{np}{4} \sin^3 \theta d\theta;$$

$$n(E') = \frac{np}{8\sqrt{WE}} \sin^2 \theta = \frac{np}{8\sqrt{WE}} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{np}{8\sqrt{WE}} \left(1 - \frac{(E' - E)^2}{4WE} \right)$$

c. Il s'agit d'une parabole qui coupe l'axe $n = 0$ en $E' = E \pm \sqrt{4WE}$;
 $\frac{dn(E')}{dE'} = \frac{np}{16(WE)^{\frac{3}{2}}} (E' - E)$ nous donne le maximum.

$$E' = E ; n(E') = \frac{np}{8\sqrt{WE}}.$$



d. La mesure de $E'_2 - E'_1$ donne $W = \frac{(E'_2 - E'_1)^2}{16E}$.

La distribution angulaire en θ telle que $dN_2 = n(\theta)d\theta = n(E')dE'$ avec $dE' = -2\sqrt{WE} \sin \theta d\theta$ donne :

$n(\theta) = n(E') 2\sqrt{WE} \sin \theta$, connu si E , W , $n(E')$ sont connus.

e. $d(E'_2 - E'_1) = dE'_2 - dE'_1$ puis par majoration vu $\Delta E' = \text{Sup} |dE'|$.

$$\Delta(E'_2 - E'_1) = \Delta E'_2 + \Delta E'_1 = 2\Delta E' = \frac{2E'}{\beta}.$$

On notera que la notation Δ change d'un coefficient 2 d'une question à l'autre.

La situation visualisée



donne pour la différence : $E'_2 - E'_1 - \underbrace{2\Delta E}_{\text{estimé}} \leq \underbrace{2\sqrt{WE}}_{=(E'_2 - E'_1)_{\text{vrai}}} \leq (E'_2 - E'_1) + 2\Delta E'$.

On exclut toute valeur négative \Rightarrow la solution limite la plus favorable pour ce qui nous intéresse correspond à $E'_2 - E'_1 = 2\Delta E'$, soit la plus petite valeur de $E'_2 - E'_1$ (qui vaut $4\sqrt{WE}$) ; alors, $4\sqrt{W_{\min}E} = 2\frac{E'}{\beta} \# 2\frac{E}{\beta} \Rightarrow W_{\min} = \frac{E}{4\beta^2}$.

f. $W_{\min} = 10^{-3} \text{ eV}$ ce qui est une performance.

III. Soit N_0 le nombre d'ions excités dans l'état d'énergie E_1 , à $t = 0$ et $N(t)$ le nombre de tels ions à l'instant t .

– La probabilité élémentaire de désexcitation est $dP = -\frac{dN}{N} = \Gamma dt \Rightarrow N = N_0 \exp^{-\Gamma t}$.

– La probabilité :

$$P(t) = \frac{\text{nombre de cas favorables: "exister encore à l'instant } t \text{ avec l'énergie } E_1"}{\text{nombre total des cas}} = \frac{N(t)}{A};$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{N_0}{A} \exp^{-\Gamma t}; \text{ or } P(0) = 1 \Rightarrow A = N_0 \text{ et } P(t) = \exp^{-\Gamma t}.$$

$\frac{1}{\Gamma}$ est la constante de temps du phénomène de désexcitation (cf. cinétique d'ordre 1).

2.a. Faisons le bilan à l'instant t pendant dt : ceux qui passent à l'état excité : $pn_0 dt$.
ceux qui se désexcitent : $n_1 \Gamma dt$.

$$dn_1 = pn_0 dt - n_1 \Gamma dt \Rightarrow \frac{dn_1}{dt} = n_0 p(v) - n_1 \Gamma.$$

b. Si $\frac{dn_1}{dt} = 0$, $n_1 = \frac{n_0}{\Gamma} p(v)$.

Le nombre de photons émis provient exactement des désexcitations de l'état E_1 pendant dt ; la probabilité Γdt joue sur n_1 : $n_p(v) dt = n_1 \Gamma dt$;

$$n_p(v) = n_1 \Gamma = n_0 p(v) = \frac{n_0 p_0 \Gamma^2}{16\pi^2 (v - v_0)^2 + \Gamma^2}$$

c.α. $n = n_0 + n_1 = n_0 + n_0 \frac{p(v)}{\Gamma} = n_0 \left(1 + \frac{p(v)}{\Gamma} \right) \# n_0$ si $\frac{p(v)}{\Gamma} \ll 1$.

β. α. $\Rightarrow n_p(v) = \frac{n p_0 \Gamma^2}{16\pi^2 (v - v_0)^2 + \Gamma^2} = \frac{n p_0}{1 + \frac{16\pi^2 v_0^2}{\Gamma^2} (v - v_0)^2}$.

On a une courbe analogue à une courbe de résonance centrée sur $v = v_0$ (où l'ordonnée est maximum).

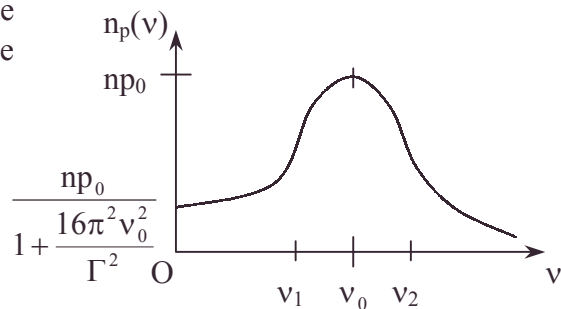
γ. A mi-hauteur,
 $\frac{16\pi^2 (v - v_0)^2}{\Gamma^2} + 1 = 2$

$$\Rightarrow (v - v_0) = \pm \frac{\Gamma}{4\pi} \Rightarrow v_2 - v_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} = \Delta v_0$$

Résultat à la simplicité forte.

3.a. Afin d'éviter le calcul relativiste de l'effet Doppler pour une onde électromagnétique, nous utiliserons l'approximation classique de l'effet Doppler

• *analogie, graphe, photons, résonance*



longitudinal : dans le repère de l'ion, la célérité du faisceau laser se propageant dans le sens négatif est $-(C + v_z)$ au lieu de $-C$ dans le repère du laboratoire (soit une célérité augmentée) ; considérons une distance L parcourue particulière supposée exister : entre deux annulations du champ \vec{E} correspondant à l'émission et à l'arrivée :

$$L = n \frac{\lambda_{\text{labo}}}{2} = n \frac{\lambda_{\text{repère ion}}}{2}.$$

Cet invariant donne $\frac{C}{v_{\text{labo}}} = \frac{C + v_z}{v_{\text{repère ion}}} \Rightarrow v_{\text{repère ion}} = v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right).$

b. Introduisons ce terme correctif dans le repère de l'ion :

$$n_p(v) = \frac{n p_0}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \left[v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) - v_0 \right]^2}. \text{ On a le maximum pour } v_z = \frac{C(v_0 - v)}{v}.$$

$$4.a. \quad dn_p = \frac{dn p_0}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \left[v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) - v_0 \right]^2} = \frac{p_0 n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \left[v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) - v_0 \right]^2}.$$

On néglige l'effet Doppler relativiste transversal qui porte sur v_x et v_y et qui est d'ordre 2 par rapport à l'effet longitudinal.

$$n_p = \int dn_p = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} p_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \left[v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) - v_0 \right]^2}.$$

$$n_p = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} p_0 \left(\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \left[v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) - v_0 \right]^2}.$$

$$n_p = n p_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_z^2}{kT}} dv_z}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \left[v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) - v_0 \right]^2}.$$

b. On rappelle les largeurs déjà calculées en les appliquant à v_z ;

– A propos de $e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_z^2}{kT}}$: on a $\Delta v_z \approx v_m$; AN : $\Delta v_z = 1,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

– A propos de $\frac{1}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} (v' - v_0)^2}$: on a : $\Delta v' = \frac{\Gamma}{2\pi}$; d'où avec : $\Delta v' = v \frac{\Delta v_z}{C}$.

$\Delta v_z = \frac{\Gamma C}{2\pi v}$; AN : $\Delta v_z = 1 \text{ m.s}^{-1} \ll v_m$. On a ainsi la fonction très étroite centrée sur

$v_z = C \frac{(v_0 - v)}{v}$; l'autre fonction $e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_z^2}{kT}}$ variant sur un intervalle plus grand d'une

valeur comparable peut être considérée constante, dans le produit des deux fonctions dans le voisinage de la zone $\Delta v_z = \frac{\Gamma C}{2\pi v}$ de son existence physique.

c.α.

$$\begin{aligned} \text{b.} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \left[v \left(1 + \frac{v_z}{C} \right) - v_0 \right]^2} &= e^{-\frac{mC^2 (v_0-v)^2}{2kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv_z}{1 + \frac{16\pi^2}{\Gamma^2} \frac{v^2}{C^2} \left[v_z - C \frac{(v_0-v)}{v} \right]^2} = \\ &= \frac{\Gamma C}{4\pi v} \left[\arctan \frac{4\pi v}{\Gamma C} \left(v_z - C \frac{(v_0-v)}{v} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mC^2 (v_0-v)^2}{2kT}} = \frac{\Gamma C}{4v} e^{-\frac{mC^2 (v_0-v)^2}{2kT}}. \\ \Rightarrow n_p(v) &= np_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma C}{4v} e^{-\frac{mC^2 (v_0-v)^2}{2kT}}. \end{aligned}$$

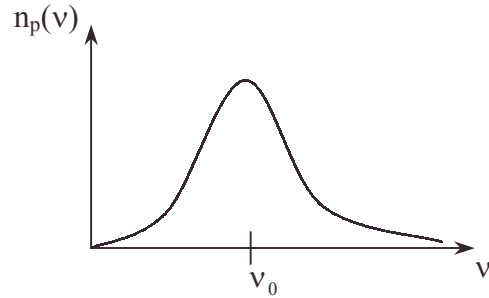
β. Vu l'information $\frac{v_0-v}{v} \ll 1$

apportée en **4.b.** avec $\frac{1}{v} \# \frac{1}{v_0}$, nous

sommes ramenés à la largeur de $e^{-\frac{1}{2} \frac{mv_z^2}{kT}}$,

soit $\Delta v_z = v_m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$; or $v_z \# C \frac{(v_0-v)}{v_0}$ ici $\Rightarrow \Delta v_z = C \frac{\Delta v}{v_0}$; on identifie Δv_z :

$$\Delta v = \frac{v_0}{C} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}; \text{ AN : } \Delta v = 2.10^9 \text{ Hz}; \text{ on vérifie } \frac{\Delta v}{v_0} = 4.10^{-6} \ll 1.$$



5.a. v' est la fréquence du laser dans le repère du laboratoire. La formule de l'effet Doppler longitudinal nous donne : $v_{\text{ion}} = v' \left(1 + \frac{V}{C} \right) \Rightarrow v' = v \left(1 - \frac{V}{C} \right) = v_0 \left(1 - \frac{V}{C} \right)$ pour la résonance.

b. En différentiant : $dv' = -v_0 \frac{dV}{C} \Rightarrow$ les largeurs $\Delta v' = \frac{v_0}{C} \Delta V$.

On rappelle **I.5.a.** : $\Delta V = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \frac{\Delta U}{2U}$; $\Delta v' = \frac{v_0}{2C} \frac{\Delta U}{U} \sqrt{\frac{2qU}{m}}$.

c. $\Delta v' = 3.10^7 \text{ Hz}$.

d. L'intérêt du dispositif **I.** est de rendre plus précise la mesure de la fréquence (de résonance en particulier) et donc la mesure de l'écart $E_1 - E_0 = hv_0$.

e. Au lieu de faire varier v (laser accordable), on fait varier dans **I.** la tension U (ce qui fait varier V) ce qui est facilement réalisable.

6.a. A U_1 correspond $v' = v_0 \left(1 - \frac{V_1}{C} \right)$; à U_2 correspond $v' = v_0 \left(1 - \frac{V_2}{C} \right)$;

entre les extrêmes : $v_0 \left(1 - \frac{V_2}{C} \right) < v' < v_0 \left(1 - \frac{V_1}{C} \right)$ or $V = \left(\frac{2qU}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$ en **I.1.**

$$\Rightarrow v_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2qU_2}{C^2 m}} \right) < v' < v_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2qU_1}{C^2 m}} \right).$$

b. Pour $z_1 < z < z_2$ existe un champ électrique uniforme E d'énergie potentielle $E_p = -qEz$. La conservation de l'énergie s'écrit entre $z = z_1$ et $z < z_2$;

$\frac{1}{2}mV_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mV^2 - qEz$, la résonance ayant lieu pour $V = C \frac{v_0 - v}{v_0}$ se produit en

$$z_0 = \frac{m}{2qE} \left(C^2 \frac{(v_0 - v)^2}{v_0^2} - V_1^2 \right).$$

La largeur en fréquence de la raie de résonance Δv se répercute par une largeur ΔV de V et donc par une largeur Δz (centrée autour de z_0 par analogie avec les autres centrages de même type).

$$z = \frac{m}{2qE} (V^2 - V_1^2) \Rightarrow \Delta z = \frac{m}{qE} V \Delta V.$$

c. Vu **5.b.** et sachant que $\frac{1}{2}mV_1^2 + qU_1 = 0$,

$$mV_1 \Delta V_1 = mV \Delta V = q \Delta U_1 = qU_1 \frac{\Delta U_1}{U_1} = qU_1 \frac{\Delta U}{U};$$

$$\Delta z = \frac{2U_1}{E} \frac{\Delta U}{U}; \quad \text{AN : } \Delta z = 2,910^{-3} \text{ m}$$

d. L'étude de la désexcitation des ions a donné :

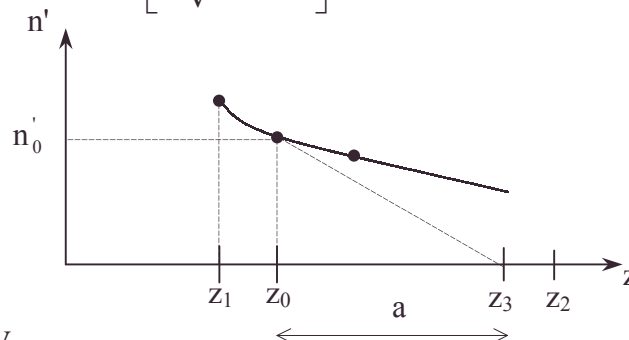
$$N = N_0 \exp(-\Gamma t) \Rightarrow dN = -N_0 \Gamma \exp(-\Gamma t) dt \quad \text{avec } dz = V dt \quad (V \text{ est constant});$$

$z - z_0 = Vt$ en choisissant bien l'origine du temps ; le nombre de photons émis en correspondance (sur dz) avec la diminution du nombre d'ions excités est donc :

$$N_0 \Gamma \exp\left[-\Gamma \frac{(z - z_0)}{V}\right] \frac{dz}{V} = n' dz;$$

$$\text{Pour } z = z_0 : n'_0 dz = \frac{-N_0 \Gamma}{V} \Rightarrow n' dz = n'_0 \exp\left[-\frac{\Gamma}{V}(z - z_0)\right] dz.$$

$$\text{e. } n'(z) = n'_0 \exp\left[-\frac{\Gamma}{V}(z - z_0)\right].$$



f. La constante d'espace $a = \frac{V}{\Gamma}$ se trouve à l'intersection de la tangente en $z = z_0$ et

en $z = \infty$. Les mesures de V (cf **I.1.**) et de a donnent $\Gamma = \frac{V}{a}$.

$a = z_3 - z_0$ est liée par $\Delta a = \Delta z_0 + \Delta z_3 \approx 2\Delta z$; le sens de la mesure de a n'existe que si $a \geq 2\Delta z$, d'où $\Gamma \leq \frac{V}{2\Delta z}$.

4.5.5. Principe du laser

Voir page 683.

• analogie, conservation de l'énergie, constante d'espace [longueur de référence], ions excités [laser et jet d'], largeur à mi-hauteur des bandes d'énergie, photon, résonance, solution graphique

4.6. Diffusion

Appartient aux programmes de BCPST2, TPC2

N'appartient pas au programme de MPSI...

4.6.1. Gravitation, membrane poreuse

I. Diffusion de molécules sous l'action d'un gradient de concentration

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ , dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique ρ_0 ($\rho_0 > \rho$).

En supposant ces macromolécules de forme sphérique, nous nous proposons de calculer leur rayon moyen R et leur masse m à partir des résultats de l'expérience suivante. La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t = 0$. A partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. Nous supposons un mouvement unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises, entre autres, à une force de type visqueux $\vec{F} = -f \cdot \vec{v}$ (f constante positive, \vec{v} vitesse des molécules).

1. Donner l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule (on considérera un axe $z'Oz$ vertical ascendant, l'origine O coïncidant avec le fond du récipient).

2. Montrer que ces particules atteignent une vitesse limite v_ℓ que l'on exprimera en fonction de m , g (intensité du champ de pesanteur), f , ρ et ρ_0 .

3. La vitesse limite étant supposée atteinte très rapidement, donner l'expression de la densité du flux d'entraînement molaire \vec{J}_E des macromolécules à la cote z où leur concentration molaire est $c(z)$, (J_E correspondant au nombre de macromolécules traversant une surface unité horizontale pendant l'unité de durée).

4. La sédimentation ayant entraîné une inhomogénéité de la solution, le phénomène de diffusion dans le sens ascendant apparaît. On admet que la densité du flux de diffusion molaire J_D des particules est donnée par la première loi de Fick : $J_D = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial z}$.

Quelles ont les dimensions de D ?

Déterminer, en régime stationnaire, la loi de variation de c avec z .

5. Des mesures optiques montrent que, à 25°C , $\frac{c(z=0)}{c(z=2\text{cm})} = 2$.

Quelle est la masse molaire des macromolécules et la valeur de leur rayon ?

Avez-vous une idée d'un principe possible pour ces mesures optiques ?

On donne : $D = \frac{kT}{f}$. La constante de Boltzmann k vaut : $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

$\frac{\rho}{\rho_0} = 0,80$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; N_A (nombre d'Avogadro) = $6,02 \cdot 10^{23}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

II. Diffusion de molécules à travers une membrane

La diffusion de molécules à travers une membrane est très utilisée dans des domaines très divers, en médecine par exemple.

On considère le dispositif représenté sur la figure 1.

Les deux compartiments, séparés par une membrane verticale poreuse, contiennent une même solution moléculaire mais à des concentrations molaires différentes c_1 et c_2 ($c_1 > c_2$). Leurs volumes constants seront notés respectivement v_1 et v_2 .

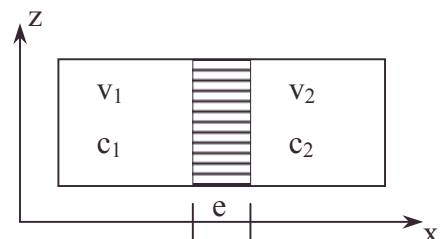


Figure 1

- analyse dimensionnelle, constante de Boltzman, diffusion, dimension, Fick, frottement visqueux, gradient, macromolécule, membrane poreuse, régime stationnaire de phénomènes de transport, unidirectionnalité

La membrane, de surface S , d'épaisseur e , comporte par unité de surface n pores cylindriques d'axe horizontal normal à la paroi.

Les pores sont supposés identiques. Dans chacun d'eux s'établit un flux macroscopique de molécules suivant $O\vec{x}$, de densité molaire J_D , tendant à égaliser les concentrations.

On admettra que $\frac{\partial J_D}{\partial z} = 0$ et que J_D est donné par la première loi de Fick, (rappelée au

paragraphe I.4. ci-dessus). A une date t les concentrations, maintenues homogènes sur les volumes v_1 et v_2 , sont donc $c_1(t)$ et $c_2(t)$. On notera $\Delta c = c_1(t) - c_2(t)$.

II.1. En admettant que dans un pore la concentration soit une fonction affine de x , montrer que la densité de flux molaire \vec{J}_M des molécules à travers toute la membrane est de la forme : $\vec{J}_M = K \cdot \Delta c \cdot \vec{i}$ (\vec{i} vecteur unitaire de $O\vec{x}$).

On donnera K , appelée perméabilité de la membrane, en fonction de n , D , e et r , rayon d'un pore.

2. Calculer r numériquement.

On donne $K = 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$ $n = 10^6$ pores par cm^2
 $e = 10 \mu\text{m}$ $D = 10^{-9} \text{ S.I.}$

3. Etablir l'équation différentielle donnant $\Delta c(t)$.

4. Intégrer cette équation. On notera $\frac{1}{\tau} = K \cdot S \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)$.

Au bout de quelle durée la différence des concentrations est-elle égale au dixième de sa valeur initiale ?

On donne $v_1 = 2\text{l}$, $v_2 = 1\text{l}$, $S = 200 \text{ cm}^2$.

Centrale ; Durée : 1h.

Corrigé

I.1. Le PFD s'écrit : $m \frac{dv_z}{dt} = -mg - f v_z + v_1 \rho g$.

La poussée d'Archimède s'écrit : $v_1 \rho_0 g = m \frac{\rho_0}{\rho} g$; $\frac{dv_z}{dt} + \frac{f}{m} v_z = -g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)$.



2. Le régime permanent existe quand $\frac{dv_z}{dt} = 0$.

Alors, $v_\ell = -\frac{mg}{f} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)$, vitesse atteinte après quelques $\tau = \frac{m}{f}$.

3. D'une manière analogue à $\vec{j}_{el} = \rho \vec{v}$ en électricité ; $\vec{J}_E = c(z) \vec{v}_\ell$.

4.a. \vec{J}_D et \vec{J}_E sont de même nature $[c][v] = [D] \left[\frac{\partial c}{\partial z} \right]$.

$[L]^{-3} [L] [T]^{-1} = [D] [L]^{-3} [L]^{-1} \Rightarrow [D] = [L]^2 [T]^{-1}$.

L'unité de D sera le $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ vu l'énoncé qui exprime J_D en fonction de c .

b. La conservation de l'espèce étudiée en régime stationnaire suppose l'égalité des flux d'effets opposés, soit algébriquement : $\vec{J}_D + \vec{J}_E = \vec{0}$ (un flux surfacique total nul).

$$D \frac{\partial c}{\partial z} + c v_\ell = 0 \Rightarrow \frac{dc}{c} = + \frac{v_\ell dz}{D} ;$$

$$\ln \frac{c}{c(0)} = - \frac{mg}{fD} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) z \Rightarrow c = c(0) \exp \left[- \frac{mg}{fD} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) z \right] .$$

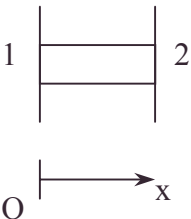
$$\mathbf{5.a.} \quad m = \frac{M}{N_A}, fD = \frac{kT}{f} : \ln \left(\frac{c(z_1)}{c(0)} \right) = - \frac{Mg}{N_A kT} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) z_1 \quad \text{avec } z_1 = 2.10^{-2} \text{ m.}$$

$$\Rightarrow M = \frac{N_A kT}{g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) z_1} \ln \frac{c(0)}{c(z_1)} ; \text{ A.N. : } M = 43,8.10^3 \text{ kg.mol}^{-1} = 4,38.10^8 \text{ g.mol}^{-1} .$$

Il s'agit de macromolécules naturelles ou artificielles.

$$\mathbf{b.} \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 = \frac{M}{N_A} \Rightarrow r = \left(\frac{3M}{4N_A \pi \rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} ; \text{ A.N. : } r = 2,4.10^{-8} \text{ m} .$$

c. On peut envisager des mesures d'indice de réfraction donnant c par étalonnage (réfractomètre, interféromètre) ou d'absorption spécifique (loi de Lambert – Beer).

II.1.  $c(x) = \frac{c_2 - c_1}{e} x + c_1$, fonction affine citée par l'énoncé .

$$J_{D_x} = -D \frac{\partial c}{\partial x} = -D \frac{(c_2 - c_1)}{e} , \text{ le phénomène n'existe que dans les pores.}$$

Pour une surface unité comportant n pores de section πr^2 ,

$$J_{mx} = n \pi r^2 J_{D_x} = Dn \frac{\pi r^2}{e} \Delta c \Rightarrow K = Dn \frac{\pi r^2}{e} .$$

$$\mathbf{2.} \quad r = \left(\frac{Ke}{\pi n D} \right)^{\frac{1}{2}} ; \text{ A.N. : } r = 5,6.10^{-7} \text{ m} .$$

3. Faisons les bilans de molécules pour les 2 compartiments contenant respectivement N_1 et N_2 molécules :

$$\frac{dN_1}{dt} = v_1 \frac{dc_1}{dt} = -J_m S = -KS \Delta c ; \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = v_2 \frac{dc_2}{dt} = +J_m S = +KS \Delta c ; \quad \textcircled{2}$$

Faisons la combinaison linéaire $v_2 \textcircled{1} - v_1 \textcircled{2}$ qui permet d'obtenir $\frac{d\Delta c}{dt}$:

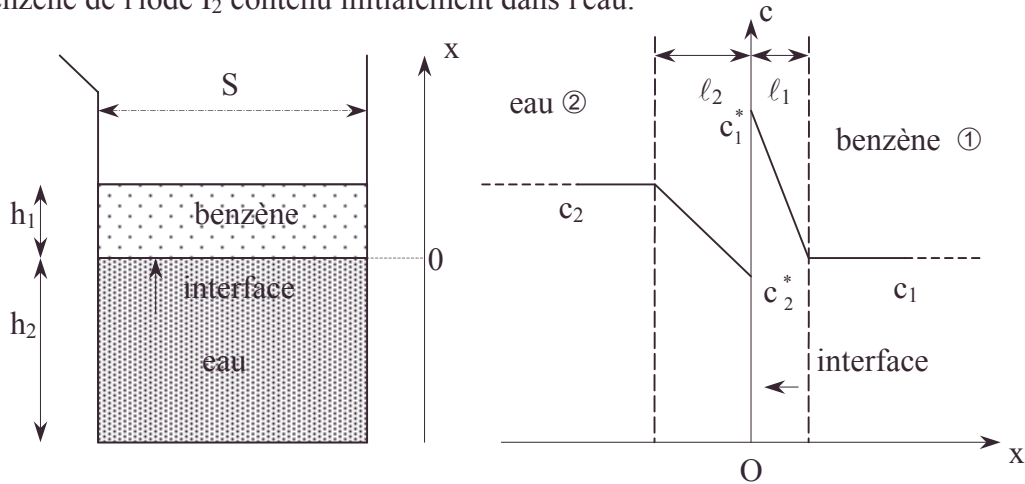
$$v_1 v_2 \frac{d\Delta c}{dt} = -KS \Delta c (v_2 + v_1) \text{ soit } \frac{d\Delta c}{dt} + \frac{\Delta c}{\tau} = 0 .$$

$$\mathbf{4.a.} \quad \Delta c = \Delta c(0) e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

$$\mathbf{b.} \quad \Delta c = \frac{\Delta c(0)}{10} \Rightarrow t_1 = \tau \ln 10 ; \text{ A.N. : } \tau = 3,3.10^4 \text{ s} . \quad t_1 = 76666 \text{ s} = 21 \text{ h } 18 \text{ min} .$$

4.6.2. Extraction d'iode par solvant Couches limites

Un b cher de section d'aire S contient de l'eau sur une hauteur h_2 et du benzène sur une hauteur h_1 et on propose un modèle simplifié pour l'étude cinétique du transfert vers le benzène de l'iode I_2 contenu initialement dans l'eau.



Profil des concentrations à un instant t

A un instant quelconque, on assimile la concentration de l'iode $c(x)$ en fonction de x au profil indiqué ci-dessus : les concentrations dans l'eau et dans le benzène sont notées respectivement c_2 et c_1 et elles sont supposées uniformes hormis dans une mince couche de diffusion appelée couche limite ; les épaisseurs de ces couches limites sont notées ℓ_2 dans l'eau et ℓ_1 dans le benzène. Dans ces couches limites, la concentration varie linéairement en fonction de x et l'on note c_1^* et c_2^* les concentrations dans le benzène et dans l'eau au niveau de l'interface à un instant quelconque t .

On suppose que la quantité d'iode dans les couches limites est négligeable devant celle contenue dans le reste du solvant et on négligera également le volume de ces couches limites devant les volumes V_2 de l'eau et V_1 du benzène.

Les coefficients de diffusion de l'iode dans l'eau et dans le benzène sont notés respectivement D_2 et D_1 .

1. On donne $c_1(t = 0) = 0$ et $c_2(t = 0) = c_0$. Donner la relation liant c_1 et c_2 à chaque instant t .

2. On suppose que la validité de la loi de Fick est valable à chaque instant t ; donner 2 expressions de la quantité d'iode dn / dt qui passe par unité de temps de l'eau vers le benzène. Justifier le profil des concentrations donné ci-dessus.

3. Dans toute la suite, afin d'alléger l'écriture, on prendra : $h_2 / h_1 = 10$, $D_1 = D_2$, $\ell_2 / \ell_1 = 10$ et on ne conservera que $D = D_1 = D_2$, $h = h_2$ et $\ell = \ell_2$ comme paramètres.

On suppose que seul le phénomène de diffusion limite la vitesse de transfert et que l'équilibre chimique est réalisé à chaque instant au niveau de l'interface :

alors $c_1^* = K \cdot c_2^*$, K est la constante de partage.

Déterminer c_1^* et c_2^* en fonction de c_2 .

4. Donner l'équation différentielle vérifiée par $c_2(t)$. Montrer qu'il apparaît une constante de temps τ que l'on donnera en fonction des paramètres.

5. Donner les expressions de c_2/c_0 et de c_1/c_0 en fonction du temps t .

6. Application numérique :

$D = 2.10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; $\ell = 2 \text{ mm}$; $K = 500$; $h = 5 \text{ cm}$.

a. Calculer τ .

b. Calculer $\frac{c_2}{c_0}(\infty)$ et $\frac{c_1}{c_0}(\infty)$. Commenter.

c. Calculer t_1 et t_2 tels que $c_2(t_1)/c_0 = 0,5$ et $c_2(t_2)/c_0 = 0,1$.

d. Calculer $\frac{c}{c_0}(t_1)$, $\frac{c}{c_0}(t_2)$, $\frac{c}{c_\infty}(\infty)$, $\frac{c_2^*}{c_0}(t_1)$, $\frac{c_2^*}{c_0}(t_2)$, $\frac{c_2^*}{c_0}(\infty)$, $\frac{c_1^*}{c_0}(t_1)$, $\frac{c_1^*}{c_0}(t_2)$, $\frac{c_1^*}{c_0}(\infty)$.

e. Donner l'allure du profil des concentrations à $t = 0$, t_1 , t_2 et $t \rightarrow \infty$.

7. On agite le bécher de sorte que le benzène soit sous forme de gouttelettes de 2 mm de diamètre dispersées dans l'eau. En supposant valables toutes les autres hypothèses et données ci-dessus, calculer la nouvelle constante de temps τ' sachant que $S = 10 \text{ cm}^2$. Calculer t'_2 tel que $c_2(t'_2)/c_0 = 0,1$.

8. Quelles sont les principales critiques à formuler sur ce modèle de transfert de matière ?

Géologie Nancy ; Option BCPST ; Durée : 2h.**Corrigé**

1. En négligeant les quantités d'iode des couches limites, écrivons la conservation de la quantité d'iode : $N_1 + N_2 = N_0$; $c_1 V_1 + c_2 V_2 = c_0 V_2$, soit $c_1 h_1 + c_2 h_2 = c_0 h_2$.

2. $J_x = -D \frac{\partial c}{\partial x}$;

a. L'interface est traversé, en provenance de 2, à travers la couche limite 2 par :

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{c_2^* - c_2}{\ell_2} ; \text{ vu la faible distance } \ell_2, \Rightarrow J_{x_2} = -D_2 \frac{c_2^* - c_2}{\ell_2}.$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -SJ_{x_2} = \frac{SD_2}{\ell_2} (c_2^* - c_2) = -\frac{dn}{dt}.$$

b. Vu la non accumulation dans les couches limites, on retrouve ce flux à travers la couche limite 1 : $\frac{dn}{dt} = \frac{dN_1}{dt} = SJ_{x_1} = -SD_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} = -SD_1 \frac{(c_1 - c_1^*)}{\ell_1}$ vu la faible distance ℓ_1 .

c. Assimiler $\frac{\partial c}{\partial x}$ à $\frac{\Delta c}{\Delta x}$ revient à faire une interpolation linéaire entre les 2 valeurs de c considérées : on peut le voir dans le graphe retenu pour les couches limites.

3.a. $\frac{SD}{\ell_2} (c_2^* - c_2) = \frac{SD}{\ell_1} (c_1 - c_1^*) = -\frac{dn}{dt}$;

On a donc : $c_2^* - c_2 = (c_1 - c_1^*) \frac{\ell_2}{\ell_1} = 10(c_1 - c_1^*)$.

b. 1. $\Rightarrow c_1 + 10c_2 = 10c_0$.

c. $I_{2(\text{eau})} \rightleftharpoons I_{2(\text{benzène})} \Rightarrow K = \frac{c_1^*}{c_2}$; à l'interface, seul lieu de coexistence des 2 formes

solvatées.

d.α. Eliminons c_1 grâce à b. : $c_1 = 10(c_0 - c_2)$.

a. s'écrit $c_2^* - c_2 = 10(10(c_0 - c_2) - c_1^*)$.

• constante de temps, couche limite, graphe, interface de diffusion entre deux milieux [avec équilibre chimique réalisé à chaque instant au niveau de l'], interpolation linéaire

Éliminons c_1^* car $c_1^* = Kc_2^*$; **a.** s'écrit : $c_2^* - c_2 = 100(c_0 - c_2) - 10Kc_2^*$.

$$c_2^* (1 + 10K) = 100c_0 - 99c_2 \Rightarrow c_2^* = \frac{100c_0 - 99c_2}{1 + 10K}.$$

$$\text{b. } c_1^* = Kc_2^* = K \frac{(100c_0 - 99c_2)}{1 + 10K}.$$

$$4. (2.a.) \Rightarrow V_2 \frac{dc_2}{dt} = \frac{SD}{\ell_2} (c_2^* - c_2) = \frac{SD}{\ell} \frac{(100c_0 - c_2(100 + 10K))}{1 + 10K} ;$$

$$\text{or, } V_2 = hS \Rightarrow \frac{dc_2}{dt} + \frac{Dc_2}{\ell h} \frac{100 + 10K}{1 + 10K} = 100 \frac{Dc_0}{\ell h(1 + 10K)}.$$

$$\text{Il apparaît la constante de temps } \tau = \frac{\ell h}{D} \frac{1 + 10K}{(100 + 10K)}.$$

5.a. On vérifie que $c_2(t) = \frac{c_0}{10 + K} (10 + K e^{-\frac{t}{\tau}})$, vu la forme de la solution de l'équation sans second membre, de la solution particulière de l'équation avec second membre et de

$$\text{la condition initiale } c_2 = c_0 ; \text{ finalement : } \frac{c_2}{c_0} = \frac{10 + K e^{-\frac{t}{\tau}}}{10 + K}.$$

$$\text{b. 2.b. } \Rightarrow c_1 = 10(c_0 - c_2) = \frac{10c_0K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{10 + K} \Rightarrow \frac{c_1}{c_0} = \frac{10K}{10 + K} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

$$6.a. \tau = \frac{h\ell}{D} \frac{1 + 10K}{10(10 + K)} ; \text{ AN. : } \tau = 50090 \text{ s. La diffusion fait attendre.}$$

$$\text{b. } \frac{c_2(\infty)}{c_0} = \frac{10}{10 + K} = 2.10^{-2} ; \frac{c_1(\infty)}{c_0} = \frac{10K}{10 + K} = 9,80 ; \frac{c_2^*(\infty)}{c_0} = 2.10^{-2}.$$

L'iode est passée de l'eau dans le benzène.

$$\text{c. } \frac{c_1(\infty)}{c_2(\infty)} = K ; \text{ cf. } \frac{c_1^*}{c_2^*} = K \text{ à l'interface.}$$

α. Durée de demi-diffusion

$$t_1 \text{ tel que } \frac{1}{2}(10 + K) = 10 + K e^{-\frac{t_1}{\tau}} \Rightarrow \frac{t_1}{\tau} = -\ln\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{K}\right) ; \frac{c_2^*}{c_0}(t_1) = 10^{-2}.$$

$$t_1 = \tau \ln \frac{2K}{K - 10} ; \text{ A.N. : } t_1 = 34975 \text{ s.}$$

$$\text{b. } t_2 \text{ tel que } \frac{1}{10}(10 + K) = 10K \left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}}\right) \Rightarrow t_2 = \tau \ln \frac{10K}{K - 90} ;$$

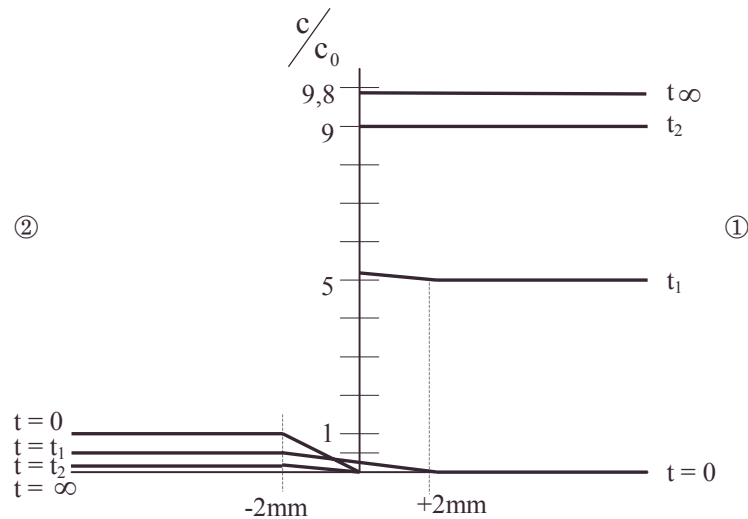
$$\text{A.N. : } t_2 = 122623 \text{ s. ; } \frac{c_2^*}{c_0}(t_2) \approx 2.10^{-2}.$$

$$d. \frac{c_1}{c_0} = 10 \left(1 - \frac{c_2}{c_0} \right) ; \frac{c_1^*}{c_0} = K \frac{c_2^*}{c_0}.$$

t	0	t ₁	t ₂	∞
$\frac{c_1}{c_0}$	0	5,0	9,0	9,8
$\frac{c_2^*}{c_0}$	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
$\frac{c_1^*}{c_0}$	10^{-2}	5,05	9,0	9,8

Assimilé à zéro pour simplifier

e.



7.a. La dispersion du benzène en gouttelettes augmente la surface S' de contact eau-benzène ; écrivons la conservation du volume de benzène $h_1 S = N \frac{4}{3} \pi \frac{\phi^3}{8}$, N étant le nombre de gouttelettes, ϕ le diamètre.

$$S' = N 4\pi \frac{\phi^2}{4} \Rightarrow S' = \frac{6 S h_1}{\phi}.$$

Vu 4. $V_2 \frac{dc_2}{dt} = \frac{S'D}{\ell^2} (c_2^* - c_2)$, les autres relations restant identiques.

$$\frac{dc_2}{dt} + \frac{DS'}{\ell h_2 S} c_2 \frac{100 + 10K}{1 + 10K} = \frac{100 DS' c_0}{\ell S h_2 (1 + 10K)}.$$

$$\tau' = \frac{S}{S'} \tau = \frac{\phi}{6 h_1} \tau ; \text{A.N.: } \tau' = 3270 \text{ s. On a un phénomène plus rapide en agitant ainsi.}$$

b. Tout se passe comme si D était remplacée par $\frac{DS'}{S} = \frac{6 h_1 D}{\phi}$ mais D n'intervenant

pas dans la solution particulière de l'équation sans second membre ; seulement la constante de temps est modifiée.

$$t'_2 = \tau' \ln \frac{10K}{K - 90} ; \text{A.N.: } t'_2 = 8175 \text{ s.}$$

8.a. La pesanteur qui intervient dans la migration des particules a été négligée ; elle intervient aussi pour exprimer la poussée d'Archimède.

• Archimède [théorème d'], constante de temps, graphe, poussée d'Archimède, tableau numérique

- b. ℓ_1, ℓ_2 étaient négligeables devant les autres dimensions de l'interface ; cela est contestable dans le cas d'une gouttelette de faible dimension.
- c. Les forces de tension superficielle associées aux gouttelettes ont été oubliées.
- d. Le traitement unidimensionnel en coordonnées cartésiennes n'a plus sa raison d'être.

4.6.3. Diffusion et indice de réfraction

Fonction erf

I. Equation de diffusion.

On considère des particules diffusant dans un liquide selon un processus isotherme et à une dimension Oz ; à l'instant t et au point de coordonnées z, le flux dN de particules traversant par unité de temps l'élément de surface dS perpendiculaire au mouvement général est lié à la concentration locale (nombre de particules par unité de volume) c(z,t) au même instant par la loi de Fick :

$$(1) \quad dN = \vec{J}(z,t) \cdot d\vec{S} = -D \frac{\partial c}{\partial z}(z,t) dS$$

La relation (1) définit la densité du courant et le coefficient de diffusion des particules dans le liquide considéré.

1. Donner la dimension de J(z,t) ; établir l'équation régissant la diffusion de la concentration des particules. Montrer qu'elle décrit effectivement un processus irréversible.

2. Avec les nouvelles variables $z' = \alpha z$ et $t' = \beta t$, la fonction c(z,t) devient $c'(z',t')$. Montrer qu'il est toujours possible de trouver α et β de telle manière que c(z,t) et $c'(z',t')$ satisfassent à la même équation différentielle. Justifier que l'équation de diffusion a des solutions qui ne dépendent que de $u = z/(2Dt)^{\frac{1}{2}}$.

La diffusion unidimensionnelle en question a lieu dans une cuve parallélépipédique de grande dimension verticale (qui constitue l'axe Oz, orienté positivement vers le haut, des questions précédentes) et de longueur a mesurée selon une direction Ox perpendiculaire à Oz. Les conditions aux limites sont les suivantes :

A l'instant initial (t = 0), les concentrations sont homogènes, mais différentes de part et d'autre du plan "origine" z = 0. Aux instants ultérieurs, et très loin du plan z = 0, les concentrations ont, de part et d'autre, les valeurs qu'elles avaient avant le début du processus.

Mathématiquement :

$$(2) \quad \begin{cases} (a) & t = 0 : & \begin{cases} c(z,0) = c_1 & \text{pour } z < 0 ; \\ c(z,0) = c_2 & \text{pour } z > 0 ; \end{cases} \\ (b) & t > 0 : & \begin{cases} c(-\infty, t) = c_1 ; \\ c(+\infty, t) = c_2 ; \end{cases} \end{cases}$$

On suppose que c_1 est supérieur à c_2 et on néglige les effets de la pesanteur.

3. Traduire l'ensemble des conditions aux limites en termes de la seule variable u de la question I.2. Supposant que la concentration ne dépende que de u, intégrer complètement l'équation différentielle de la question I.1., en introduisant la fonction, dite d'erreur, erf(u) .

• coefficient de diffusion, conditions initiales, diffusion, Fick, irréversibilité, tension superficielle, unidimensionnalité

$$(3) \quad \text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u (\exp - y^2) dy. \quad \text{Cette fonction vérifie } \text{erf}(\pm\infty) = \pm 1.$$

4. Exprimer également $\frac{\partial c}{\partial z}(z, t)$ en fonction de z, t, c_1, c_2 et D .

Tracer l'allure de la courbe $c(z, t)$ à deux instants différents t_1 et t_2 .

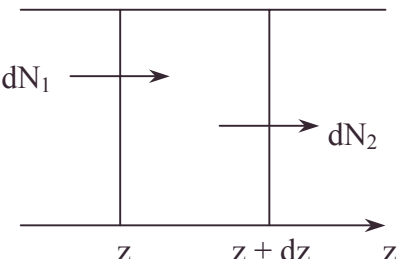
5. On suppose que l'indice de réfraction n du milieu est une fonction affine de la concentration de l'espèce solutée: $n(z, t) = n_0 + \eta c(z, t)$ avec $\eta > 0$; exprimer dans ces conditions le gradient d'indice en fonction de $n_1 = n(c = c_1)$, $n_2 = n(c = c_2)$, D, z et t ; représenter l'allure de cette fonction à deux instants différents t_1 et t_2 .

Mines ; Durée : 2h

Corrigé

I.1.a. Unité de $J : m^{-2}.s^{-1}$ car le flux défini est par unité de temps.

b.



dN , l'augmentation du nombre de particules présentes dans le volume Sdz provient de l'écart entre dN_1 et dN_2 .

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_1}{dt} - \frac{dN_2}{dt} = -DS \frac{\partial c}{\partial z}(z, t) + DS \frac{\partial c}{\partial z}(z + dz, t)$$

$$\frac{dN}{dt} = DS \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} dz. \text{ Or } \frac{dN}{dt} = \frac{d(Sdzc)}{dt} \text{ (à } z \text{ et } dz \text{ fixés).}$$

$$Sdz \frac{\partial c}{\partial t} = +DS \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} dz \Rightarrow D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

On a une analogie entre la diffusion et la conduction thermique, c jouant le rôle de T ; ainsi comme on a vu qu'une différence de température entraînait par conduction un flux de chaleur, on déduit par analogie qu'une différence de concentration entraînera par diffusion un flux de particules. Et que, par analogie on a un processus irréversible.

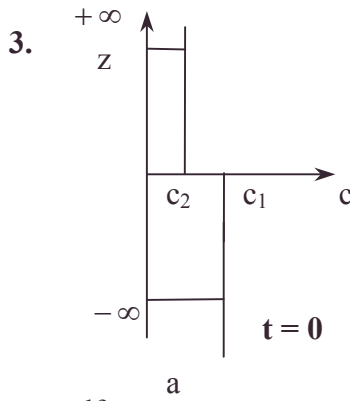
2. On a $\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c'}{\partial z'} \frac{dz'}{dz} + \frac{\partial c'}{\partial t'} \frac{dt'}{dz} = \alpha \frac{\partial c'}{\partial z'}, \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \frac{dz'}{dz}$;

soit $\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 c'}{\partial z'^2}$; de même $\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c'}{\partial t'} \frac{dt'}{dt} + \frac{\partial c'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} = \beta \frac{\partial c'}{\partial t'}$;

Comparons $D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial c}{\partial t}$ et $D \frac{\partial^2 c'}{\partial z'^2} = \frac{\partial c'}{\partial t'}$. On trouve $\beta = \alpha^2 \quad \forall \alpha, \Leftrightarrow \frac{z'^2}{t'} = \frac{z^2}{t}$

$\forall g$, fonction arbitrairement choisie $g\left(\frac{z'^2}{t'}\right) = g\left(\frac{z^2}{t}\right)$, en particulier la solution de l'équation de diffusion c .

c est fonction de $u = \frac{z}{\sqrt{2Dt}} = \frac{1}{\sqrt{2D}} \left(\frac{z^2}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$.



a. Utilisation de la variable u : soit $c(z,t) = f(u)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-z}{2\sqrt{2Dt}^{\frac{3}{2}}} \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}} \frac{df}{du} \text{ et } \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 f}{du^2},$$

$$\text{d'où } D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial c}{\partial t} \text{ s'écrit } \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} = 0 ;$$

Soit $\frac{df}{du} = K_1 e^{-u^2}$ et $f(u) = K_1 \int_0^u e^{-y^2} dy + \text{cste}$; soit $f(u) = A \operatorname{erf}(u) + B$

b. Les conditions aux limites imposent: $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = c_2 = A + B$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = c_1 = -A + B$

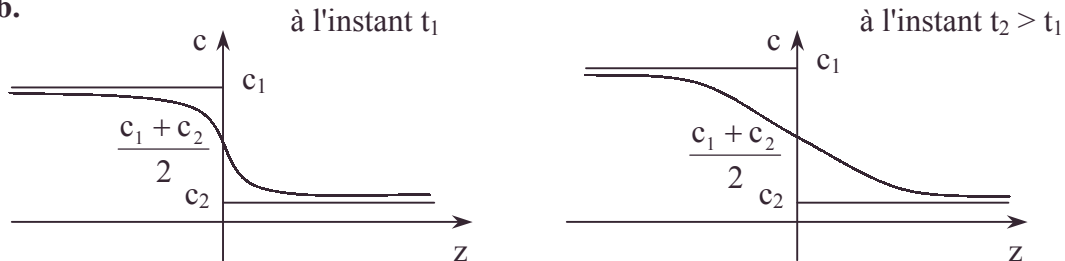
ainsi, $f(u) = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) \operatorname{erf}(u) + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$;

$$c(z,t) = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{(2Dt)^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{1}{2}(c_1 + c_2).$$

Remarque : $c(0,t) = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ pour tout $t > 0$ car $\operatorname{erf}(0) = 0$.

4.a. $\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \frac{df}{du} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \frac{1}{2}(c_2 - c_1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} = \frac{(c_2 - c_1)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} < 0.$

b.



On peut placer quelques points par calcul numérique. On voit la tendance à l'homogénéisation. On remarque le changement de concavité en $z = 0$.

5. La mesure de n permet la mesure de c .

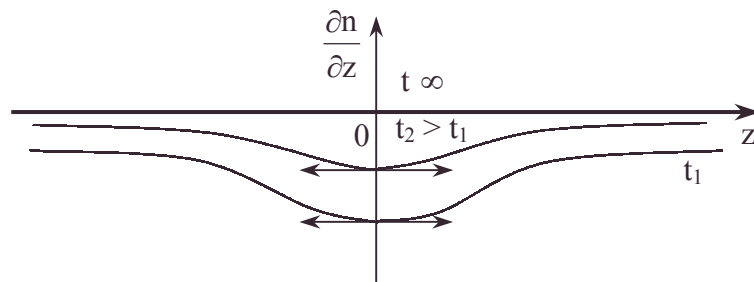
$$n = n_o + \eta c \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial z} = \eta \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\eta(c_2 - c_1)}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}, \text{ fonction paire en } z \text{ à } t \text{ donné.}$$

$$\text{or } \left. \begin{array}{l} n_1 = n_o + \eta c_1 \\ n_2 = n_o + \eta c_2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{n_1 - n_2}{c_1 - c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}.$$

On a : $n_2 - n_1 < 0$ vu 4.a.



4.6.4. Ultracentrifugation

Présentation

Objet du problème

On appelle ultracentrifugation la centrifugation effectuée au moyen d'appareils tournant à vitesse très élevée, par exemple supérieure à 20000 tours par minute. Inventée et mise au point principalement par Svedberg (Prix Nobel de chimie 1926) au début des années 20, cette technique s'est progressivement répandue dans la plupart de laboratoires de biologie moléculaire. C'est une des principales méthodes pour la séparation des macromolécules biologiques (protéines, acides nucléiques) et la mesure des masses moléculaires. Ce problème propose une approche des principes fondamentaux de cette technique expérimentale.

Description

Une ultracentrifugeuse est schématisée sur la figure 1. Le rotor, partie mobile, est percé de cavités cylindriques en nombre pair, régulièrement disposées autour de l'axe du rotor. Chaque cavité peut recevoir une cellule constituée d'un cylindre de métal lui-même percé d'une cavité en forme de secteur.

Première partie : ultracentrifugation dynamique (sédimentation)

I. Définition du coefficient de sédimentation s

1. Pourquoi les cavités cylindriques sont-elle identiques, disposées régulièrement et en nombre pair ?

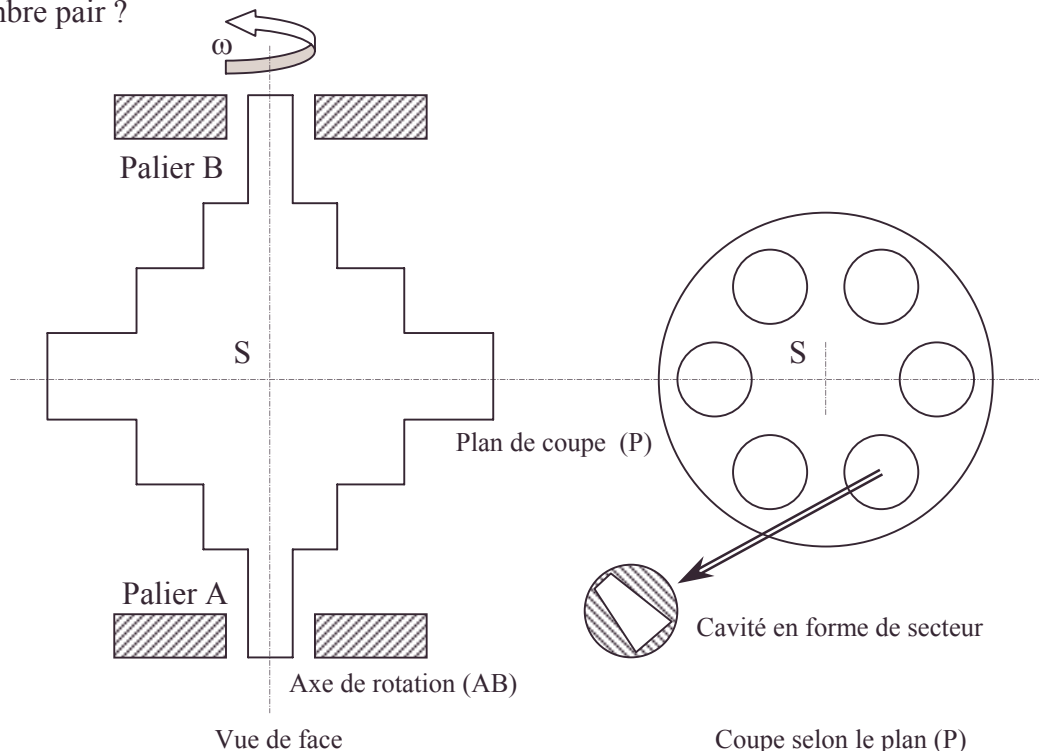


Figure 1 : Schéma de principe du rotor d'une ultracentrifugeuse

On place dans les cellules du rotor une solution composée d'un solvant de masse volumique ρ_0 et de particules microscopiques identiques (constituant le soluté). La masse de ces particules est notée m et leur volume massique v_1 . On note r la distance entre l'axe du rotor et une particule représentative du soluté. Le rotor est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire constante ω . On admet que les particules de soluté ont un mouvement radial par rapport à la cellule et que, lorsqu'une particule est animée d'une vitesse \vec{v} par rapport au solvant, elle subit de la part de ce dernier une

- acides nucléiques [ultracentrifugation], biologie moléculaire [diffusion], macromolécules, particules de soluté, protéines [diffusion], Svedberg [ultracentrifugation], ultracentrifugation, volume massique [inverse de la masse volumique]

force de frottement $\vec{F} = -f\vec{v}$, où f est un coefficient de friction caractéristique du solvant et de la forme de la particule.

2. Calculer l'accélération subie par un élément de solvant situé à la distance $r = 5 \text{ cm}$ de l'axe du rotor pour une vitesse angulaire de rotation $\omega = 50000$ tours par minute ; justifier l'hypothèse de mouvement radial faite pour les particules de soluté.

3. Ecrire l'équilibre relatif du solvant dans la cellule ; rappeler le nom des trois forces s'exerçant, dans le référentiel tournant, sur une particule de soluté.

4. Montrer que les particules de soluté acquièrent pratiquement une vitesse limite, qui peut se mettre sous la forme $v_{\text{lim}} = s\omega^2 r$, avec $s = \frac{m(1 - \rho_0 v_1)}{f}$.

On peut aussi affecter aux particules de soluté la "masse apparente" $m^* = m(1 - \rho_0 v_1)$.

5. Montrer que le coefficient s a effectivement, la dimension d'un temps. L'unité adoptée pour s est le Svedberg, notée S : $1S = 10^{-13} \text{ s}$. Justifier ce choix d'unité.

6. Exprimer la constante de temps qui donne l'ordre de grandeur au bout duquel la vitesse limite est atteinte.

II. Equation de sédimentation (O. Lamm, 1929)

On note D le coefficient de diffusion de matière de la solution. La concentration de la solution ne dépend que de la distance r à l'axe de rotation et du temps.

7. Montrer que le flux de matière à travers une section droite unitaire de la cellule se décompose en deux parties, l'une convective (courant de matière $\vec{j}_c = v_{\text{lim}} \vec{c}r$ dû aux forces volumiques, l'autre diffusive relevant de la loi de Fick) : $\vec{j}_D = -D \vec{\text{grad}} c$.

8. En déduire l'équation d'évolution de la concentration $c(r, t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div} [s\omega^2 \vec{r} - D \vec{\text{grad}}(c)] \text{ équation de sédimentation.}$$

9. Sachant qu'en coordonnées cylindriques la divergence d'un champ radial de vecteurs $\vec{A} = A_r \vec{r}$ s'écrit $\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r)$, donner l'expression scalaire de l'équation d'évolution de $c(r, t)$.

II. Solution de l'équation de sédimentation en l'absence de diffusion

On note r_m la distance minimale du secteur de la cellule à l'axe du rotor et r_M la distance

maximale ; on définit $r_f = r_m \exp\left(\frac{t}{2\tau}\right)$ où τ

reste provisoirement à caractériser.

On néglige l'accumulation de matière (précipité sur le bord extérieur de la cellule, c'est-à-dire au voisinage de $r = r_M$).

On néglige enfin la diffusion, ce qui revient à considérer que D est nul. Une solution de concentration uniforme c_0 est placée dans une cellule d'un rotor tournant à la vitesse ω .

10. Montrer que l'expression suivante constitue une solution de l'équation de

$$c(r, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } r_m < r < r_f \\ c \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \text{si } r_f < r < r_M \end{cases}$$

On ne se préoccupera pas de $r = r_f$.

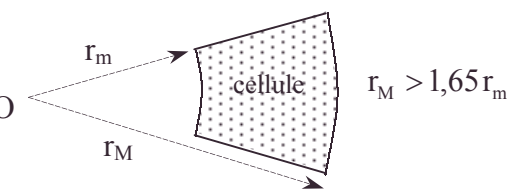


Figure 2

• coefficient de diffusion, courant de matière en ultracentrifugation, diffusion, dimension, divergence en coordonnées cylindriques, équation de sédimentation [due à la diffusion], Fick [équation de], masse apparente, maximum, ordre de grandeur, particules de soluté, Svedberg, unité

Exprimer dans ces conditions le temps caractéristique τ en fonction de s et de ω .

11. Considérations pratiques : $\omega = 50000$ tours par minute et $s = 10$ S.

Calculer la valeur numérique de τ . Représenter graphiquement sur une même figure la concentration c en fonction de r à $t = 0$ et $t = \tau$. Discuter la pertinence des approximations.

12. La cellule contenant la solution est munie d'un hublot transparent de verre épais. Par quel genre de dispositif optique peut-on observer la zone de transition autour de $r = r_f$?

IV. Relation d'Einstein (1905)

On s'intéresse maintenant au régime stationnaire de l'équation de sédimentation correspondant à la limite $t \rightarrow \infty$. La concentration ne dépend plus que de r . On admet que le courant total de particules (courant convectif + courant diffusif) est nul en r_m et en r_M .

13. Pourquoi la diffusion ne peut-elle plus être négligée ?

14. Montrer que $c(r) = c(r_m) \exp \left[\frac{s \omega'^2}{2D} (r^2 - r_m^2) \right]$.

15. En convenant que l'énergie potentielle centrifuge est nulle pour $r = r_m$, et en appliquant la formule de Boltzmann aux particules de soluté, établir une autre expression pour $c(r)$.

Expliquer au passage pourquoi l'énergie cinétique n'intervient pas ici.

16. Quelle relation très simple obtient-on alors entre D et f ? (C'est la relation d'Einstein, qui établit un lien remarquable entre friction et diffusion).

Seconde partie : ultracentrifugation d'équilibre

On prépare une solution concentrée de chlorure de césium (CsCl) qu'on ultracentrifuge à 50000 tours par minute. On admet que la solution reste électriquement neutre localement en tout point de la cellule d'ultracentrifugation et on fait l'hypothèse simplificatrice que les ions C_s^+ et C_s^- restent toujours par paires, qu'on note (CsCl). La masse molaire des (CsCl) est $M_{CsCl} = 168,5 \text{ g.mol}^{-1}$.

1. On suppose d'abord qu'il n'y a pas d'autre soluté dissous que le chlorure de césium.

17. Calculer le volume massique v_{CsCl} des paires (CsCl) sachant que la solution titre $6,5 \text{ mole.l}^{-1}$ et que sa densité (par rapport à l'eau) vaut 1,70.

18. Lorsque la solution de CsCl a atteint l'équilibre de sédimentation, le profil de concentration c_{CsCl} des paires (CsCl) est de la forme $c_{CsCl} = E \exp \frac{\omega^2 s r^2}{2D}$. Trouver E en considérant s constant. En déduire le volume massique $v(r)$ de la solution de chlorure de césium en fonction de r .

2. On ajoute à la solution de chlorure de césium ainsi préparée une petite quantité de soluté (macromolécules) à analyser.

19. Montrer que si le volume massique v_{Macro} donné des macromolécules de soluté est compris entre $v(r_m)$ et $v(r_M)$ les macromolécules vont se concentrer dans une région de la cellule d'ultracentrifugation autour d'une valeur r_0 que l'on caractérisera, sans chercher à l'explicitier. On note m_{macro} la masse de ces macromolécules.

• Boltzmann [formule de], cellule d'ultracentrifugation, développement au premier ordre ou plus, diffusion, distribution gaussienne, équation de sédimentation [due à la diffusion], équilibre, équilibre de sédimentation [diffusion], macromolécule, paires de chlorure de césium, particules de soluté, régime stationnaire de phénomènes de transport, soluté, ultracentrifugation, volume massique [inverse de la masse volumique], zone de transition

20. En effectuant un développement limité du volume massique $v_1(r)$ autour de r_0 et en écrivant l'équilibre de sédimentation des macromolécules, montrer que la concentration en macromolécules $c_{\text{macro}}(r)$ suit une loi de distribution gaussienne autour de r_0 :

$$c_{\text{macro}}(r) = c_{\text{macro}}(r_0) \exp - \frac{(r - r_0)^2}{2\sigma^2}.$$

Donner une expression de la largeur σ en fonction de M_{macro} , ω^2 , T , r_0 , v_{macro} , la température T et la dérivée en r du volume massique de la solution de chlorure de césium à la distance r_0 .

21. Pour des macromolécules de même volume massique mais de masses molaires différentes (substituant isotopiques par exemple), donner la condition permettant de séparer ces macromolécules par ultracentrifugation. Donner aussi la condition permettant de séparer des macromolécules isomères de masse molaire égale mais de volumes massiques différents.

Mines ; Durée : 1h30.

Corrigé

1. L'équilibrage statique et dynamique indispensable à haute vitesse est plus évident à réaliser avec une parfaite symétrie d'où la nécessité de la régularité et de la parité.

2. $a = \omega^2 r$; A.N. : $a = 1,37 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-2}$ seule valeur à conserver (cf. $g = 10 \text{ ms}^{-2}$).

Seul le mouvement radial est à étudier.

$$3. \quad 0 = -f v + m \omega^2 r - m v_1 \rho_0 v_1.$$

Force de frottement visqueux ; force centrifuge d'inertie ; poussée d'Archimède.

$$4. \quad v_{\text{lim}} = \frac{m \omega^2 r}{f} (1 - v_1 \rho_0) \text{ de la forme } s \omega^2 r \text{ avec } s = \frac{m}{f} (1 - \rho_0 v_1).$$

La limite est atteinte d'autant plus rapidement que ω et f sont élevés.

5. $s = \frac{v_{\text{lim}}}{a}$ s'exprime en s ; $1\text{s} = 10^{-13}\text{s}$ est adapté aux vitesses faibles (c.à.d. aux

constantes de temps $\frac{m}{f}$ faible cf. 4.).

6. $m \frac{dv_r}{dt} + f v_r = m \omega^2 r (1 - v_1 \rho_0)$ met en jeu pour le régime transitoire la constante de temps $\tau_1 = \frac{m}{f}$.

7. Le flux de matière ϕ_m (en mol.s^{-1}) = $\iint_S \vec{j} d\vec{S}$; $\vec{j} = \vec{j}_c + \vec{j}_D = c v_{\text{lim}} \vec{r} - D \frac{\partial c}{\partial r} \vec{r}$ vu les deux effets à prendre en compte.

8. La conservation de la matière s'écrit : $\frac{dm}{dt} = -\phi_m$ (en mol.s^{-1}), soit localement :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div } \vec{j} = -\text{div} (c s \omega^2 \vec{r} - D \overrightarrow{\text{grad } c}).$$

$$9. \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(c s \omega^2 r^2 - D r \frac{\partial c}{\partial r} \right); \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -2 c s \omega^2 + \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right).$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -2 s \omega^2 + D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{D}{r} \frac{\partial c}{\partial r}.$$

• Archimède [théorème d'], constante de temps, macromolécule, ordre de grandeur, poussée d'Archimède, substituant isotopiques [ultracentrifugation], ultracentrifugation, volume massique [inverse de la masse volumique]

10. $D = 0$; $\frac{\partial c}{\partial t} + 2s\omega^2 c = 0$. La solution $c = c_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{1}{2s\omega^2}$ convient.

Le flux de matière sur la frontière s'écrit au cours du temps :

$$\phi_m(r_m) = c(r_m)s\omega^2 r_m \alpha h r_m = c(r_f + 0)s\omega^2 \alpha h r_f^2, \alpha \text{ angle au centre du secteur.}$$

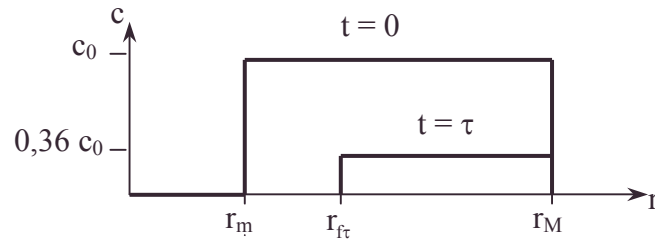
Condition vérifiée avec $r_f = r_m \exp \frac{t}{2\tau}$ et $c = c(r_m) e^{-\frac{t}{\tau}}$ de la forme :

$$c = c_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } c(r_m) = c_0 \text{ à } t = 0$$

Ce qui a commencé en r_m à $t = 0$ se poursuit en $r_f = r_m e^{\frac{t}{2\tau}}$ à t ; $\tau = \frac{1}{2s\omega^2}$.

11. $s = 10^{-12} \text{ s}$:

$$\tau = 5 \text{ h} ; r_{ft} = 1,65 r_m.$$



Cette description est acceptable mais la conservation de la matière sans accumulation en r_M est à remettre en cause de même la discontinuité en r_{ft} où la diffusion est

obligatoirement notable vu $\frac{\partial c}{\partial r}$ très grand. $D = 0$ est un modèle acceptable car il est

fréquent que la convection l'emporte sur la diffusion mais ici la vitesse limite $5 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ est faible (pour $r = 5 \text{ cm}$). Il faudrait augmenter ω .

12. Observées comme objet de phase dans un interféromètre de Michelson réglé en teinte plate, les deux zones $r < r_f$ et $r > r_f$ ont des indices très différents et donc des éclaircissements différents qui révèlent la frontière ou plutôt la zone de transition.

13. En régime stationnaire $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$. Il faut obligatoirement 2 effets antagonistes ; la loi 7.

permet d'étudier la dépendance spatiale grâce à la diffusion. Le force de centrifugation s'oppose.

14. En régime stationnaire, $\phi_m = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$ cf. 6.

$$s\omega^2 r c = D \frac{dc}{dr} \Rightarrow \frac{dc}{c} = \frac{s\omega^2}{D} r dr ; \ln \frac{c}{c_A} = \frac{1}{2} \frac{s\omega^2 r^2}{D} \Rightarrow c = c_A \exp \frac{1}{2} \frac{s\omega^2 r^2}{D},$$

$$\text{en particulier pour } r = r_m : c(r_m) = c_A \exp \frac{1}{2} \frac{s\omega^2 r_m^2}{D}, \text{ d'où } c = c(r_m) \exp \frac{1}{2} \frac{s\omega^2}{D} (r^2 - r_m^2).$$

15. La force $f_r = fs\omega^2 r$ est associée à une énergie potentielle apparente d'ultracentrifugation : $dE_p = -f s\omega^2 r dr, \Rightarrow E_p = -\frac{1}{2} f s\omega^2 (r^2 - r_m^2)$ vu la référence de

$$\text{l'énoncé, or } n = n_1 e^{\frac{E_p}{kT}} \text{ d'après Boltzmann } \Rightarrow c = c_1 \exp \frac{1}{2} \frac{f s\omega^2}{kT} (r^2 - r_m^2).$$

T est supposée uniforme. L'énergie cinétique n'intervient pas car il n'y a pas de déplacement macroscopique en régime stationnaire.

16. L'identification en r^2 donne $D = \frac{kT}{f}$.

17. Soit $\rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot V_{\text{H}_2\text{O}} = 1$ avec $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; m_i : masse par unité de volume du constituant i .

$$d = \frac{m_{\text{CsCl}} + m_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{c_0 M_{\text{CsCl}} + (\rho_{\text{H}_2\text{O}} - v_{\text{CsCl}} c_0 M_{\text{CsCl}} \rho_{\text{H}_2\text{O}})}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \Rightarrow v_{\text{CsCl}} = \frac{1}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} - \frac{d-1}{M_{\text{CsCl}} c_0}.$$

A.N. : $v_{\text{CsCl}} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

18.a. Ecrivons la conservation des paires dans la cavité :

$$c_0 \alpha h \frac{r_M^2 - r_m^2}{2} = h \int_{r_m}^{r_M} c_{\text{CsCl}}(r) \alpha r dr = \frac{DEh}{\omega^2 s} \alpha \int_{u_m}^{u_M} \exp u du \text{ avec } u = \frac{\omega^2 s r^2}{2D}.$$

$$c_0 \frac{r_M^2 - r_m^2}{2} = \frac{DE}{\omega^2 s} \left[\exp \frac{\omega^2 s r_M^2}{2D} - \exp \frac{\omega^2 s r_m^2}{2D} \right] \Rightarrow E = \frac{\omega^2 s}{2D} \frac{c_0 (r_M^2 - r_m^2)}{\exp \frac{\omega^2 s r_M^2}{2D} - \exp \frac{\omega^2 s r_m^2}{2D}}.$$

b. Pour un volume $d\tau$:

$$v_1(r) = \frac{d\tau}{dm_{\text{CsCl}} + dm_{\text{H}_2\text{O}}} \text{ or } dm_{\text{CsCl}} = c(r) M_{\text{CsCl}} d\tau ;$$

$$dm_{\text{H}_2\text{O}} = (\rho_{\text{H}_2\text{O}} d\tau - v_{\text{CsCl}} c(r) M_{\text{CsCl}} d\tau).$$

$$v_1(r) = \frac{1}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} + c(r) M_{\text{CsCl}} (1 - v_{\text{CsCl}}) \rho_{\text{H}_2\text{O}}}. \text{ Or } v_{\text{CsCl}} \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 - \frac{(d-1)}{c_0 M_{\text{CsCl}}} \rho_{\text{H}_2\text{O}} \text{ cf. 17.}$$

$$v_1(r) = \frac{1}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \left[1 + \frac{(d-1)c(r)}{c_0} \right]} = \frac{1}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \left(1 + \frac{(d-1)\omega^2 s (r_M^2 - r_m^2) \exp \frac{\omega^2 s r_M^2}{2D}}{\exp \frac{\omega^2 s r_M^2}{2D} - \exp \frac{\omega^2 s r_m^2}{2D}} \right)}.$$

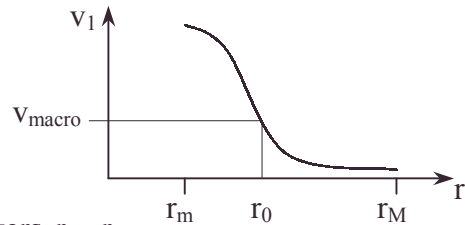
Conclusion : $v_1(r)$ est une fonction décroissante de r .

19. Il existe une valeur $r = r_0$ pour laquelle $v_{\text{macro}} = v_1(r_0)$.

On rappelle qu'il s'agit de volumes massiques.

$$F_t = F_{\text{inertie}} + F_{\text{Archimède}} = m_{\text{macro}} \omega^2 r \left(1 - \frac{v_{\text{macro}}}{v_1(r)} \right).$$

cf. 1.



$r < r_0$ $v(r) > v_{\text{macro}}$ $F_t > 0$ qui tire la molécule vers $r = r_0$.

$r > r_0$ $v(r) < v_{\text{macro}}$ $F_t < 0$ qui tire la macromolécule vers $r = r_0$.

On indique d'après 1. la vitesse limite $v_{\text{lim}} = \frac{m_{\text{macro}}}{f} \omega^2 r \left(1 - \frac{v_{\text{macro}}}{v_1(r)} \right)$.

v_{lim} est la vitesse des molécules macroscopiques.

L'équilibre est caractérisé par $v_{\text{lim}} = 0 \Rightarrow v_{\text{macro}} = v_1(r_0)$; r_0 dépend de v_{macro} .

$$20.a. v_1(r) = v_1(r_0) + \left(\frac{dv_1}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0).$$

$$1 - \frac{v_{\text{macro}}}{v_1(r)} = 1 - \frac{v_{\text{macro}}}{v_1(r_0) \left(1 + \frac{(r - r_0)}{v_1(r_0)} \left(\frac{dv_1}{dr} \right)_{r_0} \right)} = 1 - \frac{v_{\text{macro}}}{v_1(r_0)} \left(1 - \frac{r - r_0}{v_1(r_0)} \left(\frac{dv_1}{dr} \right)_{r_0} \right);$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{v_{\text{macro}}}{v_1(r_0)}}_0 + \frac{v_{\text{macro}}}{v_1^2(r_0)} \left(\frac{dv_1}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0) = \frac{f_{\text{macro}} v_{\text{lim}}}{m_{\text{macro}} \omega^2 r_0}$$

$$\Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{m_{\text{macro}}}{f_{\text{macro}}} \omega^2 r_0 \frac{v_{\text{macro}}}{v_1^2(r_0)} \left(\frac{dv_1}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0)$$

A l'équilibre de sédimentation des macromolécules, cf. 7.

$$0 = j_{\text{macro}} = -D_{\text{macro}} \frac{dc_{\text{macro}}}{dr} + c_{\text{macro}}(r) m_{\text{macro}} \frac{\omega^2 r_0}{f_{\text{macro}}} \frac{v_{\text{macro}}}{v_1^2(r_0)} \left(\frac{dv_1}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0).$$

$$\frac{dc_{\text{macro}}}{c_{\text{macro}}} = \frac{m_{\text{macro}} \omega^2 r_0}{D_{\text{macro}} f_{\text{macro}} v_1^2(r_0)} \left(\frac{dv_1}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0) dr.$$

$$\text{On a : } c_{\text{macro}} = c_{\text{macro}}(r_0) \exp \frac{-(r - r_0)^2}{2\sigma^2}$$

$$\text{b. Avec } \sigma^2 = - \frac{kT v_1^2(r_0)}{m_{\text{macro}} \omega^2 r_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right)_{r_0}} = \frac{RT v_{\text{macro}}^2}{M_{\text{macro}} \omega^2 r_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right)_{r_0}} \text{ vu } D = \frac{kT}{f}.$$

On sait que $a_0 = \omega^2 r_0$ et que $\left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right)_{r_0} < 0$.

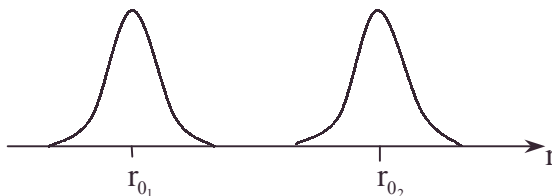
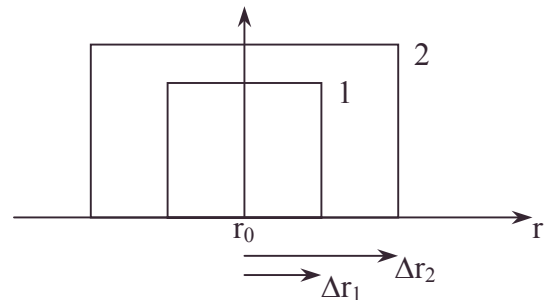
21. r_0 dépend de v_{macro} , σ dépend de r_0 donc de v_{macro} mais aussi de M_{macro} .

a. Si 2 espèces de macromolécules sont de même volume massique $r_{0_1} = r_{0_2}$ mais $\sigma_{0_1} \neq \sigma_{0_2}$.

En assimilant les répartitions gaussiennes à des rectangles de demi largeur $\sigma\sqrt{2\ln 2}$.

On peut recueillir 2 seul dans l'intervalle où 1 n'est quasi plus présent ; cela est d'autant plus facile que $\sigma_{0_1} \ll \sigma_{0_2}$ soit $M_{\text{macro}_1} > M_{\text{macro}_2}$.

b. Si 2 espèces de macromolécules isomères sont de volumes massiques différents, on sépare (cf. règle de Rayleigh) de manière totale si $r_{0_2} - r_{0_1} >$ demi largeur la plus grande.



4.6.5. Diffusion des neutrons dans un réacteur à uranium enrichi

voir page 126.

4.6.6. Loi de Darcy

voir page 479.

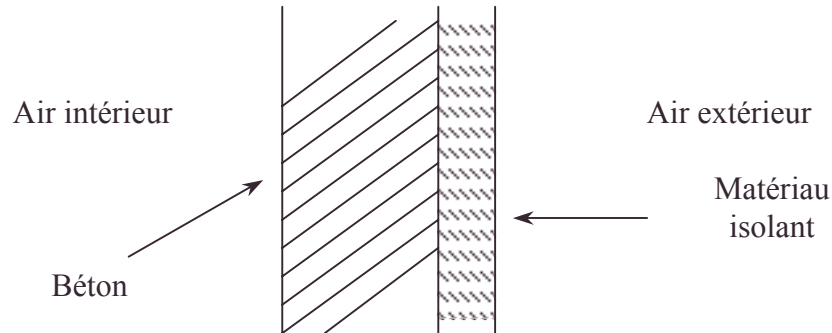
• macromolécule, règle de Rayleigh, sédimentation

4.7. Thermique

Appartient seulement aux programmes de MP, PSI, PC, PT, BCPST2, TPC2

4.7.1. Chauffage régulé

1. Les parois d'un local sont constituées de la façon suivante :



Dans toute cette question, on fera les hypothèses suivantes :

- La température extérieure θ_0 est constante.
- Tous les points de l'air intérieur et des parois de béton, dont l'ensemble a une capacité calorifique \mathcal{C} , sont à la même température θ à un instant donné.
- Le matériau isolant est de capacité calorifique négligeable.
- La quantité élémentaire de chaleur dQ traversant les parois pendant

l'intervalle de temps dt est donnée par la relation $dQ = \frac{1}{\mathcal{R}}(\theta - \theta_0)dt$ où \mathcal{R}

est la résistance thermique des parois.

On donne : $\theta_0 = 5^\circ \text{C}$.

$$\mathcal{C} = 1,2 \cdot 10^5 \text{J} \cdot \text{deg}^{-1}.$$

$$\mathcal{R} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

1.1. Le local est chauffé par une source de chaleur de puissance P , mise en service à la date $t = 0$. La température intérieure θ , initialement égale à θ_0 , varie de $d\theta$ entre les dates t et $t + dt$.

En considérant le système formé par l'air intérieur et les parois de béton, écrire une relation liant θ , θ_0 , \mathcal{R} , P , \mathcal{C} , $d\theta$ et dt .

A.N. : $P = 2 \text{ kW}$.

2. En déduire l'expression de θ en fonction du temps. Calculer la valeur atteinte par θ si la source de chaleur fonctionne pendant un temps infini.

3. En fait, un thermostat interrompt le fonctionnement de la source de chaleur lorsque θ atteint la valeur $\theta_{\max} = 20^\circ \text{C}$. Calculer la date t_1 à laquelle ceci se produit.

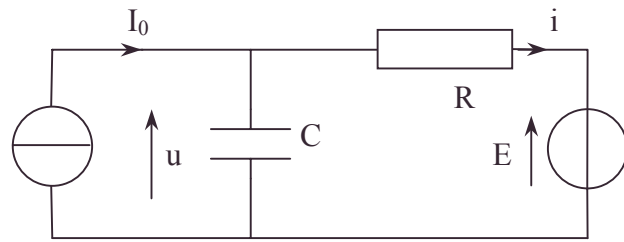
4. Calculer la durée $t_2 - t_1$ nécessaire pour que θ décroisse jusqu'à la valeur $\theta_{\min} = 18^\circ \text{C}$. Le thermostat permet alors que la source de chaleur fonctionne à nouveau, et ainsi de suite.

5. Calculer la durée $t_3 - t_2$ nécessaire pour que θ remonte jusqu'à la valeur θ_{\max} . Tracer sommairement la courbe $\theta = f(t)$.

6. Calculer l'énergie nécessaire pour chauffer le local pendant une heure à partir de la date t_1 .

2. On considère le circuit suivant :

$$\begin{array}{ll} R = 47 \text{ k}\Omega & C = 100 \text{ }\mu\text{F} \\ E = 12 \text{ V} & I_0 = 1 \text{ mA} \end{array}$$



Le symbole



représente un dispositif chargé de maintenir le courant I_0 à une valeur constante, quelle que soit la différence de potentiel u à ses bornes.

A la date $t = 0$; on a $u = E$ et $i = 0$.

1. La charge q de la capacité varie de dq entre les dates t et $t + dt$. Ecrire une relation liant dq , dt , I_0 , u , E et R .

2. En déduire l'expression de u en fonction du temps. Tracer sommairement la courbe $u = f(t)$.

3. Peut-on retrouver, sans calcul de limite, la valeur vers laquelle tend u lorsque t tend vers l'infini ?

4. Calculer la date t , pour laquelle la différence de potentiel u atteint 99 % de sa valeur maximale.

3. Les deux problèmes précédents peuvent présenter certaines analogies.

1. A quels éléments thermiques de la question 1 correspondent les éléments électriques de la question 2 ?

2. Imaginer un dispositif pouvant jouer, dans le circuit de la question 2, le rôle du thermostat de la question 1.

Petites Mines ; Durée : 1h

Corrigé

1.1. Bilan thermique (pendant dt) : ce qui n'est pas perdu sert à chauffer :

$$\mathcal{C} d\theta = P dt - \frac{(\theta - \theta_0)}{R} dt \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta - (\theta_0 + P R)} = - \frac{dt}{\mathcal{C} R}.$$

$$2.a. \ln\left(\frac{\theta - (\theta_0 + P R)}{P R}\right) = - \frac{t}{\mathcal{C} R} < 0 \Rightarrow \theta = (\theta_0 + P R) - P R e^{-\frac{t}{\mathcal{C} R}}$$

$$b. \theta_\infty = \theta_0 + P R ; \text{AN : } \theta_\infty = 45^\circ\text{C} ; \mathcal{C} R = 2,4 \cdot 10^3 \text{ s.} ; P R = 40^\circ\text{C}.$$

$$3. \theta = \theta_{\max} ; t_1 = -\mathcal{C} R \ln\left(\frac{\theta_{\max} - (\theta_0 + P R)}{P R}\right) ; \text{AN : } t_1 = 1128,0 \text{ s.}$$

4. Quand la source de chaleur est éteinte, le bilan thermique s'écrit :

$$\mathcal{C} d\theta = - \frac{(\theta - \theta_0)}{R} dt \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta - \theta_0} = - \frac{dt}{R \mathcal{C}} \Rightarrow \ln \frac{\theta - \theta_0}{\theta_{\max} - \theta_0} = - \frac{(t - t_1)}{R \mathcal{C}} ;$$

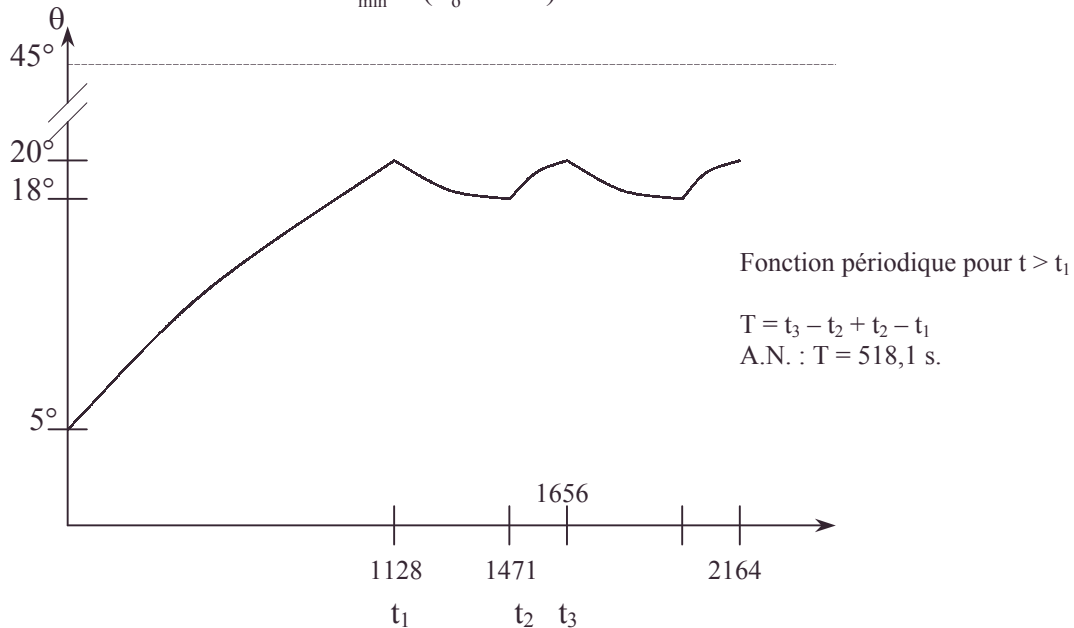
$$\theta = \theta_{\min} \Rightarrow t_2 - t_1 = -R \mathcal{C} \ln \frac{\theta_{\min} - \theta_0}{\theta_{\max} - \theta_0} ; \text{AN : } t_2 - t_1 = 343,4 \text{ s.}$$

$$5. \text{Le nouveau bilan thermique redonne : } \frac{d\theta}{\theta - (\theta_0 + P R)} = - \frac{dt}{\mathcal{C} R} ;$$

$$\ln \frac{\theta - (\theta_0 + P R)}{\theta_{\min} - (\theta_0 + P R)} = - \frac{(t - t_2)}{\mathcal{C} R} ;$$

• analogie, graphe, thermostat

$$\theta = \theta_{\max} \Rightarrow t_3 - t_2 = -\mathcal{R} \mathcal{C} \ln \frac{\theta_{\max} - (\theta_o + P\mathcal{R})}{\theta_{\min} - (\theta_o - P\mathcal{R})} ; \text{AN : } t_3 - t_2 = 184,7 \text{ s.}$$

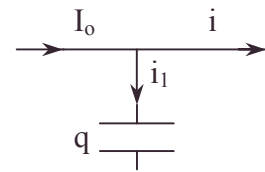
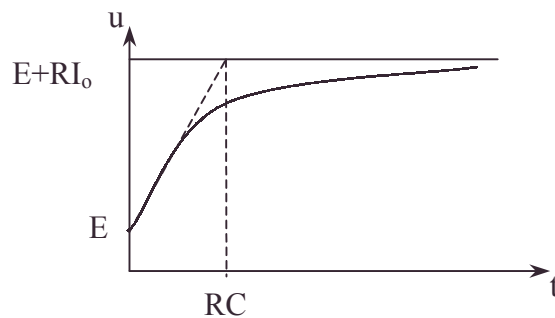


$$6. W = P \frac{(t_3 - t_2)}{t_3 - t_1} 3600 ; \text{AN : } W = 2518 \text{ kJ.}$$

$$2.1. i_1 + i = \frac{dq}{dt} + \frac{(u - E)}{R} = I_o.$$

$$2.a. q = Cu \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E + RI_o}{RC} \Rightarrow u = E + RI_o (1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

b.



3. Quand le condensateur est chargé, $i_1 = 0$:

$$I_o = \frac{u_{\infty} - E}{R} \Rightarrow u_{\infty} = E + RI_o ; \text{AN : } u_{\infty} = 59 \text{ V.}$$

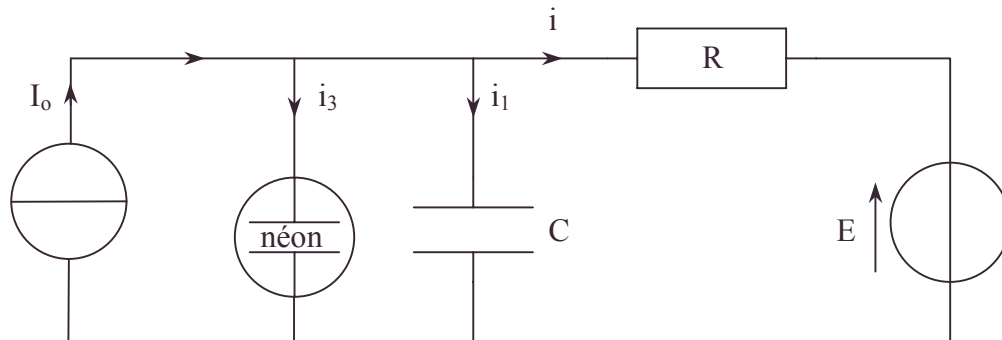
$$4. u = \frac{99}{100} (E + RI_o) = E + RI_o (1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}) \Rightarrow t_1 = RC \ln \frac{100 RI_o}{E + RI_o} ; \text{AN : } t_1 = 20,58 \text{ s.}$$

3.1. La comparaison des équations différentielles :

$$\mathcal{C} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\mathcal{R}} = P + \frac{\theta_o}{\mathcal{R}} \text{ et } C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} = I_o + \frac{E}{R} \text{ montre les analogies :}$$

θ	u
θ_0	E
P	I_0
\mathcal{R}	R
\mathcal{C}	C

2. Pour interrompre la charge du condensateur à une tension u_{\max} (cf. θ_{\max}), on placera en parallèle à C une lampe au néon qui s'allume quand $u > u_{\max} = u_{\text{allumage}}$, sa résistance r étant alors faible (par exemple devant R), ainsi il n'y a plus de courant de charge du condensateur, il se décharge et fait baisser la tension aux bornes de la lampe au néon qui finit par s'éteindre (alors $r = \infty$) pour $u < u_{\min} = u_{\text{extinction}}$. Le condensateur se charge à nouveau jusqu'à atteindre $u = u_{\max}$ où la lampe se rallume.



4.7.2. Modélisation des trois types d'échange thermique

Application : contrôle de la température intérieure d'un laboratoire spatial

Préambule

Un système physique, au sein duquel s'effectuent des échanges thermiques (bâtiment, satellite...) est découpé en volumes V_i supposés isothermes, de températures T_i exprimées en Kelvin, et de capacités calorifiques C_i , indépendantes de la pression, du volume et de la température. Le volume V_i sera représenté par son centre i , appelé nœud du système. Un tel nœud i peut échanger de l'énergie, sous forme de chaleur, avec tout un ensemble de nœuds j représentant son environnement, et ceci par les modes suivants : conduction, rayonnement et convection. De plus, le nœud i se voit doté d'une source de chaleur interne, dont P_i représente la puissance d'apport au volume V_i .

Lors des analyses des échanges thermiques, on appellera flux thermique, l'énergie apportée, sous forme de chaleur, à un nœud pendant l'unité de temps. Il est rappelé que le flux thermique total apporté au nœud i , par échanges thermiques, avec les autres nœuds, ainsi que par l'apport de sa source interne P_i , est égal à $C_i \frac{dT_i}{dt}$ où t représente le temps.

Dans tout le problème, ρ représente la masse volumique et c la chaleur massique, considérée indépendante du volume, de la pression et de la température.

Le but du problème est l'étude des échanges thermiques et l'établissement d'un parallèle avec l'électricité.

A. Conduction thermique

Dans un échange thermique par conduction entre nœuds voisins i et j , le flux thermique apporté au nœud i par le nœud j a pour expression : $\Phi_o^{ij} = G_c^{ij}(T_j - T_i)$ avec la conductance thermique $G_c^{ij} = \frac{\lambda S}{\ell}$ où S est la section offerte au passage de la chaleur, ℓ est la distance entre deux nœuds consécutifs, λ est la conductivité thermique, supposée constante.

On considère un volume cylindrique de section S . Ce volume est décomposé en nœuds de même longueur ℓ . Soient $i-1$, i et $i+1$ trois nœuds consécutifs (cf. figure 1).

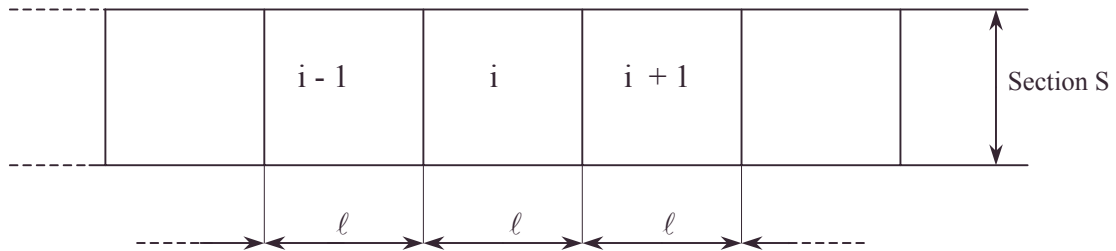


Figure 1 .- Décomposition d'un volume cylindrique en nœuds de même longueur ℓ .

I. La conduction ne pouvant se faire qu'entre nœuds voisins, quelle est l'expression du flux total apporté par conduction au nœud i ?

II. On cherche à établir l'équation de propagation de la température à l'intérieur du sol. Considérons le volume précédent, dans lequel il n'y a échange d'énergie que par conduction thermique.

1. Ecrire l'équation d'évolution de la température T_i du nœud i .

2. La longueur ℓ sera prise très petite. Le nœud i a pour abscisse x ; le nœud $i-1$, $x - \ell$; le nœud $i+1$, $x + \ell$. La température T_i du nœud i sera représentée par la température $T(x,t)$ dépendant de la position x du nœud i et du temps t .

a. Faire un développement limité au second ordre en ℓ de l'expression :

$$T(x - \ell, t) + T(x + \ell, t) - 2T(x, t).$$

b. Exprimer la capacité calorifique C_i du nœud i en fonction de ρ , c , ℓ et S .

c. En utilisant les résultats précédents, écrire l'équation différentielle de propagation de la température en fonction de l'abscisse x et du temps t .

III. Lors de la résolution de l'équation différentielle précédente, on recherche des solutions de la forme : $\bar{T}(x,t) = f(x).g(t) + T_0$ où T_0 est une constante et $\bar{T}(x,t)$ une solution complexe de l'équation de propagation. La température $T(x,t)$ sera la partie réelle de la solution $\bar{T}(x,t)$.

1. Quelle est la forme la plus générale de la fonction $g(t)$?

On rappelle que si $\forall x, t, F(x) = G(t)$, alors les deux fonctions sont constantes.

2. Montrer que les solutions complexes $\bar{T}(x,t)$ de la forme précédente s'écrivent de

la manière suivante : $\bar{T}(x,t) = T_0 + T_1 e^{A^2 t - \sqrt{\frac{\rho C}{\lambda}} Ax} + T_2 e^{A^2 t + \sqrt{\frac{\rho C}{\lambda}} Ax}$ où T_1 , T_2 et A sont des constantes complexes quelconques.

IV. Exemple d'application : x représente la distance d'un point à l'intérieur du sol par rapport au niveau du sol. Au niveau du sol la température $T(0,t)$ est de la forme : $T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t$, soit en complexe $\bar{T}(0,t) = T_0 + \theta_0 e^{j\omega t}$.

1. Quelle est la répartition des températures $T(x,t)$ dans le sol, lorsque x décrit l'intervalle $[0, +\infty]$? On ne tiendra compte que de la solution physiquement acceptable.

2. Application numérique : on donne $\frac{\lambda}{\rho c} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. On prend pour pulsation ω

les valeurs correspondantes à l'oscillation journalière ou annuelle de la température dans l'atmosphère. A quelle distance D , l'amplitude de la différence $T(D,t) - T_0$ est-elle égale à $\frac{\theta_0}{e}$ où e est la base de l'exponentielle ?

B. Rayonnement thermique

On suppose que le flux thermique apporté au nœud i par le nœud j a pour expression : $\Phi_r^{ij} = G_r^{ij}(T_j^4 - T_i^4)$ avec $G_r^{ij} = \sigma F(i,j)$.

σ est la constante de Stefan de valeur numérique $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ SI}$.

$F(i,j)$ est un facteur homogène à une surface et ne dépend que des formes et des positions respectives des nœuds i et j .

Considérons à titre d'exemple un nœud 1 représentant une sphère de rayon R et de surface S , seule dans l'espace constituant le nœud 2 avec lequel est échangée l'énergie thermique par rayonnement. Dans ce cas, le facteur $F(1,2) = S$.

I. Calculer G_r^{12} lorsque $R = 0,1 \text{ m}$. On précisera l'unité de G_r^{12} .

II. Une sphère de cuivre pleine, de rayon $R = 0,1 \text{ m}$, initialement à $T_1^0 = 300 \text{ K}$ se trouve à l'instant initial placée dans l'espace supposé à $T_2 = 0 \text{ K}$.

On donne pour le cuivre $\rho = 8900 \text{ kg.m}^{-3}$ et $C = 382 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

1. Ecrire l'équation du bilan énergétique en considérant la sphère comme n'échangeant que du rayonnement avec l'espace.

2. Intégrer cette équation pour obtenir la température T_1 de la sphère en fonction du temps t .

3. Au bout de combien de temps la température de la sphère a-t-elle atteint 273 K ?

C. Convection d'un fluide

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible, de chaleur massique C , dans une tubulure de diamètre d , de longueur L . On notera \dot{m} le débit massique du fluide, c'est-à-dire la masse de fluide traversant la section droite de la tubulure par unité de temps. Le volume de la tubulure est décomposé en nœuds successifs de même longueur. Soient $i-1$, i et $i+1$ trois nœuds successifs.(cf. figure 2).

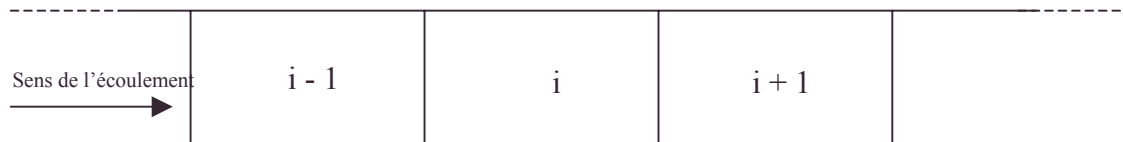


Figure 2. Décomposition d'une tubulure en nœuds de même longueur.

I. Moyennant l'hypothèse que le fluide arrive sur le nœud i à la température T_{i-1} et en repart à la température T_i , montrer que l'apport dû à l'écoulement se résume, sur le

nœud i , par un flux thermique : $\Phi_i = G_f(T_{i-1} - T_i)$ avec $G_f = \dot{m}c$.

Dans tout ce qui suit, les flèches indiquent l'écoulement du fluide.

II. Bilan sur un nœud de séparation du circuit fluide.

On néglige les échanges thermiques par rayonnement et conduction avec les parois.

La figure 3 représente le schéma de séparation du circuit fluide. Au nœud 2, le débit massique se partage en : $(1 - \alpha) \dot{m}$ sur la branche 2 – 3, $\alpha \dot{m}$ sur la branche 2 – 4.

Quel est le flux thermique apporté au nœud 2 ?

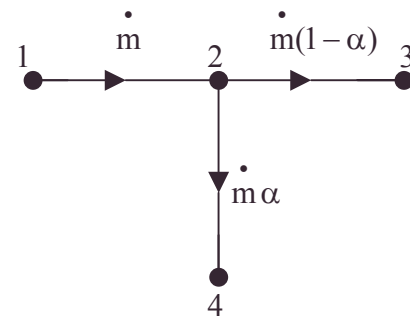


Figure 3.

Point de séparation d'un circuit fluide.

III. Bilan sur un nœud de confluence.

La figure 4 représente le schéma de confluence du circuit fluide.

Au nœud 3 confluent :

La branche 1 – 3 de débit massique $\dot{m}(1 - \alpha)$.

La branche 2 – 3 de débit massique $\dot{m}\alpha$.

pour former la branche 3 – 4 de débit massique \dot{m} .

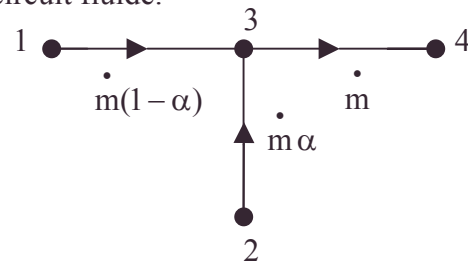


Figure 4

Point de confluence d'un circuit fluide.

1. On note $G_1 = \dot{m}c(1 - \alpha)$, $G_2 = \dot{m}c\alpha$ et $G_3 = \dot{m}c$.

Ecrire l'expression du flux thermique apporté au nœud 3 en faisant apparaître les produits G_1T_1 , G_2T_2 , G_3T_3 .

2. Dans le cas d'un état stationnaire, c'est-à-dire lorsque les températures T_i sont constantes, quelle relation existe-t-il en l'absence d'échanges thermiques par conduction et rayonnement, entre les « flux » G_1T_1 , G_2T_2 , G_3T_3 ?

3. Comment s'écrit la relation précédente dans le cas d'un régime transitoire ? On appellera C_3 la capacité calorifique du nœud 3.

IV. Application

On considère le système à 6 nœuds fluides représenté sur la figure 5, constituant une boucle d'échange d'énergie thermique, par fluide. On néglige les échanges thermiques par rayonnement et conduction avec les parois.

Le nœud 1 est affecté d'une source d'énergie de puissance $P_1 = 1200 \text{ W}$.

Le débit principal \dot{m} est celui de la branche 5-6-1-2. Il est partiellement court-circuité au nœud 2, et devient : $\dot{m}\alpha$ dans la branche 2-5, $\dot{m}(1 - \alpha)$ dans la branche 2-3-4-5.

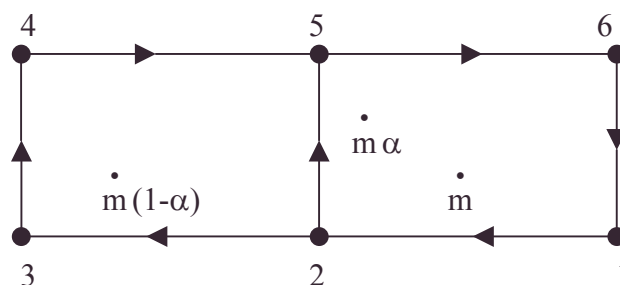


Figure 5 - Système à 6 nœuds fluides.

On suppose qu'un dispositif approprié impose par ailleurs la température $T_4 = 277 \text{ K}$.

IV.1. Quelle doit être la valeur de α pour qu'en régime stationnaire, on obtienne $T_1 = 291 \text{ K}$?

2. Que devient l'énergie mise en jeu par P_1 ?

3. Ce schéma simule une approche grossière du contrôle de la température du Spacelab où la cabine habitée par les cosmonautes est représentée par le nœud 1.

Quel rôle peut-on faire jouer à α dans ce schéma de contrôle ?

On calculera α en utilisant : $C = 1000 \text{ J.kg}^{-1}$ et $\dot{m} = 0,2 \text{ kg.s}^{-1}$.

D. Analogie électrique

I. Le nœud i est affecté d'une source de chaleur de puissance P_i , et est connecté à tout un ensemble de nœuds j par conduction ou/et par rayonnement et/ou par convection. On appelle Φ_i le flux thermique total apporté au nœud i par ces trois modes.

Ecrire le bilan énergétique du nœud i lorsque la température T_i croît de dT_i entre les instants t et $t + dt$.

II. Considérons un ensemble de condensateurs repérés par l'indice i . Chaque condensateur, de capacité C_i , possède deux bornes a et b . L'ensemble des bornes a est relié au potentiel zéro. La borne b du condensateur i est au potentiel V_i . Les bornes b sont reliées entre elles par l'intermédiaire d'un réseau de conducteurs, non nécessairement chimiques, dans lequel circule un courant. De plus, chaque condensateur peut être relié à une source de courant d'intensité J_i .

On appelle I_i le courant total, en provenance des autres nœuds j , sur le nœud i .

Ecrire l'équation de conservation de la charge sur le nœud i .

III. Montrer l'existence d'une analogie entre équation thermique et équation électrique. On précisera l'analogie.

IV. On définit la conductance thermique de manière analogue à la conductance électrique.

1. Déterminer la conductance thermique de conduction (cf. §A.).
2. Déterminer la conductance thermique de rayonnement (cf. §B.).
3. Déterminer la conductance thermique de convection (cf. §C.).
4. Quelle est la particularité des différentes conductances ?

V. On considère un volume cylindrique de cuivre de section S , découpé en trois nœuds 1, 2, 3 de même longueur l . Les trois nœuds échangent de la chaleur uniquement par conduction thermique (cf. figure 6).

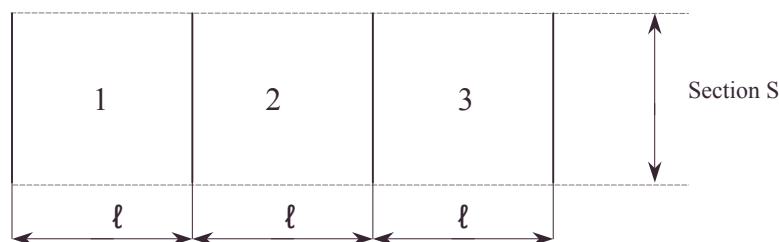


Figure 6 - Conduction à trois nœuds.

1. Ecrire l'équation d'évolution de la température de chaque nœud en fonction du temps. On notera C la capacité calorifique d'un nœud et on a : $G = G_c^{12} = G_c^{23}$.

On posera $\tau = \frac{C}{G}$.

2. Intégrer le système précédent pour les conditions initiales suivantes :

$$T_1^0 = 300 \text{ K}, T_2^0 = 200 \text{ K}, \text{ et } T_3^0 = 300 \text{ K}.$$

• analogie, conductance thermique [inverse de résistance thermique], conductivité thermique, conservation de la charge, contrôle de température, convection, rayonnement, unidimensionnalité

Représenter les fonctions $T_1(t)$, $T_2(t)$ et $T_3(t)$ sur un même graphe en précisant les échelles utilisées. On prendra :

$$S = 10^{-2} \text{ m}^2, \ell = 0,1 \text{ m}, \rho = 8900 \text{ kg m}^{-3}, C = 32 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1} \text{ et } \lambda = 385 \text{ SI.}$$

3. Donner le schéma électrique équivalent à ce système thermique.

CCP ; Durée : 4h

Corrigé

A.I. Dans l'hypothèse de l'énoncé, la conduction ne se fait qu'entre nœuds voisins :

$$\phi_T^i = \phi_C^{i,i-1} + \phi_C^{i,i+1} = \frac{\lambda S}{\ell} (T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i).$$

$$\text{II.1. L'énoncé rappelle : } \phi_T^i = C_i \frac{dT_i}{dt} \Rightarrow \frac{\lambda S}{\ell} (T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i) = C_i \frac{dT_i}{dt}.$$

$$\text{2.a. } T(x + \ell, t) = T(x, t) + \ell \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\ell^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(x, t);$$

$$T(x - \ell, t) = T(x, t) - \ell \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\ell^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}(x, t);$$

$$(T(x + \ell, t) + T(x - \ell, t) - 2T(x, t)) = \ell^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \text{ à des termes en } \ell^4 \text{ près.}$$

$$\text{b. } C_i = M_i C = \rho S \ell C.$$

c. L'introduction d'une fonction de 2 variables nous fait écrire :

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \text{ et A.II.1. s'écrit vu A.II.2.a. et A.II.2.b. : } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

$$\text{III.1. On considère : } T = \text{Re}(\bar{T}) \text{ avec } \bar{T} = \text{solution de } \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}.$$

\bar{T} vérifie donc A.II.2.c.

$$\text{Avec } \bar{T} = T_0 + f(x)g(t), \text{ on obtient } f''(x)g(t) = \frac{\rho C}{\lambda} f(x)g'(t).$$

En séparant les fonctions et en utilisant la remarque de l'énoncé :

$$\frac{\lambda f''(x)}{\rho C f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = K \Leftrightarrow \begin{cases} g'(t) - K g(t) = 0 \\ f''(x) - K \frac{\rho C}{\lambda} f(x) = 0 \end{cases}$$

L'intégration de l'équation en $g(t)$ donne $g = D.e^{Kt}$, K et D étant des constantes appartenant à \mathbb{C} .

$$\text{2. L'intégration de l'équation en } f(x) \text{ donne : } f(x) = A_1 e^{-\sqrt{\frac{K\rho C}{\lambda}} x} + A_2 e^{+\sqrt{\frac{K\rho C}{\lambda}} x},$$

$$A_1, A_2, K \text{ appartenant à } \mathbb{C}, \text{ d'où } \bar{T} = T_0 + D A_1 e^{Kt - \sqrt{\frac{K\rho C}{\lambda}} x} + D A_2 e^{Kt + \sqrt{\frac{K\rho C}{\lambda}} x};$$

$$\text{Posons } A^2 = K; T_1 = A_1 D; T_2 = A_2 D;$$

$$\text{on retrouve : } \bar{T} = T_0 + T_1 e^{A^2 t - \sqrt{\frac{\rho C}{\lambda}} A x} + T_2 e^{A^2 t + \sqrt{\frac{\rho C}{\lambda}} A x}.$$

$$\text{IV.1. } \bar{T}(0, t) = T_0 + (T_1 + T_2) e^{A^2 t} = T_0 + \theta_0 e^{j\omega t}.$$

$$\text{L'identification donne } T_1 + T_2 = \theta_0 \text{ et } A^2 = j\omega.$$

Soit $A = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+j)$ ou $A = -\sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+j)$

Quand $x \rightarrow +\infty$, $T(x,t)$ doit rester finie ; T_1 ou T_2 doit être nulle ;
 $\operatorname{Re}(A) > 0 \Rightarrow T_2 = 0$.

On peut écrire $\bar{T} = T_0 + \theta_1 e^{j\omega t} e^{-\left(\frac{\rho C \omega}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}(1+j)x}$ et $T = T_0 + \theta_0 e^{-\left(\frac{\rho C \omega}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}x} \cos\left(\omega t - \left(\frac{\rho C \omega}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}x\right)$.

2. $T - T_0 = \theta_0 e^{-\left(\frac{\rho C \omega}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}x} \cos\left(\omega t - \left(\frac{\rho C \omega}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}x\right)$, L'amplitude étant $\theta_0 e^{-\left(\frac{\rho C \omega}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}x}$

et vaut $\frac{\theta}{e}$ pour $\left(\frac{\rho C \omega}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}x = 1$ soit $D = \left(\frac{2\lambda}{\rho C \omega}\right)^{\frac{1}{2}}$;

AN : $\omega_1 = \frac{2\pi}{24.3600} \Rightarrow D_1 = 0,166 \text{ m.} ; \omega_2 = \frac{2\pi}{365.24.3600} \Rightarrow D_2 = 3,17 \text{ m.}$

B.I. $G_r^{1,2} = \sigma F$ avec $F = S = 4\pi R^2$; $G_r^{1,2} = 4\pi\sigma R^2$; AN : $G_r^{1,2} = 7,13.10^{-9} \text{ W.K}^{-4}$.

II.1. $\phi_r^{1,2} = C_1 \frac{dT_1}{dt} = G_r^{1,2}(T_2^4 - T_1^4) \quad \left(\frac{dT_1}{dt} < 0 \text{ car } T_1 > T_2\right)$.

2. $T_2 = 0\text{K} \Rightarrow C_1 \frac{dT_1}{dt} = -G_r^{1,2}T_1^4$ or $C_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 C\rho$.

$\frac{dT_1}{T_1^4} = \frac{-3\sigma}{R\rho C} dt \Rightarrow T_1(t) = \frac{1}{\left[\frac{1}{T_1^{0^3}} + \frac{9\sigma t}{R\rho C}\right]^{\frac{1}{3}}}$; T_1 décroît avec t et tend vers T_2 .

3. $t_1 = \frac{R\rho C}{9\sigma} \left[\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_1^{0^3}}\right]$; A.N. : avec $T_1 = 273 \text{ K}$ et $T_1^0 = 300 \text{ K}$; $t_1 = 8069 \text{ s}$.

C.I. Moyennant l'hypothèse que le fluide arrive à la température T_{i-1} et en repart à la température T_i .

Une masse dm de fluide gagne une énergie $dmC(T_i - T_{i-1})$ et donne au nœud i :

$dmC(T_{i-1} - T_i)$ et donc par unité de temps, $\dot{m}C(T_{i-1} - T_i) = \phi_F^i$.

II. Application. : $\phi_f^2 = \dot{m}C(T_1 - T_2)$.

III.1. $\phi_f^3 = \dot{m}\alpha C(T_2 - T_3) + \dot{m}C(1-\alpha)(T_1 - T_3) = G_1T_1 + G_2T_2 - G_3T_3$.
venant de 2 venant de 1

2. $\phi_f^3 = C_3 \frac{dT_3}{dt} = 0 \Rightarrow G_1T_1 + G_2T_2 - G_3T_3 = 0$.

3. $C_3 \frac{dT_3}{dt} = G_1T_1 + G_2T_2 - G_3T_3$ qu'on écrit aussi $C_3 \frac{dT_3}{dt} + G_3T_3 = G_1T_1 + G_2T_2$.

IV.1. Le nœud 2 a déjà été étudié (fig. 3 de **C.II.**) ; en régime stationnaire.

$0 = C_2 \frac{dT_2}{dt} = \dot{m}C(T_1 - T_2) = \phi_f^2 \Rightarrow T_1 = T_2$; AN : $T_2 = 291 \text{ K}$.

De même au nœud 3 : $0 = C_3 \frac{dT_3}{dt} = \dot{m}(1-\alpha)C(T_2 - T_3)$; $T_3 = T_2 = T_1$;

AN : $T_3 = 291\text{K}$.

Au nœud 4 : $0 = C_4 \frac{dT_4}{dt} = \dot{m}C(1-\alpha)(T_3 - T_4) + P_4$; $P_4 \neq 0$ car $T_3 \neq T_4$.

Le nœud 5 joue le rôle du nœud 3 de la figure 4 de **C.III**.

$$0 = C_5 \frac{dT_5}{dt} = \dot{m}C(1-\alpha)(T_4 - T_5) + \dot{m}C\alpha(T_2 - T_5) \Rightarrow T_5 = (1-\alpha)T_4 + \alpha T_1.$$

Comme pour les nœuds 3 et 4, le nœud 6 satisfait à : $0 = C_6 \frac{dT_6}{dt} = \dot{m}C(T_5 - T_6)$;

$$\Rightarrow T_6 = T_5 = (1-\alpha)T_4 + \alpha T_1$$

De même qu'en 4, on a en 1 : $0 = C_1 \frac{dT_1}{dt} = \dot{m}C(T_6 - T_1) + P_1$, ce qui s'écrit en fonction

$$\text{des données : } (1-\alpha)\dot{m}C(T_4 - T_1) + P_1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{P_1}{\dot{m}C(T_1 - T_4)}.$$

2. En soustrayant à la relation analogue écrite au nœud **4**. ; $P_4 = -P_1$. On cède en **4** l'énergie produite en **1**.

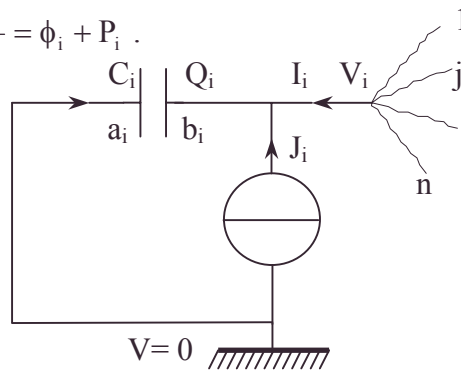
3.a. α sert à contrôler la température T_1 , température de la cabine habitée, car

$$T_1 = T_4 - \frac{P_1}{(1-\alpha)\dot{m}C} \text{ en régime permanent, } T_4 \text{ étant fixée.}$$

$$\text{b. } \alpha = 0,571.$$

$$\text{D.I. } C_i \frac{dT_i}{dt} = \phi_i + P_i.$$

II.



Appliquons la conservation de la charge à l'armature b_i .

$$I_i + J_i = \frac{dQ_i}{dt} = C_i \frac{dV_i}{dt}$$



$$\text{III. On a : } C_i \frac{dT_i}{dt} = \phi_i + P_i \text{ et } C_i \frac{dV_i}{dt} = I_i + J_i.$$

On en déduit formellement l'analogie entre l'équation thermique et l'équation électrique, et en particulier :

C_i capacité calorifique	C_i capacité de condensateur
T_i température	V_i le potentiel
ϕ_i le flux thermique (de différentes natures, échangé avec les autres nœuds)	I_i le flux de charges, c.à.d. l'intensité échangée avec les autres nœuds.
P_i venant d'une source de chaleur particulière.	J_i venant d'une source de courant particulière.

IV. La conductance électrique G est telle que $I = G(V_1 - V_2)$ (avec $G = \frac{\gamma S}{\ell}$)

1. $\phi_C^{ij} = G_C^{ij}(T_j - T_i)$; vu l'analogie entre I et ϕ , V et T , $\Rightarrow G_C^{ij}$ analogue de G ,
 $\Rightarrow G_C = \frac{\lambda S}{\ell}$, λ étant la conductivité électrique (analogue de γ).

2. $\phi_r^{ij} = G_r^{ij}(T_j^4 - T_i^4) = G_r^{ij}(T_j^2 - T_i^2)(T_j^2 + T_i^2) = G_r^{ij}(T_j^2 + T_i^2)(T_j + T_i)(T_j - T_i)$;

La conductance thermique de rayonnement est : $G_r^{ij}(T_j^2 + T_i^2)(T_j + T_i)$

ou encore $G_r^{ij}(T_j^3 + T_i^3 + T_j T_i^2 + T_i T_j^2)$.

3. $\phi_f = \dot{m} C (T_{i-1} - T_i) \Rightarrow G_F = \dot{m} C$ conductance de convection.

4.a. G_C dépend de la surface S de contact, de la longueur ℓ ...

b. G_r dépend de la surface et des températures des nœuds.

c. G_f dépend du débit.

d. G dépend de la surface S de la section, de sa longueur, naturellement . λ , C , γ , σ sont des fonctions thermodynamiques inconnues ici (influence de T , etc...)

V.1. En 1 : $C \frac{dT_1}{dt} = G(T_2 - T_1)$; en 2 : $C \frac{dT_2}{dt} = G(T_1 - T_2) + G(T_3 - T_2)$.

En 3 : $C \frac{dT_3}{dt} = G(T_2 - T_3)$ soit en utilisant $\tau = \frac{C}{G}$:

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{(T_2 - T_1)}{\tau} ; \frac{dT_2}{dt} = \frac{(T_1 + T_3 - 2T_2)}{\tau} ; \frac{dT_3}{dt} = \frac{(T_2 - T_3)}{\tau}$$

2. $T_1^0 = T_3^0 \Rightarrow T_1 = T_3$ (par symétrie des rôles).

Faisons la somme des trois équations (cf. changement de base et diagonalisation pour

résoudre de tels systèmes) : $\frac{d(T_1 + T_2 + T_3)}{dt} = 0$

soit $T_1 + T_2 + T_3 = T_1^0 + T_2^0 + T_3^0$ ($\Rightarrow T_1 + T_3 = T_1^0 + T_2^0 + T_3^0 - T_2$ pour la résolution en T_2).

AN : $T_1 + T_2 + T_3 = 800 \text{ K}$; $\tau = 7,4 \text{ s}$ avec $C = 32 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Résolution en T_2 : $\frac{dT_2}{dt} = \frac{(T_1^0 + T_2^0 + T_3^0 - 3T_2)}{\tau}$: équation à variables séparables.

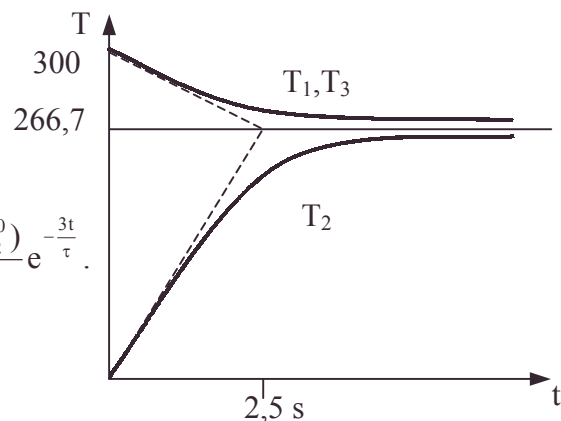
$$\ln \frac{(T_1^0 + T_2^0 + T_3^0 - 3T_2)}{(T_1^0 + T_3^0 - 2T_2^0)} = -\frac{3t}{\tau} \Rightarrow T_2 = \frac{-(T_1^0 + T_3^0 - 2T_2^0)e^{-\frac{3t}{\tau}}}{3} + \frac{T_1^0 + T_2^0 + T_3^0}{3}.$$

Résolution en T_1 : $T_1(t) = \frac{T_1^0 + T_2^0 + T_3^0 - T_2(t)}{2}$:

$$T_1 = T_3 = \frac{T_1^0 + T_2^0 + T_3^0}{3} + \frac{(T_1^0 + T_3^0 - 2T_2^0)}{6} e^{-\frac{3t}{\tau}}.$$

AN : $T_1 = T_3 = 266,7 + 33,3 \cdot e^{-0,4 t}$;

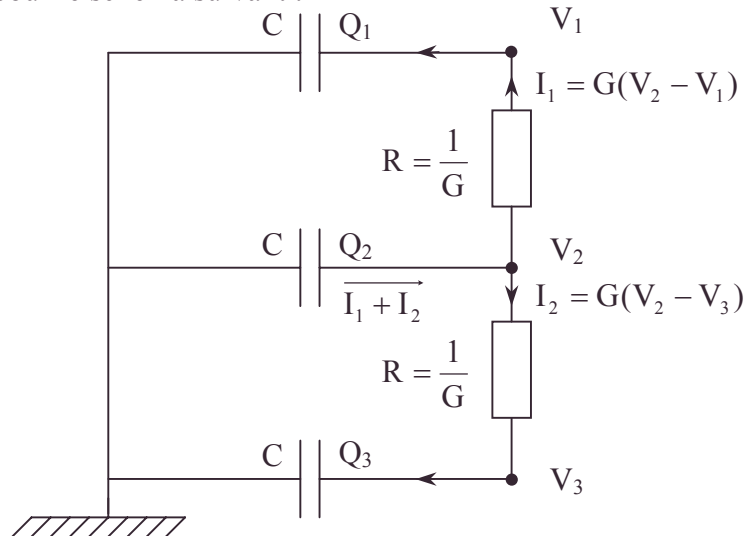
$T_2 = 266,7 - 66,7 \cdot e^{-0,4 t}$.



3. Les équations électriques sont (par analogie formelle)

$$C \frac{dV_1}{dt} = G(V_2 - V_1) ; \quad C \frac{dV_2}{dt} = G(V_1 - V_2) + G(V_3 - V_2) ; \quad C \frac{dV_3}{dt} = G(V_2 - V_3).$$

C'est le cas pour le schéma suivant :



3 sous-systèmes de même caractéristique C avec 2 mises en contact R symétriques entre le potentiel intermédiaire V_2 et les 2 potentiels autres V_1 et V_3 .

L'évolution sera analogue si les conditions initiales sont symétriques pour Q_1 et Q_3 .

4.7.3. Centrale nucléaire Echange thermique industriel

Schéma de principe d'une centrale nucléaire avec réacteur à uranium enrichi et eau sous pression (PWR). L'échangeur est à la température T_1 , l'eau de refroidissement du condenseur à la température ambiante T_0 .

Un fluide F_0 sort d'un réacteur nucléaire à pression constante P et à la température absolue T . Il est envoyé, dans ces conditions, dans un échangeur thermique où il cède une certaine quantité de chaleur à un second fluide F_1 . Le fluide F_0 sort de l'échangeur à la température absolue T_1 et est renvoyé dans le réacteur, sa pression restant égale à P durant tout le cycle. La température T_1 sera appelée conventionnellement température de l'échangeur. On raisonnera dans toute la suite du problème sur une masse de fluide F_0 égale à 1 kg ; on supposera la chaleur massique c_p à pression constante de ce fluide, indépendante de la température et de la pression.

1. Calculer la quantité de chaleur q_1 cédée par 1 kg de fluide F_0 au fluide F_1 , en admettant que la quantité de chaleur perdue par F_0 est entièrement reçue par F_1 .

En supposant, pour simplifier, que le fluide F_1 effectue un cycle bitherme réversible entre la température T_1 de l'échangeur (source chaude) et la température ambiante T_0 , calculer le travail W_1 échangé par F_1 lorsqu'il échange la quantité de chaleur q_1 .

Comment faut-il choisir T_1 pour que W_1 soit maximal, les températures T et T_0 étant fixées ?

En adoptant cette valeur de T_1 , calculer :

a. le travail W_{\max} maximal obtenu ;

b. la quantité de chaleur q' non utilisée, c'est-à-dire la quantité de chaleur que le fluide F_0 pourrait encore céder si on le refroidissait à pression constante de la température T_1 à la température T_0 ;

• analogie, centrale nucléaire, condenseur, conditions initiales, échangeur thermique, grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse, maximum, réacteur à uranium enrichi, réversibilité thermodynamique, travail

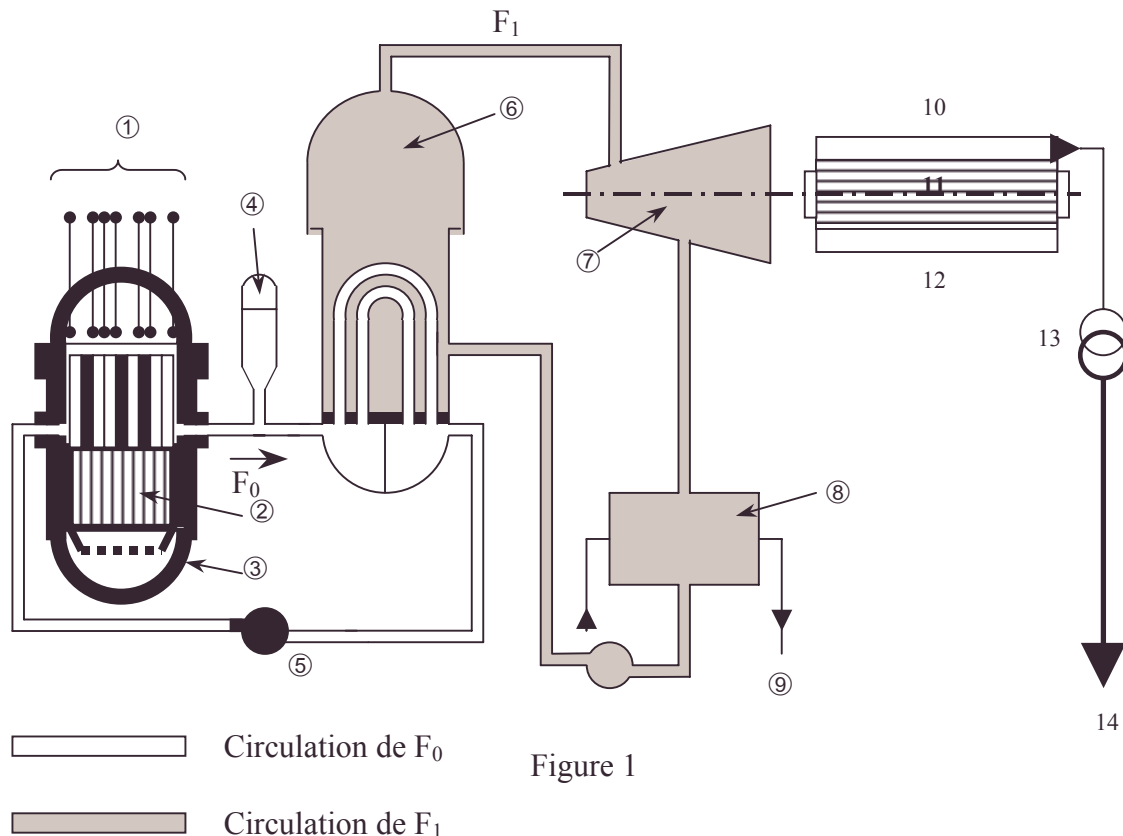


Figure 1

1. Barres de contrôle
2. Cœur
3. Cuve
4. Pressuriseur
5. Pompe primaire
6. Echangeur de chaleur
7. Turbine

8. Condenseur
9. Eau de refroidissement
10. Alternateur
11. Rotor
12. Stator
13. Transformateur
14. Vers le réseau haute tension 380 kV

c. la quantité de chaleur q_0 cédée par le fluide F_1 à la source froide ;

d. le rendement thermique de l'opération $R_{th} = \frac{W_{max}}{Q}$, Q désignant la quantité de

chaleur totale qu'on pourrait retirer du fluide F_0 en le refroidissant de la température T à la température T_0 sous pression constante.

A.N. : $c_p = 3180 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$; $T = 560 \text{ K}$; $T_0 = 300 \text{ K}$.

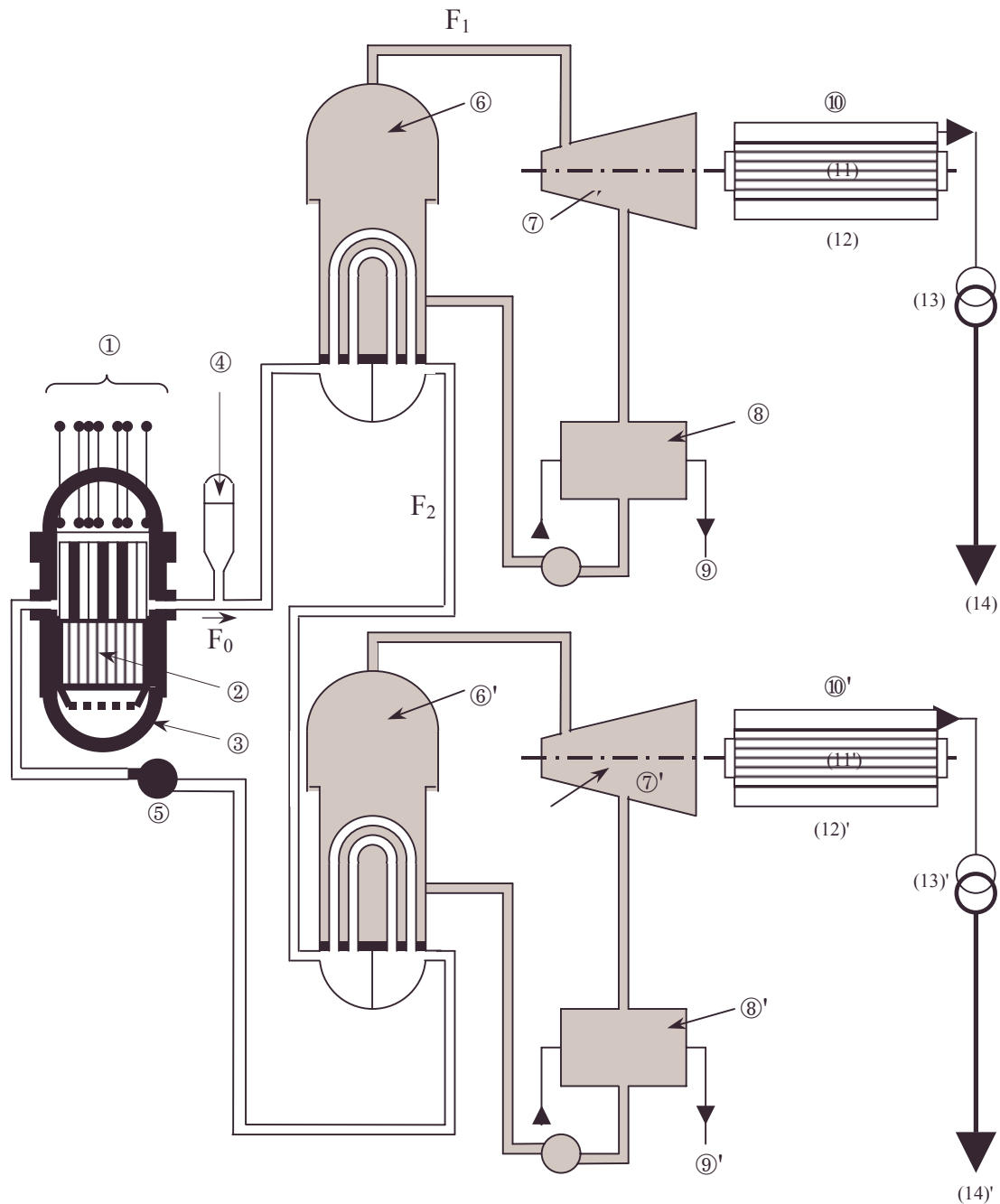
2. On suppose maintenant que le fluide F_0 (température T , pression P) traverse deux échangeurs thermiques placés en série et de températures respectives T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$). Les fluides F_1 et F_2 effectuent des cycles bithermes réversibles respectivement entre les températures T_1 et T_0 , T_2 et T_0 . Le fluide F_0 est renvoyé, à la sortie du deuxième échangeur, dans le réacteur, sa pression demeurant constante durant tout le cycle. Calculer le travail W échangé par F_1 et F_2 rapporté à 1 kg de fluide F_0 . Pour quelles valeurs de T_1 et T_2 ce travail est-il maximal, les températures T et T_0 étant fixées ?

En adoptant pour T_1 et T_2 les valeurs ainsi déterminées, calculer :

- a. le travail maximal W_{max} obtenu ;
- b. la quantité de chaleur Q' non utilisée, transportée par F_0 ;
- c. les quantités de chaleur q_1^0 et q_2^0 échangées avec la source froide par les fluides F_1 et F_2 ;

• alternateur, barre de contrôle [de réacteur nucléaire], maximum, pressuriseur, rendement, réversibilité thermodynamique, transformateur, travail, turbine

d. le rendement thermique, défini comme dans la question I.I.d.



3. Le fluide F_0 (température T , pression P) traverse maintenant n échangeurs placés en série et de températures T_1, T_2, \dots, T_n ($T_1 > T_2 > \dots > T_n$).

Les fluides F_1, F_2, \dots, F_n effectuent des cycles bithermes réversibles respectivement entre les températures T_1 et T_0, T_2 et T_0, \dots, T_n et T_0 . A la sortie du dernier échangeur, le fluide F_0 est renvoyé dans le réacteur, sa pression P demeurant constante dans tout le cycle.

Calculer le travail total W échangé par les fluides F_1, F_2, \dots, F_n , rapporté à 1 kg de fluide F_0 . Pour quelles valeurs de T_1, T_2, \dots, T_n , ce travail est-il maximal, les températures T et T_0 étant fixées ?

En adoptant les valeurs ainsi déterminées pour T_1, T_2, \dots, T_n , calculer :

- la quantité de chaleur Q' non utilisée transportée par F_0 ;
- le travail total obtenu ;

c. le rendement thermique défini comme précédemment.

4. Calculer la limite du rendement thermique déterminé dans la question 1.3.d. quand $n \rightarrow \infty$. Dans cette hypothèse, calculer le travail total obtenu. Retrouver directement ce résultat en admettant qu'on dispose d'une infinité d'échangeurs thermiques de températures infiniment voisines et comprises entre T et T_0 .

Retrouver le rendement ; A.N.

Capes ; Durée 3h

Corrigé

1.a. $T > T_1$; la chaleur cédée par 1 kg de fluide F_0 est $q_1 = c_p(T - T_1)$; on opère à P constant.

b. F_1 reçoit Q_1 de T_1 et Q_0 de T_0 (seule Q_1 est "reçue").

Pour un cycle adapté pour que $Q_1 = q_1$:

$$\Delta U = 0 \Rightarrow 0 = W_1 + q_1 + q_0.$$

$$\Delta S = 0 \Rightarrow 0 = \frac{q_1}{T_2} + \frac{q_0}{T_2} \Rightarrow W_1 = c_p(T - T_1) \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right).$$

$$c. \left(\frac{\partial W_1}{\partial T_1} \right)_{T, T_0} = -c_p \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + c_p(T - T_1) \frac{T_0}{T_1^2} ; \left(\frac{\partial W}{\partial T_1} \right)_{T, T_0} = 0 \Rightarrow T_1 = \sqrt{T T_0}.$$

$$d.a. W_{\max} = c_p (\sqrt{T} - \sqrt{T_0})^2.$$

$$b. q' = -c_p(T_0 - T_1) \text{ (cf. } T_0 < T_1) ; q' = -c_p(\sqrt{T_0} - \sqrt{T})\sqrt{T_0}.$$

$$c. q_0 = -q_1 \frac{T_0}{T_1} = -c_p \frac{T_0}{T_1} (T - T_1) = -c_p \sqrt{T_0} (\sqrt{T} - \sqrt{T_0})$$

$$d. Q = c_p(T - T_0) ; R_{th} = \frac{c_p(\sqrt{T} - \sqrt{T_0})^2}{c_p(T - T_0)} \Rightarrow R_{th} = \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_0}}{\sqrt{T} + \sqrt{T_0}}. \text{ A.N. : } R_{th} = 0,15.$$

2. F_0 est mis en contact thermique avec F_1 au niveau de l'échangeur T_1 , et en contact thermique avec F_2 au niveau de l'échangeur T_2 .

On conserve pour F_1 les équations obtenues en 1. On a pour F_2 de manière analogue :

$$q_2 = c_p(T_1 - T_2) ; 0 = W_2 + q_2 + q_2^0 ; 0 = \frac{q_2}{T_2} + \frac{q_2^0}{T_0} ; W_2 = c_p(T_1 - T_2) \left(1 - \frac{T_0}{T_2} \right).$$

$$A. W = W_1 + W_2 = c_p(T - T_1) \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + c_p(T_1 - T_2) \left(1 - \frac{T_0}{T_2} \right) ;$$

$$W = c_p \left(T + 2T_0 - T_2 - T_0 \left(\frac{T}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} \right) \right).$$

$$B. \left(\frac{\partial W}{\partial T_1} \right)_{T_0, T_2} = 0 \Rightarrow T_1^2 = T T_2 ; \left(\frac{\partial W}{\partial T_2} \right)_{T_1, T_0} = 0 \Rightarrow T_2^2 = T_1 T_0$$

$$\Rightarrow T_1 = T_0^{\frac{1}{3}} T^{\frac{2}{3}} ; T_2 = T_0^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}}.$$

$$a. W_{\max} = c_p \left(T + 2T_0 - 3T_0^{\frac{1}{3}} T^{\frac{2}{3}} \right).$$

$$\text{b. } Q' = -c_p(T_0 - T_2) = -c_p T_0^{\frac{2}{3}} \left(T_0^{\frac{1}{3}} - T^{\frac{1}{3}} \right).$$

$$\text{c. } q_1^0 = -c_p(T - T_1) \frac{T_0}{T_1} ; q_2^0 = -c_p(T_1 - T_2) \frac{T_0}{T_2} \text{ par analogie ;}$$

$$q_1^0 = q_2^0 = -c_p T_0^{\frac{2}{3}} \left(T^{\frac{1}{3}} - T_0^{\frac{1}{3}} \right) = -c_p T_0 \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right].$$

$$\text{d. } Q = c_p(T - T_0) ; R_{th} = \frac{W_{max}}{Q} = \frac{T + 2T_0 - 3T^{\frac{1}{3}}T_0^{\frac{2}{3}}}{T - T_0}.$$

A.N. : $R_{th} = 0,20$; on a une augmentation de 33%.

$$\text{3.a. } Q' = -c_p(T_0 - T_n) ; \text{vu } 0 = W'_j + q_j + q_j^0 \text{ et } \frac{q_j}{T_j} + \frac{q_j^0}{T_0} = 0 ; \text{on tire par analogie :}$$

$$q_1^0 = -c_p(T - T_1) \frac{T_0}{T_1} ; q_2^0 = -c_p(T_1 - T_2) \frac{T_0}{T_2} ; q_3^0 = -c_p(T_2 - T_3) \frac{T_0}{T_3},$$

$$\text{et par récurrence, } q_n^0 = -c_p(T_{n-1} - T_n) \frac{T_0}{T_n}.$$

$$W_1 = c_p(T - T_1) \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) ; W_2 = c_p(T_1 - T_2) \left(1 - \frac{T_0}{T_2} \right) ; W_3 = c_p(T_2 - T_3) \left(1 - \frac{T_0}{T_3} \right),$$

$$\text{et par récurrence, } W_n = c_p(T_{n-1} - T_n) \left(1 - \frac{T_0}{T_n} \right).$$

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n = c_p \left(T + nT_0 - T_n - T_0 \left(\frac{T}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} + \dots + \frac{T_{n-1}}{T_n} \right) \right).$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial T_1} \right)_{T \neq T_1} = 0 \Rightarrow T_1^2 = T T_2 ; \left(\frac{\partial W}{\partial T_2} \right)_{T_j \neq T_2} = 0 \Rightarrow T_2^2 = T_1 T_3.$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial T_n} \right)_{T_j \neq T_n} = 0 \Rightarrow T_n^2 = T_{n-1} T_0.$$

$$\text{Astuce d'écriture de résolution : } \frac{T}{T_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3} = \dots = \frac{T_{n-1}}{T_n} = \frac{T_n}{T_0} = \lambda.$$

$$T = \lambda T_1 = \lambda^2 T_2 = \lambda^\ell T_\ell = \lambda^n T_n = \lambda^{n+1} T_0 \Rightarrow \lambda = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

$$\Rightarrow T_\ell = T \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\ell}{n+1}} \text{ et } T_n = T^{\frac{1}{n+1}} T_0^{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow \text{on exprime } Q' = -c_p \left(T_0 - T^{\frac{1}{n+1}} T_0^{\frac{n}{n+1}} \right).$$

$$T_0 \left(\frac{T}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} + \dots + \frac{T_{n-1}}{T_n} \right) = n T_0 \lambda = n T_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

b. On obtient par remplacement :

$$W_{\max} = c_p \left(T + nT_0 - (n+1)T \frac{1}{n+1} T_0^{\frac{n}{n+1}} \right) = c_p \left[T + T_0 \left(n - (n+1) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right) \right].$$

$$\text{c. } Q' = c_p (T - T_0) ; R_{\text{th}} = \frac{W_{\max}}{Q'} = \frac{T + T_0 \left(n - (n+1) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)}{T - T_0}.$$

$$\text{4.a. Astuce : } x = \exp(\ln x) \text{ avec } x = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{1+n}}.$$

$$R_{\text{th}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T + T_0 \left(n - (n+1) \exp \left(\frac{\ln \frac{T}{T_0}}{n+1} \right) \right)}{T - T_0}. \quad \text{Or } e^y = 1+y \text{ si } y \rightarrow 0 \text{ ce qui est le cas}$$

$$\text{avec } y = \frac{\ln \frac{T}{T_0}}{n+1}, n \rightarrow \infty.$$

$$R_{\text{th}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T + T_0 \left(-1 - \ln \frac{T}{T_0} \right)}{T - T_0} = 1 - \frac{\ln \frac{T}{T_0}}{\frac{T}{T_0} - 1} ; \text{A.N. : } R_{\text{th}} = 0,28.$$

$$\text{b. } R_{\text{th}} = \frac{W_{\max}}{Q} \text{ avec } Q' = c_p (T - T_0) \Rightarrow W_{\max} = c_p \left(T - T_0 - T_0 \ln \frac{T}{T_0} \right).$$

c. Soit T' et $T' + dT'$, 2 échangeurs infiniment proches par analogie avec ce qui a été calculé en 1.

$$dW = -c_p dT' \left(1 - \frac{T_0}{T'} \right) \Rightarrow W = \int_T^{T_0} dW = c_p (T - T_0) - c_p T_0 \ln \frac{T}{T_0}.$$

$$\text{d. } R_{\text{th}} = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{\ln \frac{T}{T_0}}{\frac{T}{T_0} - 1} ; \text{A.N. : } R_{\text{th}} = 0,28 \text{ soit } 40 \% \text{ en plus du cas à } 2$$

échangeurs.

4.7.4. Four à chaleur tournante et cuisson d'un soufflé

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles.

On se propose d'étudier la diffusion de l'énergie thermique au sein d'une plaque homogène d'épaisseur d , placée dans un four aux parois métalliques maintenues à la température T_e . La figure 1 précise la configuration et les notations.

Les plans Π_1 et Π_2 sont de très grandes dimensions devant d .

La température initiale de la plaque, notée T_i , est uniforme. jusqu'à la question 7., les seuls transferts envisagés sont les transferts thermiques.

A la date t , un point de la plaque est à la température T . On appellera T_1 la température de la plaque à la surface Π_1 . En dépit des discontinuités du milieu (interfaces paroi-plaque et plaque-air), la température est supposée être une fonction deux fois dérivable de l'espace.

A. Equilibre de l'ensemble

1. Comment justifier le modèle où, en régime stationnaire, la température T_p dans la plaque et T_a dans l'air sont uniformes ?

2. Donner le nom de la transformation décrivant l'évolution de l'ensemble {plaque et air}.

3. Expliquer pourquoi la pression de l'air dans le four ne peut pas être constante au cours de l'évolution et en déduire les hypothèses de l'énoncé qui vous paraissent, en conséquence, les plus suspectes.

4. Quelles sont les relations entre températures T_e , T_p et T_a à l'équilibre ?

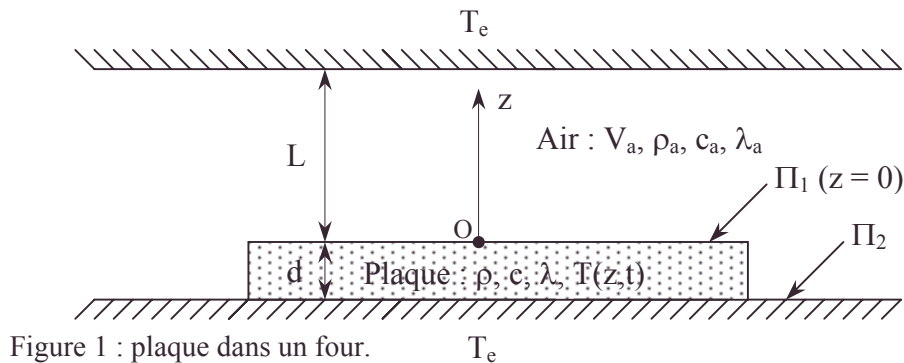


Figure 1 : plaque dans un four.

La matière de la plaque a une masse volumique ρ , d'une capacité thermique massique c et une conductivité thermique λ ($\lambda > 0$). Ces trois grandeurs sont constantes. L'air au-dessus de la plaque occupe le volume V_a constant ; sa masse volumique est ρ_a , sa capacité thermique massique est c_a , et sa conductivité thermique est λ_a . On considérera ρ_a , c_a et λ_a comme constantes. Le plan Π_2 est en contact avec la paroi inférieure du four. Le plan Π_1 est à la distance L de la paroi supérieure du four.

Etablissement de la température dans la plaque

5. Justifier d'après les hypothèses que $\theta = T - T_e$ puisse ne dépendre que de z et de t . On supposera qu'il en est effectivement ainsi.

6. Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ : $\frac{\partial \theta}{\partial t} - a^2 \Delta \theta = 0$.

Donner l'expression de a en fonction de ρ , c et λ .

7. On cherche une solution de cette équation de la forme $\theta = f(z).g(t)$. Etablir les équations différentielles vérifiées respectivement par $f(z)$ et $g(t)$.

On introduira une constante supplémentaire V , homogène à l'inverse d'un temps.

8. Déterminer le signe de V de telle manière que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$. Posant $V = -k^2$, donner l'expression de $g(t)$. Pourquoi rejeter l'autre solution ?

9. Déterminer l'expression de θ sous la forme : $\theta_k = (A_k \cos \alpha z + B_k \sin \alpha z) \exp \alpha' t$, qui sera provisoirement acceptée. Donner l'expression de α et celle de α' en fonction de a et k . Les constantes A_k et B_k seront déterminées par la suite.

Déterminer l'expression des flux surfaciques de puissance $\vec{J}_Q(\Pi_1)$ à travers Π_1 et $\vec{J}_Q(\Pi_2)$ à travers Π_2 (α et α' ayant été exprimés en fonction de a et k).

B. Etude des conditions aux limites imposées aux niveaux de Π_1 et Π_2

On s'intéresse d'abord au plan Π_1 .

10. Première situation : on néglige tout mouvement de l'air au-dessus de la plaque. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la température $T_a(z, t)$; déterminer $T_a(z, t)$ en supposant que l'évolution de la température de la plaque au niveau du plan Π_1 est suffisamment lente pour que l'on puisse envisager de négliger le terme dépendant du temps dans l'équation locale pour T_a . En déduire le flux de puissance $\vec{J}_Q(\Pi_1)$ à travers Π_1 en fonction de λ_a , L , T_e et T_1 .

11. Seconde situation : l'air est brassé (brassage forcé) au-dessus de la plaque. La distribution de la température T_a est alors modélisée comme indiqué à la figure 2 ; η est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre. On considère que le transfert thermique est uniquement conductif au voisinage de Π_1 (ce qui revient à considérer que la vitesse de l'air est très faible sur l'épaisseur η).

Déterminer $T_a(z, t)$ en fonction de T_e , T_1 et η , puis le flux de puissance $\vec{J}_Q(\Pi_1)$ à travers Π_1 en fonction de λ_a , η , T_e et T_1 .

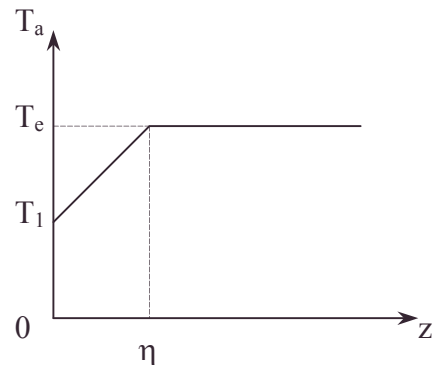


Figure 2 :
profil de température de l'air dans le cas de brassage forcé : le plan Π_1 correspond à $z = 0$.

12. Comparer $\vec{J}_Q(\Pi_1)$ à $\vec{J}_Q(\Pi_2)$.

Quel est l'intérêt d'un four disposant d'un ventilateur pour brasser l'air ?

Pour refroidir un biberon, a-t-on intérêt à le plonger dans l'eau froide ou à le mettre dans un courant d'eau froide ?

Pourquoi est-il thermodynamiquement convenable de souffler sur sa cuillère de soupe trop chaude pour la refroidir (remarquer que cette situation fait intervenir un changement d'état) ?

Le flux de puissance à travers la partie supérieure de la plaque (plan Π_1), comme on l'a montré dans les deux situations envisagées aux questions **10.**, **11.** et **12.**, sera écrit sous la forme générale $\vec{J}_Q = -h(T_e - T_1) \vec{z}$, avec $h > 0$ (l'indice de "a" se rapporte à l'air).

13. Quel est le sens physique de l'égalité entre $\vec{J}_Q(\Pi_1)$ et \vec{J}_Q ?

En déduire la relation entre A_k et B_k et donner l'expression de θ_k en fonction de A_k seul (et bien sûr de a , k et λ).

14. Déduire de la condition imposée à T au niveau du plan Π_2 la relation entre k , d , a , λ , et h .

15. Montrer graphiquement que cette relation, vue comme une équation pour k , admet une infinité de solutions. A chaque valeur de k_i de k , on associe la solution θ_i (exprimée en fonction de k_i et de A_i , valeur de A pour k_i).

On admettra que la solution générale s'écrit $\theta(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(z, t)$.

Applications numériques : $d = 5,0 \text{ cm}$ $\rho = 200 \text{ kg.m}^{-3}$ $c = 240 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
 $T_e = 180^\circ \text{ C}$ $T_1 = 20^\circ \text{ C}$ $\lambda = 1,00.10^{-1} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

• *changement d'état, développement au premier ordre ou plus, ordre de grandeur, série, solution graphique, transfert thermique, ventilateur de four*

28. On veut que le soufflé soit très gonflé tout en ne se desséchant pas à l'intérieur. On envisage donc d'obtenir très rapidement la formation d'une croûte à la surface rendant celle-ci imperméable à la vapeur d'eau, évitant ainsi la perte d'eau.

A-t-on intérêt à utiliser un four à air pulsé ? Motiver la réponse.

Que pensez-vous de la solution consistant à utiliser un chalumeau pour obtenir cette croûte avant la cuisson ? Comment régler la cuisson après cette première étape : type de fonctionnement (air brassé, ou pas), réglage de la température ?

Quelques notations utilisées dans ce problème

c capacité thermique massique du matériau de la plaque
 c_a capacité thermique massique volumique de l'air au-dessus de la plaque
 λ conductivité thermique du matériau de la plaque λ
 d épaisseur de plaque

$\vec{J}_Q(\Pi_1)$ flux surfacique de puissance à travers Π_1

$\vec{J}_Q(\Pi_2)$ flux surfacique de puissance à travers Π_2

L distance entre plan Π_1 et la paroi supérieure du four

T température de la plaque à la date t

T_1 température de la plaque à la surface Π_1

T_a température de l'air en régime stationnaire

T_e température des parois du four

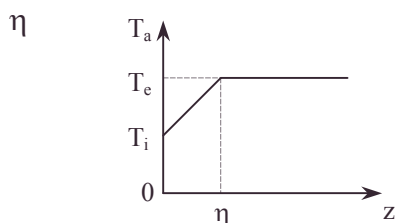
T_i température initiale de la plaque

T_p température de la plaque en régime stationnaire

V_a volume de l'air au-dessus de la plaque

ρ masse volumique du matériau de la plaque

$\theta = T - T_e$



λ_a conductivité thermique de l'air au-dessus de la plaque

ρ_a masse volumique de l'air au-dessus de la plaque.

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

A.1. En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$; à l'équilibre, il n'y a plus de flux thermique ;

$$\vec{J}_Q = \vec{0} = -\lambda_i \vec{\text{grad}} T, \Leftrightarrow T_i = \text{cste}.$$

2.a. A la fonction énergie libre telle que $dA = -PdV - SdT$.

Si $dT = 0$, $dV = 0$ on a $dA = 0$; $A = A_0$ est adaptée à la situation.

b. U pourrait être envisagée : $dU = TdS - PdV$ avec $dU = 0$ à l'équilibre.

c. L'ensemble plaque, air n'a d'échange thermique qu'avec le four de température T_e constante. L'évolution est donc monotherme.

3. Vu $T = \frac{PV}{nR}$; en cours d'évolution quand T varie et P aussi.

Or $\vec{\mu}a = \vec{\mu}g - \vec{\text{grad}} P$:

• conductivité thermique, convection, diffusion thermique, énergie libre, équation d'Euler, équilibre thermodynamique, forme différentielle canonique des fonctions d'état de la thermodynamique, monotherme, régime stationnaire de phénomènes de transport

la convection est à considérer : la diffusion thermique n'est pas seule à devoir être considérée ; T_1 n'est pas constante en tout point de Π_1 .

4. $T_e = T_p = T_a$ à l'équilibre thermodynamique final.

5. Si Π_1, Π_2 sont infinis, x, y n'ont pas d'intérêt physique ;

z reste la seule variable d'espace : $\theta = \theta(z, t)$.

6. Le bilan thermique d'une tranche d'épaisseur dz donne, en tenant compte des flux :

$$\rho S dz c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -S \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z}(z, t) - \frac{\partial T}{\partial z}(z + dz, t) \right) dt \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \text{ avec } a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}, \text{ donc :}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \text{ de la forme } \frac{\partial \theta}{\partial t} - a^2 \Delta \theta = 0.$$

$$7. \frac{dg}{dt} f - a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} g = 0 \text{ peut s'écrire } \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{a^2}{f} \frac{d^2 f}{dz^2} = V \text{ constante d'unité } s^{-1}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{dg}{dt} - Vg = 0 ; \frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{V}{a^2} f = 0.$$

$$8. g = g_0 e^{Vt}, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \text{ si } V < 0 \Rightarrow g = g_0 e^{-k^2 t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \theta = 0 :$$

l'équilibre sera obtenu ; ce n'est pas le cas si $V > 0$.

$$9. V = -k^2 \Rightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{k^2}{a^2} f = 0 \Rightarrow f = A \cos \frac{k}{a} z + B \sin \frac{k}{a} z \Rightarrow \alpha = \frac{k}{a} ;$$

$$g = g_0 e^{-k^2 t} \Rightarrow \alpha' = -k^2.$$

$$\theta_k = \left(A_k \cos \frac{k}{a} z + B_k \sin \frac{k}{a} z \right) e^{-k^2 t} ;$$

$$\vec{J}_Q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \vec{z} = -\lambda \frac{k}{a} \left(-A_k \sin \frac{k}{a} z + B_k \cos \frac{k}{a} z \right) e^{-k^2 t} \vec{z}.$$

$$\text{En } z = 0, \vec{J}_Q(\Pi_1) = -\lambda \frac{k}{a} B_k e^{-k^2 t} \vec{z} ;$$

$$\text{En } z = -d, \vec{J}_Q(\Pi_2) = -\lambda \frac{k}{a} \left(A_k \sin \frac{kd}{a} + B_k \cos \frac{kd}{a} \right) e^{-k^2 t} \vec{z}.$$

$$\mathbf{B.10.} \frac{\partial T_a}{\partial t} = a_a^2 \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2} ; \text{ si } \frac{\partial T_a}{\partial t} = 0, T_a = Cz + D.$$

Ecrivons la continuité de T_a (cf. dérivabilité) en $z = 0$ et $z = L$:

$$T_a = T_1 + \frac{T_e - T_1}{L} z ; \vec{J}_{Q_1} = -\lambda_a \frac{T_e - T_1}{L} \vec{z} \quad \forall z \text{ dans l'air.}$$

$$\vec{J}_{Q_1}(\Pi_1) = -\lambda_a \frac{T_e - T_1}{L} \vec{z} \text{ vu la continuité de } \frac{\partial T_a}{\partial z} \text{ en } z = 0.$$

$$11. \text{ Pour } z \in [0, \eta], T_a = T_1 + \frac{T_e - T_1}{\eta} z ; \text{ pour } z \in [\eta, L], T_a = T_e.$$

$$\text{Pour } z \in [0, \eta], \vec{J}_{Q_2} = -\lambda_a \frac{T_e - T_1}{\eta} \vec{z} ; \vec{J}_{Q_2}(\Pi_1) = -\lambda_a \frac{T_e - T_1}{\eta} \vec{z}.$$

$$12. L \text{ est remplacé par } \eta : \|\vec{J}_{Q_1}\| \ll \|\vec{J}_{Q_2}\|.$$

• La puissance thermique disponible en Π_1 est beaucoup plus grande dans le cas du four à brassage d'air.

• condition limite, convection, dérivée partielle, équation de Fourier de la chaleur, équilibre, unité

- De même pour le refroidissement, le biberon est mieux refroidi dans un courant d'eau froide car le mouvement de l'eau permet de renouveler la déperdition thermique vers l'eau froide.
- La convection augmente le transfert thermique possible : la cuillère de soupe chaude pourra être mieux refroidie en soufflant ; l'air soufflé, s'il est sec, permettra à de l'eau de la cuillère de se vaporiser, ce qui augmentera l'effet de refroidissement.

Ainsi, $h_{NB} = \frac{\lambda_a}{L}$; $h_B = \frac{\lambda_a}{\eta}$.

13. $\vec{J}_Q(\Pi_1) = \vec{J}_{Q_a}$ exprime en régime stationnaire que l'énergie thermique ne s'accumule pas dans le voisinage. On suppose une évolution suffisamment lente de la température ; $e^{-k^2 t} \neq 1$ valable si k^2 très faible.

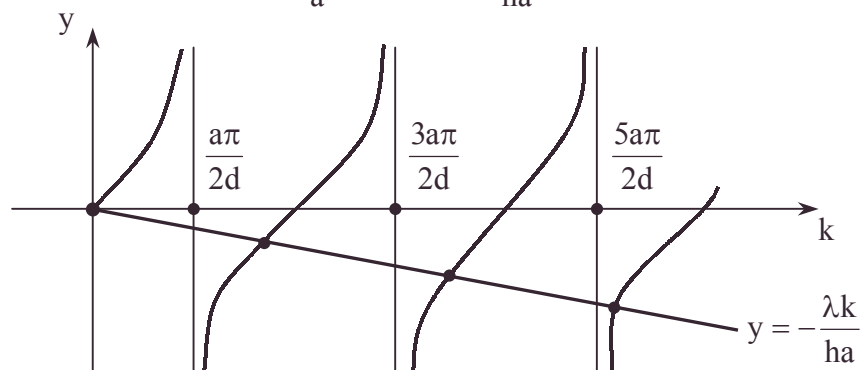
$$T - T_e = A_k \cos \frac{k}{a} z + B_k \sin \frac{k}{a} z ; \vec{J}_{Q_1} = -\lambda \frac{k}{a} \left(-A_k \sin \frac{k}{a} z + B_k \cos \frac{k}{a} z \right) \vec{z}.$$

En $z = 0$, $T_1 - T_e = A_k$; $-\lambda \frac{k}{a} B_k = -h(T_e - T_1)$.

$$B_k = -\frac{ha}{k\lambda} A_k ; \theta_k = A_k \left(\cos \frac{kz}{a} - \frac{ha}{\lambda k} \sin \frac{k}{a} z \right) e^{-k^2 t} ; e^{-k^2 t} \neq 1.$$

14. En $z = -d$, $\theta_k = 0 \Rightarrow \tan \frac{kd}{a} = -\frac{\lambda k}{ha}$.

15. Les intersections de $y = \tan \frac{kd}{a}$ et de $y = -\frac{\lambda k}{ha}$ sont en nombre infini.



On voit que $k = 0$ est solution.

16. $a = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c}}$; A.N. : $a = 1,443 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-\frac{1}{2}}$.

17.a. Cas [NB] : $y = \tan 34,64 k$ coupe $y = -13,86 k$; $k \in [0; 23]$.

On lit sur le graphe : $k_1^{NB} = 0,0685$; $k_2^{NB} = 0,149$; k en $s^{-\frac{1}{2}}$.

b. Cas [B] : $y = \tan 34,64 k$ coupe $y = -0,231 k$; On lit : $k_1^B = 0,090$; $k_2^B = 0,180$. La méthode graphique rapide est en accord avec les calculs.

18. $\ln r = (k_2^2 - k_1^2)t = \ln 10 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 10}{k_2^2 - k_1^2}$; $t_1^{NB} = 132 \text{ s}$; $t_1^B = 95 \text{ s}$.

19. $\ln 0,1 = -k_1^2 t_2$; $t_2 = \frac{\ln 10}{k_1^2}$; $t_2^{NB} = 498 \text{ s}$; $t_2^B = 284 \text{ s}$.

20. On ne conserve que le terme 1 :

$$\theta = \theta_1 = A_1 \left(\cos \frac{k_1 z}{a} - \frac{ha}{\lambda k_1} \sin \frac{k_1}{a} z \right) e^{-k_1^2 t} \Rightarrow A_1 = \frac{\theta e^{k_1^2 t}}{\cos \frac{k_1}{a} z - \frac{ha}{\lambda k_1} \sin \frac{k_1}{a} z}.$$

21.a. [NB] : $\theta = -36 \text{ K}$; $z = -0,025$; $k_1^{\text{NB}} = 0,0686$; $h^{\text{NB}} = 5$.

$$A_{1\text{NB}} = -109,5 \text{ K} ; T_{\text{NB}} = 180 - 109,5 (\cos 47,540z - 1,05 \sin 47,54z) e^{-4,7 \cdot 10^{-3} t}.$$

b. [B] : $\theta = -14 \text{ K}$; $z = -0,025$; $k_1^{\text{B}} = 0,090$; $h^{\text{B}} = 300$.

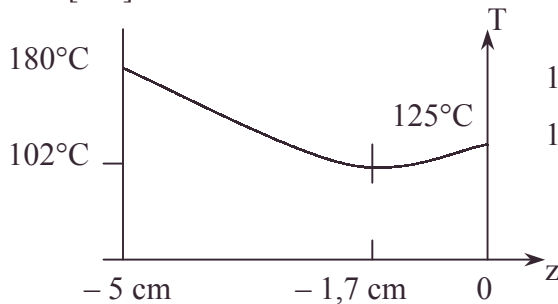
$$A_{1\text{B}} = -3,3 \text{ K} ; T_{\text{B}} = 180 - 3,3 (\cos 62,37z - 48,1 \sin 62,37z) e^{-8,1 \cdot 10^{-3} t}.$$

22. A t donné, on détermine la cote z_m de T minimale puis on détermine t_m quand $\theta_m = -80 \text{ K}$.

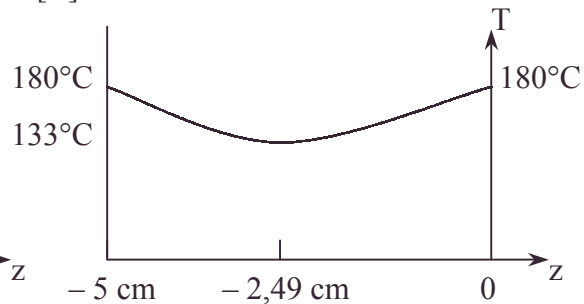
a. [NB] : $z_m = -0,017 \text{ m}$; $t_m = 145 \text{ s}$.

b. [B] : $z_m = -0,025 \text{ m}$; $t_m = 85 \text{ s}$. La validité de l'expression n'est plus valable dans le cadre de l'énoncé mais ce n'est pas inacceptable vu la proximité de 85 s et de 95 s).

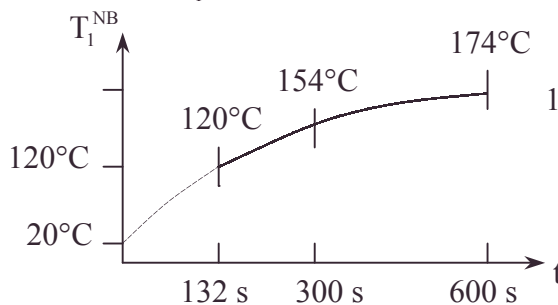
23. [NB] :



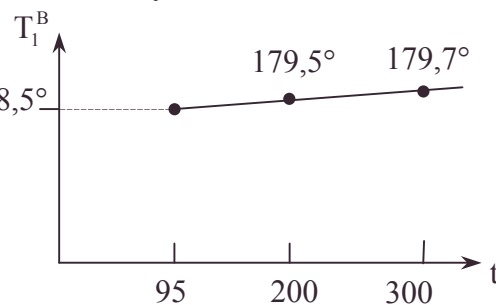
[B] :



24. $z = 0$; $T_1^{\text{NB}} = 180 - 109,5 e^{-4,7 \cdot 10^{-3} t}$



$T_1^{\text{B}} = 180 - 3,3 e^{-8,1 \cdot 10^{-3} t}$



C.25. 270 cm^3 d'air à 20°C occupent 344 cm^3 à 100°C (T_{max}) sous un bar. L'augmentation de volume n'est pas expliquée par la dilatation de l'air. Il faut penser à la vaporisation de l'eau liquide et non pas principalement à la dilatation de la vapeur dans les zones de température supérieure à 100° (cf. air). L'augmentation de volume du soufflé est due à la vapeur d'eau qui reste dans le soufflé et qui vient principalement du fond ; la zone de surface contribue aussi mais de la vapeur s'échappe si la surface supérieure n'est pas étanche (absence de fromage fondu ou de caramel pour les soufflés sucrés).

26. Une augmentation de volume de 2 litres exige la vaporisation de 1,16 g d'eau sous 1 bar à 100°C .

27. En adoptant une densité moyenne de 1 approximativement la perte d'eau serait de 100 g. L'évaporation par la surface supérieure en est la cause, notamment par convection (cf. air brassé). $100 \text{ g} \gg 1,16 \text{ g}$.

28. La formation d'une croûte semble plus rapide dans un four à air pulsé mais le dessèchement sera aussi plus grand pendant la durée de formation. L'examen des courbes de la question **24.** fait préférer le four sans air pulsé car la cuisson de surface peut se faire dans la phase où la température est inférieure à 100°C ("absence" de vaporisation et d'évaporation).

L'utilisation d'un chalumeau est possible si les ingrédients ne carbonisent pas facilement, mais il faut le savoir faire qui assure le succès. On peut utiliser après formation de la croûte le four à air pulsé qui assure une meilleure répartition de température (cf. **23.**), ce qui permet d'abaisser la température, évitant ainsi la probabilité de surchauffe locale, carbonisation...

4.7.5. Résistances de ligne électrique et thermique

1. Etude d'un câble électrique coaxial.

Soit un câble électrique coaxial constitué par un conducteur central de résistivité ρ , de rayon R_1 , séparé de l'armature externe de rayon R_2 par un isolant de résistivité ρ' . L'armature externe est en tous ses points à la masse du montage par laquelle se fait le retour du courant.

La sortie S du conducteur central est reliée à la masse par une résistance X , l'entrée étant reliée au potentiel V_0 et servant d'origine pour repérer l'abscisse x d'un point du câble (cf. figure 1).

Le générateur délivrant V_0 est supposé parfait.

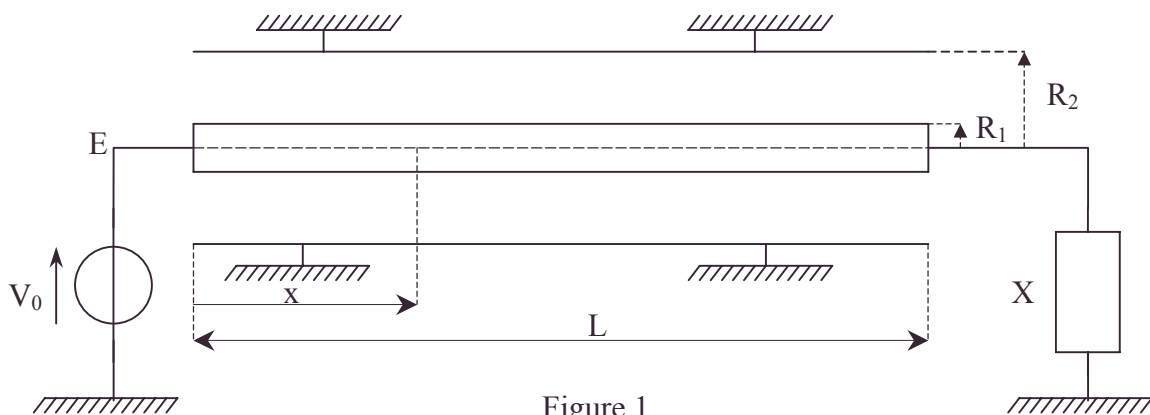


Figure 1.

1. Exprimer par mètre de longueur de câble :— la résistance r du conducteur central.
— la résistance de fuite R' de l'isolant.
2. Montrer que l'on peut écrire à l'abscisse x une relation entre $\frac{dU}{dx}$ et I d'une part, et une entre $\frac{dI}{dx}$ et U d'autre part, U et I désignant respectivement, à l'abscisse x , le potentiel du conducteur central et l'intensité du courant qui parcourt ce conducteur central.
3. En déduire deux équations différentielles, une en $U(x)$, l'autre en $I(x)$.
4. Le câble étant alimenté par la d.d.p. V_0 et fermé sur la résistance X comme indiqué à la figure 1, à une longueur totale L . Intégrer les équations différentielles précédentes.

On posera, pour simplifier, $R_0 = \sqrt{rR'}$ et $\delta = L\sqrt{\frac{r}{R'}}$.

5. Application numérique. On donne :

$$\begin{array}{llll} \rho = 2.10^{-8} \Omega.m & \rho' = 10^6 \Omega.m & R_1 = 2.10^{-3} m. & R_2 = 5,4.10^{-3} m \\ L = 10^4 m & V_0 = 110 V. & X = 96 \Omega. & \end{array}$$

Quelles sont les expressions numériques de $U(x)$ et $I(x)$?

Représenter l'allure des graphes de $U(x)$ et $I(x)$. Précisez en particulier les points $x = 0$ et $x = L$.

6. Exprimer la résistance d'entrée R_e du câble vue entre le point E et la masse. Faire l'application numérique.

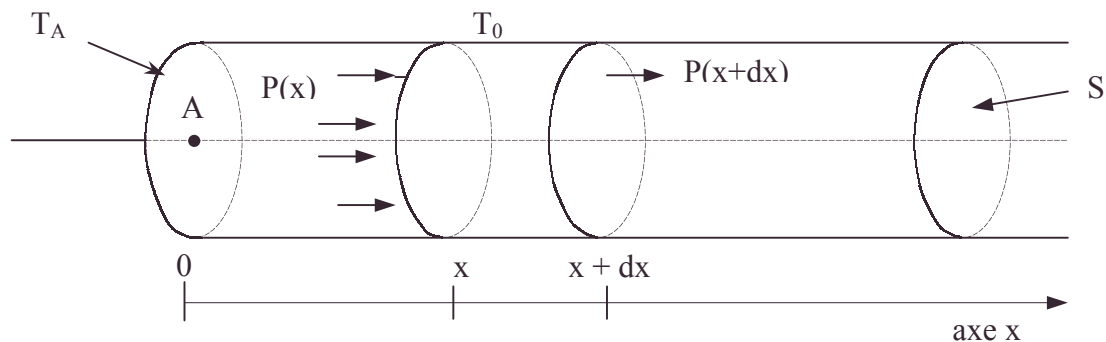
7. Pour quelle valeur particulière de X a-t-on une résistance d'entrée R_e égale à $R_e = \sqrt{rR'}$? Quelle est alors la loi $U = U(x)$?

8. Donner l'expression à l'abscisse x de $\frac{U}{I}$. Donner un nom.

2. Transmission de la chaleur par une barre cylindrique.

Une barre de cuivre homogène, de section droite S , de périmètre de section p , a une longueur supposée infinie (figure 2).

L'extrémité A de la barre (côté gauche) est maintenue à une température uniforme T_A , supérieure à la température T_0 du milieu ambiant. On appelle $P(x)$ la puissance thermique (en W) traversant la surface S à l'abscisse x . On pose $\theta(x) = T(x) - T_0$.



1. Ecrire la loi de Fourier traduisant la transmission de la chaleur par conduction.

En déduire une relation entre $P(x)$, $\frac{d\theta}{dx}$, σ et S , où σ est la conductivité thermique du cuivre.

2. Les pertes de puissance thermique par convection sont proportionnelles à la surface d'échange entre la barre et le milieu extérieur, ainsi qu'à l'écart de température entre la barre et le milieu extérieur. On appelle h le coefficient de proportionnalité.

En déduire une relation entre $\frac{dP}{dx}$ et $\theta(x)$, en faisant un bilan thermique sur une longueur dx infiniment petite de la barre.

3. Déduire de 2.1. et 2.2. les équations différentielles en $\theta(x)$ et en $P(x)$.

On posera $a^2 = \frac{\sigma S}{hp}$.

4. Application numérique

On considère une barre cylindrique de diamètre $2.10^{-2} m$.

On adopte $T_A = 350 K$; $T_0 = 300 K$; $\sigma = 400 W.m^{-1}.K^{-1}$; $h = 8 W.m^{-2}.K^{-1}$. Calculer a . Donner les expressions numériques de $\theta(x)$ et $P(x)$ et représenter l'allure des graphes.

5. Calculer l'abscisse de la barre où $T = 301 K$.

• analogie, conductivité thermique, convection, équation de Fourier de la chaleur, graphe, résistance thermique

L'approximation de la barre infinie est-elle justifiée ?

6. En comparant les équations obtenues pour le câble coaxial et la barre de cuivre, indiquer l'équivalent électrique des grandeurs thermodynamiques θ , P , σ , a , h_p , σ_S .

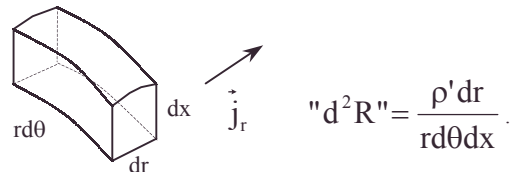
7. Par comparaison avec la question 1.6., définir la résistance thermique à l'extrémité A d'une barre de longueur finie L et donner son expression.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

1.1.a. $r = \frac{\rho}{\pi R_1^2}$; unité : $\Omega \cdot m^{-1}$

b. Pour l'élément de résistance de fuite



– Pour les éléments (à $d\theta$, dx donnés) en série entre R_1 et R_2 forment un "fil" :

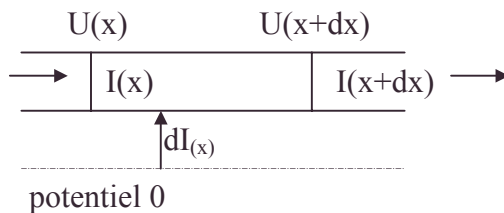
$$"dR" = \int d^2R = \frac{\rho}{d\theta dx} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

– Pour les « fils » placés en parallèle :

$$\text{l'intégration en } \theta \text{ donne : } dG = \int \frac{d\theta dx}{\rho' \ln \frac{R_2}{R_1}} \Rightarrow \frac{2\pi dx}{\rho' \ln \frac{R_2}{R_1}} ; G' = \frac{dG}{dx} = \frac{2\pi}{\rho' \ln \frac{R_2}{R_1}} ;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{G'} = \frac{\rho'}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = R' ; \text{ unité : } \Omega \cdot m ;$$

2.



a. La loi d'Ohm s'écrit :

$$U(x) - U(x+dx) = r dx I(x) \Rightarrow -\frac{dU}{dx} = rI$$

b. La loi d'Ohm s'écrit aussi :

$$dI = -G' dx U \Rightarrow \frac{dI}{dx} = -G' U$$

$$\text{ou } -R' \frac{dI}{dx} = U.$$

3.a. Eliminons I : $\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{rU}{R'}$

b. Eliminons U : $\frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{r}{R'} I$.

4. $U = A_1 e^{\frac{\delta x}{L}} + A_2 e^{-\frac{\delta x}{L}} \Rightarrow I = -\frac{\delta}{rL} \left(A_1 e^{\frac{\delta x}{L}} - A_2 e^{-\frac{\delta x}{L}} \right) = -\frac{1}{R_0} \left[A_1 e^{\frac{\delta x}{L}} - A_2 e^{-\frac{\delta x}{L}} \right].$

En $x = 0$, $U = V_0 = A_1 + A_2$; en $x = L$, $U(L) = XI(L)$; soit

$$A_1 e^{\delta} + A_2 e^{-\delta} = -\frac{X}{R_0} (A_1 e^{\delta} - A_2 e^{-\delta}) ;$$

$$A_1 = \frac{\left(\frac{X}{R_0} - 1 \right) \frac{V_0}{2} e^{-\delta}}{\sinh \delta + \frac{X}{R_0} \cosh \delta} ; A_2 = \frac{\left(\frac{X}{R_0} + 1 \right) \frac{V_0}{2} e^{+\delta}}{\sinh \delta + \frac{X}{R_0} \cosh \delta}.$$

• condition limite, graphe, loi d'Ohm, unité

5.a. $r = 1,59 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ m}^{-1}$; $R' = 158081 \Omega \text{ m}$.

$R_0 = 15,85 \Omega$. $\delta = 1,00$.

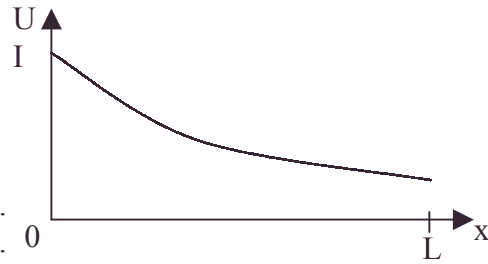
b. $U = 10 \cdot e^{10^{-4}x} + 100 \cdot e^{-10^{-4}x}$ (en V).

$I = -0,63 \cdot e^{10^{-4}x} + 6,30 \cdot e^{-10^{-4}x}$ (en A).

c. En $x = 0 \text{ m}$. $U = 110 \text{ V}$. $I = 5,72 \text{ A}$.

En $x = 10000 \text{ m}$. $U = 63,9 \text{ V}$ $I = 0,60 \text{ A}$.

Il n'y a pas d'extremum dans l'intervalle $[0, L]$.



6. $R_e = \frac{V_0}{I_0} = -\frac{V_0 R_0}{A_1 - A_2} = R_0 \frac{\sinh \delta + \frac{X}{R_0} \cosh \delta}{\cosh \delta + \frac{X}{R_0} \sinh \delta}$; AN : $R_e = 19,3 \Omega$.

7. $X = R_0 \Rightarrow R_e = R_0 \Rightarrow A_1 = 0, U = V_0 e^{-\frac{\delta x}{L}}$.

8. On a la résistance de ligne à l'abscisse x : $R(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = R_0 \left(\frac{A_1 e^{\frac{\delta x}{L}} + A_2 e^{-\frac{\delta x}{L}}}{A_2 e^{\frac{\delta x}{L}} - A_1 e^{-\frac{\delta x}{L}}} \right)$;

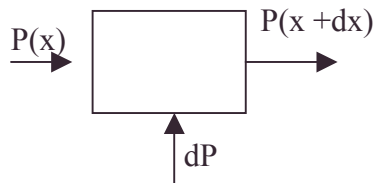
$$R(x) = R_0 \frac{\left[\left(\frac{X}{R_0} - 1 \right) e^{\delta \left(\frac{x}{L} - 1 \right)} + \left(\frac{X}{R_0} + 1 \right) e^{-\delta \left(\frac{x}{L} - 1 \right)} \right]}{\left(\frac{X}{R_0} + 1 \right) e^{-\delta \left(\frac{x}{L} - 1 \right)} - \left(\frac{X}{R_0} - 1 \right) e^{\delta \left(\frac{x}{L} - 1 \right)}} ;$$

$$R(x) = R_0 \frac{\left(X \cosh \left(\delta \frac{x-L}{L} \right) - R_0 \sinh \left(\delta \frac{x-L}{L} \right) \right)}{R_0 \cosh \left(\delta \frac{x-L}{L} \right) - X \sinh \left(\delta \frac{x-L}{L} \right)} . \text{ On vérifie pour } x = 0 \text{ et } x = L.$$

II.1. $j_{Qx} = -\sigma \frac{dT}{dx}$ (cf. régime stationnaire).

$P(x) = j_Q S = -\sigma S \frac{dT}{dx} \Rightarrow P = -\sigma S \frac{d\theta}{dx}$.

2.



$$dP = -h (T(x) - T_0) \cdot 2\pi R dx.$$

$$\frac{dP}{dx} = -h \theta(x) p.$$

3. Eliminons θ : $\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{hp}{\sigma S} P$ de la forme $P'' = \frac{P}{a^2}$.

Eliminons P ; $\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{hp}{\sigma S} \theta$ de la forme $\theta'' = \frac{\theta}{a^2}$.

4.a. $P = A_1 e^{\frac{x}{a}} + A_2 e^{-\frac{x}{a}}$; $\theta = -\frac{1}{hpa} \left(A_1 e^{\frac{x}{a}} - A_2 e^{-\frac{x}{a}} \right)$.

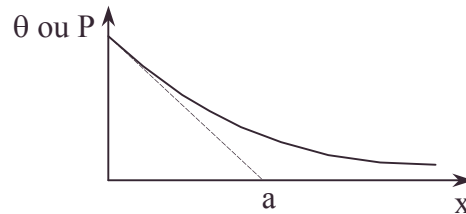
$$x \rightarrow \infty \Rightarrow A_1 = 0 ; \theta = \frac{A_2 e^{-\frac{x}{a}}}{\sqrt{\sigma h P s}} ; \text{ or en } x = 0, \theta = T_A - T_0 = \frac{2A_2}{\sqrt{\pi^2 \phi^3 h \sigma}}.$$

$$\theta = (T_A - T_0) e^{-\frac{x}{a}} ; P = \pi \frac{(T_A - T_0)}{2} \phi^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{a}} \quad (\phi \text{ le diamètre}).$$

b. $a = \sqrt{\frac{\sigma \phi}{4h}} ; \text{ A.N. : } a = 0,5 \text{ m.}$

$$\theta = 50 e^{-2x} \text{ en K.}$$

$$P = 12,57 e^{-2x} \text{ en W.}$$



5. $x = a \ln \left[\frac{T_A - T_0}{T - T_0} \right] ; \text{ A.N. : } x = 1,95 \text{ m} \gg 2 \cdot 10^{-2} \quad x \gg \phi.$

L'approximation est justifiée.

6. Analogies: cf. $P = j_Q S ; I = j S.$

P	I
θ	U
σS	r^{-1}
σ	$\frac{1}{rS} = \frac{1}{\rho}$
$h p$	$G' = \frac{1}{R'}$
a	$\sqrt{\frac{R'}{r}} = \frac{L}{\delta}$

$$7. R_{th} = \frac{T_A - T_0}{P_0} = \frac{1}{\sqrt{\sigma h p s}} \tanh \frac{L}{a} \quad \text{avec } T_L = T_0.$$

4.7.6. Equation de Fourier

Applications : gel d'un lac – résistance thermique

I. Modèle unidimensionnel : régime stationnaire

On considère un milieu matériel conducteur de la chaleur et on suppose que cette dernière ne se propage que selon une dimension d'espace Oz de sorte que si $T(z,t)$ donne le profil de température du milieu, la quantité de chaleur dq traversant une section du matériau perpendiculairement à Oz, d'aire S, en un temps dt et comptée

• analogie, conductivité thermique, équation de Fourier de la chaleur, gel d'un lac, résistance thermique, unidimensionnalité

positivement dans le même sens que Oz, est donnée par : $dq = -\lambda S \left(\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right) dt$ (1) où

λ désigne la conductibilité thermique, supposée constante, du milieu. Soient en outre ρ_o la masse volumique de ce milieu et c sa capacité calorifique massique.

1. Montrer que le profil de température est donné par l'équation différentielle :

$$\rho_o c \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2).$$

2. Donner les dimensions de ρ_o , c , λ et $D = \frac{\lambda}{\rho_o c}$; l'équation (2) montre que la

propagation de la chaleur n'est en fait régie que par un coefficient unique D , appelé coefficient de diffusion.

3. Donner le type de variation de T si l'on se trouve en régime stationnaire. On désignera par la suite sous le nom de régime quasi-stationnaire tout régime où l'on peut effectivement poser $\partial / \partial t = 0$.

4. Que peut-on dire des quantités de chaleur traversant, en régime quasi-stationnaire, une surface S à un instant donné ?

II. Première application : gel d'un lac

On se propose de modéliser la croissance en régime quasi stationnaire d'une couche de glace à la surface d'un lac gelé. On pose pour cela que l'eau du lac est à la température de congélation T_c . Cette eau est recouverte d'une couche de glace d'épaisseur $\ell(t)$; l'air est à la température constante T_a . La chaleur dégagée par la solidification de l'eau à l'interface eau-glace est transportée vers la surface où elle est libérée dans l'air. On suppose en outre que la surface de glace en contact avec l'air est à la température $T_s(t)$, fonction du temps, et donc différente de T_a . Enfin, l'échange de chaleur à travers une section d'aire S est supposé vérifier la relation : (3) $dq = -hS(T_a - T_s(t))dt$ où h est une constante positive.

La glace a une masse volumique ρ_g , une conductibilité thermique λ_g , et une chaleur latente de solidification L_g ; l'air a une conductibilité thermique λ_a .

Pour les applications numériques on prendra :

$$\begin{array}{lll} T_c = 273 \text{ K} ; & \rho_g = 900 \text{ kg.m}^{-3} ; & L_g = 3,33.10^5 \text{ J.kg}^{-1} ; \\ T_a = 253 \text{ K} ; & \lambda_g = 2,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} ; & \lambda_a = 0,025 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} ; \\ \text{et, enfin,} & h = 50 \text{ kg.s}^{-3}.\text{K}^{-1} . \end{array}$$

1. Justifier par des considérations physiques le choix des températures des interfaces air / glace et glace / eau.

2. On admet maintenant que la température de l'air varie très vite de $T_s(t)$ à T_a sur une distance a au voisinage de l'interface air / glace ; montrer que cette hypothèse est cohérente avec la relation (3) , compte tenu de l'équation (1). Relier alors h aux paramètres introduits ci-dessus ; calculer la valeur numérique de a et commenter le modèle proposé.

3. Supposant la fonction $T_s(t)$ connue et compte tenu de l'hypothèse de quasi-stationnarité (que l'on ne cherchera pas à discuter ici), établir l'équation différentielle de croissance de l'épaisseur $\ell(t)$ en fonction de ρ_g , L_g , T_c et $T_s(t)$.

4. Supposant la fonction $\ell(t)$ connue, établir par ailleurs la relation liant la loi de température $T_s(t)$ à λ_g , T_c , T_a , h et $\ell(t)$. Supposant $\ell(0) = 0$, donner, très qualitativement, l'allure des fonctions $\ell(t)$ et $T_s(t)$; en particulier, indiquer leurs variations, d'une part à l'origine du processus, d'autre part lorsque le temps augmente indéfiniment.

5. La question précédente fait apparaître deux grandeurs ayant respectivement les dimensions d'une vitesse et d'un coefficient de diffusion : nous admettrons que cela permette de déterminer une vitesse, un temps et une longueur caractéristiques du problème ; donner l'expression et la valeur numérique de chacune de ces quantités . En profiter pour vérifier l'homogénéité des formules et pour discuter l'hypothèse de quasi-stationnarité.

6. Donner la loi explicite de variation de $\ell(t)$ (on suppose toujours que $\ell(0) = 0$) ; tracer le graphe correspondant.

7. Donner la valeur numérique du temps nécessaire à la formation du premier centimètre de glace t_1 , et la température de $T_s(t_1)$ à cet instant. Calculer le temps t_2 au bout duquel T_s ne diffère plus que de 1 K de sa valeur limite et enfin, l'épaisseur de la glace correspondante.

III. Seconde application : résistance thermique.

L'équation (1) de la partie I. généralisée à trois dimensions, peut être interprétée en termes de la densité du courant de chaleur \vec{J} . (4) $\vec{J} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T}$ dont le flux à travers un élément de surface dS donne la quantité de chaleur traversant cet élément pendant l'unité de temps ; le signe "-" dans (4) traduit le fait que l'écoulement de chaleur se fait des points "chauds" vers les points "froids".

1. Donner l'analogie de l'équation (4) en électricité ; quels y sont les analogues respectivement de λ et de T ?

2. Montrer que pour un phénomène à symétrie sphérique :

$$(5) \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\lambda}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

On considère deux coquilles sphériques concentriques S_1 et S_2 de même masse et faites du même matériau, de résistance thermique quasi nulle (c'est-à-dire de conductivité thermique quasiment infinie). La capacité calorifique de chaque coquille, définie comme le produit de leur masse par leur capacité calorifique massique, vaut Γ . Le solide S_2 , de rayon intérieur A_2 , entoure le solide S_1 de rayon extérieur A_1 . Le milieu entre les deux coquilles possède une conductivité thermique λ . La capacité calorifique de ce milieu est nulle. Le système ainsi constitué est considéré comme isolé. Dans une première configuration expérimentale, le flux thermique ϕ à travers les sphères maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2 s'écoule de façon stationnaire ; la résistance thermique R_T est définie par le rapport : (6) $R_T = (T_2 - T_1) / \phi$.

3. Calculer R_T en fonction de A_1 , A_2 et λ .

Dans une seconde configuration expérimentale, on laisse le système évoluer librement à partir de l'instant $t = 0$ auquel correspondent les températures $T_1(0)$ et $T_2(0)$ avec $T_1(0) > T_2(0)$.

4. Etablir les deux relations (7)

(a) $T_1(t) + T_2(t) = T_1(0) + T_2(0)$.

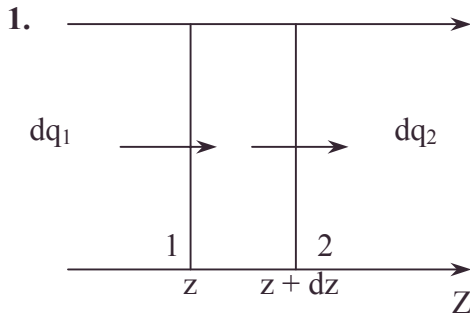
(b) $T_1(t) - T_2(t) = (T_1(0) - T_2(0)) \exp -(t/\tau)$.

où le paramètre τ , dont on vérifiera la dimension, est défini par $\tau = \Gamma R_T / 2$.

5. Calculer la variation d'entropie ΔS du système entre l'état initial et l'état final (correspondant à $t \gg \tau$). Commenter le résultat obtenu.

6. Calculer le taux de production d'entropie dS/dt à un instant t en fonction de $T_1(t)$, $T_2(t)$ et de la constante R_T déterminée plus haut.

Mines ; Durée : 2h

Corrigé**I. Equation de la chaleur**

Le bilan des énergies calorifiques $dq_1 - dq_2$ sert à échauffer le milieu :

$$dq_1 - dq_2 = (\rho_o S dz) c dT.$$

Raisonnons par unité de temps, en puissance :

$$\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} = \rho_o S dz c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{ou}$$

$$-\lambda S \frac{\partial T}{\partial z}(z, t) + \lambda S \frac{\partial T}{\partial z}(z + dz, t) = \rho_o S dz \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\text{Soit } \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

2. ρ_o en kg.m^{-3} , c en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, λ en $\text{J.s}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, D en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

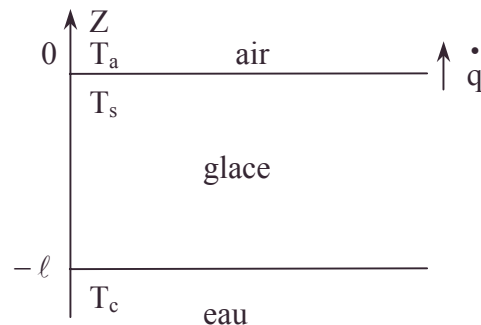
$$D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad D \text{ unique paramètre (diffusivité thermique).}$$

3. $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ en régime stationnaire $\Rightarrow T(z) = az + b$.

4. $\dot{q}(0, t) = \dot{q}(z, t)$: la chaleur entrante compense la chaleur sortante à travers toute section (sans que rien ne l'utilise).

II. Gel d'un lac

1. L'interface air-glace subit une discontinuité de température $T_a - T_s$ due au gradient de température important sur une faible distance, il permet par conduction l'augmentation d'épaisseur de la glace grâce à l'interface glace-eau qui est à la température T_c du changement d'état.



2. Il suffit d'assimiler :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_a \# \frac{T_a - T_s}{a} \quad \text{ainsi} \quad dq = -\lambda_a S \frac{\partial T}{\partial z} dt = -\lambda_a S \frac{T_a - T_s}{a} dt = -hS(T_a - T_s)dt \quad \text{si} \quad h = \frac{\lambda_a}{a}.$$

On a bien cohérence des propositions.

$$\text{A.N. : } a = \frac{\lambda_a}{h} : a = 0,5 \text{ mm.}$$

On suppose que la zone d'épaisseur a existe, ce qui n'est pas le cas au tout début du régime transitoire. L'approximation numérique est valable car a est petit.

3. Dans la glace $T_g = az + b$ avec $z = 0$ $T_g = T_s$; $z = -l$; $T_g = T_c$;

$$\text{soit } T_g = T_s - (T_c - T_s) \frac{z}{l}.$$

$$\text{d'où } dq = -\lambda_g \frac{\partial T}{\partial z} S dt = \lambda_g S \left[\frac{T_c - T_s}{l} \right] dt, \quad \text{départ de chaleur vers les } z \text{ croissants}$$

correspondant à la congélation d'une épaisseur de glace $d\ell$ soit $\rho_g S d\ell L_g = dq$.

• développement au premier ordre ou plus, diffusivité thermique, dimension, équation de Fourier de la chaleur, gel d'un lac, gradient, unité

On obtient : $\ell \frac{d\ell}{dt} = \frac{\lambda_g}{L_g \rho_g} (T_c - T_s)$; on rappelle que T_s et ℓ sont des fonctions de t .

4.a. L'air restant à la température T_a : en $z = 0$, on a :

$$\frac{dq}{dt}(0) = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z} S = -hS(T_a - T_s) \quad \text{cf. II.2 et I.4.}$$

$$\text{or } \frac{\partial T_g}{\partial z} = -\frac{(T_c - T_s)}{\ell} \Rightarrow T_s = \frac{hT_a + \frac{\lambda_g}{\ell} T_c}{h + \frac{\lambda_g}{\ell}} \quad \text{et } \ell = \frac{-(T_c - T_s)\lambda_g}{hs(T_a - T_s)}.$$

b. Quand ℓ est infiniment petit, faisons des développements limités en ℓ :

$$T_s = \frac{\lambda_g T_c \left(1 + \frac{\ell}{\lambda_g} \frac{h}{T_c} T_a\right)}{\lambda_g \left(1 + h \frac{\ell}{\lambda_g}\right)} = T_c \left(1 + \frac{\ell h}{\lambda_g} \frac{T_a}{T_c}\right) \left(1 - \frac{h\ell}{\lambda_g}\right) \Rightarrow T_s = T_c \left(1 + \frac{\ell h}{\lambda_g} \left(\frac{T_a}{T_c} - 1\right)\right).$$

Substituons T_s dans **II.3.** : $\ell \frac{d\ell}{dt} = \frac{\lambda_g}{L_g \rho_g} \frac{\ell h}{\lambda_g} (T_c - T_a)$ soit $\frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{L_g \rho_g} h (T_c - T_a)$;

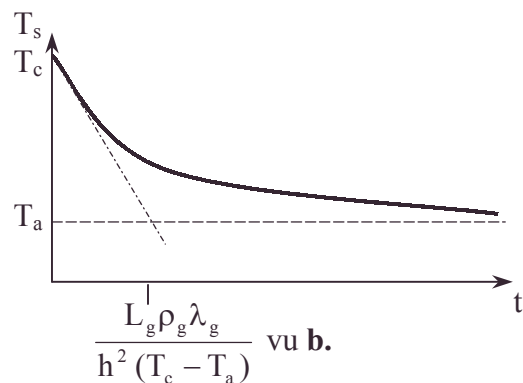
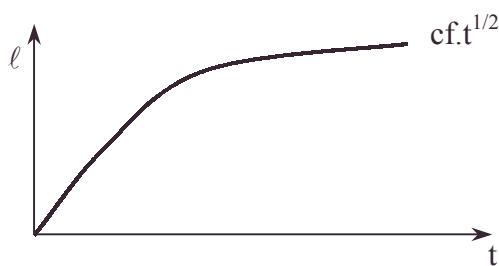
$$\ell \neq \frac{h t}{L_g \rho_g} (T_c - T_a) + 0 \quad \text{et} \quad T_s = T_c - \frac{h^2}{L_g \rho_g \lambda_g} (T_c - T_a)^2 t ; \quad \frac{dT_s}{dt} = \frac{-h^2}{L_g \rho_g \lambda_g} (T_c - T_a).$$

c. Quand ℓ est infiniment grand, faisons des développements limités en $\frac{1}{\ell}$:

$$T_s = \frac{hT_a \left(1 + \lambda_g \frac{T_c}{\ell h T_a}\right)}{h \left(1 + \frac{\lambda_g}{h\ell}\right)} ; \quad T_s = T_a \left[1 + \frac{\lambda_g}{\ell h T_a} (T_c - T_a)\right] \Rightarrow T_s \rightarrow T_a \text{ quand } \ell \rightarrow \infty.$$

Substituons T_s dans **II.3.** ; $\ell \frac{d\ell}{dt} = \frac{\lambda_g}{L_g \rho_g} (T_c - T_a)$; $\frac{\ell^2}{2} = \frac{\lambda_g}{L_g \rho_g} (T_c - T_a) t + 0$;

$$\text{soit } \ell \neq \sqrt{2 \frac{\lambda_g}{L_g \rho_g} (T_c - T_a) t}.$$



5. $v_1 = \frac{d\ell}{dt}$ a les unités d'une vitesse : m.s^{-1} ; $D_1 = \frac{d[\ell^2]}{dt}$ a les unités de D : $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

On peut définir : – une durée $\tau_1 = \frac{D_1}{v_1}$ qui a s comme unité.

– une longueur $L_1 = \tau_1 v_1$ qui a m comme unité.

A.N. : cf. **II.4.b.** $v_1 = \frac{h}{L_g \rho_g} (T_c - T_a)$ soit $v_1 = 3,367 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$.

cf. **II.4.c.** $D_1 = \frac{2\lambda_g}{L_g \rho_g} (T_c - T_a)$ soit $D_1 = 2,828 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

$$\tau_1 = \frac{2\lambda_g L_g \rho_g}{h^2 (T_c - T_a)} \quad \text{soit } \tau_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ s.}$$

$$L_1 = \frac{2\lambda_g}{h} \quad \text{soit } L_1 = 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Ces ordres de grandeur correspondent avec l'expérience; la "faible" vitesse permet d'accepter la quasi-stationnarité.

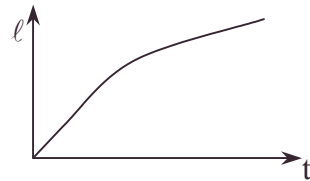
Vu le graphe de $T_s(t)$, il faudrait diviser les expressions par 2 mais on ne recherchait que les ordres de grandeur.

6. Ecrivons : $T_c - T_s = \frac{T_c \left(1 + \frac{h\ell}{\lambda_g}\right) - T_c \left(1 + \frac{\ell h T_a}{\lambda_g T_c}\right)}{1 + \frac{h\ell}{\lambda_g}} = \frac{T_c - T_a}{1 + \frac{\lambda_g}{h\ell}}$.

II.3 $\Rightarrow \ell \frac{d\ell}{dt} = \frac{\lambda_g}{L_g \rho_g} \frac{(T_c - T_a)}{1 + \frac{\lambda_g}{h\ell}} = \frac{D_1}{2 \left(1 + \frac{\lambda_g}{h\ell}\right)} = \frac{D_1}{2 \left(1 + \frac{L_1}{2\ell}\right)} = \frac{D_1}{2 + \frac{L_1}{\ell}};$

$$2(2\ell + L_1) \frac{d\ell}{dt} = 2D_1; \quad \frac{1}{2}(2\ell + L_1)^2 = 2D_1 t + \frac{L_1^2}{2} \Rightarrow (2\ell + L_1)^2 = 4D_1 t + L_1^2;$$

$$\ell = \frac{L_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4D_1}{L_1^2} t} - 1 \right] = \frac{L_1}{2} \left[\sqrt{1 + 4 \frac{t}{\tau_1}} - 1 \right].$$



On voit l'intérêt de l'analyse aux dimensions de **II.5**.

7.a. On tire : $t_1 = \frac{\ell_1}{D_1} (\ell_1 + L_1) = \frac{\left(\ell_1 L_g \rho_g \left(\ell_1 + \frac{2\lambda_g}{h} \right) \right)}{2\lambda_g (T_c - T_a)}$; AN : $t_1 = 3324 \text{ s}$.

$$T_s(t_1) = \frac{h\ell_1 T_a + \lambda_g T_c}{h\ell_1 + \lambda_g} ; \text{ AN : } T_s(t_1) = 269 \text{ K.}$$

b. t_2 est défini par $T_s(t_2) - T_a = \Delta T_s$; AN : $\Delta T_s = 1 \text{ K}$.

II.4.a. $\Rightarrow \ell(t_2) = \frac{\lambda_g}{h} \frac{(T_c - T_a - \Delta T_s)}{\Delta T_s}$; AN : $\ell(t_2) = 0,798 \text{ m}$.

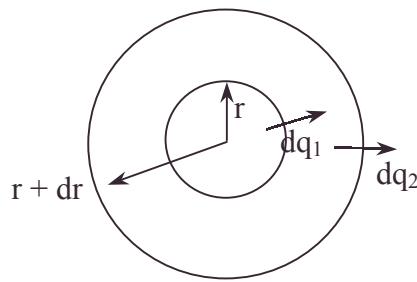
II.6. $\Rightarrow t_2 = \frac{\ell_2}{D_1} (\ell_2 + L_1)$.

AN : $t_2 = 2488563 \text{ s}$ (28,8 jours).

• analyse dimensionnelle, ARQS, graphe, unités

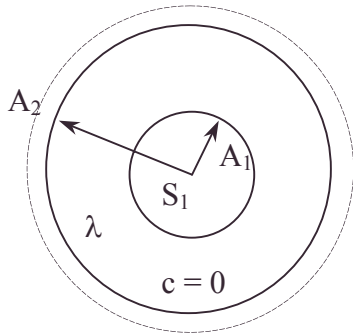
III.1. La loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, (pour un élément de volume immobile où $\vec{B} = \vec{0}$) donne $\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}V}$. L'analogie est immédiate avec $\vec{J} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$; on a les analogies : $\lambda \curvearrowright \gamma$; $T \curvearrowright V$.

2. Recommençons comme en I.1., le bilan sur les surfaces sphériques qui sert à échauffer la pellicule sphérique : $dq_1 - dq_2 = (\rho \cdot 4\pi r^2 dr) c dT$, soit en puissance :



$$\begin{aligned} \phi(r_1) - \phi(r+dr, t) &= \\ -\lambda 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r}(r, t) + \lambda (4\pi(r+dr)^2) \frac{\partial T}{\partial r}(r+dr, t) \\ &= (\rho \cdot 4\pi r^2 dr) c \frac{\partial T}{\partial t} . \\ \lambda \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) &= \rho r^2 c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

3.



En régime stationnaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{0} .$$

$$\phi = \iint \vec{J} d\vec{S} = J(r) \cdot 4\pi r^2 = -\lambda \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} = \frac{dq_1}{dt}$$

$$\text{cf. III.2.} \Rightarrow -\frac{d\phi}{dr} = 0 ;$$

$$\phi = K \text{ constant.} \Rightarrow dT = \frac{-K dr}{\lambda 4\pi r^2} = \frac{-K dr}{4\pi \lambda r^2} ;$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = \int_1^2 dT = -\int \frac{K dr}{4\pi \lambda r^2} = \frac{\phi}{4\pi \lambda} \left[\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right] \Rightarrow R_T = \frac{1}{4\pi \lambda} \frac{A_2 - A_1}{A_1 A_2} .$$

4. En régime non stationnaire $\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0$;

$$c = 0 \text{ entre } S_1 \text{ et } S_2 \Rightarrow \phi(r, t) - \phi(r+dr, t) = 0 \Rightarrow -\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 ; \phi(t) \text{ est indépendant de } r .$$

a. Faisons un bilan pour S_1 et pour S_2 , l'ensemble étant isolé ;

$$\text{sur } S_1, \Gamma \frac{dT_1}{dt} = -\phi \text{ (signe justifié physiquement par } T_1(0) > T_2(0), \phi > 0) .$$

$$\text{sur } S_2, \Gamma \frac{dT_2}{dt} = +\phi .$$

$$\text{Pour } S_1 \cup S_2, \Gamma \left(\frac{dT_1}{dt} + \frac{dT_2}{dt} \right) = 0 ; \text{ par intégration, } T_1(t) + T_2(t) = T_1(0) + T_2(0) \text{ (7) (a).}$$

b. Reprenons III.3. ; en régime non stationnaire $\phi(t) = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}(r, t)$.

$$dT = -\frac{\phi(t) dr}{\lambda 4\pi r^2} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{-\phi(t)}{4\pi \lambda} \int_{A_1}^{A_2} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow T_1(t) - T_2(t) = R_T \phi(t) ,$$

R_T réputée constante avec t si λ est indépendant de T .

Reprenons III.4.a. en remplaçant $\phi(t)$

• analogie, loi d'Ohm, résistance thermique

$$\text{Sur } S_1, \Gamma \frac{dT_1}{dt} = \frac{(T_2 - T_1)}{R_T} \quad (1).$$

$$\text{Sur } S_2, \Gamma \frac{dT_2}{dt} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_T} \quad (2).$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \Gamma \frac{d(T_1 - T_2)}{dt} = -2 \frac{(T_1 - T_2)}{R_T}, \text{ soit } \frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2} = \frac{-2dt}{R_T \Gamma} = \frac{-dt}{\tau};$$

$$\text{avec } \tau = \frac{R_T \Gamma}{2}. \text{ On a bien } T_1(t) - T_2(t) = (T_1(0) - T_2(0))e^{\frac{-t}{\tau}}. \quad (7) \quad (b)$$

Unité de ΓR_T : $(J.kg^{-1}.K^{-1}.kg).K.W^{-1}$ (avec $W = \frac{J}{s}$) ; soit la seconde.

5. Pour S_1 , $dS_1 = \Gamma \frac{dT_1}{T_1}$, $\Delta S_1 = \Gamma \ln \frac{T_F}{T_1(0)}$ avec $T_F = \frac{T_1(0) + T_2(0)}{2}$ vu l'égalité des masses ;

$$\text{Pour } S_2, dS_2 = \Gamma \frac{dT_2}{T_2}, \Delta S_2 = \Gamma \ln \frac{T_F}{T_2(0)};$$

comme $c = 0$ pour le milieu intermédiaire et que l'ensemble est isolé.

$$\text{On a pour le système } \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \Gamma \ln \left[\frac{(T_1(0) + T_2(0))^2}{4T_1(0)T_2(0)} \right];$$

$(T_1(0) + T_2(0))^2 \geq 4T_1(0)T_2(0)$ car $(T_1(0) - T_2(0))^2 \geq 0$, on en déduit $\Delta S \geq 0$, soit $\Delta S > 0$ si $T_1 \neq T_2$.

L'uniformisation de la température correspond à l'évolution spontanée de ce système isolé.

$$6. \frac{dS}{dt} = \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt}; \text{ or vu III.4. et III.5.}, \frac{dS}{dt} = \frac{-\phi}{T_1} + \frac{\phi}{T_2} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_T} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right);$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{(T_1(t) - T_2(t))^2}{R_T T_1(t) T_2(t)} > 0.$$

4.7.7. Détendeur adiabatique d'un gazoduc

Voir page 582.

4.7.8. Tirage d'un monocristal de germanium

Voir page 680.

4.7.9. Génie chimique d'une unité de production d'ammoniac

Voir page 1499

4.8. Rayonnement du corps noir

Appartient au programme de MP

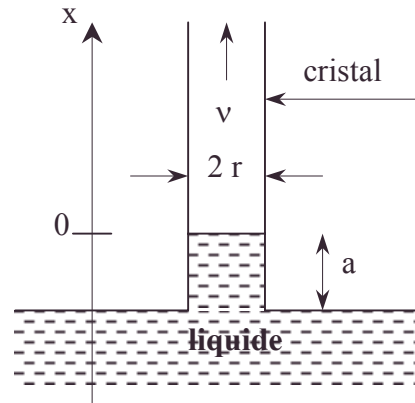
4.8.1. Tirage d'un monocristal de germanium

(matériau de composants électroniques)

On réalise la fabrication d'un monocristal de germanium par la méthode dite "de tirage".

Pour cela, on dispose d'un bain de germanium maintenu à la température T_1 légèrement supérieure à la température de fusion T_0 .

Après un démarrage du processus que nous ne décrirons pas ici, on considère l'état de régime permanent atteint dans lequel on tire verticalement vers le haut, à la vitesse v , une colonne cylindrique de germanium, de rayon r , dont la partie supérieure se trouve solidifiée.



La jonction entre le solide et le liquide, supposée plane, se trouve à la distance constante a de la surface du liquide. Cette méthode est rendue possible grâce à la forte valeur du coefficient de la tension superficielle χ du semi-conducteur. On appelle ρ la masse volumique du germanium, g l'accélération de la pesanteur, K_ℓ la conductivité thermique du liquide, K_s celle du solide et L la chaleur latente massique de fusion.

Soit un axe Ox vertical ascendant avec l'origine dans le plan de l'interface liquide-solide. On appelle $T(x)$ la température dans le solide et $(dT/dx)_0$ la valeur de la dérivée en $x = 0$.

On suppose que la température $T_1(x)$ varie linéairement dans la partie liquide de la colonne. La continuité de la température impose $T_1(0) = T(0) = T_0$ et $T_1(-a) = T_1$.

I. Equation thermodynamique

a. On considère Σ la partie de colonne limitée par les sections de cotes ε et $-\varepsilon$, ε étant un infiniment petit.

Donner l'expression du flux de chaleur (quantité de chaleur pendant l'unité de temps) J_ε à travers la section de la colonne d'abscisse ε dans le sens des x positifs.

Même question pour le flux de chaleur $J_{-\varepsilon}$ à travers la section d'abscisse $-\varepsilon$.

En déduire l'expression de la quantité de chaleur ϕ entrant par unité de temps dans Σ . On commentera le signe des deux termes qui apparaissent.

b. Déterminer l'expression de la masse m de germanium qui se solidifie par unité de temps dans ce volume.

En déduire une autre expression de ϕ . Pourquoi est-elle négative ?

c. Exprimer la vitesse de tirage v en fonction des autres paramètres :

$$K_s, K_\ell, a, T_1 - T_0, (dT/dx)_0, \rho \text{ et } L.$$

2. Equation mécanique

On suppose que les seules forces importantes agissant sur la colonne de liquide sont uniquement son poids et la force de tension superficielle au niveau de l'interface liquide-solide, dirigée vers le haut et de module $2\pi r\chi$. Donner la relation liant r à a .

3. Remplacer alors a en fonction de r dans l'équation thermodynamique. On obtient alors une relation entre r et v .

4. Donner l'expression de la vitesse maximale v_m que l'on ne peut dépasser pour effectuer le tirage, les paramètres thermiques étant imposés.

5. Etude de la température dans le cristal.

On arrive à minimiser les pertes par convection ou par conduction le long de la paroi latérale du cylindre, par contre, il faut prendre en compte celles dues au rayonnement.

On rappelle la loi de Stefan : la puissance par unité de surface est égale à σT^4 où σ est une constante.

D'autre part, comme la variation de température est importante dans le cristal, on admet que la conductivité thermique du cristal varie avec la température selon la

loi : $K_s = K_0 \frac{T_0}{T}$, où T_0 est la température de fusion et K_0 la conductivité thermique du cristal aux environs de T_0 .

a. Faire un bilan énergétique sur une tranche de cristal comprise entre x et $x + dx$.

b. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par T est de la forme :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \alpha T^5 + \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2.$$

c. Afin d'alléger les calculs, on pose comme autre condition aux limites :

$$T \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow \infty.$$

Montrer que $T = \beta(x + \xi)^{-\frac{1}{2}}$ convient. Montrer que $\beta = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{1}{4}}}$.

Exprimer ξ en fonction de α et T_0 .

d. En déduite $(dT/dx)_0$ en fonction de σ , T_0 , r et K_0 .

6. Donner v_m connaissant le rayon r obtenu dans les mêmes conditions thermiques.

7. Application numérique

$$K_0 = 20 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} ; r = 2,0 \text{ cm} ; \sigma = 5,7.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4} ; L = 1,0 \text{ kJ.g}^{-1} ;$$

$$\rho = 5,2.10^3 \text{ kg.m}^{-3} ; T_0 = 1220 \text{ K}.$$

a. Calculer $(dT/dx)_0$.

b. Calculer v_m . On l'exprimera en mm/min.

ESPCI ; Durée : 1h.

Corrigé

1.a. $\vec{j}_{th} = -K \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow$

$\alpha.$ $J_x(\varepsilon) = -K_s \left(\frac{dT}{dx} \right)_\varepsilon \neq -K_s \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 > 0$ car T décroît avec x . Le solide se refroidit

en s'éloignant de $x = 0$, lieu d'équilibre.

$\beta.$ $J_x(-\varepsilon) = -K_\ell \left(\frac{dT_1}{dx} \right)_{-\varepsilon}$ or $T_1(x)$ varie linéairement : $T_1 = \frac{T_0 - T_1}{a} x + T_0$.

$J_x(-\varepsilon) = -K_\ell \left(\frac{T_0 - T_1}{a} \right) > 0$ car $T_0 < T_1$.

$\gamma.$ Bilan sur le flux entrant total :

$$\phi_e = S(J_x(-\varepsilon) - J_x(\varepsilon)) = \pi r^2 \left[K_s \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 - K_\ell \frac{(T_0 - T_1)}{a} \right].$$

• condition limite, constante de Stefan, équilibre, gradient, loi de Stefan, minimum, pertes énergétiques, rayonnement, variation de la conductivité thermique avec la température

b.α. Le flux de chaleur entrant ϕ_e provient de la solidification d'une masse dm par unité de temps ($dm > 0$) ; $\phi_e < 0$; $\phi_e = -L \frac{dm}{dt}$.

$$\text{b. } dm = \rho \pi r^2 v dt \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho \pi r^2 v \Rightarrow \phi_e = -L \rho \pi r^2 v.$$

$$\text{c. } v = -\frac{\phi_e}{L \rho \pi r^2} = -\frac{1}{L \rho} \left[K_s \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 - K_\ell \frac{(T_0 - T_1)}{a} \right].$$

2. Considérons l'équilibre de la colonne de liquide de hauteur a .

La force de tension superficielle compense le poids : $2\pi r \chi = \rho \pi r^2 a g$.

On remarquera le rôle de χ force linéique verticale vers le haut ; on ne s'occupe pas des forces de pression qui se compensent.

$$\text{3. } a = \frac{2\chi}{\rho g} \Rightarrow v = -\frac{1}{L \rho} \left[K_s \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 - \frac{K_\ell \rho g}{2\chi} (T_0 - T_1) \right].$$

$$v = -\frac{K_s}{\rho L} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 + \frac{K_\ell r g (T_0 - T_1)}{2\chi L}, \text{ relation affine entre } v \text{ et } r.$$

$$\text{4. } \frac{dv}{dr} = \frac{K_\ell g (T_0 - T_1)}{2\chi L} < 0 ; v(r) \text{ est maximal pour } r = 0.$$

$$\text{On ne saurait dépasser } v_{\max} = -\frac{K_s}{\rho L} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 > 0. \text{ En } x = 0, T = T_0.$$

5.a. K_s est fonction de T , donc de x .

Le bilan thermique sur une tranche d'épaisseur dx s'écrit en régime permanent :

$$-\pi r^2 K_s(x) \frac{dT}{dx}(x) = -\pi r^2 K_s(x+dx) \frac{dT}{dx}(x+dx) + \sigma 2\pi r dx T^4(x).$$

$$\pi r^2 d \left(K_s \frac{dT}{dx} \right) = \sigma 2\pi r dx T^4.$$

$$\text{b. Vu } K_s = \frac{K_0 T_0}{T}, \pi r^2 \left[-\frac{K_0 T_0}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \frac{K_0 T_0}{T} \frac{d^2 T}{dx^2} \right] dx = \sigma 2\pi r dx T^4.$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2\sigma T^5}{K_0 T_0 r} + \frac{1}{T} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\sigma}{r K_0 T_0}.$$

$$\text{c. } T = \beta (x + \xi)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\beta}{2} (x + \xi)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{3\beta}{4} (x + \xi)^{-\frac{5}{2}} ; \text{ on reporte dans l'équation obtenue en 5.b.}$$

$$\frac{3\beta}{4} (x + \xi)^{-\frac{5}{2}} = \alpha \beta^5 (x + \xi)^{-\frac{5}{2}} + \frac{\beta^2}{4} \frac{(x + \xi)^{-3}}{\beta (x + \xi)^{-\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{En simplifiant : } \frac{3\beta}{4} = \alpha \beta^5 + \frac{\beta}{4} \Rightarrow \frac{\beta^{-4}}{2} = \alpha \Rightarrow \beta = (2\alpha)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{1}{4}}}.$$

$$\text{Or } T(0) = T_0 = \beta \xi^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \xi = \frac{\beta^2}{T_0^2} = \frac{1}{T_0^2 \sqrt{2\alpha}}.$$

$$\text{d. } \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 = - \frac{\xi^{-\frac{3}{2}}}{2(2\alpha)^{\frac{1}{4}}} = - \frac{T_0^3 (2\alpha)^{\frac{3}{4}}}{2(2\alpha)^{\frac{1}{4}}} = -T_0^3 \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = -T_0^3 \left(\frac{\sigma}{rK_0 T_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$6. \quad v_{\max} = \frac{K_0 T_0}{T_0 \rho L} T_0^3 \left(\frac{\sigma}{rK_0 T_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho L} \left(\frac{\sigma K_0 T^5}{r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$7.\text{a. } \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 = -19600 \text{ K.m}^{-1}.$$

$$\text{b. } v_{\max} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1} = 4,5 \text{ mm/min}.$$

4.8.2. Principe du LASER

I. Quelques définitions

L'énergie d'un rayonnement électromagnétique peut se mesurer soit par l'énergie par unité de volume W soit par l'énergie M qui traverse par unité de temps une surface unité. La dépendance spectrale du rayonnement se caractérise par une fonction $\rho(\nu)$ de la fréquence ν , communément appelée densité spectrale et telle que $\rho(\nu) = \frac{dW}{d\nu}$.

L'énergie par unité de volume fournie par toutes les fréquences (si elles existent) est donc :

$$W = \int_0^\infty \rho(\nu) d\nu.$$

On appelle "corps noir" une enceinte fermée isotherme schématisée par la figure 1. On néglige généralement l'influence de l'ouverture par où on observe le rayonnement "dit" du corps noir.

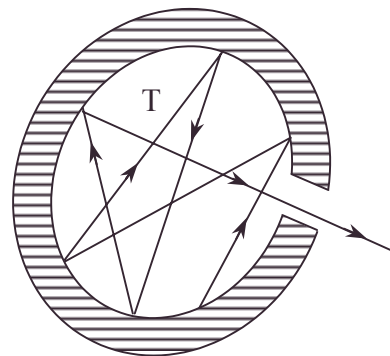


Fig. 1 : définition du corps noir

La densité spectrale du corps noir est $\rho_{\text{CN}}(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}$ où h est la

constante de Planck, k la constante de Boltzmann, T la température en Kelvin de l'enceinte, enfin c est la vitesse de la lumière ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$).

1. Ce résultat pour $\rho_{\text{CN}}(\nu)$ est-il homogène ? Quelle est la relation entre W et M ? (On considérera l'énergie qui traverse une surface dS pendant l'intervalle de temps dt).

2. Déterminer la fonction de la longueur d'onde $\mathcal{M}_{\text{CN}}(\lambda)$ telle que $dM = \mathcal{M}_{\text{CN}}(\lambda) d\lambda$.

Montrer que cette fonction passe par un extremum pour $\lambda_{\max} = \frac{L_a}{T}$, où L_a est une

constante numérique que l'on calculera, λ_{\max} (on supposera que l'énergie d'un photon $h\nu$ est beaucoup plus grande que l'énergie kT).

Application numérique :

calculer λ_{\max} pour $T = 6000 \text{ K}$ (température extérieure du soleil) et pour $T = 300 \text{ K}$ (température ambiante).

Les grandeurs précédentes (W , M , $\rho(\nu)$, $\mathcal{M}(\lambda)$) caractérisent un rayonnement. Un système atomique ou moléculaire susceptible d'émettre ou d'absorber un rayonnement est caractérisé par une fonction $g(\nu)$, appelée profil de raie et définie comme suit :

la probabilité d'absorption (ou d'émission) dans l'intervalle de fréquence $d\nu$ autour de la fréquence ν est : $dP = g(\nu)d\nu$ avec $\int dP = 1$.

La fonction $g(\nu)$ est maximale pour une certaine fréquence ν_0 et présente une certaine largeur $\Delta\nu$ à mi-hauteur avec $\Delta\nu \ll \nu_0$. On notera la différence avec la notation des incertitudes où la bande d'incertitude vaut " $2\Delta\nu$ ".

Nous ne chercherons pas ici à développer les diverses raisons qui sont à l'origine de cette fonction.

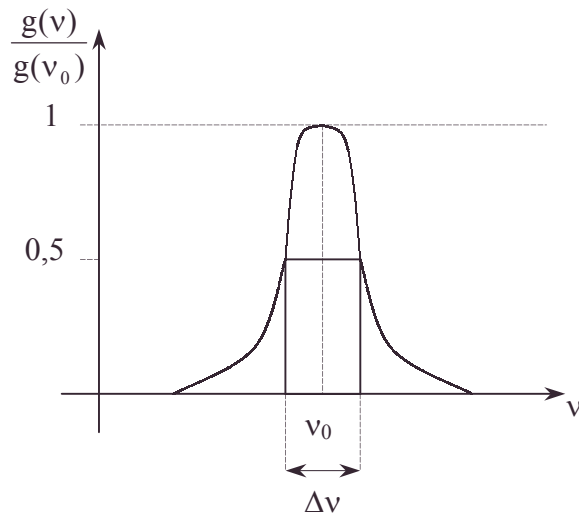


Fig. 2 : Profil de raie

II. Les processus d'émission spontanée et d'absorption

Considérons une assemblée de particules (atomes ou molécules) caractérisées par leurs différents niveaux d'énergie. Soient deux états d'énergie E_1 et E_2 ($E_2 > E_1$) susceptibles d'être occupés par des particules. La probabilité d'occupation d'un état excité d'énergie E est donnée par la statistique de Boltzmann : $P(E) = c^{te} \cdot \exp\left[-\frac{E}{k_s T}\right]$.

1. Déterminer le rapport $\frac{N_2}{N_1}$ des populations des états d'énergie E_2 et E_1 en fonction de la fréquence ν_0 et de la température T (Figure 3).

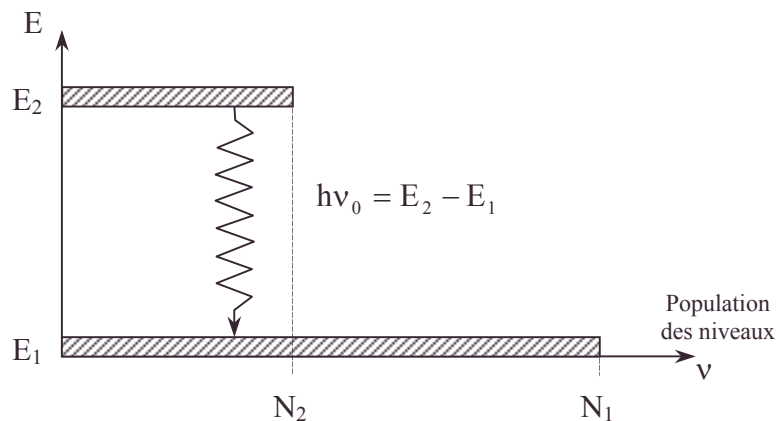


Fig. 3 : émission spontanée

Calculer numériquement ce rapport pour $\lambda_0 = 1 \text{ mm}$ et pour $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ à la température ambiante.

2.1. Déterminer $N_2(t)$ sachant qu'à l'instant $t = 0$, on a obtenu par excitation une population N_{20} beaucoup plus grande que la population à l'équilibre thermique. On écrira que durant l'intervalle de temps dt , la diminution de la population est proportionnelle à la population $N_2(t)$ et à dt .

Le coefficient de proportionnalité A est le premier coefficient d'Einstein.

• absorption de photons, constante de temps, émission spontanée [cf laser], équilibre thermodynamique, incertitude, maximum, population d'un état d'énergie [laser], premier coefficient d'Einstein (de désexcitation), probabilité, profil de raie

2. Calculer la constante de temps τ , caractérisant l'évolution de la population du niveau excité.

3. D'un point de vue macroscopique, on peut admettre que si l'on envoie un rayonnement sur un milieu absorbant, la perte d'énergie dW est directement proportionnelle à l'énergie W et à la distance parcourue dz :

$dW = -k'W dx$ ou $dM = -k'M dz$, où k' est le coefficient d'absorption.

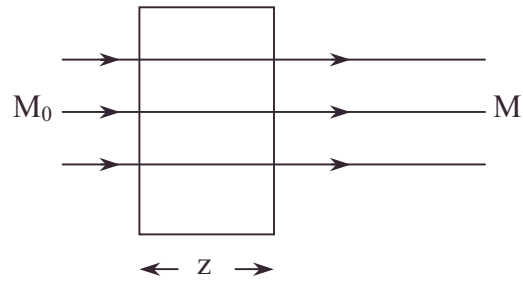


Fig. 4 : absorption du rayonnement M_0 par la lame d'épaisseur z .

La densité optique est définie par la relation (voir figure 4) : $D = \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$.

Montrer que D est proportionnelle à z (Figure 4).

4. D'un point de vue microscopique, l'énergie absorbée par unité de volume autour de la fréquence ν_0 (Fig. 3), dans les intervalles de temps dt et de fréquence $d\nu$ est $d^2W_{\nu_0} = d^2N_{1\rightarrow 2} \cdot h\nu_0$ avec $W_{\nu_0} = \rho(\nu_0)\Delta\nu$ ($\Delta\nu$ défini Figure 2), $d^2N_{1\rightarrow 2}$ est le nombre de particules qui passent de l'état d'énergie E_1 à l'état E_2 sous l'effet du rayonnement.

$$d^2N_{1\rightarrow 2} = -B_{12}N_1g(\nu)\rho(\nu)d\nu dt.$$

La constante B_{12} est le deuxième coefficient d'Einstein. Les populations sont exprimées par unité de volume. Remarque : les variations de $g(\nu)$ sont très rapides par rapport à celles de $\rho(\nu)$, ce qui revient à considérer $\rho(\nu)$ comme constante $\rho(\nu_0)$ sur l'intervalle de définition de $g(\nu)$.

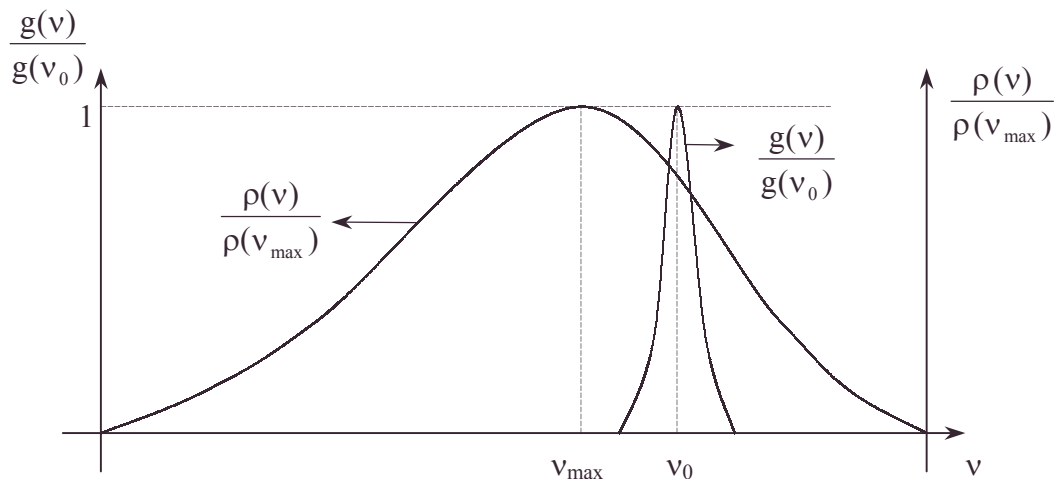


Fig. 5 : variation relative de $\rho(\nu)$ et de $g(\nu)$

Montrer que dans ces conditions : $dW_{\nu_0} = -k'W_{\nu_0} dz$.

Déterminer le coefficient d'absorption k' en fonction des paramètres du problème.

III. Le processus d'émission induite (ou stimulée)

Un corps noir émet toutes les fréquences, avec une certaine densité spectrale $\rho_{CN}(\nu)$. On admettra que pour chaque fréquence ν , il existe deux niveaux d'énergie E_2 et E_1 , tels que $E_2 - E_1 = h\nu$. Comme précédemment nous raisonnerons sur ces deux niveaux.

1. En écrivant que l'énergie émise spontanément durant l'intervalle de temps dt est égale à l'énergie absorbée (véritable définition du corps noir), calculer $\rho_{CN}(\nu)$.

On montrera que cette dernière densité spectrale diffère de celle présentée dans la question I., en particulier pour les fréquences faibles car on démontre que :

$$\frac{A}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.$$

2. Pour expliquer cette "catastrophe", Einstein (1917) imagina un nouveau processus d'émission. Le rayonnement $\rho(\nu)$ est certes absorbé par le système mais peut induire une émission en provoquant le passage du système de l'état d'énergie E_2 à l'état d'énergie E_1 .

$$d^2 N_{2 \rightarrow 1} = -B_{21} N_2 g(\nu) \rho(\nu) d\nu dt.$$

En admettant que $B_{21} = B_{12} = B$, montrer que dans ces conditions on retrouve bien la bonne valeur de la densité spectrale $\rho_{CN}(\nu)$ du corps noir.

3. Nous admettrons que l'émission induite est émise dans la direction du rayonnement qui l'a provoquée. Nous considérons donc cette émission comme une augmentation de l'énergie de l'onde incidente qui s'oppose à la diminution d'énergie due à l'absorption. L'émission spontanée se faisant dans toutes les directions apporte une contribution négligeable à l'augmentation de l'énergie de l'onde incidente. Reprendre dans ces conditions le calcul du coefficient d'absorption k' de la question I.4.

4. Montrer numériquement que dans le domaine du visible ($\lambda = 500,0$ nm), la prise en compte de cette émission induite est totalement inutile à la température ambiante. Ce n'est pas le cas dans le domaine hertzien ($\lambda = 1$ mm). A quelle température faudrait-il travailler dans ce domaine pour avoir N_2 négligeable (prendre par exemple $\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{1000}$), et par conséquent pouvoir négliger l'émission induite ?

5. Montrer que si on provoque une inversion de population ($N_2 > N_1$) le rayonnement s'amplifiera lorsqu'il traversera un tel milieu. C'est l'amplification LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). On appellera $\gamma = -k'$ le coefficient d'amplification ($dM = +\gamma M dz$).

IV. Fonctionnement élémentaire d'un laser

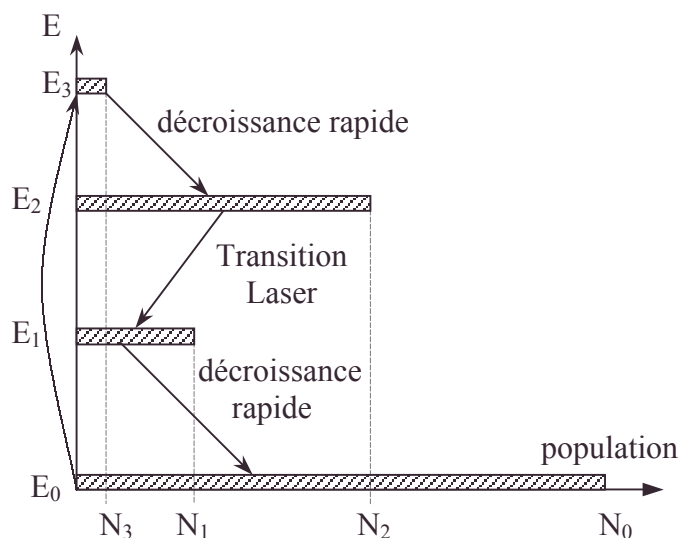


Fig. 6 : pompage d'un laser à 4 niveaux

Les méthodes permettant de réaliser l'inversion de population sont diverses et variées. Nous ne parlerons ici que du pompage optique qui interviendra dans la question VI.

A l'aide d'un flash on excite des particules de l'état d'énergie E_0 dans l'état E_3 (voir fig. 6). ce niveau se désexcite rapidement au profit du niveau E_2 .

Ce niveau a par contre une constante de temps τ_2 très grande, on peut donc réaliser une inversion de population entre les états E_2 et E_1 .

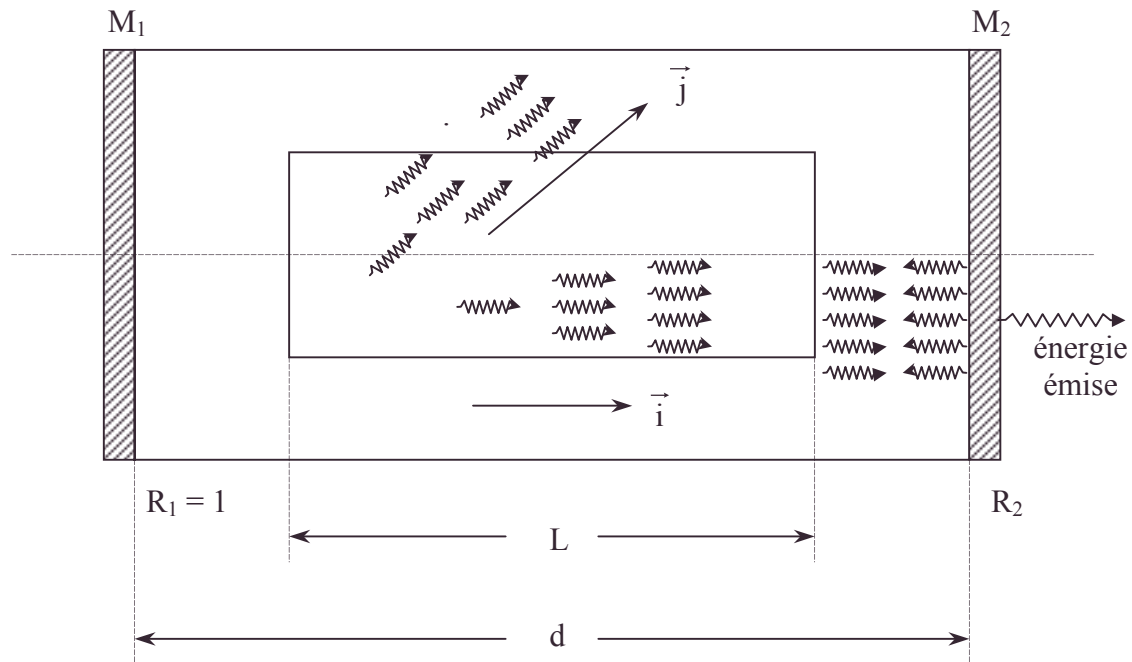


Fig. 7 : principe d'un laser

Un laser (fig. 7) est donc constitué d'un milieu actif d'épaisseur L , où l'inversion de population est réalisée, et d'une cavité formée de deux miroirs plans séparés par une distance d , qui permet à la lumière d'effectuer de nombreux aller-retour favorisant ainsi son amplification. Dans ce milieu très excité, il est aisé de concevoir qu'un photon soit émis spontanément créant ainsi une densité spectrale $\rho(\nu)$ dans la direction \vec{i} ou dans toutes autres directions \vec{j} (voir fig. 7). L'amplification se fera essentiellement dans la direction perpendiculaire aux deux miroirs. Ce mode de propagation est dit longitudinal.

1. Soit "a" l'amplitude d'une onde longitudinale émise spontanément en un point quelconque A. Faire la somme de l'onde initiale et des $(N - 1)$ autres qui ont effectué un ou plusieurs aller-retour dans la cavité, en ce même point A. Exprimer l'intensité lumineuse résultante I en fonction de $s_0 = r_1 r_2 \exp(\gamma L)$ [r_1 et r_2 sont les coefficients de réflexion en amplitude des miroirs ($R_i = r_i^2$), γ le coefficient d'amplification] en fonction de la différence de phase ϕ entre deux vibrations successives, de N et de $a^2 = I_0$. On suppose que les miroirs n'introduisent aucun déphasage ; l'intensité I est proportionnelle au carré de l'amplitude résultante.

2. Si $s_0 < 1$ les pertes par réflexion sont plus importantes que le gain créé par le milieu, dans ces conditions l'auto-oscillation ne se produira pas.

1. Calculer $I(\phi)$, en prenant $s_0 = 1$. Montrer que la cavité sélectionne des fréquences ν_k dans $g(\nu)$ communément appelées modes du laser.

2. Montrer que la largeur d'un mode $\Delta\nu_k$ est d'autant plus petite que N est grand.

3. Cette largeur est totalement négligeable lorsqu'on tient compte des fluctuations inévitables de largeur de la cavité. Calculer $\Delta\nu_{mc}$ et $\Delta\lambda_{mc}$ d'un mode si $d = 20 \text{ cm}$; $\Delta d = \pm 1 \mu\text{m}$; $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$.

Combien existe-t-il de modes si la largeur $\Delta\nu$ de $g(\nu) = 0,5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$?

Si $s_0 > 1$, l'intensité d'un mode tend vers l'infini, ce résultat n'est pas très physique, car cette émission doit détruire l'inversion de population.

En fait, il s'établit un régime stationnaire (question VI.) si $s_0 = 1$.

Calculer le coefficient d'amplification critique γ_c en fonction de T_2 et L pour que $s_0 = 1$ (prendre $R_1 = 1$, $R_2 = 1 - T_2$, avec $T_2 \ll 1$).

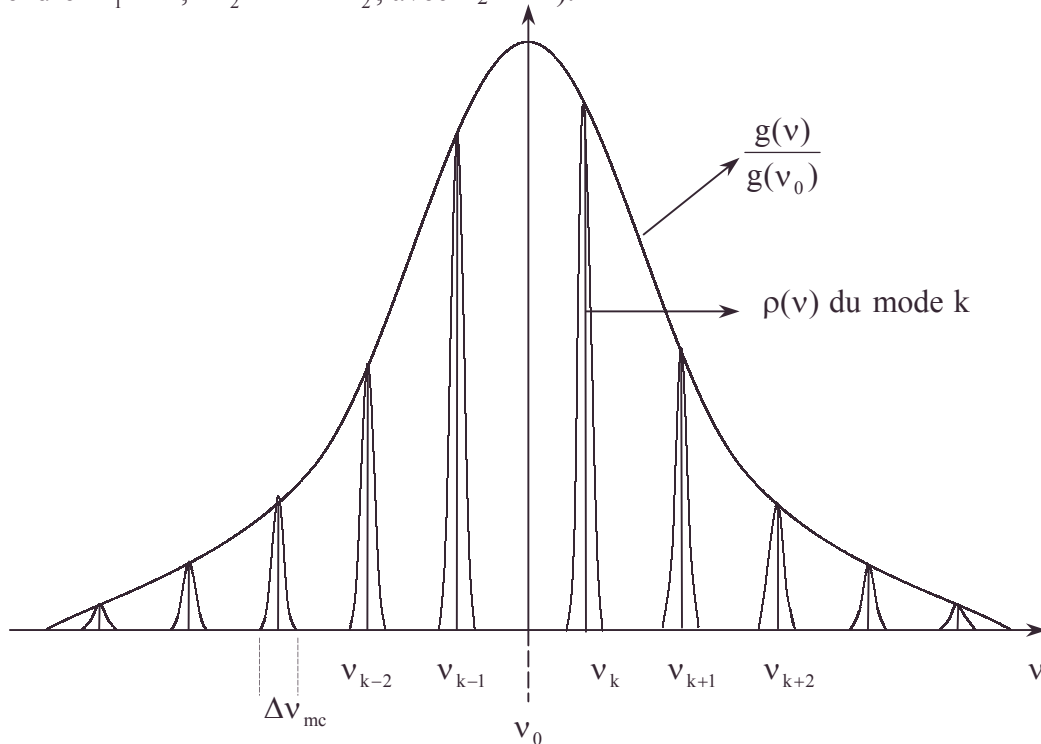


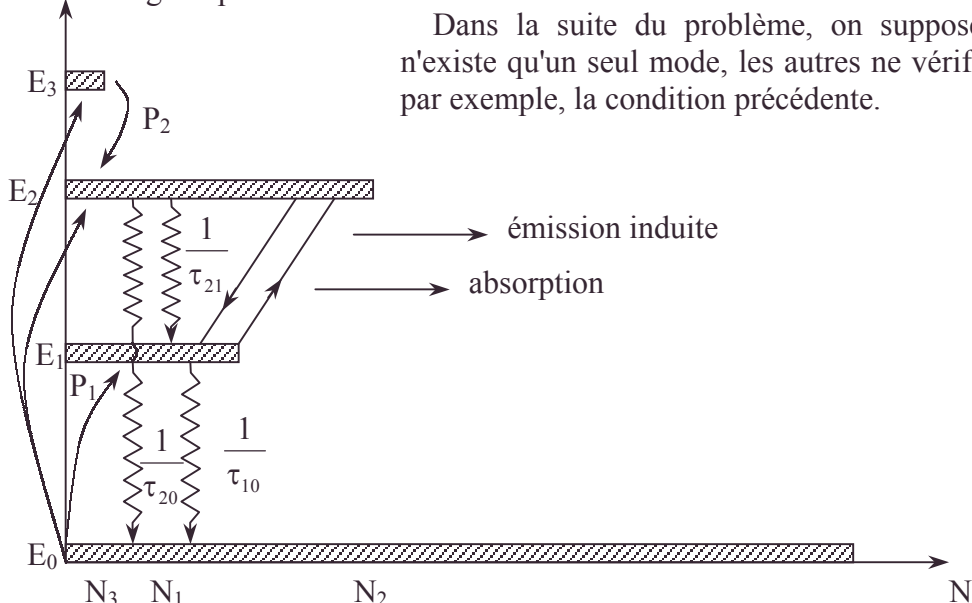
Fig. 8 : modes longitudinaux

V. Retour sur le calcul de $\gamma(v)$

Reprendre le calcul du coefficient d'amplification $\gamma(v)$ d'un mode comme dans la question III., en supposant évidemment que $N_2 > N_1$. Attention, dans cette question, c'est la densité spectrale du mode considéré $\rho(v)$ qui varie rapidement par rapport à $g(v)$ ou à $h\nu$. On écrira $\gamma(v)$ sous la forme $\gamma(v) = \sigma(v)(N_2 - N_1)$ où $\sigma(v)$ est une quantité homogène à une surface qui sera exprimée en fonction de A , λ , $g(v)$.

A , L , T_2 , $(N_2 - N_1)$ donnés, quelle est l'expression de $g(v_k)$ pour que ce mode puisse auto-osciller ?

VI. Etude du régime permanent



Dans la suite du problème, on supposera qu'il n'existe qu'un seul mode, les autres ne vérifiant pas, par exemple, la condition précédente.

Fig. 9 : les différents processus intervenant dans l'étude de $N_2(t)$ et de $N_1(t)$

- démarrage du laser, graphe, modes longitudinaux

On appelle P_1 et P_2 les taux de pompage des niveaux E_1 et E_2 . Autrement dit, le nombre de particules portées dans l'état E_2 dans l'intervalle de temps dt est $dN_2 = P_2 dt$.

1. Déterminer le système d'équations différentielles couplées auquel obéissent les populations $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en tenant compte du pompage et des différents processus d'émission spontanée et induite et d'absorption schématisés par la figure 9.

On écrira : $\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_{20}} + \frac{1}{\tau_{21}} = A_{20} + A_{21}$ et $\sigma(\nu) = B \frac{h\nu}{c} g(\nu)$.

2. Le régime permanent se caractérise par $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$;

en déduire $(N_2 - N_1)$ et $\gamma(\nu)$.

3. Généralement on prend $P_1 = 0$, $\tau_{10} \ll \tau_{21}$ et $\tau_{10} \ll \tau_{20}$.

Montrer dans ces conditions que $\gamma(\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{\left[1 + \frac{\tau_2 \sigma(\nu) M(\nu)}{h\nu}\right]}$.

$\gamma_0(\nu)$ est le coefficient d'amplification pour $M(\nu) = 0$.

En effet, le régime permanent peut mettre un certain temps pour s'établir et au début $M(\nu)$ (l'énergie d'un mode) est pratiquement nulle (émission spontanée).

4. En fonction du taux de pompage P_2 , $\gamma(\nu)$ varie d'abord comme $\gamma_0(\nu)$. Lorsqu'il atteint γ_c (question IV.3.) pour $P_2 = P_{20}$ il reste constant et égal à γ_c quel que soit P_2 .

En déduire l'énergie $M(\nu)$ du mode en fonction de P_2 avec comme paramètre P_{20} , $h\nu$, τ_2 , $\sigma(\nu)$. La puissance de sortie est $P_s = M(\nu).T_2$.

Tracer grossièrement γ et la puissance de sortie en fonction de P_2 .

ENS ; Durée : 3h

Corrigé

I.1.a. Dimension de ρ_{CN}

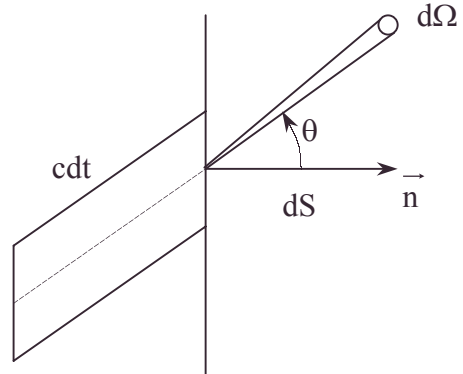
$$[\rho_{CN}] = \frac{[h\nu][\nu^3]}{[\nu][c^3]} ; \text{ or } \left[\frac{\nu^3}{c^3} \right] = \frac{[T^{-3}]}{[L^3][T^{-3}]} = [L]^{-3} \text{ et } h\nu \text{ en J ; } h\nu \frac{\nu^3}{c^3} \text{ est en J.m}^{-3}.$$

les dimensions de ρ_{CN} sont donc celles de $\frac{dW}{d\nu}$, soit une densité spectrale (ici W est une énergie par unité de volume).

b.α. Considérons d'abord les directions de propagation comprises dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ autour d'une direction qui fait un angle θ avec la normale à la surface dS .

L'énergie contenue dans la bande de fréquence $\delta\nu$, dans le cylindre de longueur cdt , d'aire dS , incliné selon θ est $\rho(\nu)d\nu cdt dS \cos \theta$.

De cette énergie, seulement la fraction $\frac{d\Omega}{4\pi}$ est rayonnée dans l'angle $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.



La puissance totale sortante selon toutes les directions est obtenue par intégration en $dv, d\theta, d\phi \Rightarrow M = \frac{dt}{dt dS} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{4\pi} \cos \theta d\theta \int \rho(v) dv c dt dS = \frac{c}{4} \int \rho(v) dv = \frac{Wc}{4}$.

β. En ne considérant qu'une seule direction de propagation (cf. suite du problème sur l'émission induite)



$M = \frac{\int \rho(v) dv c dt dS}{dt dS} = cW$ mais ce n'est pas le cadre du corps noir du début de l'énoncé.

2.a. $dM = \rho(v) \frac{c}{4} dv$ or $v = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow dv = -c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$.

$$dM = -\frac{\rho(v)}{4} c^2 \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \mathcal{M}_{CN} d\lambda \Rightarrow \mathcal{M}_{CN} = -\frac{c^2}{\lambda^2} \frac{2\pi h c^3}{c^3 \lambda^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}.$$

$$\mathcal{M}_{CN} = -\frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}; \text{ Rem : } \frac{hc}{\lambda} = h\nu \gg kT.$$

b. $\frac{d\mathcal{M}_{CN}}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^{10} \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right)^2} \left[5\lambda^4 \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right) - \lambda^3 \frac{hc}{k_B T} \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \right]$

$$\frac{d\mathcal{M}_{CN}}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{hc}{5kT} = \lambda \left(1 - \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \right).$$

Or $h\nu = \frac{hc}{\lambda} \gg kT \Rightarrow \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \ll 1 \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{5kT}$.

c. Or $\lambda = \frac{L_a}{T} \Rightarrow L_a = \frac{hc}{5k}$; A.N. : $L_a = 2882,6 \text{ km}$.

d. A.N. : $T_1 = 6000 \text{ K}$ $\lambda_1 = 0,48 \text{ } \mu\text{m}$ lumière visible.
 $T_2 = 300 \text{ K}$ $\lambda_2 = 9,61 \text{ } \mu\text{m}$ infrarouge.

II.1. $P(E_i) = \frac{N(E_i)}{N_{\text{total}}}$; $\frac{N_2}{N_1} = \frac{P(E_2)}{P(E_1)} = \exp\left(-\frac{(E_2 - E_1)}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT}\right)$.

A.N. : $T = 300 \text{ K}$; $\lambda_{0_1} = 1 \text{ mm}$: $\frac{N_2}{N_1} = 0,953$.

$$T = 300 \text{ K}; \lambda_{0_2} = 5.10^{-7} \text{ m}; \frac{N_2}{N_1} = 1,86.10^{-42}.$$

2.1. $dN_2 = -AN_2 dt \Rightarrow N_2(t) = N_{20} \exp(-At)$.

2. On a la forme $N_2 = N_{20} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{1}{A}$.

$$3. dM = -k'M dz \Rightarrow \ln \frac{M}{M_0} = -k'z ; D = \ln \frac{M_0}{M} = k'z .$$

$$4. d^2W_{v_0} = -B_{12}N_1g(v)\rho(v)h\nu_0 dv dt .$$

$$dW_{v_0} = -B_{12}N_1h\nu_0 dt \int_0^\infty g(v)\rho(v) dv .$$

Vu la remarque sur l'étroitesse de la zone d'existence de $g(v)$ et vu la normalisation citée avant II. : $\int dP = 1 = \int_0^\infty g(v) dv$: $\int_0^\infty g(v)\rho(v) dv = \rho(v_0) \int_0^\infty g(v) dv = \rho(v_0) \cdot 1 = \rho(v_0)$.

$$dW_{v_0} = -B_{12}N_1h\nu_0\rho(v_0) dt .$$

Pour les photons $c dt = dz \Rightarrow dW_{v_0} = -B_{12}N_1 \frac{h\nu_0}{c} \rho(v_0) dz$ de la forme proposée, avec

$$k'W_{v_0} = k'\rho(v_0)\Delta v = B_{12}N_1 \frac{h\nu_0}{c} \rho(v_0) \Rightarrow k' = B_{12}N_1 \frac{h\nu_0}{c\Delta v} .$$

III.1. Ecrivons la condition d'équilibre : $\frac{dN_2}{dt} = 0$: l'émission compense l'absorption sur l'ensemble des fréquences, soit :

$$-AN_2 + B_{12}N_1 \int_0^\infty \rho_{CN}(v)g(v) dv = 0 \Rightarrow -AN_2 + B_{12}N_1\rho_{CN}(v_0) ;$$

$\Rightarrow \rho_{CN}(v_0) = \frac{A}{B_{12}} \frac{N_2}{N_1} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu_0}{kT}}$, expression approchée de celle donnée par l'énoncé, acceptable dans les conditions de l'énoncé vu $h\nu \gg kT$.

2. On écrit à nouveau la condition d'équilibre : $\frac{dN_2}{dt} = 0$;

$$-AN_2 + \int_0^\infty (B_{12}N_1\rho(v) - B_{21}N_2\rho(v))g(v) dv = 0 ,$$

$$\text{soit : } -AN_2 + B(N_1 - N_2)\rho(v_0) = 0 \Rightarrow \rho_{CN}(v) = \frac{AN_2}{B(N_1 - N_2)} = \frac{A}{B\left(\frac{N_1}{N_2} - 1\right)} .$$

$$\Rightarrow \rho_{CN}(v) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu_0}{k_B T}\right) - 1 \right]} .$$

3. L'énergie absorbée $dW_{v_0} = -B\rho(v_0)h\nu_0(N_1 - N_2) dt$;

vu $c dt = dz$, on peut écrire : $dW_{v_0} = \frac{-Bh\nu_0(N_1 - N_2)W_{v_0}}{c\Delta v} dz \Rightarrow k' = \frac{Bh\nu_0}{c\Delta v}(N_1 - N_2)$.

$$4. k' = \frac{N_1 Bh\nu_0}{c\Delta v} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right) = \frac{N_1}{c\Delta v} Bh\nu_0 \left(1 - e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}\right) .$$

a. à $\lambda = 500 \text{ nm}$ et $T = 300 \text{ K}$, $\frac{N_2}{N_1} = 1,86 \cdot 10^{-42} \Rightarrow k' = \frac{N_1}{c\Delta v} Bh\nu_0$: la prise en

compte de l'émission induite est bien inutile.

b. à $\lambda = 1 \text{ mm}$, $\frac{N_2}{N_1} = 0,953$ à $T = 300 \text{ K}$, l'émission induite a un rôle très important.

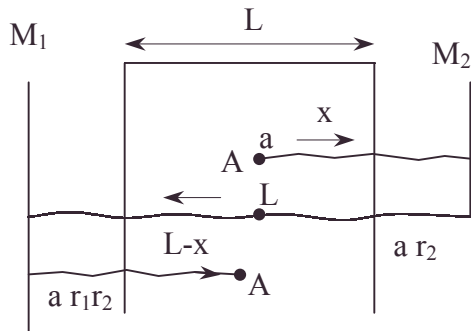
c. à $\lambda = 1 \text{ mm}$, $\frac{N_2}{N_1} = 10^{-3} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda kT} = \ln 1000 \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda k \ln 1000}$;

A.N. : $T = 2,09 \text{ K}$: il est impossible de négliger l'émission induite sauf aux très basses températures.

5. Si $N_2 > N_1$, $N_1 - N_2 < 0 \Rightarrow k' < 0$.

Quand on a une inversion de population (état hors équilibre thermodynamique), l'absorption ($k' > 0$) est remplacée par une amplification ($k' < 0$) :

IV.1. On peut faire le constat



• L'onde émise en A : $ae^{j\omega t}$.

• L'onde revenant en A : $ae^{j(\omega t - \phi)}e^{\gamma L} \cdot r_1 \cdot r_2$ telle qu'on a :

- amplification en énergie sur $2L$ et en amplitude seulement sur une longueur L .

- déphasage ϕ correspondant au trajet $2d$

- intervention des coefficients r_1 et r_2 ainsi qu'on le voit sur la figure ci-contre.

- La direction d'émission longitudinale n'a pas d'importance : l'onde s'écrit $as_0e^{j(\omega t - \phi)}$ avec $s_0 = r_1 r_2 e^{\gamma L}$.

- l'onde suivante de même type s'écrit :

$$as_0^2e^{j(\omega t - 2\phi)}.$$

L'amplitude scalaire des N ondes décrites s'écrit :

$$ae^{j\omega t} [1 + s_0 e^{-j\phi} + s_0^2 e^{-2j\phi} \dots + s_0^{N-1} e^{-(N-1)\phi}] = ae^{j\omega t} \frac{1 - s_0^N e^{-jN\phi}}{1 - s_0 e^{-j\phi}}$$

L'intensité résultante s'écrit :

$$I = a^2 \frac{1 - s_0^N e^{-jN\phi}}{1 - s_0 e^{-j\phi}} \frac{1 - s_0^N e^{jN\phi}}{1 - s_0 e^{j\phi}} = I_0 \frac{(1 + s_0^{2N} - 2s_0^N \cos N\phi)}{1 + s_0^2 - 2s_0 \cos \phi}.$$

$$2.1. s_0 = 1 \Rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \text{ cf. réseau plan.}$$

Les intensités notables correspondent à $\phi = 2k\pi$ $k \in \mathbb{N}$. (cf. k n'est pas la constante de Boltzman).

$$\text{or } \phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2d = \frac{4\pi vd}{c} \Rightarrow v_k = \frac{kc}{2d} \text{ et } \lambda_k = \frac{c}{v_k} = \frac{2d}{k}.$$

La probabilité module naturellement chaque mode.

2. La demi largeur à la base d'un maximum (principal) est : $\frac{2\pi}{N}$ en phase, soit $\frac{c}{2Nd}$

en fréquence $\Rightarrow \Delta v_k = \frac{c}{Nd}$ (à la base).

Elle est d'autant plus petite que N est grand.

$$3.a. \ln v_k = -\ln d + \ln \frac{kc}{2}.$$

$$\frac{dv_k}{v_k} = -\frac{dd}{d} \Rightarrow \Delta v_{mc} = v_0 \frac{\Delta d}{d} = \frac{c}{\lambda_0} \frac{\Delta d}{d}.$$

• amplification laser, coefficient d'amplification [laser], équilibre, inversion de population [laser], maximum, probabilité

Le terme correctif à calculer permet d'assimiler ν_k inconnu à ν_0 connu voisin.

A.N. : Δd est ici une bande d'incertitude et vaut dans le cadre défini par l'énoncé $2\mu\text{m}$;
 $\Delta\nu_{\text{mc}} = 4,74\text{GHz}$.

$$\text{b. } \ln \lambda_k = \ln d + \ln \frac{2}{k} ; \frac{d\lambda_k}{\lambda_k} = \frac{dd}{d} \Rightarrow \Delta\lambda_{\text{mc}} \# \lambda_0 \frac{\Delta d}{d} ; \text{A.N. : } \Delta\lambda_{\text{mc}} = 6,33.10^{-12}\text{ m.}$$

selon la même procédure.

$$\text{c. Les modes possibles } \nu_k \text{ sont tels que } \nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2} < \nu_k < \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}.$$

Or $\Delta\nu = 0,5\text{GHz} < \Delta\nu_{\text{mc}}$. On voit donc un seul lobe de ν_k dans $\Delta\nu$.

$$\text{3. } s_0^2 = 1 = r_1^2 r_2^2 e^{2\gamma_c L} = R_1 R_2 e^{2\gamma_c L} = 1.(1 - T_2) e^{2\gamma_c L} \text{ avec } T_2 \ll 1.$$

$e^{2\gamma_c L} = 1 + 2\gamma_c L + \dots$ proche de 1, on négligera les termes d'ordre supérieur à 1 ; il reste
 $1 = (1 - T_2)(1 + 2\gamma_c L)$.

$$\frac{1}{1 - T_2} = 1 + T_2 = 1 + 2\gamma_c L \Rightarrow 2\gamma_c L = T_2 \Rightarrow \gamma_c = \frac{T_2}{2L}.$$

V. Ecrivons l'énergie absorbée : $d^2 W_\nu = -B(N_1 - N_2)g(\nu)\rho(\nu)h\nu d\nu dt$ avec $dz = cdt$
et par intégration en ν , $dW_\nu = \left[\int_0^\infty g(\nu)\rho(\nu)h\nu d\nu \right] B(N_1 - N_2) \frac{dz}{c}$, et pour un mode k
unique, ρ variant sur un intervalle réduit sa valeur intervenant dans la somme numérique
de Darboux ne privilégie que le terme en ν_k ; $\int_0^\infty g(\nu)\rho(\nu)h\nu d\nu = h\nu_k g(\nu_k)W_{\nu_k}$;

on rappelle $W = \int_0^\infty \rho(\nu)d\nu$.

$$dW_{\nu_k} = -\frac{B}{c}(N_1 - N_2)h\nu_k g(\nu_k)W_{\nu_k} dz \Rightarrow \gamma_k = \frac{B}{c}h\nu_k g(\nu_k)(N_2 - N_1) \text{ et vu définition}$$

et données de l'énoncé.

$$\sigma_k = B \frac{h}{c} \nu_k g(\nu_k) = \frac{c^2 h \nu_k}{8\pi h \nu_k^3} A g(\nu_k) = \frac{A}{8\pi} \frac{c^2}{\nu_k^2} g(\nu_k) = \frac{A}{8\pi} \lambda_k^2 g(\nu_k) ;$$

$$\text{L'autooscillation correspondant à } s_0^2 = 1 \text{ donne } \gamma_k = \frac{T_2}{2L} = \frac{A}{8\pi} \frac{c^2}{\nu_k^2} g(\nu_k)(N_2 - N_1)$$

$$\Rightarrow g(\nu_k) = \frac{T_2 \nu_k^2}{2L c^2} \frac{8\pi}{A(N_2 - N_1)} = \frac{4\pi \nu_k^2 T_2}{A(N_2 - N_1) c^2 L}.$$

VI.1. Faisons le bilan de population des niveaux :

$$\text{a. } E_1 : \frac{dN_1}{dt} = \underbrace{P_1}_{\text{pompage}} - \underbrace{A_{10}N_1}_{\substack{\text{émission} \\ \text{spontanée} \\ E_1 \rightarrow E_0}} + \underbrace{A_{21}N_2}_{\substack{\text{émission} \\ \text{spontanée} \\ E_2 \rightarrow E_1}} - \underbrace{B_{12}g(\nu)W_\nu N_1}_{\substack{\text{absorption:} \\ E_1 \rightarrow E_2}} + \underbrace{B_{21}g(\nu)W_\nu N_2}_{\substack{\text{émission stimulée} \\ E_2 \rightarrow E_1}} ;$$

$$\text{or } B_{12} = B_{21} = B \text{ et } \sigma(\nu) = B g(\nu) \frac{h\nu}{c} ; A_{10} = \frac{1}{\tau_{10}} ; A_{21} = \frac{1}{\tau_{21}} ;$$

$$\Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = P_1 - \frac{N_1}{\tau_{10}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + (N_2 - N_1) \frac{\sigma(\nu)}{h\nu} W_\nu c, \text{ avec ici } M(\nu) = W_\nu c \text{ vu la direction}$$

unique cf. I.1. et aussi pour introduire $M(\nu)$ nécessaire au 3.,

$$\frac{dN_1}{dt} = P_1 - \frac{N_1}{\tau_{10}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma(\nu) \frac{M(\nu)}{h\nu} (N_2 - N_1).$$

• *amplification laser, coefficient d'amplification [laser], développement au premier ordre ou plus, incertitude, largeur de raie du laser*

$$\text{b. } E_2 : \frac{dN_2}{dt} = \underbrace{P_2}_{\text{pompage}} - \underbrace{A_{20}N_2}_{\substack{\text{émission} \\ \text{spontanée} \\ E_2 \rightarrow E_1}} - \underbrace{A_{21}N_2}_{\substack{\text{émission} \\ \text{spontanée} \\ E_2 \rightarrow E_1}} + \underbrace{B_{12}g(\nu)W_\nu N_1}_{\substack{\text{absorption :} \\ E_1 \rightarrow E_2}} - \underbrace{B_{21}g(\nu)W_\nu N_2}_{\substack{\text{émission stimulée} \\ E_2 \rightarrow E_1}} ;$$

donc $\frac{dN_2}{dt} = P_2 - \frac{N_2}{\tau_2} + \sigma(\nu) \frac{M(\nu)}{h\nu} (N_1 - N_2)$, vu $\frac{1}{\tau_2} = A_{20} + A_{21}$ et $W_\nu c = M$.

2. En régime permanent, on résout :

$$N_1 \left(\frac{\sigma(\nu)M(\nu)}{h\nu} + \frac{1}{\tau_{10}} \right) - N_2 \left(\frac{1}{\tau_{21}} + \frac{\sigma(\nu)M(\nu)}{h\nu} \right) = P_1 ;$$

$$-N_1 \frac{\sigma(\nu)M(\nu)}{h\nu} + N_2 \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{\sigma(\nu)M(\nu)}{h\nu} \right) = P_2 . \text{ On résout ce système de Cramer :}$$

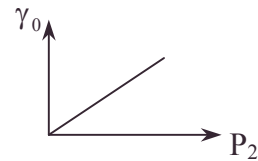
$$N_1 = \frac{\begin{vmatrix} P_1 & -\left(\frac{1}{\tau_{21}} + \frac{\sigma M}{h\nu}\right) \\ P_2 & \frac{1}{\tau_2} + \frac{\sigma M}{h\nu} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\sigma M}{h\nu} + \frac{1}{\tau_{10}} & -\left(\frac{1}{\tau_{21}} + \frac{\sigma M}{h\nu}\right) \\ -\frac{\sigma M}{h\nu} & \frac{1}{\tau_2} + \frac{\sigma M}{h\nu} \end{vmatrix}} ; N_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\tau_{10}} + \frac{\sigma M}{h\nu} & P_1 \\ \frac{\sigma M}{h\nu} & P_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\sigma M}{h\nu} + \frac{1}{\tau_{10}} & -\left(\frac{1}{\tau_{21}} + \frac{\sigma M}{h\nu}\right) \\ -\frac{\sigma M}{h\nu} & \frac{1}{\tau_2} + \frac{\sigma M}{h\nu} \end{vmatrix}} ;$$

$$\Rightarrow N_2 - N_1 = \frac{-\frac{P_1}{\tau_2} + P_2 \left[-\frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_{10}} \right]}{\left[\frac{1}{\tau_2} \cdot \frac{1}{\tau_{10}} + \frac{M\sigma}{h\nu} \left(\frac{1}{\tau_{10}} + \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}} \right) \right]} .$$

On en déduit : $\gamma(\nu) = \sigma(\nu)(N_2 - N_1)$ en multipliant $N_2 - N_1$ par σ .

$$\text{3. } \frac{1}{\tau_{10}} \gg \frac{1}{\tau_{21}} \text{ et } \frac{1}{\tau_{10}} \gg \frac{1}{\tau_{20}} \Rightarrow \gamma(\nu) = \frac{\sigma(\nu)\tau_2 P_2}{1 + \frac{\sigma M}{h\nu}\tau_2} .$$

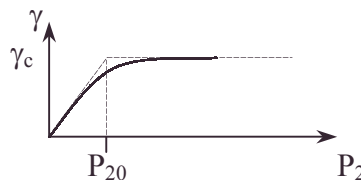
$$M = 0, \gamma_0(\nu) = \sigma(\nu)\tau_2 P_2 \Rightarrow \gamma(\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{1 + \tau_2 \frac{\sigma M}{h\nu}} .$$



4.a. Au début : $M = 0$; $\gamma = \gamma_0(\nu) = \sigma(\nu)\tau_2 P_2$.

b. $P_2 > P_{20}$; $\gamma = \gamma_c$.

c. Tracé de γ :



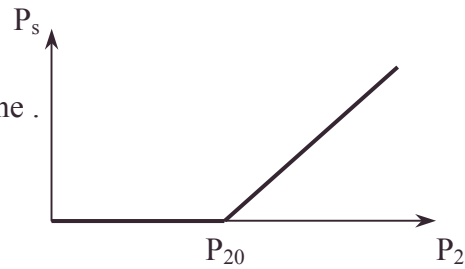
d. $P_s = T_2 M$; $\alpha. P < P_{20}$; $M = 0$ cf VI.4.a. $P_s = 0$. On a : $\gamma_c = \sigma\tau_2 P_{20}$.

$$\beta. P > P_{20} ; \gamma_c = \sigma\tau_2 P_{20} = \frac{\sigma\tau_2 P_2}{1 + \frac{\tau_2 \sigma M}{h\nu}} \text{ cf. égalité des valeurs à droite}$$

et à gauche de P_{20}

$$\Rightarrow 1 + \frac{\sigma M}{h\nu} \tau_2 = \frac{P_2}{P_{20}} \Rightarrow M(\nu) = \frac{h\nu}{\tau_2 \sigma(\nu)} \left(\frac{P_2}{P_{20}} - 1 \right).$$

Le laser ayant ν fixé $\sigma(\nu)$ est constant d'où le graphe .
 P_{20} est un seuil pour obtenir P_s .



4.8.3. Effet de serre sur Terre

Le rayon du Soleil vaut $a = 0,70 \cdot 10^6$ km ; la distance moyenne de la Terre au Soleil est $D = 1,49 \cdot 10^8$ km ; le rayon de la Terre vaut $R_T = 6400$ km.

On admettra que le Soleil se comporte sensiblement comme un corps noir de température T_s . Dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ dont la direction moyenne fait un angle θ avec la normale à la surface émissive, un élément de celle-ci, d'aire dS , rayonne donc, dans l'intervalle de fréquences compris entre ν et $\nu + d\nu$, une puissance :

$$d^3P = \frac{2h\nu^3 \cos \theta}{c^2 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)} dS d\Omega d\nu,$$

où h (constante de Planck) vaut $6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s,
 k (constante de Boltzmann) vaut $1,381 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹,
 c (vitesse de la lumière) vaut $2,998 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.

Enfin, sauf mention contraire, on supposera que les transferts d'énergie sont uniquement assurés par le rayonnement.

A.1. Montrer que la puissance totale rayonnée par un mètre carré de la surface solaire a pour expression : $P_1 = \frac{dP}{dS} = \sigma T_s^4$, où la constante σ , voisine de $5,7 \cdot 10^{-8}$ W.m⁻².K⁻⁴, sera

évaluée avec la précision compatible avec les données et en tenant compte de l'égalité :

$$\int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Le maximum d'émittance $\frac{dP}{dS}$ du soleil (en fonction de la longueur d'onde) est obtenu

pour $\lambda_0 = 0,474$ μ m. Cette valeur est-elle suffisamment cohérente avec la valeur T , que l'on vient de calculer pour qu'il soit effectivement raisonnable de traiter le Soleil comme un corps noir?

2. La "constante solaire" E_0 est, par définition, la puissance reçue du soleil par unité de surface normale aux rayons solaires au sommet de l'atmosphère terrestre.

Calculer E_0 en fonction de D , a , σ et T_s .

On trouve expérimentalement $E_0 = 1,35 \cdot 10^3$ W.m⁻².

En déduire la valeur numérique de T_s .

B. On rappelle que l'albedo d'une surface est le rapport du flux qu'elle diffuse sans l'absorber au flux qu'elle reçoit. L'albedo A de l'ensemble Terre-atmosphère, pour le rayonnement solaire, est évalué à 0,34.

On appellera température planétaire T_p la température moyenne d'équilibre qu'atteindrait l'ensemble Terre-atmosphère, soumis au rayonnement solaire, s'il rayonnait comme un corps noir de température uniforme T_p .

1. Donner l'expression littérale de T_p en fonction de A , σ et E_0 (ou u) tel que $u = \frac{E_0}{4}$,

puis calculer la valeur numérique de T_p . (La valeur obtenue est sensiblement inférieure à la température moyenne du sol : 287 K, mais supérieure à celles des couches les plus hautes de l'atmosphère : 210 K à 220 K).

2. Sur un modèle, nous tenterons d'expliquer comment l'atmosphère peut maintenir le sol à une température supérieure à T_p (effet de serre).

On suppose que :

- La surface du sol (à la température T_0) est plane, infinie et normale aux rayons solaires qu'elle reçoit à travers une vitre (cf. serre classique) (dont la température T est uniforme) également plane et infinie, à faces parallèles au sol. On néglige l'influence d'une atmosphère éventuelle ;
- Le sol et la vitre rayonnent approximativement comme des corps noirs de températures respectives T_0 et T ;
- Le verre est transparent aux rayons solaires et absorbe à peu près complètement le rayonnement de la Terre ;
- La constante solaire garde la valeur donnée plus haut ;
- L'albedo A , pour le rayonnement du Soleil, de l'ensemble vitre-sol est identique à celui de la Terre et de l'atmosphère utilisé plus haut.

Donner l'expression, en fonction de A , E_0 et σ , de la température d'équilibre T'_0 , que prendrait le sol dans cette géométrie en l'absence de vitre, puis exprimer T et T_0 en fonction de T'_0 .

3. Reprendre la même étude en supposant maintenant que l'on dispose n vitres successives, identiques à celle de la question précédente, et toutes parallèles entre elles, au-dessus de la surface du sol (cf. structure en couches de l'atmosphère).

L'ensemble vitres-sol gardant pour le rayonnement solaire l'albedo $A = 0,34$, exprimer en fonction de T'_0 :

- La température T_n de la dernière vitre (la plus éloignée du sol) ;
 - Celle T_0 du sol ;
 - Celle T_m de la $m^{\text{ième}}$ à partir du sol.
4. Exprimer T_0 et T_n en fonction de T_s et de n (ainsi que des autres grandeurs qui peuvent intervenir dans le calcul).

Donner les valeurs numériques de T_0 pour $n = 1$ et $n = 5$. Conclure.

5. On suppose que le verre des vitres constitue un filtre idéal qui absorbe intégralement les radiations de fréquence ν inférieures à une fréquence de coupure ν_c et laisse totalement passer les autres. Les valeurs calculées pour T_s d'une part, T_0 et T_n d'autre part, permettent-elles de choisir ν_c telle que l'hypothèse de la quasi-opacité des vitres au rayonnement terrestre et de leur quasi-transparence au rayonnement solaire soit vérifiée de manière satisfaisante à 1% près.

On pourra s'aider de la fonction $F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{y^3 dy}{e^y - 1}$.

Agregation ; Durée : 1h30.

Corrigé

A.1.a. On demande $\frac{dP}{dS}$ alors que l'on donne d^3P ; il faut intégrer en fréquence (de 0 à ∞) et en angle solide : $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, θ variant de 0 à $\pi/2$.

$$P_1 = \frac{dP}{dS} = \int_0^\infty \frac{2h\nu^3 d\nu}{c^2 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta$$

Posons $y = \frac{h\nu}{kT}$, $dy = \frac{h d\nu}{kT}$;

$$\frac{dP}{dS} = \frac{2kT}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^3 \pi \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} ;$$

$$\frac{dP}{dS} = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 \Rightarrow \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} ;$$

A.N. : $\sigma = 5,676 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

En exprimant numériquement σ avec le même nombre de chiffres significatifs que les données de l'énoncé les plus précises.

b. $v = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow dv = -c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$.

$$d^3P = -\frac{2hc^3}{\lambda^5 c^2} \frac{d\lambda dS \cos \theta}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta, \text{ d'où en intégrant en } \theta \text{ de } 0 \text{ à } \pi/2,$$

$$P_2 = \frac{dP_1}{d\lambda} = \frac{-2\pi hc}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)}.$$

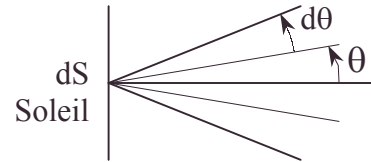
$\frac{dP_2}{d\lambda} = 0$ correspond aux extrema de $\frac{dP_1}{d\lambda}$.

$$\frac{dP_2}{d\lambda} = \frac{2\pi hc}{\lambda^{10} \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^2} \left[5\lambda^4 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right) - \lambda^3 \frac{hc}{kT} e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \right] = \frac{10\pi hc v^{10} c^3}{c^{10} v^3 \left(e^{\frac{hv}{kT}} - 1 \right)^3} \left[\frac{c}{v} - \frac{hc}{5kT} \frac{1}{1 - e^{-\frac{hv}{kT}}} \right]$$

$\frac{dP_2}{d\lambda} = 0$ pour $v_0 = \frac{5kT}{h} \left(1 - e^{-\frac{hv_0}{kT}} \right) = \frac{c}{\lambda_0}$; on laisse à part $v = 0$ avec $P_2(0) = 0$.

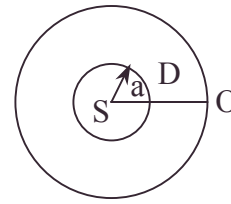
Posons $y = \frac{hv_0}{kT}$, il reste $y = 5(1 - e^{-y})$, dont la solution graphique est $y = 4,965$.

$\frac{hv_0}{kT_s} = 4,965$; pour v_0 , $|P_2|$ est maximum puisque $\frac{d|P_2|}{d\lambda}(0)$ est un minimum.



2.a. La puissance émise par le soleil est $4\pi a^2 P_1$ avec $P_1 = \sigma T_s^4$ que l'on retrouve à la distance D écrite $4\pi D^2 E_0$, E_0 étant la puissance reçue normalement à la distance D .

$$E_0 = P_1 \frac{a^2}{D^2} = \frac{\sigma a^2}{D^2} T_s^4.$$



b. D'où $T_s = \left(\frac{E_0 D^2}{\sigma a^2} \right)^{\frac{1}{4}}$; A.N. : $T_s = 5730 \text{ K}$.

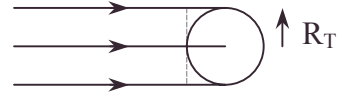
c. Si le soleil émet selon la loi du corps noir on doit avoir :

$$\frac{hc}{\lambda'_0 k T_s} = 4,965 \Rightarrow \lambda'_0 = \frac{hc}{k T_s \cdot 4,965}, \text{ soit } \lambda'_0 = 0,506 \mu\text{m} \Rightarrow \frac{\lambda'_0 - \lambda_0}{\lambda_0} = 7\%.$$

Le Soleil émet approximativement comme le corps noir.

B.1. Le Soleil étant loin de la Terre, on peut considérer les rayons reçus comme parallèles. On néglige l'épaisseur de l'atmosphère devant R_T .

La puissance interceptée est celle reçue par la surface normale aux rayons, d'aire πR_T^2 , soit $E_0 \pi R_T^2$.



La puissance absorbée par l'ensemble Terre-atmosphère est donc $(1 - A) \pi R_T^2 E_0$, puisque la puissance $A E_0 \pi R_T^2$ est immédiatement diffusée.

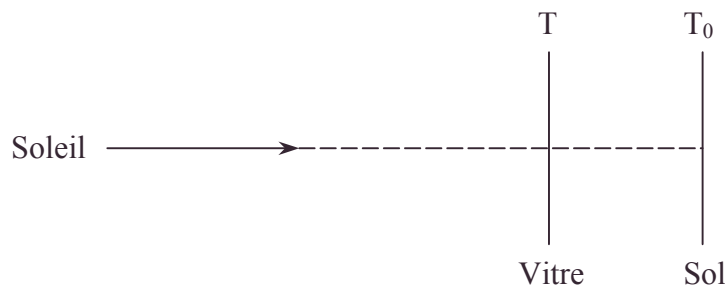
En régime stationnaire, la puissance absorbée est rayonnée entièrement selon la loi de

Stéphan : $(1 - A) \pi R_T^2 E_0 = 4\pi R_T^2 \sigma T_p^4 \Rightarrow T_p = \left[(1 - A) \frac{E_0}{4\sigma} \right]^{\frac{1}{4}} = \left[(1 - A) \frac{u}{\sigma} \right]^{\frac{1}{4}}.$

A.N. : $u = 337,5 \text{ W.m}^{-2}$.

$T_p = 250 \text{ K}$ avec $210 \text{ K} < T_p < 287 \text{ K}$.

2.



a. En absence de vitre

Puissance absorbée par une surface S de sol : $(1 - A) E_0 S$ cf. **B.1.**

Puissance rayonnée selon la loi de Stéphan $S \sigma T_0'^4$

en régime stationnaire : $(1 - A) E_0 S = S \sigma T_0'^4$; $T_0' = \left[(1 - A) \frac{E_0}{\sigma} \right]^{\frac{1}{4}}$; A.N. : $T_0' = 354 \text{ K}$.

b. En présence de vitre

Puissance absorbée venant du Soleil par une surface S de sol : $(1 - A) E_0 S$.

Puissance reçue de la vitre émettant selon la loi de Stéphan : $S \sigma T^4$.

Puissance rayonnée par le sol selon la loi de Stéphan : $S\sigma T_0^4$.

En régime stationnaire pour le sol, on peut écrire :

$$(1-A)E_0S + S\sigma T^4 = S\sigma T_0^4 \text{ soit } T_0'^4 + T^4 = T_0^4.$$

Considérons maintenant le système sol-vitre :

Il absorbe pour une surface S : $(1-A)E_0S$;

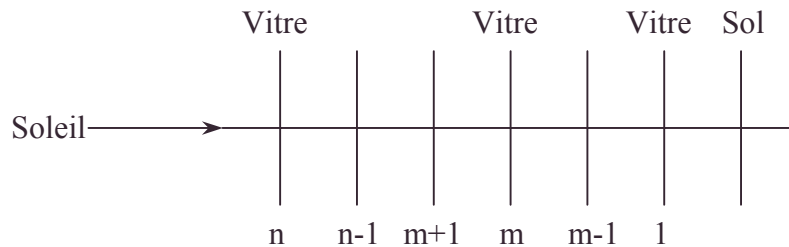
Il rayonne vers l'espace par la vitre : σT^4S ;

En régime stationnaire, on a donc : $(1-A)E_0 = \sigma T^4$, soit $T_0'^4 = T^4$.

Conclusion : $T = T_0'$ A.N. : $T = 354 \text{ K}$.

$$T_0 = 2^{\frac{1}{4}} T_0' = \left[2(1-A) \frac{E_0}{\sigma} \right]^{\frac{1}{4}} ; \text{ A.N. : } T_0 = 421 \text{ K}.$$

3.



Considérons :

a. L'ensemble sol-vitres pour une surface S .

Il absorbe $S\sigma T_0'^4$, il rayonne par la vitre n : $S\sigma T_n^4$;

En régime stationnaire on a donc comme précédemment : $T_n = T_0'$.

b. Considérons la vitre n seule

Elle absorbe uniquement la puissance rayonnée émise par la vitre $n-1$, soit une puissance $S\sigma T_{n-1}^4$.

Elle rayonne sur 2 faces selon la loi de Stéphan une puissance $2S\sigma T_n^4$.

En régime stationnaire, il reste $T_{n-1} = 2^{\frac{1}{4}} T_n = 2^{\frac{1}{4}} T_0'$.

c. Considérons la vitre $n-1$ seule

Elle absorbe la puissance rayonnée émise par les vitres n et $n-2$;

Elle rayonne sur 2 faces selon la loi de Stéphan \Rightarrow

$$2T_{n-1}^4 = T_n^4 + T_{n-2}^4 ;$$

$$T_{n-2}^4 = 2.2T_0'^4 - T_0'^4 = 3T_0'^4 ;$$

$$T_{n-2} = 3^{\frac{1}{4}} T_0'.$$

d. considérons la vitre $m+1$

Elle absorbe le rayonnement émis par les vitres voisines $m+1$ et $m-1$: $S\sigma(T_{m+2}^4 + T_m^4)$;

Elle rayonne sur 2 faces : $2S\sigma T_m^4$.

On a donc : $2T_{m+1}^4 = T_{m+2}^4 + T_m^4$, soit encore : $T_m^4 = 2T_{m+1}^4 - T_{m+2}^4$.

e. Par récurrence : la forme $T_{n-i}^4 = (i+1)T_0'^4$ est vérifiée pour $i = 0$ et $i = 1$.

$$\begin{cases} \text{Pour } i = n - m - 2 & T_{m+2}^4 = (n - m - 1) T_0'^4 \\ \text{Pour } i = n - m - 1 & T_{m+1}^4 = (n - m) T_0'^4 \end{cases}$$

• loi de Stefan, récurrence

On en tire à l'ordre $i = m - n$: $T_m^4 = [2(n - m) - (n - m - 1)]T_0'^4$, qui est de la forme $T_m^4 = [(n - m) + 1]T_0'^4$, soit bien de la forme proposée avec $i = n - m$.

La démonstration par récurrence est donc valable.

f. Pour $i = n - 1$, $T_1^4 = nT_0'^4$.

g. Pour le sol, la puissance rayonnée du sol est égale à la puissance solaire absorbée $(1 - A)E_0S = \sigma T_0'^4S$ additionnée à la puissance rayonnée par la vitre 1.

$$\sigma T_0'^4 + \sigma T_1^4 = \sigma T_0^4 \text{ soit } T_0^4 = (n + 1)T_0'^4.$$

Pour $n = 1$, on retrouve : $T_0 = 2^{\frac{1}{4}}T_0'$.

4.a. A.2.a. et B.2.a. \Rightarrow

$$\sigma T_0'^4 = (1 - A)E_0 = (1 - A)\frac{a^2}{D^2}\sigma T_s^4 \Rightarrow T_0' = (1 - A)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{D}\right)^{\frac{1}{2}}T_s = T_n$$

$$\mathbf{b. B.2.g.} \Rightarrow T_0 = (n + 1)^{\frac{1}{4}}(1 - A)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{D}\right)^{\frac{1}{2}}T_s.$$

$$\mathbf{c.} T_m = (n - m + 1)^{\frac{1}{4}}(1 - A)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{D}\right)^{\frac{1}{2}}T_s.$$

$$\mathbf{d. A.N. :} \quad n = 1 : T_0 = 421 \text{ K}.$$

$$n = 5 : T_0 = 554 \text{ K}.$$

Le modèle n'est pas réaliste.

5.a. On a rencontré $F(\infty)$ dans le calcul de P_1 en **A.1.** ; formons :

$$\frac{\int_0^{v_1} \frac{2hv^3 dv}{c^2 \left(e^{\frac{hv}{kT}} - 1 \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^{\infty} \frac{2hv^3 dv}{c^2 \left(e^{\frac{hv}{kT}} - 1 \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{\int_0^x \frac{y^3 dy}{e^y - 1}}{\int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y - 1}} = \frac{\int_0^x \frac{y^3 dy}{e^y - 1}}{\frac{\pi^4}{15}} = F(x) \text{ avec } y = \frac{hv}{kT} = \frac{hc}{k\lambda T}.$$

On peut interpréter $F(x)$ comme la fraction de puissance du rayonnement d'un corps noir compris entre les fréquences 0 et v_1 .

b. Le verre doit être un filtre passe-bas idéal ; v_c la fréquence de coupure doit être estimée de sorte que $F\left(\frac{hv_c}{kT_s}\right) \neq 0$ et $F\left(\frac{hv_c}{kT_{\max}^0}\right) \neq 1$. On rappelle $T_s > T_{\max}^0$.

α. $F\left(\frac{hv_c}{kT_{\min}^0}\right)$ sera automatiquement voisin de 1 car $F(x)$ est une fonction

croissante d'asymptote $F(x) = 1$.

A.N. : on dispose de : $T_{\max}^0 = 554 \text{ K}$;

on accepte un écart de 1% sur $F = 1$ soit $F(x) = 0,99 \Rightarrow x = 10$

$$\Rightarrow \frac{hv_c}{kT_{\max}^0} = 10 \Rightarrow v_c = 10 \frac{kT_{\max}^0}{h}. \text{ A.N. : } v_c = 1,15 \cdot 10^{14} \text{ Hz ; } \lambda_c = 2,6 \mu\text{m}.$$

β. La question A.2. permet de calculer

$$x = \frac{h\nu_c}{kT_s} = \frac{hc}{k\lambda_c T_s} = \frac{hc}{k\lambda_0 T_s} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{h\nu_0}{kT_s} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_c} = 0,905 ; F\left(\frac{h\nu_c}{kT_s}\right) = 0,0267$$

le tout est acceptable de fait.

4.8.4. Modélisation des trois types d'échanges thermiques

Voir page 646.

4.8.5. Interféromètre de Pérot-Fabry

Voir page 1444.

4.8.6. Diode laser et mesure interférométrique

Voir page 1418.

5. Electricité fondamentale

5.1. Electrocinétique

Appartient aux programmes de MPSI, PCSI, PTSI, BCPST1 et 2, TSI1, TPC1

5.1.1. Courant continu

5.1.1.1. Diode Zener

1. On donne la caractéristique inverse d'une diode Zener (figure 1).

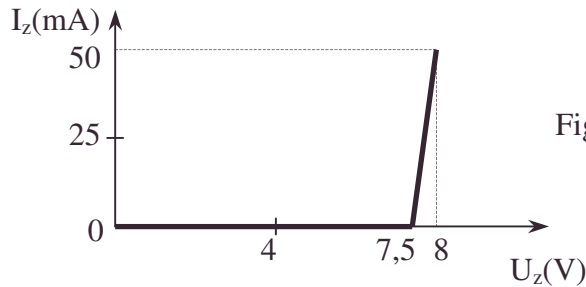
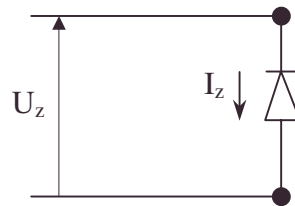


Figure 1



1. La diode conduit lorsque la tension à ses bornes est égale à la tension dite de Zener E_z . Que vaut E_z pour cette diode ?

Calculer la résistance différentielle $\left(\frac{dU_z}{dI_z}\right)$ pour les deux parties de la caractéristique.

2. Montrer qu'on peut établir une relation du type $U_z = E_z + R_z I_z$ pour la partie utile de la caractéristique. En déduire un schéma électrique équivalent.

3. La diode ci-dessus est incluse dans le circuit représenté à la figure 2. La tension continue est fournie par un générateur de résistance interne négligeable, de force électromotrice $E = 12$ V.

1. Calculer R pour que l'intensité du courant qui traverse la diode soit égal à 5 mA.

2. Exprimer, en fonction de E , R , E_z , et R_z , les deux éléments E_0 et R_0 du générateur de Thévenin équivalent au circuit compris entre A et B.

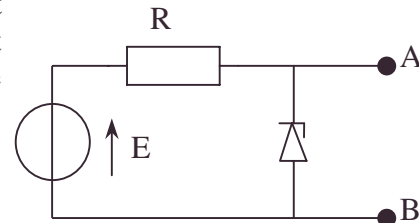


Figure 2

3. Exprimer, en fonction de R et R_z , la quantité $\frac{dE_0}{dE}$. De combien varie E_0 lorsque

E varie de 2 volts ? Quelle est alors l'utilité de la diode Zener ?

4. On connecte aux bornes A et B du circuit précédent une résistance X . (Figure 3).

1. Calculer en fonction de E , E_z , R , R_z , et X le courant circulant dans cette résistance.

Application numérique : $X = 2000 \Omega$.

2. Calculer la valeur minimale X_m de X pour laquelle la diode Zener ne joue plus aucun rôle.

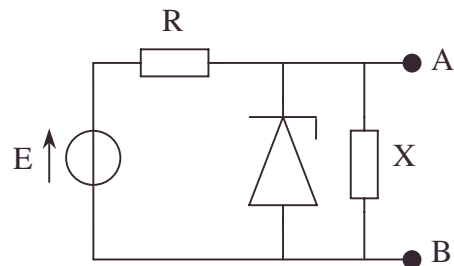


Figure 3

Petites Mines ; Durée 1h

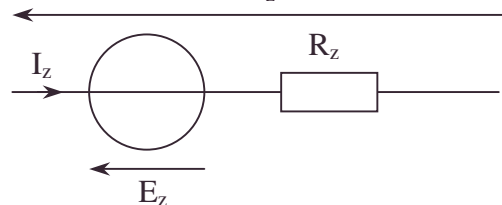
Corrigé

1.a. On lit : $E_z = 7,5 \text{ V}$; pour $0 < U_z < E_z$, $I_z = 0$.

b. $U_z < E_z$: $\frac{dU_z}{dI_z} = +\infty$; $U_z > E_z$: $R_z = \frac{dU_z}{dI_z} = \frac{8 - 7,5}{50 \cdot 10^{-3}} = 10 \Omega$.

2.a. On vérifie pour $U_z > E_z$: $U_z = E_z + R_z I_z$ équation d'une droite (limitée) par $I_z = 0$ et par $I_z = 50 \cdot 10^{-3} \text{ A}$. Ainsi $U_z = 7,5 + 10 I_z$.

b. Schéma équivalent :



3.1. Rien n'est branché à l'extérieur du circuit cf. 4.

La loi d'Ohm s'écrit : $E - R I_z = E_z + R_z I_z$ quand la diode est passante ;

$$R = \frac{E - E_z}{I_z} - R_z . \quad \text{AN : } R = 890 \Omega .$$

2.a. $R_0 = \frac{R R_z}{R + R_z}$ en éteignant toutes les sources de tension (aucune n'est commandée)

b. $I_z = \frac{E - E_z}{R + R_z}$ et $E_0 = (V_A - V_B)_{c.o.} = E_z + R I_z = \frac{R E_z + R_z E}{R + R_z}$.

AN : $R_0 = 9,9 \Omega$; $E_0 = 7,55 \text{ V}$.

3.a. $\left(\frac{\partial E_0}{\partial E} \right)_{E_z} = \frac{R_z}{R + R_z}$.

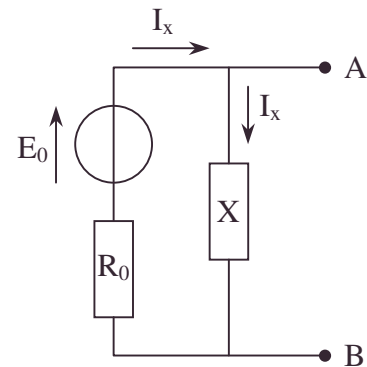
b. $\Delta E_0 = \frac{R_z}{R + R_z} \Delta E$; AN : $\Delta E_0 = 0,02 \text{ V}$.

c. La diode Zener diminue les variations de tension.

4.a. On utilise le schéma équivalent de Thévenin du dipôle du 3.2.a.b. (en supposant le fonctionnement de la diode Zener car $12 \text{ V} > 7,5 \text{ V}$) pour calculer :

$$I_x = \frac{E_0}{R_0 + X} = \frac{R E_z + R_z E}{R R_z + X (R + R_z)} ; \quad \text{AN : } I_x = 3,76 \text{ mA} .$$

b. La diode Zener n'intervient plus : $I_z = 0$ si $U_z = X I_x < E_z$, soit vu le pont diviseur de tension $X \frac{E_0}{R_0 + X} < E_z$ ou $X < \frac{R_0 E_z}{E_0 - E_z}$; AN : $X_m = 1480 \Omega$.



5.1.1.2. Mesure de température par une thermistance

Une thermistance est constituée d'un semi-conducteur (le silicium généralement) dont la résistivité ρ est fonction de la température suivant la loi : $\rho = A \exp\left(\frac{B}{T}\right)$. A et B sont des constantes caractéristiques de la thermistance. T est la température absolue en kelvin. Pour le matériau constituant cette thermistance (le silicium), on a $B = 6492$ unités SI.

- dérivée partielle, incertitude, silicium, thermistance, Zener

A la température $T_0 = 300,0 \text{ K}$, la thermistance a une résistance $R_0 = 115,0 \Omega$. On supposera que les dimensions de la thermistance ne varient pas avec la température et que sa résistance est proportionnelle à sa résistivité.

I.1. Quelles sont les unités SI des constantes A et B ? Justifier la relation donnant la résistance $R(T)$ de la thermistance à la température T : $R(T) = R_0 \exp\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{T_0}\right)$.

représenter dans le domaine des températures 0 K, 400 K, l'allure de la courbe donnant cette résistance en fonction de la température absolue.

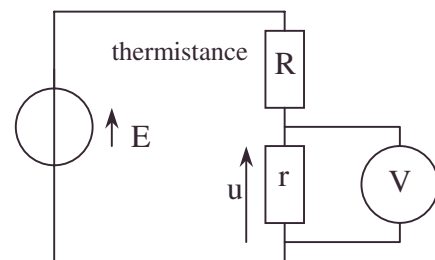
2. Autour de $T_0 = 300,0 \text{ K}$ la température de la thermistance peut varier très légèrement de δT (avec $|\delta T| \ll T_0$). Sa résistance $R(T)$ varie alors très légèrement de δR (avec $|\delta R| \ll R(T)$). Démontrer que l'on a : $\delta R = R_0 a \delta T$ et exprimer le paramètre a, en fonction de B et T_0 . Calculer numériquement a avec 4 chiffres significatifs, préciser son unité.

Pour toute la suite de l'exercice, on prendra $a = -7,0 \cdot 10^{-2}$ unité SI, et on posera $\delta R = R_0 a \delta T$ comme variation de la résistance de la thermistance avec la température autour de $T_0 = 300,0 \text{ K}$.

II. La résistance de la thermistance est mesurée à l'aide d'un ohmmètre numérique. Sur le calibre le plus approprié, à T_0 , l'affichage obtenu sur l'appareil est alors le suivant : $115,0 \Omega$.

La variation d'une unité du dernier chiffre affiché ("un digit") correspond à la plus petite variation de résistance qui peut être détectée avec cet ohmmètre supposé parfait. Quelle est, dans ces conditions, la plus petite variation de température de la thermistance que l'on peut déceler autour de T_0 ? Effectuer l'application numérique.

III. La thermistance est intégrée au circuit ci-contre. E est la f.é.m. constante d'un générateur idéal de tension, r est une résistance de $100,0 \Omega$. La tension u aux bornes de r est mesurée à l'aide d'un voltmètre numérique V, dont la résistance interne sera supposée infinie.



1. Quel est l'ordre de grandeur de la résistance interne d'un voltmètre numérique ?

2. Exprimer la tension u, en fonction de r, R et E. Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0 \text{ K}$, le voltmètre, sur le calibre le plus approprié, affiche la valeur u_0 suivante : $4,651 \text{ V}$.

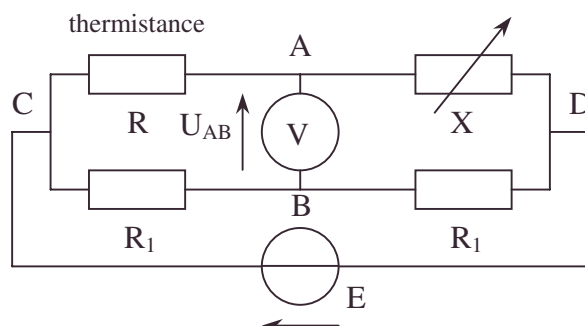
La variation du dernier chiffre (un "digit") correspond à la plus petite variation de tension qui peut être détectée avec ce voltmètre. Quelle est la valeur numérique de E ?

3. Quelle est, dans ces conditions, la plus petite variation de température δT de la thermistance que l'on peut déceler autour de T_0 (exprimée en fonction de δu , r, R_0 , u_0 et a) ?

Effectuer l'application numérique.

IV. La thermistance R est intégrée au circuit ci-contre.

Le voltmètre numérique V a une résistance interne supposée infinie, X est une résistance ajustable, les deux résistances R_1 ont la même valeur $100,0 \Omega$.



• calibre, développement au premier ordre ou plus, digit [numérisation], dimension, générateur de tension, graphe, ordre de grandeur, thermistance, silicium [cf cristal du diamant], unité, voltmètre numérique

La f.é.m. E du générateur idéal de tension vaut 10,0 V.

1. Exprimer la tension u_{AB} aux bornes du voltmètre en fonction de R , X et E .

2. Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0$ K on règle la valeur de la résistance X à X_0 pour que la tension u_{AB} soit nulle. Déterminer X_0 et sa valeur numérique.

Pour toutes les questions qui suivent on ne modifie plus la valeur de $X = X_0$.

3. Autour de T_0 la température de la thermistance varie très légèrement de δT . Démontrer que la tension u_{AB} peut alors se mettre sous la forme : $u_{AB} = K \cdot \delta T$. Exprimer K en fonction de E et a .

4. Lorsque la température de la thermistance est $T_0 = 300,0$ K, le voltmètre sur le calibre le plus sensible affiche la valeur suivante (en mV) : 00,00 mV.

Quelle est la plus petite variation de température δT de la thermistance que l'on peut détecter dans ces conditions, autour de 300 K ?

5. Pourquoi, dans ce montage, avec le même voltmètre que dans le montage précédent, a-t-on obtenu ce résultat ?

Autres concours ; Durée : 1h.

Corrigé

I.1.a.α. L'unité de B est celle de T soit K car on prend formellement l'exponentielle d'un nombre sans dimension.

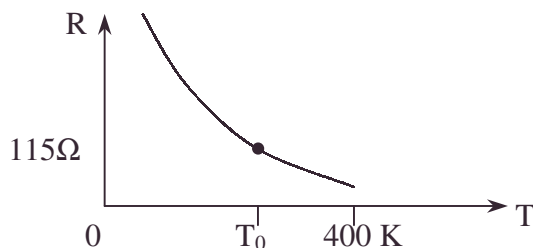
β. Les unités de A et de ρ sont les mêmes or $R = \rho \frac{\ell}{s} \Rightarrow \rho = R \frac{s}{\ell}$;

son unité habituelle est $\Omega \cdot m$.

b. $R(T) = \rho(T) \frac{\ell}{s}$ en négligeant les variations de ℓ et s avec T ;

$$R_0 = R(T_0) = \rho(T_0) \frac{\ell}{s} ; \frac{R(T)}{R_0} = \frac{\rho(T)}{\rho(T_0)} = \exp\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{T_0}\right), \text{ d'où la forme donnée.}$$

c.



2. Différentions $R \Rightarrow \delta R = -RB \frac{\delta T}{T^2}$. Au voisinage de T_0 , $R_0 \delta R = -R_0 \frac{B}{T_0^2} \delta T$, de la forme donnée avec $a = -\frac{B}{T_0^2} \Rightarrow$ l'unité de a est K^{-1} ; A.N. : $a = -7,213 \cdot 10^{-2} K^{-1}$.

II. $\delta T = \frac{\delta R}{R_0 a}$; pour $|\delta R| = 0,1 \Omega$ cf. dernier digit à droite, $|\delta T| = 1,2 \cdot 10^{-2} K$.

III.1. $R_v = 10^7 \Omega$ à titre indicatif.

2. On peut négliger l'intensité du courant traversant le voltmètre numérique vu sa grande résistance.

• calibre, développement au premier ordre ou plus, dimension, graphe, thermistance, unité, voltmètre numérique

La formule du pont diviseur de tension donne : $u = \frac{Er}{r+R} \Rightarrow E = \left(1 + \frac{R}{r}\right)u$.

A.N. : $E = 10,00 \text{ V}$.

On donne le même nombre de chiffres significatifs que les données de l'énoncé quand on ne fait pas un calcul d'incertitude systématique.

3. r et E ne varient pas avec T en première approximation.

$$\ln u = \ln rE - \ln(r+R) ; \frac{du}{u} = -\frac{dR}{R+r} = -\frac{R_0 a dT}{r+R}$$

Au voisinage de T_0 , $\delta T = -\frac{(r+R_0)}{u_0 R_0 a} \delta u$; A.N. : $\delta u = 10^{-3} \text{ V}$; $\delta T \approx 6.10^{-3} \text{ K}$.

IV.1. Le courant dans le voltmètre est nul vu sa résistance infinie.

La formule du montage potentiométrique donne :

$$V_A - V_D = \frac{X}{R+X}(V_C - V_D) = \frac{EX}{R+X} ; V_B - V_D = \frac{R_1}{2R_1}(V_C - V_D) = \frac{E}{2}.$$

$$u_{AB} = V_A - V_B = (V_A - V_D) - (V_B - V_D) = E \left(\frac{X}{R+X} - \frac{1}{2} \right) = \frac{E(X-R)}{2(X+R)}.$$

2. $U_{AB} = 0 \Rightarrow X = R$ à $T = 300 \text{ K}$, $X_0 = R_0$; A.N. : $X_0 = 115,0 \Omega$ si la mesure de R_0 est la même (cf. dernier digit à droite incertain).

3. La thermistance a une résistance spécialement sensible, on considère que seule R varie. Si $R = R_0 + dR$, $X_0 - R = -dR$; $X_0 + R \approx 2R_0$.

$$\delta u_{AB} = -\frac{E}{4R_0} dR = \frac{E}{4} a dT \Rightarrow K = \frac{E a}{4}.$$

$$4. \delta u_{AB} = 10^{-5} \text{ V}.$$

$$\delta T = \frac{\delta u_{AB}}{K} = \frac{4 \delta u_{AB}}{E a} ; \text{A.N. : } |\delta T| = 6.10^{-5} \text{ K}.$$

5. Une méthode de zéro (ici pour la d.d.p.) est de meilleure précision car on peut utiliser le calibre de meilleure précision pour déterminer ce "zéro". On rappelle qu'on utilise la méthode du pont de Weathstone pour les mesures de résistance de précision.

5.1.1.3. Mesures de capacité calorifique, de coefficient de variation de la résistivité avec T

On rappelle que la conductance G est l'inverse de la résistance R : $G = \frac{1}{R}$.

A. Soit n conductances $G_1, \dots, G_k, \dots, G_n$ connectées en étoile et alimentées par n sources de f.é.m. $E_1, \dots, E_k, \dots, E_n$, comme indiqué sur la figure 1.

Désignons par U la différence de potentiel entre le point commun B des conductances et le point commun A des sources. $U = U_B - U_A$

1. Déterminer, en utilisant le principe de conservation du courant en un nœud, l'expression de la tension U en fonction de l'ensemble $G_1, \dots, G_k, \dots, G_n$ des conductances et de l'ensemble $E_1, \dots, E_k, \dots, E_n$ des f.é.m. (Relation de Millman).

• calibre, incertitude, méthode de zéro, montage potentiométrique, pont de Wheatstone, pont diviseur de tension, voltmètre numérique

Application : on prendra successivement :

$$k \in [1, n] \text{ et } k \in [1, 5] ; E = 2V.$$

a. Donner l'expression de U quand $G_k = G$, $E_k = kE \forall k$.

b. Même question, quand $G_k = kG$, $E_k = kE \forall k$.

2. Dédurre de la relation de Millman le courant I_j dans la conductance G_j en fonction des f.é.m. $E_1, \dots, E_k, \dots, E_n$ des sources et des valeurs $G_1, \dots, G_k, \dots, G_n$ des conductances, puis la puissance P_j dissipée dans la branche correspondante et enfin la puissance totale P .

Applications :

on prendra successivement $k \in [1, n]$ et $k \in [1, 5] ; E = 2V$.

Données :

$$\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2} ; \sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \sum_1^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

a. Donner les expressions de I_j , P_j et P avec les données de **1.a.**

b. Même question pour les données de **1.b.**

B. On dispose d'un ensemble $[F]$ de conductances G identiques et qui varient en fonction de la température t (en degrés Celsius) suivant la loi : $G = \frac{G_0}{(1+at)}$.

Dans toute cette partie les grandeurs demandées seront exprimées d'abord littéralement puis numériquement. Les données numériques qui seront fournies au cours d'un paragraphe resteront valables pour la suite du problème.

Un corps de cylindre D est muni d'un piston mobile et contient de l'azote qui sera considéré comme un gaz parfait. Afin de déterminer certaines constantes physiques relatives à une conductance G de $[F]$, on installe à l'intérieur de cette enceinte un montage en étoile, telles que : $G_k = G$, $E_k = kE$, avec $k \in [1, 5]$ (fig. 2), où G est une quelconque des conductances de $[F]$.

Un interrupteur général K commande simultanément l'ouverture ou la fermeture des 5 branches. Les parois de l'enceinte sont rendues parfaitement adiabatiques, les fuites thermiques sont éliminées et toute l'énergie qui sera apportée dans l'enceinte par effet Joule servira à échauffer le gaz et les conductances.

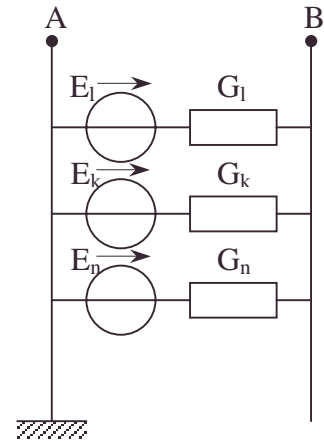


Figure 1

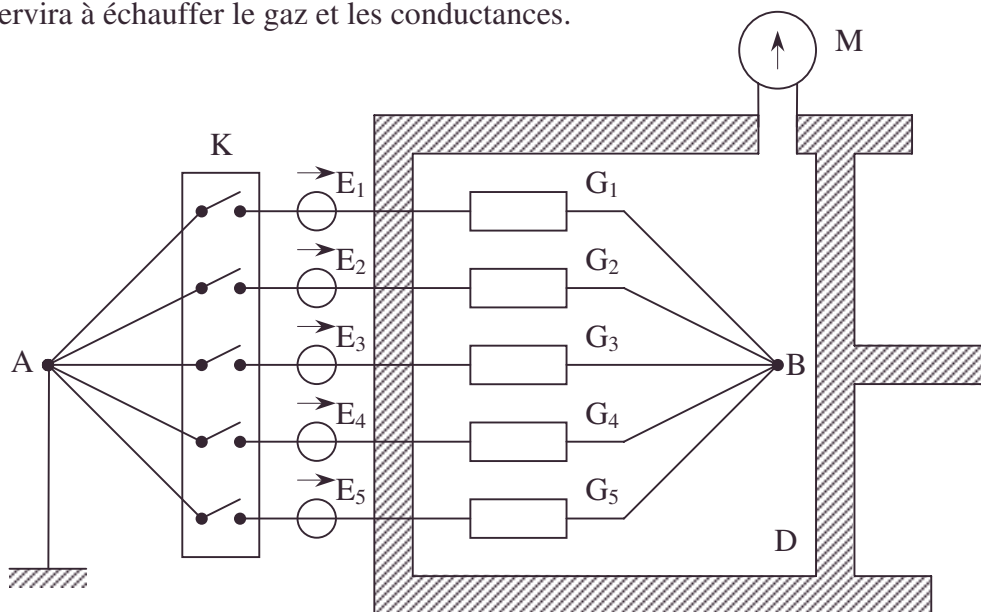


Figure 2

- adiabatique, capacité calorifique, conductance électrique[inverse de résistance], effet Joule, f.é.m, loi aux noeuds, Millman[théorème de], montage en étoile, point commun d'embranchement électrique ou noeud intéressant

On supposera qu'à chaque instant, l'équilibre thermique est établi entre le gaz et les conductances.

Soit P_0 , V_0 , t_0 la pression, le volume et la température en degrés Celsius du gaz à l'état initial. Au cours de l'expérience le volume restera constant et égal à V_0 , le piston étant bloqué. Un manomètre précis M placé sur le corps du cylindre permet alors de mesurer à chaque instant la pression P du gaz.

On ferme l'interrupteur K à l'instant $\theta = 0$ et on l'ouvre au bout d'un temps $\theta = \theta_1$; la pression du gaz atteint alors la valeur $P = P_1$.

On recommence l'expérience en plaçant dans l'enceinte un montage tel que : $G_k = kG$, $E_k = kE$, $k \in [1,5]$, $G \in [F]$, en repartant du même état initial du gaz (P_0 , V_0 , t_0).

On constate alors que la pression atteint la même valeur $P = P_2 = P_1$ au bout d'un temps θ_2 .

a. Quelles sont les températures finales t_1 et t_2 des conductances à la fin de chacune des expériences ?

Application numérique : $P_0 = 10^5$ pascals, $P_1 = P_2 = 1,366 \cdot 10^5$ pascals, $t_0 = 0^\circ\text{C}$.

b. Quelle est la capacité calorifique du gaz de l'enceinte ?

Application numérique : $V_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Chaleur spécifique à volume constant de l'azote $c_v = 0,71 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

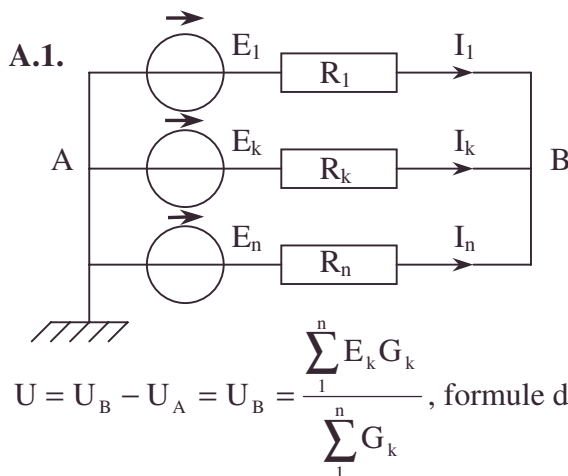
Masse molaire de l'azote $N_2 = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

c. Quelles sont alors les valeurs de la capacité calorifique γ de la conductance G et de son coefficient de température α ?

Application numérique : $G_0 = 1 \Omega^{-1}$; $E = 2 \text{ volts}$; $\theta_1 = 203$ secondes,
 $\theta_2 = 215,5$ secondes.

CCP ; Durée : 1h.

Corrigé



Dans le montage étoile en B :

$$\sum_k I_k = 0 = \sum_k \frac{(E_k - U_B)}{R_k}.$$

$$U_B \left(\sum_k G_k \right) = \sum_k E_k G_k.$$

$$U_A = 0.$$

Application

a. α . $\sum G_k = nG$; $\sum E_k G_k = EG \sum k = \frac{n(n+1)}{2} GE$; $U = \frac{(n+1)E}{2}$.

β . $n = 5$; $U = 3E$; si $E = 2V$; $U = 6V$.

b. α . $\sum G_k = G \sum k = \frac{n}{2}(n+1)G$; $\sum G_k E_k = EG \sum k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)EG$;

$$U = \frac{2n+1}{3} E.$$

$$\beta. n = 5 ; U = 3,67 E ; \text{ si } E = 2V \quad U = 7,34 V.$$

$$2. I_j = G_j(E_j - U) ; P_j = I_j(E_j - U) = G_j(E_j - U)^2.$$

$$a.\alpha. I_j = G \left(jE - \frac{(n+1)}{2} E \right) = \frac{GE}{2} [2j - (n+1)] < 0 \text{ si } 2j < n+1.$$

$$P_j = GE^2 \left(j - \frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{GE^2}{4} [2j - (n+1)]^2.$$

$$P = \Sigma P_j = \frac{GE^2}{4} \left[\sum_1^n 4j^2 - 4(n+1) \sum_1^n j + n(n+1)^2 \right].$$

$$P = \frac{GE^2}{4} \left[\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - 4(n+1) \frac{n}{2} (n+1) + n(n+1)^2 \right].$$

$$P = \frac{GE^2}{4} n(n+1) \left[\frac{2}{3} (2n+1) - (n+1) \right] = \frac{GE^2}{12} n(n+1)(n-1).$$

$$\beta. n = 5 ; I_j = \frac{GE}{2} (2j-6) ; P_j = GE^2 (j-3)^2 ; P = 10GE^2.$$

$$b.\alpha. I_j = jG \left(E_j - \frac{(2n+1)}{3} E \right) = jGE \left(j - \frac{2n+1}{3} \right)$$

$$P_j = jG(E_j - U)^2 = jGE \left(j - \frac{2n+1}{3} \right)^2.$$

$$P = \Sigma P_j = GE \left[\sum_1^n j^3 - 2 \frac{(2n+1)}{3} \sum_1^n j^2 + \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2 \Sigma j \right].$$

$$P = GEN(n+1) \left[\frac{n(n+1)}{4} - 2 \frac{(2n+1)^2}{18} + \frac{(2n+1)^2}{18} \right].$$

$$P = GE^2 \frac{n(n^2-1)}{36} (n+2) \text{ car } n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2).$$

$$\beta. I_j = jGE \left(j - \frac{11}{3} \right) ; P_j = jGE \left(j - \frac{11}{3} \right)^2 ; P = 23,3 GE^2.$$

B.a. Le corps du cylindre étant fermé et indilatable :

$$P_0 V_0 = nRT_0 ; P_1 V_0 = nRT_1 ; P_2 V_0 = nRT_2 ;$$

$$T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0}$$

\Rightarrow

$$T_2 = T_0 \frac{P_2}{P_0} ; P_1 = P_2 \Rightarrow T_1 = T$$

A.N. : $T_1 = T_2 = 373 K ; t_1 = t_2 = 100^\circ C$ vu l'équilibre thermique gaz-conductance.

$$b. \text{ A volume constant, la capacité calorifique du gaz } C = mc_v \text{ or } P_0 V_0 = \frac{m}{M} RT_0,$$

$$\Rightarrow C = \frac{MP_0 V_0}{RT_0} c_v ; \text{ A.N. : } C = 17,54 J.K^{-1}.$$

c. Soit x le nombre de conductances ; leur capacité est γx . On retiendra ici θ en secondes et t en degrés Celsius.

En absence de fuite, $Pd\theta = (C + x\gamma)dt$; $n = 5$.

$$\alpha. G_k = G ; x = 5 ; P = 10 \frac{G_0}{1 + at} E^2 .$$

$$10 G_0 E^2 d\theta = (C + 5\gamma)(1 + at)dt .$$

$$10 G_0 E^2 \theta_1 = (C + 5\gamma)(t_1 - t_0) + \frac{a}{2} (C + 5\gamma)(t_1^2 - t_0^2) = (C + 5\gamma)(t_1 - t_0) \left[1 + \frac{a}{2} (t_1 + t_0) \right] .$$

$$\beta. G_k = kG ; x = \sum_1^5 k = 15 ; P = \frac{23,3 G_0 E^2}{1 + at} .$$

$$23,3 G_0 E^2 d\theta = (C + 15\gamma)(1 + at)dt .$$

$$\begin{aligned} 23,3 G_0 E^2 \theta_2 &= (C + 15\gamma)(t_2 - t_0) + \frac{a}{2} (C + 15\gamma)(t_2^2 - t_0^2) \\ &= (C + 15\gamma)((t_2 - t_0) \left(1 + \frac{a}{2} (t_2 + t_0) \right)) \end{aligned}$$

$$\text{or, } t_1 = t_2 \text{ et } 23,3 = \frac{70}{3} .$$

Divisons les équations finales membres à membres :

$$\frac{23,3\theta_2}{10\theta_1} = \frac{C + 15\gamma}{C + 5\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{7\theta_2 - 3\theta_1}{9\theta_1 - 7\theta_2} \frac{C}{5} ; \text{A.N. : } \gamma = 9,90 \text{ J.K}^{-1} .$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{t_1 + t_0} \left(\frac{10 G_0 E^2 \theta_1}{(C + 5\gamma)(t_1 - t_0)} - 1 \right) ; \text{A.N. : } a = 4,224 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} .$$

5.1.1.4. Résistance de ligne électrique

Voir page 668.

5.1.1.5. Conductivité du silicium

Voir page 605.

5.1.1.6. Moteur et dynamo

Voir page 1066.

5.1.1.7. Etude expérimentale d'un moteur

Voir page 1068.

5.1.1.8. Traceur de courbes à courroie

Voir page 1077.

5.1.2. Régime transitoire

5.1.2.1. Dents de scie

Aux bornes d'un condensateur de capacité C , on désire appliquer, aussi exactement que possible, la somme de deux tensions. L'une, continue, est fournie par un générateur de haute tension de force électromotrice E , de résistance interne R , l'autre est une tension $e(t)$ de forme triangulaire symétrique à valeur moyenne nulle, d'amplitude e_0 , de période T et délivrée par un générateur de résistance interne r (figure 1). On appellera permanent, le régime qui s'établit aux bornes du condensateur après un temps suffisamment long.

A. On branche tout d'abord le condensateur aux bornes du générateur de tension triangulaire. L'origine des temps est choisie alors que le régime permanent est atteint.

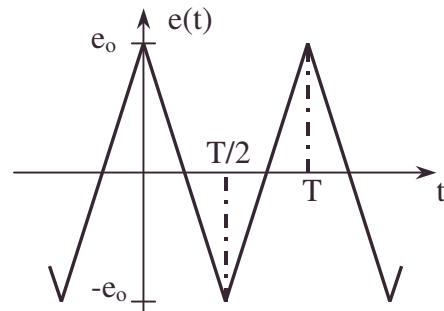


Figure 1.

1. Lorsque le régime permanent est atteint, donner qualitativement l'allure de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. Quelle est la valeur moyenne de cette tension sur une période ? Quelle relation existe-t-il entre $v(t)$ pour $0 < t < T/2$ et $v(t')$ pour $T/2 < t' < T$?

2. Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait $v(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = T/2$.

3. Donner l'expression de $v(t)$ pour le régime permanent et pour $0 < t < T/2$ en fonction de $e(t)$, T et $\tau = rC$.

4. Quelle est l'incertitude maximale Δv commise si on confond $v(t)$ avec $e(t)$?

AN : on donne $C = 10 \text{ nF}$, $e_0 = 25 \text{ V}$, $r = 50 \Omega$, $T = 0,01 \text{ s}$: calculer Δv .

5. Représenter sommairement $v(t)$.

B. On applique maintenant, conformément au schéma de la figure 2, les deux tensions issues des deux générateurs au condensateur.

1. Répondre aux questions **1** et **2** du §.A ci-dessus.

2. Donner l'expression de $v_1(t)$ pour le régime permanent et pour $0 < t < T/2$ en fonction de $e(t)$, T , $\tau_1 = (R + r)C$ et E .

3. Quelle est maintenant l'incertitude maximale Δv_1 commise si on confond $v_1(t)$ avec $-E + e(t)$?

AN: aux données de **A.4.** on ajoute :

$E = 5 \cdot 10^3 \text{ V}$ et $R = 10^5 \Omega$; calculer Δv_1 .

Quel est l'élément du circuit qui est responsable de cet effet ?

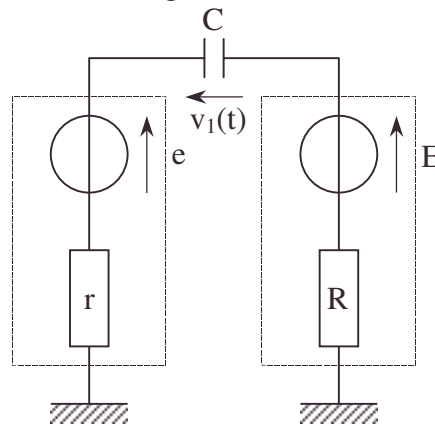


Figure 2

C. Pour essayer de réduire l'incertitude Δv_1 et la rendre égale à Δv , on complète le montage par un condensateur de capacité C' et un générateur de force électromotrice $e'(t)$ et de résistance interne r' suivant le schéma de la figure 3.

1. Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur C en fonction de $e(t)$, C , C' , R , r , E et de la dérivée temporelle dv'/dt de la tension $v'(t)$ aux bornes du condensateur C' .

2. Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension $v'(t)$ aux bornes du condensateur C' en fonction de $e'(t)$, C , C' , r , R , E et de la dérivée temporelle dv/dt de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur C .

3. Quelle relation doivent satisfaire C , C' , dv/dt et dv'/dt pour que la tension $v(t)$ soit à E près celle trouvée en A.3. ? En déduire l'expression de v' en fonction de v , C , C' à une constante indéterminée près et l'expression de dv'/dt en fonction de r , C' , $e(t)$, $v(t)$ et E .

A quelle condition $e'(t)$ est-il indépendant de $v(t)$?

Dans le cas particulier où on choisit $C = C'$, comment doit-on choisir le générateur $e'(t)$?

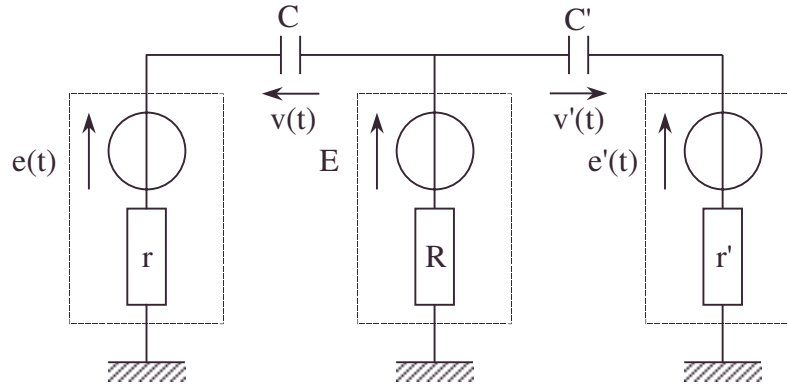


Figure 3

CCP ; Durée 2h

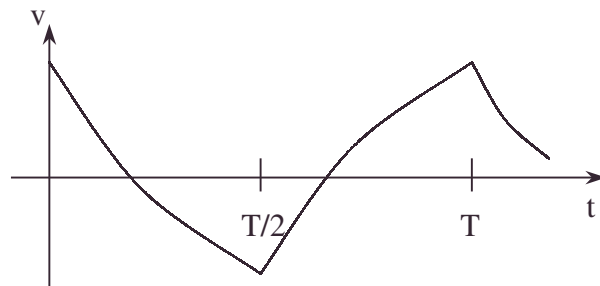
Corrigé

A.1.a. Expérimentalement, on a une dent de scie déformée par charge et décharge du condensateur :

b. Valeur moyenne nulle.

c. $v(t') = -v(t)$, avec $t' = t + \frac{\pi}{2}$ vu la

symétrie de e pour un décalage temporel de $T/2$ d'où le graphe:



2. $\frac{q}{C} = e - r i$ avec $i = +\frac{dq}{dt}$ et $q = C v$.

$$v + rC \frac{dv}{dt} = e.$$

3.a. Solution générale de l'équation

sans second membre : $v_0 = K e^{-\frac{t}{\tau}}$.

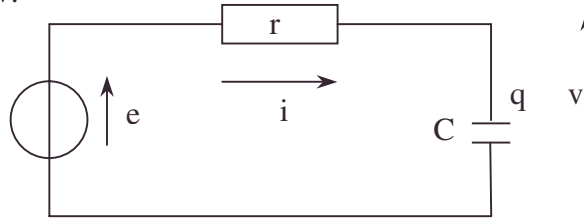
b. Solution particulière de l'équation avec second membre :

$t \in [0, T/2]$, $e = e_0 (1 - \frac{4t}{T}) = v + \tau \frac{dv}{dt}$. Posons $v_p = a + bt$, fonction de même forme

que le second membre, l'identification donne :

$$v_{\text{part}} = e_0 \left(1 + \frac{4\tau}{T} \right) - \frac{4e_0 t}{T}.$$

c. Détermination de K en régime permanent (périodique) : on ne peut utiliser la condition $t = +\infty$ dans l'intervalle $[0, T/2]$. On utilise la relation A.1.c. sur les conditions initiale et finale pour la solution globale :

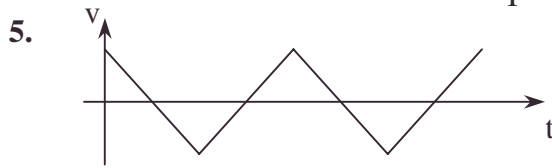


$$v(0) = -v\left(\frac{T}{2}\right) : e_o \left(1 + \frac{4\tau}{T}\right) + K = -e_o \left(1 + \frac{4\tau}{T}\right) + 2e_o - Ke^{\frac{T}{2\tau}}, \text{ soit } K = -\frac{8e_o\tau}{T \left(1 + e^{\frac{T}{2\tau}}\right)} ;$$

$$\Rightarrow v = e(t) + 4e_o \frac{\tau}{T} - \frac{8e_o \frac{\tau}{T}}{1 + e^{\frac{T}{2\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } 0 \leq t \leq T/2.$$

$$4. e - v = \frac{8e_o\tau e^{-\frac{t}{\tau}}}{T(1 + e^{\frac{T}{2\tau}})} - \frac{4e_o\tau}{T} \text{ (Fonction monotone décroissante pour } 0 \leq t \leq T/2).$$

L'écart est maximum en $t = 0$; $\Delta v = 4e_o \frac{\tau}{T}$; AN : $\Delta v = 5.10^{-3} \text{ V}$.



On confond v et e sur $0 < t < \frac{T}{2}$ mais
aussi sur $\frac{T}{2} < t' < T$ car
 $v(t') = -v(t)$ et $e(t') = -e(t)$.



v doit être remplacé par $v_1 + E$
et r par $r + R$.

b. Valeur moyenne de $v = -E$.

c. On déduit de A.1.c. : $v_1(t') + E = -(v_1(t) + E) \Rightarrow v_1(t') + v_1(t) = -2E$.

d. Vu la remarque B.1.a., on trouve par substitution : $v_1 + \tau_1 \frac{dv_1}{dt} = e - E$.

$$2. \text{ La même technique de substitution donne: } v_1 = e(t) - E + 4e_o \frac{\tau_1}{T} - \frac{8e_o\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{T \left(1 + e^{\frac{T}{2\tau_1}}\right)}$$

pour $0 \leq t \leq T/2$

3. De même, $\Delta v_1 = 4e_o \frac{\tau_1}{T}$; AN : $\Delta v_1 = 10 \text{ V}$.

R est donc la cause de l'augmentation de l'écart entre v_1 et $e - E$.

C.

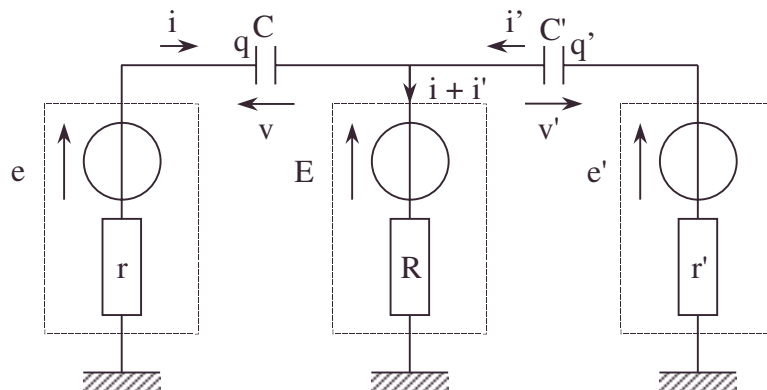


Figure 3

$$\begin{cases} e - ri - q = E + R(i + i') & [1] \\ e' - r'i' - q' = E + R(i + i') & [2] \end{cases}$$

$$q = Cv ; \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} ; \quad q' = C'v' ; \quad i' = \frac{dq'}{dt} = C' \frac{dv'}{dt} ;$$

$$1. \quad [1] \text{ s'écrit : } v + (r + R) C \frac{dv}{dt} = e - E - RC' \frac{dv'}{dt}.$$

$$2. \quad [2] \text{ s'écrit : } v' + (r + R') C' \frac{dv'}{dt} = e' - E - RC \frac{dv}{dt}.$$

$$3.a. \text{ Soustrayons C.1. et B.1. : } \Rightarrow C \frac{dv}{dt} + C' \frac{dv'}{dt} = 0 \Rightarrow v + rC \frac{dv}{dt} = e - E \text{ cf. A.2.}$$

$$b. \quad v' = -\frac{C}{C'} v + k_1.$$

$$c. \text{ En remplaçant } \frac{dv}{dt} = -\frac{C'}{C} \frac{dv'}{dt} \text{ dans C.1., il vient : } \frac{dv'}{dt} = -\frac{1}{rC'} (e - E - v).$$

$$d. \text{ Remplaçons } v' \text{ et } \frac{dv'}{dt} \text{ dans C.2. : } v \left(\frac{r'}{r} - \frac{C}{C'} \right) + k_1 + E \left(1 + \frac{r'}{r} \right) = e' + \frac{r'}{r} e ;$$

e' est indépendant de v pour $r' C' = r C$.

$$e. \text{ Si } C = C' \Rightarrow r = r', \text{ on a } e' = -e + 2E + k_1.$$

Conclusion : l'effet indésirable dû à R est éliminé par ce montage.

5.1.2.2. Etude progressive du transistor Parties I et II

Voir page 956.

5.1.2.3. Détecteur de crête

Voir page 857.

5.1.2.4. Multivibrateur astable

Voir page 939.

5.1.2.5. Chauffage régulé

Voir page 643.

5.1.2.6. Modélisation des trois types d'échanges thermiques

Voir page 646.

5.1.2.7. Hacheur série à 3 diodes

Voir page 1093.

En électromécanique :

5.1.2.8. Traceur de courbes à courroie

Voir page 1077.

5.1.2.9. Asservissement de position d'un moteur

Voir page 1127.

5.1.2.10. Asservissement d'une gouverne d'avion

Voir page 1144.

5.1.3. Courant alternatif

5.1.3.1. Quadripôles en double T

Notation :

Les nombres complexes associés aux grandeurs électriques sinusoïdales, en régime permanent, à fréquence variable, seront représentés par:

f.é.m. et courant	:	$\bar{V}(j\omega) = V.e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\bar{I}(j\omega) = I.e^{j(\omega t + \varphi)}$.
impédance	:	$Z(j\omega)$.
admittance	:	$Y(j\omega)$.
fonction de transfert	:	$F(j\omega)$.

Partie I

On considère le circuit, représenté sur la figure 1, composé de 3 dipôles linéaires passifs. Le signal d'entrée $v_{AM}(t)$ est une f.é.m. sinusoïdale en régime permanent que l'on représentera par le nombre complexe :

$$\bar{V}_1(j\omega) = V_1.e^{j\omega t}.$$

La charge est un dipôle linéaire passif D_C et absorbe un courant $i_2(t)$.

Le cas échéant le nombre complexe associé à $i_2(t)$ sera noté: $\bar{I}_2(j\omega) = I_2.e^{j(\omega t + \varphi)}$.

1.1. Montrer qu'il existe une fonction de transfert, que l'on notera $T(j\omega)$, exprimant le transfert de $v_{AM}(t)$ vers $i_2(t)$, telle que $T(j\omega) = \frac{\bar{I}_2(j\omega)}{\bar{V}_1(j\omega)}$.

2. Exprimer $T(j\omega)$ en fonction des paramètres caractéristiques des dipôles D_1 , D_2 , D_3 et D_C . On donnera deux expressions de $T(j\omega)$:

- l'une en utilisant la notion d'impédance ;
- l'autre en utilisant la notion d'admittance.

Notation : au dipôle D_i on associe l'impédance Z_i et l'admittance Y_i .

3. On considère le cas où D_1 et D_2 sont des dipôles identiques caractérisés par leur admittance $Y(j\omega)$. On note $Y_3(j\omega)$ l'admittance de D_3 .

Etablir l'expression de $T(j\omega)$ dans le cas où la charge est un court-circuit.

4. On considère le circuit représenté sur la figure 2.

On pose $\tau = RC$.

Etablir l'expression de $T(j\omega)$ sous forme d'une fraction rationnelle en $\omega\tau$ en fonction des paramètres ω , τ et R uniquement.

On note $M(\omega)$ le module de $T(j\omega)$.

Etudier les propriétés asymptotiques de la fonction $R.M(\omega)$ et les représenter.

Sur le même graphique, construire la courbe de $R.M(\omega)$ exprimée en dB en fonction de $\log \omega\tau$.

Partie II

Le circuit représenté sur la figure 3 est composé de :

- un amplificateur opérationnel idéal A.O.
- un quadripôle d'entrée en "double T" composé des éléments :

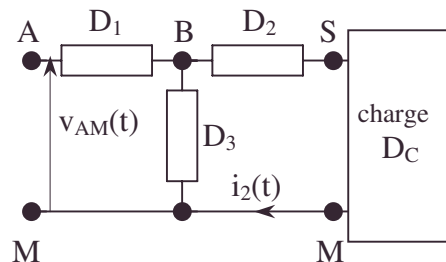


Figure 1

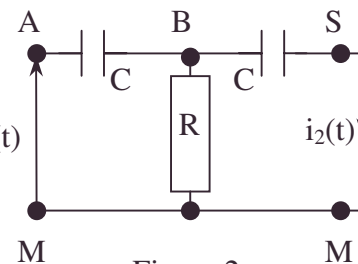


Figure 2

$\alpha \frac{C}{\xi}$, $\xi^2 \frac{R}{\alpha}$, $\frac{R}{2}$, $8\xi C$; on note Q_1 ce quadripôle.

– un quadripôle, en réaction de la sortie vers l'entrée de l'amplificateur opérationnel, en "T ponté" composé des éléments: R , $\frac{C}{\xi}$, $\xi^2 R$.

On note Q_2 ce quadripôle.

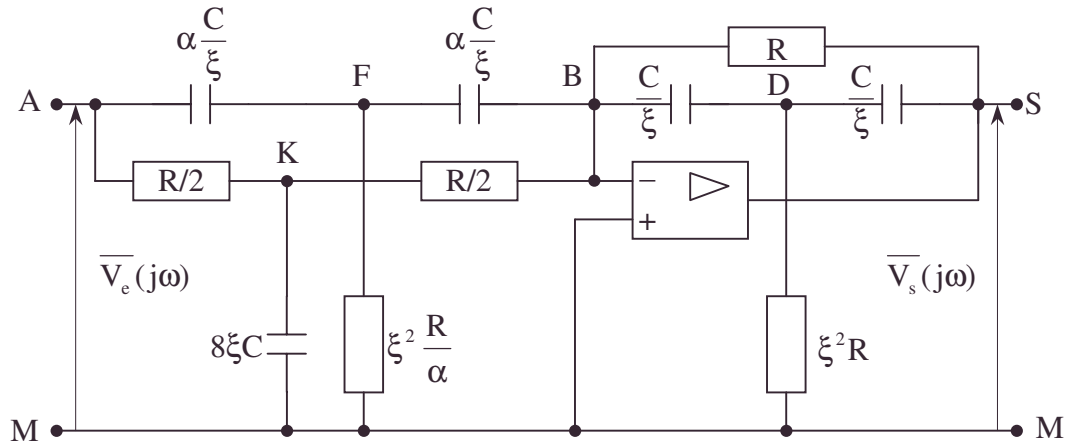


Figure 3

Nota : les nœuds sont représentés par le symbole • et sont notés : A, B, D, F, K, S, M.
On posera $\tau = R.C$.

2.1. Montrer que la fonction de transfert $G(j\omega) = \frac{\bar{V}_s(j\omega)}{\bar{V}_e(j\omega)}$ s'exprime simplement à l'aide

d'une fonction de transfert caractéristique de chacun des deux quadripôles Q_1 et Q_2 .

Soit $T_1(j\omega)$ la fonction de transfert caractéristique de Q_1 .

Soit $T_2(j\omega)$ la fonction de transfert caractéristique de Q_2 .

Etablir l'expression de $G(j\omega)$ en fonction de $T_1(j\omega)$ et $T_2(j\omega)$.

2. Etablir l'expression de $T_1(j\omega)$ en fonction des paramètres ω , R , α , ξ , τ sous forme d'une fraction rationnelle en $\omega\tau$.

3. Etablir l'expression de $T_2(j\omega)$ en fonction des paramètres ω , R , ξ , τ sous forme d'une fraction rationnelle en $\omega\tau$.

4. Donner l'expression de $G(j\omega)$ en fonction de ω , α , ξ , τ .

5. Etablir l'expression de $M(\omega\tau) = |G(j\omega)|$ où $|G(j\omega)|$ représente le module de $G(j\omega)$.

6. Construction de la courbe $M(\omega\tau)$ pour $0 < \omega\tau < +\infty$ avec des échelles linéaires. On admettra ($\xi \ll 1$) que $M(\omega\tau)$ possède un maximum pour $\omega\tau = 1$.

On construira deux graphiques sans échelle logarithmique: l'un pour $\alpha < 1$ et l'autre pour $\alpha > 1$; pour chaque courbe $M(\omega\tau)$ on indiquera les valeurs caractéristiques de M et de $\omega\tau$.

CCP ; Durée 2h

Corrigé

I.1. Les équations étant linéaires (lois des mailles, lois aux nœuds), les grandeurs de sortie s'exprimeront linéairement en fonction des grandeurs d'entrée; en particulier

$\bar{I}_2 = \bar{A}_1 \bar{V}_1 + \bar{B}_1 \bar{I}_1 + \bar{C}$; $\bar{C} = 0$ car $\bar{I}_2 = 0$ si $\bar{I}_1 = 0$ et $\bar{V}_1 = 0$; or pour un réseau passif, $\bar{V}_1 = Z_1 \bar{I}_1 \Rightarrow \bar{I}_2 = \left(\bar{A}_1 + \frac{\bar{B}_1}{Z_1} \right) \bar{V}_1$ et il existe $T = \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1}$.

2.a.α. La formule du pont diviseur de tension donne : $\bar{V}_s = \frac{Z_C}{Z_2 + Z_C} \bar{V}_B$.

β. Le théorème de Millman en B donne : $\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \bar{V}_B = \frac{\bar{V}_1}{Z_1} + \frac{\bar{V}_s}{Z_2}$

avec $\bar{V}_s = Z_C \bar{I}_2$,

$$\text{d'où } \bar{V}_1 = Z_1 \left[\frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3} \frac{(Z_2 + Z_C)}{Z_C} - \frac{1}{Z_2} \right] Z_C \bar{I}_2,$$

$$\text{d'où } T(j\omega) = \frac{Z_1 Z_3 Z_C Z_2}{Z_1 Z_C [(Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3)(Z_2 + Z_C) - Z_1 Z_3 Z_C]}.$$

$$T(j\omega) = \frac{Z_3 Z_2}{(Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3) Z_2 + Z_C (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3)} = \frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_C (Z_1 + Z_3)}$$

b. On a : $Z = \frac{1}{Y}$; $T(j\omega) = \frac{Y_C Y_1 Y_2}{Y_C (Y_1 + Y_2 + Y_3) + Y_2 (Y_1 + Y_3)}$.

3. $Y_C \rightarrow \infty \Rightarrow T(j\omega) = \frac{Y^2}{Y_3 + 2Y}$.

4.a. $Y_C \rightarrow \infty$; $Y_3 = \frac{1}{R}$; $Y = jC\omega$

$$\Rightarrow T(j\omega) = -\frac{1}{R} \frac{(\omega\tau)^2}{(1 + 2j\omega\tau)} \text{ et } RM_{dB} = 20 \log \frac{(\omega\tau)^2}{\sqrt{1 + 4(\omega\tau)^2}}.$$

b. Asymptotes du diagramme logarithmique :

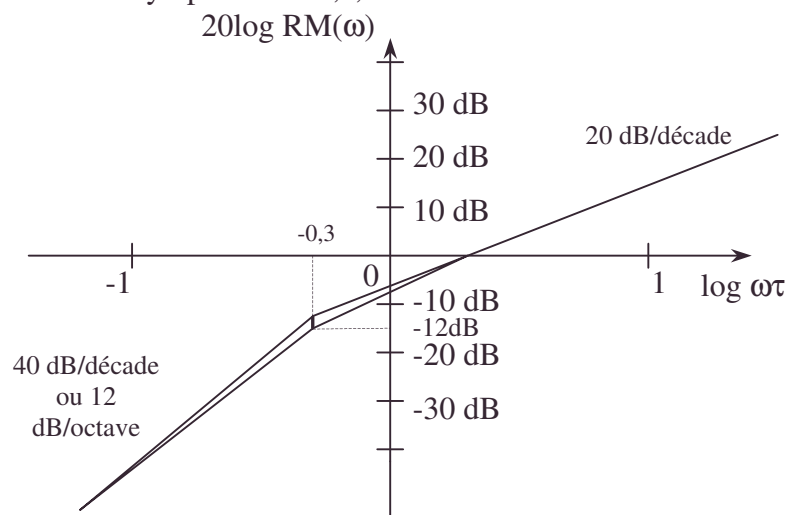
$\omega \rightarrow 0$; $RM = 40 \log \omega\tau$: pente + 40 dB par décade de $\omega\tau$.

$\omega \rightarrow \infty$; $RM = 20 \log \omega\tau - 20 \log 2$: pente + 20 dB par décade de $\omega\tau$.

$-20 \log 2 = -6 \text{ dB}$

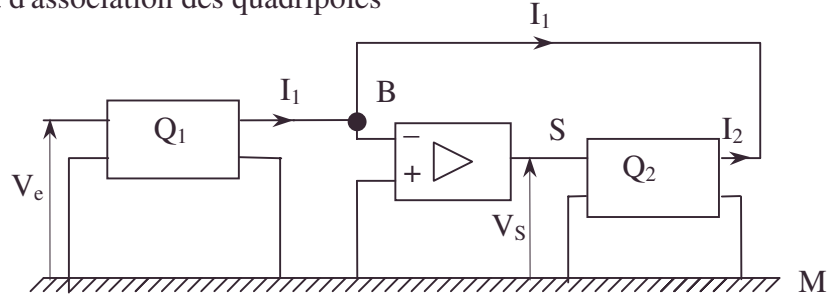
Point d'intersection des asymptotes : $-0,3, -12 \text{ dB}$.

c., d.



- asymptote, Millman [théorème de], point d'intersection des asymptotes, pont diviseur de tension, refroidissement.

II.1. Schéma d'association des quadripôles



$I_2 = -I_1$; les quadripôles Q_1 et Q_2 sont en série.

$V_{BM} = 0$ tout se passe comme si la charge du quadripôle Q_1 (ou Q_2) était un court-circuit $Z_{C_1} = 0$ ($Z_{C_2} = 0$).

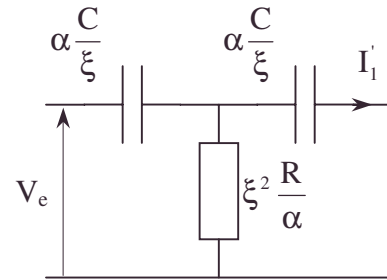
On peut donc appliquer **I.** : $T_1 = \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_e}$; $T_2 = \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_s}$ et $G = \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} = \frac{\bar{V}_s}{\bar{I}_1} \cdot \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_e} = -\frac{T_1(j\omega)}{T_2(j\omega)}$.

2. On peut donc décomposer Q_1 en 2 quadripôles Q_1' et Q_1'' montés en parallèle (à l'entrée et à la sortie) associés à une charge $Z_C = 0$.

a. Q_1' :

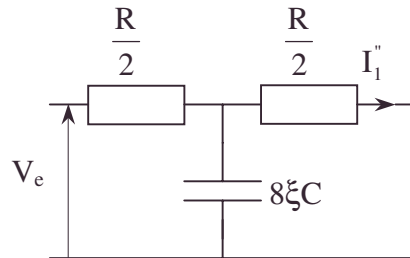
$$T_1' = \frac{\bar{I}_1'}{\bar{V}_e} = -\frac{\alpha}{R} \frac{(\omega\tau)^2}{(1 + 2j\xi\omega\tau)},$$

en appliquant **I.4.**



b. Q_1'' : de même en appliquant **I.4.**

$$T_1'' = \frac{\bar{I}_1''}{\bar{V}_e} = \frac{1}{R} \frac{1}{(1 + 2j\xi\omega\tau)}.$$



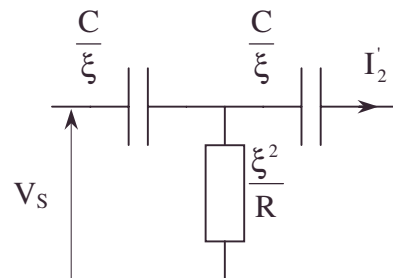
c. Dans le montage parallèle $\bar{I}_1 = \bar{I}_1' + \bar{I}_1'' = T_1' \bar{V}_e + T_1'' \bar{V}_e = T_1 \bar{V}_e$;

$$\text{On a : } T_1 = T_1' + T_1'' = \frac{1}{R} \frac{1 - \alpha(\omega\tau)^2}{1 + 2j\xi\omega\tau}.$$

3. De même on peut décomposer Q_2 en 2 quadripôles montés en parallèle, associés à une charge nulle :

a. Q_2' : de même :

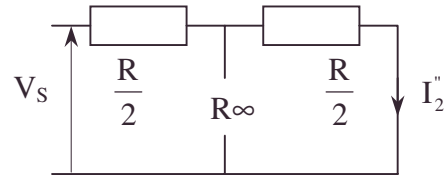
$$T_2' = \frac{\bar{I}_2'}{\bar{V}_s} = -\frac{1}{R} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + 2j\xi\omega\tau}.$$



• charge de circuit, court-circuit, équivalence de formulation [tout se passe comme si], montage parallèle de quadripôles, tout se passe comme si [équivalence de formulation]

b. Q_2'' : de même :

$$T_2'' = \frac{\overline{I_2''}}{\overline{V_s}} = \frac{1}{R}.$$



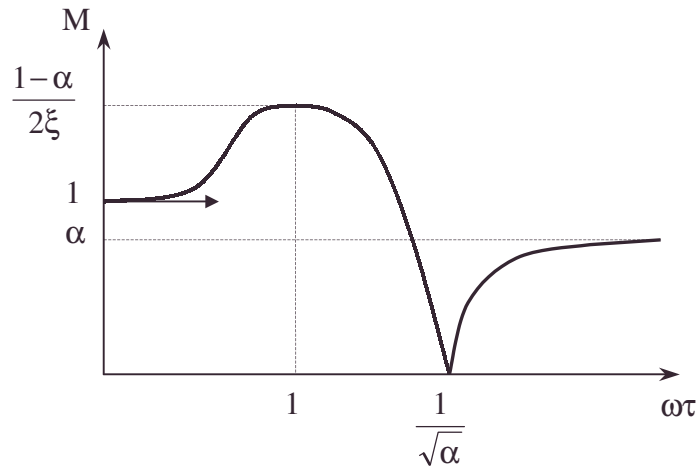
c. De même, $\overline{I_2} = \overline{I_2'} + \overline{I_2''} \Rightarrow T_2 = T_2' + T_2'' = \frac{1}{R} \frac{1 - (\omega\tau)^2 + 2j\xi\omega\tau}{1 + 2j\xi\omega\tau}$.

4. $G = -\frac{T_1}{T_2} = \frac{\alpha(\omega\tau)^2 - 1}{1 - (\omega\tau)^2 + 2j\xi\omega\tau}$.

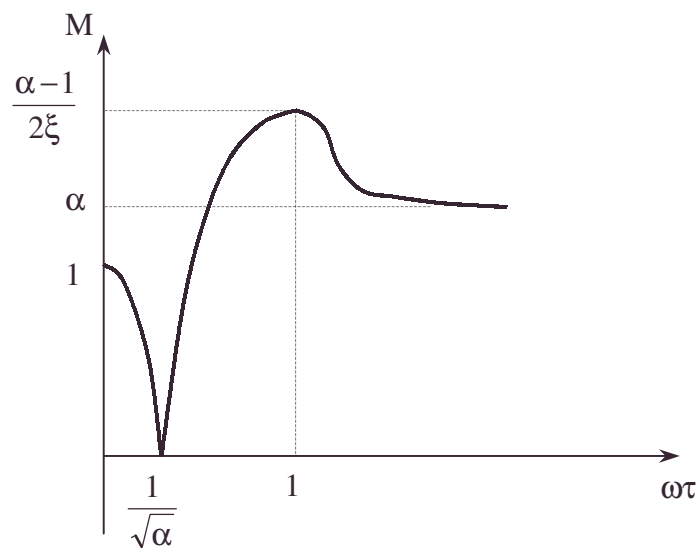
5. $M = \frac{|1 - \alpha(\omega\tau)^2|}{\sqrt{(1 - (\omega\tau)^2)^2 + 4\xi^2(\omega\tau)^2}}$.

6. $\xi \ll 1 \Rightarrow M = \frac{|1 - \alpha(\omega\tau)^2|}{|1 - (\omega\tau)^2|}$; On étudiera 4 valeurs de $\omega\tau$: 0, 1, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, ∞ .

a. $\alpha < 1$;



b. $\alpha > 1$;



5.1.3.2. Quartz

Utilisation dans un oscillateur

1. Etude d'un quartz

On considère le schéma électrique simplifié équivalent d'un quartz piézo-électrique destiné à servir d'étalon de fréquence dans une horloge.

Le dipôle AB se compose de deux branches en parallèle, dans l'une une inductance L en série avec un condensateur de capacité C , dans l'autre un condensateur de capacité C_0 grande devant C . On posera $a = C/C_0$ avec par conséquent $a \ll 1$.

1. Le dipôle AB étant alimenté par une tension sinusoïdale alternative de pulsation ω , calculer l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle. Mettre le résultat sous la forme $\underline{Z} = j(X)$; que peut-on dire de l'argument de \underline{Z} ?

2. Etudier les variations de X en fonction de ω ; on précisera en particulier les limites de X lorsque ω tend vers zéro ou l'infini.

On désignera par ω_1 et ω_2 les valeurs finies non nulles pour lesquelles X est respectivement nul et infini.

Tracer la courbe $X(\omega)$ et en déduire la courbe $|\underline{Z}| = Z(\omega)$.

3. On veut étudier le comportement du dipôle dans le voisinage des pulsations ω_1 et ω_2 .

a. Au voisinage de la pulsation ω_1 le dipôle AB est équivalent à un circuit résonnant série (L_1, C_1). de manière à déterminer les valeurs de L_1 et C_1 , on pose $\omega = \omega_1 + \delta\omega$.

Donner l'expression de l'impédance du dipôle AB dans le voisinage de ω_1 . Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $\underline{Z}_{AB} = 2jL_1\delta\omega$. Par comparaison avec l'impédance \underline{Z} du quartz, déterminer les valeurs de L_1 et C_1 en fonction de L et C .

b. Dans le voisinage de la pulsation ω_2 le dipôle AB est équivalent à un circuit résonnant parallèle L_2, C_2 .

En utilisant la méthode précédente, on pose $\omega = \omega_2 + \delta\omega$.

Etablir l'expression de l'admittance $\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{\underline{Z}_{AB}}$ du dipôle

dans le voisinage de la pulsation ω_2 et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\underline{Y}_{AB} = 2jC_2\delta\omega.$$

Par comparaison avec l'admittance \underline{Y} du dipôle initial, en déduire la valeur de la capacité C_2 puis de L_2 en fonction de C, L, a .

4. On applique au dipôle AB un courant sinusoïdal par l'intermédiaire d'un générateur de courant parfait $i = i_0\sqrt{2}\cos\omega t$.

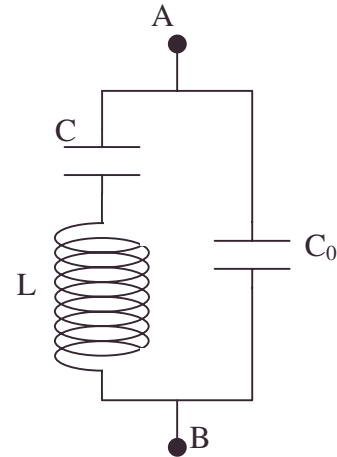


Figure 1

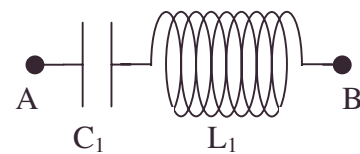


Figure 2

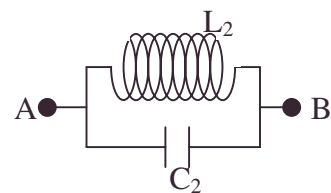


Figure 3

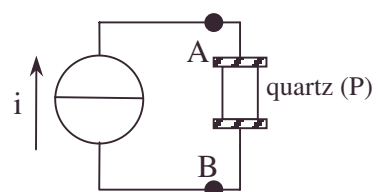


Figure 4

• admittance [inverse de l'impédance], argument d'un complexe en Electronique, développement au premier ordre ou plus, générateur de courant, graphe, horloge, impédance [électrique], limites, module de complexe, oscillateur, quartz, quartz piézo-électrique, schéma équivalent

Si on tient compte des phénomènes dissipatifs négligés jusqu'à maintenant, donner l'allure de la courbe d'évolution de la tension efficace aux bornes du dipôle AB en fonction de ω .

Le maximum de la tension est obtenu pour une fréquence $f_2 = 3.10^6$ Hz. Sachant que $C_0 = 60$ pF et $C = 0,6$ pF, calculer L_2 et C_2 .

5. Pour interpréter la présence d'effets dissipatifs d'énergie au voisinage de la pulsation ω_2 , on ajoute au schéma équivalent correspondant une résistance r en série avec L_2 .

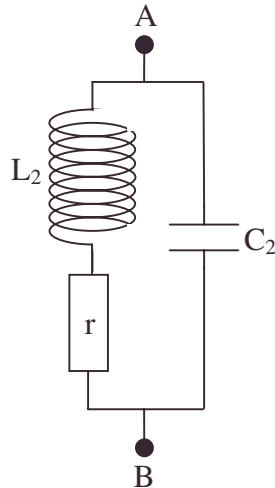


Figure 5

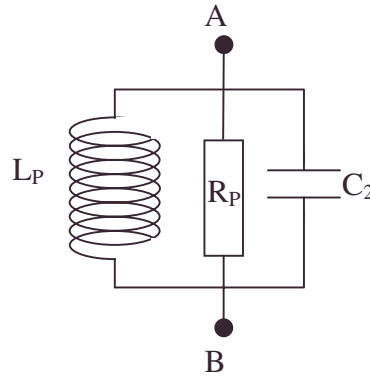


Figure 6

a. Montrer que pour $\omega = \omega_2$ le circuit de la figure 5 est équivalent à une représentation parallèle L_P , C_2 , R_P : figure 6.

En désignant par $Q = L_2\omega_2 / r$ le facteur de qualité du quartz pour la pulsation ω_2 , exprimer R_P en fonction de r et de Q , et L_P en fonction de L_2 et Q . On tiendra compte du fait que $Q \gg 1$.

b. Calculer R_P et L_P avec les données précédentes et $Q = 3000$.

2. Oscillateur à quartz

On veut se servir du quartz pour réaliser un oscillateur. Pour cela on utilise le montage représenté sur la figure 7 dans lequel A désigne un opérateur multiplication par une constante.

(P) est le quartz étudié représenté par le schéma de la figure 6.

A est l'opérateur multiplication par une constante, caractérisé par un courant d'entrée nul $i_E = 0$. Le schéma équivalent en sortie est constitué par un générateur de tension parfait commandé en tension : $U = AV$ (la résistance de sortie est nulle).

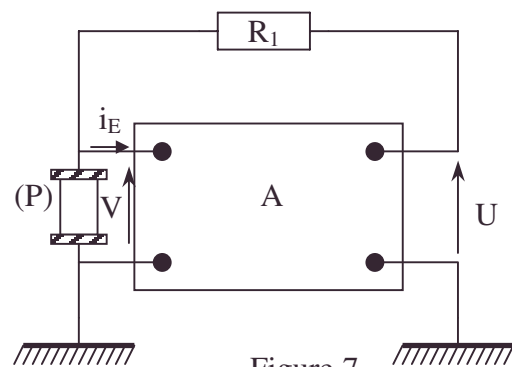


Figure 7

a. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension U .

b. Montrer qu'il existe une valeur A_0 de A pour laquelle un régime permanent peut s'établir. Calculer A_0 pour $R_1 = 3$ M Ω .

c. Proposer un montage amplificateur utilisant un amplificateur opérationnel permettant de réaliser l'opérateur A multiplication par une constante. Donner le schéma global de l'oscillateur à quartz.

• amplificateur opérationnel, développement au premier ordre ou plus, facteur de qualité [ou de surtension], oscillateur, quartz

Les caractéristiques usuelles des amplificateurs opérationnels permettent-elles d'envisager l'utilisation effective de ce composant pour réaliser l'oscillateur à quartz proposé ?

ENS ; Durée : 1h30.

Corrigé

1. Etude d'un quartz.

$$1.a. \frac{1}{\underline{Z}} = jC_0\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{j(LC\omega^2 - 1)}{C_0\omega(1 + a - LC\omega^2)}.$$

Remarque : $a \ll 1$ $\underline{Z} \approx -\frac{j}{C_0\omega}$ avec $|\underline{Z}| < \frac{1}{C_0\omega}$ et $\arg \underline{Z} = -\frac{\pi}{2}$.

$$b. Z = jX \text{ avec } X = \frac{LC\omega^2 - 1}{C_0\omega(1 + a - LC\omega^2)} \text{ soit } X \text{ de la forme } \frac{N}{D}.$$

Posons $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{1+a}{LC}}$:

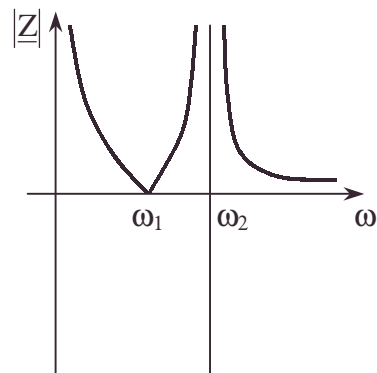
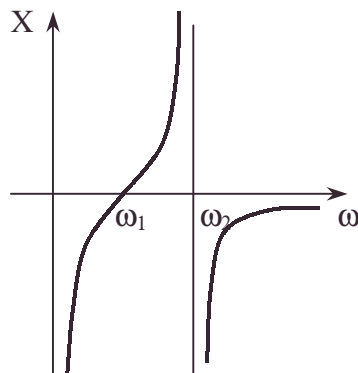
$a \ll 1$, $\omega_2 - \omega_1 \rightarrow 0$

ω	0	ω_1	ω_2	$+\infty$
N	-	+	+	+
D	+	+	-	-
X	$-\infty$	-	0	+
			$-\infty$	0

c. $\arg Z = +\frac{\pi}{2}$ si $X > 0$, réactance de type inductif pour $\omega \in]\omega_1, \omega_2[$; zone petite et problématique.

$\arg Z = -\frac{\pi}{2}$ si $X < 0$, réactance de type capacitif dans la zone complémentaire.

2.



$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \omega_2 = \sqrt{\frac{1+a}{LC}}.$$

$$\mathbf{3.a.}\alpha. \underline{Z}_{AB} = j(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}).$$

$$\underline{Z}_{AB}(\omega + \delta\omega) = j \left[L_1\omega_1 \left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega_1} \right) - \frac{1}{C_1\omega_1(1 + \frac{\delta\omega}{\omega_1})} \right];$$

$$\text{or } \underline{Z}_{AB}(\omega_1) = 0 = j(L_1\omega_1 - \frac{1}{C_1\omega_1}) \text{ soit } \omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1}.$$

$$\text{Soit par soustraction: } \underline{Z}_{AB} = j \left(0 + L_1\delta\omega + \frac{1}{C_1} \frac{d\omega}{\omega_1^2} \right) = 2jL_1\delta\omega \text{ car } L_1C_1\omega_1^2 = 1;$$

$$\beta. \underline{Z}(\omega_1 + d\omega) = j \frac{\left[LC \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} + d\omega \right)^2 - 1 \right]}{D(\omega_1 + d\omega)} = j \frac{2\sqrt{LC} d\omega}{D(\omega_1 + d\omega)}$$

le numérateur étant d'ordre 1, D doit être pris d'ordre 0 soit pour $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$D(\omega_1) = \frac{C}{a\sqrt{LC}} \left(1 + a - \frac{LC}{LC} \right) = \frac{C}{\sqrt{LC}}.$$

$$\underline{Z}(\omega_1 + d\omega) = 2jLd\omega \Rightarrow L_1 = L \text{ par identification de } \alpha \text{ et } \beta.$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C_1} = \frac{1}{LC} \Rightarrow C_1 = C.$$

$$\mathbf{b.}\alpha. \underline{Y}_{AB} = jC_2\omega + \frac{1}{jL_2\omega} = j \left[C_2\omega_2 \left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega_2} \right) - \frac{1}{L_2\omega_2(1 + \frac{\delta\omega}{\omega_2})} \right];$$

$$\text{Or } \underline{Y}_{AB}(\omega_2) = 0 = j(C_2\omega_2 - \frac{1}{L_2\omega_2}). \text{ Par soustraction :}$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_{AB} = j \left(Cd\omega + \frac{d\omega}{L_2\omega_2^2} \right) = 2jC_2d\omega \text{ car } L_2C_2\omega_2^2 = 1.$$

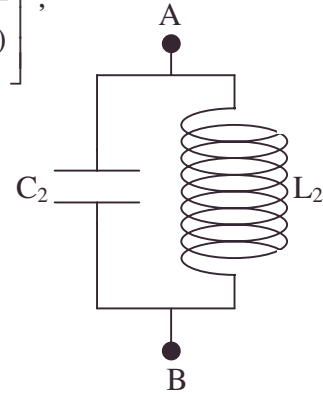
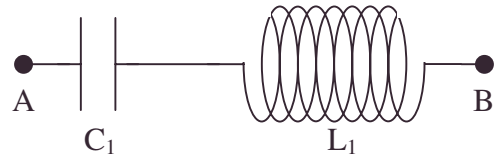
$$\beta. \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = -jC_0\omega \frac{(1 + a - LC\omega^2)}{LC\omega^2 - 1} = \frac{N_1}{D_1}.$$

$$\bullet \frac{N_1(\omega_2 + \delta\omega)}{-jC_0\omega_2} = 1 + a - LC \left(\sqrt{\frac{1+a}{LC}} + d\omega \right)^2 = 1 + a - (1 + a) - 2\sqrt{(1+a)LC} d\omega;$$

$$\bullet D_1(\omega_2) = LC \frac{(1+a)}{LC} - 1 = a.$$

ce terme étant d'ordre 1, D sera pris à l'ordre 0.

$$\bullet \underline{Y}(\omega_2 + \delta\omega) = 2jC_0\sqrt{\frac{1+a}{LC}} \frac{\sqrt{(1+a)LC} d\omega}{LC \frac{(1+a)}{LC} - 1} = 2j \frac{C_0(1+a)d\omega}{a}.$$



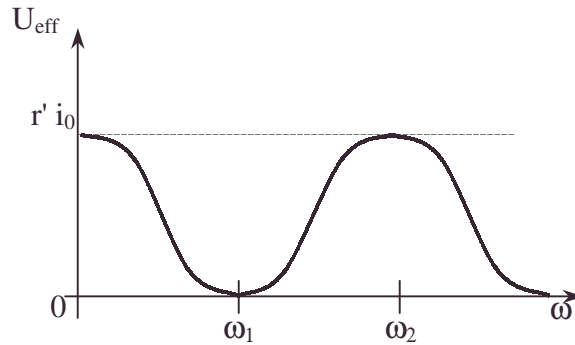
L'identification donne : $C_2 = C \frac{(1+a)}{a^2}$; or $\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} = \frac{1+a}{LC}$; donc $L_2 = \frac{La^2}{(1+a)^2}$.

4. Au lieu de prendre $\underline{Z} = jX$ non dissipatif, mettons r' en parallèle, par analogie du quartz avec un montage comme le condensateur avec résistance de fuite.

$$\frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{jX} ; \frac{1}{|\underline{Z}'|} = \sqrt{\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{X^2}} ; \underline{U} = \underline{Z}' \underline{i} \text{ s'écrit } U_{\text{eff}} = |\underline{Z}'| i_0 ;$$

étudions les zéros de $|\underline{Z}'|$:

ω	0	ω_1	ω_2	∞
X^2	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\frac{1}{ \underline{Z}' }$	$\frac{1}{r'}$	$+\infty$	$\frac{1}{r'}$	$+\infty$
U_{eff}	$r' i_0$	0	$r' i_0$	0



Le maximum ω_2 est le seul maximum intéressant en alternatif.

$$\text{AN : } a = 10^{-2} ; C_2 = \frac{C(1+a)}{a^2} \Rightarrow C_2 = 6,06 \text{ nF} ; L_2 = \frac{1}{C_2 \omega_2^2} = \frac{a^2}{C(1+a)4\pi^2 f^2} .$$

soit $L_2 = 4,64 \cdot 10^{-7} \text{ H}$.

5.a.α. Ecrivons l'identité :

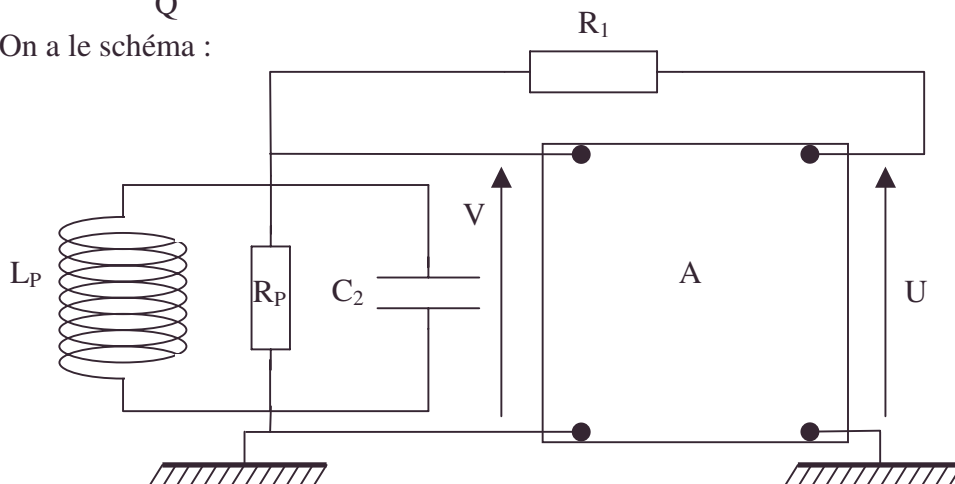
$$\frac{1}{j\omega^2 L_p} + \frac{1}{R_p} = \frac{1}{r + jL_2 \omega_2} \Rightarrow \frac{r - jL_2 \omega_2}{r^2 + L_2^2 \omega_2^2} = \frac{1}{R_p} - \frac{j}{L_p \omega^2} \Rightarrow R_p = \frac{r^2 + L_2^2 \omega_2^2}{r} ;$$

$$L_p = \frac{r^2 + L_2^2 \omega_2^2}{L_2 \omega_2 \omega^2} .$$

$$\beta. R_p = r(1+Q^2) \# rQ^2 ; L_p = L_2 \frac{(1+Q^2)}{Q^2} \# L_2 .$$

$$\text{b. AN : } r = \frac{L_2 \omega_2}{Q} = 2,9 \cdot 10^{-3} \Omega ; R_p = 2,6 \cdot 10^4 \Omega ; L_p = L_2 = 4,6 \cdot 10^{-7} \text{ H. cf. 4.}$$

2.a. On a le schéma :



Appliquons le théorème de Millman au point d'entrée de potentiel \underline{V} :

$$\underline{V} = \frac{\underline{U}}{R_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} + jC_2\omega \right)} ; \text{ vu la correspondance } \frac{dV}{dt} = j\omega V \text{ et } \int V dt = \frac{V}{j\omega},$$

la relation $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p} + j\omega C_2 \right) \underline{V} = \frac{\underline{U}}{R_1}$ s'écrit :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p} \right) V + \frac{1}{L_p} \int V dt + C_2 \frac{dV}{dt} = \frac{U}{R_1} ; \text{ or } \frac{U}{A} = V ; \text{ on obtient en dérivant :}$$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p} - \frac{A}{R_1} \right) \frac{dU}{dt} + \frac{U}{C_2 L_p} = 0.$$

b. Le terme d'amortissement $\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_p} - \frac{A}{R_1} \right) = 0$ pour $A_0 = 1 + \frac{R_1}{R_p}$;

AN : $A_0 = 116$; Alors le régime est sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_p C_2}} = \omega_2$.

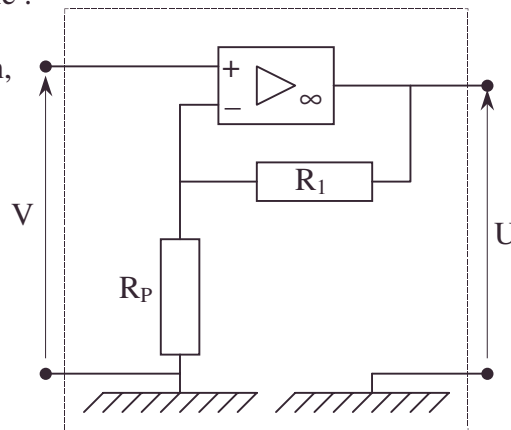
c.α. A peut être réalisé par le quadripôle :

Par la formule du pont diviseur de tension,

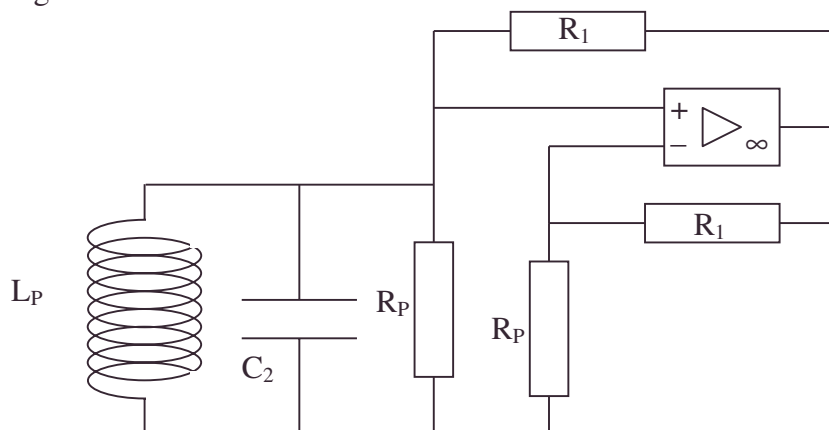
on a bien :

$$V = \frac{R_p}{R_1 + R_p} U.$$

$$\text{Soit } A = \frac{R_p}{R_1 + R_p}$$



β. Schéma général d'ensemble :



γ. Le régime sinusoïdal peut disparaître si l'A.O. est porté au régime saturé ou si la fréquence est si élevée que le slew-rate est perturbant.

5.1.3.3. Montage triangle étoile Triphasé équilibré ou non

Présentation du triphasé

Sur le tableau de distribution d'une installation triphasée, nous trouvons 4 bornes :

- la première appelée "neutre" notée : N
- les 3 autres appelées "phases" notées : 1, 2, 3

Entre le neutre et chacune des trois phases existent trois tensions dites "simples" :

$$\begin{cases} v_1 = V\sqrt{2} \cos \omega t \\ v_2 = V\sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ v_3 = V\sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

En notation complexe, ces tensions seront :

$$\underline{V}_1 = V\sqrt{2} e^{j\omega t} ; \underline{V}_2 = V\sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} ; \underline{V}_3 = V\sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

1. Calculer $v_1 + v_2 + v_3$.

2. On appelle "tensions composées" les tensions entre phases :

$$u_{12} = v_1 - v_2 ; u_{23} = v_2 - v_3 ; u_{31} = v_3 - v_1$$

a. Donner les expressions instantanées ou complexes de u_{12} , u_{23} , u_{31} .

b. Soit U la valeur efficace de la tension composée et V la valeur efficace de la tension simple ; quelle relation y a-t-il entre U et V ?

A.N. : Calculer U si $V = 220$ V.

On gardera ces valeurs pour tout le reste du problème.

c. Calculer $u_{12} + u_{23} + u_{31}$.

3.a. On branche trois lampes identiques de 100 watts entre le neutre et chaque phase ; quel est le courant dans le fil neutre i_N ? (figure 2) ;

Remarque : ce montage est appelé "montage étoile" avec fil neutre. De plus ce montage est "équilibré" car les trois lampes sont identiques.

b. On rajoute une deuxième lampe de 100 watts entre le neutre et la phase 1 ; quel est dans ce cas le courant dans le neutre i_N ? (Figure 3).

c. Par suite d'un accident, le fil neutre est coupé : on a un montage "étoile déséquilibré sans fil neutre".

On rappelle que les trois bornes sont toujours aux potentiels \underline{V}_1 , \underline{V}_2 , et \underline{V}_3 (Figure 4).

Calculer le potentiel V_0 du point O en supposant que la résistance des lampes est indépendante de la tension appliquée à leurs bornes.

En déduire les tensions aux bornes de chaque lampe.

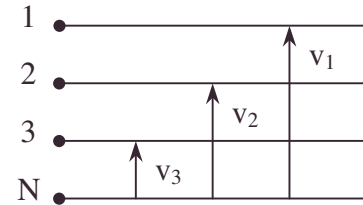


Figure 1

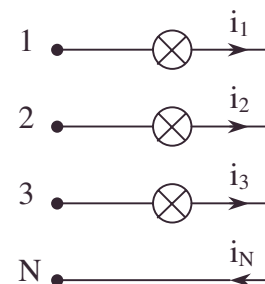


Figure 2

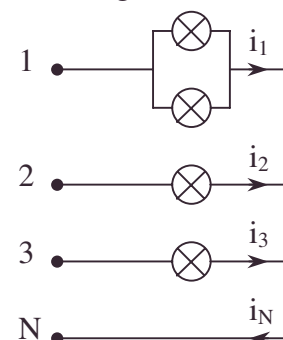


Figure 3

d. Dans quel type de "montage étoile" le fil neutre est-il absolument nécessaire ?

4. On branche trois dipôles identiques, d'impédance Z et de déphasage ϕ , ($\underline{Z} = Z e^{j\phi}$) entre les trois phases. Dans ce montage, appelé "montage triangle", le fil neutre n'est pas utilisé.

a. Donner les expressions instantanées ou complexes des courants j_{12}, j_{23}, j_{31} .

b. Donner les expressions instantanées ou complexes des courants i_1, i_2 et i_3 .

c. Quelle relation simple y a-t-il entre l'intensité efficace J des courants j_{12}, j_{23} et j_{31} et l'intensité efficace I des courants i_1, i_2 et i_3 . (Figure 5).

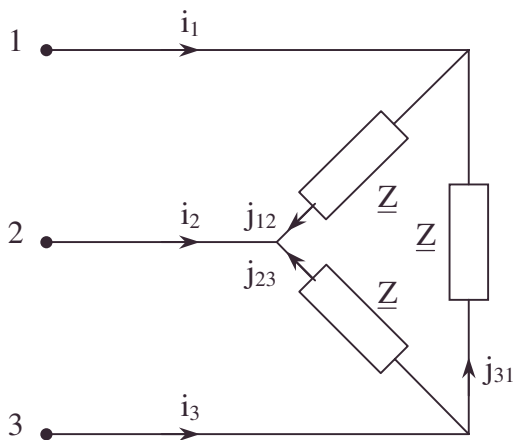


Figure 5

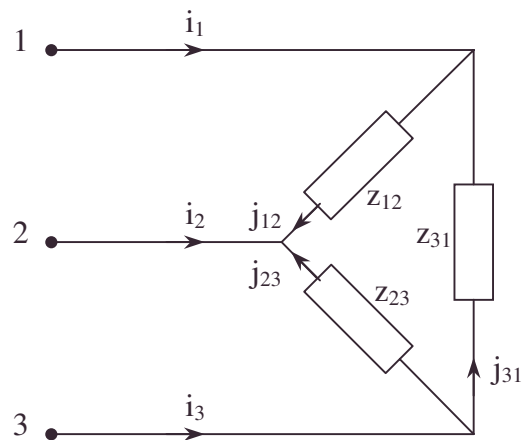


Figure 6

5. On branche 3 dipôles différents en triangle :

z_{12} est une résistance pure $R = 30 \Omega$;

z_{23} est une bobine pure d'impédance $X_L = 20 \Omega$ (module) ;

z_{31} est un condensateur parfait d'impédance $X_c = 40 \Omega$ (module).

a. Donner les expressions instantanées ou complexes des courants j_{12}, j_{23} et j_{31} .

b. Donner les expressions instantanées ou complexes des courants i_1, i_2 et i_3 (figure 6)

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

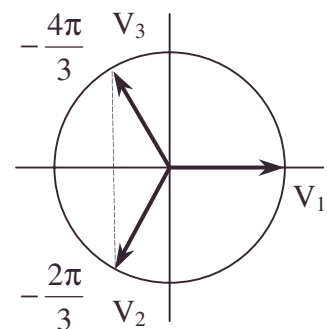
$$\text{A.1.}\alpha. \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) =$$

$$V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

β. Méthode de Fresnel

$V_1 + V_2 + V_3 = 0$ vu la somme des 3 vecteurs associés.



2.a.α. Notation complexe :

$$\underline{u}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right).$$

$$\underline{u}_{12} = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = V\sqrt{2} \sqrt{3} e^{j\omega t} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = V\sqrt{6} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

$$\underline{u}_{23} = \underline{v}_2 - \underline{v}_3 = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] =$$

$$\underline{u}_{23} = -jV\sqrt{6} e^{j\omega t} = V\sqrt{6} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$\underline{u}_{31} = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\underline{u}_{31} = V\sqrt{6} e^{j\omega t} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = V\sqrt{6} e^{j\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)}.$$

β. Traduction réelle : remarquons $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$.

$$u_{12} = V\sqrt{6} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = V\sqrt{6} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -V\sqrt{6} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$u_{23} = V\sqrt{6} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V\sqrt{6} \sin \omega t.$$

$$u_{31} = V\sqrt{6} \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) = V\sqrt{6} \cos\left(\omega t + \pi - \frac{\pi}{6}\right) = V\sqrt{6} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

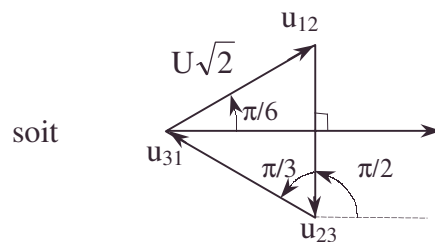
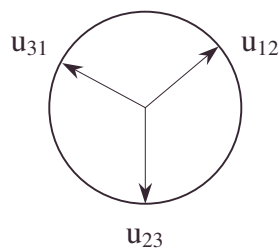
$$u_{31} = -V\sqrt{6} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

b. $U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{V\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = V\sqrt{3}$ vu la notation réelle ; A.N. : $U = 381$ V.

c.α. $\underline{u}_{12} + \underline{u}_{23} + \underline{u}_{31} = V\sqrt{2}\sqrt{3} e^{j\omega t} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} - j - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = 0;$

$$\Rightarrow u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0.$$

β. Méthode de Fresnel : comme précédemment, $u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$, vu la construction géométrique d'un triangle équilatéral :



3. $I_e = \frac{V_e}{R} ; P = \frac{V_e^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V_e^2}{P}$

$$\text{a. } i_N = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{1}{R}(V_1 + V_2 + V_3) = 0.$$

Rien ne perturbe les déphasages de $\frac{2\pi}{3}$.

$$\text{b. } i_1 = \frac{2V_1}{R}; i_2 = \frac{V_2}{R}; i_3 = \frac{V_3}{R}.$$

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{V_1}{R} + \frac{1}{R}(V_1 + V_2 + V_3) = \frac{V_1}{R} = \frac{V\sqrt{2}}{\frac{V^2}{P}} \cos \omega t = \frac{P\sqrt{2}}{V} \cos \omega t.$$

$$\text{A.N. : } i_{N_{\text{eff}}} = \frac{P}{V}; i_{N_{\text{eff}}} = 0,455 \text{ A}.$$

c.α. Vu la figure 4,

$$V_1 - V_0 = \frac{R}{2} i_1; V_2 - V_0 = R i_2; V_3 - V_0 = R i_3.$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 = \frac{1}{R} [2V_1 - 2V_0 + V_2 - V_0 + V_3 - V_0] = \frac{1}{R} \left[V_1 + \underbrace{(V_1 + V_2 + V_3)}_0 - 4V_0 \right]$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V_1}{4} = \frac{V\sqrt{2}}{4} \cos \omega t; V_{0_{\text{eff}}} = \frac{V}{4}; V_{0_{\text{eff}}} = 55 \text{ V}.$$

$$\text{β. } V_1 - V_0 = \frac{3}{4} V_1 = \frac{3}{4} V\sqrt{2} e^{j\omega t}; (V_1 - V_0)_{\text{eff}} = \frac{3V}{4}; \text{A.N. : } (V_1 - V_0)_{\text{eff}} = 165 \text{ V}.$$

$$\begin{aligned} V_2 - V_0 &= V\sqrt{2} \left(e^{j\omega t} \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{4} \right) \right) = V\sqrt{2} \left(-\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{j\omega t} = \\ &= V\sqrt{2} \left| -\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right| e^{j\left(\omega t + \arg \left(-\frac{3}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)}. \end{aligned}$$

$$(V_2 - V_0)_{\text{eff}} = V \sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 + \frac{3}{4}} = 252 \text{ V}.$$

$$\begin{aligned} (V_3 - V_0) &= V\sqrt{2} e^{j\omega t} \left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} - \frac{1}{4} \right) = V\sqrt{2} \left(-\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{j\omega t} = \\ &= V\sqrt{2} \left| -\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right| e^{j\left(\omega t + \arg \left(-\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)}. \end{aligned}$$

$$(V_3 - V_0)_{\text{eff}} = V \sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 + \frac{3}{4}} = 252 \text{ V}.$$

d. On voit la diminution de la tension et donc de la puissance fournie aux lampes de la phase 1, l'augmentation de la tension et donc de la puissance pour les lampes des phases 2 et 3.

Le montage étoile déséquilibré avec des lampes en parallèle dans une phase doit comporter un fil neutre.

Plus généralement dès qu'un montage étoile sans neutre est déséquilibré, il génère des baisses ou des augmentations de tension à des dispositifs éventuellement qui ne le supportent pas.

4.a. On applique la loi d'Ohm aux bornes de chaque dipôle (avec la notation de la question 5.)

$$\underline{j}_{12} = \frac{\underline{u}_{12}}{\underline{Z}_{12}} ; \underline{j}_{23} = \frac{\underline{u}_{21}}{\underline{Z}_{21}} ; \underline{j}_{31} = \frac{\underline{u}_{31}}{\underline{Z}_{31}} ; \text{or } \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{31} = Z e^{j\phi}.$$

$$\underline{j}_{12} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \phi\right)} ; \underline{j}_{23} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)} ; \underline{j}_{31} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j\left(\omega t + \frac{5\pi}{6} - \phi\right)},$$

soit en notation réelle :

$$j_{12} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \phi\right) ; j_{23} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right) ; j_{31} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{6} - \phi\right)$$

b. On applique la loi des nœuds :

$$\begin{aligned} \alpha. \underline{i}_1 &= \underline{j}_{12} - \underline{j}_{31} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \left(e^{j\frac{\pi}{6}} - e^{j\frac{5\pi}{6}} \right) = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3V\sqrt{2}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} ; i_1 = \frac{3V\sqrt{2}}{Z} \cos(\omega t - \phi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta. \underline{i}_2 &= \underline{j}_{23} - \underline{j}_{12} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \left(e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{j\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \left(-j - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{3V\sqrt{2}}{Z} e^{j\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{3}\right)} ; \end{aligned}$$

$$i_2 = -\frac{3V\sqrt{2}}{Z} \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \gamma. \underline{i}_3 &= \underline{j}_{31} - \underline{j}_{23} = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \left(e^{j\frac{5\pi}{6}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{V\sqrt{6}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} + j \right) = \\ &= \frac{3V\sqrt{2}}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3V\sqrt{2}}{Z} e^{j\left(\omega t - \phi + \frac{2\pi}{3}\right)} \Rightarrow \\ i_3 &= \frac{3V\sqrt{2}}{Z} \cos\left(\omega t - \phi + \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$$c. J = \frac{j_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{V\sqrt{3}}{Z} ; I = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{3V}{Z} \Rightarrow I = J\sqrt{3}.$$

$$5.a.\alpha. \underline{j}_{12} = \frac{V\sqrt{6}}{30} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)} ; j_{12} = \frac{V\sqrt{6}}{30} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right). \text{ A.N. : } \frac{V\sqrt{6}}{30} = 18,0 \text{ A.}$$

$$\beta. \underline{j}_{23} = \frac{V\sqrt{6}}{20} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{V\sqrt{6}}{20} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)} ; j_{23} = \frac{V\sqrt{6}}{20} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{A.N. : } \frac{V\sqrt{6}}{20} = 27,0 \text{ A.}$$

$$\gamma. \underline{j}_{31} = \frac{V\sqrt{6}}{40} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{V\sqrt{6}}{40} e^{j\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)} ; j_{23} = \frac{V\sqrt{6}}{40} \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\text{A.N. : } \frac{V\sqrt{6}}{40} = 13,5 \text{ A.}$$

b.α. La loi des nœuds donne : $\underline{i}_1 = \frac{V\sqrt{6}}{10} e^{j\omega t} \left(\frac{e^{j\frac{\pi}{6}}}{3} - \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}}}{4} \right) ;$

A.N. : $\underline{i}_1 = 22,42 e^{j(\omega t - 0,12)} \Rightarrow i_1 = 22,42 \cos(\omega t - 0,12).$

β. $\underline{i}_2 = \frac{V\sqrt{6}}{10} e^{j\omega t} \left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{2} - \frac{e^{j\frac{\pi}{6}}}{3} \right) ;$ A.N. : $\underline{i}_2 = 32,28 e^{j(\omega t - 1,635)} ;$
 $i_2 = 32,28 \cos(\omega t - 1,635)$

γ. $\underline{i}_3 = \frac{V\sqrt{6}}{10} e^{j\omega t} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{3}}}{4} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{2} \right) ;$ A.N. : $\underline{i}_3 = 40,35 e^{j(\omega t - 2,0)} ;$
 $i_3 = 40,35 \cos(\omega t - 2,0)$

On peut utiliser la construction de Fresnel à l'échelle.

δ. Comparaison par rapport au cas $\underline{Z} = 30 \Omega$.

$$i_{1m} = i_{2m} = i_{3m} = \frac{3V\sqrt{2}}{30} ; \text{ A.N. : } i_{1m} = i_{2m} = i_{3m} = 31,1 \text{ A.}$$

On voit l'importance des déséquilibres.

5.1.3.4. Transport de l'énergie électrique : amélioration du rendement

On se propose d'étudier le transport de l'énergie électrique sur 100 km entre le producteur et l'utilisateur.

Dans tout le problème, la puissance reçue par l'utilisateur sera constante et égale à 2000 kW.

On prendra pour la résistivité du cuivre : $\rho = 1,36 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ et pour densité de courant maximale dans la ligne la valeur efficace $\delta = 5 \text{ A/mm}^2$.

Toutes les valeurs numériques des tensions et courants alternatifs sinusoïdaux sont leurs valeurs efficaces comme c'est l'usage en électrotechnique.

I. Influence de la tension

On utilise pour le transport du courant une ligne monophasée bifilaire.

1. On fournit à l'installation de l'utilisateur 1000 A sous 2000 V avec un $\cos \phi = 1$. Quel doit être le volume de cuivre nécessaire pour construire la ligne ? Quelles sont les pertes Joule dans la ligne, et son rendement ?

2. On fournit à l'installation 50 A sous 40000 V avec un $\cos \phi = 1$. Quel doit être le volume de cuivre nécessaire pour construire la ligne ? Quelles sont les pertes Joule dans la ligne et son rendement ?

II. Influence du facteur de puissance

L'installation est toujours alimentée par une ligne monophasée bifilaire. Elle reçoit la puissance de 2000 kW sous 40000 V avec un $\cos \phi = 0,7$.

1. Quels sont :

- l'intensité du courant dans la ligne ?
- le volume de cuivre nécessaire à la construction de la ligne bifilaire ?
- les pertes Joule dans la ligne ?

• courant monophasé, électrotechnique, facteur de puissance [cosinus du déphasage tension intensité], Fresnel [méthode de], ligne monophasée bifilaire, monophasé

2. Peut-on améliorer le facteur de puissance de l'installation ? Comment obtenir un facteur de puissance égal à 1 ?

III. On remplace la ligne bifilaire monophasée par une ligne triphasée sans neutre. La puissance utile est 2000 kW avec un $\cos \phi = 1$. La tension composée (tension entre phases) est $40000\sqrt{3}$ V. Sachant que l'installation peut être assimilée à trois résistances branchées en étoile, calculer :

- l'intensité dans chaque fil de ligne ,
- le volume de cuivre nécessaire pour construire la ligne triphasée,
- les pertes par effet Joule et le rendement de la ligne.

Autres concours ; Durée : 1h

B.I.1.a. Volume : $2 \cdot \ell \cdot s$; or $I = \delta \cdot s \Rightarrow \text{volume} = \frac{2\ell I}{\delta}$.

b. $P_J = RI^2$ avec $R = 2\rho \frac{\ell}{s} = 2\rho \frac{\ell \delta}{I}$,

$\Rightarrow P_J = 2\rho \ell \delta I$; A.N. : $P_J = 13,6 \cdot 10^6$ W .

c. $\eta = \frac{P_u}{P_u + P_J}$; A.N. : $P_u = 2 \cdot 10^6$ W ; $\eta = 0,128$.

2. A.N. : **a.** volume = 2m^3 .

b. $P_J = 6,8 \cdot 10^5$ W .

c. $\eta = 0,746$.

II.1. $P = VI \cos \phi \Rightarrow \text{a. } I = \frac{P}{V \cos \phi}$; A.N. : $I = 71,43$ A .

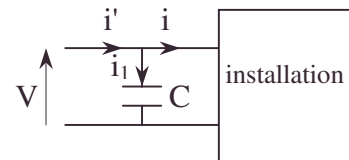
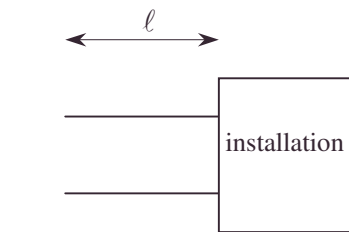
b. volume = $2,86 \text{ m}^3$.

c. $P_J = 9,7 \cdot 10^5$ W .

2.a. On branche une capacité industrielle en parallèle sur l'installation.

$\underline{i}' = \underline{i}_1 + \underline{i}$ avec $\underline{i}_1 = jC\omega \underline{V}$.

$\underline{i} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{V}}{|Z|} e^{-j \arg Z}$.



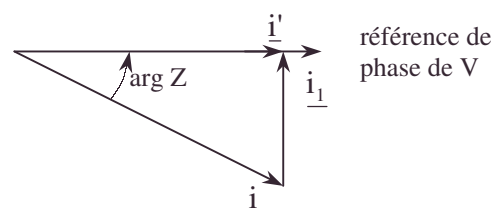
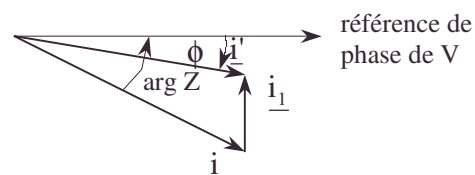
Utilisons la méthode de la représentation de Fresnel :

C peut faire augmenter la valeur de $\cos \phi$ en faisant diminuer $|\phi|$.

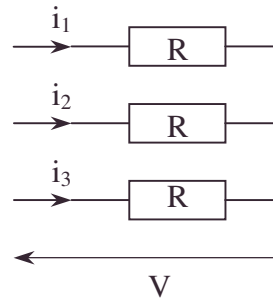
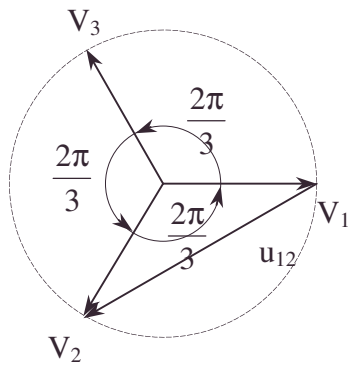
b. $\cos \phi = 1$; $\phi = 0$.

$\sin \arg Z = \frac{|\underline{i}_1|}{|\underline{i}|} = \frac{C\omega V}{I}$.

$\Rightarrow C = \frac{I}{V\omega} \sin \arg Z$.



III. On a le montage triphasé :



Rappelons :

a. $P_u = 3RI^2$.

$$\Rightarrow U = 2V \frac{\sqrt{3}}{2} = V\sqrt{3} = RI\sqrt{3}.$$

$$P_u = UI\sqrt{3} \Rightarrow I = \frac{P_u}{U\sqrt{3}} = \frac{P_u}{3V}.$$

A.N. : $U = 40000 \sqrt{3} \text{ V} \quad \left| \quad I = 16,67 \text{ A} \right.$
 $V = 40000 \text{ V}$

b. volume : $3\ell s = \frac{3\ell I}{\delta}$; A.N. : volume = 1 m^3 .

c. $P_J = 3\rho \frac{\ell}{s} I^2 = 3\rho \ell I \delta$; A.N. : $P_J = 339,9 \text{ kW}$.

d. $\eta = \frac{P_u}{P_u + P_J}$; A.N. : $\eta = 0,855$.

5.1.3.5. Résonance électromécanique

Voir page 66.

5.1.3.6. Lévitiation magnétique

Voir page 775.

5.1.3.7. Circuits couplés par mutuelle

Voir page 825.

5.1.3.8. Etude progressive du transistor

Voir page 956.

5.1.3.9. Haut-parleur B.F., résonance

Voir page 843.

5.1.3.10. Transformateurs

Voir page 1047.

5.1.3.11. Pompe à métal fondu d'échangeur de centrale nucléaire

Voir page 1073

5.1.3.12. Courants triphasés

Voir page 1104.

5.1.3.13. Principe d'un radio-altimètre

Voir page 1144.

5.1.3.14. Oscillateur d'un émetteur hyperfréquence

Voir page 1178.

• rendement

5.2. Electrostatique du vide et des milieux

Appartient partiellement aux programmes de MPSI, PCSI, PTSI, TS11, TPC1

5.2.1. Champs, potentiels, énergie

N.B. : Les paragraphes I et II sont indépendants.

Les étudiants sont libres d'étudier, dans ces diverses parties, le champ, puis le potentiel, ou inversement.

I.1. On considère une circonférence (C) horizontale de centre O, de rayon R, d'axe $z'Oz$; elle porte une charge électrique positive Q, uniformément répartie.

a. Calculer le champ \vec{E} et le potentiel V électrostatiques en un point P de l'axe à la distance z de O.

b. Donner, sur un même graphique, l'allure des courbes représentatives de $|\vec{E}|$ et de V en fonction de l'abscisse $\overline{OP} = z$ du point P.

On aura soin de mettre en évidence les extremums de la fonction $|\vec{E}|$.

2. On considère un dipôle électrique, formé de deux charges + q en A, - q en B ; son moment électrique est : $\vec{\mathcal{M}} = q\vec{BA}$. On place ce dipôle dans le plan du cercle précédent de sorte que le milieu de AB soit en O.

a. Exprimer, sans faire aucun calcul, pour $R \gg BA$, le potentiel V' et le champ \vec{E}' électrostatiques créés par ce dipôle en un point M de la circonférence (C) défini par ses coordonnées polaires $OM = R$ et $\theta = (\vec{BA}, \vec{OM})$. Le champ sera donné par ses composantes radiale et tangentielle.

b. Montrer que le système des forces électrostatiques appliquées aux différents points de la circonférence chargée (C) (**I.1.**) placée dans le champ \vec{E}' , est équivalent à une force unique \vec{f} . Déterminer cette force. Vérifier l'homogénéité du résultat obtenu.

c. Réciproquement, déterminer l'action du champ \vec{E} de C sur le dipôle : on exprimera la petite variation du potentiel quand on passe de A à B et l'on se limitera à montrer que cette action se réduit à une force unique donnée par l'expression $\vec{f} = \mathcal{M} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$

dans laquelle l'axe Ox est dirigé suivant $\vec{\mathcal{M}}$.

d. Des résultats ainsi obtenus en **2b.** et **2c.**, déduire une valeur approchée du champ \vec{E} pour un point du plan du cercle très voisin de O.

Utiliser ce nouveau résultat pour calculer une valeur approchée du champ \vec{E} pour un point de l'axe $z'Oz$ très voisin de O. On appliquera le théorème de Gauss à une petite surface fermée convenablement choisie. Contrôler ce dernier résultat à partir de la relation donnant le champ en un point de l'axe établie en **1.a.**

II.1. La même charge Q est maintenant répartie dans tout le volume d'une sphère de centre O, de rayon R ; la répartition est uniforme, on désignera par ρ la densité volumique.

a. Calculer le champ \vec{E} et le potentiel V électrostatiques en un point N situé à la distance $ON = r$, r variant de 0 à l'infini. Exprimer \vec{E} et V en fonction de Q, R et r.

b. Tracer, sur le même graphique, les courbes représentatives de $|\vec{E}|$ et de V. On prendra $R = 0,1$ m et $Q = 2\mu C$.

• champ électrostatique, composante radiale du champ électrostatique, composante tangentielle du champ électrostatique, développement au premier ordre ou plus, dipôle électrostatique, électrostatique, Gauss [théorème de], glisseur, graphe, homogénéité d'une grandeur [analyse dimensionnelle], moment dipolaire

c. Calculer directement l'énergie électrostatique d'une telle distribution. Vérifier que cette énergie est la même que si elle était répartie dans tout l'espace avec la densité volumique $\frac{dW}{d\tau} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$.

2. La charge Q est maintenant répartie dans tout l'espace suivant une distribution continue de centre O ; à la distance r de l'origine, la densité volumique $\rho = \frac{dQ}{d\tau}$, est une

fonction donnée par $\rho = \sigma_0 \frac{e^{-\frac{r}{R_0}}}{r}$ dans laquelle R_0 est une longueur donnée, σ_0 une valeur constante donnée.

a. Vérifier que σ_0 a même dimension qu'une densité surfacique de charge.

b. Quelle est, en fonction de R_0 et de σ_0 , la charge totale Q , de la distribution ? Quelle est la charge q , qui se trouve à l'intérieur d'une sphère de rayon r ? En particulier, quelle est la charge q_0 , dans le cas $r = R_0$?

c. Construire la courbe $y = \frac{Q}{q}$ de la fraction de la charge totale en fonction de

$x = \frac{r}{R_0}$, r variant de 0 à l'infini.

A partir de quelle valeur de x la charge q diffère-t-elle de la charge totale Q de moins de $\frac{1}{2000}$ de sa valeur ?

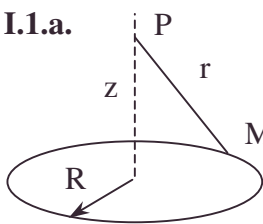
d. Calculer le champ E_r et le potentiel V électrostatiques créés par l'ensemble de la distribution en un point situé à la distance r du centre. Que deviennent leurs expressions si $r \gg R_0$? On suppose le potentiel nul à une distance infinie de O .

e. Calculer l'expression de l'énergie totale de la distribution.

Mines ; Durée 1h30

Corrigé

I.1.a.



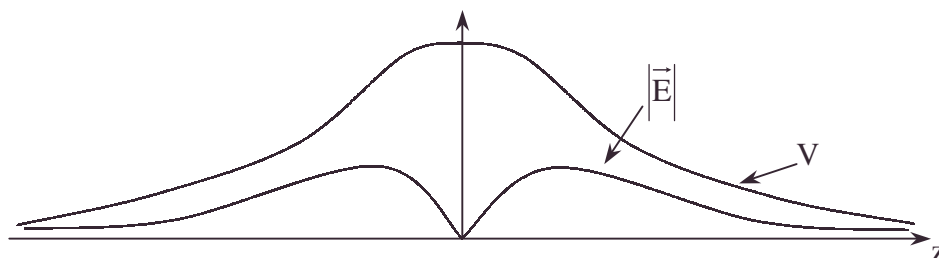
$$\alpha. \overrightarrow{PM} = \vec{r} ; V(P) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ soit } V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} ;$$

$$\beta. \vec{E}(P) = -\text{grad } V \text{ en } P \text{ quelconque de l'espace.}$$

Sur l'axe Oz , par symétrie de révolution, on a :

$$E_x = E_y = 0 ; \text{ donc } E_z(0,0,z) = -\frac{\partial V}{\partial z}(0,0,z) ; \vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{z}.$$

b.



$$\text{Extrema : } V_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ pour } z = 0 ; |E|_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ pour } z = \pm R \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

(cf. inflexion de V).

$$\mathbf{2.a.} \quad V'(M) = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} ; E'_r(M) = \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} ; E'_\theta(M) = \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

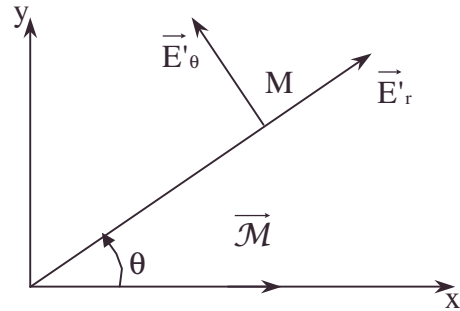
b. Calculons :

$$E'_x = E'_r \cos \theta - E'_\theta \sin \theta = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\epsilon_0 R^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

$$E'_y = E'_r \sin \theta + E'_\theta \cos \theta = \frac{3\mathcal{M}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cos \theta \sin \theta.$$

L'action mécanique exercée par le dipôle est définie par $\vec{f} = \int d\vec{f}$ avec $d\vec{f} = dq\vec{E}$ et

$$\vec{M}_O = \int \vec{OM} \wedge d\vec{f}.$$



On remarque : 2 points symétriques M' et M'' (définis par θ et $-\theta$) par rapport à Ox sont tels que :

$$E'_y(M') = -E'_y(M''), E'_x(M') = E'_x(M'') \Rightarrow \vec{OM'} \wedge d\vec{f}(M') = -\vec{OM''} \wedge d\vec{f}(M'') \Rightarrow$$

- Le moment résultant en O est donc nul (somme de couples opposés).
- La résultante est un vecteur porté par Ox .
- L'action mécanique se réduit au glisseur $\vec{f} = \int E'_x dq$;

$$\vec{f} = \frac{\lambda \mathcal{M}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta \vec{x} ; \text{ soit } \vec{f} = \frac{\mathcal{M}Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \vec{x} ;$$

$\mathcal{M} = qBA$; on a les mêmes unités pour f et $\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ (cf. loi de Coulomb).

c. \vec{E} est un champ extérieur au dipôle, dérivant d'un potentiel V (extérieur) ; faisons un développement limité au 1^{er} ordre car AB petit devant R :

$$\alpha. E_x(A) = E_x(O) + x_A \frac{\partial E_x}{\partial x}(O) ; E_z(A) = E_z(O) + x_A \frac{\partial E_z}{\partial x}(O) ;$$

$$E_x(B) = E_x(O) + x_B \frac{\partial E_x}{\partial x}(O) ; E_z(B) = E_z(O) + x_B \frac{\partial E_z}{\partial x}(O) ;$$

$$E_y(A) = E_y(O) + x_A \frac{\partial E_y}{\partial x}(O) ; E_y(B) = E_y(O) + x_B \frac{\partial E_y}{\partial x}(O).$$

$$\beta. \vec{f} = q\vec{E}(A) + (-q)\vec{E}(B) = q \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}(O) [x_A - x_B] = \mathcal{M} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}.$$

Le couple subit en O : $\vec{p} \wedge \vec{E}(O) = \vec{0}$ car $\vec{E}(O) = \vec{0}$ par symétrie de révolution. L'action mécanique se réduit donc au glisseur $\vec{f} = \mathcal{M} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$. Le théorème de l'action et de la réaction le confirme vu **I.2.b.**

d.α. Quelle que soit la direction de l'axe Ox (qu'on peut donc prendre de vecteur unitaire \vec{u}_r quelconque), le théorème de l'action et de la réaction donne :

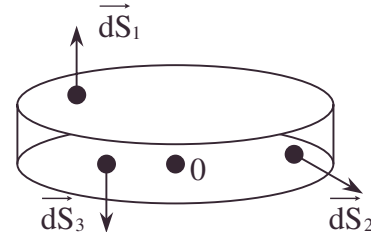
• développement au premier ordre ou plus, dipôle électrostatique, glisseur, homogénéité d'une grandeur [analyse dimensionnelle], loi de Coulomb, théorème de l'action et de la réaction, unité

$$\mathcal{M} \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = -\mathcal{M} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r, \text{ en intégrant : } \vec{E}_r(r) = -\frac{Qr}{8\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r + \vec{0} \quad \text{valeur approchée}$$

puisque l'on a pris une expression non variable de la force subie par (C).

β. Appliquons le théorème de Gauss au cylindre de rayon r , de bases de cotes 0 et z (petit) :

- par symétrie par rapport au plan de la circonférence $E_z(x, y, 0) = 0$.
- $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_z \cdot dS_z$ sur les bases.
- $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \cdot dS_r$ sur la surface latérale.
- en $z = 0$, $E_z(r) = 0 \quad \forall r$.



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 = \iint E_z(x, y, z) dS_1 - \iint 0 dS_3 + \iint E_r(r, z) dS_2.$$

• z et r étant petits, appliquons le théorème de la moyenne :

$$0 \approx E_z(0, 0, z) \pi r^2 + E_r(r, 0) 2\pi r z.$$

$$\bullet \quad E_z = -2 \frac{z}{r} E_r(r, 0) \quad \text{soit} \quad E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

γ. Ce qui est le résultat du **I.1.a.** avec $z \ll R$.

II.1.a. Appliquons le théorème de Gauss à une surface sphérique de rayon r . Vu la symétrie sphérique, $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E_r dS = E_r \iint dS = 4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

$$\alpha. \quad r \geq R \quad ; \quad Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = Q \quad ; \quad E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad ; \quad \vec{E}(N) = \frac{Q \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad ; \quad \text{on en déduit :}$$

$$V(N) - V(\infty) = \int_{+\infty}^r dV = - \int_{+\infty}^r E_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad ; \quad \text{or par convention, } V(\infty) = 0 \text{ en l'absence}$$

$$\text{de charge et } V(N) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

$$\text{Condition de continuité sur } V : r \rightarrow R_+ \quad ; \quad V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$\beta. \quad r \leq R \quad ; \quad Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3} \Rightarrow E_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Rightarrow \vec{E}(N) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r \quad ;$$

$$\text{On en déduit : } V(N) - V(R_-) = \int_{R_-}^r dV = - \int_{R_-}^r E_r dr = \left[\frac{-Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \right]_{R_-}^r \quad ;$$

$$\text{Or par continuité de } V \quad ; \quad V(R_-) = V(R_+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow V(N) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

• continuité du potentiel électrostatique, développement au premier ordre ou plus, Gauss [théorème de], théorème de la moyenne

b. Graphes ci-contre.

c.α. $W = \iiint_{\infty} \frac{1}{2} \rho V d\tau = \iiint_{V_R} \frac{1}{2} \rho V d\tau ;$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi R^3} \int_0^R \left(\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right) 4\pi r^2 dr ;$$

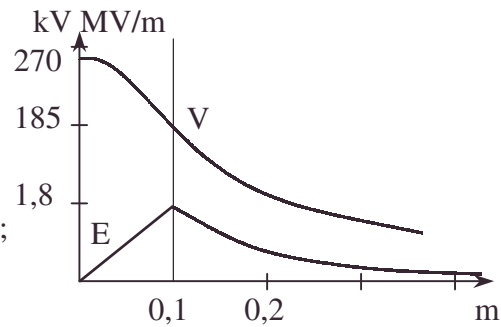
$$W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} ; \text{A.N. : } W = 0,216 \text{ J.}$$

β. Vérification de l'énoncé

$$W = \iiint_{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \iiint_{[V_R]} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau + \iiint_{V_R} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau ;$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_R^{\infty} \frac{4\pi r^2}{r^4} dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_0^R \frac{r^2}{R^6} 4\pi r^2 dr ;$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} .$$



2.a. $e^{-\frac{r}{R_0}}$ est sans unité ; σ_0 a les unités de ρ soit de $\frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi r^2}$ c'est à dire une charge par unité de surface.

b.α.

$$Q = \iiint_{\infty} \rho d\tau = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_0 e^{-\frac{r}{R_0}}}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi\sigma_0 \left[\left(-rR_0 e^{-\frac{r}{R_0}} \right) \Big|_0^{\infty} + R_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{R_0}} dr \right] = 4\pi\sigma_0 R_0^2 .$$

β. $q = \int_0^r \frac{\sigma_0 e^{-\frac{r}{R_0}}}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi\sigma_0 \left[\left(-rR_0 e^{-\frac{r}{R_0}} \right) \Big|_0^r + R_0 \int_0^r e^{-\frac{r}{R_0}} dr \right] ;$

$$q = 4\pi\sigma_0 \left[R_0^2 - R_0 (r + R_0) e^{-\frac{r}{R_0}} \right] .$$

γ. $r = R_0 ; q_0 = 4\pi\sigma_0 R_0^2 \left(1 - \frac{2}{e} \right) ;$

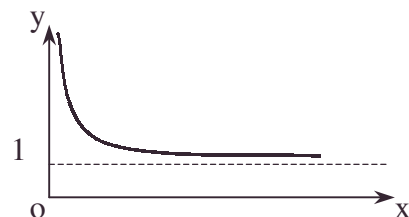
AN : $q_0 = 0,264 Q$.

c.α. $y = \frac{e^x}{e^x - (1+x)} .$

β. $y = 1 + \frac{1}{2000} = 1,0005$ d'où $x = 10,0$ solution numérique.

d.α. En appliquant le théorème de Gauss à une surface sphérique de rayon r :

$$\oiint \vec{E} d\vec{S} = \oiint E_r dS = E_r \oiint dS = 4\pi r^2 E_r = \frac{q}{\epsilon_0} .$$



$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2} \left[1 - \left(1 + \frac{r}{R_0}\right) e^{-\frac{r}{R_0}} \right].$$

β. $\int_r^\infty dV = -\int_r^\infty E_r dr$; $V(\infty) - V(r) = -\int_r^\infty E_r dr$; on obtient l'intégrale et on

vérifiera $V(\infty) - V(r) = -\frac{\sigma_0 R_0}{\epsilon_0} \frac{1}{\frac{r}{R_0}} + \frac{\sigma_0 R_0}{\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{R_0}}}{\frac{r}{R_0}}$ car on retrouve bien $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$.

En prenant $V(\infty)$ nul ; $V(r) = \frac{\sigma_0 R_0}{\epsilon_0} \frac{1 - e^{-\frac{r}{R_0}}}{\frac{r}{R_0}}$.

γ. Si $r \gg R_0$; $E_r = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2}$ et $V(r) = \frac{\sigma_0 R_0}{\epsilon_0} \frac{r}{R_0}$.

$$\text{e. } W = \frac{1}{2} \iiint \rho V d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma_0 \frac{e^{-\frac{r}{R_0}}}{r} \frac{\sigma_0 R_0}{\epsilon_0 r} \left(1 - e^{-\frac{r}{R_0}}\right) 4\pi r^2 dr ;$$

$$W = \frac{2\pi\sigma_0^2 R_0^2}{\epsilon_0} \int_0^\infty (e^{-\frac{r}{R_0}} - e^{-\frac{2r}{R_0}}) dr, \text{ soit } W = \frac{\pi\sigma_0^2 R_0^3}{\epsilon_0}.$$

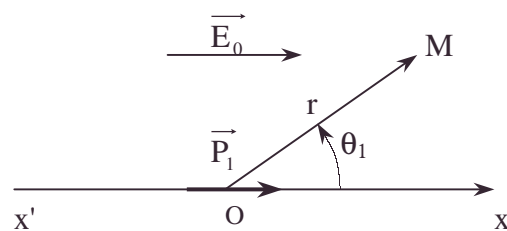
5.2.2. Dipôles

I. Dipôle électrique dans un champ électrique uniforme

A. On crée dans le vide un champ électrique uniforme d'amplitude \vec{E}_0 , orienté dans la direction de l'axe $x'Ox$ (figure).

1. Sachant que le plan équipotentiel au potentiel zéro passe par le point O, origine des coordonnées, exprimer le potentiel électrique V_{E_0} duquel dérive le champ E_0 , en

un point M de coordonnées polaires r et θ_1 .



B. Un dipôle électrique de moment p_1 est placé dans le champ \vec{E}_0 en O : le vecteur \vec{p}_1 est orienté dans la direction de l'axe $x'Ox$ (Figure).

2.a. Rappeler l'expression du potentiel électrique V_D créé par ce dipôle électrique en un point M, de coordonnées r et θ_1 , suffisamment éloigné du dipôle.

b. Donner l'expression du potentiel électrique V_e de l'ensemble constitué par le dipôle p_1 et le champ \vec{E}_0 , en un point M suffisamment éloigné du dipôle.

3.a. Définir la surface équipotentielle $V_e = 0$.

b. Sachant que le moment du dipôle est $p_1 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \text{ C.m}$ et que l'amplitude du champ électrique est $E_0 = 100\,000 \text{ V/m}$, tracer l'allure de l'équipotentielle $V_e = 0$ non plane.

c. Tracer à main levée sur le même graphique l'allure des autres équipotentiels. Que dire des lignes du champ ?

C. Une sphère conductrice isolée, initialement neutre, de rayon r_0 est placée dans un champ électrique uniforme \vec{E}_0 .

4.a. En utilisant les résultats précédents, déterminer la loi de répartition de la densité superficielle de charges électriques, à l'équilibre, sur la surface de ce conducteur.

Exprimer cette loi en valeurs numériques pour $r_0 = 0,01 \text{ m}$ et $E_0 = 100\,000 \text{ V/m}$.

b. Montrer, par un raisonnement physique simple, que la répartition précédente de charges électriques produit à l'intérieur d'une sphère un champ électrique uniforme dont on précisera la direction, le sens et l'amplitude.

5.a. Donner l'expression littérale et la valeur numérique de la charge positive totale Q_+ ainsi que de la charge négative Q_- apparues sur cette sphère.

b. Montrer que, pour des points suffisamment éloignés, la sphère peut être assimilée à un dipôle formé des deux charges Q_+ et Q_- placées aux centres de gravité respectifs des charges positives et des charges négatives.

II. Interaction entre deux dipôles électriques

On considère le dipôle \vec{p}_1 en l'absence du champ extérieur \vec{E}_0 . Sa position et son orientation sont fixes ; son module est $p_1 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \text{ C.m}$.

6.a. Exprimer la composante radiale, selon la direction de \vec{OM} , et la composante orthoradiale, selon la direction perpendiculaire à \vec{OM} , du champ électrique \vec{E}_d créé par le dipôle au point M de coordonnées polaires r et θ_1 .

b. Quelle est l'amplitude du champ électrique E_d pour $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ et $r = 0,1 \text{ m}$?

7. Un dipôle électrique de moment \vec{p}_2 est placé au point M : il ne peut que pivoter autour de ce point.

En position d'équilibre, son moment \vec{p}_2 fait avec le rayon vecteur \vec{OM} un angle θ_2 .

a. Exprimer la relation entre θ_1 et θ_2 .

b. Quelles sont les valeurs de θ_2 pour $\theta_1 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$?

8.a. Exprimer l'énergie du dipôle de moment \vec{p}_2 à l'équilibre, dans le champ électrique du dipôle \vec{p}_1 .

b. Pour quelle valeur de θ_1 cette énergie est-elle la plus basse ?
Quelle est la valeur de cette énergie pour $r = 0,1 \text{ m}$ et $p_2 = p_1 = p$?

9. On considère le cas où $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $r = 0,1 \text{ m}$ et $p_2 = p_1 = p$.

On applique un champ électrique extérieur uniforme \vec{E}_0 orienté dans la direction de l'axe $x'Ox$. Etudier la variation en fonction du champ \vec{E}_0 de la projection suivant le

• barycentre de charges, composante orthoradiale du champ électrostatique, composante radiale du champ électrostatique, dipôle électrostatique, énergie du dipôle dans un champ électrostatique, équipotentielle [ligne ou surface], interaction entre deux dipôles, ligne de champ, sphère conductrice [en Electrostatique]

champ \vec{E}_0 du moment dipolaire résultant de ce système des deux dipôles, vu par un observateur éloigné des deux dipôles.

10. On considère le cas où $\theta_1 = 0$, $r = 0,1\text{ m}$ et $p_2 = p_1 = p$.

On applique le champ électrique \vec{E}_0 dans une direction perpendiculaire à l'axe $x'Ox$. Etudier la variation de la projection suivant le champ \vec{E}_0 du moment dipolaire résultant en fonction du champ.

11. On considère encore le cas où $\theta_1 = 0$, $r = 0,1\text{ m}$ et $p_2 = p_1 = p$; mais les dipôles \vec{p}_1 et \vec{p}_2 peuvent à présent pivoter tous les deux, respectivement autour du point O et autour du point M.

a. Définir les orientations respectives des moments \vec{p}_1 et \vec{p}_2 .

b. On applique le champ \vec{E}_0 dans une direction perpendiculaire à l'axe $x'Ox$. Montrer que les moments \vec{p}_1 et \vec{p}_2 tournent d'un même angle θ dans la même direction.

c. Calculer l'énergie du dipôle de moment \vec{p}_2 dans le champ de \vec{p}_1 .

d. Calculer l'énergie totale du système, \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , dans le champ \vec{E}_0 .

e. Etudier la position d'équilibre de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 dans le champ \vec{E}_0 .

f. Etudier la variation de la projection suivant le champ \vec{E}_0 du moment dipolaire résultant des deux dipôles en fonction du champ.

CCP ; Durée : 1h

Corrigé

I.A.1. On vérifie aisément : $V_{E_0} = -E_0 x + 0 = -E_0 r \cos \theta_1$.

$$\text{B.2.a. } V_D = \frac{p_1 \cos \theta_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

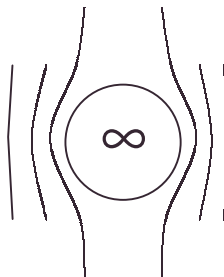
$$\text{b. } V_e = \left(\frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right) \cos \theta_1.$$

$$\text{3.a. } V_e = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ plan } x = 0, \text{ et } r_0 = \left(\frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ définit une sphère de centre}$$

O, valable si r_0 grand par rapport à la longueur du dipôle.

$$\text{b. A.N. : } r_0 = 10^{-2} \text{ m.}$$

c.



Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentiellelles.

C.4.a. "Métallisons" en saupoudrant une fine poussière métallique sur la surface équipotentielle $V = 0$: nous avons un conducteur dans un champ \vec{E}_0 ; cette perturbation théorique ne change rien pour $r > r_0$

$$\text{Pour } r > r_0 \quad V = \left(\frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right) \cos \theta_1 \Rightarrow E_r = \left(\frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} + E_0 \right) \cos \theta_1.$$

$$\text{or, } \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} - E_0 r_0 = 0 \text{ d'après la formule de Coulomb} \Rightarrow p_1 = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 \Rightarrow E_r = 3E_0 \cos \theta_1$$

$$\text{or, pour } r = r_0 + 0, E_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = 3E_0 \epsilon_0 \cos \theta_1 ;$$

$$\text{A.N. : } \sigma_0 = 3E_0 \epsilon_0 ; \text{ A.N. : } \sigma = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ C.m}^{-2}.$$

b. $\forall M$ intérieur à la sphère du conducteur : $\vec{E}_T = \vec{0} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_C \Rightarrow \vec{E}_C = -\vec{E}_0$.
Ce champ est dû aux charges surfaciques nouvelles.

$$\text{5.a. } Q_+ = -Q_- = \int_{\frac{1}{2}\text{sphère}} \sigma dS = 2\pi\sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1 = 3\epsilon_0 E_0 \pi r_0^2 ;$$

$$\text{A.N. : } Q_+ = -Q_- = 8,3 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

b. Vu la définition d'un moment dipolaire d'un ensemble de charges :
 $2Q_+ x_G = p_1 \Rightarrow x_G = \frac{2}{3} r_0$; il faut $r \gg r_0$ pour la modélisation.

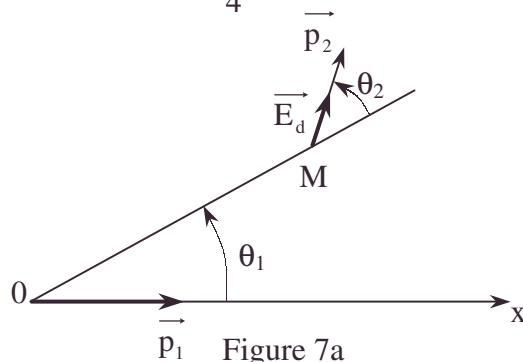
$$\text{II.6.a. } E_{\text{dr}} = \frac{2p_1 \cos \theta_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} ; E_{\text{d}\theta} = \frac{p_1 \sin \theta_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\text{b. } |E_d| = \sqrt{E_{\text{d}\theta}^2 + E_{\text{dr}}^2} = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta_1} ;$$

$$\text{A.N. : } \theta_1 = 0 \quad E_d = 200 \text{ V/m} ; \theta_1 = \frac{\pi}{4} ; E_d = 158 \text{ V/m} ; \theta_1 = \frac{\pi}{2} ; E_d = 100 \text{ V/m}.$$

$$\text{7.a. } \vec{p}_2 // \vec{E} \Rightarrow \tan \theta_2 = \frac{E_{\text{d}\theta}}{E_{\text{dr}}} = \frac{1}{2} \tan \theta_1.$$

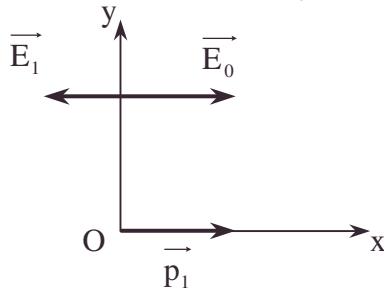
$$\text{b. A.N. : } \theta_1 = 0 ; \theta_2 = 0 ; \theta_1 = \frac{\pi}{4} ; \theta_2 = 0,46 \text{ rad.} ; \theta_1 = \frac{\pi}{2} ; \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$



$$\text{8.a. } \vec{p}_2 // \vec{E} \Rightarrow W = -p_2 E_d = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta_1}.$$

$$\text{b. } W_{\text{min}} : \text{pour } \cos \theta_1 = 1 ; \text{ A.N. : } W_{\text{min}} = -2,210^{-14} \text{ J.}$$

9.a. Définissons $E_1 = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.



Si $E_0 > \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$; \vec{p}_2 parallèle à \vec{p}_1 : $p_T = 2p_1$

Si $E_0 < \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$; \vec{p}_2 antiparallèle à \vec{p}_1 : $p_T = 0$.

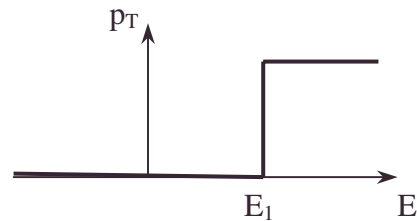


Figure 9a

10. $\vec{p}_2 \parallel \vec{E}_0 + \vec{E}_d$

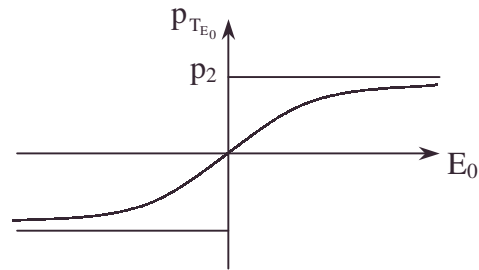
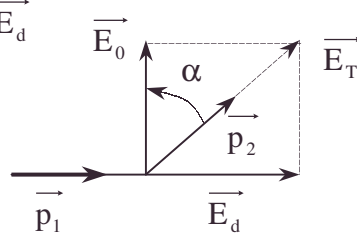


Figure 10

$p_{T_{E_0}} = p_2 \cos \alpha$ avec $\tan \alpha = \frac{2E_1}{E_0}$ car $E_d = 2E_1$.

or $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow$

$p_{T_{E_0}} = p_2 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E_1^2}{E_0^2}}}$. Graphe figure 10.

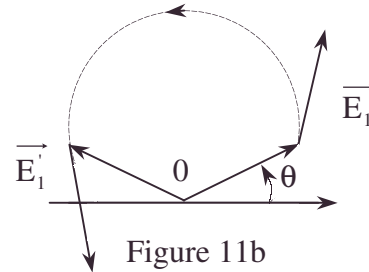


Figure 11b

11.a. $\theta_1 = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$

b. Action totale égale car action subie égale à la fois pour \vec{E}_0 et \vec{E}_d .

c. $p_{2x} = p_2 \cos \theta$;

$p_{2y} = p_2 \sin \theta$; $E_{d_{p_{1x}}} = E_{r_1} = \frac{2p_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

$E_{d_{p_{1y}}} = -E_{\theta_1} = \frac{-p_1 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow W = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_{d_{p_1}} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-2 + 3 \sin^2 \theta)$.

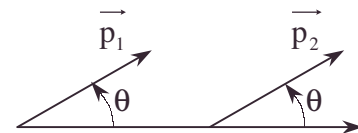


Figure 11c

d. $W_T = -2p_1 E_0 \sin \theta - \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 - 3 \sin^2 \theta)$. (On n'a retenu qu'un seul terme

d'énergie mutuelle).

$$W_T = -2p \left[E_0 \sin \theta - \frac{3p}{8\pi\epsilon_0 r^3} \sin^2 \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right].$$

e. r étant fixé, on a l'équilibre pour :

$$\frac{\partial W_T}{\partial \theta} = 0 = -2p \cos \theta \left(E_0 - 3p \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right),$$

soit pour $\sin \theta = \frac{4\pi\epsilon_0 r^3 E_0}{3p}$ possible seulement
si $\sin \theta \leq 1$ c'est-à-dire pour $E_0 < \frac{3P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

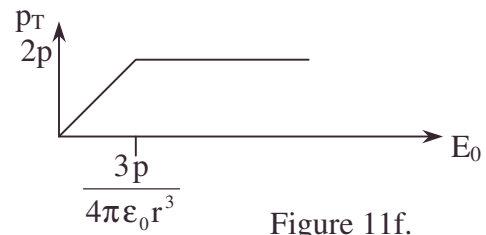


Figure 11f.

ensuite $\cos \theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour les valeurs supérieures de E_0 à $\frac{3P}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

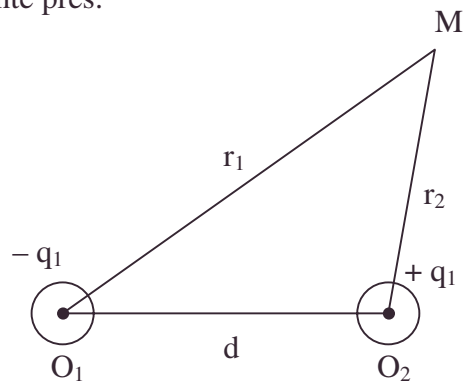
La dérivée seconde de W_T positive permet de vérifier la stabilité.

f. $p_T = 2p \sin \theta \Rightarrow$ figure 11f.

5.2.3. Théorème de Gauss pour un fil infini électrisé

1. Soit un fil conducteur rectiligne, très long, cylindrique, de rayon a , portant une charge répartie uniformément de densité linéique q_1 ; ce fil est dans un milieu de permittivité ϵ_0 . Exprimer le champ électrique et le potentiel créé à une distance $r > a$ de l'axe du fil. Ce dernier sera ici donné à une constante près.

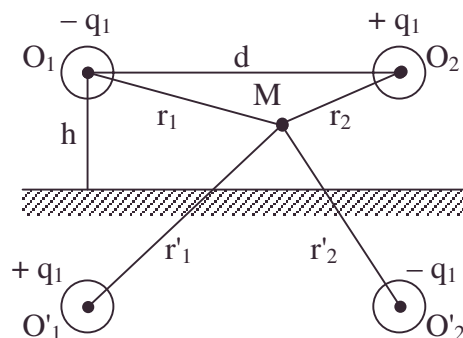
2. Une ligne bifilaire est formée de deux fils analogues au précédent dont les axes sont distants de $d \gg a$; ces fils portent des charges réparties dont les densités linéiques sont $+q_1$ et $-q_1$; exprimer le potentiel électrique V en un point M situé aux distances r_1 et r_2 des axes de chacun des fils et extérieur. Calculer les potentiels V_1 et V_2 de chaque fil en fonction de q_1 , a , d , ϵ_0 et en déduire la capacité linéique C_1 de la ligne bifilaire.



Application numérique : calculer C_1 avec $a = 10^{-2}$ m ; $d = 1$ m ; $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$.

3. En fait, pour une ligne bifilaire au voisinage du sol à une hauteur $h \gg a$, on admettra que le calcul du potentiel, en dehors des conducteurs et du sol, peut se faire en associant à la ligne réelle une ligne fictive symétrique par rapport au sol et portant des charges en vis-à-vis opposées à celles de la ligne réelle.

Exprimer au point M situé aux distances respectives r_1 , r_2 , r'_1 , r'_2 des axes de chacun des fils, le potentiel créé par l'ensemble des quatre fils.



En déduire les potentiels V_1 et V_2 des fils de la ligne réelle et calculer la capacité linéique C_1 de la ligne bifilaire en présence du sol.

Application numérique : $h = 5$ m ; a et d : mêmes valeurs qu'en 2. Commenter.

• capacité linéique de condensateur, charge d'un conducteur, développement au premier ordre ou plus, fil infini électrisé uniformément [en Electrostatique], Gauss [théorème de], stabilité

4. On revient à la situation du 2. et on repère le point M par ses coordonnées polaires r, θ ; l'axe polaire Ox étant porté par O_1O_2 .

Exprimer le potentiel V en fonction de r et θ dans l'hypothèse où $d \ll r$.

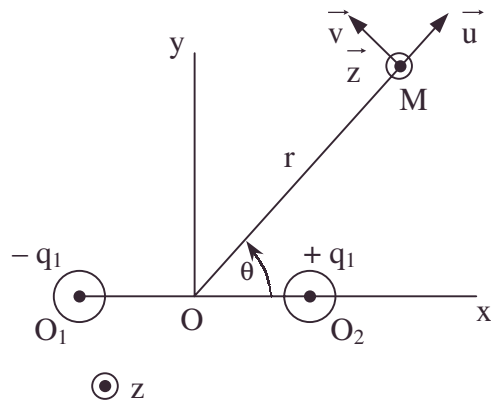
5. On superpose au champ créé par le dispositif précédent un champ uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{x}$ où \vec{x} désigne le vecteur unitaire de l'axe Ox. On suppose que ce champ uniforme crée un potentiel nul en O.

Exprimer le potentiel V résultant.

Montrer que l'équipotentielle $V = 0$ est formée d'un plan et d'un cylindre dont on précisera l'axe et le rayon r_0 .

Application numérique : Calculer r_0 ; $E_0 = 1000 \text{ V.m}^{-1}$; $q_1 = 10^{-6} \text{ C.m}^{-1}$; $d = 1 \text{ m}$.

6. Calculer le champ électrique résultant par ses composantes dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$.



Autres concours ; Durée : 1h

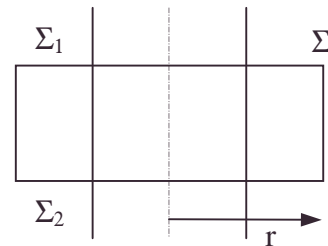
Corrigé

1. Soit Σ une surface de Gauss cylindrique de hauteur h et de rayon r .

Vu la symétrie cylindrique, et l'invariance des causes par rapport aux variables z et θ ,

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r.$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \underbrace{\int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \vec{E}_r d\vec{S}}_{=0} + E_r \iint_{S_{\text{lat}}} d\vec{S} = E_r S_{\text{lat}} = 2\pi r h E_r(r) = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}.$$



$$\text{Or, } Q_{\Sigma} = h q_1 \Rightarrow E_r(r) = \frac{q_1}{2\pi r \epsilon_0} \Rightarrow dV = -\vec{E} d\vec{OM} = -E_r dr \Rightarrow V = \frac{-q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln r + C.$$

$$2.a. V(M) = V_{q_1}(M) + V_{-q_1}(M) = \frac{-q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln r_2 + \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln r_1 + k = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + k, \text{ avec :}$$

$$r_1 \geq a, r_2 \geq a.$$

Simplification : le milieu O de O_1O_2 est un point d'anti-symétrie du système. Soit \vec{OO}_2 définissant un axe des x . k étant arbitraire, on peut construire une fonction impaire

$$V(-x) = -V(x) \text{ si } k = 0 : \text{ avec } V(O) = 0 ; V(M) = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

$$b. V_1 = V(A) ; \text{ or } O_1A = a ; O_2A = d - a ;$$

$$V_1 = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{a}{d-a} \# \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{a}{d} \text{ vu } a \ll d.$$



$$V_2 = V(B) ; \text{ or } O_1B = d - a ; O_2B = a ; V_2 = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} \# \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{d}{a}.$$

$$\text{c. } V_2 - V_1 = \frac{2q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} = \frac{(q_1 h)}{\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{d}{a} ; C = \frac{Q_2}{V_2 - V_1} = \frac{\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{d}{a}} ; C_1 = \frac{C}{h} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} > 0 .$$

$$\text{d. AN : } C_1 = 6,032.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}.$$

$$\text{3.a. } V(M) = \frac{+q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + \frac{-q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + \frac{-q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1' + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2' = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1 r_2'}{r_2 r_1'} .$$

$$\text{b. Pour A : } r_1 = a , r_2 \neq d$$

$$r_2' \neq (d^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} , r_1' \neq 2h$$

$$V_1 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a\sqrt{d^2 + 4h^2}}{d.2h} .$$

$$\text{Pour B : } r_1 \neq d , r_2 \neq a$$

$$r_1' \neq \sqrt{d^2 + 4h^2} ; r_2' \neq 2h$$

$$V_2 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d.2h}{a\sqrt{d^2 + 4h^2}} .$$

$$\text{c. } C = \frac{Q_2}{V_2 - V_1} = \frac{q_1 h}{V_2 - V_1} = C_1 h \text{ avec } C_1 = \frac{q_1}{V_2 - V_1} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d.2h}{a\sqrt{d^2 + 4h^2}}} .$$

$$\text{d. } C_1 = 6,038.10^{-12} \text{ F.m}^{-1} . \text{ Le sol de fait masse de potentiel nul perturbe peu.}$$

4. Considérons le schéma fait dans le cours sur le dipôle électrostatique : M à l'infini ($OM \gg OO_i$) est à l'intersection de deux droites parallèles O_1M, O_2M :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= O_1M = r + \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_2 &= O_2M = r - \frac{d}{2} \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1 + \frac{d}{2r} \cos \theta}{1 - \frac{d}{2r} \cos \theta} \right) ; \text{ or } \ln(1+x) \sim x .$$

$$V(M) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{d}{2r} \cos \theta + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) = \frac{q_1 d \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ formule rappelant celle du dipôle.}$$

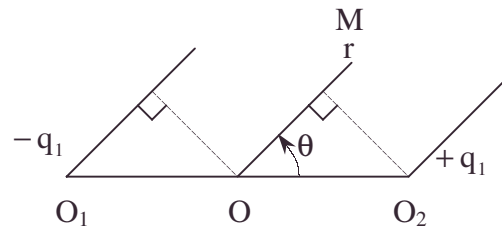
$$\text{5.a. Potentiel associé au champ } \vec{E}_0 : E_{0x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \text{on peut adopter}$$

$$V_0 = -E_0 x = -E_0 r \cos \theta$$

$$\text{b. Potentiel total : } V = \frac{q_1 d}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \theta - E_0 r \cos \theta = \left(\frac{q_1 d}{2\pi\epsilon_0 r} - E_0 r \right) \cos \theta .$$

c. Avec le choix présent de la constante prise pour V,

$$\alpha. \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = 0 \text{ sur le plan médian de } O_1O_2.$$



$$\beta. \forall \theta, r^2 = \frac{q_1 d}{2\pi\epsilon_0 E_0} \Rightarrow V = 0 \text{ sur le cylindre d'axe Oz et de rayon } r_0 = \sqrt{\frac{q_1 d}{2\pi\epsilon_0 E_0}}.$$

AN : $r_0 = 4,243 \text{ m}$.

$$6. \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{v} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{z} \Rightarrow$$

$$E_r = \left(\frac{q_1 d}{2\pi\epsilon_0 r^2} + E_0 \right) \cos \theta ; E_\theta = \left(\frac{q_1 d}{2\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 \right) \sin \theta, E_z = 0.$$

5.2.4. Lévitation

N'appartient qu'aux programmes MP, PT, TSI1

Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité uniforme g , est dirigé suivant l'axe vertical Oz, et de sens opposé.

Le vecteur unitaire sur l'axe Oz est \vec{k} .

Lévitation par interaction électrostatique

A. Le dispositif étudié comporte deux disques A et B, métalliques horizontaux, de même axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable, de rayons a et b tels que $b \ll a$.

Le disque A est fixe, et centré en O ; il est relié à un générateur de tension électrostatique V_0 .

Le point P appartient à l'axe Oz ; on appelle θ le demi angle au sommet du cône de sommet P, s'appuyant sur le contour du disque A.

Dans l'état initial, le disque B est posé sur le disque A, ainsi les deux disques sont en contact électrique. On admet que la distribution des charges surfaciques est uniforme et égale à σ , sur chacune des faces du système ainsi constitué (Figure 1).

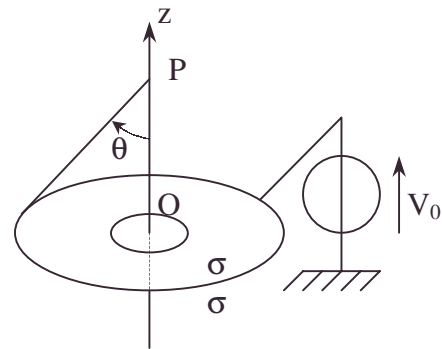


Figure 1

1.a. Déterminer le potentiel V le long de l'axe Oz en fonction de σ et z .

b. En déduire la valeur de la densité surfacique σ en fonction de V_0 et a .

2.a. Exprimer le champ électrique E le long de l'axe Oz au point P, en fonction de σ et de z , puis en fonction de σ et de θ .

b. Tracer le graphe de E en fonction de z , pour $z > 0$.

3.a. Au voisinage de l'axe Oz, déterminer, par application du théorème de Gauss à un petit cylindre d'axe Oz et de rayon r , la composante radiale E_r du champ électrique, en fonction de r et de z .

b. Exprimer le champ, en coordonnées cylindriques, en fonction de r et z , puis en fonction de r et θ , lorsque $r \ll a$.

4. Commenter l'hypothèse de la densité de charge σ uniforme sur le conducteur. Dans quel sens seraient modifiés les résultats lors d'une expérience réelle ?

B. On s'intéresse au décollage du petit disque B, dont la masse est m , l'épaisseur très faible e , ($e \ll b$), la masse volumique ρ .

La tension V_0 délivrée par le générateur augmente progressivement à partir de la tension nulle. Le point G est le centre du disque B.

1.a. Déterminer la condition sur σ , puis sur V_0 , pour que le décollage soit possible. Soit V_s la tension de ce seuil.

b. Application numérique

Déterminer V_s lorsque $e = 0,2 \text{ mm}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $a = 10 \text{ cm}$; $\rho = 8.10^3 \text{ kg/m}^3$.

2. Après décollage, la tension reste fixée à V_s . On admet que les charges surfaciques prennent une distribution uniforme sur chacun des deux disques, et que le disque B reste perpendiculaire à l'axe Oz. Déterminer la position d'équilibre du disque B, sur l'axe Oz. Discuter de la stabilité de cet équilibre, lors de petits mouvements de translation le long de l'axe.

3.a. Quelle est la force appliquée au disque B lorsqu'il s'écarte de l'axe Oz, par une translation \vec{r}_G ?

b. Que dire de la stabilité de l'équilibre du disque B ?

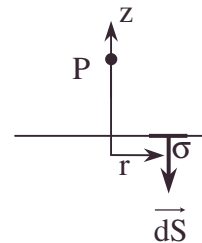
Concours MT ; Durée 1 h.

Corrigé

A.1.a. $V(P) = \iint \frac{(2\sigma)dS}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$. (N.B. : 2σ car 2 faces).

L'élément différentiel dS le plus grand tel que la fonction à intégrer soit constante est $dS = 2\pi r dr$ vu la symétrie cylindrique ;

$$V(P) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right].$$



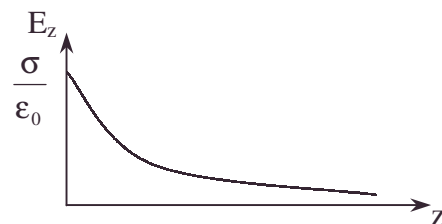
On remarque : $V(z)$ est une fonction paire.

b. $V_0 = V(0) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$.

2.a. $z > 0$; $V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z \right]$; $E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (1 - \cos \theta)$.

$z < 0$; $V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + z \right]$; $E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (1 - \cos \theta)$.

b. Les expressions vérifient le théorème de Coulomb pour $z = \pm 0$.



3.a. Prenons comme surface de Gauss un cylindre d'axe Oz, de rayon r, de hauteur dz.

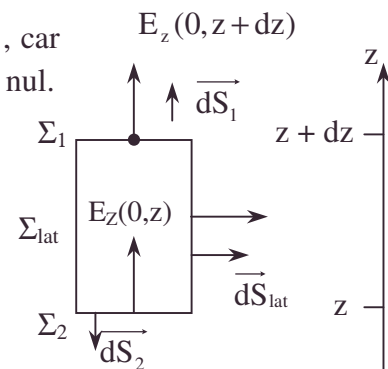
• En négligeant les termes en r^2 , $E_z(r, z) = E_z(0, z)$, car la fonction étant paire en r, son terme en r a un coefficient nul.

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{E} d\vec{S} = - \iint_{\Sigma_2} E_z dS = -\pi r^2 E_z(0, z) ;$$

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E} d\vec{S} = + \iint_{\Sigma_1} E_z dS = +\pi r^2 E_z(0, z + dz) .$$

$$\iint_{\Sigma_{lat}} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{lat}} E_r dS = 2\pi r dz E_r(r, z) ;$$

$$\frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0} = 0 = \iint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{lat}} \vec{E} d\vec{S}, \text{ soit :}$$



• continuité du potentiel électrostatique, développement en série d'une fonction paire, effets de bord, Gauss [théorème de], pouvoir des pointes, pression électrostatique, théorème de Coulomb [discontinuité du champ électrique normal à la surface d'un conducteur]

$$\pi r^2 E_z(0, z + dz) - \pi r^2 E_z(0, z) + E_r \cdot 2\pi r dz = 0 ; E_r = -\frac{r}{2} \frac{dE_z}{dz} = \frac{\sigma a^2 r}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{b. } \vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_z \vec{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{a^2 r}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_r + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \vec{k} \text{ pour } z > 0.$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2a\epsilon_0} r \sin^3 \theta \vec{u}_r + \frac{\sigma}{\epsilon_0} (1 - \cos \theta) \vec{k}.$$

4. La proximité des bords perturbe l'hypothèse $\sigma = \sigma_0 \quad \forall x, y$;

Vu le pouvoir des pointes, $|\vec{E}|$ et $|\sigma|$ plus grands au voisinage des bords.

B.1.a. Le décollage suppose que la force électrostatique compense au moins le poids, quand la réaction du support vient à s'annuler en $z = 0$.

On calcule la force due à la pression électrostatique .

- $F_{es} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi b^2 > mg$, avec $m = \rho \pi b^2 e \Rightarrow \sigma > \sigma_1$ avec $\sigma_1 = \sqrt{2\epsilon_0 g \rho e}$.

- or $\sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{a} \Rightarrow V_0 > V_s$ avec $V_s = a \sqrt{\frac{2g\rho e}{\epsilon_0}}$.

b. AN : $V_s = 190 \text{ kV}$.

2. F_{es} compense mg . σ supposé quasi inchangé par le départ du disque vu $\pi b^2 \ll a^2$.

$$F_{es} = qE_z = \sigma_1 \pi b^2 \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) = mg \Rightarrow z = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Si z diminue, E_z augmente ; le disque remonte : l'équilibre est stable.

$$\text{3.a. } \vec{F}_{es} = q\vec{E} = \sigma_1 \pi b^2 \left(\frac{\sigma_1 a^2 r_G}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_r + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \vec{u}_z \right).$$

La composante verticale est compensée par mg .

Mais la composante radiale : $\frac{\sigma_1^2 \pi b^2 a^2 r_G}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_r$ est centrifuge : la stabilité est détruite.

5.2.5. Interaction entre 2 charges Image électrique

N'appartient qu'aux programmes MP, PT, TSI1

Partie I

On considère l'ensemble formé de deux charges ponctuelles :

$q > 0$ située en A et

$q' = -kq$ ($k > 1$) située en B sur un axe (Ox).

La distance AB vaut $AB = 2a$ et $\overline{AB} = 2a$.

Le potentiel électrostatique est choisi nul à l'infini. Les charges sont situées dans le vide de permittivité ϵ_0 .



Figure 1

- équilibre, image électrique [problème équivalent], instabilité, stabilité, surface équipotentielle

1. Exprimer, en fonction de q , k , ϵ_0 et des distances MA , MB le potentiel en un point M de l'espace, créé par ces deux charges.

2. Montrer que la surface équipotentielle $V = 0$ est une sphère dont on précisera en fonction de a et k le rayon R et la position du centre O par les distances $d = OA$ et $d' = OB$. Ecrire alors les expressions de k et d' en fonction de R et d .

3. Dans tout plan contenant l'axe $x'x$, un point quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées à partir du centre O défini ci-dessus : $\|\overrightarrow{OM}\| = r$; $(Ox, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

a. Exprimer MA et MB en fonction de r , d , R et θ .

b. Ecrire l'expression $V(r, \theta)$ du potentiel en un point M en fonction de :
 r , θ , R , d , q , ϵ_0 .

4. Exprimer les composantes selon $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ directement perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$ du champ électrique \vec{E} désignées par E_r et E_θ créé par ces deux charges. Examiner ces composantes en $r = R$.

Partie II

Un milieu conducteur en équilibre électrostatique occupe l'espace situé entre deux sphères concentriques de centre O , de rayons R et $R + e$ (figure 2). Le reste de l'espace est vide. Le conducteur est relié au sol de potentiel $V = 0$. Une charge ponctuelle q est située en A sur l'axe Ox avec $OA = d < R$.

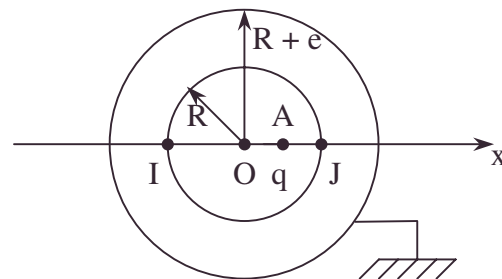


Figure 2

5.a. Quelles sont les charges Q_i et Q_e portées respectivement par les surfaces des sphères de rayon R et $R + e$? Comment sont-elles a priori réparties ?

b. Quelle est l'allure des lignes de champ issues de A au voisinage de A ? Quelle est l'allure de ces lignes de champ au voisinage de la sphère de rayon R ? En déduire un tracé intuitif des lignes de champ dans le domaine $0 < r < R$.

c. Comparer sans calcul la densité surfacique de charge aux points I et J .

6. Pour calculer le potentiel $V(M)$ dans le domaine $0 < r < R$, on souhaite remplacer la charge q et le conducteur par la charge q et une charge q' ponctuelle formant le système étudié dans la première partie.

En écrivant une condition nécessaire pour que ces deux systèmes soient équivalents, déterminer q' et d' en fonction de q , R et d . On admettra dans toute la suite que cette condition est suffisante.

7. Préciser alors pour tout point M situé sur la sphère de rayon R repéré par θ la densité surfacique $\sigma(\theta)$ de charges d'influence. retrouver alors la valeur Q_i et le résultat qualitatif de 5.c.

8. Le milieu conducteur précédent est maintenant isolé et porteur d'une charge donnée totale Q . On a toujours la charge ponctuelle q au point A .

a. Quelles sont les charges Q'_i et Q'_e portées respectivement par les sphères de rayons R et $R + e$?

b. On envisage un état du système où le conducteur porte Q , q en A étant supprimée. Déterminer le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace.

c. En superposant convenablement les 2 états d'équilibre au système, exprimer pour tout point $M(r, \theta)$ le potentiel $V(r, \theta)$ en envisageant les cas :

$$r < R, R \leq r \leq R + e; r > R + e.$$

9. On revient à la situation du milieu conducteur relié au sol de potentiel $V = 0$. On place en A une charge ponctuelle $q > 0$ et en A' symétrique de A par rapport à O une charge ponctuelle $-q$.

a. En utilisant l'équivalence précisée en 6., écrire l'expression du potentiel $V(r, \theta)$ en $M(r, \theta)$ en fonction de r, θ, d, R, q et ϵ_0 .

b. On suppose d/r et d/R très inférieurs à 1. Effectuer un développement limité de l'expression $V(r, \theta)$ du 5.a. et montrer que ce potentiel est identique à celui d'un système constitué par un dipôle de moment \vec{p} plongé dans un champ uniforme \vec{E}_0 . Exprimer \vec{p} et \vec{E}_0 à l'aide de q, d, R, ϵ_0 et du vecteur unitaire \vec{i} de l'axe Ox.

E.I.V.P ; Durée : 3h

Corrigé

$$\text{I.1. } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{AM} - \frac{k}{BM} \right).$$

2.a. $V = 0 \Rightarrow BM = k AM \Rightarrow BM^2 = k^2 AM^2$ s'écrit analytiquement :

$$(x - x_B)^2 + y^2 + z^2 = k^2 (x - x_A)^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x \frac{(k^2 x_A - x_B)}{k^2 - 1} + \frac{k^2 x_A^2 - x_B^2}{k^2 - 1} = 0.$$

Cherchons à identifier la surface à une sphère de centre $O(x, y, z)$ et de rayon R :

$$MO^2 = R^2 \text{ s'écrit : } (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0.$$

$$\text{Par identification on trouve le centre } O : \left(X_O = \frac{k^2 x_A - x_B}{k^2 - 1}, Y_O = 0, Z_O = 0 \right),$$

comme $x_B = x_A + 2a : X_O = x_A - \frac{2a}{k^2 - 1}$; O est à gauche de A.

et le rayon $R^2 = -\left(\frac{k^2 x_A^2 - x_B^2}{k^2 - 1} \right) + \frac{(k^2 x_A - x_B)^2}{(k^2 - 1)^2}$, et en remplaçant x_B .

$$R^2 = \frac{[(k^2 - 1)x_A - 2a]^2 - (k^2 - 1)(k^2 x_A^2 - 4a^2 - 4ax_A)}{(k^2 - 1)^2} =$$

$$R^2 = \frac{(k^2 - 1)^2 x_A^2 - 4a(k^2 - 1)x_A + 4a^2 - (k^2 - 1)^2 x_A^2 + 4a^2(k^2 - 1) + 4a(k^2 - 1)x_A}{(k^2 - 1)^2}.$$

$$R^2 = \frac{4a^2 k^2}{(k^2 - 1)^2} \Rightarrow R = \frac{2ak}{k^2 - 1} \text{ vu } k > 1.$$

$$d = \overline{OA} = x_A - x_O = \frac{2a}{k^2 - 1}.$$

$$d' = \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \frac{2a}{k^2 - 1} + 2a = \frac{2a(1 + k^2 - 1)}{k^2 - 1} = \frac{2k^2}{k^2 - 1} a.$$

O est à gauche de A et B vu $k > 1$.

$$\text{b. } k = \frac{R}{d}; d' = k^2 d = \frac{R^2 d}{d^2} = \frac{R^2}{d} \text{ cf. } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2.$$

$$\mathbf{3.a.\alpha.} \quad \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow MA^2 = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2 = OA^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2.$$

$$MA = \sqrt{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow MB^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})^2 = OB^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2.$$

$$MB = \sqrt{d'^2 - 2d'r \cos \theta + r^2} = \sqrt{r^2 - \frac{2R^2}{d} r \cos \theta + \frac{R^4}{d^2}}.$$

$$\mathbf{b. Vu 1., 2., 3. :} \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} \right).$$

$$\mathbf{4.a.} \quad E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(r - d \cos \theta)}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{d} \frac{\left(r - \frac{R^2}{d} \cos \theta\right)}{\left(r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R^3}{d^2} \frac{1}{\left(r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2r \frac{R^2}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

$$\mathbf{b.} \quad r = R : E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R - d \cos \theta}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{d} \frac{\left[R - \frac{R^2}{d} \cos \theta\right]}{\left(R^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\frac{R^3}{d} \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Passons à la variable réduite $k = \frac{R}{d}$.

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d \left[\frac{k - \cos \theta}{d^3 (k^2 + 1 - 2k \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k(k - k^2 \cos \theta)}{d^3 (k^2 + k^4 - 2k^3 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[\frac{k - \cos \theta}{(k^2 + 1 - 2k \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2(1 - k \cos \theta)}{k^3(1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} - \frac{1}{k(1 + k^2 - 2k \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} (k^2 - k \cos \theta - 1 + k \cos \theta).$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{(k^2 - 1)}{k(k^2 + 1 - 2k \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R^2 - d^2)}{R(R^2 + d^2 - 2dR \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

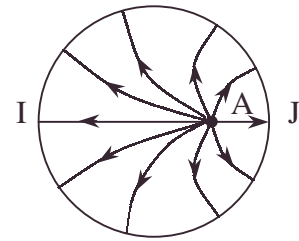
$E_\theta = 0$ car le champ est orthogonal à la surface $V = 0$ (on peut sinon appliquer la même technique de calcul).

• *éléments chargés correspondants [électrostatique des conducteurs], gradient en coordonnées polaires, influence totale en Electrostatique*

II.5.a.α. A l'extérieur, le potentiel est nul ; il n'y a aucun champ, aucune charge surfacique $\Rightarrow Q_e = 0$. Tout se passe comme si la sphère était pleine et conductrice au potentiel 0).

β. Par influence totale, vu le théorème des éléments correspondants, $Q_i = -q$.

En valeur absolue, σ est le plus intense là où le champ de q , cause première des σ_i , est le plus intense, soit en J à proximité de q puis en diminuant avec la distance à q jusqu'en I.



b. Si $q > 0$, les lignes de champ vont des charges positives aux charges négatives. Les lignes de champ en A sont radiales comme le champ créé par une charge ponctuelle (localement, c'est le champ prépondérant).

Au voisinage de la sphère, le champ est orthogonal à la paroi, les lignes de champ aussi.

$$\text{c. } \|\vec{E}_J\| > \|\vec{E}_I\| \text{ or } \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \Rightarrow |\sigma_J| > |\sigma_I|;$$

or $\sigma < 0$ si $q > 0 \Rightarrow \sigma_J < \sigma_I$.

6. Métallisons la surface équipotentielle $V = 0$ avec une quantité infiniment petite de poudre métallique parfaitement conductrice. Nous sommes dans les conditions de la figure 2 à l'intérieur de la sphère de rayon R . La solution du problème électrostatique, défini par la charge q en A et la sphère au potentiel nul l'entourant, étant unique (vu la résolution de $\Delta V = 0$ dans ce sous-espace), on peut identifier les caractéristiques :

$$q' = -kq = -\frac{Rq}{d}; d' = \frac{R^2}{d}. \text{ On aura bien } V = 0 \text{ en } r = R \text{ à titre de vérification.}$$

7.a. Au voisinage de la charge σ , le théorème de Coulomb s'écrit :

$$\vec{E}(N) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{sortante du métal}} \Rightarrow \sigma = -\epsilon_0 E_r(R-0) \text{ avec } E_r(R) \text{ de 4.b. .}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{-q(R^2 - d^2)}{4\pi R(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{b. } Q_i = \iint \sigma dS = \frac{-q(R^2 - d^2)}{4\pi R} \int_0^\pi \frac{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons $u = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta$; $du = 2Rd \sin \theta d\theta$.

$$Q_i = -\frac{q(R^2 - d^2)}{4d} \int_{(R-d)^2}^{(R+d)^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q}{4d} (R^2 - d^2) \left[-\frac{2}{u^{\frac{1}{2}}} \right]_{(R-d)^2}^{(R+d)^2}$$

$$Q_i = \frac{-q(R^2 - d^2)}{2d} \left[\frac{1}{R-d} - \frac{1}{R+d} \right]$$

$$Q_i = -q. \text{ cf. 5.a.}$$

$$\text{c. } \theta = 0 \text{ en J : } \sigma_J = \frac{-q(R-d)(R+d)}{4\pi R(R-d)^3} = \frac{-q(R+d)}{4\pi R(R-d)^2}.$$

$$\theta = \pi \text{ en I : } \sigma_I = \frac{-q(R-d)(R+d)}{4\pi R(R+d)^3} = \frac{-q(R-d)}{4\pi R(R+d)^2}.$$

• charge surfacique, conservation de la charge, éléments chargés correspondants [électrostatique des conducteurs], équation de Laplace, Gauss [théorème de], influence totale en Electrostatique, métallisation d'une surface équipotentielle fermée [théorème des écrans électriques], théorème de Coulomb [discontinuité du champ électrique normal à la surface d'un conducteur]

Vérifions $\sigma_J < \sigma_I$: $\frac{-q(R+d)}{4\pi R(R-d)^2} < \frac{-q(R-d)}{4\pi R(R+d)^2} \Leftrightarrow (R+d)^3 > (R-d)^3$ évident.

8.a. La conservation de la charge pour la sphère isolée s'écrit : $Q = Q'_e + Q'_i$.

Par influence totale (cf. théorème des éléments correspondants) :

$$Q'_i = -q \Rightarrow Q'_e = Q - Q'_i = Q + q.$$

b.α. $r > R + e$: le théorème de Gauss s'écrit pour une sphère de rayon r :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E_r = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \text{ or } dV = -E_r dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}.$$

$$r \rightarrow \infty; V_{\infty} = 0 \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

$$\beta. r \rightarrow R + e; V_{\text{conducteur}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R + e)}.$$

Ce conducteur est un volume équipotentiel à ce potentiel (puisque \vec{E} y est nul pour un conducteur parfait).

γ. $r < R$: appliquons le théorème de Gauss à une sphère de rayon r , dans le cadre de la symétrie sphérique : $4\pi r^2 E_r = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E_r = 0 \Rightarrow dV = -E_r dr = 0 \Rightarrow V = \text{cste}$ et par

$$\text{continuité avec } r = R, V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R + e)}.$$

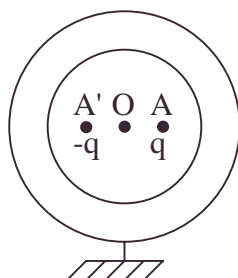
c. Superposons les états des charges définis par **5.** et **8.b.** en remplaçant Q par $Q + q$: on obtient l'état des charges du **8.a.** ; vu la linéarité des équations de l'électrostatique, on additionne les potentiels trouvés dans les différents sous-espaces.

$$\alpha. r < R; V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} \right) + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 (R+e)},$$

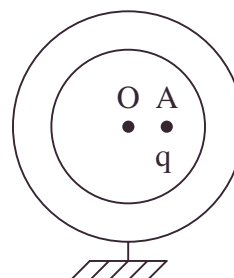
$$\beta. R \leq r \leq R + e. \text{ cf. 1., 5. et 8.b.}\gamma.; V = 0 + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 (R+e)}$$

$$\gamma. r > R + e; V = 0 + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

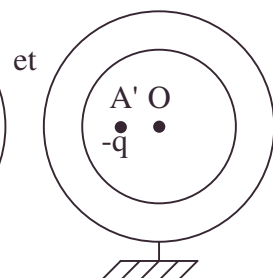
9.a.



On peut obtenir cette situation par superposition des deux états



I



II

Le potentiel demandé s'obtient par addition : $V = V_I + V_{II}$.

$$V_I = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} - \frac{k}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} \right) \text{ avec } k = \frac{R}{d} > 1.$$

V_{II} se déduit de V_I en changeant q en $-q$, d en $-d$ mais on garde $k > 1$ $k = \frac{R}{d}$.

$$V_{II} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2dr \cos \theta}} - \frac{k}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} + 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} \right).$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} \dots\dots\dots \right.$$

$$\left. \dots\dots\dots - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2dr \cos \theta}} + \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} + 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} \right]$$

b. A l'ordre 1, on a :

$$\alpha. (r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{d^2}{r^2} - 2\frac{d}{r} \cos \theta \right) \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{d}{r} \cos \theta}{r}.$$

$$\beta. (r^2 + d^2 + 2dr \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{d}{r} \cos \theta}{r}.$$

$$\gamma. \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} = \frac{\frac{R}{d}}{\frac{R^2}{d} \left(1 - 2\frac{r}{R} \frac{d}{R} \cos \theta + \frac{r}{R} \frac{d^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{r}{R} \frac{d}{R} \cos \theta \right)$$

$$\delta. \frac{\frac{R}{d}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} + 2\frac{R^2}{d} r \cos \theta}} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{rd}{R^2} \cos \theta \right).$$

$$\Rightarrow V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{r^2} \cos \theta - \frac{2qrd}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cos \theta.$$

$\frac{2qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ est le potentiel créé par un dipôle en O de moment dipolaire $p = 2qd$.

$$-\frac{2qrd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{2qxd}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ est le potentiel associé au champ } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0 R^3} = E_0$$

constant selon \vec{i} .

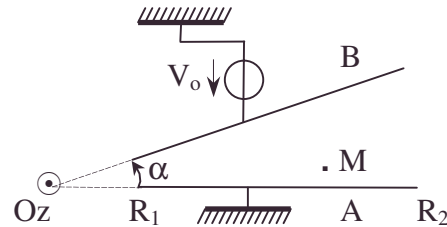
• condensateur, développement au premier ordre ou plus, dipôle électrostatique, électromètre

5.2.6. Electromètre

N'appartient qu'aux programmes MP, PT, TSI1

Tous les dispositifs étudiés ci-dessous sont placés dans le vide. On donne la permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

1. On considère un condensateur dont les deux armatures, rectangulaires, sont situées dans deux plans verticaux faisant entre eux un angle α . Les côtés verticaux de ces rectangles, de hauteur "h", sont respectivement situés aux distances R_1 et R_2 de la droite commune à Oz à ces deux plans.



1. Ces deux armatures A et B étant respectivement portées aux potentiels $V_A = 0$ et $V_B = V_0$, quel est le potentiel $V(M)$ en tout point M de coordonnées cylindriques r, θ, z situé entre les armatures ? On néglige tout effet de bord et on rappelle qu'exprimé en

coordonnées cylindriques: $\Delta V(M) = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$.

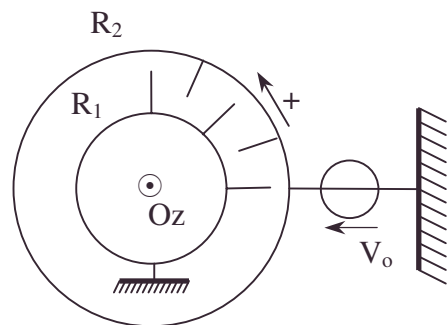
2. En déduire la capacité C_1 de ce condensateur en fonction de α, h, R_1 , et R_2 .

3. Que devient l'expression de cette capacité si la quantité $a = R_2 - R_1$ est très petite par rapport à R_1 ?

2. On considère maintenant le volume I compris entre deux cylindres métalliques coaxiaux d'axe Oz à sections circulaires de rayons R_1 et R_2 et deux plans perpendiculaires à l'axe commun de ces cylindres ; ces deux plans sont à la distance "h" l'un de l'autre. Le volume I est divisé par 2 N cloisons métalliques planes et infiniment minces. Ces cloisons ont la forme de rectangles de côté $R_2 - R_1 - b$ et h.

Elles sont régulièrement espacées, l'angle entre deux cloisons successives étant $\alpha = \pi / N$.

On réunit entre elles les cloisons de même parité, constituant ainsi un condensateur ; les cloisons paires sont reliées au cylindre central de rayon R_1 , maintenu au potentiel 0, les cloisons impaires sont reliées au cylindre extérieur de rayon R_2 , maintenu au potentiel $V_0 > 0$ (figure).



1. En utilisant le résultat 1.2., calculer la capacité C_0 du condensateur ainsi réalisé : on néglige tout effet de bord et on admet que $b \ll R_2 - R_1$.

Application numérique : $R_1 = 0,5 \text{ cm}$; $R_2 = 5 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$; $N = 10$.

Dans toute la suite du problème on adoptera ces valeurs numériques.

2. On imprime maintenant au cylindre central et aux cloisons paires qui lui sont solidaires, une rotation d'angle φ autour de l'axe Oz avec, bien sûr, $\varphi \in]-\alpha, \alpha[$.

Calculer la nouvelle valeur de la capacité $C(\varphi)$ du condensateur, donner une expression de $C(\varphi)$ en fonction de C_0, α et φ .

3. La position du cylindre central est toujours déterminée par l'angle φ .

1. Calculer, en chaque point des cloisons paires et de chaque côté, la densité superficielle de charge σ .

2. En déduire la pression électrostatique et montrer que le torseur des forces appliquées au cylindre central se réduit à un couple dont on donnera le moment \vec{G} . On exprimera les composantes de \vec{G} à l'aide de C_0 , V_0 , α et φ .

3. Quelle est l'énergie électrostatique W du condensateur ? Montrer qu'on peut la déterminer en la supposant emmagasinée dans tout l'espace avec la densité $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

4. Montrer comment l'expression de cette énergie permet de retrouver le moment \vec{G} du torseur des forces appliquées à l'armature interne.

4. L'équipage mobile constitué par le cylindre intérieur et les cloisons paires, est suspendu à un support fixe S par un fil de torsion parfaitement élastique, vertical, dirigé selon l'axe Oz , dont la constante de torsion est k . Lorsque $\varphi = 0$, le fil n'est pas tordu.

1. Ecrire la condition d'équilibre entre les actions électrostatiques et de torsion. Proposer une construction graphique permettant de trouver les positions d'équilibre.

2. Discuter de la stabilité des positions d'équilibre. Montrer que k , C_0 et α étant donnés, il existe une valeur critique V_{co} de la différence de potentiel V_0 . Les équilibres sont-ils stables pour $V_0 > V_{co}$ ou pour $V_0 < V_{co}$? Calculer numériquement la différence de potentiel V_{oc} en prenant $k = 10^{-6}$ SI.

5. On applique à l'armature externe de l'électromètre un potentiel V_0 supérieur à V_{co} . Pour éviter que les cloisons paires ne viennent rencontrer les cloisons impaires, on place sur les cloisons impaires des butées isolantes telles que l'angle de rotation de l'équipage solide soit limité à l'intervalle $\varphi \in \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]$.

1. Dans un premier temps, on constate, après avoir porté l'armature externe au potentiel V_0 , que φ prend la valeur $\frac{\alpha}{2}$. Déterminer le moment par rapport à l'axe Oz du torseur des forces appliquées par les butées sur l'équipage mobile.

2. On provoque alors une rotation d'angle φ_0 du support supérieur S du fil de torsion supportant l'armature mobile. Montrer que pour une valeur convenable de φ_0 le contact entre l'équipage mobile et la butée cesse. Que devient ainsi le dispositif ?

3. Application numérique : $k = 10^{-6}$ SI ; $V_0 = 100$ volts. Calculer φ_0 pour que le contact cesse.

Centrale ; Durée : 2h

Corrigé

1.1. Utilisons la technique de séparation des variables : $V(M) = F(r) g(\theta) h(z)$.

a. Le système est invariant par translation selon Oz : on ne tient pas compte des effets de bord : $V(M)$ ne dépend pas de z et $h(z) = h_0$.

b. Pour $\theta = \alpha$, $V(M) = V_0 = F(r) g(\alpha) h_0 \quad \forall r \Rightarrow F(r) = \frac{V_0}{h_0 g(\alpha)} = F_0$.

$V(M)$ ne dépend pas de r .

c. $\Delta V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$: soit $\frac{d^2 g}{d\theta^2} = 0$ et $g(\theta) = a\theta + b$ ou $V = A\theta + B$;

les conditions limites : $\theta = 0$; $V = 0$; $\theta = \alpha$; $V = V_0$; $\Rightarrow V = \frac{V_0}{\alpha} \theta$.

• capacité de condensateur, condition limite, développement au premier ordre ou plus, équation de Laplace, équilibre, pression électrostatique, séparation des variables, solution graphique, stabilité, symétrie, théorème de Coulomb [discontinuité du champ électrique normal à la surface d'un conducteur]

2. On en déduit : $\vec{E}(r, \theta, z) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \frac{-V_0}{\alpha r} \vec{u}_\theta$;

pour $\theta = \alpha - 0$; $\vec{E}(r, \alpha - 0, z) = \frac{-V_0}{\alpha r} \vec{u}_\theta = \frac{-\sigma_B}{\epsilon_0} \vec{u}_\theta$ d'après le théorème de Coulomb.

$\sigma_B = \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r} \Rightarrow Q_B = \iint_B \sigma_B dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r} h dr$, soit $Q_B = \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha} h \ln \frac{R_2}{R_1} = C_1 (V_B - 0)$;

or $V_B = V_0$ donc $C_1 = \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

3. $C_1 = \epsilon_0 \frac{h}{\alpha} \ln \frac{R_2 - R_1 + R_1}{R_1} = \epsilon_0 \frac{h}{\alpha} \ln(1 + \frac{a}{R_1}) \approx \epsilon_0 \frac{h}{\alpha} \frac{(R_2 - R_1)}{R_1}$.

2.1. Chaque cloison participe à 2 condensateurs : l'ensemble des 2N cloisons constitue 2N condensateurs d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{2N}$ (dont l'une des armatures est au potentiel $V_A = 0$ et

l'autre au potentiel $V_B = V_0$ montés donc en parallèle. $C_0 = 2NC_1$;

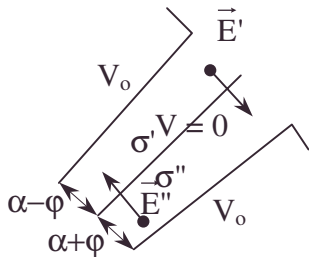
$C_0 = 2N\epsilon_0 \frac{h}{\alpha} \ln \frac{R_2}{R_1} = 2N^2 \frac{\epsilon_0 h}{\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$; AN $C_0 = 38,9$ pF.

2. La rotation d'angle φ crée N condensateurs de capacité $\frac{\epsilon_0 h}{\alpha + \varphi} \ln \frac{R_2}{R_1}$, et N

condensateurs de capacité $\frac{\epsilon_0 h}{\alpha - \varphi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ montés en parallèle :

$C(\varphi) = N\epsilon_0 h \ln \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{1}{\alpha - \varphi} + \frac{1}{\alpha + \varphi} \right]$ soit $C(\varphi) = C_0 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \varphi^2}$.

3.1. (cf. 1.2.). A proximité de la cloison ayant tourné de φ , on a :



$\vec{E}'' = \frac{V_0 \vec{u}_\theta}{(\alpha + \varphi)r}$; $\vec{E}' = \frac{-V_0 \vec{u}_\theta}{(\alpha - \varphi)r}$.

$\vec{E}'' = -\frac{\sigma''}{\epsilon_0} \vec{u}_\theta$; $\vec{E}' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \vec{u}_\theta$ d'après le théorème de

Coulomb, d'où : $\sigma' = \frac{-V_0 \epsilon_0}{(\alpha - \varphi)r}$ et $\sigma'' = \frac{-V_0 \epsilon_0}{(\alpha + \varphi)r}$.

2. $p' = \frac{\sigma'^2}{2\epsilon_0} = \frac{V_0^2 \epsilon_0}{2(\alpha - \varphi)^2 r^2}$; $p'' = \frac{\sigma''^2}{2\epsilon_0} = \frac{V_0^2 \epsilon_0}{2(\alpha + \varphi)^2 r^2}$.

Pour une cloison $\vec{f} = \int (p' - p'') \vec{u}_\theta dS$ avec $dS = h dr$;

$\vec{f} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 h}{2} \left(\frac{1}{(\alpha - \varphi)^2} - \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \vec{u}_\theta = \frac{\epsilon_0 V_0^2 h}{2} \frac{4\alpha\varphi}{(\alpha^2 - \varphi^2)^2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \vec{u}_\theta$.

$\vec{M}_0 = \int r \vec{u}_r \wedge d\vec{f} = \int_{R_1}^{R_2} (p' - p'') r h dr \vec{k} = \frac{\epsilon_0 V_0^2 h}{2} \left(\frac{1}{(\alpha - \varphi)^2} - \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} \vec{k}$.

En sommant sur N cloisons paires :

$\vec{f}_r = \sum \vec{f}_i = \frac{\epsilon_0 V_0^2 h}{2} \left(\frac{1}{(\alpha - \varphi)^2} - \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left[\sum_i \vec{u}_{\theta i} \right]$;

or, $\sum_{\ell=0}^{\ell=N-1} e^{2j\ell\alpha} = \frac{1-e^{2jN\alpha}}{1-e^{2j\alpha}} = \frac{1-e^{2j\pi}}{1-e^{2j\alpha}} = 0$ représente $\sum_i \vec{u}_{\theta_i}$ sur \mathbb{C} ,
 $\Rightarrow \sum_i \vec{u}_{\theta_i} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_r = \vec{0}$.

$$\vec{G} = \sum \vec{\mathcal{M}}_o^i = N \frac{\epsilon_o V_o^2 h}{2} \left(\frac{1}{(\alpha - \varphi)^2} - \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} \vec{k}$$

$$\vec{G} = \frac{1}{4} C_o V_o^2 \alpha \left(\frac{1}{(\alpha - \varphi)^2} - \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} \right) \vec{k} \quad \text{Soit : } \vec{G} = \frac{C_o V_o^2 \alpha^2 \varphi}{(\alpha^2 - \varphi^2)^2} \vec{k}.$$

3.a. $W = \frac{1}{2} C(\varphi) V_o^2 = \frac{C_o \alpha^2}{2(\alpha^2 - \varphi^2)} V_o^2.$

b. Pour un condensateur diédrique :

$$\iiint \frac{1}{2} \epsilon_o E^2 d\tau = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_o V_o^2}{\alpha^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{h}{r^2} \alpha r dr = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_o V_o^2}{\alpha} h \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Pour les 2 jeux de N condensateurs :

$$W = \frac{N}{2} \epsilon_o V_o^2 h \ln \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{\alpha - \varphi} + \frac{1}{\alpha + \varphi} \right) = N \epsilon_o V_o^2 h \ln \frac{R_2}{R_1} \frac{\alpha}{(\alpha^2 - \varphi^2)} = \frac{C_o}{2} \cdot \frac{\alpha^2 V_o^2}{(\alpha^2 - \varphi^2)}.$$

On a bien trouvé la formule ; cela justifie la méthode.

4. $G_z = + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)_{V_o} = \frac{N}{2} \epsilon_o V_o^2 h \ln \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{1}{(\alpha - \varphi)^2} - \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} \right]; \text{ c.q.f.d.}$

Inversément la formule donnant G_z est donc la bonne, notamment le signe qui y figure.

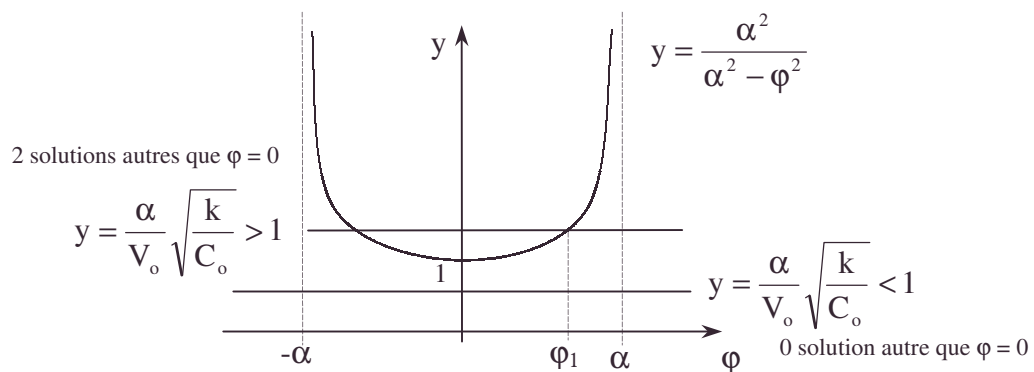
4.1. A l'équilibre $\sum \vec{\mathcal{M}}_o = \vec{0}$; soit $\mathcal{M}_z = G_z - k\varphi = 0$ [1] .

soit : $C_o V_o^2 \frac{\alpha^2 \varphi}{(\alpha^2 - \varphi^2)^2} = k\varphi.$

Construction graphique pour éviter une discussion de résolution d'équation bicarrée

Remarquons $\varphi = 0$ est solution évidente, les autres vérifient: $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \varphi^2} = \frac{\alpha}{V_o} \sqrt{\frac{k}{C_o}}.$

Etudions les intersections de la droite $y = \frac{\alpha}{V_o} \sqrt{\frac{k}{C_o}}$ et de $y = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \varphi^2}.$



2. La valeur limite de V_o est telle que $1 = \frac{\alpha}{V_{oc}} \sqrt{\frac{k}{C_o}}$; soit $V_{oc} = \alpha \sqrt{\frac{k}{C_o}} = \frac{\pi}{N} \sqrt{\frac{k}{C_o}}$;

• dérivée partielle de l'énergie électrostatique [à potentiel ou charge constant], équilibre, solution graphique, stabilité

La droite précédente s'écrit : $y = \frac{V_{oc}}{V_o}$.

AN : $V_{oc} = 50,37 \text{ V}$; on remarquera $G_z = \frac{V_o^2}{V_{oc}^2} \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 - \varphi^2)^2} k\varphi$.

a. $V_o < V_{oc}$ soit $y > 1$: 3 solutions : $\varphi = 0$; $\varphi_e = \pm \varphi_1$.

α . $\varphi \neq 0$; on a un développement du premier ordre de

$$\mathcal{M}_z = G_z - k\varphi \approx \left(\frac{V_o^2}{V_{oc}^2} - 1 \right) k\varphi$$

$$\varphi < 0 ; \mathcal{M}_z > 0.$$

$$\varphi > 0 ; \mathcal{M}_z < 0.$$

Le moment résultant ramène à la position d'équilibre $\varphi = 0$: l'équilibre est stable.

β . $\varphi_e = \pm \varphi_1$; faisons un développement au premier ordre de :

$$\mathcal{M}_z(\varphi) = G_z(\varphi_e) + (\varphi - \varphi_e) \left(\frac{\partial G_z}{\partial \varphi} \right)_{\varphi_e} - k\varphi_e - k(\varphi - \varphi_e)$$

$$\text{or } G_z(\varphi_e) - k\varphi_e = 0 ; \left(\frac{\partial G_z}{\partial \varphi} \right)_{\varphi_e} = C_0 V_o^2 \alpha^2 \cdot \frac{(\alpha^2 - \varphi^2)^2 + 4\varphi^2(\alpha^2 - \varphi^2)}{(\alpha^2 - \varphi^2)^4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial G_z}{\partial \varphi} \right)_{\varphi_e} = (C_0 V_o^2 \alpha^2) \left(\frac{1}{(\alpha^2 - \varphi_e^2)^2} + \frac{4\varphi_e^2}{(\alpha^2 - \varphi_e^2)^3} \right) ;$$

$$\text{or } k = \frac{C_0 V_o^2 \alpha^2}{(\alpha^2 - \varphi_e^2)^2} \text{ d'après 4.1.}$$

$$\left(\frac{\partial G_z}{\partial \varphi} \right)_{\varphi_e} = k \left(1 + \frac{4\varphi_e^2}{(\alpha^2 - \varphi_e^2)} \right) \text{ d'où } \mathcal{M}_z = 4(\varphi - \varphi_e) \frac{k\varphi_e^2}{(\alpha^2 - \varphi_e^2)} :$$

or $(\alpha^2 - \varphi_e^2) > 0$ cf. 4.1.

$$\varphi - \varphi_e < 0 \quad \mathcal{M}_z < 0$$

$$\varphi - \varphi_e > 0 \quad \mathcal{M}_z > 0$$

Le moment résultant ne ramène pas à l'équilibre, l'équilibre est instable.

b. $V_o > V_{oc}$ soit $y < 1$: une solution : $\varphi = 0$:

$$\text{le développement au premier ordre est : } \mathcal{M}_z \approx \left(\frac{V_o^2}{V_{oc}^2} - 1 \right) k\varphi.$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi < 0 \quad \mathcal{M}_z < 0 \\ \varphi > 0 \quad \mathcal{M}_z > 0 \end{array} \right\} \text{ Le moment résultant ne ramène pas à l'équilibre : } \\ \text{l'équilibre est instable.}$$

c. conclusion : la seule position stable est $\varphi = 0$ pour $V_o < V_{oc}$.

$$\text{5.1. } G_T = G_z - k\varphi + \mathcal{M}_{oz \text{ butée}} = 0 ; \mathcal{M}_{oz \text{ butée}} = k \left(\frac{\alpha}{2} \right) - G_z \left(\frac{\alpha}{2} \right) = k \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{16V_o^2}{9V_{oc}^2} \right).$$

2. Si on remplace le couple de torsion $-k\varphi$ par $-k(\varphi - \varphi_o)$ avec $\varphi = \frac{\alpha}{2}$, l'équilibre

$$\text{précédent s'écrit : } G_T = G_z \left(\frac{\alpha}{2} \right) - k \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi_o \right) + \mathcal{M}'_{oz \text{ butée}} = 0 ;$$

• armature interne d'un câble coaxial, câble coaxial, électromètre, instabilité

$$\mathcal{M}'_{\text{oz butée}} = k \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{16V_0^2}{9V_{\text{oc}}^2} \right) - k\varphi_0. \text{ On a : } \mathcal{M}'_{\text{oz butée}} = 0 \text{ pour } \varphi_0 = \frac{\pi}{2N} \left(1 - \frac{16V_0^2}{9V_{\text{oc}}^2} \right).$$

L'équilibre étant instable sous l'effet d'une cause minime favorable (aléatoire), l'armature peut décoller de la butée. La mesure de φ_0 est une mesure de V_0^2 :

on a un électromètre.

$$3. \varphi_0 = -54,0^\circ.$$

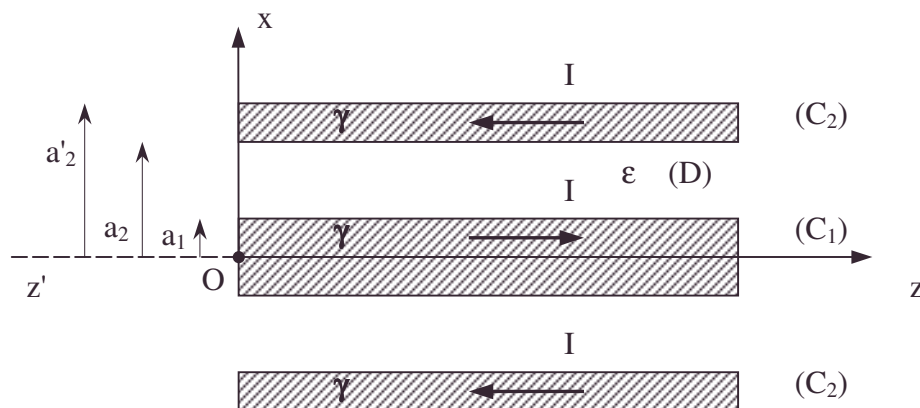
5.2.7. Câble coaxial avec diélectrique

On considère un câble coaxial de longueur infinie, d'axe $z'Oz$, constitué de deux conducteurs métalliques cylindriques de même axe $z'Oz$, de même conductivité γ , séparés par un milieu diélectrique (D) non chargé, supposé parfait (polyéthylène) de constante diélectrique ϵ .

Le premier conducteur (C_1) est un cylindre plein, de rayon a_1 , parcouru par le courant d'intensité I , et le second conducteur (C_2) est un tube de rayon intérieur a_2 et de rayon extérieur a'_2 ($a'_2 > a_2 > a_1$), parcouru par le courant opposé $-I$ de même intensité.

Dans le plan $z = 0$, on maintient le premier conducteur au potentiel $V_1 = V_0$ et le second conducteur au potentiel nul $V_2 = 0$.

On rappelle l'expression du laplacien de la fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.



1. Montrer qu'à la surface de séparation conducteur-diélectrique, la composante normale du champ \vec{E} est nulle dans le conducteur.

2. Vérifier que dans chacun des trois milieux (C_1), (C_2) et (D), la fonction :

$$V(r, z) = (\alpha z + \beta) \ln \frac{r}{r_0} + \lambda z + k \text{ décrit le potentiel électrique en tout point de chacun}$$

des milieux ($\alpha, \beta, r_0, \lambda$ et k désignent les cinq constantes caractéristiques du milieu considéré).

3. Déterminer, en fonction de a_1, a_2, a'_2, V_0, I et γ , les constantes $\alpha, \beta, r_0, \lambda$ et k pour chacun des trois milieux (C_1), (C_2) et (D). On affectera ces constantes des indices 1, 2 ou D pour les milieux (C_1), (C_2) et (D), et on supposera $k_D = 0$.

4. En déduire :

a. Le potentiel et le champ électrique en un point $M(r, z)$ du diélectrique de cote z , situé à la distance r de l'axe $z'Oz$ ($a_1 < r < a_2$).

• câble coaxial, équation de Laplace, gradient en coordonnées cylindriques

b. La densité surfacique de charge sur la surface de chacun des conducteurs, en fonction des données $a_1, a_2, a'_2, V_0, I, \epsilon, \gamma$, en un point de cote z .

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1. $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, Le courant ne sortant pas du câble C_1 ou C_2 .

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{E}_n = \vec{0}.$$

2. On vérifie en coordonnées cylindriques : $\Delta V = 0$.

$$3. \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V ; E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} ; E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} ;$$

$$E_r = -(\alpha z + \beta) \frac{1}{r} ; E_\theta = 0 ; E_z = -\lambda - \alpha \ln \frac{r}{r_0}. \text{ Expressions à indexer 1, 2 ou D.}$$

a. Pour C_1 et C_2 : $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} \Rightarrow E_r = 0$ en particulier à l'interface conducteur

diélectrique $\forall r$ et $\forall z$.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 ; \beta_1 = \beta_2 = 0 ; r_{0_1 \text{ ou } 2} \text{ non déterminables.}$$

$$\text{b. Pour } C_1 : j_2 = \gamma E_z = \frac{I}{\pi a_1^2} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{I}{\gamma \pi a_1^2}.$$

$$\text{Pour } C_2 : j_2 = \gamma E_z = \frac{-I}{\pi (a_2'^2 - a_2^2)} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{I}{\gamma \pi (a_2'^2 - a_2^2)}.$$

$$\text{c. } z = 0 ; V_1 = V_0 = k_1 ; V_2 = 0 = k_2.$$

d. Assurons la continuité de V_D avec V_1 en $r = a_1 \forall z$;

$$(\alpha_D z + \beta_D) \ln \frac{a_1}{r_{0_D}} + \lambda_D z + k_D = \frac{-I}{\gamma \pi a_1^2} z + V_0 \quad [1] ;$$

Assurons la continuité de V_D avec V_2 en $r = a_2 \forall z$;

$$(\alpha_D z + \beta_D) \ln \frac{a_2}{r_{0_D}} + \lambda_D z + k_D = \frac{I}{\gamma \pi (a_2'^2 - a_2^2)} z \quad [2] ;$$

Assurons la continuité de E_z ($\vec{E}_{\text{tangential}}$ en $r = a_1$) ;

$$-\lambda_D - \alpha_D \ln \frac{a_1}{r_{0_D}} = \frac{I}{\gamma \pi a_1^2} \quad [3] ;$$

Assurons la continuité de E_z en $r = a_2$;

$$-\lambda_2 - \alpha_2 \ln \frac{a_2}{r_{0_D}} = \frac{-I}{\gamma \pi (a_2'^2 - a_2^2)} \quad [4] ;$$

$$\text{Ecrivons en } z = 0 : \int_{a_1}^{a_2} E_r dr = V_0 = -\beta_D \ln \frac{a_2}{a_1} \quad [5] ; \beta_D = \frac{-V_0}{\ln \frac{a_2}{a_1}}.$$

α_D n'intervient pas.

On déduit de [1] :

$$[r_{0_D} = a_2 ; \lambda_D = \frac{I}{\gamma\pi(a_2'^2 - a_2^2)} ; \alpha_D = \frac{-I}{\pi\gamma\ln\frac{a_1}{a_2}} \left[\frac{1}{a_2'^2 - a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} \right] ; k_D = 0 .$$

$$4.a. V_D = \left[V_0 - \frac{I}{\pi\gamma} \left(\frac{1}{(a_2'^2 - a_2^2)} + \frac{1}{a_1^2} \right) z \right] \frac{\ln \frac{r}{a_2}}{\ln \frac{a_1}{a_2}} + \frac{I}{\pi\gamma(a_2'^2 - a_2^2)} z ;$$

$$E_{D_r} = \frac{1}{r} \left(\frac{I}{\gamma\pi\ln\frac{a_1}{a_2}} \left(\frac{1}{a_2'^2 - a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} \right) z - \frac{V_0}{\ln \frac{a_1}{a_2}} \right) ;$$

$$E_{D_z} = -\frac{I}{\gamma\pi(a_2'^2 - a_2^2)} + \frac{I}{\gamma\pi\ln\frac{a_1}{a_2}} \left[\frac{1}{a_2'^2 - a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} \right] \ln \frac{r}{a_2} .$$

b. On applique le théorème de Coulomb :

$$\alpha. \sigma_1 = \underbrace{\varepsilon E_{D_r}}_{\text{pour } r=a_1} = + \left[\frac{I}{\pi\gamma} \left(\frac{4}{a_2'^2 - a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} \right) z - V_0 \right] \frac{\varepsilon}{a_1 \ln \frac{a_1}{a_2}} .$$

$$\beta. \sigma_2 = \underbrace{\varepsilon E_{D_r}}_{\text{pour } r=a_2} = - \left[\frac{I}{\pi\gamma} \left(\frac{4}{a_2'^2 - a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} \right) z - V_0 \right] \frac{\varepsilon}{a_1 \ln \frac{a_1}{a_2}} .$$

5.2.8. Résonance électromécanique

Voir page 66.

5.2.9. Interaction de dipôles

Voir page 599.

5.2.10. Vortex

Voir page 438.

5.3. Magnétostatique du vide et des milieux Appartient aux programmes de MPSI, PCSI, PTSI, PT, TSI2, TPC1

5.3.1. Champ créé par une plaque de cuivre épaisse

Soit un repère orthonormé direct $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ et deux plans (P) et (P'), parallèles au plan (xOy), et de cotes respectives suivant $z'z : +\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$. Ces plans délimitent une plaque de cuivre homogène, d'épaisseur a , de perméabilité μ_0 , de permittivité ϵ_0 et de conductivité γ .

Une densité volumique de courant continu et constant $\vec{j} = j\vec{e}_x$ ($j > 0$) parcourt ce conducteur de dimension infinie suivant \vec{e}_x et \vec{e}_y . La densité superficielle de courant est nulle.

1. Par des considérations de symétrie, montrer quelle est la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$, créé par cette distribution, en un point M quelconque (intérieur ou extérieur à la plaque). On ne se contentera pas de références vagues à la symétrie, mais on s'attachera à construire une véritable démonstration, en distinguant les cas $z < 0$ et $z > 0$.

2. En déduire $\vec{B}(M)$ par le théorème d'Ampère.

3. Retrouver directement $\vec{B}(M)$ par les équations de Maxwell (à partir des composantes du rotationnel).

4. Calculer la densité volumique de puissance dissipée dans la plaque. Retrouver le résultat à l'aide du vecteur de Poynting. AN : $j = 1 \text{ A.mm}^{-2}$; $\gamma = 6,2.10^7 \text{ } \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$.

Centrale ; Durée : 0h30

Corrigé

I.1.a. En décomposant le mouvement de charges en cylindres infinis de section faible, on peut appliquer le théorème d'Ampère pour un cylindre de section ds et $d\vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

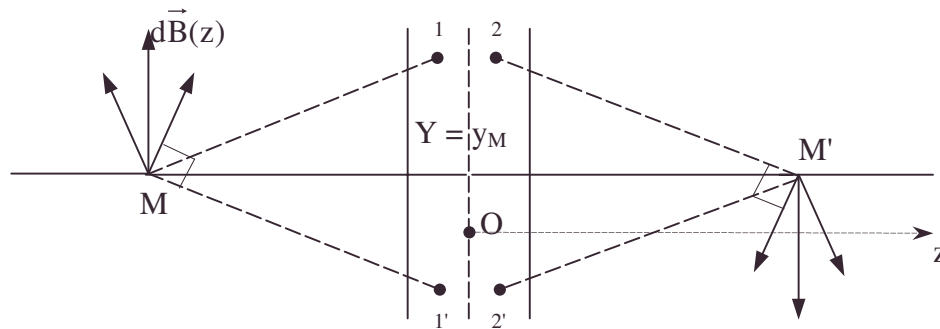
avec $di = jds$.

$$\vec{B}(M) = \int d\vec{B}(M).$$

b. 2 cylindres symétriques par rapport au plan $y = y_M$ des champs symétriques par rapport à \vec{e}_y ; en faisant la somme de cette manière : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_y$.

Vu la figure :

$$B_y < 0 \text{ pour } z > \frac{a}{2} ; B_y > 0 \text{ pour } z < \frac{a}{2} ;$$



Par continuité avec la zone extérieure :

pour $0 < z < \frac{a}{2}$ les contributions sont négatives et symétriques pour ce vecteur axial

$B_y > 0$ pour $-\frac{a}{2} < z < 0$.

c. Le système des causes est invariant par translation parallèlement à \vec{e}_x , de même le système des conséquences : $B(M)$ indépendant de x .

d. De même pour une translation parallèlement à \vec{e}_y ; $B(M)$ indépendant de y .

$\vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_y$.

e. Considérons deux cylindres symétriques (1) et (1'), par rapport à un plan $y = \text{cste}$. Considérons les deux cylindres (2) et (2'), symétriques des précédents par rapport au même plan.

La construction de leur contribution :

soit de (1) et (1') en M ; de (2) et (2') en M' montre que ces contributions (symétriques) engendrent des conséquences telles que $d\vec{B}'(M') = -d\vec{B}(M)$.

En sommant (en respectant ces associations) $\vec{B}(M') = -\vec{B}(M)$; $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$.

2. Considérons un contour Γ rectangulaire orienté ABCD qui exploite ces caractères.

$d\ell_{ABx} < 0$; $d\ell_{CDx} > 0$

a. $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$;

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{\ell} = -\int_A^B B(z) d\vec{\ell} + 0 + \int_C^D B(-z) d\vec{\ell} + 0 ;$$

$$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{S} \text{ or } B(-z) = -B(z)$$

$$-2B(z)h = +\mu_0 j \cdot 2zh ;$$

$$B(z) = -\mu_0 j z, \quad z > 0, \quad B(z) < 0.$$

et par symétrie :

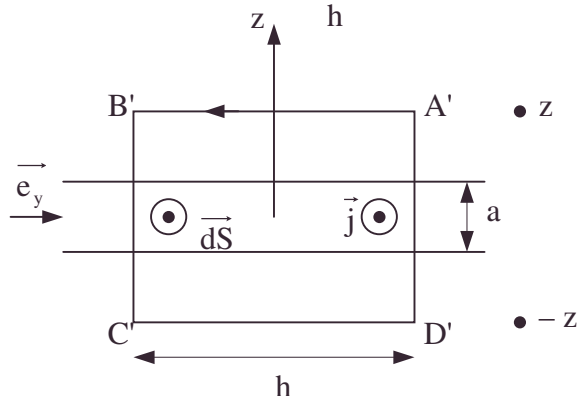
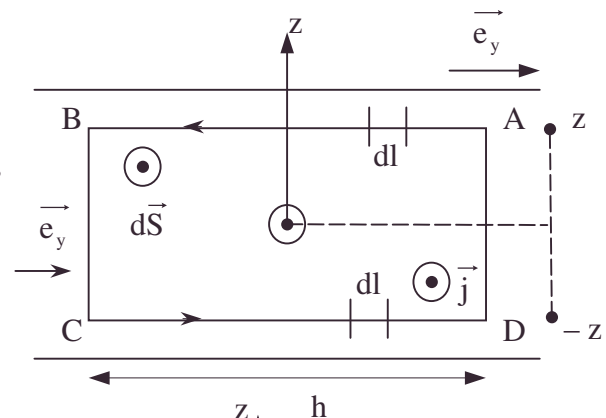
$$B(z) = -\mu_0 j z \quad z < 0, \quad B(z) > 0$$

b. z autre :

$$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = -\int_{A'}^{B'} B(z) d\vec{\ell} + 0 + \int_{C'}^{D'} B(-z) d\vec{\ell}$$

$$\text{or } B(-z) = -B(z) ; \oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{S}$$

$$\Rightarrow -2B(z) \cdot h = \mu_0 j \cdot 2 \frac{a}{2} h ;$$



• symétrie

$$B(z) = -\mu_0 j \frac{a}{2} \text{ pour } z > 0, B(z) < 0 \quad \text{et pour } z < 0, B(z) = +\mu_0 j \frac{a}{2}, B(z) > 0.$$

$$3. \vec{\text{rot}}(B(z)\vec{e}_y) = -\frac{dB}{dz}\vec{e}_x = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 j \vec{e}_x.$$

$$a. -\frac{a}{2} \leq z \leq +\frac{a}{2}; j \neq 0; \frac{dB}{dz} = -\mu_0 j \Rightarrow B(z) = -\mu_0 j z + C_1, \forall z.$$

$$\text{Or, } B(z) = -B(-z) \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$b. z \text{ autre: } j = 0; \frac{dB}{dz} = 0; B(z) = \text{constante, différente selon les sous espaces.}$$

Par continuité de B tangentiel vu l'absence de \vec{j}_s , si $\vec{j}_s = \vec{0}$

$$\text{en } z = +\frac{a}{2} \text{ pour } z > 0 \quad B(z) = -\mu_0 j \frac{a}{2}, \quad \text{en } z = -\frac{a}{2} \text{ pour } z < 0 \quad B(z) = +\mu_0 j \frac{a}{2}.$$

$$4.a. \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{j^2}{\gamma} : \text{A.N. : } \frac{dP}{d\tau} = 1,61.10^4 \text{ W.m}^{-3} \text{ pour } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}.$$

b. Rappelons l'équation locale de Poynting :

$$0 = \text{div} \left[\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] + \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \right).$$

$$\text{On a ici : } 0 = \text{div} \vec{\pi} + \frac{j^2}{\gamma} + 0 \text{ qui permet de retrouver : } \frac{dP}{d\tau} = -\text{div} \vec{\pi} = +\frac{j^2}{\gamma} \text{ si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$$

$$\text{A.N. : } \frac{dP}{d\tau} = 1,61.10^4 \text{ W.m}^{-3}.$$

$$\frac{dP}{d\tau} = 0 \text{ si } z \text{ à l'extérieur de la plaque.}$$

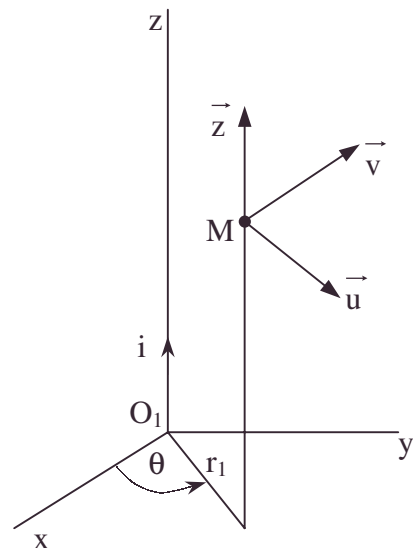
5.3.2. Champ magnétique créé par deux câbles infinis parallèles

On a un fil rectiligne conducteur de rayon a, supposé très long, et à présent parcouru par un courant d'intensité i dont la densité j est constante ; la perméabilité du milieu est μ_0 .

1. Exprimer le champ magnétique \vec{B}_1 , créé à la distance r_1 de l'axe, par ses composantes dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$, l'axe $O_1 z$ étant l'axe du fil orienté dans le sens du courant.

Calculer $\vec{\text{rot}} \vec{B}_1$ dans les deux cas : $r_1 > a$; $r_1 < a$.

2. Calculer les composantes du potentiel vecteur \vec{A}_1 associé à \vec{B}_1 dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$, dans les cas : $r_1 > a$ et $r_1 < a$.



- continuité du champ magnétique tangentiel si $\vec{j}_s = \vec{0}$, équation locale de Poynting

On rappelle les composantes du rotationnel d'un champ \vec{A} dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$.

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} ; \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r_1} ; \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{z} = \frac{A_\theta}{r_1} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.$$

Dans cette question, \vec{A}_1 sera donné à un vecteur constant près.

3. On revient à la ligne bifilaire formée de deux fils rectilignes, parallèles, de même rayon a , dont les axes sont distants de d . Ces fils sont à présent parcourus par des courants en sens inverse de même intensité i et de densité j constante.

Exprimer le potentiel vecteur résultant \vec{A} en M , extérieur aux fils, en fonction de μ_0 , i et r_1, r_2 , distances du point M aux axes.

4. On se place dans la situation du **4.** où le point M est repéré par ses coordonnées polaires r, θ ; avec l'hypothèse $d \ll r$.

Exprimer le potentiel vecteur \vec{A} créé par la ligne bifilaire en fonction de d, μ_0, i, r et θ .

En déduire le champ magnétique \vec{B} correspondant par ses composantes dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$. Quelle est la nature géométrique des lignes d'induction ?

Donner l'allure des lignes d'induction en les orientant.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1. Vu la symétrie cylindrique, l'invariance des causes par rapport aux valeurs de z et θ , \vec{B}_1 vecteur axial est de la forme $\vec{B}_1 = B_\theta(r_1) \vec{v}$;

- Un cercle de rayon r_1 , de centre la projection de M sur O_1z est une ligne de champ (fermée).

- Le théorème d'Ampère s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_\Sigma$.

a. $r_1 > a$ soit ici $\oint B_\theta(r_1) d\ell = \mu_0 i = B_\theta \oint d\ell = 2\pi r_1 B_\theta \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1}$.

b. $r_1 < a$ soit ici $\oint B_\theta(r_1) d\ell = \mu_0 i \frac{r_1^2}{a^2}$ car $i_\Sigma = j \cdot \pi r_1^2$ et $i = \pi a^2 j$;

$$B_\theta \oint d\ell = 2\pi r_1 B_\theta = \mu_0 i \frac{r_1^2}{a^2} \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 i r_1}{2\pi a^2}.$$

c. $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow r > a : \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} ; r < a ; \vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{\pi a^2} \vec{z}$.

$$\text{2.a. } r_1 > a : \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} \\ \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{z} = \frac{\partial A_\theta}{\partial r_1} + \frac{A_\theta}{r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad [1]$$

Il est légitime par cohérence de considérer \vec{A} indépendant de z et θ comme l'est \vec{B} (bien que \vec{A} possède une indétermination).

$$[1] \Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial r_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} \Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r_1 + k_1(\theta, z).$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial k_1}{\partial z} \text{ vu la remarque précédente : } k_1 \text{ est une constante indéterminable (cf. V),}$$

$$\text{on peut prendre } k_1 = 0 : A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r_1.$$

$$[2] \Rightarrow \frac{1}{r_1} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r_1} = 0 \Rightarrow r_1 A_\theta = k_2(\theta, z) = k_2 \text{ constante comme précédemment.}$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r_1 \vec{z} + \frac{k_2}{r_1} \vec{v} + k_3 \vec{u} \quad (\text{Aucune possibilité de déterminer } k_3 ; \text{ la condition de}$$

Coulomb $\text{div } \vec{A} = 0$ n'apporterait rien). La détermination de \vec{A} la plus simple (car k_3 et k_2 n'ont pas d'incidence dans l'expression de \vec{B} seule grandeur physique) est $k_2 = k_3 = 0$ et $\vec{A} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_1}{a} \vec{z}$.

$$\mathbf{b.} \quad r_1 < a : \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = 0 \\ \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r_1} = \frac{\mu_0 i v_i^2}{2\pi a^2} \\ \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{z} = \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial(r_1 A_\theta)}{\partial r_1} \right) - \frac{1}{r_1} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad [1']$$

On a les mêmes simplifications car il est légitime d'imposer à \vec{A} d'être indépendant de z et θ comme \vec{B} qu'il décrit.

$$[1'] \Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial r_1} = \frac{\mu_0 i r_1}{2\pi a^2} \Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 i r_1^2}{4\pi a^2} + k'_1.$$

$$[2'] \Rightarrow \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} (r A_\theta) = 0 \Rightarrow A_\theta = \frac{k'_2}{r_1}.$$

$$\vec{A} = \left(-\frac{\mu_0 i r_1^2}{4\pi a^2} + k'_1 \right) \vec{z} + \frac{k'_2}{r_1} \vec{v} + k'_3 \vec{u} ; \text{ vu l'indétermination physique de } k'_1, k'_2 \text{ et } k'_3, \text{ on}$$

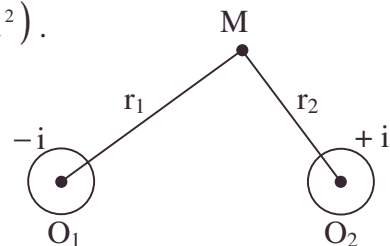
$$\text{les prendra nuls et } \vec{A} = -\frac{\mu_0 i r_1^2}{4\pi a^2} \vec{z}.$$

Remarque : si on veut assurer la continuité de \vec{A} à zéro en $r_1 = a$, on peut prendre :

$$r_1 > a : A_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_1}{a} ; r_1 < a : A_z = -\frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} (r_1^2 - a^2).$$

$$\mathbf{3.} \quad \vec{A}(M) = \vec{A}_{O_1}(M) + \vec{A}_{O_2}(M) \quad M \notin \text{fils.}$$

$$\vec{A}(M) = \left(+\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r_1 + \frac{-\mu_0 i}{2\pi} \ln r_2 \right) \vec{z} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \vec{z}$$



4.a. Vu la figure :

$$r_1 = r + \frac{d}{2} \cos \theta ;$$

$$r_2 = r - \frac{d}{2} \cos \theta ; \quad \vec{A}(M) = \vec{z} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{1 + \frac{d}{2r} \cos \theta}{1 - \frac{d}{2r} \cos \theta},$$

comme $d \ll r$. $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 i d}{2\pi r} \cos \theta \vec{z}$.

b. $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{u} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{v} + 0 \vec{z} = -\frac{\mu_0 i d}{2\pi r^2} \sin \theta \vec{u} + \frac{\mu_0 i d}{2\pi r^2} \cos \theta \vec{v}$.

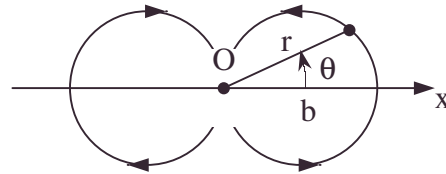
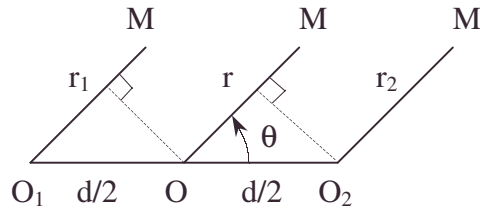
c. La ligne de champ est un ensemble de points M tels que : $\vec{B} // d\vec{OM}$:

l'équation différentielle en coordonnées polaires s'écrit :

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -d\theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \ln \frac{r}{b} = \ln \cos \theta, \text{ d'où } r = b \cos \theta, \text{ cercle de diamètre } b$$

centré sur Ox. (Courbe plus simple que dans le cas classique du dipôle).

d. La région où r n'est plus grand devant d est à supprimer (le voisinage de O).



5.3.3. Potentiel vecteur Energie magnétostatique de deux câbles infinis parallèles

Un conducteur métallique C_1 , cylindrique, de longueur infinie, de rayon a , de conductivité γ , est traversé par un courant d'intensité I constante, correspondant à une densité de courant \vec{i} uniforme ; les lignes de courant sont orientées suivant l'axe $z'Oz$ du conducteur. On repérera un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques r, θ et z et on notera $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ et \vec{u}_z les vecteurs unitaires radial, orthoradial et axial formant la base orthonormée du repère utilisé. Le conducteur est placé dans le vide de perméabilité $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1} \text{ m}$.

1.a. Déterminer, en fonction de a, I et r le champ magnétique \vec{B} en tout point M .

b. En déduire l'expression du potentiel vecteur \vec{A} , à une constante près, en tout point $M(r, \theta, z)$.

On distinguera deux cas ; $r < a$ et $r > a$.

2. Retrouver par un calcul direct les résultats de la question **1.b.** en considérant le conducteur cylindrique comme un assemblage de conducteurs filiformes infinis. On distinguera encore les deux cas ; $r < a$ et $r > a$, et on admettra le résultat de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi \ln x & \text{si } x > y, \\ 2\pi \ln y & \text{si } y > x. \end{cases}$$

3.a. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ en tout point M (r, θ, z), intérieur au

conducteur, en fonction de a, r, γ et I.

b. Indiquer sur un schéma l'orientation de R en un point N de la surface du conducteur. Calculer, en fonction de a, h, γ et I, le flux Φ du vecteur de Poynting à travers la surface fermée constituée par la portion de conducteur limitée par deux sections droites distantes de h.

c. Calculer la puissance P dissipée par effet joule dans la portion de conducteur de longueur h, limitée par deux sections droites. Comparer P et Φ. Conclusion ?

4. On dispose d'un second conducteur C₂ identique au conducteur C₁ ; les axes parallèles des deux conducteurs cylindriques sont distants de D (D > 2 a). Les deux conducteurs sont traversés par des courants constants de même intensité I, de sens contraires, correspondant aux densités de courant \vec{i} et $-\vec{i}$ uniformes, de direction parallèle à z'Oz

a. Déterminer en fonction de a, r₁, r₂ et I le potentiel vecteur \vec{A} en tout point M à la distance r₁ de l'axe de C₁ et à la distance r₂ de l'axe de C₂.

On distinguera trois cas :
– M extérieur aux conducteurs C₁ et C₂ ;
– M intérieur au conducteur C₁ ;
– M intérieur au conducteur C₂.

Pour déterminer les constantes, on choisira $\vec{A} = \vec{0}$ en tout point équidistant des axes de C₁ et C₂.

b. En déduire en fonction de a, h, D et I, l'expression de l'énergie magnétostatique emmagasinée dans l'espace compris entre deux plans distants de h, perpendiculaires aux axes des conducteurs.

Application numérique : a = 3 mm ; D = 2 cm ; h = 1 km ; I = 10 A.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1.a. D'après le théorème d'Ampère sur un contour circulaire Γ d'axe Oz et vu la symétrie cylindrique $\vec{B} = B_\theta(r)$, $\oint_\Gamma \vec{B} d\vec{\ell} = \oint B_\theta d\ell = 2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I_\Sigma$.

$$\alpha. r \leq a \quad I_\Sigma = \iint \vec{i} d\vec{S} ; \text{ or, } I = \pi a^2 i \Rightarrow I_\Sigma = \int \frac{I}{\pi a^2} dS = I \frac{\pi r^2}{\pi a^2} ; \vec{B}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \vec{u}_\theta.$$

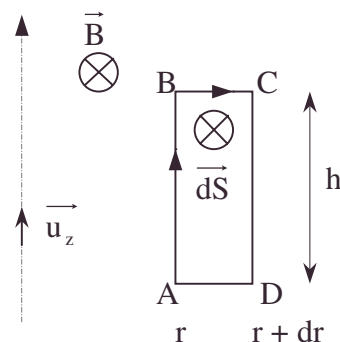
$$\beta. r \geq a ; I_\Sigma = I ; \vec{B}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

$$b. \bullet \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{i}}{r} d\tau \Rightarrow \vec{A} = A_z \vec{u}_z ; \text{ la symétrie cylindrique et l'invariance dans}$$

une translation quelconque selon \vec{u}_z donnent $A_z = A_z(r)$.

c. • Vu l'absence de formule de rot en coordonnées cylindriques, employons la technique du rectangle orienté ABCD dans un plan méridien.

$$\phi = \iint_{ABCD} \vec{B} d\vec{S} = B_\theta h dr = \oint \vec{A} d\vec{\ell}$$



• Ampère [théorème d'], effet Joule, symétrie, théorème de Stokes (Green-Riemann)

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = A_z(r)h - A_z(r+dr)h = -\frac{dA_z}{dr}h dr ; \frac{dA_z}{dr} = -B_\theta .$$

$$\alpha. r \leq a ; B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \Rightarrow \vec{A} = \left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} r^2 + C_1 \right) \vec{u}_z .$$

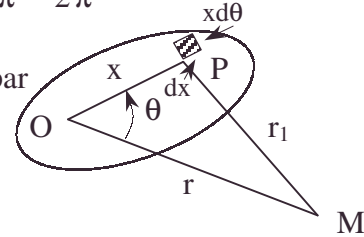
$$\beta. r \geq a ; B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{A} = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C_2 \right) \vec{u}_z .$$

Pour assurer la continuité de A, on prendra : $C_2 = C_1 - \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a = 0$.

C_1 est la seule constante d'indétermination.

2. Caractérisons une fibre conductrice verticale infinie par sa section dans le plan de M ; $dS = dx \cdot x d\theta$;

$$\text{d'après 1.c.}\beta., \vec{dA}(M) = -\mu_0 \frac{dI}{2\pi} \ln r_1 \vec{u}_z .$$



Or, $r_1 = \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta}$ cf. norme de $(\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP})$

$$\text{et } dI = i dS = \frac{I dS}{\pi a^2} = \frac{I x dx d\theta}{\pi a^2} .$$

$$\alpha. \text{ si } r < a, \vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 a^2} \int_0^a x dx \left(\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta} d\theta \right) \vec{u}_z .$$

Pour utiliser le résultat de l'énoncé, écrivons : $\int_0^a f(x,r) dx = \int_0^r f(x,r) dx + \int_r^a f(x,r) dx$.
($x < r$) ($x > r$)

$$\vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 a^2} \left[\int_0^r (2\pi \ln r) x dx + \int_r^a (2\pi \ln x) x dx \right] \vec{u}_z \text{ et après intégration par parties,}$$

$$\vec{A}(M) = \left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 a^2} \frac{\pi r^2}{2} + C_1 \right] \vec{u}_z . C_1 \text{ regroupe des termes constants.}$$

$$\beta. \text{ Si } r > a > x, \vec{A}(M) = \frac{-\mu_0 I}{2\pi^2 a^2} \int_0^a x dx (2\pi \ln r) \vec{u}_z = -\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \right] \vec{u}_z .$$

$$3.a. \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \text{ or en } r \leq a \vec{E} = \frac{\vec{i}}{\gamma} \text{ et } \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{R} = \frac{-I^2 r}{2\pi^2 a^4 \gamma} \vec{u}_r .$$

b.α. \vec{R} est centripète à la surface.

$$\beta. \Phi = \iint_{\Sigma_{\text{lat}}} \vec{R} d\vec{S} + 0 = \frac{-I^2}{2\pi^2 a^4 \gamma} \cdot 2\pi a h = \frac{-I^2 h}{\pi a^2 \gamma} .$$

$$c.\alpha. \mathcal{P} = \iiint_{V_\Sigma} \vec{i} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_{V_\Sigma} \frac{i^2}{\gamma} d\tau = \iiint_{V_\Sigma} \left(\frac{I}{\pi a^2} \right)^2 \frac{d\tau}{\gamma} = \frac{I^2}{\pi a^4 \gamma} \pi a^2 h = \frac{I^2 h}{\pi a^2 \gamma} .$$

$$\beta. \mathcal{P} + \Phi = 0 \text{ cf. cours : } \underbrace{\text{div} \vec{R} + \vec{i} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \right)}_0 = 0 .$$



La puissance consommée est apportée "par rayonnement", si on considère le champ électromagnétique comme cause première du mouvement des charges.

4.a. $\vec{A}(M) = \vec{A}_1(M) + \vec{A}_2(M)$.

α. M extérieur à C_1 et C_2 : $\vec{A}(M) = \left[\frac{-\mu_0 I}{2\pi} \ln r_1 + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_2 \right] \vec{u}_z = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \vec{u}_z$.

Ce qui assure $\vec{A} = \vec{0}$ dans le plan médiateur de $C_1 C_2$ où $r_1 = r_2$.

β. M intérieur à C_1 : $\vec{A}(M) = \left[-\frac{\mu_0 I r_1^2}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_2 + C' \right] \vec{u}_z$.

Pour assurer la continuité de \vec{A} en $r_1 = a$: $C' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a$;

$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[1 - \frac{r_1^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r_2}{a} \right] \vec{u}_z$.

γ. M intérieur à C_2 : on échange le rôle de r_1 et r_2 et I en $-I$:

$\vec{A} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \left[1 - \frac{r_2^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r_1}{a} \right] \vec{u}_z$.

b. $W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{tranche}} \vec{A} \cdot d\vec{\tau} = \frac{1}{2} \iiint_{C_1 \cap \text{tranche}} \vec{A} \cdot d\vec{\tau} + \frac{1}{2} \iiint_{C_2 \cap \text{tranche}} \vec{A} \cdot d\vec{\tau} + \iiint_{\text{extérieur}} 0 d\tau$
car $\vec{i} = 0$

u les rôles équivalents de participation à l'énergie :

$W = \iiint_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{\tau}$ avec $d\tau = r_1 d\theta dr_1 dz$;

$W = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{I}{\pi a^2} \iiint \left[1 - \frac{r_1^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r_2}{a} \right] r_1 dr_1 d\theta dz$ avec $r_2 = \sqrt{r_1^2 + D^2 - 2r_1 D \cos \theta}$;

$W = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi^2 a^2} \left[2\pi \int_0^a \left(1 - \frac{r_1^2}{a^2} \right) r_1 dr_1 + \int_0^a r_1 dr_1 \left[\int_0^{2\pi} 2 \ln \sqrt{r_1^2 + D^2 - 2r_1 D \cos \theta} d\theta - 2\pi \cdot 2 \ln a \right] \right]$;

intégrons en θ et z :

$W = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi^2 a^2} \left[2\pi \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) + 2.2\pi (\ln D - \ln a) \frac{a^2}{2} \right] = \frac{\mu_0 I^2 h}{8\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{D}{a} \right)$;

AN : $W = 4,29 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

5.3.4. Solénoïde

1. Déterminer le champ magnétique \vec{B} en un point de l'axe d'un solénoïde de rayon R , de longueur L , constitué de N spires, parcouru par un courant d'intensité I .

2. En déduire le champ magnétique \vec{B} en un point de l'axe d'un solénoïde infiniment long comportant n spires par unité de longueur et parcouru par le courant I .

Montrer que le solénoïde infiniment long sépare l'espace en deux régions de champ uniforme \vec{B}_1 et \vec{B}_2 . Calculer $\vec{B}_1 - \vec{B}_2$ et interpréter le résultat obtenu.

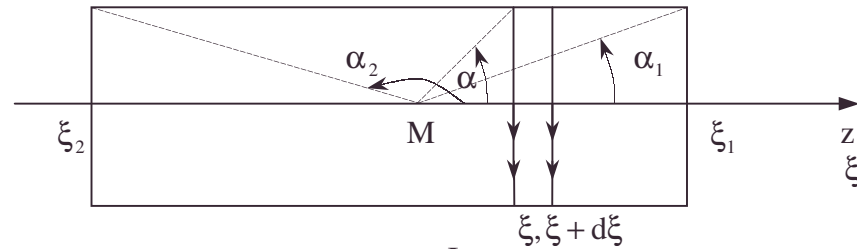
3. Application numérique : on fabrique un solénoïde en enroulant une couche de fil de cuivre sur une forme cylindrique de 3 cm de diamètre ; il y a 5 tours par cm sur une longueur de solénoïde de 1 m. La résistance du fil de cuivre utilisé vaut $10^{-2} \Omega$ par mètre. Calculer le champ à l'intérieur du solénoïde et la puissance dissipée par effet Joule dans celui-ci. Tension d'alimentation $U = 24 \text{ V}$.

4. Calculer le champ magnétique créé par un long barreau métallique cylindrique (longueur supposée infinie) de rayon R , parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti sur toute sa section transverse et circulant parallèlement à son axe. Ecrire l'équation locale du théorème d'Ampère et la définition du potentiel vecteur. En déduire, sans calcul, un potentiel vecteur \vec{A} convenant au cas d'un solénoïde infiniment long.

Autres concours ; Durée : 0h30

Corrigé

1.



Rappel : une spire située en ξ crée en M : $B_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$ soit $B_z > 0$.

Les spires de la tranche $\xi, \xi + d\xi$ constituant une spire épaisse d'intensité dI créent en M

$$dB_z = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \alpha, \text{ avec } dI = I n d\xi = I \frac{N}{L} d\xi.$$

$$\text{Or, } \cotan \alpha = \frac{\xi - z}{R}, \text{ soit } \frac{-d\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{d\xi}{R} \text{ soit } dI = -\frac{IN}{L} R \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$B_z = \int dB_z$; on remarquera que l'intégration de ξ_2 à ξ_1 correspond à l'intégration de

$$\alpha_2 \text{ à } \alpha_1. \quad B_z = \mu_0 \frac{NI}{L} \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{2} \text{ soit } B_z > 0.$$

2.a. $n = \frac{N}{L}$; $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$; $B_z = \mu_0 n I$.

b. Tout plan $z = \text{cte}$ est plan de symétrie : $\vec{B} = \overrightarrow{B_z}$; par symétrie cylindrique \vec{B} ne dépend que de r . Appliquons le théorème d'Ampère à 3 contours C D E F de largeur dr et de longueur h .

<p>1.</p> <p>$B(r)h - B(r + dr)h = 0$; $\frac{dB}{dr} = 0$; B est constant : B_1. cf. a. $B_1 = \mu_0 n I$</p>	<p>2.</p> <p>$B(r)h - B(r + dr)h = 0$; $\frac{dB}{dr} = 0$; B est constant : B_2.</p>	<p>3.</p> <p>$B_1 h - B_2 h = \mu_0 n I h$; Or, $B_1 = \mu_0 n I$; $\Rightarrow B_2 = 0$.</p>
--	---	--

c. $\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 n \vec{I} = \mu_0 \vec{j}_s$ avec une densité de courant surfacique $\vec{j}_s = n \vec{I} \vec{z}$. Or, $n I$ est une intensité par unité de longueur de même unité que \vec{j}_s . On fera l'identification avec les formules de discontinuité de \vec{B}_{tangiel} vu la direction de \vec{B}_1 : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$. On retrouve la formule de discontinuité de B (ou H) tangiel.

3.a. $I = \frac{U}{R}$; $R = r \pi d \cdot n \cdot L$ avec $r = 10^{-2} \Omega \text{ m}^{-1}$; $B = \frac{\mu_0 U}{\pi d L r}$; A.N. : $B = 32 \cdot 10^{-3} \text{ T}$.

b. $P = R I^2 = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{\pi d n L r}$; A.N. : $P = 1,222 \text{ kW}$.

4. Par raison de symétrie dans la répartition des courants $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle Γ de rayon r concentrique au barreau :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\ell = \oint_{\Gamma} B d\ell = 2\pi r B_\theta = \mu_0 I_\Sigma.$$

a. $r \leq R$ $I_\Sigma = j \pi r^2 \Rightarrow B_\theta = \mu_0 \frac{j r}{2}$; or, $I = j \pi R^2 \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi R^2}$.

b. $r \geq R$ $I_\Sigma = I \Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2 \pi r} = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r}$; $B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$.

c. $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

d. $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$.

e. La comparaison des équations c. et d. permet l'analogie à tiroirs pour le barreau et pour le solénoïde (de mêmes symétries)

$$\begin{array}{ccc} \mu_0 \vec{j} & \longrightarrow & \vec{B} \\ \vec{B} & \longleftarrow & \vec{A} \text{ cherché} \end{array}$$

On remplacera $\mu_0 j$ par $B = \mu_0 n I$ dans l'expression de \vec{B} du barreau et \vec{B} par \vec{A} .

$$\begin{array}{ccc} \vec{B} = \mu_0 \frac{j r}{2} \vec{e}_\theta & \text{et} & \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r} \vec{e}_\theta \\ \text{pour obtenir :} & & \vec{A} = \mu_0 \frac{n I}{2} r \vec{e}_\theta & \text{et} & \vec{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2 r} \vec{e}_\theta \\ r \leq R & & r \geq R & & r \leq R & & r \geq R \end{array}$$

5.3.5. Lévitaiton

A. Le dispositif étudié comporte une bobine A et un anneau T, conducteurs horizontaux, de même axe vertical Oz, d'épaisseur négligeable, de rayons respectifs a et b , tels que $b \ll a$. La bobine A est constituée de N spires identiques. L'anneau T est un tore métallique de section circulaire, de masse m . La bobine A est fixe, et centrée en O ; elle est reliée à un générateur de courant électrique, délivrant le courant i_1 . L'anneau T est parcouru par le courant induit i_2 .

On appelle M le coefficient d'induction mutuelle entre la bobine et l'anneau, et L le coefficient d'auto-induction de l'anneau.

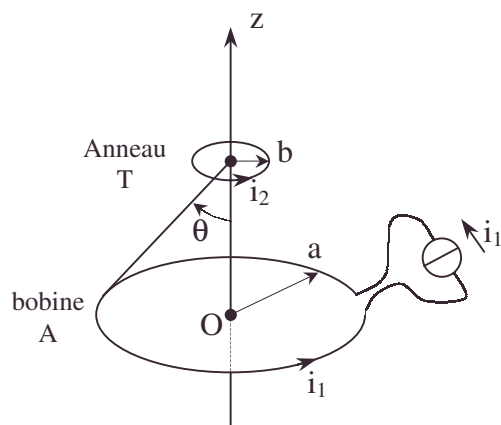


Figure 2

• Ampère [théorème d'], analogie, bobine [self], coefficient d'auto-induction, coefficient d'inductance mutuelle, discontinuité du champ magnétique tangiel, effet Joule, générateur de courant, identification, symétrie, tore

Le point P appartient à l'axe Oz ; on appelle θ le demi angle au sommet du cône de sommet P, s'appuyant sur le contour de la bobine A (Figure 2).

1. Calculer le champ magnétique B créé par la bobine le long de l'axe Oz, en fonction de θ , puis de z.

2.a. Au voisinage de l'axe Oz, déterminer, par application de la conservation du flux magnétique à travers un petit cylindre d'axe Oz et de rayon r, la composante radiale B_r du champ magnétique.

b. Pour simplifier notations et calculs, on pose $2\alpha = 2\beta i_1 = \frac{\partial B}{\partial z}$. Exprimer α en

fonction de θ , puis la composante radiale B_r de \vec{B} en fonction de α et de r.

3.a. Calculer le coefficient d'auto-induction L de l'anneau T. On admettra que les caractéristiques géométriques du tore sont telles que l'on peut calculer le flux magnétique, comme si le champ sur la surface du disque était uniforme et égal à sa valeur au centre de l'anneau.

b. Application numérique : calculer L lorsque $b = 1$ cm.

c. Exprimer le coefficient d'induction mutuelle M, puis le quotient $\frac{M}{L}$ en fonction

de N, a, b et θ .

4.a. L'anneau T, d'axe vertical, est positionné à la cote z.

Calculer la force de Laplace \vec{F} exercée sur l'anneau, en fonction de α , b, i_2 et \vec{k} .

b. A quelle condition le petit anneau T peut-il léviter au-dessus de la bobine ?

B. Le courant i_1 délivré par le générateur varie sinusoïdalement en fonction du temps t. Il est égal à $I_0 \cos \omega t$. L'anneau T possède la résistance R.

1. En régime d'oscillations forcées, déterminer le courant i_2 qui traverse l'anneau T en fonction de M, L, R et t. Il est égal à $A \cos(\omega t + \varphi)$.

Le déphasage entre i_1 et i_2 étant égal à φ , exprimer $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$.

Dans toute la suite de la partie **B.**, on règle ω de façon à vérifier la relation $L\omega = R$.

2. Exprimer la valeur moyenne dans le temps du produit $i_1 i_2$, puis la force moyenne exercée sur l'anneau T, en fonction de β , I_0 , b, R, L, M et ω .

3. Déterminer la condition d'équilibre de l'anneau T horizontal, et centré sur Oz.

4. Déterminer la valeur maximale de F. Tracer rapidement le graphe représentant la force totale agissant sur l'anneau T en fonction de z.

Combien y-a-t-il de positions d'équilibre possibles ?

5. Comment réaliser l'expérience de lévitation ?

Quelle est la position d'équilibre finale ?

6.a. Déterminer la valeur minimale I_m à donner à I_0 pour obtenir la lévitation.

b. Application numérique

Calculer la valeur de I_m lorsque $m = 2$ g, $N = 100$ et $a = 10$ cm.

Calculer la valeur efficace de i_2 qui lui est associée.

Que se passe-t-il en pratique ?

Calculer la valeur numérique de B au voisinage de l'anneau.

c. Que se passe-t-il si l'anneau T s'incline d'un petit angle par rapport à l'axe Oz ?

C. Utilisation d'un anneau supraconducteur : la résistance de l'anneau est alors nulle. On opère en courant continu.

Dans l'état initial les courants i_1 et i_2 sont tous deux nuls.

Dans l'état final le courant i_1 est constant et égal à I_0 .

1. Exprimer la valeur du courant induit dans l'anneau, en fonction de M, L et i_1 .

• bobine, coefficient d'auto induction, coefficient d'inductance [self], coefficient d'inductance mutuelle, confrontation expérimentale, conservation du flux magnétique, développement au premier ordre ou plus, équilibre, force de Laplace, graphe, maximum, minimum, moment magnétique, supraconductivité, valeur moyenne, valeurs efficaces

2. Calculer la force totale appliquée à l'anneau et tracer son graphe.
Au voisinage de quel point se produit l'équilibre ?
- 3.a. indiquer sur un schéma les orientations du champ et du moment magnétique de T lorsque I_0 est positif.
- b. Quelle est la difficulté qui se présente lors de la réalisation de l'expérience ?
Pour pallier ce défaut, on superpose un champ magnétique \vec{B}_e uniforme, parallèle à l'axe Oz, au champ créé par la bobine A.
Comment créer un champ uniforme ?
Comment établir le champ uniforme sans modifier le courant i_2 dans l'anneau ?
Quel sens doit-on donner au champ \vec{B}_e ?

II. Oscillations mécaniques de l'anneau

D. On désire étudier le comportement de l'anneau T au voisinage de sa position d'équilibre (point C sur la figure 3). Le champ magnétique en C, créé par la bobine A, est égal à \vec{B}_0 .

Le centre de l'anneau T est son centre d'inertie G.
Le point N, proche de C, est repéré par ses coordonnées cylindriques (z, r) . Les coordonnées cartésiennes du point G sont (x_0, y_0, z_0) . Dans cette partie, l'anneau T reste supraconducteur.

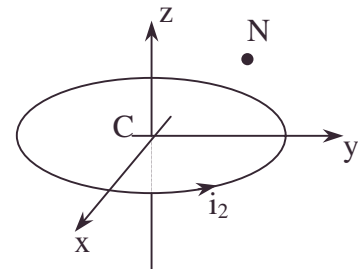


Figure 3

1. Exprimer le champ magnétique au point N, en fonction de $\vec{B}_0, \alpha, \vec{CN}$ et \vec{r} .
Lorsque le champ B_e est nul, on démontre les résultats suivants, vérifiés au premier ordre en Z_0 : Courant i_2 :
$$i_2 = \frac{-\pi b^2 (B_0 + 2\alpha z_0)}{L}.$$
 Force de Laplace :
$$\vec{F}_L = 2\alpha \pi b^2 i_2 \vec{k}.$$

2. L'anneau T peut se déplacer le long de l'axe Oz, en restant horizontal. Exprimer la période des petites oscillations de l'anneau autour de la position d'équilibre, en fonction de α, m, L et S .

Concours MT ; Durée 2 h.

Corrigé

$$1. \vec{B} = \frac{\mu_0 N i_1}{4\pi} \int d\vec{\ell}_1 \wedge \frac{\vec{u}_1}{r^2} = \frac{\mu_0 N i_1}{4\pi} \frac{\sin^3 \theta}{a^2} \int d\vec{\ell}_1 \vec{z} = \frac{\mu_0 N i_1}{2a} \sin^3 \theta \vec{u}.$$

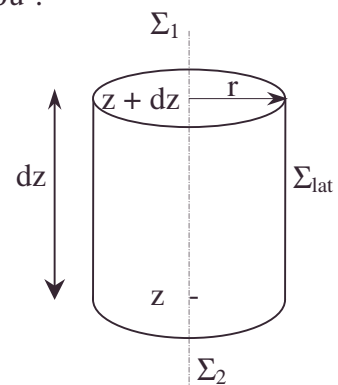
$$B_z = \frac{\mu_0 N i_1}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2.a. • En négligeant les termes en r^2 , $B_z(r, z) = B_z(0, z)$ car la fonction étant paire en r , son terme en r a un coefficient nul.

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{B} d\vec{S} = - \iint_{\Sigma_2} B_z dS = -\pi r^2 B_z(0, z);$$

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{B} d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} B_z dS = \pi r^2 B_z(0, z + dz);$$

$$\iint_{\Sigma_{lat}} \vec{B} d\vec{S} = \int B_r dS = 2\pi r dz B_r(r, z); \text{ la conservation du flux donne :}$$



• Biot et Savart [formule du calcul d'un champ magnétique], bobine, confrontation expérimentale, conservation du flux magnétique, développement au premier ordre ou plus, force de Laplace, moment magnétique, stabilité

$$\iint_{\Sigma_{\text{latns}}} \vec{B} d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{2\text{ns}}} \vec{B} d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{\text{latns}}} \vec{B} d\vec{S} = 0 \text{ soit } B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} = \frac{3}{4} \mu_0 N i_1 \frac{a^2 r z}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\mathbf{b.} \alpha = \beta i_1 = -\frac{3}{4} \mu_0 N i_1 \frac{a^2 z}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{4} \mu_0 \frac{N i_1}{a^2} \cos \theta \sin^4 \theta ; B_r = -r \alpha.$$

$$\mathbf{3.a.} \phi_{\text{propre}} = L i_2 = \pi b^2 \cdot B_{\text{centre propre}}, \text{ or } B_{\text{centre propre}} = \frac{\mu_0 i_2}{2b} \text{ (cf. C.1.)}, \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \pi b}{2}.$$

$$\mathbf{b.} \text{AN : } L = 1,97 \cdot 10^{-8} \text{ H.}$$

$$\mathbf{c.} \phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 = \pi b^2 B_{\text{centre du } i_1} = \pi b^2 \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi a} \sin^3 \theta.$$

$$M = \frac{\mu_0 N \pi b^2}{2a} \sin^3 \theta ; \frac{M}{L} = \frac{Nb}{a} \sin^3 \theta.$$

$$\mathbf{4.a.} \vec{F} = i_2 \int d\vec{\ell}_2 \wedge (\vec{B}_z(0, z) + \vec{B}_r(b, z)) = i_2 \underbrace{\left[\int d\vec{\ell}_2 \right]}_0 \wedge \vec{B}_z(0, z) - i_2 B_r(b, z) 2\pi b \vec{k}.$$

$$\vec{F} = 2\pi b^2 \alpha i_2 \vec{k}.$$

b. La force de Laplace doit compenser le poids : $2\pi b^2 \alpha i_2 > mg$; et il faut en particulier $\alpha i_2 > 0$ ou $i_1 i_2 < 0$.

B.1. Ecrivons la loi d'Ohm dans T orienté :

$$e_2 = -L \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R i_2 ; R i_2 + L \frac{di_2}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

En notation complexe : $i_1 = I_0 e^{j\omega t}$; $i_2 = I_2 e^{j\omega t} = |I_2| e^{j\varphi} e^{j\omega t} = |I_2| (\cos \varphi + j \sin \varphi) e^{j\omega t}.$

$$\bullet I_2 (R + jL\omega) = -jM\omega I_0 \Rightarrow |I_2| = \frac{M\omega I_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \text{ et}$$

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \frac{-jM\omega \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}{(R + jL\omega) M\omega} = -j \frac{(R - jL\omega)}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} - \frac{jR}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}.$$

$$\cos \varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} ; \sin \varphi = \frac{-R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} ;$$

$$\text{si } R = L\omega ; \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \text{ soit } \varphi = -\frac{3\pi}{4}.$$

2.a. En notation réelle : sachant $R = L\omega$.

$$i_1 i_2 = \frac{M\omega I_0^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{M\omega I_0^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} (\cos \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi).$$

$$\langle i_1, i_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{M\omega I_0^2}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \varphi = -\frac{1}{2} \frac{M\omega I_0^2}{R^2 + L^2 \omega^2} L\omega = -\frac{1}{4} \frac{M\omega}{L\omega} I_0^2 = -\frac{1}{4} I_0^2 \frac{Nb}{a} \sin^3 \theta.$$

$$\mathbf{b.} \langle F_z \rangle = 2\pi b^2 \beta \langle i_1 i_2 \rangle = -\frac{\pi b^2 \beta}{2a} I_0^2 N b \sin^3 \theta = \frac{3}{8} \frac{b^3}{a^3} \mu_0 N^2 I_0^2 \cos \theta \sin^7 \theta$$

$$\text{car } \beta = -\frac{3}{4} \frac{N}{a^2} \mu_0 \cos \theta \sin^4 \theta$$

$$\langle F_z \rangle = \frac{3}{8} \left(\frac{b}{a} \right)^3 \mu_0 N^2 I_0^2 \frac{\pi^2 a^7 z}{(a^2 + z^2)^4} = \frac{3}{8} \pi b^3 a^4 \mu_0 N^2 I_0^2 \frac{z}{(a^2 + z^2)^4}.$$

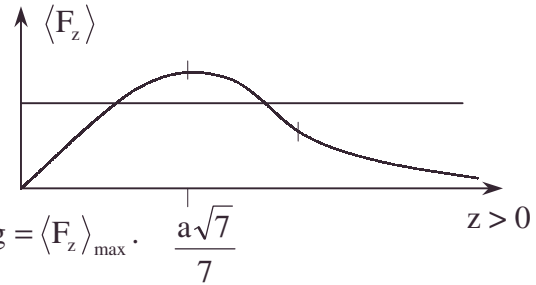
3. $\langle F_z \rangle - mg = 0$; la position d'équilibre (stable ou instable) z_e satisfait :

$$mg = \frac{3}{8} \pi b^3 a^4 \mu_0 N^2 I_0^2 \frac{z_e}{(a^2 + z_e^2)^4} \Rightarrow z_e > 0.$$

4.a. $\frac{d}{dz} \langle F_z \rangle = \frac{3}{8} \pi b^3 a^4 \mu_0 \left(\frac{a^2 - 7z^2}{(a^2 + z^2)^5} \right) N^2 I_0^2 \pi$; $\frac{d\langle F_z \rangle}{dz} = 0$ pour $z_m = (\pm) \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

$$\langle F_z \rangle_{\max} = \frac{3\pi}{7\sqrt{7}} \frac{b^3}{a^3} \mu_0 N^2 I_0^2 \left(\frac{7}{8} \right)^5.$$

b. AN : $\frac{a\sqrt{7}}{7} = 0,38a$.



Vu le graphe :

$\langle F_z \rangle = mg$ admet une solution unique pour $mg = \langle F_z \rangle_{\max}$.

$\langle F_z \rangle = mg$ a deux solutions pour $mg < \langle F_z \rangle_{\max}$.

$\langle F_z \rangle = mg$ a 0 solution pour $mg > \langle F_z \rangle_{\max}$.

5.a. L'équilibre est stable pour $\frac{\partial \langle F_z \rangle}{\partial z} < 0$ (cf. oscillations d'un ressort), c'est-à-dire

aussi $\frac{\partial^2 U_p}{\partial z^2} > 0$, soit à droite du maximum de la courbe précédente.

b. Imposons une position initiale $z_0 > \frac{a\sqrt{7}}{7}$ par un support.

Si $z_0 > z_{\text{équilibre}}$, augmentons I_0^2 pour augmenter $\langle F_z \rangle$ jusqu'à mg .

Une cause fortuite (par ex. un courant d'air) verticale de faible ampleur entraînera des oscillations autour de la position d'équilibre stable.

c. Si $z_0 < \frac{a\sqrt{7}}{7}$, supposons avoir trouvé z_{ei} où $\langle F_z \rangle = mg$.

- Un aléas entraînant $dz > 0$ entraîne l'augmentation de $\langle F_z \rangle$ et une augmentation de z jusqu'à $z = \frac{a\sqrt{7}}{7}$; de cette situation, on peut passer à droite ou à gauche, on en connaît l'étude à répéter si on passe à droite du maximum.

- Un aléas entraînant $dz < 0$ entraîne la diminution de $\langle F_z \rangle$ et une diminution de z jusqu'à $z = 0$ et plus loin encore.

6.a. Pour mg et z_e donnés, $I_0^2 = \frac{8mg}{3b^3 a^4 \mu_0 N^2 \pi} \frac{(a^2 + z_e^2)^4}{z_e}$ cf. 3..

La valeur minimale de I_0^2 quand on fait varier z_e est pour $z_e = \frac{a\sqrt{7}}{7}$,

$$I_m = \left[\left(\frac{a}{b} \right)^3 \frac{mg}{3\pi \mu_0 N^2} \left(\frac{8}{7} \right)^5 7\sqrt{7} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

b. AN : $I_m = 78,09 \text{ A}$.

• équilibre, graphe, minimum, stabilité

cf **B.1.** :

$$I_{2e} = \omega \frac{MI_m}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{\cancel{\omega}MI_m}{2L\cancel{\omega}} = \frac{Nb}{2a} \sin^3 \theta_m I_m = \frac{Nba^3}{2a(a^2 + z_m^2)^{\frac{3}{2}}} I_m = \frac{Nb}{2a\left(1 + \frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}}} I_m.$$

car $z_m^2 = \frac{a^2}{7}$; AN : $I_{2e} = 153,33 \text{ A}$.

L'effet Joule est très intense et peut faire fondre 2 g de métal.

$$|B_{z_m}| = \frac{\mu_0 N I_m}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z_m^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ (cf A.1.) ; A.N. : } |B_{z_m}| = 40,16 \text{ mT}.$$

b.c. Si l'anneau s'incline d'un petit angle, le flux diminue mais la loi du flux maximum explique la création d'un couple de rappel, gage de stabilité.

C.1. La loi de Pouillet s'écrit $e = 0$ soit $-L \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0$.

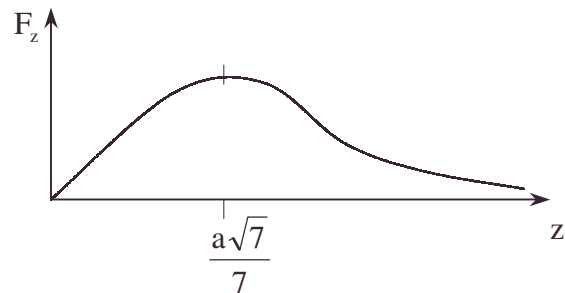
$$L i_2 + M i_1 = \text{cste} = 0 \text{ (vu } t = 0) \Rightarrow i_2 = -\frac{M i_1}{L} = -\frac{M I_0}{L}.$$

$$2. F_z = \pi b^2 i_2 \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{M}{L} I_0^2 \pi b^2 \frac{3}{2} \frac{\mu_0 N a^2 z}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{Nb}{a} \sin^3 \theta I_0 \pi b^2 \cdot \frac{3}{2} \frac{\mu_0 N a^2 z}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

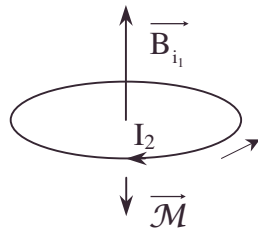
$F_z = \frac{3\pi}{2} \mu_0 N^2 I_0^2 a^4 \frac{b^3 z}{(a^2 + z^2)^4} = 4 \langle F_z \rangle$ (du **B.**) mais les notations sont indépendantes physiquement.

L'équilibre stable a lieu pour :

$$z > \frac{a\sqrt{7}}{7} \text{ pour } mg = F_z.$$



3.a.



b. $\vec{M} \cdot \vec{B}_{i1} < 0$ va entraîner un mouvement de rotation afin de faire diminuer l'énergie : $W = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

• On peut créer un champ uniforme par 2 bobines d'Helmholtz ou par un aimant en U. Rappelons qu'un champ uniforme ne crée pas de force sur T.

• Il suffit de créer B_e avant l'obtention de la supraconductivité.

• \vec{B}_e (en fait, $\vec{B}_e + \vec{B}_{i1}$) doit être de même sens que \vec{M} .

D.1. Développons $\vec{B}(N)$ au voisinage de $\vec{B}(C)$.

$$\vec{B}(N) = \vec{B}_0 + (z - z_0) \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right)_C + B_r \vec{u}_r = \vec{B}_0 + 2\alpha (\vec{CN} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{z} - \alpha r \vec{r} ; \text{ or } \vec{CN} = \vec{r} + (\vec{CN} \cdot \vec{z}) \vec{z}$$

• couple de rappel, développement au premier ordre ou plus, effet Joule, équilibre, flux maximum [loi du], graphe, Helmholtz, moment magnétique, Pouillet [loi de], stabilité, supraconductivité

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{z}) \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{r} \text{ . De plus } B_r = -\frac{r}{2} \cdot 2\alpha \text{ vu 2.}$$

$$\overrightarrow{B}(N) = \overrightarrow{B}_0 + 2\alpha \overrightarrow{CN} - 3\alpha \overrightarrow{r} \text{ .}$$

$$2. \ m \ddot{z}_0 = -mg + 2\alpha \pi b^2 i_2 = -mg - 2\alpha \pi^2 \frac{b^4}{L} (B_0 + 2\alpha z_0) \text{ .}$$

$$\text{L'équilibre est pour } \ddot{z}_0 = 0 \text{ , donc } z_{0e} = \frac{mg + 2\alpha \pi^2 b^4 \frac{B_0}{L}}{4 \frac{\alpha^2 \pi^2 b^4}{L}} \text{ .}$$

$$\text{Posons } z_1 = z_0 - z_{0e} \text{ . Donc : } z_1 + \frac{4\alpha^2 \pi^2 b^4}{Lm} z_1 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\alpha^2 \pi^2 b^4}{mL} \text{ .}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{mL}{\alpha^2 b^4}} = \frac{\sqrt{mL}}{\alpha b^2}$$

5.3.6. Le dipôle magnétique terrestre et l'aiguille aimantée

A. Dans un atome, un électron de charge $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ décrit autour du noyau une orbite circulaire de rayon $a = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, à raison de $n = 6,57 \cdot 10^{15}$ révolutions par seconde. La perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

1.a. Donner l'expression littérale et la valeur numérique du moment magnétique μ de cet atome.

b. Représenter sur un schéma le sens de déplacement de l'électron sur son orbite et l'orientation du vecteur moment magnétique.

2. Une aiguille aimantée de boussole comprend $0,125 \cdot 10^{23}$ atomes identiques à celui décrit ci-dessus ; tous les moments magnétiques de ces atomes sont orientés dans la même direction selon la grande dimension de l'aiguille.

Quel est le moment magnétique \mathcal{M} de cette aiguille aimantée ?

B. Cette aiguille aimantée est suspendue librement en son centre de gravité pour permettre d'étudier le champ magnétique terrestre.

On fait l'hypothèse que l'induction magnétique à la surface de la terre peut être représentée par celle d'un dipôle magnétique \mathcal{M}' situé au centre de la terre. On admettra que l'axe des pôles géomagnétiques est confondu avec celui des pôles géographiques et que la terre est une sphère de 6371 km de rayon.

3.a. Indiquer l'orientation nord-sud (n-s) du dipôle \mathcal{M}' par rapport à l'orientation Nord-Sud (N-S) des pôles géomagnétiques.

b. Dans cette hypothèse, quelle est la relation entre la latitude géographique d'un lieu et l'inclinaison magnétique en ce lieu ?

c. En janvier 2000, à Grenoble, la composante horizontale de l'induction magnétique terrestre était $B_h = 0,214 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ et l'inclinaison $i = 61^\circ 28'$. Quelle était, dans ces conditions, l'amplitude du moment magnétique \mathcal{M}' du dipôle équivalent ?

4. Quelle était, à Grenoble en janvier 2000, la période des petites oscillations de cette aiguille aimantée dans le plan méridien autour de sa position d'équilibre, sachant que son moment d'inertie J est de $1,2 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$.

• *aiguille aimantée [voir milieux magnétiques], boussole, dipôle magnétique, équilibre, inclinaison magnétique, moment d'inertie, moment magnétique, P.F.D., pôles géomagnétiques, stabilité*

5. On se propose de critiquer l'hypothèse qui a consisté à admettre que l'induction magnétique terrestre était due à une couche l'électricité statique de densité uniforme à la surface de la terre, dont l'entraînement par la rotation de la terre créerait une nappe de courant électrique.

a. Indiquer quel devrait être le signe de cette électricité.

b. Calculer la valeur de la densité superficielle de charge nécessaire pour obtenir un moment magnétique égal à \mathcal{M}' .

c. Calculer les amplitudes du champ électrique, du potentiel et de la pression électrostatique qui existeraient à la surface de la terre.

d. L'hypothèse précédente vous paraît-elle acceptable ?

CCP ; Durée : 0h30.

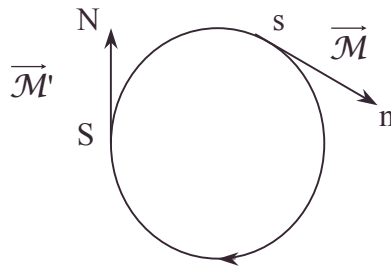
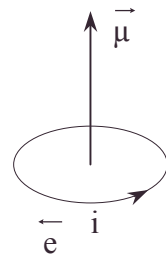
Corrigé

A.1.a. $\mu = si = ne\pi a^2$; A.N. : $\mu = 9,25 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$.

b. voir figure.

2. $\mathcal{M} = N\mu = nNe\pi a^2$; A.N. : $\mathcal{M} = 1,15 \cdot 10^{-1} \text{ A.m}^2$.

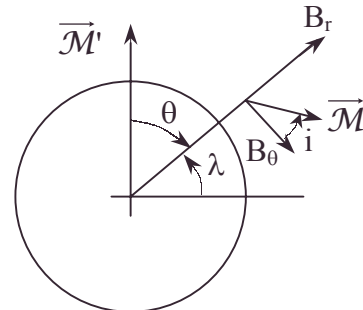
B.3.a. L'aiguille $\vec{\mathcal{M}}$ indique le nord :



b. Dans l'hémisphère sud :

$$\vec{B}_{\mathcal{M}'} \begin{cases} \frac{2\mathcal{M}' \sin \lambda}{4\pi r^3} \\ \frac{\mu_0 \mathcal{M}' \cos \lambda}{4\pi r^3} \end{cases} ;$$

$$\vec{\mathcal{M}} // \vec{B}_{\mathcal{M}'} \Rightarrow \tan i = \frac{B_r}{B_\theta} \Rightarrow \frac{1}{2} \tan i = \tan \lambda .$$



Quand $\lambda < 0$ dans l'hémisphère nord, on a $i < 0$.

c. $B_\theta = \frac{\mathcal{M}' \mu_0}{4\pi r^3} \cos \lambda = B_h \Rightarrow \mathcal{M}' = \frac{B_h 4\pi r^3}{\mu \cos \lambda}$ or $\frac{1}{\cos \lambda} = \sqrt{1 + \tan^2 \lambda} = \sqrt{1 + \frac{\tan^2 i}{4}}$.

$$\mathcal{M}' = \frac{B_h 4\pi r^3}{\mu} \sqrt{1 + \frac{\tan^2 i}{4}} ; \text{ A.N. : } \mathcal{M}' = 7,5 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2$$

4. Dans le plan méridien, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$J\ddot{\alpha} = -B\mathcal{M} \sin \alpha \quad \text{et en linéarisant } \sin \alpha,$$

$$J\ddot{\alpha} = -\frac{B_\theta}{\cos i} \mathcal{M} \alpha \Rightarrow \omega^2 = \frac{B_h \mathcal{M}}{J \cos i} \quad \text{or } T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J \cos i}{\mathcal{M} B_h}} ; \text{ A.N. : } T = 0,956 \text{ s} .$$

• champ magnétique créé par un dipôle magnétique, développement au premier ordre ou plus, moment magnétique, pression électrostatique, théorème du moment cinétique, unité

5.a.b. Sur la sphère terrestre :

$$di = \frac{\sigma dS}{T} = \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{T}$$

$$d\mathcal{M}' = S di = \pi R^2 \sin^2 \theta \frac{\sigma}{T} dS = \frac{\sigma}{T} 2\pi^2 R^4 \sin^3 \theta d\theta$$

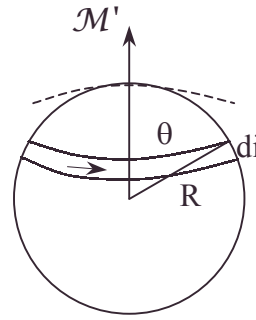
$$\Rightarrow \mathcal{M}' = \frac{2\pi^2 R^4 \sigma}{T} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \sigma \frac{8\pi^2}{3T} R^4$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\mathcal{M}' 3T}{8\pi^2 R^4}; \text{ A.N.: } \sigma = 0,149 \text{ C/m}^2; \sigma > 0.$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \text{ A.N.: } E = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ Vm}^{-1}; V = \frac{Q}{4\pi R \epsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi R \epsilon_0} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}; \text{ A.N.: } V = 1 \cdot 10^{17} \text{ V}.$$

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}; \text{ A.N.: } p = 1,3 \cdot 10^9 \text{ Pa}. \text{ Il n'y a pas de vérification de cette pression, supérieure à } 1 \text{ bar};$$

l'hypothèse est donc inacceptable (la vérification "facile" n'est pas faite).



5.3.7. Champ magnétique terrestre

Ce problème constitue une modélisation simplifiée des phénomènes se produisant dans la région de l'atmosphère appelée plasmasphère. Cette région, située au-dessus de 100 km d'altitude, et s'étendant jusqu'à environ 6 rayons terrestres, est peuplée d'ions d'origine solaire, principalement des protons et des électrons, "piégés" par le champ magnétique terrestre et constituant les fameuses ceintures de Van Allen découvertes à l'époque des premiers satellites artificiels.

Le problème comporte 5 parties :

- calcul du champ magnétique d'un dipôle,
- étude du champ magnétique terrestre dans l'approximation dipolaire,
- étude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme,
- étude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique non uniforme,
- étude du mouvement des particules des ceintures de Van Allen.

On désigne dans tout ce problème le temps par la lettre t et la dérivée n ème d'une variable par le rapport à t sera représentée par n points au-dessus de la variable.

I. Champ magnétique d'un dipôle

On considère un dipôle magnétique placé à l'origine O d'un repère galiléen \mathcal{R} $Oxyz$ et de moment dipolaire $\vec{\mathcal{M}}$ parallèle à l'axe Oz . On se place dans tout ce paragraphe à une distance r grande devant les dimensions du dipôle. On étudie les phénomènes en coordonnées sphériques (r, θ, φ) (Figure 1).

1. On peut toujours représenter le dipôle par une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité i . Rappeler la relation entre i , R et le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$.

La représentation du dipôle est-elle unique ?

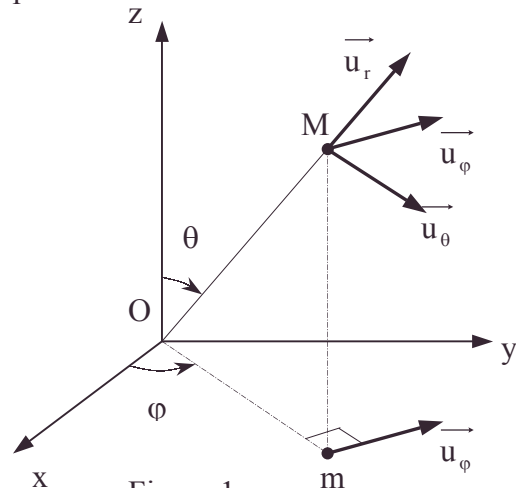


Figure 1

- ceintures de Van Allen, champ magnétique créé par un dipôle magnétique, dipôle, dipôle électrostatique, dipôle magnétique, expression intrinsèque du champ magnétique d'un dipôle magnétique, pression électrostatique

2. Donner le potentiel-vecteur \vec{A} du dipôle en fonction de μ_0 , \vec{M} et \vec{r} .

3. En déduire le champ magnétique \vec{B} du dipôle en coordonnées sphériques. On donne :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r \vec{u}_\theta & r \sin \theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & r V_\theta & r \sin \theta V_\varphi \end{vmatrix}; \text{montrer qu'il se met sous la forme vectorielle :}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{M})\vec{r} - r^2 \vec{M}}{r^5}, \text{ indépendante du système de coordonnées.}$$

4. Donner l'équation différentielle des lignes de champ et la résoudre en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Montrer qu'elle est de la forme $r = r_e \sin^2 \theta$, où r_e est une constante dont on donnera la signification géométrique. On appellera par la suite cette constante distance équatoriale de la ligne de champ.

5. Représenter graphiquement l'allure des lignes de champ pour : $r_e = 1,5$; $r_e = 3$; $r_e = 5$ quand l'unité de longueur est $R = 6378$ km.

6. Déterminer la variation de l'intensité du champ magnétique en fonction de θ le long d'une ligne de champ. Représenter graphiquement la fonction $f(\theta) = \frac{4\pi r_e^3 B(\theta)}{\mu_0 \mathcal{M}}$.

Cette fonction est-elle partout physiquement satisfaisante ? Justifier votre réponse.

II. Champ magnétique de la Terre

La Terre possède un champ magnétique intrinsèque, appelé champ géomagnétique, provenant du mouvement de particules chargées dans son noyau fluide. En première approximation, ce champ est celui d'un dipôle placé au centre O de la Terre, de moment dipolaire tel que $\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} = 8,3 \cdot 10^{15} \text{ T} \cdot \text{m}^3$,

présentant une inclinaison $\alpha = 11^\circ$ par rapport à l'axe de rotation terrestre. Son axe sud-nord, appelé axe géomagnétique, est inversé par rapport à l'axe géographique sud-nord. Le grand cercle de la surface terrestre de centre O et perpendiculaire à l'axe géomagnétique est appelé "équateur géomagnétique".

On appelle R le rayon de la Terre, supposée de forme sphérique. Un point M à la surface terrestre ou dans l'espace est repéré par sa latitude géomagnétique Φ , égale à l'angle formé entre le plan de l'équateur géomagnétique et le vecteur \vec{OM} (figure 2).

1. Déterminer à la surface de la Terre l'intensité B du champ géomagnétique et son inclinaison $I = (\vec{B}, \vec{u}_\theta)$ par rapport à l'horizontale en fonction de Φ . Donner l'expression numérique de B sachant que $R = 6378$ km. Représenter graphiquement les fonctions $B(\Phi)$ et $I(\Phi)$. Où l'intensité du champ est-elle maximale ?

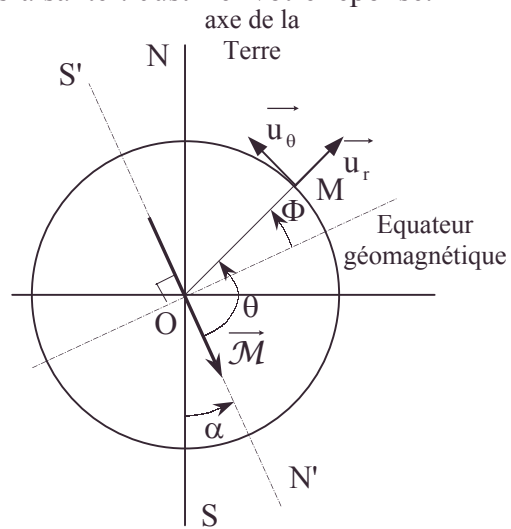


Figure 2

• axe géomagnétique, boussole, champ géomagnétique, confrontation expérimentale, dipôle magnétique, distance équatoriale de la ligne de champ magnétique terrestre, équateur géomagnétique, graphe, inclinaison magnétique

2. On dit fréquemment qu'une boussole s'approchant d'un des deux pôles géomagnétique (points à la surface terrestre où $\Phi = \pm 90^\circ$ devient "folle". Pouvez-vous justifier ceci ?

3. Pour Paris, on peut adopter la valeur $\Phi = 52^\circ$. Donner les valeurs numériques théoriques de B et de I et le sens du champ géomagnétique à Paris. Les valeurs expérimentales sont $B = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ et $I = -64,5^\circ$. Conclusion.

4. On étudie maintenant le champ géomagnétique dans l'espace. Pour une ligne de champ de distance équatoriale r_e , on définit le paramètre de McIlwain : $L = \frac{r_e}{R}$.

Donner l'expression numérique de B sur une ligne de champ en fonction de L et de Φ . En déduire les deux latitudes $\pm \Phi_m$ où la ligne de champ traverse la surface terrestre. Que vaut l'inclinaison I en ces deux points ?

5. Le rayon de courbure en un point M d'une courbe plane d'équation $r = f(\Phi)$ est

$$\text{donné par l'expression } r_c = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\Phi} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\Phi} \right)^2 - r \left(\frac{d^2r}{d\Phi^2} \right)}.$$

Déterminer le rayon de courbure à l'équateur géomagnétique d'une ligne de champ en fonction de L et de R .

6. Représenter graphiquement dans un plan méridien (passant par les pôles géomagnétiques) les lignes de champ correspondant à $L = 1,5 ; 3 ; 5$ à l'extérieur de la Terre et donner les valeurs numériques de Φ_m et de I pour chacune de ces lignes.

III. Particule dans un champ magnétique uniforme

Une particule de masse m et de charge électrique q se déplace à la vitesse \vec{v}_0 dans un certain repère galiléen R . A partir de l'instant $t = 0$, on crée un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} . On suppose que la particule n'est soumise qu'à la force de Lorentz.

1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz. Cette expression est-elle compatible avec les formules de changement de repère galiléen de la mécanique classique ?

Dans quel cadre plus général devraient être rigoureusement traités les problèmes d'électrodynamique ?

2. On définit un trièdre $Oxyz$ fixe dans R tel que Ox soit colinéaire à \vec{B} , que \vec{v}_0 soit orthogonal à Ox et que la particule se trouve sur Ox à l'instant initial. On appelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base cartésienne de ce trièdre.

On pose de plus afin de simplifier les calculs qui vont suivre,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}, x(t=0) = x_0, y(t=0) = y_0, z(t=0) = z_0, \theta_0 = (\vec{B}, \vec{v}_0).$$

Peut-on choisir la valeur de x_0 comme on veut ?

3. Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le trièdre 0xyz et le projeter sur les trois axes. On appelle ω la constante $\frac{qB}{m}$. Montrer que la trajectoire de la

$$\text{particule est solution du système différentiel : } \begin{cases} \ddot{x} - \omega \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \omega \dot{x} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

4. On résout les deux premières équations de ce système en introduisant la fonction complexe $Z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$. Quelle équation différentielle vérifie Z ? Quelles sont les conditions initiales sur Z ? En déduire la fonction $Z(t)$.

5. Montrer que la projection de la trajectoire de la particule dans le plan Oxy est un cercle. Donner la valeur de sa période de rotation τ et de son rayon ρ , qu'on appellera rayon de giration, en fonction de ω , θ_0 et v_0 . Quelle valeur sonner à x_0 pour que le centre de ce cercle soit le point O? On adopte cette valeur pour la suite du III.

6. Déterminer la trajectoire de la particule dans l'espace. Justifier le terme de mouvement hélicoïdal.

Donner la valeur du pas p de l'hélice (distance parcourue le long de z pendant une période de rotation) en fonction de ω , θ_0 et v_0 . On dit que la particule s'enroule autour de la ligne de champ passant par O. Justifier cette expression.

7. Calculer l'énergie cinétique E_c de la particule. Dépend-elle du champ magnétique? Était-ce prévisible?

8. Montrer que le vecteur $\vec{A} = B \cdot x \cdot \vec{j}$ peut être considéré comme le potentiel vecteur du champ magnétique.

9. On appelle invariant adiabatique l'intégrale $S = \oint_{\Gamma} (m\vec{v} + q\vec{A}) \cdot d\vec{\ell}$ le contour Γ représentant la projection de la trajectoire de la particule dans le plan perpendiculaire à \vec{B} . Montrer que $S = \pi q B \rho^2$.

IV. Particule dans un champ magnétique non uniforme

On étudie maintenant le mouvement de la même particule dans le vide en présence d'un champ magnétique constant non uniforme mais à variation spatiale très faible. On admet alors que la trajectoire d'une particule chargée est toujours une hélice qui s'enroule le long d'une ligne de champ, celle-ci n'étant plus nécessairement rectiligne comme précédemment. Le rayon de giration ρ de cette hélice, dont la valeur a été calculée au III.5, devient un paramètre local, variable avec B , mais est suffisamment petit pour que, localement, \vec{B} soit considéré comme uniforme. Sinon il n'est plus possible de définir de trajectoire hélicoïdale.

1. Nous admettons sans démonstration que l'invariant adiabatique est une constante du mouvement. Quelle est la seconde constante du mouvement?

2. Nous appelons V_L la composante de la vitesse parallèle à la ligne de champ et ω la valeur locale de $\frac{qB}{m}$. Ecrire l'énergie cinétique de la particule en fonction de V_L , ρ et ω .

En déduire l'expression de V_L en fonction de q , m , B , S et E_c .

3. Montrer que, pour une énergie cinétique et un invariant adiabatique donnés, la particule ne peut jamais pénétrer dans des régions où le champ magnétique a une intensité supérieure à la limite : $B_{\max} = \frac{2\pi m E_c}{qS}$.

4. On considère une ligne de champ sur laquelle l'intensité de \vec{B} varie de manière symétrique par rapport à un minimum local au point P. Montrer par des arguments simples que la particule, en plus du mouvement d'enroulement autour de la ligne de champ, présente un second mouvement périodique entre deux points P' et P'' de la ligne de champ symétriques par rapport à P.

5. Montrer que la période du second mouvement périodique a pour valeur l'intégrale curviligne : $T = 4m \sqrt{\frac{\pi}{qS}} \int_P^{P'} \frac{d\ell}{\sqrt{B_{\max} - B}}$ de P à P' le long de la ligne de champ.

On appellera par la suite "rebondissement" ce mouvement.

V. Particules dans le champ magnétique terrestre

1. On appelle V_T la composante de la vitesse d'une particule perpendiculaire à la ligne de champ. Quelle relation y a-t-il entre V_T , ρ et ω ?

2. On considère des particules dans l'espace soumises au champ magnétique terrestre. On suppose jusqu'à la fin du problème que, lorsque ces particules traversent le plan de l'équateur géomagnétique, les composantes V_T et V_L de leur vitesse sont égales, et on appelle V_e cette valeur.

Exprimer E_c en fonction de V_e . Décrire qualitativement leur mouvement d'après les résultats du IV.

3. On appelle B_{\max} la valeur du champ magnétique au point de plus grande latitude géomagnétique que peut atteindre une particule s'enroulant sur une ligne de champ Γ . Montrer que, si on appelle B_{\min} la valeur minimale de l'intensité du champ magnétique sur Γ , on a la relation simple $B_{\max} = 2 B_{\min}$. En déduire la valeur numérique de Φ_{\max} de la latitude géomagnétique maximale que peuvent atteindre les particules.

4. Donner la valeur τ de la période de giration pour une latitude moyenne $\frac{\Phi_{\max}}{2}$ d'une particule sur une ligne de champ en fonction de m , q , R , L et $\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi}$.

Dans la suite, on appellera cette valeur "valeur moyenne de τ ".

5. Comme Φ_{\max} n'est pas très grand, on peut se contenter d'un développement limité de B à l'ordre 2 en Φ sur une ligne de champ entre $-\Phi_{\max}$ et $+\Phi_{\max}$. En déduire la période T du mouvement de rebondissement.

L'exprimer numériquement en fonction de R , L et V_e .

6. Calculer les valeurs numériques des périodes de giration moyenne τ , de rebondissement T pour des électrons relativistes provenant du Soleil et piégés dans le champ magnétique terrestre à une distance $L = 6$ (on entend par relativistes des électrons dont la vitesse est pratiquement égale à $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$).

Même question pour des protons d'énergie cinétique 1 MeV.

On rappelle : $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

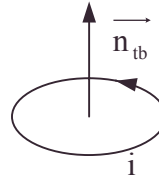
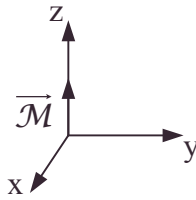
7. Les valeurs expérimentales correspondantes sont respectivement de l'ordre de 0,001 et de 0,5 s pour les électrons et 0,5 et 20 s pour les protons.

Conclure sur la validité de notre modèle.

• colatitude, confrontation expérimentale, développement au premier ordre ou plus, équateur géomagnétique, minimum, ordre de grandeur, rebondissement, tire-bouchon à droite

Autres concours ; Durée : 4h**Corrigé**

I. θ est la colatitude.



1.a. $\vec{\mathcal{M}} = \pi R^2 i \vec{n}_{tb}$.

L'indice tb signifie "tire-bouchon" (à droite).

b. La représentation du dipôle n'est pas unique : n'importe quelle spire de rayon R et de courant i tels que $\pi R^2 i = \mathcal{M}$ convient.

2. $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$. La formule est donnée quand elle ne figure pas au programme.

3. $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^2} \vec{u}_\varphi \Rightarrow A_r = 0 ; A_\theta = 0 ; A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^2} ;$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) ;$$

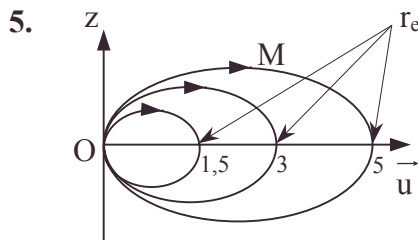
or, $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cos \theta \vec{u}_r - \mathcal{M} \sin \theta \vec{u}_\theta$ et $\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r} = \mathcal{M}_r \cos \theta$ et $2 = 3 - 1$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (3 \cos \theta \vec{u}_r - (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}^2}{r^5} \right) \text{ c.q.f.d.}$$

4. Ecrivons que le vecteur tangent est tel que $d\vec{OM} \parallel \vec{B}$ soit $\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$,

ou $\frac{dr}{2 \cos \theta} = \frac{r d\theta}{\sin \theta}$ finalement $\frac{dr}{r} = \frac{2 d\theta}{\tan \theta} \Rightarrow r = A \sin^2 \theta$ dans le plan $\varphi = \text{constante}$;

$r_e = A$ correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ (situation équatoriale).

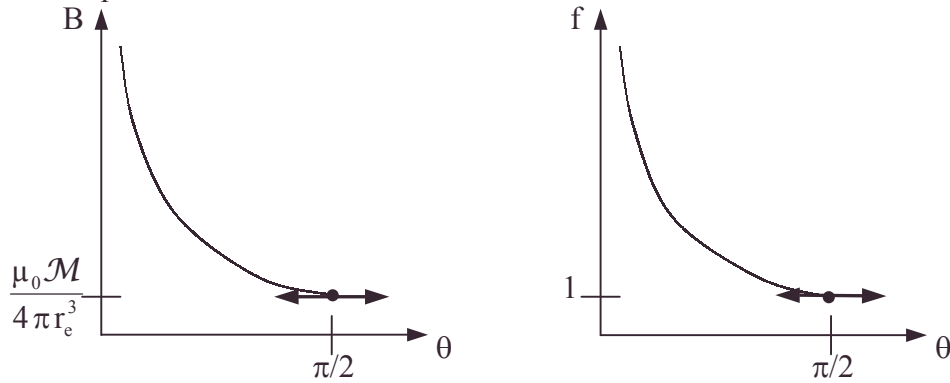


On n'oubliera pas les lignes symétriques par rapport à Oz.

Le voisinage de O, trop proche, est exclu.

6. $B = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r_e^3} \frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \theta}}{\sin^6 \theta} ; f(\theta) = \frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \theta}}{\sin^6 \theta}.$

Vu les symétries, on se limitera à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.



Perte de sens pour $r \leq 0$, soit vu 5. pour $\theta \leq 0(\pi)$.

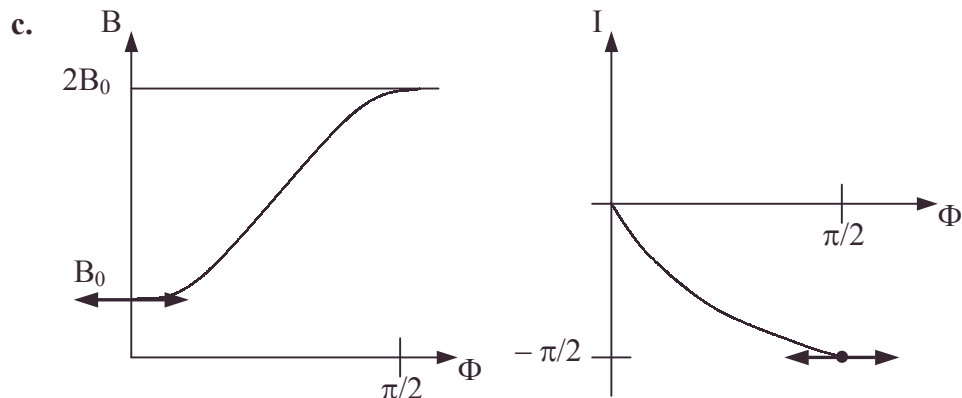
$$\text{II.1.a. } \vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} \sqrt{4 - 3 \sin^2 \theta} ;$$

or par définition de I : $\vec{B} \cdot \vec{u}_\theta = B \cos I$; or $\Phi = \theta - \frac{\pi}{2}$;

$$\Rightarrow \sin \theta = \cos \Phi ; B = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} \sqrt{4 - 3 \cos^2 \Phi} ; I = \pm \arccos \left[\frac{\cos \Phi}{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \Phi}} \right] ;$$

(signe $-$ pour I vu l'allure des lignes de champ pour $\Phi > 0$ dans l'hémisphère nord).

$$\text{b. AN : } B_0 = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} = 3,199 \cdot 10^{-5} \text{ T pour } \cos \theta = 1.$$



On tiendra compte des symétries.

d. B est maximale pour $\Phi = \frac{\pi}{2}$ (aux pôles géomagnétiques).

2. On considère l'aiguille aimantée de la boussole comme un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$; aux pôles géomagnétiques : $I \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$; $\theta \rightarrow 0$; $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_r$, $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ tend à être horizontal.

Mais par rapport à l'axe vertical de la boussole $\vec{\mathcal{M}}_1 \wedge \vec{B}$ n'est plus un couple de rappel par rapport à cet axe \Rightarrow instabilité.

$$\text{3. AN : } B = 5,413 \cdot 10^{-5} \text{ T ; } I = -68,7^\circ.$$

Les écarts relatifs théorie – expérience sont notables. Le modèle n'est pas parfaitement adapté, sans être à rejeter d'emblée.

$$\text{4.a. } r_e = L R ; \text{ I.6. } \Rightarrow B(L, R) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi L^3 R^3} \frac{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \Phi}}{\cos^6 \Phi} ;$$

$$\text{AN : } B = \frac{3,2 \cdot 10^{-5}}{L^3} \frac{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \Phi}}{\cos^6 \Phi}.$$

$$\text{b. A la surface terrestre : } B(L, R) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} \sqrt{4 - 3 \cos^2 \Phi} \Rightarrow \cos \Phi = \frac{1}{\sqrt{L}};$$

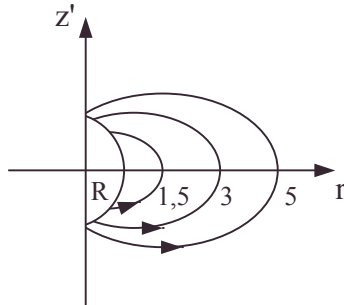
$$\pm \Phi_m = \arccos \frac{1}{\sqrt{L}}.$$

$$\text{c. } I = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{4L - 3}}.$$

$$5. r = r_c \sin^2 \theta = L R \cos^2 \Phi \Rightarrow r_c = \frac{L R}{3} \cos \Phi \frac{(1 + 3 \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \sin^2 \Phi)}.$$

$$\text{Pour } \phi = 0, r_c = \frac{L}{3} R; r_c = R \text{ pour } L = 3.$$

6.



L	1,5	3	5
$\pm \Phi_m$	35,26°	54,74°	63,43°
I	-54,74°	-70,53°	-75,96°

III.1. $\vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$; \vec{f} est invariant dans un changement de repères galiléens; \vec{E} et \vec{B} subissent des modifications relativistes par changement de repères galiléens. On devrait donc utiliser le cadre relativiste pour traiter l'électrodynamique.

2. x_0 n'a pas d'importance autre qu' analytique, le problème étant invariant selon toute translation parallèle à $Ox \parallel \vec{B}$.

3. $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, soit : $m\ddot{x} = qB\dot{y}$; $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$; $m\ddot{z} = 0$, soit les équations écrites dans l'énoncé, avec $\omega = \frac{qB}{m}$.

$$4.a. Z = x + iy; \dot{Z} = \dot{x} + i\dot{y}; \ddot{Z} = \ddot{x} + i\ddot{y} \text{ d'où } \ddot{Z} + i\omega\dot{Z} = 0.$$

$$\text{b. } Z_0 = x_0; \dot{Z}_0 = i\dot{y}_0.$$

$$\text{c. La résolution de 4.a. donne : } \dot{Z} = \dot{Z}_0 e^{-i\omega t};$$

$$Z = \frac{i\dot{Z}_0 e^{-i\omega t}}{\omega} + A \text{ avec } A = Z_0 - i\frac{\dot{Z}_0}{\omega} \Rightarrow Z = \frac{\dot{y}_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) + x_0 + i\dot{y}_0 \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

$$5. x = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega} (1 - \cos \omega t); y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Eliminons $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ par $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$;

$$\text{d'où : } \left(x - x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}, \text{ cercle de centre : } \frac{\dot{y}_0}{\omega} + x_0 = x_0 + v_0 \frac{\sin \theta_0}{\omega}, 0;$$

• conditions initiales, hélice, P.F.D., symétrie, trajectoire

de rayon $\rho = \frac{|\dot{y}_0|}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} |\sin \theta_0|$, sa période $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{|qB|}$.

Pour que le centre soit O, il suffit de prendre $x_0 = \frac{-\dot{y}_0}{\omega} = -v_0 \frac{\sin \theta_0}{\omega}$;

alors, $x = \frac{-\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t$; $y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$ représentent le cercle, trajectoire de la projection horizontale de la particule.

6. Le mouvement horizontal est circulaire ; le mouvement vertical obéit par intégration à $z = (v_0 \cos \theta_0)t$ si $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$.

\Rightarrow Il s'agit d'une hélice, de pas $\rho = v_0 \cos \theta_0 \cdot \tau = 2\pi \frac{v_0 \cos \theta_0}{\omega}$ (= constante).

L'hélice s'enroule autour de Oz qui est la ligne de champ passant par O, cf. $\vec{B} = B\vec{z}$.

$$7. dE_c = \underbrace{\vec{f}}_{q\vec{V} \wedge \vec{B}} \cdot \vec{V} dt = 0 \forall t \Rightarrow E_c = \text{cste} = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

E_c est bien indépendante de \vec{B} , ce qui est prévisible puisque la force magnétique n'agit pas sur \vec{V} , lui étant orthogonale.

8. Calculons $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ en cartésiennes. On trouve $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = B\vec{z}$;
on peut accepter A comme potentiel vecteur.

$$9. S = \oint_{\Gamma} \left[m \dot{x} \vec{i} + \left(m \dot{y} + qBx \right) \vec{j} \right] (dx \vec{i} + dy \vec{j}) = \oint_{\Gamma} m \left(\dot{x} dx + \dot{y} dy \right) + qBx dy$$

$$S = \int_0^{\tau} \left[m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + qBx \dot{y} \right] dt \text{ soit avec } \Gamma \text{ cercle de centre O, cf. III.5.}$$

$$S = \int_0^{\tau} \left[m \frac{\dot{y}_0^2 \omega^2}{\omega^2} - qB \cos \omega t \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} \right)^2 \omega \cos \omega t \right] dt = m \dot{y}_0^2 \int_0^{\tau} (1 - \cos^2 \omega t) dt ;$$

$$S = m \dot{y}_0^2 \frac{\tau}{2} = m \rho^2 \cdot \frac{\pi m}{qB} \left(\frac{qB}{m} \right)^2 = \pi qB \rho^2 \text{ avec } \rho^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2} = \frac{\dot{y}_0^2}{\left(\frac{qB}{m} \right)^2}.$$

IV.1. $E_c = \text{cste}$ cf. $dE_c = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$.

2.a. $E_c = \frac{1}{2} m (V_L^2 + V_{\perp}^2)$; or pour le mouvement orthogonal à \vec{B} :

$$|V_{\perp}| = \rho \omega \text{ cf. III.5.}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m (V_L^2 + \rho^2 \omega^2).$$

$$b. E_c = \frac{1}{2} m \left(V_L^2 + \frac{S}{\pi qB} \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \right) ; |V_L| = \left(\frac{2E_c}{m} - \frac{qSB}{\pi m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{qS}{\pi m^2} \right)^{\frac{1}{2}} (B_{\max} - B).$$

3. $|V_L| \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow B \leq \frac{2\pi E_c m}{qS}$; la particule ne peut pénétrer dans les régions de

$$B \geq B_{\max}$$

4. $V_L = 0$ évoque le point de vitesse nulle du mouvement d'un pendule ou d'un ressort ; en un tel lieu, la vitesse ne peut que changer de sens.

$$B > \frac{2\pi m E_c}{qS} \quad \begin{array}{c} P'' \\ | \\ \hline | \\ P \\ | \\ \hline | \\ P' \end{array} \quad B > \frac{2\pi m E_c}{qS}.$$

C'est le cas par symétrie en P' et P'' ; le maximum de l'énergie étant en P par symétrie, le pas local de l'hélice étant plus grand en P qu'en P', P''.

L'inversion du mouvement associé à la symétrie engendre une seconde demi période pour le mouvement.

5. $d\ell = V_L dt$ avec $V_L > 0$ pour le déplacement PP' : $\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4}$;

$$\text{or } dt = \frac{d\ell}{V_L} = d\ell \sqrt{\frac{m^2 \pi}{qS(B_{\max} - B)}} ; \Rightarrow T = 4m \sqrt{\frac{\pi}{qS}} \int_P^{P'} \frac{d\ell}{\sqrt{B_{\max} - B}}.$$

V.1. $V_{\perp} = V_T = \rho \omega$ cf. **IV.2a.**

$$\text{2.a. } E_c = \frac{1}{2} m (V_L^2 + V_T^2) = C \quad \forall t,$$

En particulier dans le plan de l'équateur géomagnétique

$$E_c = \frac{1}{2} m (V_e^2 + V_e^2) = m V_e^2 = C ; E_c = m V_e^2.$$

b. Sur la ligne de champ (tracée en **II.6.**) B_{\max} se trouvera en deux points P' et P'' symétriques par rapport au plan équatorial géomagnétique.

Entre ces deux points, les particules auront un mouvement périodique qui les confine dans cette zone. La trajectoire a été décrite par l'énoncé dans **IV.**

3.a. En P' et en P'', $V_T' = \rho' \omega' = \rho' \frac{q B_{\max}}{m}$; à l'équateur géomagnétique, se trouve P ;

$$V_e = \rho_e \omega_e = \rho_e \frac{q B_{\min}}{m}.$$

Or $S = C' = \pi q B_{\max} \rho'^2 = \pi q B_{\min} \rho_e^2$ ① ; de plus en P' (ou P'') $V_L = 0$;

$$\text{vu } E_c = C = m V_e^2 = \frac{1}{2} m V_T^2 ; V_T^2 = 2 V_e^2 \text{ soit : } ② \quad \rho'^2 B_{\max}^2 = 2 \rho_e^2 B_{\min}^2 ;$$

en faisant le rapport entre les deux équations ① et ② : $B_{\max} = 2 B_{\min}$.

$$\text{b. On sait que } B_{\min} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r_e^3} \text{ vu I.6. ; } B_{\max} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r_e^3} \frac{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \Phi_{\max}}}{\cos^6 \Phi_{\max}} \text{ vu II.4.a. ;}$$

Φ_{\max} sera rapidement déterminé.

$B_{\max} = 2 B_{\min}$ nous fournit l'équation numérique en $x = \cos^2 \Phi_{\max}$:

$$x^6 + 0,75x - 1 = 0 ; \cos \Phi_{\max} = 0,915 ; \Phi_{\max} = \pm 23,79^\circ.$$

4. Pour cette latitude moyenne, introduisons l'indice m.

$$\text{Rappelons } T_m = \frac{2\pi m}{q B_m} ; B_m = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3 L^3} \frac{\sqrt{4 - 3 \cos^2 \frac{\Phi_{\max}}{2}}}{\cos^6 \frac{\Phi_{\max}}{2}} ;$$

$$\tau = T_m = 0,827 \frac{2\pi m}{q} \frac{L^3 R^3}{\mu_0 \mathcal{M}} = 0,827 \frac{8\pi^2}{\mu_0 q \mathcal{M}} m L^3 R^3 .$$

5. Au voisinage de B_e cf. **II.5.** : $d\ell = r_c d\Phi = \frac{RL}{3} d\Phi$ (développement suffisant vu la suite des opérations).

$$B = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3 L^3} \frac{(1 + 3\Phi^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{\Phi^2}{2}\right)^6} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3 L^3} \left(1 + \frac{3}{2}\Phi^2 + \frac{6}{2}\Phi^2\right) = B_{\min} \left(1 + \frac{9}{2}\Phi^2\right)$$

$$B = \frac{B_{\max}}{2} \left(1 + \frac{9}{2}\Phi^2\right) .$$

$$\text{Vu IV.5. : } T = 4m \sqrt{\frac{\pi}{qSB_{\max}}} \int_0^{\Phi_{\max}} \frac{RL}{3} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{9}{2}\Phi^2\right)}}$$

$$T = 4m \sqrt{\frac{\pi}{qSB_{\max}}} \frac{RL}{3} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_0^{\Phi_{\max}} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - \frac{9}{2}\Phi^2}} .$$

Exprimons T en fonction de v_e, R, L car en $\Phi = 0$, $V_L = V_e$, $B_e = \frac{B_{\max}}{2}$.

$$\text{D'après IV.2. } V_e = \sqrt{2V_e^2 - \frac{qSB_e}{\pi m^2}} \Rightarrow \frac{qSB_{\max}}{2\pi} = V_e^2 m^2 ;$$

$$\Rightarrow T = \frac{4}{V_e} \frac{RL}{3} \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \text{ avec } u = \frac{3\Phi}{\sqrt{2}} \quad T = \frac{4RL\sqrt{2}}{9V_e} \arcsin \frac{3\Phi_{\max}}{\sqrt{2}} .$$

$$\mathbf{6.a.} \quad V_{T_{\max}}^2 = 2V_{e_{\min}}^2 \Rightarrow V_e = \frac{c}{\sqrt{2}} \text{ car } V_{T_{\max}} = c \text{ (T passe en fait sous la ligne).}$$

$$\tau_{e\ell} = 0,827 \cdot \frac{2\pi}{8,3 \cdot 10^{15}} \cdot 6^3 \cdot \frac{(6378 \cdot 10^3)^3}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

$$T_{e\ell} = \frac{4 \cdot 6378 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 10^8 \cdot 9} \arcsin \frac{3 \cdot 23,79 \cdot \pi}{\sqrt{2} \cdot 180} = 0,086 \text{ s.}$$

$$\mathbf{b.} \quad \tau_p = \frac{0,827 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6^3}{8,3 \cdot 10^{15}} \cdot \frac{(6378 \cdot 10^3)^3}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} = \tau_{e\ell} \cdot 1835 = 0,367 \text{ s.}$$

$$E_c = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} - m_p c^2 \Rightarrow \left(\frac{E_c + m_p c^2}{m_p c^2} \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_p^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v_p}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_c + m_p c^2}{m_p c^2} \right)^2} .$$

• confrontation expérimentale, ordre de grandeur, relativité, sphère chargée en rotation [en magnétostatique]

$$v_p = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{E_c}{m_p c^2}\right)^2}} ; \text{AN : } E_c = 10^6 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} ; v_p = 1,383 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$T_p = \frac{4.6378 \cdot 10^3}{1,383 \cdot 10^7 \cdot 9} \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \arcsin\left(\frac{3.23,79 \cdot \pi}{\sqrt{2} \cdot 180}\right) = T_{el} \frac{3 \cdot 10^8}{1,383 \cdot 10^7} = 1,87 \text{ s}.$$

$$\begin{array}{l} 7. \text{ On compare : } \left. \begin{array}{l} 2 \cdot 10^{-4} \text{ à } 10^{-3} \\ 0,122 \text{ à } 0,5 \end{array} \right\} \text{ pour l'électron.} \\ \left. \begin{array}{l} 0,367 \text{ à } 0,5 \\ 1,87 \text{ à } 20 \end{array} \right\} \text{ pour le proton.} \end{array}$$

On a toujours l'ordre de grandeur : 9 % à 73 % de la valeur expérimentale.

- Le champ dipolaire n'est qu'une approximation.
- La mécanique classique a besoin des corrections relativistes.
- La technique des développements est une approximation.

5.3.8. Champs créés par une sphère chargée en rotation

L'étudiant peut être conduit à utiliser les données et les résultats suivants :

- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 10^{-9} / 36 \pi \text{ F.m}^{-1}$;
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$;
- Expression du rotationnel en coordonnées sphériques (r, ϕ , θ) pour un vecteur:

$$\vec{U} = U_\phi \cdot \vec{e}_\phi ; \text{rot} \vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot U_\phi) \right] \vec{e}_r + \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r_\phi U) \right] \vec{e}_\theta ,$$

la base orthonormée étant : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ cf. figure 1.

- Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques (r, θ , z) pour un vecteur

$$\vec{U} = U_\theta \vec{e}_\theta ; \text{rot} \vec{U} = -\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} U_\theta + \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right) \right) \vec{e}_z ,$$

la base orthonormée étant : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ cf. figure 1bis.

- Théorème du gradient : $\oint_S f \, d\vec{S} = \iiint_{\text{par S}}^{\text{V limité}} \text{grad} f \cdot d\vec{\tau} .$

Toutes les situations envisagées sont réalisées dans le vide.

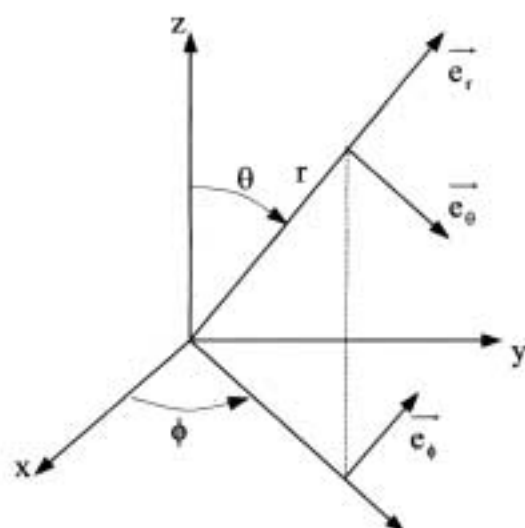


Figure 1

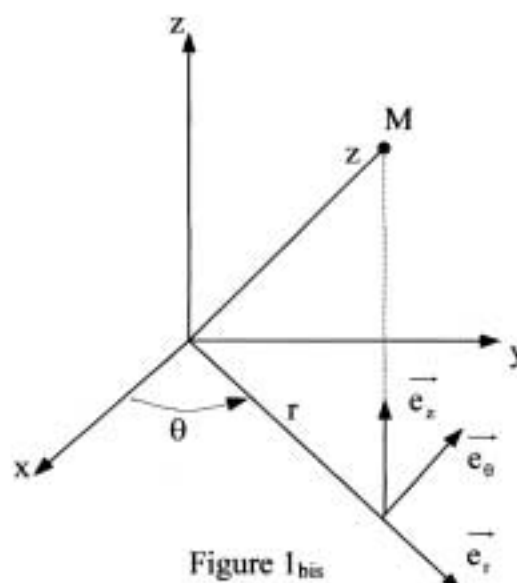


Figure 1 bis

Question préliminaire (figure 2)

Soit une spire circulaire, de centre O et de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(z)$ en un point M de son axe Oz (de vecteur unitaire \vec{e}_z) en fonction de $\sin \alpha$.

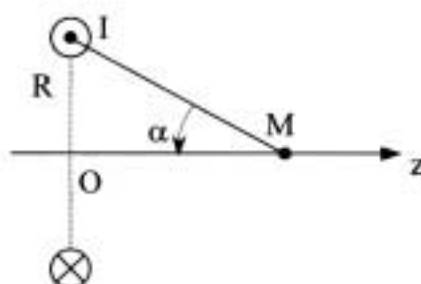
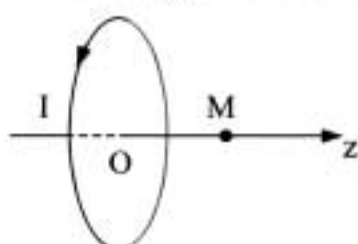


Figure 2

1. Une sphère métallique creuse Σ de centre O, de rayon R, porte une charge Q uniformément répartie en surface. Elle tourne autour de son diamètre Oz à la vitesse angulaire constante ω . On admettra que les charges sont entraînées par le mouvement de rotation sans modification de leur répartition.

1. Quelle est l'expression vectorielle de la vitesse d'un point M de la sphère Σ en fonction de \vec{OM} et $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$? Quelle est la distribution de courant équivalente ?

On notera \vec{j}_s la densité superficielle de courant correspondante.

2. Calculer le champ magnétique \vec{B} créé au centre de la sphère.

3. Calculer le moment magnétique \vec{m} de la sphère en rotation.

2. Une sphère Σ' de rayon R' est chargée uniformément en volume avec la densité ρ .

Déterminer en tout point de l'espace le champ électrostatique \vec{E} .

Quelle est l'énergie électrostatique emmagasinée dans un volume élémentaire $d\tau$?

Quelle est l'énergie électrostatique de la sphère Σ' ?

3. Montrer que le potentiel vecteur \vec{A} de la sphère Σ en rotation, pour tout point M de l'espace, peut se mettre sous la forme : $\vec{A}(M) = K\vec{\omega} \wedge \iint_{\Sigma} \frac{d\vec{S}}{r}$, où $d\vec{S}$ est le vecteur

élémentaire au point M' de la sphère Σ , r est défini par $\overrightarrow{M'M} = r\vec{u}$, et K est une constante que l'on déterminera.

En utilisant la formule du gradient rappelée au début du problème, ainsi que le résultat du calcul du champ électrostatique de la question 2., déterminer l'expression de $\vec{A}(M)$ en tout point de l'espace, intérieur ou extérieur à Σ .

4. En déduire le champ magnétique \vec{B} à l'intérieur de la sphère Σ puis à l'extérieur. Dans ce dernier cas, on en donnera l'expression en fonction de \vec{m} .

Quelle remarque pouvez-vous faire ?

5. Quelle est l'énergie électromagnétique emmagasinée dans un volume élémentaire dt ? Quelle est l'énergie électromagnétique de la sphère Σ en rotation ?

6. Application numérique : la sphère Σ de rayon $R = 1\text{ m}$ a été chargée initialement avec une tension de 30 kV. Que vaut sa charge ?

Que vaut son énergie électromagnétique quand elle tourne autour de Oz à la vitesse $\omega = \pi \text{ rad.s}^{-1}$?

Autres concours ; Durée : 1h30

Corrigé

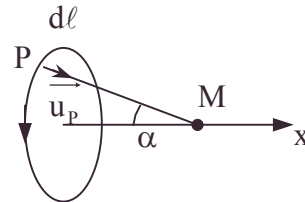
1. Question préliminaire.

Par symétrie (association d'éléments de courants symétriques) : \vec{B} est selon Oz :

$$dB_z = \|\vec{dB}\| \cos \alpha \text{ avec } \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{u}_P}{r^2} ; \|\vec{dB}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{r^2} . PM = r = \sqrt{R^2 + z^2} ;$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} ; \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} ; \int d\ell = 2\pi R .$$

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha .$$



1.a. $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega R \sin \theta \vec{e}_\phi$.

b. – Pour une distribution volumique de courant $\vec{j} = \rho \vec{v}$ (si un type de porteurs de charge).

– Pour une distribution surfacique de courant (de faible épaisseur e) :

$$\sigma = \int_e \rho d\ell ; \vec{j}_s = \int_e \vec{j} d\ell ; \vec{j}_s = \sigma \vec{V} ; \text{or, } Q = 4\pi R^2 \sigma \Rightarrow \vec{j}_s = \frac{Q}{4\pi R^2} \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} ;$$

$$\vec{j}_s = \frac{Q\omega}{4\pi R} \vec{e}_\phi \sin \theta .$$

2. On assimilera une couronne sphérique élémentaire définie par θ et $\theta + d\theta$ sur la sphère Σ à une spire circulaire (cf. **Q.Prélim**) de courant dI (soit $dI = j_s R d\theta$) de rayon $R \sin \theta$.

$$dB_z = \frac{\mu_0 \sin^3 \theta dI}{2R \sin \theta} = \frac{\mu_0 \sin^3 \theta}{2R \sin \theta} \cdot \frac{Q\omega}{4\pi R} \sin \theta R d\theta .$$

$$\text{Intégrons en } \theta \text{ entre } 0 \text{ et } \pi : B_z = \frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi R} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi R} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta ;$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \omega Q}{6 \pi R}.$$

3. Le moment magnétique associé à une spire de rayon R parcourue par I est : $\pi R^2 I \vec{e}_z$.

Le moment magnétique associé à une couronne sphérique de courant dI et de rayon

$$R \sin \theta \text{ est : } d\vec{m} = \pi R^2 \sin^2 \theta dI \vec{e}_z = \pi R^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{Q \omega}{4 \pi R} \sin \theta R d\theta \vec{e}_z.$$

$$\vec{m} = \vec{e}_z \int_0^\pi \frac{Q \omega R^2}{4} \sin^3 \theta d\theta = \vec{e}_z \cdot \frac{Q \omega R^2}{3}.$$

2. Par symétrie $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$. Appliquons le théorème de Gauss à une sphère S de centre O , le centre de Σ' et de rayon r .

$$\text{a. } r \leq R'; \iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_S E dS = E \cdot 4 \pi r^2 = \frac{Q_{s_a}}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{\epsilon_0}; E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}.$$

$$\text{b. } r \geq R'; \iint_S \vec{E} d\vec{S} = \iint_S E dS = E \cdot 4 \pi r^2 = \frac{Q_{s_b}}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3} \pi R'^3 \rho}{\epsilon_0}; E = \frac{\rho R'^3}{3 \epsilon_0 r^2}.$$

$$\text{c. } dW = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \text{ d'après le cours.}$$

$$\text{d. } W = \iiint_{\text{univers}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r) 4 \pi r^2 dr = \int_0^{R'} \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \rho^2 r^2}{9 \epsilon_0^2} \cdot 4 \pi r^2 dr + \int_{R'}^\infty \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \rho^2 R'^6}{9 \epsilon_0^2 r^4} \cdot 4 \pi r^2 dr$$

$$W = \frac{4}{15} \frac{\pi \rho^2 R'^5}{\epsilon_0}.$$

$$\text{3.a. Rappel : } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4 \pi} \int \frac{\vec{j}(M') d\tau}{r}, \text{ avec } r = M'M, \text{ ce qui s'écrit ici :}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4 \pi} \int_\Sigma \vec{j}_s \frac{dS}{r} = \frac{\mu_0}{4 \pi} \int_\Sigma \frac{Q}{4 \pi R^2} (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM'}) \frac{dS}{r}.$$

$$\text{Remarquons : } \overrightarrow{OM'} dS = R d\vec{S} \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 Q}{16 \pi^2 R} \vec{\omega} \wedge \iint_\Sigma \frac{d\vec{S}}{r},$$

$$\text{soit la forme demandée avec } K = \frac{\mu_0 Q}{16 \pi^2 R}.$$

$$\text{b. Rappel du théorème du gradient : } - \iint_\Sigma p d\vec{S} = - \iiint_{v_\Sigma} \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau;$$

$$\text{Ainsi, } \iint_\Sigma \frac{d\vec{S}}{r} = \iiint_{v_\Sigma} \overrightarrow{\text{grad}}_p \frac{1}{r} d\tau_p \text{ à } M \text{ fixée, } r = MP, P \in \Sigma.$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{\text{grad}}_p \frac{1}{r} = \underbrace{-\frac{1}{r^2} \vec{u}_{rM}}_{\text{d'origine M}} = \underbrace{\frac{1}{r^2} \vec{u}_{rP}}_{\text{d'origine P}}, \text{ ainsi } \iint_\Sigma \frac{d\vec{S}}{r} = \iiint_{v_\Sigma} \frac{\vec{u}_p}{r^2} d\tau.$$

Or, en 2. : $\vec{E}(M) = \iiint_{V_\Sigma} \rho \frac{\vec{u}_p}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\tau$ avec comme résultats : $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$ si $r \leq R'$;

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \text{ si } r \geq R'.$$

c. $\iint_\Sigma \frac{d\vec{S}}{r} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\rho} \vec{E}(M)$, d'où : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 Q}{16\pi^2 R} \vec{\omega} \wedge \frac{4\pi\epsilon_0}{\rho} \vec{E}(M)$,

et en appliquant les résultats:

$\alpha. r \leq R$ $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 Q}{16\pi^2 R} \vec{\omega} \wedge \frac{4\pi}{3} r \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{12\pi} Q \omega \frac{r}{R} \sin \theta \vec{e}_\phi.$

$\beta. r \geq R$ $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 Q}{16\pi^2 R} \vec{\omega} \wedge \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{r^2} \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{12\pi} Q \omega \frac{R^2}{r^2} \sin \theta \vec{e}_\phi.$

4. $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ d'où, d'après les formules données dans l'énoncé, avec $\vec{A} = U_\phi \vec{e}_\phi$

a. $r \leq R$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 Q \omega}{6\pi R} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \vec{\omega} ;$

b. $r \geq R$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 Q R^2 \omega}{12\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) ;$ or, $\vec{m} = \frac{Q \omega R^2}{3} \vec{e}_z ;$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta.$$

On retrouve le champ \vec{B} créé par le dipôle magnétique de moment \vec{m} . Le modèle est cohérent.

5.a. $dW' = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau$ d'après le cours.

b. $W' = \iiint_{\text{univers}} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau$ avec $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi ;$

$$W' = \int_0^R \frac{1}{2} \frac{\mu_0 Q^2}{36\pi^2 R^2} \omega^2 4\pi r^2 dr + \left(\int_R^\infty \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{16\pi^2} dr \frac{m^2 r^2}{r^6} 2\pi \right) \int_0^\pi \sin \theta d\theta (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) ;$$

$$W' = \mu_0 \frac{Q^2 \omega^2 R}{36\pi}.$$

6.a. Le théorème de Gauss permet de trouver à $r > R'$: $\vec{E} = \frac{Q \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\Rightarrow V_\Sigma = \frac{Q_\Sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow Q_\Sigma = 4\pi\epsilon_0 R V_\Sigma ; \text{AN : } Q_\Sigma = 3,333 \mu\text{C}.$$

b. $W' = 1,218.10^{-18} \text{ J}.$

5.3.9. Moment magnétique d'une sphère Sphère aimantée, modèle de l'électron

On considère une surface sphérique de rayon R chargée uniformément. Elle tourne autour d'un de ses diamètres (l'axe Oz du repère du laboratoire $Oxyz$) à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$. On note q la charge totale de la sphère.

On utilisera les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et un vecteur \vec{V} aura pour composantes V_r, V_θ, V_φ respectivement sur les vecteurs unitaires $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ et \vec{u}_φ .

Voir le formulaire à la fin de l'énoncé.

1. Quelles sont les composantes en coordonnées sphériques du vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_s résultant de la rotation de la surface sphérique ?

A-t-on affaire à une répartition stationnaire de courants ?

2. En utilisant la relation intégrale liant \vec{A} à \vec{j}_s ainsi que la symétrie du système, montrer que seule la composante A_φ est non nulle et qu'elle ne dépend que de r et θ .

3. En dehors de la surface de la sphère $r = R$ le potentiel vecteur satisfait à l'équation de Laplace. En déduire l'équation satisfaite par A_φ .

On cherche une solution de cette équation du type $A_\varphi = F(r) \sin \theta$.

Etablir l'équation différentielle du second ordre satisfaite par F .

4. On recherche des solutions indépendantes de cette équation en r^α et on ne retient que les solutions physiquement satisfaisantes respectivement pour $r < R$ (région 1) et pour $r > R$ (région 2). On aura besoin de deux constantes d'intégration qu'on notera a_1 et a_2 , les indices correspondants aux régions.

5. En écrivant la continuité de \vec{A} sur la surface de la sphère $r = R$ trouver une relation entre a_1, a_2 et R .

6. Calculer les composantes en coordonnées sphériques de \vec{B} à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère $r = R$. Donner les relations de passage pour les composantes normales et tangentielles de \vec{B} à la traversée de la surface de la sphère. On aura soin de les écrire d'une façon générale à l'aide des vecteurs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 qui sont les champs au voisinage immédiat, respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère $r = R$, à l'aide du vecteur unitaire \vec{n} porté par la normale à la sphère, dirigé vers l'extérieur et à l'aide du vecteur \vec{j}_s . On écrira ensuite les relations résultantes en fonction des composantes de ces différents vecteurs. En déduire a_1 et a_2 .

7. Exprimer le champ \vec{B} à l'intérieur de la sphère à l'aide du vecteur $\vec{\omega}$.
Commentaire ?

8. Montrer qu'à l'extérieur de la sphère le potentiel vecteur \vec{A} est identique au potentiel vecteur pour un dipôle magnétique \vec{M} dont on donnera l'expression en fonction de $\vec{\omega}$; pour cela on exprimera vectoriellement \vec{A} en fonction de \vec{M} et \vec{r} . Montrer qu'on peut également exprimer \vec{B} vectoriellement en fonction de \vec{M} et \vec{r} .

Vérifier qu'on retrouve bien les composantes de \vec{B} déjà calculées.

Faire une figure représentant le champ ainsi créé en esquissant les lignes de champ.

9. Retrouver la relation entre \vec{M} et $\vec{\omega}$ en utilisant la définition générale du moment magnétique créé par une distribution de charges q_i , aux points \vec{r}_i , animées de vitesses

$$\vec{v}_i : \vec{M} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i.$$

10. Montrer qu'on retrouve également la relation entre \vec{M} et $\vec{\omega}$ en utilisant l'équivalence classique entre une spire circulaire et un moment magnétique élémentaire.

11. Montrer que le champ créé pour $r > R$ par la distribution superficielle de courant \vec{j}_s peut être considéré aussi comme créé par un milieu d'aimantation \vec{I} convenablement choisi, occupant l'intérieur de la sphère $r = R$. Exprimer \vec{I} à l'aide de $\vec{\omega}$.

Relation entre \vec{M} et \vec{I} . Est-elle justifiée physiquement ?

12. En supposant que le modèle précédent est applicable à l'électron $q = -e$, ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) considéré comme une sphère creuse dont aucun point de la surface ne peut être animé d'une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière, quel serait le rayon minimum de l'électron, sachant que l'on constate expérimentalement qu'il possède un moment magnétique : $|\vec{M}| = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$.

Comparer R ainsi trouvé à sa longueur d'onde Compton, grandeur que l'on peut former à l'aide des constantes fondamentales :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}, m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Discuter.

Petit formulaire

$$\vec{r} \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

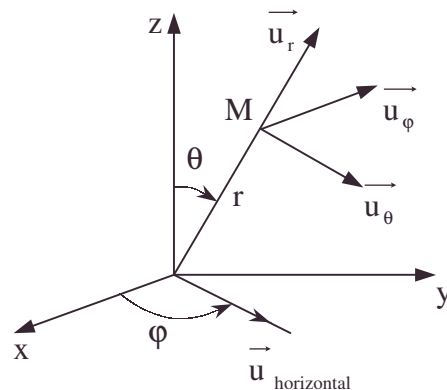
$$\vec{\text{grad}} \psi = \vec{u}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}.$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}.$$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{V} = & \frac{\vec{u}_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right] \\ & + \frac{\vec{u}_\varphi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

$$\Delta \vec{A} = \vec{u}_r \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \dots$$



• aimantation [voir milieux magnétiques], confrontation expérimentale, constante de Planck réduite, formules d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques], homogénéité d'une grandeur [analyse dimensionnelle], longueur d'onde Compton, moment magnétique, moment magnétique de l'électron

$$+ \vec{u}_\theta \left[\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \\ + \vec{u}_\theta \left[\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right].$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

$$\text{rot } f \vec{V} = f \text{rot } \vec{V} + \text{grad } f \wedge \vec{V}.$$

$$\text{rot}(\vec{C} \wedge \vec{r}) = 2\vec{C} \text{ où } \vec{C} \text{ est un vecteur constant.}$$

ENS ; Durée : 2h

Corrigé

1. $\vec{j}_s = \sigma \vec{v}$; or vu la symétrie, $q = 4\pi R^2 \sigma$; or $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$ avec $\vec{OP} = R \vec{u}_r$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{z} = \omega (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$.

$\vec{j}_s = \frac{q \omega}{4\pi R} \sin \theta \vec{u}_\phi$; $\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \vec{0}$, la répartition de courants est stationnaire.

2. $\vec{A}(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\mu_0 \vec{j}_s dS}{4\pi r}$ avec $r = MP$.

Considérons les contributions de deux éléments $\vec{j}_s dS$ symétriques par rapport au plan OMz.

Leur résultante est selon $\vec{u}_\phi(M)$.

En intégrant, $\vec{A}(M)$ est donc selon \vec{u}_ϕ .

Le système étant à symétrie cylindrique autour de Oz, les conséquences $\vec{A}(M)$ sont indépendantes du paramètre ϕ :

$\Rightarrow \vec{A}_\phi(M) = A(r, \theta) \vec{u}_\phi$, ainsi $\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = 0$.

3. $\vec{\Delta A} = \vec{0}$ s'écrit : $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0$.

Remplaçons $A_\phi = F(r) \sin \theta$, il reste :

$2rF' + r^2 F'' + F \left(\frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = 0$, soit $r^2 F'' + 2rF' - 2F = 0$. Equation différentielle

linéaire du second ordre.

4. Recherchons $F(r)$ sous la forme $F = a r^\alpha$.

L'équation en α est : $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$, soit $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -2$.

On a la solution $F = A_1 r + A_2 r^{-2}$, combinaison linéaire de solutions indépendantes.

Pour $r < R$: $A_2 r^{-2} \rightarrow +\infty$ pour $r \rightarrow 0$, en un point sans discontinuité de \vec{j} ; c'est inacceptable sauf si $A_2 = 0$, il reste $F_1(r) = a_1 r$.

Pour $r > R$: $A_1 r \rightarrow +\infty$ pour $r \rightarrow \infty$, en un point sans discontinuité de \vec{j} ; c'est inacceptable sauf si $A_1 = 0$; il reste $F_2(r) = a_2 r^{-2}$.

• continuité du potentiel vecteur, séparation des variables, symétrie

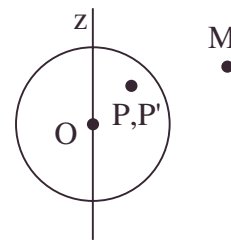
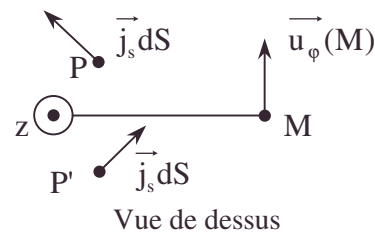


Figure projetée dans le plan méridien de M



5. Ecrivons la continuité de A_φ pour $r = R$, $\forall \theta$: $a_2 = a_1 R^3$.

6. On applique $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_\varphi = \frac{\vec{u}_r}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi)$,

soit avec $A_\varphi = F(r) \sin \theta$: $\vec{B} = \frac{2F}{r} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{\sin \theta}{r} \frac{d(rF)}{dr} \vec{u}_\theta$.

$$[1] \quad r < R ; \vec{B}_1(r, \theta) = 2a_1 (\vec{u}_r \cos \theta - \vec{u}_\theta \sin \theta).$$

$$[2] \quad r > R ; \vec{B}_2(r, \theta) = \frac{a_1 R^3}{r^3} (2\vec{u}_r \cos \theta + \vec{u}_\theta \sin \theta).$$

• Relation de passage en $r = R$:

$$\alpha. \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = 0 \vec{u}_r + 3a_1 \vec{u}_\theta \sin \theta ; (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_n = 0 \vec{u}_r = 0 \vec{n}.$$

$$\beta. (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_t = 3a_1 \vec{u}_\theta \sin \theta.$$

$$\text{Or, } (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_t = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \text{ vu } \vec{j}_s \text{ cf. cours : intégration de } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

On en déduit par identification :

$$3a_1 \vec{u}_\theta \sin \theta = \mu_0 \frac{q\omega}{4\pi R} \sin \theta \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r \Rightarrow a_1 = \frac{\mu_0 q \omega}{12\pi R} ; a_2 = \frac{\mu_0 q \omega R^2}{12\pi}.$$

$$7. \text{Vu 1. : } \vec{B}_1(r, \theta) = \frac{2a_1}{\omega} \vec{\omega} \text{ soit } \vec{B}_1(r, \theta) = \frac{\mu_0 q}{6\pi R} \vec{\omega} ;$$

\vec{B}_1 est uniforme et proportionnel à $\vec{\omega}$, donc au moment cinétique $\vec{\sigma}_0$.

$$8. \vec{A}_2(r, \theta) = \frac{a_2}{r^2} \sin \theta \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 q \omega R^2}{12\pi R^2} \sin \theta \vec{u}_\varphi \text{ peut être identifié au potentiel vecteur d'un}$$

$$\text{dipôle magnétique : } \vec{A}_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \frac{\vec{u}_r}{r^2} \text{ si } \vec{M} = \frac{q R^2}{3} \vec{\omega}.$$

$$\text{De } \vec{A}_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{M} \wedge \vec{r}), \text{ on déduit } \vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M) ;$$

$$\text{vu } \text{rot } f \vec{V}, \text{ on écrit : } \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \text{rot}(\vec{M} \wedge \vec{r}) + \text{grad} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right) \wedge (\vec{M} \wedge \vec{r}) ;$$

$$\text{or, } \text{rot}(\vec{M} \wedge \vec{r}) = 2\vec{M}, \text{ grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{-3\vec{r}}{r^5} \text{ et } \vec{r} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{r}) = r^2 \vec{M} - (\vec{M} \cdot \vec{r}) \vec{r} ; \text{ finalement :}$$

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(2\vec{M} - \frac{3}{r^2} r^2 \vec{M} + 3 \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} \right) \text{ soit } \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\frac{3\vec{r}}{r^2} \vec{M} \cdot \vec{r} - \vec{M} \right),$$

analogue formel du dipôle électrostatique, où :

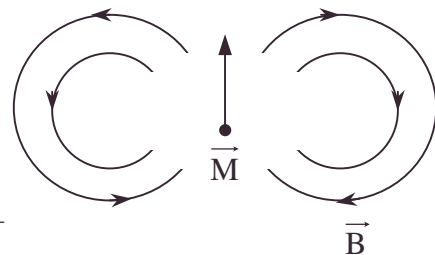
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \left(\frac{3\vec{r}}{r^2} (\vec{p} \cdot \vec{r}) - \vec{p} \right).$$

On retrouve bien :

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \text{ avec } M = \frac{q \omega R^2}{3}$$

On a les lignes de champ d'un dipôle.

• *champ magnétique d'un dipôle magnétique [formule intrinsèque du], continuité du champ magnétique normal, discontinuité du champ magnétique tangentiel, identification, moment cinétique*



$$9. \vec{M} = \iint \frac{\vec{r}}{2} \wedge \vec{j}_s dS = \iint \frac{1}{2} \frac{R q \omega}{4 \pi R} \sin^2 \theta (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\varphi) R^2 d\theta d\varphi = \frac{-q R^2}{8 \pi} \omega \iint \vec{u}_\theta d\theta d\varphi \sin^2 \theta ;$$

$$\text{or } \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{z} + \cos \theta \vec{u}_{\text{horizontal}} ;$$

$$\vec{M} = \frac{-q R^2}{8 \pi} \omega \iint (-\vec{z} \sin^3 \theta d\theta d\varphi + \vec{u}_{\text{horizontal}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta d\varphi) \text{ soit } \vec{M} = \frac{q R^2}{3} \omega \vec{z} .$$

10. A une spire de rayon r_1 est associé un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_1 = i \pi r_1^2 \vec{z}$.

En découpant la sphère définie par $d\theta$: $d\vec{\mathcal{M}}_1 = \underbrace{(j_s R d\theta)}_{di} \pi R^2 \sin^2 \theta \vec{z}$.

$$\text{En intégrant : } \int d\vec{\mathcal{M}}_1 = \frac{q \omega}{4 \pi R} \pi R^3 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \vec{z} = \frac{q \omega R^2}{3} \vec{z} .$$

11. Prenons une sphère aimantée où $\vec{I} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{d\tau}$; en intégrant $\vec{M} = \int d\vec{\mathcal{M}} = \frac{\vec{I} 4 \pi R^3}{3}$ avec

\vec{I} , supposé uniforme pour pouvoir intégrer.

Cette grandeur suffit à créer le champ $\vec{B}_2(M)$; on prendra $\vec{I} = \frac{q}{4 \pi R} \vec{\omega}$.

Physiquement, on peut prouver l'équivalence entre \vec{I} et la distribution de courant surfacique $\vec{j}_s = \vec{I} \wedge \vec{n}_s$.

$$12.a. |M| = \left| \frac{q R}{3} v_{\text{équateur}} \right| \leq \left| \frac{q R c}{3} \right| ; R_{\min} = \frac{3|M|}{|q|c} ; \text{AN : } R_{\min} = 5,794.10^{-13} \text{ m.}$$

b. La longueur d'onde Compton fournie par la relativité (cf. onde Broglie) ou par l'analyse dimensionnelle : $\lambda_c = \frac{h}{mc}$; AN : $\lambda_c = 2,416.10^{-12} \text{ m.}$

$$\lambda_c \text{ et } R_{\min} \text{ sont du même ordre de grandeur : } \frac{\lambda_c}{R_{\min}} = 4,17.$$

On pourrait imaginer des phénomènes ondulatoires de diffraction de l'onde broglie dans la transmission des informations.

5.3.10. Sphère supraconductrice

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés caractéristiques des matériaux supraconducteurs. Refroidis à une température inférieure à une température critique, ces matériaux perdent leur résistance électrique ; en outre, en présence d'un champ magnétique faible, le supraconducteur "expulse" les lignes de champ. Ces deux propriétés indépendantes caractérisent l'état supraconducteur.

On utilisera les valeurs numériques suivantes :

$$\text{Accélération de la pesanteur : } g = 9,8 \text{ m.s.}^{-2}$$

$$\text{Masse de l'électron : } m = 9,1.10^{-31} \text{ kg.}$$

$$\text{Charge élémentaire : } e = 1,6.10^{-19} \text{ C.}$$

$$\text{Perméabilité magnétique du vide : } \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}.$$

I. Une sphère supraconductrice de centre O et de rayon R est plongée dans un champ magnétique statique et uniforme, faible, égal à \vec{B}_0 en l'absence de la sphère. On admet

• aimant [voir milieux magnétiques], analyse dimensionnelle, intensité d'aimantation, moment magnétique, longueur d'onde Compton, onde broglie, ordre de grandeur, relativité, sphère aimantée, sphère supraconductrice (en Magnétostatique), supraconductivité

dans cette partie que le champ magnétique est nul à l'intérieur de la sphère plongée dans ce champ.

1.a. En présence de la sphère, donner les équations que doit satisfaire le champ magnétique \vec{B} à l'extérieur de la sphère, et expliciter les conditions aux limites qui en achèvent la détermination sans pour autant déterminer la solution.

b. Vérifier que les relations obtenues sont identiques à celles qui déterminent le champ des vitesses de l'écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible autour d'une sphère solide.

c. Dessiner l'allure des lignes de champ autour de la sphère supraconductrice.

2. Montrer que, à l'extérieur de la sphère, le champ \vec{B} peut être considéré comme résultant de la superposition du champ \vec{B}_0 et d'un champ \vec{B}_1 créé par un dipôle magnétique \vec{M} placé au centre O de la sphère et colinéaire à \vec{B}_0 : dans ce but, on explicitera les composantes de \vec{B}_0 et \vec{B}_1 en coordonnées sphériques d'axe Oz dirigé suivant \vec{B}_0 et on établira que les équations et les conditions aux limites vérifiées par \vec{B} sont satisfaites à condition de donner à \vec{M} une valeur qu'on précisera.

3. En fait, le champ magnétique dipolaire \vec{B}_1 a pour origine des courants superficiels à la surface de la sphère.

a. Quel est le champ magnétique créé à l'intérieur de la sphère par ces courants superficiels ?

b. Déterminer, avec les coordonnées sphériques de **I.2.**, le vecteur densité surfacique de ces courants en un point P de la sphère.

c. Pour les points Q situés à l'extérieur mais au voisinage immédiat de la sphère, tracer le graphe $B = \|\vec{B}\|$ en fonction de la colatitude $\theta = (\text{Oz}, \vec{OQ})$.

II. Une analyse plus fine de l'expulsion des lignes de champ magnétique par un matériau supraconducteur conduit à postuler que, dans ce matériau, il existe une densité volumique \vec{j} de courant supraconducteur liée au potentiel vecteur \vec{A} du champ magnétique par $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, $\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{A}$, où $\lambda > 0$ est une constante caractéristique du matériau.

1. A quelle condition sur \vec{A} une telle relation peut-elle être satisfaite en régime statique ?

2. Déterminer l'équation aux dérivées partielles du second ordre satisfaite en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique \vec{B} .

3. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$, et dont les faces sont de dimensions très grandes devant d pour pouvoir négliger les effets de bord. On choisit l'origine d'un repère orthonormé direct Oxyz au milieu de la plaque, Oz étant perpendiculaire à ses faces qui ont donc pour équations $z = d$ et $z = -d$. Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de la plaque, est statique et uniforme, égal à \vec{B}_0 et dirigé suivant Ox.

a. Déterminer en fonction de $z \in [-d, d]$ le champ magnétique \vec{B} à l'intérieur de la plaque sous l'hypothèse $\vec{B}(d) = \vec{B}(-d) = \vec{B}_0$.

b. En déduire en fonction de z la densité volumique \vec{j} de courant à l'intérieur de la plaque.

• colatitude., condition limite, dipôle magnétique, effets de bord, graphe, ligne de champ., London [loi locale de supraconductivité], sphère supraconductrice

c. Quel est le champ magnétique créé à l'extérieur de la plaque par cette distribution de courant ? Justifier l'hypothèse faite en **II.3.a.**

4. Un modèle microscopique conduit à l'expression $\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s q^2}$, où m et q sont la masse et la charge de l'électron et n_s la densité volumique d'électrons supraconducteurs.

- Calculer λ pour $n_s = 10^{29} \text{ m}^{-3}$.
- Tracer les graphes des composantes non nulles de \vec{B} et de \vec{j} en fonction de z .
- Calculer l'épaisseur minimale $2d_m$ de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à $\|\vec{B}_0\|/100$.
- Pour d très grand devant λ , à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à 1/100 de sa valeur à la surface ?

III. Dans cette partie, on suppose que λ est très petit devant toutes les autres longueurs caractéristiques du problème, ce qui légitime l'approximation admise dans la partie **I.** (nullité du champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur).

1. Calculer l'énergie potentielle d'interaction entre deux dipôles magnétiques $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{M}'}$ coplanaires, placés sur un axe Oz à une distance r l'un de l'autre et faisant respectivement avec Oz des angles θ et θ' .

2. Dans toute la fin du problème, on considère un demi espace supraconducteur repéré par $z \leq 0$, de surface plane horizontale $z = 0$. Dans le demi espace vide $z > 0$, on place un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ à une distance a du plan $z = 0$ et faisant un angle θ avec la verticale.

a. Montrer que dans le demi espace $z > 0$ le champ magnétique créé par le dipôle en présence du supraconducteur est le même que celui créé par $\vec{\mathcal{M}}$ et par un second dipôle de moment magnétique total identique et placé symétriquement au premier par rapport au plan $z = 0$.

b. Calculer la force magnétique qui s'exerce sur le premier dipôle.

c. Donner, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'allure des lignes de champ magnétique dans le demi espace $z > 0$.

3. Un petit aimant permanent de masse M et de moment magnétique total \mathcal{M} est assimilé à un dipôle magnétique pesant, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$; on le place au-dessus de la surface du supraconducteur de façon que $\vec{\mathcal{M}}$ soit horizontal.

a. Montrer qu'il existe une altitude a au-dessus du plan $z = 0$ pour laquelle l'aimant est en équilibre au-dessus du supraconducteur.

- Cet équilibre est-il stable
 - vis-à-vis d'un déplacement vertical ?
 - vis-à-vis d'une perte d'horizontalité de $\vec{\mathcal{M}}$?

c. Application numérique : calculer l'altitude d'équilibre a de l'aimant en lévitation au-dessus de $z = 0$ pour $M = 5.10^{-3} \text{ kg}$ et $\mathcal{M} = 0,8 \text{ A.m}^2$.

d. Calculer, pour ces mêmes données numériques, la période des petites oscillations verticales autour de cette position d'équilibre en admettant que $\vec{\mathcal{M}}$ est maintenu constamment horizontal et que les résultats obtenus en régime statique demeurent valables pour ce calcul.

Ecole Polytechnique ; Durée : 4h

• aimant [voir milieux magnétiques], énergie d'interaction entre deux dipôles magnétiques, équilibre, force magnétique d'interaction dipôle magnétique-milieu supraconducteur, graphe, image magnétique [problème équivalent], ligne de champ., minimum, moment magnétique, stabilité

Corrigé

I.1.a.α. Les 2 équations de Maxwell portant sur \vec{B} sont :

$\text{div} \vec{B} = 0$; $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Ici à l'extérieur $\vec{j} = \vec{0}$; $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$; on dispose donc de $\text{div} \vec{B} = 0$; $\text{rot} \vec{B} = \vec{0}$.

β. Conditions limites

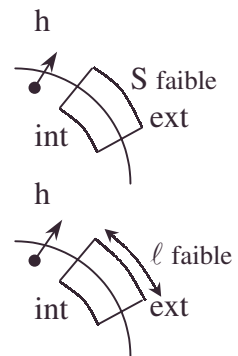
i. A l'infini, la perturbation due à la sphère de rayon fini disparaît : $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{B} = \vec{B}_0$.

ii. Sur la sphère, en $r = R$:

• $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow$ après intégration sur un cylindre plat de hauteur h négligeable, on en déduit la continuité de B_{normal} :

$$\vec{B}_{\text{normal ext}} = \vec{B}_{\text{normal int}} = \vec{0}.$$

• $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ à l'intérieur comme à l'extérieur, donne par intégration sur un contour rectangulaire de largeur h très faible : la discontinuité de H tangentielle : $\vec{B}_{\text{ext tan}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_s$. \vec{n}_s désigne la normale sortante.



b. Pour une sphère solide dans un écoulement uniforme \vec{V}_0 ,

α. la conservation locale de la masse s'écrit (de manière analogue à la conservation locale de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$) : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} \mu \vec{V} = 0$ et comme $\mu = \mu_0$ pour un fluide incompressible, $\text{div} \vec{V} = 0$.

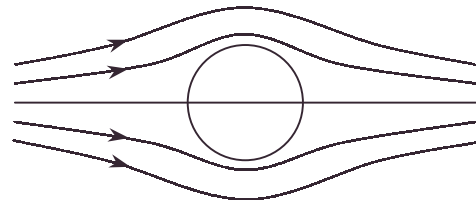
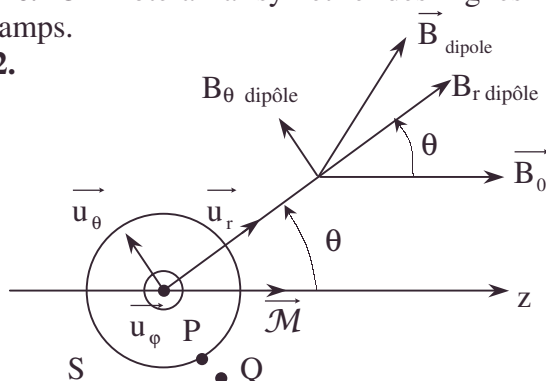
β. pour un écoulement irrotationnel $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = \text{grad} \varphi$.

γ. pour une sphère solide non poreuse, aucune particule fluide n'entre ou ne sort de la sphère : $\vec{V}_{\text{normal}} = \vec{0}$.

δ. la vitesse tangentielle peut être trouvée si on connaît le potentiel des vitesses (par exemple, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$: somme du potentiel φ_1 d'un écoulement uniforme et du potentiel φ_2 dipolaire traduisant la perturbation de la sphère, cf. sphère métallique ou diélectrique dans un champ uniforme extérieur en électrostatique et cf. question I.2.). Elle sera donc de même forme que $\vec{B}_{\text{ext tan}}$ même si par ailleurs l'hypothèse d'adhérence d'un fluide réel donne $\vec{V}_{\text{tan}} = \vec{0}$.

c. On notera la symétrie des lignes de champs.

2.



• adhérence d'un fluide aux parois, condition limite, continuité du champ magnétique normal, discontinuité de H tangentielle, équations de Maxwell, ligne de champ., symétrie

Rappelons les composantes de \vec{B}_1 dipole :

$$\begin{cases} \text{selon } \vec{u}_r : & B_{1r} = \frac{2\mu_0 \mathcal{M} \cos \theta}{4\pi r^3} \\ \text{selon } \vec{u}_\theta : & B_{1\theta} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi r^3} \end{cases}$$

$$\vec{B}_0 \begin{cases} \text{selon } \vec{u}_r : & B_{0r} = B_0 \cos \theta \\ \text{selon } \vec{u}_\theta : & B_{0\theta} = -B_0 \sin \theta \end{cases}$$

i. On vérifie $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{B}_1 = \vec{0}$.

ii. En $r = R + 0$: $B_{\text{normal}} = B_r = \left(B_0 + \frac{2\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3} \right) \cos \theta = 0 \Rightarrow \mathcal{M} = -\frac{2\pi R^3}{\mu_0} B_0$.

3.a. \vec{j}_s permet de calculer $\vec{\mathcal{M}} = \iint_{M \in S} \frac{1}{2} \vec{OM} \wedge \vec{j}_s dS$.

Il crée le champ $\vec{B}'_{\text{int}}(M)$ créé par \vec{j}_s tel que $\vec{B}'_{\text{int}}(M) + \vec{B}_0 = \vec{0} \forall M$ à l'intérieur de S .

$\Rightarrow \forall M_{\text{intérieur à } S}$: $\vec{B}'_{\text{int}}(M) = -\vec{B}_0$.

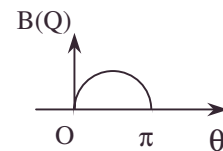
b. La relation sur \vec{B}_{tan} peut s'écrire : $\vec{j}_s(P) = \frac{\vec{n}_s}{\mu_0} \wedge \vec{B}_{\text{tot}}(Q)$ en $r = R$.

$$\vec{j}_s(P) = \vec{u}_r \wedge \frac{\vec{B}_{\theta \text{ total}}(Q)}{\mu_0} \quad \text{car } \vec{u}_r \wedge \vec{B}_r = \vec{0}.$$

$$\vec{j}_s(P) = -\vec{u}_r \wedge \left[\frac{\mu_0 2\pi R^3}{4\pi \mu_0 R^3} + 1 \right] \frac{B_0 \sin \theta \vec{u}_\theta}{\mu_0} = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \vec{u}_\varphi.$$

c. En Q : $r = R + 0$; $\vec{B}(Q) = \mu_0 \vec{j}_s(P) \wedge \vec{n}_s$; $B(Q) = \frac{3}{2} B_0 \sin \theta$.

on décrit la totalité des points Q pour $0 \leq \theta \leq \pi$
(cf. révolution cylindrique).



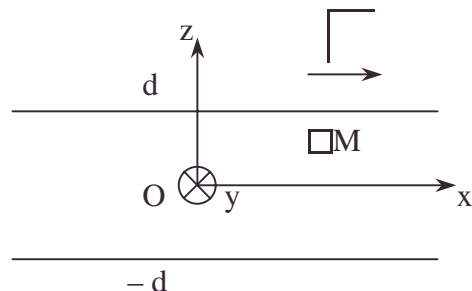
II.1. La conservation de la charge s'écrit localement $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$, soit $\text{div} \vec{j} = 0$ en

régime permanent ; vu l'expression de \vec{j} , $\text{div} \vec{A} = 0$ (cf. jauge de Coulomb, formulation en régime permanent de la jauge de Lorentz).

2. $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \text{rot} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \text{rot} \vec{j}$ (dérivées du 2^è ordre).

$$\underbrace{\text{grad} \text{div} \vec{B}}_0 - \vec{\nabla} \otimes \vec{B} = -\frac{1}{2} \text{rot} \vec{A} \otimes \vec{B} - \vec{\nabla} \otimes \vec{B} = \frac{\vec{B}}{2}.$$

3.a. L'absence de rôle physique à x, y pour le point M est due à l'invariance dans toute translation parallèlement au plan $z = 0$.



On a donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(z)$ satisfaisant à $\frac{d^2 \vec{B}}{dz^2} = \frac{\vec{B}}{\lambda^2}$ de solutions vectorielles :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) + \vec{B}_2 \sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right) \text{ cf. équation et solution de chaque coordonnée.}$$

La symétrie du problème de la plaque seule dans le champ \vec{B}_0 admet la symétrie du plan $z = 0$, telle que si $z \rightarrow -z$, $\vec{B}(z) = \vec{B}(-z) \Rightarrow \vec{B}_2 = 0$ pour que la fonction soit paire.

La relation de discontinuité de \vec{H} tangentiel habituelle devient une relation de continuité, puisque $\vec{j}_s = \vec{0}$ (car il ne peut exister de \vec{j} de valeur infinie au voisinage de la surface, zone où \vec{A} reste finie et continue).

$$\vec{B}(d) = \vec{B}_0 \text{ s'écrit } \vec{B}_1 \cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right) = \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\vec{B}_0}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)}; \vec{B} = \frac{\vec{B}_0}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

b. $\vec{j} = \frac{\vec{\text{rot}} \vec{B}}{\mu_0}$ (cf. forme locale du théorème d'Ampère).

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB_x}{dz} \vec{y} \Rightarrow \vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\sinh \frac{z}{\lambda}}{\cosh \frac{d}{\lambda}} \vec{y}.$$

c. Soit un point M extérieur à la plaque.

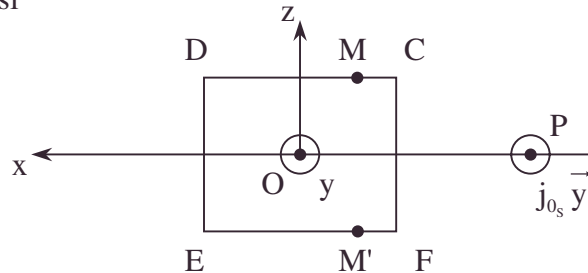
Etudions le champ $\vec{B}(M)$ créé par un plan où $\vec{j}_s = j_{0s} \vec{y}$.

Le plan orthogonal à \vec{y} est plan d'antisymétrie $\Rightarrow \vec{B}$ appartient au plan de la figure.

Les plans $x = x_M$ sont plans de symétrie de ce problème particulier $\Rightarrow \vec{B} = B(z) \vec{x}$.

La formule de Biot et Savart écrite ainsi

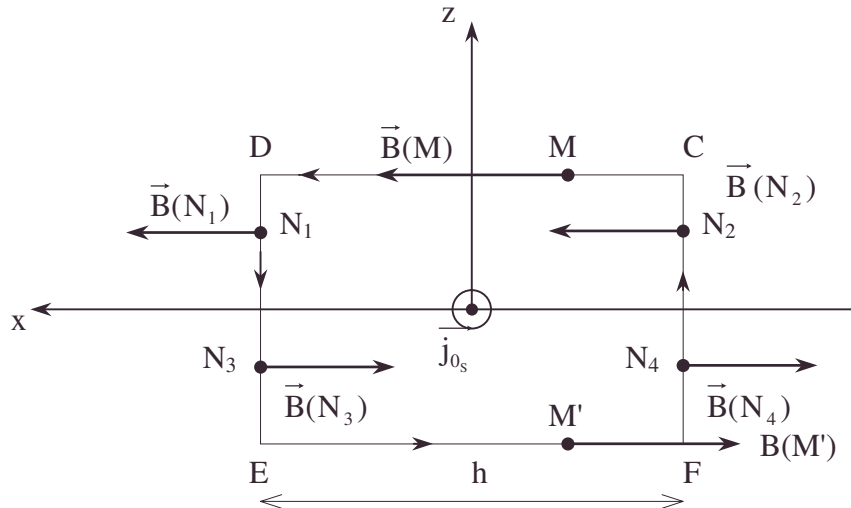
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \vec{j}_{0s} dS \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \text{ devient}$$



$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \left(\vec{j}_{0s} dS \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \right) \vec{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \left(\frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \wedge \vec{x} \right) j_{0s} dS.$$

En M', point symétrique de M, on a :

$$B_{M'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \left(\frac{\vec{PM'}}{\|\vec{PM'}\|^3} \wedge \vec{x} \right) j_{0s} dS = -B_M \text{ car } \vec{PM'} \wedge \vec{x} = -\vec{PM} \wedge \vec{x}.$$



Le théorème d'Ampère $\oint_{CDEF} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\Sigma_{ab}} \vec{j} d\vec{S}$ se réduit à :

$$+ B(z)h + 0 + B(z)h = \mu_0 j_0 h ;$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} j_{0s} \vec{x} \text{ pour } z > 0 ; \vec{B}(M') = -\frac{\mu_0 j_{0s}}{2} \vec{x} \text{ pour } z < 0 .$$

Champ indépendant de z dans chaque sous-espace (où néanmoins les signes sont différents).

Prenons 2 plaques d'épaisseur dz symétriques par rapport au plan $z = 0$ de courant surfacique " $\vec{j}_{0_{1s}} = \vec{j}(z) dz$ " ; " $\vec{j}_{0_{2s}} = -\vec{j}_{0_{1s}} = \vec{j}(-z) dz$ ".

$$\text{Leur contribution pour } z > d ; " \vec{B} " = " \vec{B}_1 " + " \vec{B}_2 " = \frac{\mu_0}{2} (\vec{j}(z) - \vec{j}(z)) dz \vec{x} = \vec{0} .$$

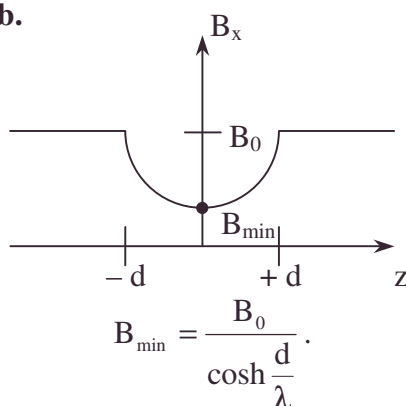
De même pour $z < -d$.

Le champ total \vec{B}_j extérieur à la plaque dû à \vec{j} est nul ; $\vec{B}_{ext} = \vec{B}_0$; cela justifie a posteriori l'hypothèse du champ \vec{B}_0 uniforme sur les plans $z = \pm d$ exprimée en **II.3.a**.

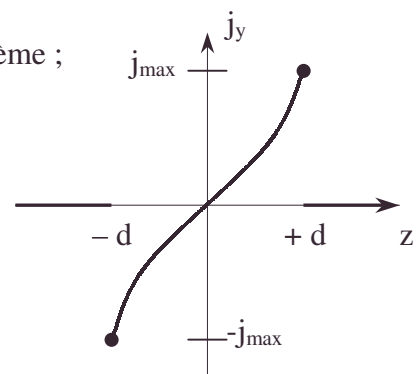
4.a. $\lambda = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s q^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ est une constante d'espace du problème ;

$$\text{AN : } \lambda = 1,68 \cdot 10^{-8} \text{ m} .$$

b.



c. $B_{\min} \leq \frac{B_0}{100} \Rightarrow \cosh \frac{d}{\lambda} \geq 100 ;$



$$d_{\min} = \lambda \operatorname{argcosh} 100 ; \text{AN: } 2d_{\min} = 1,78 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

d. On cherche z (ou plutôt $d - z$) tel que $100 \sinh \frac{z}{\lambda} = \sinh \frac{d}{\lambda}$.

La non donnée de d nous incite à former $d - z$ à partir de la relation ; nous faisons l'hypothèse qui le permet (à charge de la vérification a posteriori).

$$\sinh \frac{z}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{z}{\lambda}} + e^{-\frac{z}{\lambda}} \right) \text{ se simplifie si } \frac{z}{\lambda} \gg 1.$$

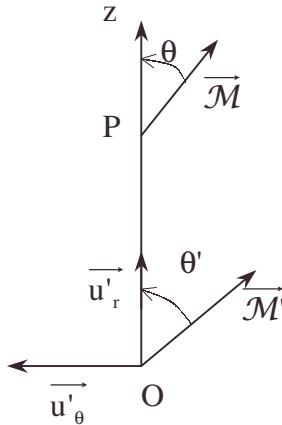
On a aussi :

$$\sinh \frac{z}{\lambda} = \frac{1}{2} e^{\frac{z}{\lambda}} \text{ et } \sinh \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2} e^{\frac{d}{\lambda}} \Rightarrow 100 e^{\frac{z}{\lambda}} = e^{\frac{d}{\lambda}} \Rightarrow 100 = e^{\frac{d-z}{\lambda}} \Rightarrow (d-z) = \lambda \ln 100 ;$$

l'énoncé suppose $d \gg \lambda$; l'hypothèse est vérifiée.

A.N. : $d - z = 7,74 \cdot 10^{-8} \text{ m.}$ On vérifie $z \neq d$.

III.1. L'énergie d'un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ dans le champ magnétique extérieur créé par un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}'}$ vaut $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\mathcal{M}'}$; $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cos \theta \vec{u}_r - \mathcal{M} \sin \theta \vec{u}_\theta$.



$$\vec{B}_{\mathcal{M}'}(\mathbf{P}) = \frac{2\mu_0 \mathcal{M}'}{4\pi} \frac{\cos \theta'}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\mu_0 \mathcal{M}'}{4\pi} \frac{\sin \theta'}{r^3} \vec{u}_\theta.$$

$$E_p = -\frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}' \cos \theta \cos \theta'}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}\mathcal{M}' \sin \theta \sin \theta'}{r^3}.$$

2.a. D'après les équations de Maxwell de la magnétostatique, le champ \vec{B} est déterminé par $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$ et les conditions limites. Les propositions de l'énoncé

seront donc équivalentes si les conditions limites sont les mêmes (les équations de Maxwell de la magnétostatique étant vraies pour les 2 propositions).

Restreignons la détermination de \vec{B} au demi espace $z > 0$ vu la symétrie de la proposition avec deux moments magnétiques et étudions les deux conditions limites $z = 0$ et $z = \infty$.

α. On sait que $\vec{j} = -\frac{\vec{A}}{\mu_0 \lambda^2}$; or $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$ et $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ dans le milieu supraconducteur.

Cela permet de choisir $\vec{A} = \vec{0}$ (sauf sur la surface $z = 0$). $\Rightarrow \vec{j} = \vec{0}$ sauf en $z = 0$.

La cause physique de \vec{j}_s est $\vec{\mathcal{M}}$ et le milieu supraconducteur.

En $P \in z = 0$, le champ $\vec{B}(\mathbf{P})_{\text{tangential}} = \frac{1}{2} \vec{n}_s \wedge \mu_0 \vec{j}_s$ d'après la formule de la pression

magnétostatique (cf. pression électrostatique) et $\vec{B}_{\text{normal}}(\mathbf{P}) = \vec{0}$ vu la continuité avec le milieu supraconducteur.

• condition limite, équation de Maxwell, moment magnétique, pression magnétostatique

En un point extérieur à $z = 0$: Q voisin de P, $\vec{B}_{\text{tangential}} = \vec{n}_s \wedge \mu_0 \vec{j}_s$.

A l'influence de \vec{M} s'ajoute une influence égale due au milieu supraconducteur (cf. électrostatique des conducteurs).

β. Dans le problème à deux dipôles symétriques situés en A et A' :

$$\vec{B}(P) = \mu_0 \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{AP})\vec{AP} - \vec{M} \cdot AP^2}{4\pi r^5} + \mu_0 \frac{3(\vec{M}' \cdot \vec{A'P})\vec{A'P} - \vec{M}' \cdot A'P^2}{4\pi r^5}.$$

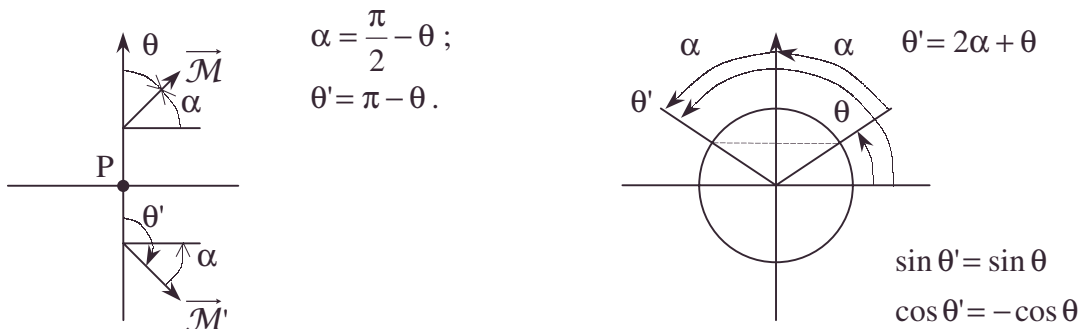
- vu la symétrie de \vec{M} et \vec{M}' , $(\vec{M} + \vec{M}') \cdot \vec{z} = 0$.
- vu la symétrie $\vec{M} \cdot \vec{AP} = \vec{M}' \cdot \vec{A'P}$
- vu la symétrie de \vec{AP} et $\vec{A'P}$; $[(\vec{M} \cdot \vec{AP})(\vec{AP} + \vec{A'P})] \cdot \vec{z} = 0$

$$\Rightarrow \vec{B}(P) \cdot \vec{z} = 0 ; \vec{B}_{\text{normal}}(P) = 0.$$

Comme \vec{B} est tangential en Q voisin de P, comme les contributions de \vec{M} et \vec{M}' y sont "égales", la contribution de \vec{M}' est bien égale à celle du milieu supraconducteur et $\vec{B}_{\text{tangential}}$ est le même en Q.

γ. On a les mêmes problèmes à l'infini dans la partie $z > 0$ (avec des conséquences identiques sur la sphère de l'infini, condition limite habituelle utile dans la résolution des 2 problèmes équivalents).

b. La symétrie se traduit par θ' :

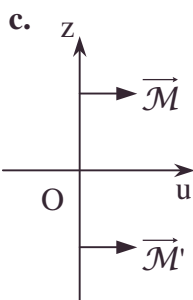


$$E_p = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}^2 \cos^2 \theta}{r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}^2 \sin^2 \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}^2}{r^3} (2\cos^2 \theta + \sin^2 \theta);$$

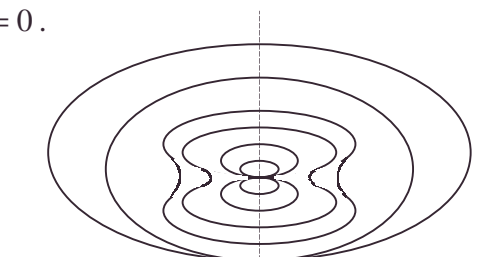
$$= \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi r^3} (\cos^2 \theta + 1).$$

Vu la figure de **III.1.** $f_z = f_r = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_\theta = \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}^2}{r^4} (\cos^2 \theta + 1)$ avec $r = 2a$:

$$f_z = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}^2}{64\pi a^4} (1 + \cos^2 \theta).$$



Les lignes de champ du dipôle \vec{M} sont "repoussées" par le champ de \vec{M}' et le plan $z = 0$ assure par "symétrie" $B_z = 0$ et $B_u > 0$ en $z = 0$.



• ligne de champ.

$$\mathbf{3.a.} \quad \theta = \frac{\pi}{2} ; \cos \theta = 0 ; f_z = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}^2}{64\pi a^4}$$

Cette force peut équilibrer le poids Mg tel que $f_z = Mg \Rightarrow a_{eq} = \left(\frac{3\mu_0 \mathcal{M}^2}{64\pi Mg} \right)^{\frac{1}{4}}$.

b.α. En imposant $\theta = \frac{\pi}{2} ; r = 2z$.

$$E_p = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi (2z)^3} + Mgz ; \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{6\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi (2z)^4} + Mg.$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} = \frac{24\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi (2z)^5} > 0 ; \text{l'équilibre est stable.}$$

β. Avec a fixé $r = 2a$.

$$E_p = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi (2a)^3} (\cos^2 \theta + 1) + Mga.$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{2\mu_0 \mathcal{M}^2}{4\pi (2a)^3} \cos \theta \sin \theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{32\pi a^3} \sin 2\theta.$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = \frac{2\mu_0 \mathcal{M}^2 \cos 2\theta}{32\pi a^3} > 0 ; \text{l'équilibre est stable.}$$

$$\mathbf{c.} \quad a_{eq} = 2,22 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

d. Le PFD s'écrit, pour $z = \frac{r}{2} = a_e + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll a_e$.

$$M\ddot{z} = -Mg + f_z = -Mg + f_z(a_e) + \left(\frac{\partial f_z}{\partial z} \right)_{z=a_e} \varepsilon.$$

Dans le voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}, \cos \theta = 1$:

$$f_z = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}^2}{64\pi z^4} ; \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{12}{64\pi} \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{z^5} \Rightarrow -\frac{3}{16} \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{\pi a_e^5} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=a_e} ;$$

$$\text{Or, } Mg = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}^2}{64\pi a_e^4} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z=a_e} = -\frac{4Mg}{a_e}.$$

$$\text{Finalement, } M\ddot{\varepsilon} + \frac{4Mg}{a_e} \varepsilon = 0 \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{g}{a_e}} ; T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{a_e}{g}} ; \text{AN : } T = 0,15 \text{ s.}$$

5.3.11. Milieux magnétiques Self en ferrite

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Le champ magnétique est noté B ; l'excitation magnétique est notée H . On rappelle :

- équilibre, excitation magnétique [cf H], ferrite [pertes fer minimales], milieux magnétiques, P.F.D., stabilité

a. que pour les milieux magnétiques linéaires, où $B = \mu H$, ($\mu = \text{cste}$), l'énergie magnétique volumique est égale à $\frac{1}{2}BH$.

b. que les ferrites sont des matériaux magnétiques non conducteurs ; ils ne peuvent donc être parcourus par des courants de Foucault.

c. que le théorème d'Ampère, exprimé à l'aide de l'excitation magnétique H , ne fait intervenir que les courants de charges libres, qui, dans tout le problème, sont les courants de conduction parcourant les fils de cuivre.

Le problème ne demande aucune autre connaissance sur les circuits magnétiques que celles qui viennent d'être rappelées.

La perméabilité magnétique de l'air est assimilée à celle du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

Première partie

I.1. On considère le cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique tracé avec B en ordonnée et H en abscisse.

Rappeler la signification physique de l'aire intérieure au cycle.

2. On étudie un matériau magnétique qui peut être considéré comme saturé pour $|H| > H_m$. Pour ce matériau, l'excitation magnétique varie entre $-H_m$ et $+H_m$, avec $0 < H_m < \frac{H_M}{10}$. Dans ce domaine de faible aimantation, la correspondance entre B et H

est donnée par la relation : $B = \mu_0 \left[(\mu_i + \alpha H_m) H + \varepsilon \frac{\alpha}{2} (H_m^2 - H^2) \right]$ ① avec $\mu_i > 0$;

$\alpha > 0$; $\varepsilon = \pm 1$.

1. Tracer, en coordonnées (H, B) , le cycle d'hystérésis correspondant, appelé cycle de Rayleigh, lorsque H évolue entre $-H_m$ et $+H_m$.

2. L'équation de la courbe de première aimantation est donnée par l'expression : $B = \mu_0 (\mu_i H + \alpha H^2)$. Compléter le dessin précédent en traçant cette courbe de première aimantation pour H variant de 0 à H_m .

Quelle dénomination peut-on donner à μ_i ?

3. Interpréter le cas particulier d'une substance obéissant à la relation ①, avec $\alpha = 0$.

3. On considère un volume torique d'une substance obéissant à la relation ①. Sa section est S . La circonférence du cercle moyen a pour longueur ℓ .

On fera les approximations résultant de l'inégalité $S \ll \ell^2$.

Sur ce tore, on enroule régulièrement N spires de fil de cuivre et on alimente cet enroulement par un générateur de courant sinusoïdal. On oriente le circuit obtenu de manière que l'intensité du courant ait pour expression $i = I_m \cos \omega t$;

($H = H_m$ pour $i = I_m$).

On définit une f.é.m. algébrique de manière habituelle : e est positive si, agissant seule dans le circuit, elle y fait circuler un courant d'intensité positive.

Calculer la f.é.m. induite dans l'enroulement.

Mettre l'expression de cette f.é.m. sous la forme : $e = E_1 \sin \omega t - \varepsilon E_2 \sin 2\omega t$.

Préciser la valeur à donner à ε suivant la valeur de t .

Exprimer E_1 et E_2 à partir des caractéristiques géométriques et magnétiques de l'échantillon, de ω et de H_m .

4. La f.é.m. e apparaît comme une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Montrer que le premier terme de son développement en série de Fourier s'écrit :

• Ampère [théorème d'], circuit magnétique, courants de Foucault, courbe de première aimantation, cycle d'hystérésis, équation de la courbe de première aimantation, équations d'un cycle d'hystérésis, excitation magnétique, ferrite, générateur de courant, graphe, matériau magnétique non linéaire, tore

$$e_1 = E_1 \sin \omega t - \frac{8}{3\pi} E_2 \cos \omega t .$$

5. Caractériser le déphasage ψ de la composante fondamentale $e_1(t)$ par rapport à la f.é.m. qui serait induite dans le bobinage si la condition $\alpha = 0$ était réalisée.

6. Calculer l'énergie W_h dissipée par hystérésis dans le tore, au cours d'un cycle. On exprimera W_h en fonction de H_m et des caractéristiques géométriques et magnétiques du tore et on admettra que, pour un tel calcul, seule la composante fondamentale e_1 est à prendre en compte.

7. Retrouver le résultat précédent en utilisant les propriétés du cycle d'hystérésis.

Deuxième partie

Un pot de ferrite est un circuit magnétique comportant plusieurs tronçons de longueurs et de sections respectives ℓ_k et S_k constitués d'un même matériau magnétique (ferrite), dont la perméabilité relative μ_r est (sauf mention contraire) supposée constante quelle que soit l'excitation, dans tout le volume du matériau, tant que l'aimantation demeure faible.

Le circuit comporte en outre un entrefer d'épaisseur a et de section S_a .

On suppose toujours $\ell_k^2 \gg S_k$ pour toutes les longueurs et sections.

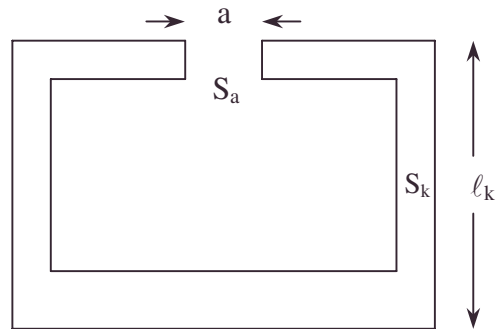


Figure 1

On néglige les fuites magnétiques, ce qui signifie que le flux ϕ du champ magnétique à travers une section du circuit est le même quelle que soit la section S_k ou S_a considérée.

N spires de cuivre, parcourues par le courant d'intensité $i = I_m \cos \omega t$, sont bobinées sur le noyau.

II.1. Exprimer le flux ϕ de \vec{B} à travers une section du circuit magnétique, en fonction de N , i , μ_0 , μ_r , et des caractéristiques géométriques a , S_a , et $F = \sum_k \left[\frac{\ell_k}{S_k} \right]$.

(F porte le nom de facteur de noyau).

2. Etant donné un pot de ferrite, de facteur de noyau F , construit à partir d'un matériau de perméabilité relative μ_r , on cherche à définir les caractéristiques géométriques ℓ et S d'un noyau magnétique fictif, utilisant le même matériau. Ce noyau aurait une longueur ℓ et sa section S serait constante (à l'exception de la section S_a de l'entrefer de largeur a ; a et S_a sont donc les mêmes pour le noyau réel et le noyau fictif).

1. On désire que le noyau fictif soit tel que, placé dans les mêmes conditions d'excitation que le noyau réel (N spires parcourues par i), le flux à travers une section du noyau (ou de l'entrefer), y soit égal au flux ϕ à travers une section du noyau réel.

Montrer qu'il en résulte une relation entre S , ℓ et F .

2. Montrer que si la relation précédente est satisfaite, pour une même valeur ϕ_m du flux ϕ à travers les sections des deux noyaux, l'énergie magnétique emmagasinée dans chacun des deux circuits est la même. On notera W_m cette énergie que l'on exprimera en fonction de ϕ_m et de μ_0 , μ_r , ℓ , S , a et S_a .

3. On désire de plus que la perte d'énergie par cycle d'hystérésis du noyau fictif, pour un même flux maximal ϕ_m , soit la même que pour le noyau réel. On admet que dans le domaine des faibles aimantations envisagées ici, cette perte d'énergie est

• aimantation [voir milieux magnétiques], circuit magnétique, énergie dissipée par hystérésis, énergie magnétique, entrefer, facteur de noyau magnétique, ferrite [pertes minimales], fuites magnétiques, matériau magnétique, pot de ferrite

proportionnelle à $\iiint B_m^3 d\tau$. Dans cette expression, $d\tau$ est un élément de volume du matériau magnétique, B_m est la valeur maximale atteinte par le champ magnétique B , dans le volume $d\tau$, au cours d'un cycle, et l'intégrale triple est étendue à tout le volume de matière aimantée.

Exprimer S et ℓ en fonction de $F = \sum_k \left(\frac{\ell_k}{S_k} \right)$ et de $G = \sum_k \left(\frac{\ell_k^2}{S_k^2} \right)$.

3. On définit enfin la perméabilité relative apparente μ_{app} du pot de ferrite de la façon suivante : un circuit magnétique de longueur ℓ et de section S (ces grandeurs ayant été définies à la question précédente), ne comportant pas d'entrefer, constitué d'un matériau de perméabilité magnétique relative μ_{app} , sur lequel serait enroulé le même nombre N de spires de fil de cuivre, conduirait à la même inductance L que le pot réel.

1. Calculer μ_{app} en fonction de μ_r , S , ℓ , a et S_a .

2. Application numérique : $\ell = 45 \text{ mm}$; $S = 136 \text{ mm}^2$; $S_a = 120 \text{ mm}^2$;
 $\mu_r = 2,0 \cdot 10^3$.

Calculer μ_{app} pour $a = 0,40 \text{ mm}$.

3. Montrer que si μ_r est suffisamment élevée, la perméabilité apparente μ_{app} est pratiquement indépendante de μ_r .

Donner dans ce cas son expression limite en fonction de ℓ , a , S_a et S .

4.a. Montrer que le schéma-bloc de la figure 2, composé d'opérateurs de proportionnalité idéaux et d'un soustracteur, rend bien compte de la situation physique correspondant à un circuit magnétique comportant un noyau de longueur ℓ , de section constante S , de perméabilité relative μ_r , dont l'entrefer serait caractérisé par a et S_a , et qui serait traversé par un flux ϕ sous l'action d'un courant d'intensité i parcourant N spires.

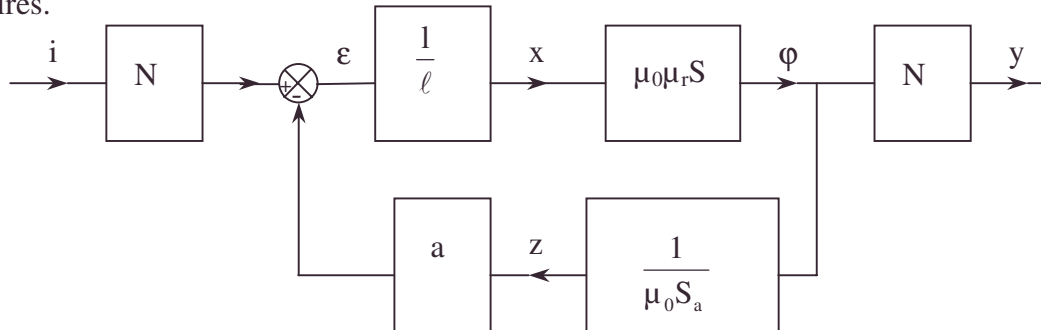


Figure 2

b. Quelles sont les grandeurs représentées par les variables x , y et z ?

c. Calculer la fonction de transfert $\frac{y}{i}$. Quelle est sa signification ?

d. Comment peut-on interpréter l'effet d'un entrefer de largeur a et de section S_a dans un circuit magnétique caractérisé par μ_r , ℓ et S , compte tenu de ce schéma-bloc ?

4. On dispose d'un pot de ferrite (μ_r , ℓ , S) dont la largeur a de l'entrefer est réglable (on suppose pour simplifier que l'égalité $S_a = S$ est réalisée).

1. La largeur a est nulle (absence d'entrefer). On bobine N_0 spires de fil de cuivre sur ce pot et on envoie dans ce bobinage un courant d'intensité $i = I_m \cos \omega t$. Sous l'action de ce courant, le flux ϕ à travers une section du noyau évolue entre $-\phi_{0m}$ et $+\phi_{0m}$.

Exprimer l'énergie magnétique maximale W_{0m} emmagasinée dans le noyau en fonction de ϕ_{0m} , μ_0 , μ_r , ℓ et S .

• autoinductance [self], circuit magnétique, coefficient d'auto induction, coefficient d'inductance [self], effet Joule, entrefer, fonction de transfert, identification, inductance, perméabilité magnétique relative, pot de ferrite, schéma-bloc

On note W_{0h} l'énergie perdue dans le noyau au cours d'un cycle d'hystérésis lorsque φ évolue entre $-\varphi_{0m}$ et $+\varphi_{0m}$; et W_{0j} l'énergie perdue au cours d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, par effet Joule dans le fil de cuivre.

Le facteur de qualité du pot de ferrite dépourvu d'entrefer est défini par le quotient :

$$Q_0 = \frac{W_{0m}}{W_{0h} + W_{0j}} \left(\text{cf. } Q_0 = \frac{\text{énergie disponible}}{\text{énergie dissipée}} \right).$$

2. La largeur a est réglable : on posera $\theta = \frac{\mu_r a}{\ell}$.

La pulsation ω du courant, ainsi que l'amplitude I_m de son intensité i sont maintenues constantes. On ajuste le nombre de spires N de l'enroulement de manière que le flux φ à travers une section du noyau évolue toujours entre $-\varphi_{0m}$ et $+\varphi_{0m}$, avec $\varphi_{0m} = \text{cste}$.

a. Calculer N en fonction de N_0 (correspondant à $a = 0$ et de θ)

b. Exprimer l'énergie magnétique maximale W_m emmagasinée dans l'ensemble du circuit magnétique (noyau + entrefer), en fonction de W_{0m} (correspondant à $a = 0$) et de θ .

c. La résistance du fil de cuivre est proportionnelle à N .

Exprimer l'énergie W_J perdue par effet Joule dans le cuivre au cours d'une période en fonction de W_{0j} et de θ .

d. Exprimer de même l'énergie W_h perdue par hystérésis au cours d'un cycle en fonction de W_{0h} . (On rappelle que W_h ne dépend que de B_m).

e. Calculer le facteur de qualité Q du pot de ferrite en fonction de W_{0m} , W_{0h} , W_{0j}

et de θ : $Q = \frac{W_m}{W_h + W_J}$.

f. Application numérique : $W_{0h} = 16 W_{0j}$; $Q_0 = 50$; $a = 0,40 \text{ mm}$; $\mu_r = 2,0 \cdot 10^3$; $\ell = 50 \text{ mm}$.

Calculer Q ; quelle est la valeur limite de Q lorsque a augmente ?

3. Disposant du même pot de ferrite (μ_r , ℓ , S) dont la largeur a de l'entrefer est réglable, on ajuste maintenant le nombre de spires N de manière que, lorsque a augmente, l'inductance L de la bobine ainsi formée soit maintenue constante (pour $a = 0$, on prend $N = N_0$). L'amplitude I_m et la pulsation ω sont constantes ; on pose $\theta = \frac{\mu_r a}{\ell}$.

a. Calculer N_0 en fonction de L , ℓ , μ_0 , μ_r et S .

b. Calculer N en fonction de N_0 et θ .

c. Calculer W_m en fonction de W_{0m} , énergie maximale emmagasinée lorsque $a = 0$.

d. Calculer de même W_J en fonction de W_{0j} et de θ .

e. En admettant que l'énergie W_h perdue par hystérésis au cours d'un cycle est proportionnelle à φ_m^3 , calculer W_h en fonction de W_{0h} et de θ .

f. Montrer que le facteur de qualité $Q = \frac{W_m}{W_h + W_J}$ passe par un maximum pour une

valeur optimale θ_{opt} de θ que l'on déterminera.

g. Application numérique : $W_{0h} = 16 W_{0j}$; $Q_0 = 50$; $\mu_r = 2,0 \cdot 10^3$; $\ell = 50 \text{ mm}$.

Calculer a_{opt} correspondant à θ_{opt} .

Troisième partie

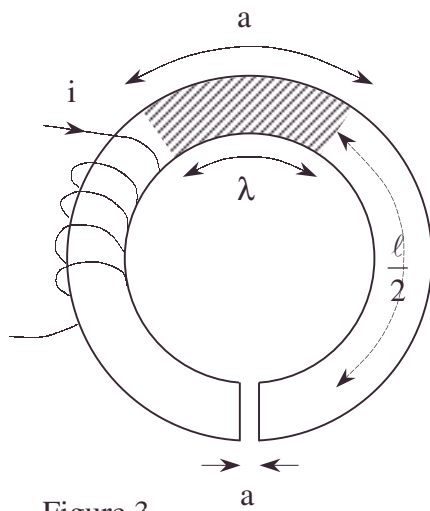


Figure 3

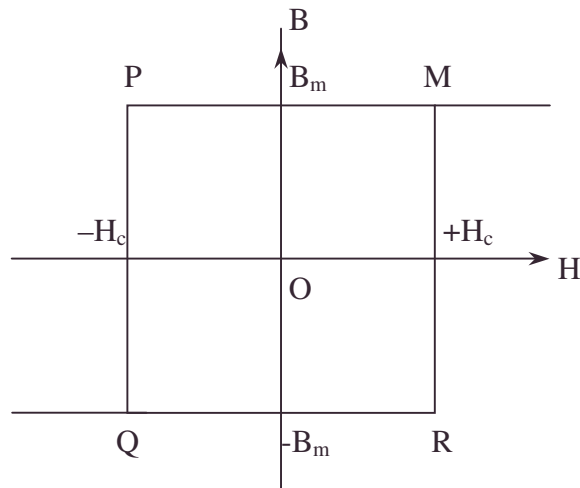


Figure 4

1. On considère un volume torique, de section S , de rayon moyen R tel que $R^2 \gg S$, constitué de trois parties (figure 3).

- une pièce de matériau ferromagnétique dur (aimant), de longueur λ .
- deux pièces en matériau ferromagnétique doux, de longueur totale ℓ .
- un entrefer d'épaisseur a et de section $S_a = S$.

Le matériau dur est caractérisé par un cycle d'hystérésis rectangulaire (figure 4) avec les valeurs remarquables B_m et H_c .

Le matériau doux est linéaire : $B = \mu_0 \mu_r H$.

On dispose N tours de fil sur le circuit magnétique (Figure 3), et on fait circuler dans le bobinage un courant d'intensité i . On admet qu'il n'y a aucune fuite magnétique.

Montrer que le circuit magnétique et le bobinage parcouru par i imposent aux variables B , H caractérisant l'aimant de longueur λ , déjà liées par le cycle d'hystérésis, de vérifier une deuxième relation que l'on exprimera.

2. $\ell = 20 \text{ cm}$; $\mu_r = 5,0 \cdot 10^3$; $a > 1 \text{ mm}$.

Montrer que le résultat précédent peut se simplifier.

(On se placera désormais dans ce cas).

3. $B_m = 1 \text{ T}$; $H_c = 5,0 \cdot 10^4 \text{ Am}^{-1}$; $\lambda = 4,0 \text{ cm}$; $N = 4,0 \cdot 10^3$ tours.

1. $a = a_1 = 5,0 \text{ mm}$.

Ecrire, en passant aux valeurs numériques, la relation précédente simplifiée et paramétrée par i (on prendra $4\pi = 12,5$). Représenter, sur le graphe du cycle d'hystérésis de l'aimant, la relation précédente pour $i = 2 \text{ A}$.

2. $a = a_1 = 5,0 \text{ mm}$; i décroît de $i_{m1} = 2 \text{ A}$ à $-i_{m1}$.

Représenter graphiquement les variations de B en fonction de i pendant cette décroissance.

Compléter le graphe pour la phase de croissance où i passe de $-i_{m1}$ à $+i_{m1}$ en indiquant, par des flèches, le sens de parcours du cycle obtenu.

Préciser les valeurs remarquables de i , notamment celles qui correspondent aux points M, P, Q, R du cycle d'hystérésis de l'aimant.

3. Reprendre l'étude précédente avec $a = a_2 = 2,0 \text{ mm}$ et $i_{m2} = 1,2 \text{ A}$.

4. Quelle est la valeur du champ magnétique B dans l'entrefer si, après une série de cycles, on ramène i de i_m à 0 ? (Traiter les deux cas $a_1 = 5,0 \text{ mm}$ et $a_2 = 2,0 \text{ mm}$).

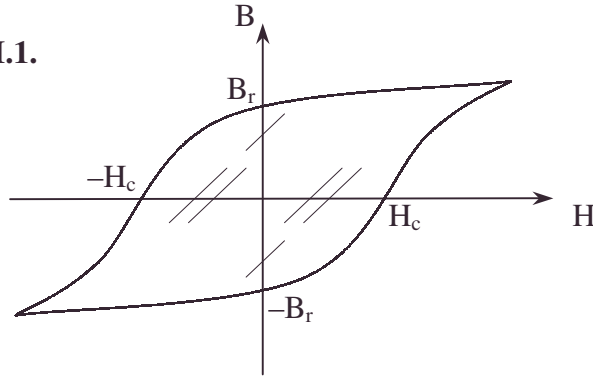
5. Quelle serait la longueur minimale à donner à λ , toutes les autres dimensions et caractéristiques étant inchangées, pour que, une fois le bobinage enlevé après

aimantation, le champ magnétique résiduel dans l'entrefer soit égal à $B_m = 1\text{T}$ pour $a = a_1 = 5,0\text{ mm}$?

Autres concours ; Durée : 4h.

Corrigé

I.1.



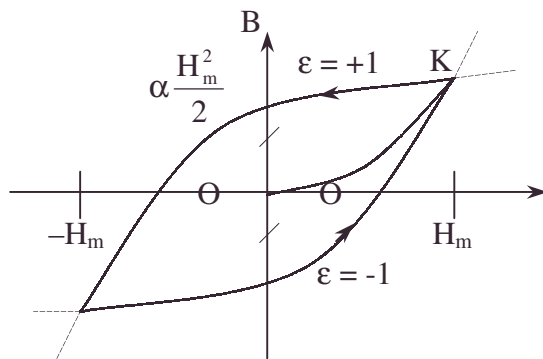
B_r = champ rémanent.

H_c = excitation magnétique coercitive.

$$\oint H dB + \oint \mu_0 H dH + \oint \mu_0 H dJ = \mu_0 \oint H dJ + 0$$

L'aire représente l'énergie dissipée par unité de volume pendant un cycle.

2.



1. On a 2 portions de parabole pour décrire le cycle.

2. On a une parabole passant par O et K selon ce modèle.

$$dB = \mu_0 \mu_i dH + 2\mu_0 \alpha H dH.$$

$$\text{Quand } H \rightarrow 0, \frac{dB}{dH} = \mu_0 \mu_i.$$

μ_i joue le rôle d'une perméabilité relative différentielle.

3. $B = \mu_0 \mu_i H$: on a un milieu linéaire de perméabilité relative μ_i .

$$e = -\frac{d\phi_{\text{total}}}{dt} = -N \frac{d\phi}{dt} = -NS \frac{dB}{dt}.$$

$$e = -NS\mu_0 \left[(\mu_i + \alpha H_m) \frac{dH}{dt} - \epsilon \alpha H \frac{dH}{dt} \right]$$

Or d'après le théorème d'Ampère appliqué au contour moyen, $H\ell = Ni$

$$H = \frac{N}{\ell} I_m \cos \omega t \Rightarrow H_m = \frac{NI_m}{\ell}$$

$$\text{et } \frac{dH}{dt} = -H_m \omega \sin \omega t$$

$$e = -NS\mu_0 [-(\mu_i + \alpha H_m) \omega H_m \sin \omega t + \omega \epsilon \alpha H_m^2 \sin \omega t \cos \omega t].$$

$$e = NS\mu_0 (\mu_i + \alpha H_m) H_m \omega \sin \omega t - \frac{\epsilon}{2} NS\mu_0 \alpha H_m^2 \omega \sin 2\omega t.$$

$$\Rightarrow E_1 = NS\mu_0 H_m (\mu_i + \alpha H_m) \omega ; E_2 = \frac{1}{2} NS\mu_0 \alpha H_m^2 \omega.$$

• Ampère [théorème d'], champ magnétique résiduel, champ rémanent, entrefer, minimum, moment magnétique

$\varepsilon = +1$ correspond à H variant de $+H_m$ à $-H_m$ soit ωt variant de 0 à π (modulo 2π).

$\varepsilon = -1$ correspond à H variant de $-H_m$ à $+H_m$ soit ωt variant de π à 2π (modulo 2π).

4. La théorie des séries de Fourier donne : $e = \sum_0^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t)$, et

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T e \cos \omega t dt ; b_1 = \frac{2}{T} \int_0^T e \sin \omega t dt .$$

$$\text{a. } a_1 = \frac{2}{T} E_1 \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt - \frac{2}{T} E_2 \left[\int_0^{\frac{T}{2}} 2 \sin \omega t \cos^2 \omega t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T 2 \sin \omega t \cos^2 \omega t dt \right]$$

vu $\varepsilon = \pm 1$;

$$a_1 = \frac{2E_1}{T} \left[\frac{\cos^2 \omega t}{2\omega} \right]_0^T + \frac{4}{T} E_2 \left(\left[\frac{\cos^3 \omega t}{3\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{\cos^3 \omega t}{3\omega} \right]_{\frac{T}{2}}^T \right).$$

$$a_1 = 0 + \frac{4E_2}{T} \left(-\frac{2}{3\omega} - \frac{2}{3\omega} \right) = -\frac{8E_2}{3\pi}.$$

$$\text{b. } b_1 = \frac{2}{T} E_1 \int_0^T \sin^2 \omega t dt - \frac{2}{T} E_2 \left[\int_0^{\frac{T}{2}} 2 \sin^2 \omega t \cos \omega t dt - \int_{\frac{T}{2}}^T 2 \sin^2 \omega t \cos \omega t dt \right]$$

vu $\varepsilon = \pm 1$;

$$b_1 = E_1 - \frac{4E_2}{T} \left(\left[\frac{\sin^3 \omega t}{3\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{\sin^3 \omega t}{3\omega} \right]_{\frac{T}{2}}^T \right) = E_1 - 0.$$

5. Si $\alpha = 0$, $e_0 = NS\mu_0\mu_1 H_m \omega \sin \omega t$.

Si $\alpha \neq 0$, $e_1 = E \sin (\omega t - \psi) = E \cos \psi \sin \omega t - E \sin \psi \cos \omega t$.

On identifie avec $e_1 = E \cos \psi = E_1$; $E \sin \psi = \frac{8E_2}{3\pi} \Rightarrow \tan \psi = \frac{8E_2}{3\pi E_1}$;

$$E^2 (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = E_1^2 + \frac{64}{9\pi^2} E_2^2 = E^2. \psi \text{ dépend de } \alpha : \alpha \text{ est la cause d'un retard.}$$

6. $u = -e$;

$$W_h = \int_0^T u i dt = - \int_0^T e_1 i dt ;$$

$$W_h = -E_1 I_m \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt + \frac{8E_2 I_m}{3\pi} \int_0^T \cos^2 \omega t dt .$$

$$W_h = 0 + \frac{8E_2 I_m}{3\pi} \frac{T}{2} = \frac{8}{3\pi} \frac{1}{2} NS\mu_0 \alpha H_m^2 \omega . \frac{2\pi}{2\omega} \cdot \frac{H_m \ell}{N} = \frac{4}{3} S \ell \mu_0 \alpha H_m^3 .$$

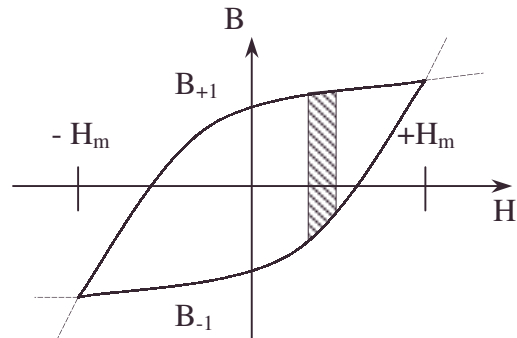
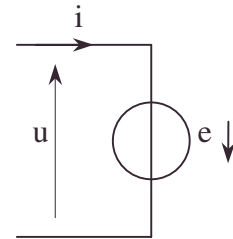
α intervient.

7. L'aire positive du cycle d'hystérésis

$$\int_{-H_m}^{+H_m} (B_{+1} - B_{-1}) dH = \alpha \mu_0 \int_{-H_m}^{+H_m} (H_m^2 - H^2) dH$$

$$= \alpha \mu_0 \left[2H_m^3 - \left[\frac{1}{3} H^3 \right]_{-H_m}^{+H_m} \right] ;$$

$$= \alpha H_m^3 \left(2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} \alpha \mu_0 H_m^3 .$$



• identification

Or le volume du tore dans l'approximation de l'énoncé est celui du cylindre de section S et de hauteur ℓ soit $S\ell$. On retrouve bien $W_h = \frac{4}{3}\alpha\mu_0 H_m^2 S\ell$.

II.1. $\varphi_a = B_a S_a = \mu_0 H_a S_a$; $\varphi_k = B_k S_k = \mu_k H_k S_k$.

La conservation du flux de \vec{B} (cf. $\text{div } \vec{B} = 0$) donne $\varphi = \varphi_a = \varphi_k \quad \forall k$.

Le théorème d'Ampère relatif à \vec{H} sur la ligne de champ moyenne s'écrit :

$$aH_a + \sum_k H_k \ell_k = Ni ; \text{ or } H_a = \frac{\varphi}{\mu_0 S_a} \text{ et } H_k = \frac{\varphi}{\mu_k S_k},$$

$$\Rightarrow \varphi \left(\frac{a}{\mu_0 S_a} + \sum_k \frac{\ell_k}{\mu_k S_k} \right) = Ni \text{ or } \mu_k = \mu_0 \mu_r \Rightarrow \varphi = \frac{\mu_0 Ni}{\frac{a}{S_a} + \frac{\ell}{\mu_r}}.$$

2.1. $\sum \ell_k = \ell$; $S_k = S \quad \forall k \Rightarrow F = \frac{\ell}{S}$.

2. Il s'agit de l'énergie magnétique d'une bobine : $W_m = \frac{1}{2} Li^2$ avec $Li = \phi = N\varphi_m$,

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} N\varphi_m i = \frac{1}{2\mu_0} \varphi_m^2 \left(\frac{a}{S_a} + \frac{F}{\mu_r} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \varphi_m^2 \left(\frac{a}{S_a} + \frac{\ell}{\mu_r S} \right) \text{ d'après II.1.}$$

On peut donc avoir identité.

3.a. Pour le noyau réel, $\iiint B_m^3 d\tau = \sum_k \frac{\varphi_m^3}{S_k^3} S_k \ell_k$ vu la conservation du flux dans chaque segment ; $\varphi_m = S_k B_k \quad \forall k$.

$$\iiint B_m^3 d\tau = \varphi_m^3 \sum_k \frac{\ell_k}{S_k^2} = G \varphi_m^3.$$

b. Pour le noyau fictif, $\iiint B_m^3 d\tau = \frac{\varphi_m^3}{S^3} S\ell = \varphi_m^3 \frac{\ell}{S^2}$.

L'identification donne : $G = \frac{\ell}{S^2}$ or $F = \frac{\ell}{S}$; on en tire : $S = \frac{F}{G}$; $\ell = \frac{F^2}{G}$.

3.1. On a $L = \frac{N\varphi}{i} = \frac{\mu_0 N^2}{\frac{a}{S_a} + \frac{\ell}{\mu_r S}}$.

Pour $a = 0$ et $\mu_r = \mu_{app}$, on a : $L_0 = \frac{\mu_0 N^2 \mu_{app} S}{\ell}$.

L'identification de L_0 et L donne : $\mu_{app} = \frac{\mu_r}{1 + \mu_r \frac{aS}{\ell S_a}}$.

2. $\mu_{app} = 94,6$.

3. Si $\mu_r \rightarrow \infty$, $\mu_{app} = \frac{\ell S_a}{aS}$, indépendant de μ_r .

4.a. A la sortie du soustracteur : $\varepsilon = Ni - \frac{a\varphi}{\mu_0 S_a}$.

La chaîne directe donne : $\varphi = \frac{\mu_0 \mu_r S}{\ell} \varepsilon$, d'où en éliminant ε ,

$$\varphi = \frac{\mu_0 N i}{\frac{a}{S_a} + \frac{\ell}{\mu_r S}}, \text{ grandeur physique essentielle.}$$

b. On en déduit : $x = \frac{\varphi}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{\mu_0 \mu_r}{\mu_0 \mu_r S} H S = H$ dans le noyau.

$y = N\varphi$ est le flux total à travers le circuit (force magnétomotrice du noyau).

$$z = \frac{\varphi}{\mu_0 S_a} = \frac{\mu_0 S_a H_a}{\mu_0 S_a} = H_a \text{ dans l'entrefer.}$$

c. $\frac{y}{i} = \frac{N\varphi}{i} = L$, inductance du circuit.

d. L'entrefer intervient pour caractériser la chaîne de retour ;

$$\beta = \frac{a}{\mu_0 S_a} \text{ (réductance de l'entrefer) dont l'importance appartient au cadre de la formule}$$

de Black qu'il faut mettre en évidence.

• On a : $L = \frac{y}{i} = \frac{N\varphi}{i} = \frac{N^2}{\frac{a}{\mu_0 S_a} + \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S}} = \frac{\mu_0 \mu_r S \frac{N^2}{\ell}}{1 + \frac{\mu_0 \mu_r S_a}{\ell \mu_0 S_a}},$

de la forme $L = N^2 \frac{A}{1 + A\beta}$ avec $A = \frac{\mu_0 \mu_r S}{\ell}$ cf. chaîne directe.

• Si $A \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \frac{N^2}{\beta}$. L'entrefer est alors seul à déterminer L.

4.1. L'indice zéro concerne le système quand $a = 0$.

Vu **II.2.2.**, $W_{0\max} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\varphi_{0m}^2 \ell}{\mu_r S}.$

2.a. $\varphi_{\max}(a = 0, N_0) = \mu_0 \frac{N_0 I_m \mu_r}{\ell} S$; $\varphi_{\max}(a \neq 0, N) = \frac{\mu_0 N I_m \mu_r S}{\ell \left(1 + \frac{a \mu_r}{S_a \ell} \right)}$, car $S_a = S$.

$$\varphi_{\max}(a = 0, N_0) = \varphi_{\max}(a \neq 0, N) \Rightarrow N = N_0(1 + \theta) \text{ avec } \theta = \frac{\mu_r a}{\ell}.$$

θ seule grandeur physique de détermination.

b. D'après **II.2.2.**, avec $S_a = S$:

$$W_{\max} = \frac{\varphi_{0m}^2}{2\mu_0 S} \left(a + \frac{\ell}{\mu_r} \right) \text{ or } W_{0\max} = \frac{\varphi_{0m}^2}{2\mu_0} \frac{\ell}{\mu_r S} \Rightarrow W_{\max} = W_{0\max} (1 + \theta).$$

c. $W_{J_{\max}} = \frac{1}{2} R I_m^2$; $W_{0J_{\max}} = \frac{1}{2} R_0 I_m^2.$

• Black[formule de], chaîne de retour de rétroaction, chaîne directe [munie d'une chaîne de retour], entrefer, force magnétomotrice [formule d'Hopkinson], identification, maximum, soustracteur [rétroaction]

$$\frac{W_{J_{\max}}}{W_{0J_{\max}}} = \frac{R}{R_0} = \frac{N \frac{\ell_1}{\gamma_1 s_1}}{N_0 \frac{\ell_1}{\gamma_1 s_1}} = \frac{N}{N_0} = 1 + \theta ; \quad \begin{array}{l} \ell_1 = \text{longueur d'une spire ;} \\ s_1 = \text{section du fil ;} \\ \gamma_1 = \text{conductivité du fil.} \end{array}$$

$$W_{J_{\max}} = W_{0J_{\max}} (1 + \theta) .$$

d. Vu I.7. $\frac{W_{h_{\max}}}{W_{h_0 \max}} = \frac{KB_m^3 \ell S}{KB_{m_0}^3 \ell S} = \frac{B_m^3}{B_{m_0}^3} = \left(\frac{\varphi_m}{\varphi_{0m}} \right)^3 = 1$ comme le rappelle l'énoncé en

II.2.1. $\Rightarrow W_{h_{\max}} = W_{h_{\max_0}} .$

e. $Q = \frac{W_{\max}}{W_{h_{\max}} + W_{J_{\max}}} = \frac{W_{0\max} (1 + \theta)}{W_{h_0 \max} + W_{0J_{\max}} (1 + \theta)} .$

f. $Q_0 = \frac{W_{0\max}}{W_{h_0 \max} + W_{0J_{\max}}} ; Q_0 = \frac{W_{0\max}}{17 W_{0J_{\max}}} .$

$$Q = \frac{W_{0\max} (1 + \theta)}{W_{0J_{\max}} (17 + \theta)} = 17 Q_0 \frac{(1 + \theta)}{(17 + \theta)} \text{ avec } \theta = \frac{\mu_r a}{\ell} ; \text{ A.N. : } \theta = 16 ; Q = 438 .$$

Si $a \rightarrow +\infty$, $Q = 17 Q_0$; A.N. : $Q = 850$.

3.a. $L = L_0 = \mu_0 \mu_r \frac{N_0^2 S}{\ell}$ vu **II.2.3.1.** $\Rightarrow N_0 = \left(\frac{\ell L}{\mu_0 \mu_r S} \right)^{\frac{1}{2}} .$

b. Or, $L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{\ell (1 + \theta)}$, d'après **2.3.1.** ; $L = L \Rightarrow N_0^2 = \frac{N^2}{1 + \theta} \Rightarrow N = N_0 (1 + \theta)^{\frac{1}{2}} .$

c. $W_{\max} = \frac{1}{2} L I_m^2 = W_{0\max}$ puisque $L_0 = L$.

N est le nouveau réglage dépendant de θ .

d. $W_{J_{\max}} = \frac{1}{2} R I_m^2 ; W_{0J_{\max}} = \frac{1}{2} R_0 I_m^2 ; \frac{W_{J_{\max}}}{W_{0J_{\max}}} = \frac{R}{R_0} = \frac{N \frac{\ell_1}{\gamma_1 s_1}}{N_0 \frac{\ell_1}{\gamma_1 s_1}} = \frac{N}{N_0} = (1 + \theta)^{\frac{1}{2}} .$

e. $W_{h_{\max}} = K' \varphi_m^3 ; W_{0h_{\max}} = K' \varphi_{0m}^3 ; \frac{W_{h_{\max}}}{W_{0h_{\max}}} = \frac{K'}{K'} \cdot \frac{\left(\frac{L I_m}{N} \right)^3}{\left(\frac{L_0 I_m}{N_0} \right)^3} = \left(\frac{N_0}{N} \right)^3 = (1 + \theta)^{-\frac{3}{2}} .$

f. $Q = \frac{W_{0\max}}{W_{0h_{\max}} (1 + \theta)^{-\frac{3}{2}} + W_{0J_{\max}} (1 + \theta)^{\frac{1}{2}}} .$

Q est maximal quand $\frac{1}{Q}$ est minimal.

$$\frac{d\left(\frac{1}{Q}\right)}{d\theta} = \frac{-\frac{3}{2} \frac{W_{0h_{\max}}}{(1 + \theta)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{W_{0J_{\max}}}{(1 + \theta)^{\frac{3}{2}}}}{W_{0\max}} = 0 \text{ pour } (1 + \theta)^2 = \frac{3 W_{0h_{\max}}}{W_{0J_{\max}}} ; \theta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3 W_{0h_{\max}}}{W_{0J_{\max}}} - 1} .$$

$$g. \frac{W_{0h_{\max}}}{W_{0J_{\max}}} = 16 ; \Rightarrow \theta_{\text{op}} = 5,93 \Rightarrow a_{\text{opt}} = \theta_{\text{opt}} \frac{\ell}{\mu_r} ; a_{\text{opt}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

III. On néglige l'énergie dissipée par hystérésis dans le cycle aplati du matériau doux.

1. Ecrivons le théorème d'Ampère sur le contour moyen :

$$\lambda H_{\text{dur}} + a H_a + \ell H_{\text{doux}} = Ni ; \text{ on notera } H_{\text{dur}} = H.$$

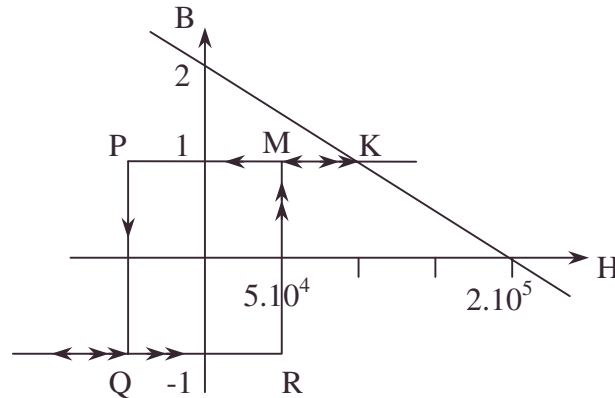
Or, vu la conservation du flux de B ($\text{div} \vec{B} = 0$), $B_{\text{dur}} = B_a = B_{\text{doux}} = B$.

$$\lambda H + a \frac{B}{\mu_0} + \frac{\ell B}{\mu_0 \mu_r} = Ni, \text{ soit encore } B \left(a + \frac{\ell}{\mu_r} \right) = \mu_0 (Ni - \lambda H).$$

$$2. \frac{\ell}{\mu_r} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m} ; a > 10^{-3} \text{ m} ; \text{ on néglige } \frac{\ell}{\mu_r} \text{ devant } a \Rightarrow B = \mu_0 \left(\frac{N}{a} i - \frac{\lambda}{a} H \right).$$

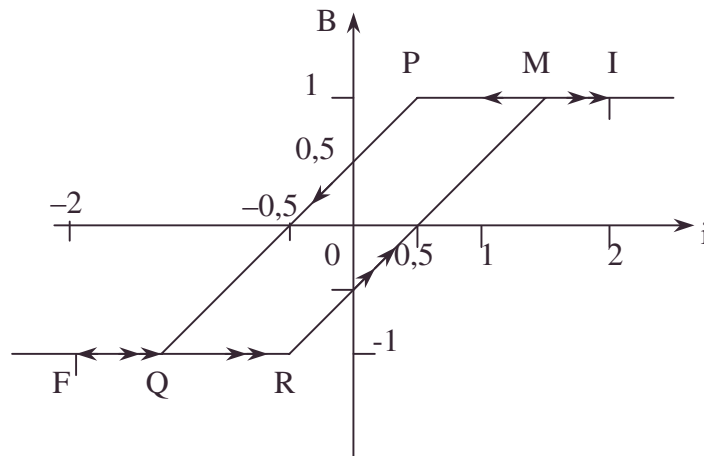
$$3.1. B = i - 10^{-5} H ; i = 2A \Rightarrow B = 2 - 10^{-5} H, \text{ d'où la droite coupant les axes en } B = 2T \text{ et } H = 2 \cdot 10^5 \text{ A.m}^{-1}.$$

On lit la valeur de B et de H à l'intersection des 2 courbes en $K(10^5, 1)$.

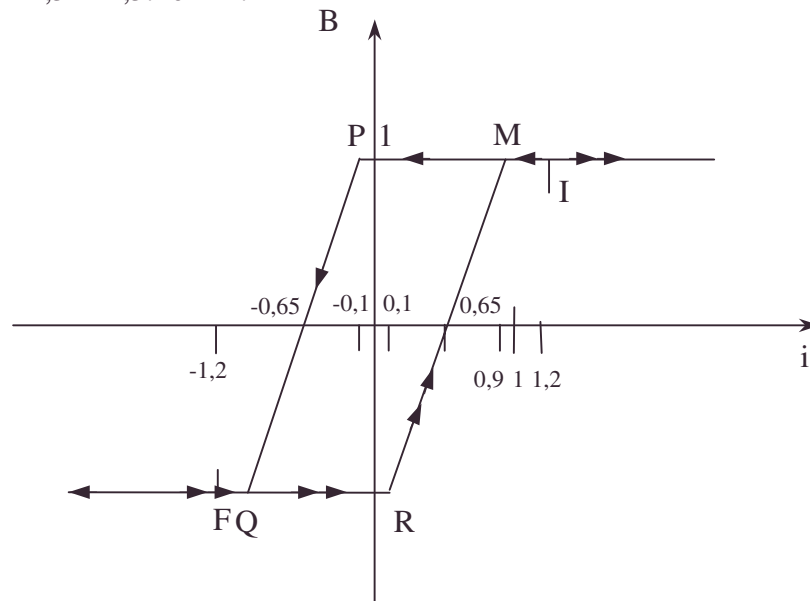


2. Changeons l'ordonnée à l'origine de la droite précédente et lisons B correspondant à i_{ml} .

Remarquons que les droites sont de pente -10^{-5} en H et toujours parallèles entre elles. On conserve la symétrie.



3. $a_2 = 2 \text{ mm}$; $B = 2,5i - 2,5 \cdot 10^{-5} H$.



4.a. $a_1 = 5 \text{ mm}$; on a : $B = -10^{-5} H \Rightarrow$ on lit sur le cycle 3.1. et 3.2.
 $\Rightarrow B = 0,5 \text{ T} \Rightarrow H = -5 \cdot 10^4 \text{ A.m}^{-1}$,

b. $a_2 = 2 \text{ mm}$; on a $B = -2,5 \cdot 10^{-5} H$.

On lit sur le cycle 3.1. et 3.3. $B = +1 \text{ T} \Rightarrow H = -0,4 \cdot 10^5 \text{ A.m}^{-1}$.

5. $i = 0 \Rightarrow Ba + \lambda \mu_0 H = 0$; $B = -10^{-5} H$.

$$\lambda = -\frac{Ba}{\mu_0 H} = \frac{10^{-5} a}{\mu_0} ; \text{A.N.: } \lambda = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

5.3.12. Vortex

Voir page 438.

5.3.13. Tourbillon dans un fluide parfait

Voir page 447.

5.3.14. Effets pelliculaires

Voir page 827.

5.3.15. Refroidissement par désaimantation adiabatique

Voir page 563.

5.3.16. Supraconductivité

Voir page 569.

5.3.17. Mouvement de particules 2

Voir page 30.

5.4. Phénomènes d'induction

Appartient aux programmes de MP, PSI, PC, PT, TSI2, TPC2

5.4.1. Circuits couplés par mutuelle

On dispose de deux bobines possédant un centre de symétrie O commun et des axes Ox_1 et Ox_2 tels que $(Ox_1, Ox_2) = \theta$.

1. Proposer un protocole expérimental pour déterminer le coefficient d'inductance $M(\theta)$ de ces deux bobines (en valeur absolue et en signe).

2. L'une des méthodes que l'on peut utiliser pour mesurer M , suppose que l'on dispose d'un intégrateur électronique de très grande résistance d'entrée, qui, à toute tension d'entrée $e(t)$ variant entre les dates t_1 et t_2 , et nulle le reste du temps, fait correspondre la tension de sortie $s(t)$ telle que :

$$S_{(t>t_2)} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} e(t) dt \text{ avec } T = 10^{-2} \text{ s.}$$

On branche la bobine B_2 à l'entrée de ce dispositif que l'on remet à zéro alors que B_1 n'est parcourue par aucun courant, puis on fait circuler dans B_1 un courant continu d'intensité $i_1 = 1 \text{ A}$, précédé d'un régime transitoire.

Montrer que ce dispositif permet bien de mesurer M .

Application numérique : en opérant de cette manière, on trouve : $s = 4,0 \text{ V}$ lorsque les axes des bobines sont confondus ; donner la valeur M_0 de $M(0)$.

3. Proposer un modèle mathématique plausible, en le justifiant, pour la fonction $M(\theta)$.

4. Les bobines B_1 et B_2 ont même coefficient d'inductance L . On les inclut dans le montage de la figure 4, où elles sont associées à deux condensateurs de même capacité C . On néglige leurs résistances.

Les deux circuits $L C$ sont couplés par inductance mutuelle et l'on règle θ pour avoir $M = \frac{L}{2}$.

a. Ecrire le système d'équations différentielles auxquelles satisfont les charges q_1 et q_2 des armatures supérieures (figure 4) des deux condensateurs, lorsque les interrupteurs couplés K_1 et K_2 sont fermés.

La fermeture simultanée des deux interrupteurs (à l'instant choisi comme origine des temps) permet de réaliser plusieurs types de conditions initiales (dans tous les cas, cependant, $i_1(0) = i_2(0) = 0$).

b. Résoudre le système différentiel précédent et donner, pour $t > 0$, l'expression de $q_1(t)$ et $q_2(t)$ dans les deux cas suivants :

- Les charges initiales des condensateurs sont symétriques : $q_1(0) = q_2(0) = Q_0$.
- Elles sont antisymétriques : $q_1(0) = Q_0$; $q_2(0) = -Q_0$.

c. Dédire des résultats précédents l'expression de $q_1(t)$ dans le cas où $q_1(0) = Q_0$, $q_2(0) = 0$. Comparer le résultat obtenu avec celui qui correspond, pour $q_1(t)$, au couplage nul ($M = 0$).

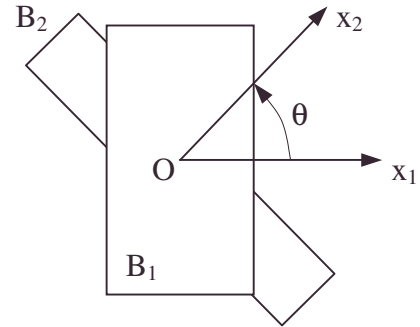


Figure 3

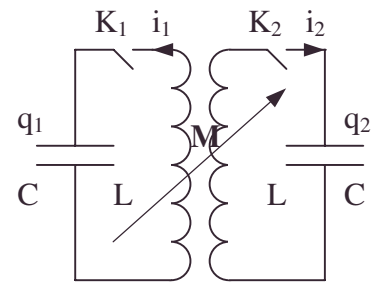


Figure 4

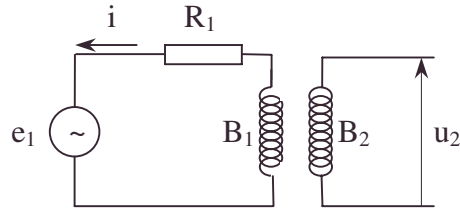
Autres concours ; Durée : 0h30.**Corrigé**

1. Intégrons la bobine B_1 à un circuit de générateur BF de f.e.m. e_1 ; laissons ouverte la bobine B_2 .

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 ; u_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

Les signes de u_2 et M étant liés au sens d'orientation de B_2 . A l'oscilloscope, on peut mesurer i_1 et u_2 , en notation complexe :

$$\bar{U}_2 = j\omega M \bar{I}_1 = \omega M \bar{I}_1 e^{j\frac{\pi}{2}}.$$



La valeur absolue est fournie par : $|M| = \frac{|\bar{U}_2|}{\omega |\bar{I}_1|}$; quant au signe :

- Si $M > 0$; u_2 est en quadrature avance par rapport à i_1 .
 - Si $M < 0$; u_2 est en quadrature retard par rapport à i_1 .
2. Quand B_1 est parcouru par $i_1 = 0$, $u_2 = e = 0$, soit t_1 cet instant.
Quand B_1 est parcouru par $i_1 = 1$ A, $e = u_2$.

On supposera $T \geq t_2 - t_1$;

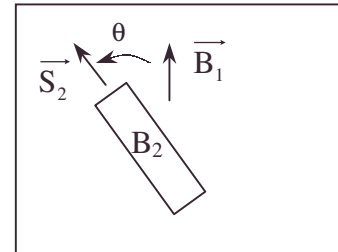
$$s = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} M \frac{di_1}{dt} dt = \frac{1}{T} M (i_1(t_2) - i_1(t_1)) = \frac{M i_1}{T} ;$$

avec l'orientation donnée M est mesurable. $M_0 = \frac{sT}{i_1}$; AN : $M_0 = 4.10^{-2}$ H .

3. Pour simplifier, supposons B_2 intérieure à B_1 .

$$\phi_{B_1 \rightarrow B_2} = M i_1 = B_1 \cdot N_2 S_2 \cos \theta = \mu_0 n_1 i_1 N_2 S_2 \cos \theta.$$

$M = M_0 \cos \theta$ (si N_2 et S_2 caractérisent la bobine B_2 et si n_1 est le nombre de spires par unité de longueur pour la bobine B_1).



4.a. On a : $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$; $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$.

Ecrivons les lois de maille dans les mailles 1 et 2 :

$$\frac{q_1}{C} + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0 ; \frac{q_2}{C} + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 ;$$

En remplaçant i_1 , i_2 et M , on obtient :

$$L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C} = -\frac{L}{2} \frac{d^2 q_2}{dt^2} ; L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C} = -\frac{L}{2} \frac{d^2 q_1}{dt^2}.$$

b.α. $q_1 = q_2 = Q_0$; la symétrie des deux mailles y compris dans les conditions initiales permet d'accepter $q_1(t) = q_2(t) \forall t$.

$$\text{Il reste : } \frac{3L}{2} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C} = 0 \Rightarrow q_1(t) = q_2(t) = Q_0 \cos \sqrt{\frac{2}{3LC}} t.$$

On vérifie bien $i_1(0) = 0 = i_2(0)$ et $q_1(0) = q_2(0) = Q_0$

β. $q_1 = Q_0$; $q_2 = -Q_0$;

la symétrie permet d'accepter vu les conditions initiales $q_1(t) = -q_2(t) \forall t$.

$$\text{Il reste : } \frac{L}{2} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C} = 0 \Rightarrow q_1(t) = -q_2(t) = Q_0 \cos \sqrt{\frac{2}{LC}} t.$$

On vérifie bien $i_1(0) = 0 = i_2(0)$ et $q_1(0) = Q_0 = -q_2(0)$.

c.α. La superposition des conditions **4.b.α.** et **4.b.β.** donnent au coefficient $\frac{1}{2}$ près, les conditions initiales présentes ; essayons la même superposition des fonctions solutions particulières du système :

$$q_1(t) = \frac{Q_0}{2} \cos \sqrt{\frac{2}{3LC}} t + \frac{Q_0}{2} \cos \sqrt{\frac{2}{LC}} t ;$$

$$q_2(t) = \frac{Q_0}{2} \cos \sqrt{\frac{2}{3LC}} t - \frac{Q_0}{2} \cos \sqrt{\frac{2}{LC}} t.$$

Les fonctions vérifiant les conditions initiales en q et i sont les solutions. L'unicité de la solution assure qu'on a la solution physique.

$$\beta. M = 0; L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow q_1 = Q_0 \cos \sqrt{\frac{1}{LC}} t.$$

Vu $q(0)$ et $i(0)$

On compare les pulsations propres :

$$\sqrt{\frac{2}{3LC}} < \sqrt{\frac{1}{LC}} < \sqrt{\frac{2}{LC}} ;$$

Le couplage par M entre 2 circuits résonants identiques engendre 2 pulsations propres qui encadrent l'ancienne pulsation propre.

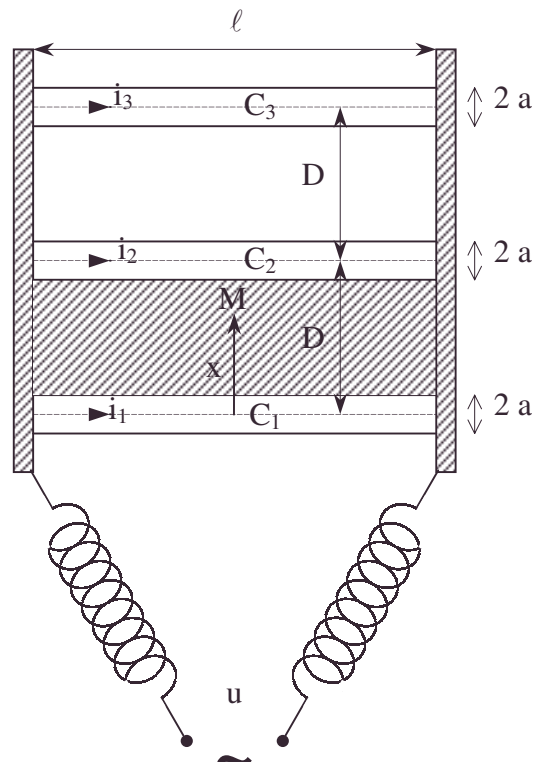
5.4.2. Effet pelliculaire

On considère trois conducteurs cylindrique C_1, C_2, C_3 supposés très longs, de même longueur ℓ et de même rayon a ; leurs axes sont parallèles et sont situés dans un même plan, à une distance D les uns des autres.

Les trois conducteurs de même résistance R par unité de longueur ($R = \text{cste}$) sont disposés en parallèle ; ils sont alimentés par une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω , par l'intermédiaire de fils de résistance et d'inductance négligeables :

$$u = U_0 e^{j\omega t} \text{ avec } j^2 = -1.$$

1.a. Déterminer le flux total d'induction magnétique Φ_{12} à travers la surface hachurée comprise entre les conducteurs C_1 et C_2 dans le plan formé par les axes des conducteurs, en fonction de i_1, i_2 et i_3



• conditions initiales, superposition des régimes quasi stationnaires, unicité de la solution physique [cf déterminisme]

qui désignent les courants respectifs dans les conducteurs C_1 , C_2 et C_3 .

b. On suppose dans la suite de ce problème la condition $a \ll D \ll \ell$ réalisée. Exprimer Φ_{12} en fonction de $i_1, -i_2, i_3, \ell$ et du rapport D/a .

2. Comparer les courants i_1 et i_3 , et en déduire le rapport $\frac{i_2}{i_1}$ que l'on mettra sous la forme : $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{b}{f(\omega)}$ où b est une constante réelle et $f(\omega)$ une fonction complexe de la pulsation ω .

3. On donne $D = 10a$ et $R = 10^{-3} \Omega/m$.

a. Calculer le rapport $\frac{i_2}{i_1}$ des intensités en courant continu puis en courant de très haute fréquence (supposée infinie). Conclusions.

b. Pour une tension u de fréquence $\nu = 1000$ hertz, calculer :

- le rapport des intensités des courants $\frac{|i_2|}{|i_1|}$;
- le déphasage entre les courants i_1 et i_2 .

c. Montrer que le dispositif étudié permet de mettre en évidence un "effet pelliculaire" particulier. Généraliser ce dispositif, et donner un sens physique à l'hypothèse $R = \text{cste}$.

Autres concours ; Durée : 1h.

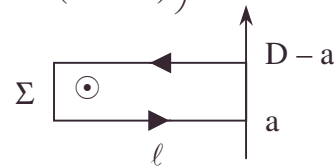
Corrigé

1. A l'extérieur d'un câble, le théorème d'Ampère donne $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

$$\mathbf{a.} \quad \Phi_{12} = \iint_{\Sigma} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3) \cdot d\vec{S} = \int_a^{D-a} \left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(D-x)} - \frac{\mu_0 i_3}{2\pi(2D-x)} \right) \ell dx ;$$

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \left(\frac{D}{a} - 1 \right) - i_3 \ln \frac{2D-a}{D+a} \right], \text{ vu}$$

$$\mathbf{b.} \quad a \ll D \ll \ell ; \quad \Phi_{12} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \frac{D}{a} - i_3 \ln 2 \right].$$



2.a. Par raison de symétrie des rôles de 1 et 3 (par rapport à 2, axe de symétrie) ; $i_1 = i_3$ on en déduit $\Phi_{12} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \frac{D}{a} - i_1 \ln 2 \right]$.

b. La loi de Pouillet dans la maille formée de 1 et 2 s'écrit en notation complexe :

$$\underline{e} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = R \ell \underline{i}_1 - R \ell \underline{i}_2 \text{ et } \frac{d\Phi_{12}}{dt} = j\omega \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[(\underline{i}_1 - \underline{i}_2) \ln \frac{D}{a} - \underline{i}_1 \ln 2 \right].$$

$$(\underline{i}_1 - \underline{i}_2) \left(1 + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi R} \ln \frac{D}{a} \right) = \underline{i}_1 j\omega \frac{\mu_0}{2\pi R} \ln 2.$$

En divisant par \underline{i}_1 , on en déduit : $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln \frac{D}{a} - j \frac{2\pi R}{\mu_0 \omega}}$ de la forme

$$\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = 1 - \frac{b}{f(\omega)} \text{ avec } b = \ln 2 \text{ et } f(\omega) = \ln \frac{D}{a} - j \frac{2\pi R}{\mu_0 \omega} \text{ (identification non unique).}$$

On rappelle que $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \nu$.

3.a.α. $\omega \rightarrow 0$; $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} \rightarrow 1$: on a équirépartition de courant dans les 3 lignes.

β. $\omega \rightarrow \infty$; $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} \rightarrow 1 - \frac{\ln 2}{\ln \frac{D}{a}}$; AN : $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} \rightarrow 0,699$.

On constate que le module de $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1}$ décroît de 1 à 0,699.

$$\text{b. } \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = \frac{\ln \frac{D}{a} - \ln 2 - j \frac{R}{\mu_0 \nu}}{\ln \frac{D}{a} - j \frac{R}{\mu_0 \nu}} = \frac{\left(\ln \frac{D}{a} - \ln 2 - j \frac{R}{\mu_0 \nu} \right) \left(\ln \frac{D}{a} + j \frac{R}{\mu_0 \nu} \right)}{\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2}$$

$$\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = \frac{\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 - \ln 2 \ln \frac{D}{a} + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2 - j \frac{R}{\mu_0 \nu} \ln 2}{\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2}.$$

$$\left| \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} \right| = \frac{\sqrt{\left[\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2 - \ln 2 \ln \frac{D}{a} \right]^2 + \left(\frac{R \ln 2}{\mu_0 \nu} \right)^2}}{\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2} ;$$

$$\arg i_2 - \arg i_1 = \arctan \frac{-R \ln 2}{\mu_0 \nu \left[\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2 - \ln 2 \ln \frac{D}{a} \right]} ;$$

$$\text{AN : } \left| \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} \right| = 0,737 ; \arg i_2 - \arg i_1 = -7^\circ 15' \text{ (ou } -0,126 \text{ rad).}$$

c. Le conducteur 2 est plus "intérieur" que 1 et 3. Il est traversé par un courant (en retard) d'amplitude moindre, qui diminue quand ν croît (méthode graphique). On pourrait le généraliser pour n conducteurs en parallèle. En particulier, un câble est constitué de fibres dont certaines sont plus intérieures, et donc la répartition du courant non uniforme varie avec ν et par conséquent $R = R(\nu)$.

$R = \text{cste}$ est un modèle valable en courant continu.

5.4.3. Courants de Foucault

Épaisseur de peau dans une plaque de cuivre

Soit un repère orthonormé direct $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ et deux plans (P) et (P'), parallèles au plan (xOy), et de cotes respectives suivant $z'z : +\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$. Ces plans délimitent une plaque de cuivre homogène, d'épaisseur a , de perméabilité μ_0 , de permittivité ϵ_0 et de conductivité γ .

I. Effet Foucault en régime quasi-stationnaire

1. Citer une expérience classique mettant en évidence les courants de Foucault en régime quasi-stationnaire.

Pouvez-vous indiquer des applications industrielles de ce phénomène ?

2. Une source de champ magnétique uniforme et constant est placée au-dessus de (P). La plaque de cuivre fait-elle écran au champ magnétique ?

3. La plaque est maintenant plongée dans un champ uniforme mais alternatif $\vec{B} = B\vec{e}_x$ avec $B = B_0 \cos \omega t$ (B_0 et ω constants). Nous supposons la fréquence suffisamment basse pour que le champ magnétique reste effectivement uniforme dans tout le conducteur.

a. Montrer que l'existence du champ magnétique \vec{B} variable dans le temps implique l'apparition d'un champ électrique \vec{E} et, dans la plaque, d'un courant induit de densité \vec{j} .

b. Par des arguments de symétrie qu'on s'attachera, ici encore, à rendre aussi précis que possible, montrer que \vec{E} est parallèle à \vec{e}_y , avec $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$.

c. Par le calcul de la circulation de \vec{E} sur un contour convenablement choisi, déterminer $\vec{E}(M)$.

Donner la densité de courant $\vec{j}(M)$ correspondante et tracer le graphique de la variation de l'amplitude de cette densité en fonction de z (on passera en notation complexe).

d. On considère une portion de la plaque limitée par un cylindre droit de génératrices parallèles à Oz, et dont les bases, situées dans les deux plans $z = \pm \frac{a}{2}$, ont pour aire S .

Soit $\tau = S.a$ le volume de cette portion de plaque. Calculer la puissance $p(\tau)$ dissipée en moyenne, sur une période, par effet Joule dans le volume τ , et la puissance volumique

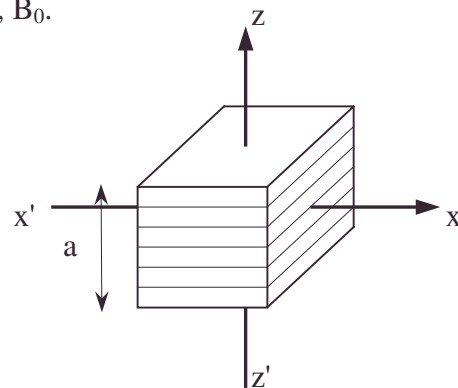
moyenne $\overset{\diamond}{p} = \frac{p(\tau)}{\tau}$. Exprimer $\overset{\diamond}{p}$ en fonction de γ , ω , B_0 .

A.N. : $a = 5 \text{ cm}$; $\omega = 100 \pi \text{ rad.s}^{-1}$; $B_0 = 1 \text{ T}$.

4. Un cube fait de n plaques de cuivre isolées et empilées comme l'indique la figure ci-contre, peut être soumis à un champ magnétique uniforme :

$$\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_z, \text{ ou } \vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_x.$$

Dans quel cas la puissance volumique moyenne dissipée par les courants de Foucault est-elle la plus grande ?



II. Effet Foucault en haute-fréquence

La plaque est placée dans les mêmes conditions qu'au **II.3.** ; le champ magnétique a maintenant une fréquence très élevée. De ce fait, les variations très rapides de \vec{B} vont produire des courants induits importants qui vont à leur tour produire un champ magnétique et ainsi de suite ... De ce fait, l'amplitude de \vec{B} dépend aussi de z .

Après avoir constaté que $B(-z) = B(z)$ et que la densité de courant dirigée suivant \vec{e}_y est telle que $j(-z) = -j(z)$:

1. Montrer que, même pour des fréquences très élevée de 10 MHz, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

On donne $\epsilon_0 = 8,8.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

2. Dédire des équations de Maxwell, d'une part une relation entre \vec{j} et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$ et, d'autre

part, une autre relation de la forme : $\frac{d^2 \bar{B}}{dz^2} - i.m.\bar{B} = 0$ ($i^2 = -1$).

On note avec une "barre" l'amplitude d'une grandeur complexe. Donner l'expression de m .

3. Intégrer cette équation en introduisant la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}}$ et en notant B_s

l'amplitude du champ magnétique à la surface de la plaque.

(On remarquera que $2i = (1+i)^2$).

4. On exprimera les résultats en introduisant les fonctions cosh et sinh ainsi que les variables $\alpha = \frac{a}{\delta}$ et $\beta = \frac{z}{\delta}$.

Donner les expressions des modules des amplitudes de \bar{B} et \bar{j} . On indique que :

$$\cosh(1+i)x \cdot \cosh(1-i)x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + \cos 2x);$$

$$\sinh(1+i)x \cdot \sinh(1-i)x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - \cos 2x).$$

5. Quelle est l'allure des courbes donnant les modules des amplitudes de \bar{B} et de \bar{j} en fonction de β ?

6. Dans le cas où $\alpha \ll 1$, retrouver l'expression de $j(M)$ établie à la question **II.3.c.** Justifier la réponse.

7. Qu'appelle-t-on "écran électromagnétique" ? Un tel dispositif a-t-il un rapport avec l'effet Foucault en haute fréquence ?

III. Effet de peau

La plaque est maintenant soustraite au champ magnétique extérieur.. Elle est parcourue par un courant haute-fréquence de densité volumique $\vec{j} = j_0 \cos \omega t \vec{e}_x$. Ce courant haute-fréquence produit un champ magnétique induit qui à son tour donne naissance à des courants induits. Ainsi j_0 est fonction de z .

1. Après avoir constaté que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction, déduire des équations de Maxwell une relation du type :

• condition limite, courant de déplacement, développement au premier ordre ou plus, écran au champ magnétique, épaisseur de peau, graphe, module de complexe

$$\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial z^2} - i.m.\vec{j} = 0$$

2. Intégrer cette équation en notant j_s l'amplitude de densité volumique de courant au voisinage de la surface de la plaque et en introduisant la fonction cosh et les variables α et β , comme à la question II.4. ci-dessus.

3. Tracer le module de l'amplitude de \vec{j} ($|\vec{j}| = \sqrt{\vec{j} \cdot \vec{j}^*}$) en fonction de β .

Conclure pour $\alpha \rightarrow \infty$.

4. Donner des applications industrielles de l'effet de peau.

Centrale ; Durée : 2h

Corrigé

I.1.a. Effet d'échauffement d'un morceau de métal soumis à \vec{B} alternatif.

Exemple : le carter d'un moteur synchrone.

b. Utilisation industrielle dans les fours à induction.

2. On n'a pas de relation analogue à $\vec{E} = \vec{0}$ en électrostatique (cf. cage de Faraday).

Physiquement, \vec{B} uniforme et constant ne crée pas de champ \vec{E} ni \vec{j} dans la plaque.

\vec{B} normal et tangentiel (pourvu que $\mu \neq \mu_0$) sont continus. L'action à distance qui crée \vec{B} ne sera pas arrêtée par la plaque ; la plaque ne fait pas écran à un champ \vec{B} .

3.a. $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \exists \vec{E} \text{ et } \vec{j} = \gamma \vec{E}(M, t) \text{ dans la plaque.}$

b.α. En considérant \vec{B} comme une cause de \vec{E} , les transformations qui laissent \vec{B} invariant :

translation selon \vec{e}_x , selon \vec{e}_y , symétrie par rapport à Oxy (cf.: $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$) impliquent la même symétrie sur la conséquence $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$ et $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$.

β. On sait que :

- \vec{B} appartient au plan d'antisymétrie $y = \text{constante}$.
- \vec{B} orthogonal au plan de symétrie $x = \text{constante}$.
- \vec{E} appartient au plan de symétrie $x = \text{constante}$.
- \vec{E} orthogonal au plan d'antisymétrie $y = \text{constante}$.

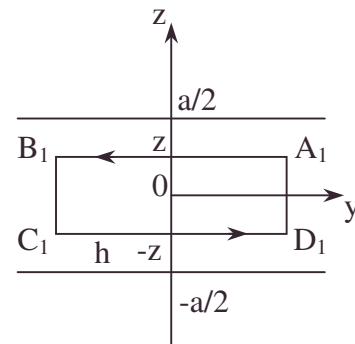
$\Rightarrow \vec{E} = E(z)\vec{e}_y$.

c. Retrouvons ce résultat par intégration :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

Reprenons un contour $\Gamma_{A_1 B_1 C_1 D_1}$ orthogonalement

à \vec{B} dans la zone $-\frac{a}{2} \leq z \leq +\frac{a}{2}$.



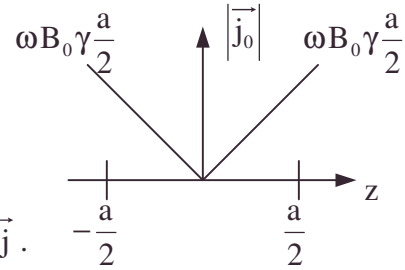
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{A_1}^B E_y(z) \underbrace{d\vec{\ell}}_{>0} + 0 + \int_{C_1}^{D_1} E_y(-z) \underbrace{d\vec{\ell}}_{>0} = -2E_y(z)h = -\frac{d}{dt} \{ [B_0 \cos \omega t] 2zh \}.$$

$$E_y(z) = -\omega B_0 z \sin \omega t.$$

$$\vec{j} = -\omega B_0 \gamma z \sin \omega t \vec{e}_y \Rightarrow \vec{j} = |\vec{j}_0| e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{e}_y$$

$$\text{avec } |\vec{j}_0| = \omega B_0 \gamma |z|.$$

$$|\vec{j}_0| \text{ est l'amplitude de la représentation complexe de } \vec{j}.$$



$$\mathbf{d. \alpha.} \quad p(t) = \iiint \frac{j^2}{\gamma} d\tau \text{ avec } d\tau = S dz ; \quad p(t) = \omega^2 \frac{B_0^2 \gamma^2 S}{\gamma} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} z^2 dz (\sin^2 \omega t) ;$$

$$p(t) = \gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \frac{a^3}{12} S.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad p(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \gamma B_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} \frac{a^3}{12} S = \gamma B_0^2 \omega^2 \frac{a^2 \tau}{24}.$$

$$\mathbf{\gamma.} \quad \overset{\diamond}{p} = \frac{p(\tau)}{\tau} = \gamma B_0^2 \omega^2 \frac{a^2}{24} ; \quad \text{AN : } \overset{\diamond}{p} = 6,374 \cdot 10^8 \text{ W.m}^{-3}.$$

$$\mathbf{4.} \quad \overset{\diamond}{p} \text{ dépend du carré de l'épaisseur de métal orthogonale à } \vec{B} \text{ (cf. } \mathbf{3. \gamma.}). \quad a = \frac{A}{n}.$$

$\overset{\diamond}{p}$ dépend de $\left(\frac{A}{n}\right)^2$ si n est le nombre de plaques, donc diminue si n augmente. C'est

l'intérêt du feuilletage. La puissance volumique moyenne est la plus grande si $n = 1$.

II. L'énoncé introduit ici le nombre i tel que $i^2 = -1$.

$$\mathbf{1.} \quad \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow |\vec{j}_D| = |\omega \epsilon_0 \vec{E}| = \frac{\omega \epsilon_0}{\gamma} |\vec{j}_{\text{conduction}}| ; \quad \text{AN : } \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}_{\text{cond}}|} = \frac{\omega \epsilon_0}{\gamma} = 1,42 \cdot 10^{-12}.$$

$$|\vec{j}_D| \ll |\vec{j}_{\text{cond}}|.$$

$$\mathbf{2.} \quad \text{Transcrivons en notation complexe } \vec{B} = B(z) \cos \omega t \vec{e}_x.$$

$$\vec{B} = \vec{B}(z) e^{i\omega t} \vec{e}_x \Rightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}(z) e^{i\omega t} \vec{e}_x \text{ et } \text{rot } \vec{B} = \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{dB}{dz} e^{i\omega t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On note de manière analogue $\vec{j} = \vec{j}(z) e^{i\omega t} \vec{e}_y$;

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \cancel{\vec{j}_D}) \text{ s'écrit } \frac{d\vec{B}}{dz} = \mu_0 \vec{j}.$$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{rot}} \frac{\vec{j}}{\gamma} \text{ s'écrit : } & \begin{cases} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\gamma} \frac{d \bar{j}}{dz} e^{i\omega t} \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial j_x}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ s'écrit } & \frac{1}{\gamma} \frac{d \bar{j}}{dz} = i \omega \bar{B} . \end{aligned}$$

En remplaçant \bar{j} , on obtient $\frac{1}{\gamma \mu_0} \frac{d^2 \bar{B}}{dz^2} = i \omega \bar{B}$ avec $i^2 = -1$.

Soit $\frac{d^2 \bar{B}}{dz^2} - i m \bar{B} = 0$ avec $m = \mu_0 \omega \gamma$.

3. On vérifiera $2i = (i+1)^2$.

Introduisons $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$; on a : $\frac{d^2 \bar{B}}{dz^2} = \frac{2i}{\delta^2} \bar{B} = \frac{(i+1)^2}{\delta^2} \bar{B}$,

de solution : $\bar{B}(z) = A e^{(1+i)\frac{z}{\delta}} + B e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}}$.

Or, $\bar{B}(z) = +\bar{B}(-z) \Rightarrow A = B \Rightarrow \bar{B}(z) = 2A \cosh(1+i)\frac{z}{\delta} = 2A \cosh(1+i)\beta$.

$$\bar{B}\left(\frac{a}{2}\right) = B_s = 2A \cosh(1+i)\frac{a}{2\delta} = 2A \cosh(1+i)\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2A = \frac{B_s}{\cosh(1+i)\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\bar{B}(z) = B_s \frac{\cosh(1+i)\beta}{\cosh(1+i)\frac{\alpha}{2}}.$$

$$4. \bar{j}(z) = \frac{1}{\mu_0} \frac{d \bar{B}}{dz} = \frac{B_s}{\mu_0 \delta} (1+i) \frac{\sinh(1+i)\beta}{\cosh(1+i)\frac{\alpha}{2}};$$

On rappelle que $|a| = \sqrt{a \cdot a^*}$. On obtient a^* conjugué de a en transposant i en $-i$.

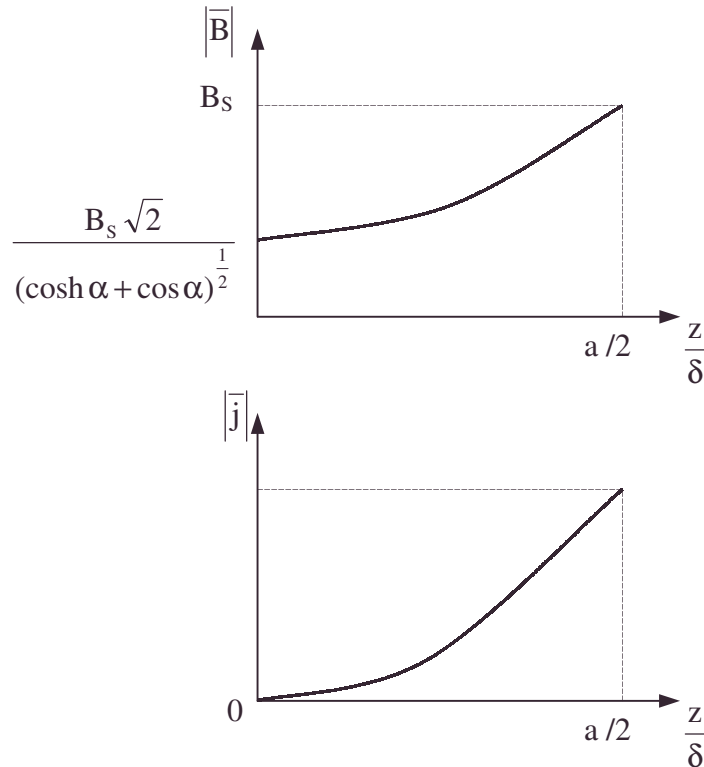
$$\alpha. |\bar{B}(z)| = B_s \sqrt{\frac{\cosh(1+i)\beta}{\cosh(1+i)\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cosh(1-i)\beta}{\cosh(1-i)\frac{\alpha}{2}}}.$$

$$|\bar{B}| = B_s \left(\frac{\cosh 2\beta + \cos 2\beta}{\cosh \alpha + \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ cf. formule donnée.}$$

$$\beta. |\bar{j}(z)| = \frac{B_s}{\mu_0 \delta} \sqrt{(1+i) \frac{\sinh(1+i)\beta}{\cosh(1+i)\frac{\alpha}{2}} \cdot (1-i) \frac{\sinh(1-i)\beta}{\cosh(1-i)\frac{\alpha}{2}}};$$

$$|\bar{j}| = \frac{B_s \sqrt{2}}{\mu_0 \delta} \left(\frac{\cosh 2\beta - \cos 2\beta}{\cosh \alpha + \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

5.



6. $\alpha \ll 1 \Rightarrow \beta = \frac{z}{\delta} < \frac{a}{\delta} \beta \rightarrow 0$; faisons le développement au 2^{ème} ordre du numérateur de

$|\vec{j}|^2$ afin d'en trouver un équivalent légitime.

$$|\vec{j}| = \sqrt{2} \frac{B_s}{\mu_0 \delta} \frac{[1 + 2\beta^2 - (1 - 2\beta^2)]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{B_s}{\mu_0 \delta} 2|\beta| = \frac{B_s 2|z|}{\mu_0 \delta^2} = \frac{B_s}{\mu_0} \gamma \omega |z|,$$

cf. II.3.c. et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$.

C'était le résultat trouvé pour $\omega \rightarrow 0$ où $\frac{a}{\sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}}} = \alpha \ll 1$.

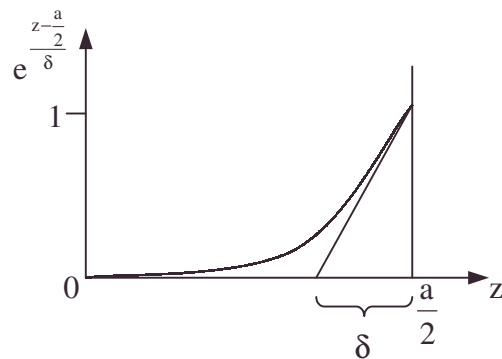
7.a. Le cuivre est un bon conducteur : considérons $\gamma \rightarrow \infty$, soit $\delta \rightarrow 0$ pour trouver une expression équivalente de \vec{B} sachant $\frac{z}{\delta} \rightarrow +\infty$ bien que $z - \frac{a}{2} < 0$.

$$\vec{B} \sim B_s \frac{e^{\frac{1+i}{\delta}z}}{e^{\frac{1+i}{\delta}\frac{a}{2}}} = B_s e^{\frac{z-\frac{a}{2}}{\delta}} e^{\frac{i(z-\frac{a}{2})}{\delta}}.$$

$$\vec{B}(0) = 0 \text{ car } e^{-\frac{a}{2\delta}} \rightarrow 0.$$

On peut assimiler $e^{\frac{z-\frac{a}{2}}{\delta}}$ à ses tangentes en $z = 0$

et $z = \frac{a}{2}$.



B n'existe qu'au voisinage de $\frac{a}{2}$ sur une épaisseur de l'ordre de δ (épaisseur de peau).

• courant de Foucault, développement au premier ordre ou plus, épaisseur de peau, graphe, ordre de grandeur, symétrie

On a donc un effet d'écran électromagnétique : $B \neq 0$ dans la plaque.

b. $\omega \rightarrow +\infty$, de même $|\delta| \rightarrow 0$; \vec{B} n'est pas transmis : il y a un effet d'écran en haute-fréquence ; c'est une conséquence de ω grand sur les courants de Foucault, la manifestation est semblable mais les causes sont différentes : γ ou ω infini.

$$\text{III.1.a. } \vec{j} = \vec{j}_0(z) e^{i\omega t} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{\vec{j}}{\gamma} e^{i\omega t} \vec{e}_x \text{ et } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \frac{\vec{j}(z)}{\gamma} e^{i\omega t} \vec{e}_x ; \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} \left(1 + \frac{\omega \epsilon_0}{\gamma} \right) ; \frac{\omega \epsilon_0}{\gamma} \ll 1 \text{ cf. II.1. et } \omega \text{ encore plus grand} \\ \Rightarrow |\vec{j}_D| \ll |\vec{j}|.$$

b. On se trouve à considérer $\vec{j}(z)$ et $\vec{B}(z)$; comme on a les mêmes équations de Maxwell qu'en II.2. : $\frac{d\vec{B}}{dz} = \mu_0 \vec{j}$ et $\frac{1}{\gamma} \frac{d\vec{j}}{dz} = i\omega \vec{B}$, l'élimination de \vec{B} donne :

$$\frac{d^2 \vec{j}}{dz^2} - i m \vec{j} = 0 \text{ avec } m = \omega \gamma \mu_0.$$

2. La même technique calculatoire due à la même symétrie de la cause en z soit $j(-z) = j(z)$ donne :

$$\vec{j}_z = j_s \frac{\cosh(1+i)\beta}{\cosh(1+i)\frac{\alpha}{2}}.$$

3. cf. $|\vec{j}| = \sqrt{\vec{j} \cdot \vec{j}^*}$ et II.4.

$$|\vec{j}| = j_s \left(\frac{\cosh 2\beta + \cos 2\beta}{\cosh \alpha \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Conclusion : $|\vec{j}|_{z=0} \rightarrow 0$ quand $\alpha = \frac{a}{\sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0}}} \rightarrow \infty$,

c'est-à-dire $\omega \rightarrow \infty$ ou $\gamma \rightarrow \infty$.

On retrouve l'expression équivalente :

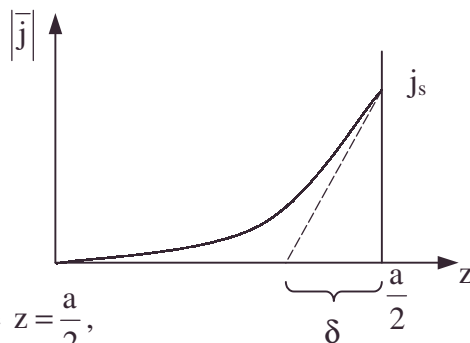
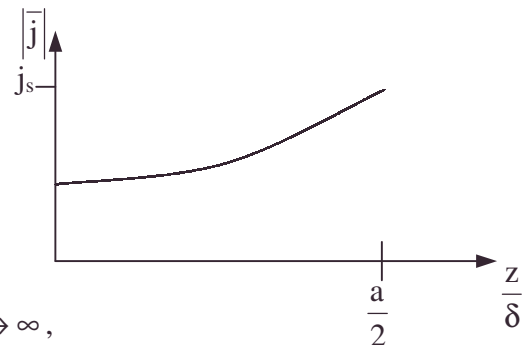
$$\vec{j} \sim j_s \frac{e^{(1+i)\frac{z}{\delta}}}{e^{(1+i)\frac{a}{2\delta}}} \sim j_s e^{\frac{z-a}{\delta}} e^{i\left(\frac{z-a}{\delta}\right)}.$$

Le courant n'existe que dans la zone voisine de $z = \frac{a}{2}$,

dans une épaisseur de l'ordre de δ , épaisseur de peau.

4. En haute-fréquence, le courant n'est transporté qu'en surface, c'est la raison de la technique du guide d'onde, du câble coaxial, utilisés à la place des circuits filiformes pour les très hautes fréquences.

On notera que la fréquence modifie la valeur des résistances (et d'autres éléments) puisque la surface réellement utilisée dépend de ω (et de γ).



5.4.4. Dynamo unipolaire Source de courant commandée par une vitesse

Un circuit est composé par deux rails conducteurs, de résistance électrique négligeable, rectilignes et parallèles, situés dans un plan horizontal à une distance ℓ l'un de l'autre. Une barre parfaitement conductrice de masse m peut glisser sans frottement sur les deux rails. Les deux rails sont reliés à l'une des extrémités à une bobine de résistance R et d'inductance L . L'ensemble se trouve plongé dans un champ magnétique uniforme vertical $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_z$.

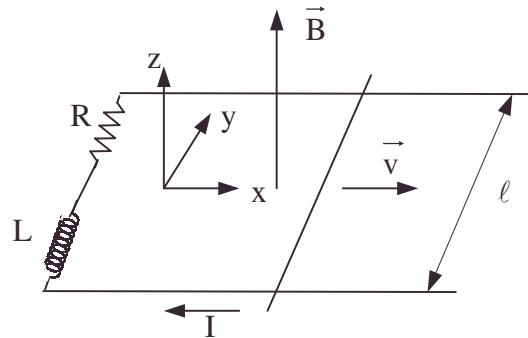


Figure 1

A $t = 0$, la barre placée en $x = 0$ est lancée à la vitesse $\dot{x}_0 = v_0$, le courant I étant nul. (cf. figure 1).

1. Dans cette partie, le champ \vec{B} est supposé constant créé par des aimants extérieurs au circuit.

a. Etablir deux équations reliant le courant I dans le circuit et la vitesse v de la barre.

b. Montrer que l'énergie E du système est sous deux formes. Calculer $\frac{dE}{dt}$ et

interpréter le résultat.

c. Dans cette question, on supposera R négligeable.

Que peut-on dire de l'énergie E ? Etablir une équation différentielle dont I est solution. Donner les expressions de I , v et x en fonction du temps.

Interpréter. Ce mouvement peut-il être observé en réalité ?

2. Dans une dynamo unipolaire, le champ \vec{B} est créé par la bobine du circuit, ce qui fait que l'on peut écrire : $\|\vec{B}\| = \frac{\alpha I}{\ell}$, où α est une constante positive. \vec{B} et I varient avec

le temps. Dans des circonstances expérimentales que l'on précisera, les équations du système s'écrivent : $m \frac{dv}{dt} = -\alpha I^2$ [1] . $R I + L \frac{dI}{dt} = \alpha I v$ [2] dans un cadre ARQS.

Dans la suite du problème, les équations [1] et [2] (même non établies) seront utilisées.

3. Eliminer le temps entre [1] et [2] et obtenir une relation entre v et I (intégrale première du mouvement). Représenter le lieu du point de fonctionnement défini par v et I dans un diagramme où l'on portera en abscisses les vitesses v et ordonnées les

intensités I . On distinguera les trois cas : $v_0 < \frac{R}{\alpha}$; $v_0 = \frac{R}{\alpha}$; $v_0 > \frac{R}{\alpha}$.

Préciser chaque fois le point de fonctionnement A à $t = 0$.

4. Afin d'étudier la stabilité du point de fonctionnement initial, ($I = 0$, $v = v_0$) on suppose que l'on amène le point de fonctionnement à une position légèrement différente de cette position initiale. Etudier, suivant la valeur de v_0 , l'évolution du fonctionnement de la machine. Dégager la condition pour laquelle la machine pourra servir de génératrice de courant.

• ARQS, bobine [self], conditions initiales, confrontation expérimentale, dynamo unipolaire, graphe, intégrale première du mouvement, maximum, module de complexe, point de fonctionnement, quantité d'électricité transportée par induction, stabilité, temps moyen d'impulsion

On ne considérera dans la suite que le cas particulier $v_0 = \frac{2R}{\alpha}$.

5. Ecrire l'équation différentielle dont v est solution. Montrer que sa solution est de la forme : $v = \frac{v_0}{2} \left[1 - \tanh \frac{R}{L} (t - t_0) \right]$ [3], où t_0 est une constante d'intégration.

Montrer que l'application des conditions initiales postulées conduit à une difficulté dans la détermination de t_0 .

Pour éviter cette difficulté tout en profitant de l'analyse déjà menée du système physique étudié, on se contentera, dans la suite, de substituer au temps t la variable $T = t - t_0$.

Pour quelles valeurs de T a-t-on $v \geq 0,99 v_0$? Représenter schématiquement $v(T)$.

6. Donner l'expression du courant $I(T)$ et le représenter schématiquement.

Quelle est la valeur maximale I_m du module du courant ?

7. Calculer la quantité Q d'électricité transportée par le courant I (on pourra intégrer en faisant varier T de $-\infty$ à $+\infty$).

Calculer également le temps moyen d'impulsion Δt défini par $\Delta t = \frac{Q}{I_m}$.

Analyser brièvement l'effet des divers paramètres sur le fonctionnement de la machine.

Rappel mathématique : $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{argth} \frac{x}{a}$.

Centrale ; Durée : 1h30

Corrigé

1.a.α. Equation électrique : $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow e = \int_{\text{tige orientée}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\vec{\ell} = v B \ell$.

$e = R I + L \frac{dI}{dt}$ s'écrit $v B \ell = R I + L \frac{dI}{dt}$ [2] cf. suite de l'énoncé.

β. Equation mécanique de la tige : $m \vec{a} = \vec{F}_{\text{Laplace}} + m \vec{g} + \vec{R}_{\text{rails}}$;

en projection, on a : $F_x = \vec{u}_x \cdot \int_{\text{tige orientée}} d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -I \ell B \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -I \ell B$ [1].

b.α. Le déplacement est associé à une énergie cinétique $\frac{1}{2} m v^2$;

l'action magnétique est associée à $F = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} L I^2$;

ici, le système électromécanique est associé à $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} L I^2$.

β. $\frac{dE}{dt} = v \frac{dv}{dt} + L I \frac{dI}{dt} = (-I \ell B) \cdot \frac{1}{B \ell} \left(R I + L \frac{dI}{dt} \right) + L I \frac{dI}{dt} = -R I^2$: la puissance

consommée par l'effet Joule provient de la diminution de l'énergie du système.

c.α. $E = \text{constante} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$.

β. [2] s'écrit [2'] : $v B \ell = L \frac{dI}{dt}$; or, [1] s'écrit : $m \frac{dv}{dt} = -I \ell B$.

• champ électromoteur, conditions initiales, effet Joule, énergie magnétique, équation électrique d'un système électromécanique, équation mécanique d'un système électromécanique, intégrale première du mouvement, Ohm[loi d'], P.F.D.

L'élimination de v donne : $\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{B^2 \ell^2}{L m} I = 0$.

$$\gamma. I = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega^2 = \frac{B^2 \ell^2}{L m}.$$

$$[1'] : v = \frac{L}{B \ell} A \omega \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } x = \frac{L}{B \ell} A \sin(\omega t + \varphi) + C ;$$

$$\text{Or, à } t = 0, I = 0 \Rightarrow \varphi = 0, v = v_0 = \frac{L A}{B \ell} \omega \Rightarrow A = v_0 \frac{B \ell}{L \omega} = \frac{v_0 B \ell}{L B \ell} \sqrt{L m} = v_0 \sqrt{\frac{m}{L}} ;$$

$$I = v_0 \sqrt{\frac{m}{L}} \sin\left(\sqrt{\frac{B^2 \ell^2}{L m}} t\right) ; v = v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{B^2 \ell^2}{L m}} t\right) \text{ et } x = v_0 \sqrt{\frac{L m}{B^2 \ell^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{B^2 \ell^2}{L m}} t\right).$$

δ. Il s'agit d'un mouvement sinusoïdal associé à un courant alternatif sans amortissement ni source visible d'énergie. On a négligé l'amortissement dû à l'effet Joule.

ε. On ne peut donc observer un tel mouvement sur une longue durée.

2.a. On supposera : $\vec{B} = \frac{\alpha I}{\ell} \vec{z}$ en tout point.

On remplace B par sa valeur dans [1] et [2] : $m \frac{dv}{dt} = -\alpha I^2 ; R I + L \frac{dI}{dt} = \alpha I v$.

b. On fait l'approximation d'un champ uniforme variable avec le temps. On conçoit que l'expérience des rails se fasse à l'intérieur d'un solénoïde infini, constituant la bobine de self L du circuit lui-même.

3.a. Divisons membre à membre pour éliminer dt , les deux équations suivantes issues

$$\text{de [1] et [2]: } \frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha I^2}{m} \text{ et } \frac{dI}{dt} = \frac{\alpha I v - R I}{L} ;$$

$$\frac{dv}{dI} = \frac{L \alpha I}{m(R - \alpha v)}.$$

b. En intégrant $(R - \alpha v) dv = \frac{L \alpha}{m} I dI$ entre 0 et t ,

$$(R - \alpha v_0)^2 - (R - \alpha v)^2 = \frac{L \alpha^2}{m} I^2, \text{ constante du mouvement recherché.}$$

$$\text{Rem. : } (R - \alpha v)^2 < (R - \alpha v_0)^2.$$

$$\text{c. Posons } R - \alpha v = X ; I = Y. \text{ On a : } \frac{X^2}{(R - \alpha v_0)^2} + \frac{Y^2}{\frac{L \alpha^2}{m}} = 1 :$$

équation d'une ellipse de centre O , de demi-axes $a_1 = |R - \alpha v_0|$, $b_1 = \frac{|R - \alpha v_0|}{\alpha \sqrt{\frac{L}{m}}}$.

Le changement de variable $v = \frac{R - X}{\alpha}$ (déplacement et homothétie) déplace et modifie

le demi-grand axe de v . L'ellipse a son centre en $\frac{R}{\alpha}, 0$;

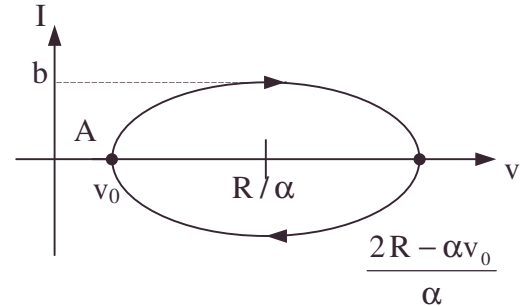
• bobine [self], constante du mouvement

$$a = \frac{|R - \alpha v_0|}{\alpha}; b = \frac{|R - \alpha v_0|}{\alpha \sqrt{\frac{L}{m}}}. \text{ Le sens de parcours sera conforme au signe de la}$$

formule de $\frac{dv}{dI}$ du **3.a.**

$$\alpha. \frac{R}{\alpha} > v_0; a' = \frac{R - \alpha v_0}{\alpha}; b' = \frac{R - \alpha v_0}{\alpha \sqrt{\frac{L}{m}}}$$

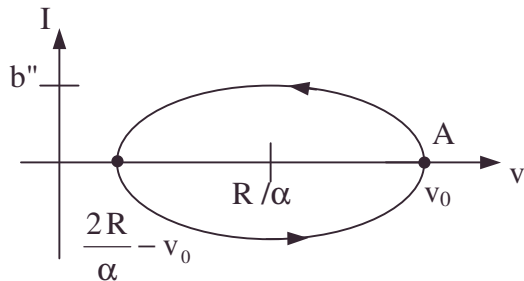
$$\beta. \frac{R}{\alpha} = v_0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ v = \frac{R}{\alpha} = v_0 \end{cases}$$



L'ellipse se réduit à son centre $(v_0, 0)$ car : $a_1 = 0$; $b_1 = 0$.

$$\gamma. v_0 > \frac{R}{\alpha}; a'' = \frac{\alpha v_0 - R}{\alpha}; b'' = \frac{\alpha v_0 - R}{\alpha \sqrt{\frac{L}{m}}}$$

$\frac{2R}{\alpha} - v_0$ positif ou négatif selon les valeurs.



4. Envisageons le démarrage $(v_0, 0)$.

a. $v_0 < \frac{R}{\alpha}$; $v = v_0 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$; vu la courbe et son orientation **3.a.**

$$I = 0 + \varepsilon' > 0 \Rightarrow .$$

$\frac{dv}{dt} < 0$ cf. [1], le point revient vers le point d'abscisse v_0 , le point $A(v_0, 0)$

correspondant à un fonctionnement stable qui demeure. C'est aussi le minimum de l'énergie cinétique.

b. $v_0 = \frac{R}{\alpha}$; l'état $v_0, 0$ demeure sans possibilité différente, c'est un fonctionnement stable.

c. $v_0 > \frac{R}{\alpha}$; vu la courbe **3.b.** et son orientation $v = v_0 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$; $I = 0 + \varepsilon' > 0$.

$\frac{dv}{dt} < 0$ cf. [2], implique une diminution supplémentaire de vitesse, le fonctionnement s'éloigne de $(v_0, 0)$;

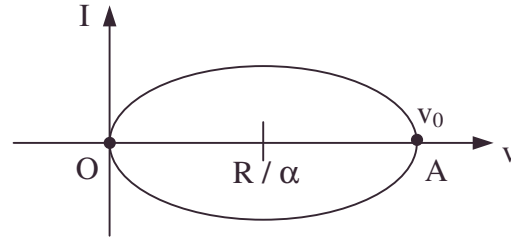
$v_0 > \frac{R}{\alpha}$ correspond à un fonctionnement instable au voisinage de $A(v_0, 0)$. C'est aussi le maximum de l'énergie cinétique.

La stabilité au démarrage d'une génératrice de courant impose $\frac{R}{\alpha} < v_0$.

La suite montrera les particularités de cette génératrice.

$$5. v_0 = \frac{2R}{\alpha} > \frac{R}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{2R}{\alpha} - v_0 = 0, O \text{ appartient à l'ellipse.}$$



a. Eliminons I entre les deux équations [1] et [2] de **I.2.** en dérivant [1] puis en remplaçant $\frac{dI}{dt}$, puis I^2 :

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = -2\alpha I \frac{dI}{dt} = -\frac{2\alpha}{L} (\alpha v - R) I^2 = \frac{2\alpha}{L\alpha} (\alpha v - R) m \frac{dv}{dt} ;$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{2}{L} (\alpha v - R) \frac{dv}{dt} = 0.$$

b. Equation qu'on peut traiter comme une équation à variables séparées en \dot{v} et v :
on écrit $d\dot{v} = \frac{2}{L} (\alpha v - R) dv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\alpha L} [(\alpha v - R)^2 - R^2]$;

la constante assurant $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = 0$ que l'on a car $I(0) = 0$.

Intégrons $\frac{dv}{(\alpha v - R)^2 - R^2} = \frac{dt}{\alpha L}$; introduisons $u_1 = \frac{\alpha v - R}{R}$; $\frac{du_1}{u_1^2 - 1} = -\frac{R}{L} dt$.

$\operatorname{argth} u_1 = -\frac{R}{L} t + \text{cste}$, soit $u_1 = -\tanh \frac{R}{L} (t - t_0)$; t_0 correspond à $v = \frac{R}{\alpha}$;

Soit $v = \frac{R}{\alpha} \left[1 - \tanh \frac{R}{L} (t - t_0) \right]$, soit $v = \frac{v_0}{2} \left(1 - \tanh \frac{R}{L} (t - t_0) \right)$ car $\frac{R}{\alpha} = \frac{v_0}{2}$ vu

$$v_0 = \frac{2R}{\alpha}.$$

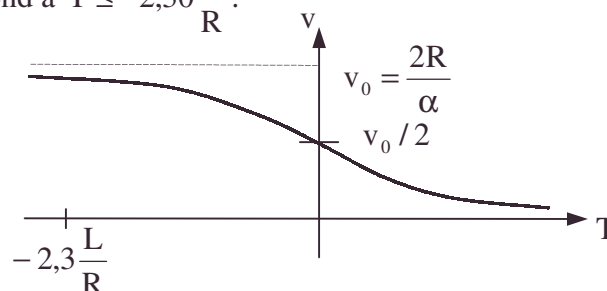
c. t_0 correspond à l'instant où $v = \frac{R}{\alpha}$.

Mais $t = 0$ et $v = v_0$ impliquent $\tanh \frac{R}{L} (t - t_0) = 1$, soit $t_0 = -\infty$.

d. Le paramétrage temporel retenu par l'énoncé est tel que : $v = \frac{v_0}{2} \left(1 - \tanh \frac{RT}{L} \right)$.

$v \geq 0,99 v_0$ correspond à $T \leq -2,30 \frac{L}{R}$.

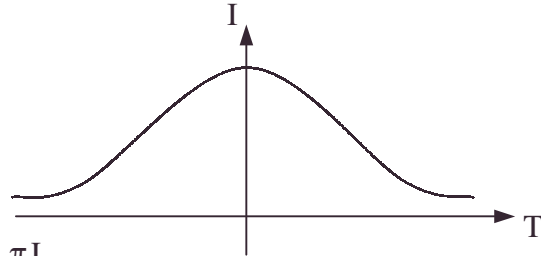
e.



$$6.a. I^2 = -\frac{m}{\alpha} \frac{dv}{dt} = \frac{m v_0^2}{4L \cosh^2 \frac{RT}{L}} \text{ car } \alpha = \frac{2R}{v_0}.$$

$I = \sqrt{\frac{m}{L}} \frac{v_0}{2} \frac{1}{\cosh \frac{RT}{L}} ; I > 0$ vu le fonctionnement à démarrage stable précédemment décrit.

$$b. I_m = \sqrt{\frac{m}{L}} \frac{v_0}{2}$$



$$7.a. Q = \int_{-\infty}^{+\infty} I dt = I_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dT}{\cosh \frac{RT}{L}} \Rightarrow Q = \frac{\pi L}{R} I_m.$$

$$b. \Delta t = \frac{\pi L}{R}.$$

c. R et L agissent inversement.

R et T agissent de la même manière.

à $T > 0$, v et I sont des fonctions décroissantes de R (comme de T) et croissantes de L.

5.4.5. Haut-parleur B.F. Résonance

Un haut-parleur basse fréquence comporte un cylindre dans lequel coulisse un piston (figure 1) ; ce cylindre est en communication avec un récipient étanche contenant de l'air. Le piston est relié par une tige rigide à une bobine située dans la cavité annulaire d'un aimant permanent.

I. Etude du système mécanique

La face externe du piston est toujours en contact avec l'atmosphère à la pression p_0 .

On admet que les ajustements sont parfaits, de sorte que la masse d'air enfermée dans le récipient par le piston est constante.

En l'absence de toute action extérieure, la face interne du piston de surface S est à la distance a du fond du récipient. Le volume d'air enfermé dans le récipient est alors V_0 . On désigne par m la masse de l'équipage mobile : piston, tige et bobine.

1.a. On suppose qu'aucune force de frottement n'affecte le mouvement du piston. Montrer que l'équipage mobile, convenablement lancé, effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre. On désignera par $a + x(t)$ la distance du piston au fond du récipient et on admettra que l'amplitude des oscillations est petite ($|x| \ll a$) et que les compressions et dilatations de l'air enfermé dans le récipient sont adiabatiques et réversibles.

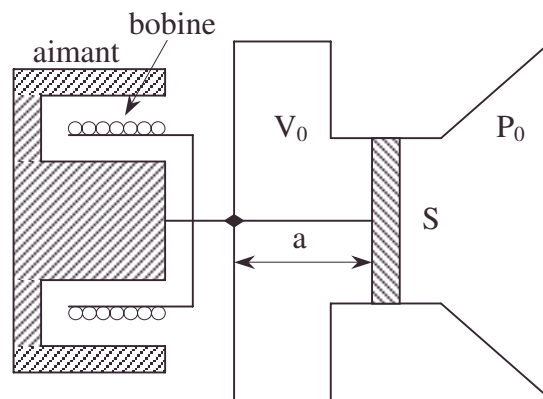


Figure 1

• aimant permanent [voir milieux magnétiques], bobine, conditions initiales, équilibre, force de frottement visqueux, haut-parleur, isentropique

b. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 de ce système oscillant en fonction de P_0 , V_0 , S , m et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

c. Application numérique : calculer le volume V_0 pour que ω_0 soit égale à 300 rad.s^{-1} , sachant que : $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; $S = 700 \text{ cm}^2$; $m = 0,136 \text{ kg}$; $\gamma = 1,4$.

2. L'équipage mobile est, en outre, soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse du piston, que l'on notera : $-2m\lambda\omega_0 \frac{dx}{dt}$.

a. A quelle condition l'équipage, convenablement lancé, a-t-il un mouvement oscillatoire amorti ?

b. La condition précédente étant satisfaite, donner l'équation horaire du mouvement du piston qui, écarté de sa position d'équilibre est, à la date $t = 0$, lâché sans vitesse initiale du point d'abscisse x_0 . On exprimera x en fonction de x_0 , ω_0 , λ et t .

c. Application numérique : donner l'expression de x en fonction du temps lorsque :

$$x_0 = 2 \text{ mm}, \omega_0 = 300 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0,5.$$

3. Le système étant ainsi caractérisé par sa pulsation propre ω_0 et le paramètre d'amortissement λ , on applique à l'équipage mobile la force sinusoïdale : $f = F_0 \cos \omega t$. Au bout d'un temps suffisamment long, il s'établit un régime stationnaire tel que :

$$x = X_0 \cos(\omega t + \Phi).$$

a. Donner les expressions de X_0 et de $\tan \Phi$ en fonction de F_0 , m , ω_0 , λ et ω .

b. On étudie la réponse du système en régime stationnaire, dans le cas où $\lambda = 0,5$.

Construire les courbes représentant les variations de : $Z_0 = X_0 \frac{m\omega_0^2}{F_0}$ et Φ en fonction

de $y = \frac{\omega}{\omega_0}$. Donner la valeur ω_M de la pulsation qui rend maximale la réponse Z_0 .

Exprimer en fonction de ω_0 la bande de pulsation dans laquelle la réponse Z_0 reste égale à 1 à 15% près.

c. Donner l'expression littérale de la puissance moyenne dissipée par la force de frottement fluide lorsque $\lambda = 0,5$ et $\omega = \omega_0$, en fonction de m , ω_0 , X_0 .

d. Calculer dans ce cas cette puissance moyenne pour $F_0 = 24,5 \text{ N}$; $m = 0,136 \text{ kg}$, et $\omega_0 = 300 \text{ rad.s}^{-1}$.

II. Etude du système électrique

La bobine est formée de spires d'un fil conducteur dont la longueur est ℓ . Elle est placée dans le champ magnétique radial produit par l'aimant permanent (figure 1), ayant un pôle central cylindrique et une couronne polaire cylindrique. Le module de l'induction magnétique a, dans toute la région utile, une valeur donnée B . Au cours des mouvements envisagés, la bobine est constamment plongée tout entière dans ce champ radial. Le circuit électrique qui alimente la bobine a (bobine comprise) la résistance totale R et l'inductance totale L . Ce circuit contient en outre, en série avec R et L , un condensateur de capacité C . La bobine étant immobilisée, on applique aux bornes du circuit ainsi défini la tension sinusoïdale $v = V_0 \cos \omega t$.

2.1. Déterminer en régime stationnaire la variation de la charge du condensateur :

$$q = Q_0 \cos(\omega t + \psi).$$

2. La réponse en régime stationnaire du circuit électrique :

- aimant permanent [voir milieux magnétiques], bobine [self], charge du condensateur, condensateur, couronne polaire cylindrique d'aimant, graphe, identification, maximum, module de complexe, pôle central cylindrique d'aimant, résonance

$$Y = \frac{Q_0}{V_0 C} \text{ est une fonction de } y = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

a. Déterminer en fonction de L , ω_0 et λ , les expressions de la résistance R et de la capacité C pour que la fonction de réponse Y du circuit électrique soit identique à la fonction de réponse du système mécanique : $Z = X_0 \frac{m \omega_0^2}{F_0}$.

b. Calculer dans ces conditions les valeurs de R et de C pour :

$$L = 3,13 \text{ mH}, \omega_0 = 300 \text{ rad.s}^{-1}, \lambda = 0,5.$$

III. Etude du haut-parleur

On laisse maintenant l'équipage mobile (bobine, tige et piston) libre de se déplacer et on commande le haut-parleur, par l'intermédiaire du circuit électrique de la bobine.

3.1. Ecrire les équations différentielles décrivant la variation dans le temps de la charge q du condensateur et du déplacement x du piston. On précisera soigneusement les forces qui agissent et les phénomènes qui interviennent.

2. Le circuit électrique et le système mécanique ayant même pulsation propre ω_0 et même paramètre d'amortissement λ , on alimente le circuit électrique par la tension v que l'on écrira en notation complexe : $v = V_0 e^{j\omega t}$.

a. En notant de manière analogue le déplacement du piston en régime stationnaire : $x = X e^{j\omega t}$, donner l'expression littérale du nombre complexe X en fonction de V_0 , ω_0 , ℓ , B , λ , $y = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\alpha = \frac{B^2 \ell^2}{m L \omega_0^2}$.

b. Les caractéristiques du haut-parleur étudié sont les suivantes : $m = 0,136 \text{ kg}$; $L = 3,13 \text{ mH}$, $B = 0,25 \text{ T}$; $\ell = 17,5 \text{ m}$; $\omega_0 = 300 \text{ rad.s}^{-1}$; $\lambda = 0,5$.

1. Calculer la quantité $\alpha = \frac{B^2 \ell^2}{m L \omega_0^2}$ dont on déterminera au préalable la dimension.

2. Lorsque $\omega = \omega_0$, l'amplitude du mouvement du piston est notée X_0 . Déterminer pour $\omega = \omega_0$, l'expression littérale donnant V_0 en fonction de ω_0 , ℓ , B , λ , α et X_0 .

3. Déterminer la valeur numérique de V_0 pour laquelle X_0 est égale à 1 cm.

4. En notant $|X|$ l'amplitude du mouvement du piston lorsque ω est quelconque,

donner l'allure de la courbe représentant la fonction $U = \frac{|X|}{X_0}$ en fonction de $y = \frac{\omega}{\omega_0}$.

On pourra calculer U pour $y \ll 1$; $y = 0,5$; $0,8$; 1 et 2 .

Peut-on justifier l'appellation "basse fréquence" pour le haut-parleur ainsi constitué ?

CCP ; Durée : 3h.

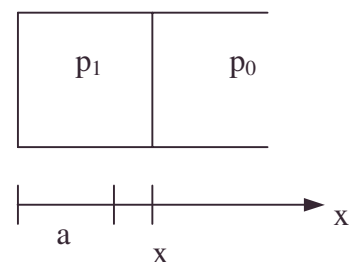
Corrigé

I. Etude du système mécanique

$$1.a. m \ddot{x} = (p_1 - p_0)S ; \text{ or, } p_1 V_1^\gamma = p_0 V_0^\gamma ;$$

$$\Rightarrow p_1 = p_0 \frac{S^\gamma a^\gamma}{S^\gamma (a+x)^\gamma} = p_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{a}} \right)^\gamma \neq p_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{a} \right),$$

car $x \ll a$.



$m \ddot{x} = -\gamma S p_0 \frac{x}{a} \Rightarrow$ l'équipage effectue des oscillations.

$$\text{b. } \omega_0 = \sqrt{\frac{p_0 S \gamma}{m a}} = \sqrt{\frac{p_0 \gamma S^2}{m V_0}}.$$

$$\text{c. AN : } V_0 = \frac{p_0 \gamma S^2}{m \omega_0^2}; V_0 = 56,06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 56,06 \text{ L}.$$

2.a. $m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x - 2 m \lambda \omega_0 \dot{x}$ de la forme canonique :

$\ddot{x} + 2 \lambda \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; on a un mouvement oscillatoire amorti si $\lambda^2 \omega_0^2 < \omega_0^2$, soit $\lambda^2 < 1$; or $\lambda > 0 \Rightarrow 0 < \lambda < 1$. On met à part le mouvement critique où $\lambda = 1$.

$$\text{b. } x = A e^{-\lambda \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t + \varphi).$$

$$\dot{x} = -\lambda \omega_0 A e^{-\lambda \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t + \varphi) - A e^{-\lambda \omega_0 t} \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t + \varphi).$$

Les conditions initiales s'écrivent :

$$x_0 = A \cos \varphi ; 0 = -A \lambda \omega_0 \cos \varphi - A \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \varphi ; \varphi = -\arctan \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Introduisons ces grandeurs dans x afin de les substituer.

$$x = A \cos \varphi e^{-\lambda \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t) - A \sin \varphi e^{-\lambda \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t).$$

$$x = x_0 e^{-\lambda \omega_0 t} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t - A e^{-\lambda \omega_0 t} \cos \varphi \tan \varphi \sin \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t.$$

$$x = x_0 e^{-\lambda \omega_0 t} \left(\cos \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} t \right).$$

$$\text{c. } x = 2 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-150 t} (\cos 259,8 t + 0,5774 \sin 259,8 t).$$

3.a. L'équation devient : $\ddot{x} + 2 \lambda \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$.

L'équation complexe associée : $\ddot{z} + 2 \lambda \omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{j \omega t}$ avec $x = \text{Re}(z)$.

La solution particulière : $z = \bar{Z} e^{j \omega t}$ vérifie :

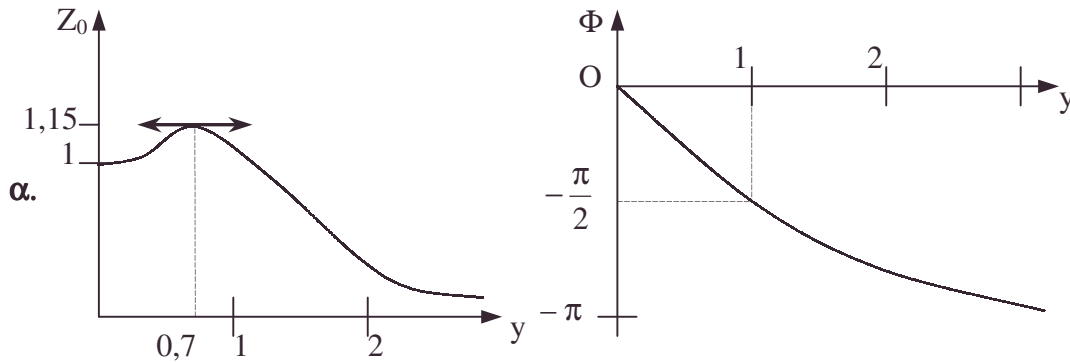
$$\bar{Z}(-\omega^2 + 2 \lambda j \omega \omega_0 + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}; |\bar{Z}| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2 \omega_0^2}}.$$

$$\arg \bar{Z} = -\arctan \frac{2 \lambda \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ et } x = \text{Re}(z) = |\bar{Z}| \cos(\omega t + \arg Z).$$

$$X_0 = |\bar{Z}| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \lambda^2 \omega^2 \omega_0^2}}; \tan \Phi = -\frac{2 \lambda \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

$$\text{b. } Z_0^2 = \frac{1}{(1 - y^2)^2 + 4 \lambda^2 y^2}; \Phi = -\arctan \frac{2 \lambda y}{1 - y^2};$$

$$\lambda = 0,5; Z_0 = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)^2 + y^2}}; \Phi = -\arctan \frac{y}{1 - y^2}.$$



β. Le maximum de Z_0 correspond au minimum de $y^4 + y^2(4\lambda^2 - 2) + 1$, soit en dérivant : $4y^3 + 4y(2\lambda^2 - 1) = 0$; la solution $y = 0$ donne le minimum de Z_0 ; on a un maximum pour $y = \sqrt{1 - 2\lambda^2} \Rightarrow \omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - 2\lambda^2}$; AN : $\lambda = 0,5$; $\omega_M = \omega_0 \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ. D'après le graphe, on a $0,85 \leq Z_0 \leq 1,15$ pour $0 < \omega < \omega_1$ avec ω_1 vérifiant :

$$0,85 = \frac{1}{\sqrt{(1 - y_1^2)^2 + y_1^2}} \Rightarrow y_1 \approx 1,1384 \Rightarrow \omega_1 = 1,138 \omega_0 \text{ . AN : BP} = \omega_1 = 341,4 \text{ rad.s}^{-1}.$$

c. $p = f v = -2m\lambda\omega_0 \dot{x}^2$;

$\bar{p} = -2m\lambda\omega_0 \dot{x}^2$ avec $x = X_0 \cos(\omega t + \Phi)$ et $\dot{x} = -\omega X_0 \sin(\omega t + \Phi)$.

$$\bar{p} = -2m\lambda\omega_0 \omega^2 \frac{X_0^2}{2} = -m\lambda\omega_0 \omega^2 X_0^2 = -\frac{1}{2} m \omega_0^3 X_0^2.$$

d. Pour $\lambda = 0,5$ et $\omega = \omega_0$: $X_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \bar{p} = \frac{-F_0^2}{2m\omega_0}$; AN : $\bar{p} = -7,356 \text{ W}$.

II. Etude du système électrique

1. $v = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$ avec $i = \frac{dq}{dt}$;

$$v = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \text{ , d'équation complexe associée :}$$

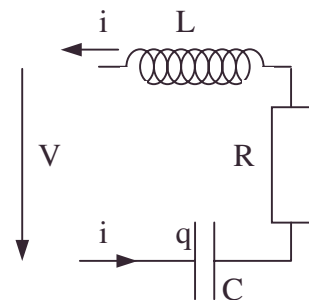
$$L\ddot{z} + R\dot{z} + \frac{z}{C} = V_0 e^{j\omega t} \text{ avec } q = \text{Re}(z).$$

La solution particulière $z = \bar{Z} e^{j\omega t}$ vérifie :

$$\bar{Z} \left(-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C} \right) = V_0 ; |\bar{Z}| = \frac{V_0 C}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}} ; \arg z = -\arctan \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$q = \text{Re}(z) \Rightarrow Q_0 = \frac{V_0 C}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}} \text{ et } \psi = -\arctan \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

2.a. $Y = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega_0^2 y^2)^2 + R^2 C^2 \omega_0^2 y^2}}$ est identique à Z_0 si $\begin{cases} LC\omega_0^2 = 1 \\ RC\omega_0 = 2\lambda \end{cases}$



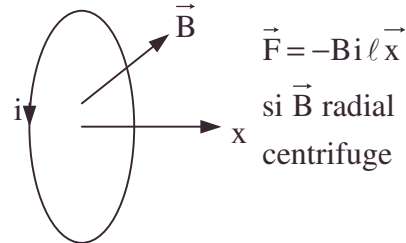
soit : $C = \frac{1}{L \omega_0^2}$ et $R = 2\lambda \omega_0 L$.

b. AN : $R = 0,939 \Omega$; $C = 3,50 \text{ mF}$.

III. Etude du haut-parleur

1. On doit faire intervenir en plus :

- mécaniquement la force de Laplace ;
- électriquement une force électromotrice d'induction e_2 développée dans la bobine due au déplacement en plus de $e_1 = -L \frac{di}{dt}$.



$$e_2 = \int_{\Gamma} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \dot{x} B \ell (\vec{B} \text{ centrifuge}).$$

Les équations sont :

- mécaniquement : $m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x - 2\lambda m \omega_0 \dot{x} - B i \ell$;
- électriquement : $v = R i + L \frac{di}{dt} - \dot{x} B \ell + \frac{q}{C}$.

et en utilisant seulement les fonctions q et x :

$$m \ddot{x} + 2\lambda m \omega_0 \dot{x} + m \omega_0^2 x = -q \ell B ; L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = v(t) + \dot{x} B \ell .$$

2.a. Pour que pulsation propre et coefficient d'amortissement soient identiques, on prendra : $R = 2\lambda \omega_0 L$ et $C = \frac{1}{L \omega_0^2}$ (cf. II.2.b.).

$$\text{L'équation électrique s'écrit : } \ddot{q} + 2\lambda \omega_0 \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{v}{L} + \dot{x} \frac{B \ell}{L} ,$$

$$\text{à rapprocher de : } \ddot{x} + 2\lambda \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{q}{m} \ell B .$$

En notation complexe, le système s'écrit :

$$(-\omega^2 + 2\lambda j \omega \omega_0 + \omega_0^2) Q = \frac{V_0}{L} + j \omega \frac{B \ell}{L} X ;$$

$$(-\omega^2 + 2\lambda j \omega \omega_0 + \omega_0^2) X = -j \omega Q \frac{\ell B}{m} .$$

L'élimination de Q donne :

$$X = \frac{-j y V_0 \frac{\alpha}{B \ell \omega_0}}{(1 - y^2 + 2\lambda j y)^2 - \alpha y^2} = \frac{-j y V_0 \frac{\alpha}{B \ell \omega_0}}{(1 - y^2)^2 - (4\lambda^2 + \alpha) y^2 + 4\lambda j (1 - y^2) y} .$$

Rem. : le terme facteur de y^2 au dénominateur $4\lambda^2 + \alpha$ montre que l'induction s'ajoute à l'amortissement.

b.1. α est sans dimension comme y et 1 (cf. dénominateur de X) ;

A.N. : $\alpha = 0,4996 \neq 0,5$.

$$2. X_0 = \frac{j V_0 \alpha}{B \ell \omega_0 (4\lambda^2 + \alpha)} \Rightarrow V_0 = \frac{j X_0}{\alpha} B \ell \omega_0 (\alpha + 4\lambda^2) .$$

$$3. |V_0| = 39,4 \text{ V} .$$

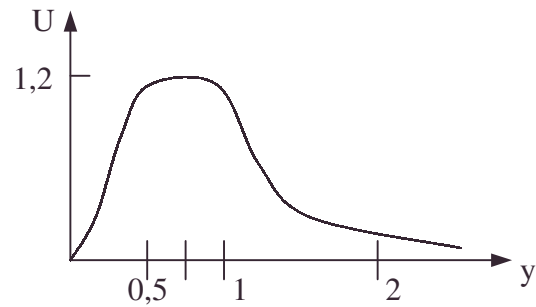
$$4. U = \frac{(4\lambda^2 + \alpha)y}{\sqrt{\left[(1-y^2)^2 - (4\lambda^2 + \alpha)y^2\right]^2 + 16\lambda^2 y^2 (1-y^2)^2}};$$

$$\text{AN : } U = \frac{1,5y}{\sqrt{(1-3,5y^2 + y^4)^2 + 4y^2(1-y^2)^2}}.$$

y	0,5	0,8	1	2
U	0,97	1,2	1	0,25

$$y \rightarrow 0 \quad U \rightarrow 0$$

On a une courbe du type filtre passe bande,
centrée au voisinage de $y = 0,8$ dont
la fréquence est une basse fréquence.
 $F = 38 \text{ Hz}$



5.4.6. Résonance électromécanique

Voir page 66.

5.5. Introduction à la physique du solide

5.5.1. Câble coaxial avec diélectrique

Voir page 762.

5.5.2. Milieux magnétiques ; self en ferrite

Voir page 812.

5.5.3. Courants de Foucault Epaisseur de peau dans une plaque de cuivre

Voir page 829

5.5.4. Sphère supraconductrice

Voir page 803.

5.5.5. Supraconductivité

Voir page 569.

5.5.6. Conductivité du silicium

Voir page 605.

5.5.7. Cristallographie

Voir page 1482.

5.5.8. Acoustique des milieux continus

Voir page 1286.

5.5.9. Propagation dans un milieu anisotrope biréfringent

Voir page 1207.

5.5.10. Pouvoir rotatoire du quartz

Voir page 1457.

5.5.11. Ondes de torsion

Voir page 1307.

5.5.12. Principe du laser

Voir page 683.

5.5.13. Diffusion par une membrane poreuse

Voir page 626.

5.5.14. Loi de Darcy

Voir page 479.

6. Physique appliquée

6.1. Electronique

6.1.1. Amplificateur opérationnel

Appartient aux programmes MPSI, PCSI, PTSI, TSI1 et 2, MP, PSI, PT, BCPST2

6.1.1.1. Montages classiques

Ce problème se propose d'étudier, sous diverses conditions, le fonctionnement d'un amplificateur opérationnel. Il comporte quatre parties qui sont largement indépendantes, mais il est conseillé de respecter l'ordre des questions.

Ce composant électronique présente deux bornes d'entrée et une borne de sortie :

- La borne d'entrée non-inverseuse est nommée E^+ .
- La borne d'entrée inverseuse est nommée E^- .
- La borne de sortie est nommée S .

Les potentiels V_{E^+} , V_{E^-} , V_S sont définis par rapport à la masse (hachurée sur le dessin de la figure 1). Dans tout le problème, l'amplificateur est supposé parfait : $V_{E^+} = V_{E^-}$: aucun courant ne circule dans l'amplificateur entre les deux bornes d'entrée. L'impédance d'entrée est donc infinie.

L'alimentation de l'amplificateur n'est pas schématisée et n'a pas à être prise en considération pour la résolution du problème.

Aucune connaissance particulière sur les quadripôles n'est également nécessaire.

Première partie : étude de quelques montages simples

I.1. On considère le montage schématisé sur le dessin de la figure 2.

Exprimer la tension de sortie V_S en fonction de la tension d'entrée V_e , R_1 et R_2 .

Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

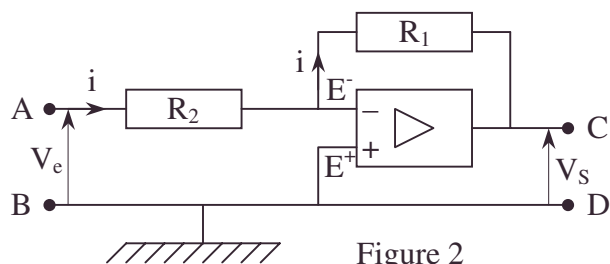


Figure 2

2. On considère le montage schématisé sur le dessin de la figure 3.

Exprimer la tension de sortie V_S en fonction de V_e , R_1 et R_2 .

Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

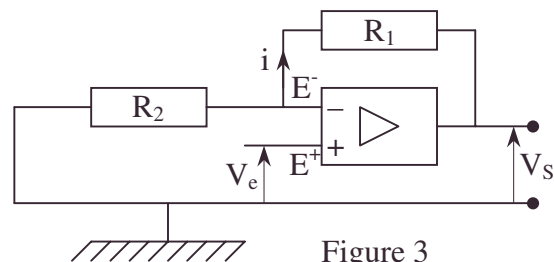
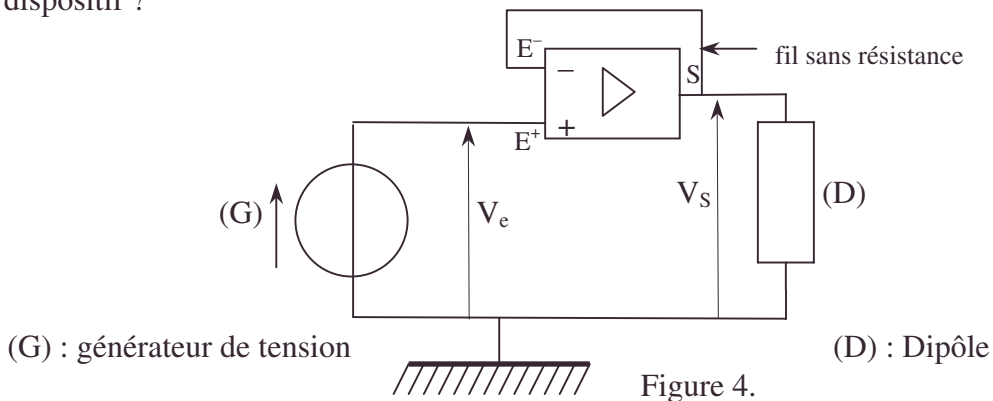


Figure 3

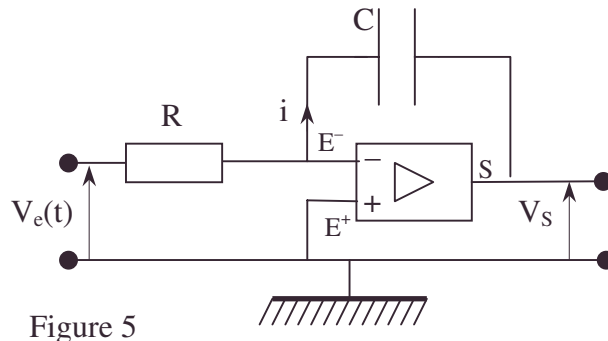
3. On considère le montage schématisé sur le dessin de la figure 4. (G) est un générateur, (D) est un dipôle. Quelle est la relation entre V_e et V_s ? Quel est l'intérêt du dispositif ?



4. On considère le montage schématisé sur le dessin de la figure 5.

Exprimer la tension de sortie V_s
en fonction de $V_e(t)$, R et C .

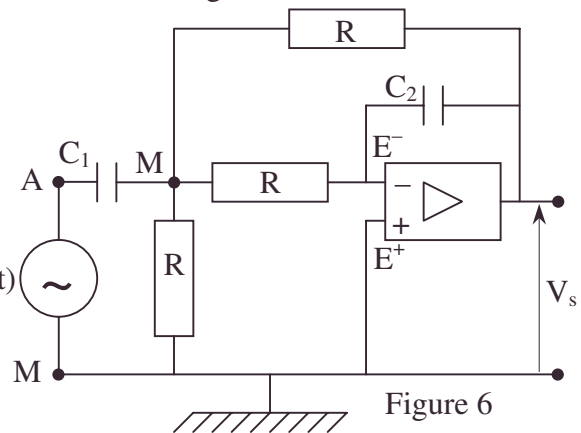
Quel est l'intérêt du dispositif ?



Deuxième partie : étude d'un filtre

On considère le montage représenté sur le dessin de la figure 6.

La tension d'entrée est sinusoïdale de pulsation ω , de valeur efficace E constante. On rappelle qu'un circuit électrique est un filtre passe-haut, passe-bas ou passe-bande si la tension de sortie prend une valeur notable respectivement pour des pulsations élevées, faibles ou comprises entre les deux valeurs.



II.1. En considérant le comportement des condensateurs C_1 et C_2 à haute et à basse fréquence, classer le filtre constitué par le schéma de la figure 6 en filtre passe-haut, passe-bas ou passe-bande.

2. En notant $\underline{V_s}$ et \underline{E} les valeurs efficaces complexes de la tension de sortie et de la tension d'entrée, déterminer le rapport $\frac{\underline{V_s}}{\underline{E}}$ en fonction de ω , R , C_1 et C_2 .

3. Exprimer le module du rapport $\frac{\underline{V_s}}{\underline{E}}$. Montrer que ce module passe par une valeur maximale pour une pulsation ω_0 que l'on calculera.

4. Définir et déterminer la bande passante $\Delta\omega$ et le facteur de qualité du filtre Q .

- bande passante, facteur de qualité [ou de surtension], maximum

5. Application numérique : calculer la fréquence correspondant à ce maximum et le facteur de qualité du filtre pour : $R = 5000 \, \Omega$; $C_1 = 0,3 \, \mu\text{F}$; $C_2 = 0,3 \, \text{nF}$.

Troisième partie : étude d'oscillations électriques

III.1. On considère le quadripôle, noté (B), représenté sur le dessin de la figure 7.

Les tensions d'entrée et de sortie étant notées $x(t)$ et $y(t)$, établir l'équation différentielle liant les fonctions x et y .

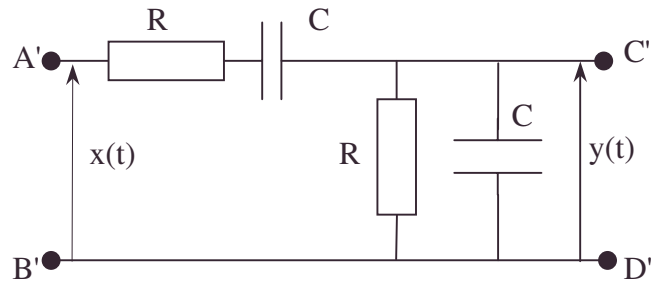


Figure 7.

2.

L'amplificateur opérationnel est employé selon le montage, déjà étudié, représenté sur le dessin de la figure 8, constituant un quadripôle noté (A).

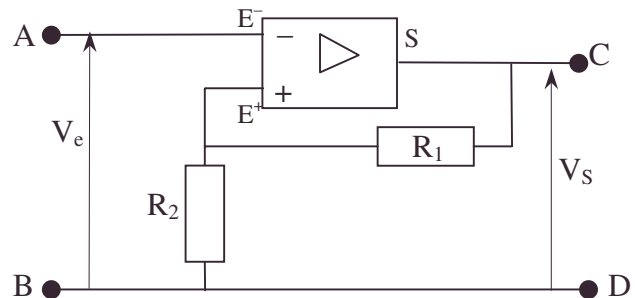


Figure 8.

On associe alors les quadripôles (A) et (B) selon le montage de la figure 9, où (G) est un générateur de tension e constante.

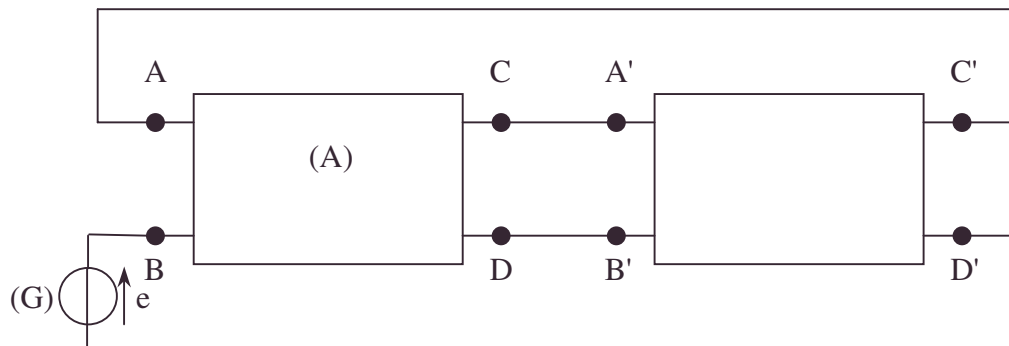


Figure 9

a. Montrer que pour (B), on peut admettre qu'entre C' et D' est branché un dipôle de résistance infinie et que, par suite, on peut appliquer les résultats de la question I.2.

b. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $y(t)$.

c. Etablir la relation entre R_1 et R_2 qui rend sinusoïdale la solution de cette équation (cette solution est indépendante de e). Calculer la pulsation propre de cet oscillateur, ω_0 .

3. Le montage précédent est auto-oscillateur. On note \underline{X} et \underline{Y} les tensions efficaces complexes d'entrée et de sortie de (B). On note \underline{V}_e et \underline{V}_s les tensions efficaces complexes d'entrée et de sortie de (A), et l'on pose $\underline{T} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$ et $\underline{A} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$.

a. Dans le cas du montage de la figure 9 avec $e = 0$, établir la relation entre \underline{A} et \underline{T} ; retrouver la pulsation propre ω_0 et la relation entre R_1 et R_2 .

- b. Application numérique : calculer R_1 et ω_0 pour $R = 12 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$;
 $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.

Quatrième partie

Etude d'oscillations à travers plusieurs cellules de déphasage

IV.1. On considère le réseau déphaseur, noté (D), représenté sur le dessin de la figure 10.

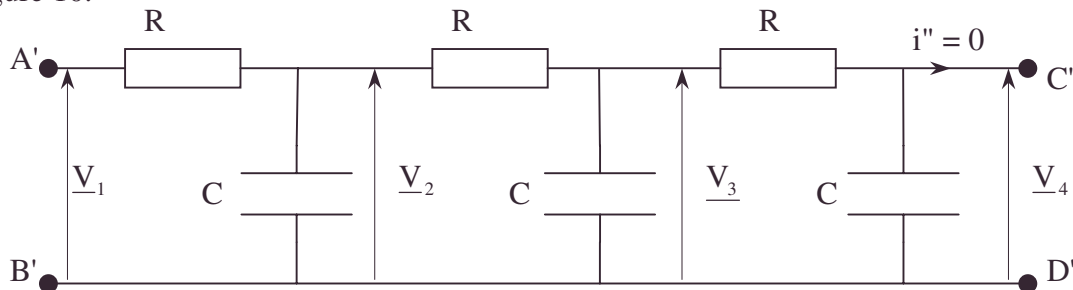


Figure 10

Déterminer la fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{V}_4}{\underline{V}_1}$ de ce réseau. On posera $a = RC\omega$.

2. On associe à ce réseau (D) les amplificateurs opérationnels notés (C) et (E) selon le schéma de montage de la figure 11.

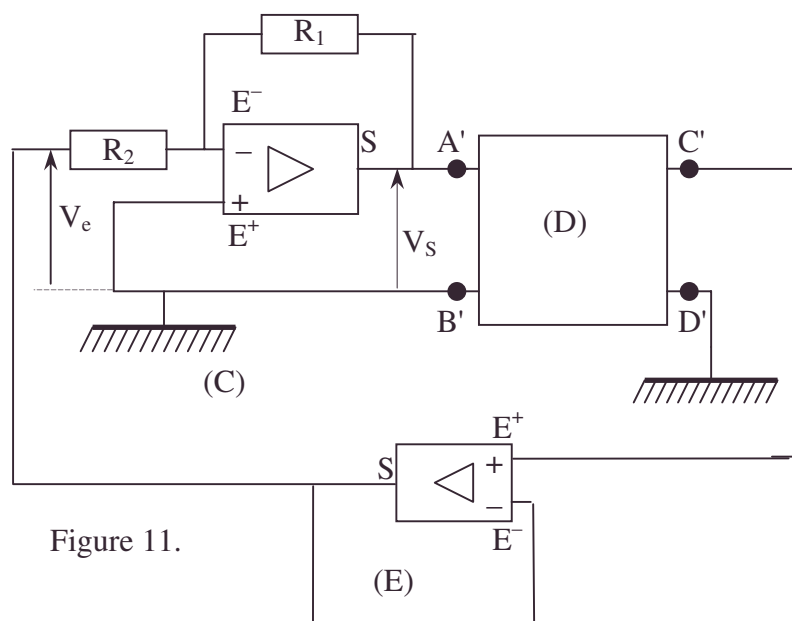


Figure 11.

On étudie le régime harmonique de pulsation ω et on pose $\underline{A} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ (gain de l'amplificateur (C)).

a. Montrer que l'impédance branchée à la sortie de (D) peut être considérée comme infinie.

b. Etablir la relation entre \underline{A} et \underline{T} . En déduire la pulsation d'oscillation ω_0 et la relation vérifiée par R_1 et R_2 .

Autres concours ; Durée 2h.

Corrigé

$$\text{I.1.a. } V_{E^-} = V_{E^+} = 0 ; V_e - 0 = R_2 i ; 0 - V_s = R_1 i ; \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Le théorème de Millman donne le même résultat.

b. Le montage est dit inverseur. Il permet une amplification de tension.

$$\text{2.a. } V_{E^-} = V_{E^+} = V_e = -R_2 i ; \text{ or, } 0 - V_s = (R_2 + R_1) i \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}.$$

b. On a un ampli de tension non inverseur.

$$\text{3.a. } V_s = V_{E^-} = V_{E^+} ; \frac{V_s}{V_e} = 1.$$

b. Montage suiveur ; adaptateur d'impédance. $i_e = 0 \Rightarrow Z_e \propto \forall(D) ; V_s = kV_e$, avec $k = 1$; identifié à $V_s = kV_e + \epsilon Z_s i_s \Rightarrow Z_s = 0$.

$$\text{4.a. } i = \frac{dq}{dt} ; \text{ or } 0 - V_s = \frac{q}{C} ; V_e - 0 = Ri ; V_s = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_e dt.$$

b. On a un circuit intégrateur.

II.1.a. C_1 empêche le passage des basses fréquences dès l'entrée (cf. C coupe le courant continu).

b. En haute fréquence, $z_{C_2} = 0$, $V_s = V_{E^-} = V_{E^+} = 0$; rien ne passe. Conclusion : le filtre ne peut être que passe-bande selon les critères cités.

$$\text{2. } V_{E^-} = V_{E^+} = 0.$$

Appliquons le théorème de Millman :

a. en M.

$$\underline{V}_M = \frac{\underline{E} j C_1 \omega + \frac{V_s}{R}}{j C_1 \omega + \frac{3}{R}}.$$

b. en E^-

$$0 = \frac{\underline{V}_M}{R} + j C_2 \omega \underline{V}_s.$$

On en tire :

$$-j R C_2 \omega \underline{V}_s \left(j C_1 \omega + \frac{3}{R} \right) = j C_1 \omega \underline{E} + \frac{V_s}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{E}} = \frac{-j R C_1 \omega}{1 - R^2 C_1 C_2 \omega^2 + 3 j R C_2 \omega} = \frac{-C_1}{3 C_2 \left(1 + j \left(\frac{\omega R C_1}{3} - \frac{1}{3 \omega R C_2} \right) \right)}, \text{ soit encore de la forme}$$

$$\text{canonique des filtres passe-bande : } \frac{\underline{V}_s}{\underline{E}} = -\frac{C_1}{3 C_2} \frac{1}{1 + j Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

$$\text{avec } \frac{Q}{\omega_0} = \frac{R C_1}{3} \text{ et } Q \omega_0 = \frac{1}{3 R C_2}, \text{ soit } \omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1 C_2}} \text{ et } Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

$$3. \left| \frac{V_s}{E} \right|^2 = \frac{C_1^2}{9C_2^2 \left[1 + \frac{1}{9} \left(\omega RC_1 - \frac{1}{\omega RC_2} \right)^2 \right]} ; \text{ maximum pour } \left(\omega RC_1 - \frac{1}{\omega RC_2} \right) = 0 ,$$

$$\text{soit } \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} .$$

$$4.a. G_{\max} = \frac{C_1}{3C_2} ; \left| \frac{V_s}{V_e} \right| \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ définit la bande passante de limites } \omega_1, \omega_2 \text{ telles que :}$$

$$1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2 \text{ ou encore } \frac{1}{3} \left(\omega RC_1 - \frac{1}{\omega RC_2} \right) = \pm 1 .$$

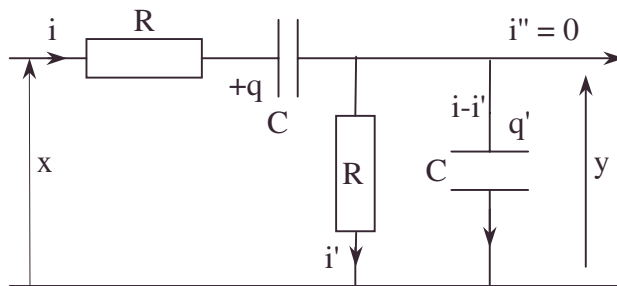
$$\omega_2 = \frac{3RC_2 + \sqrt{4R^2 C_1 C_2 + 9R^2 C_2^2}}{2R^2 C_1 C_2} ; \omega_1 = \frac{-3RC_2 + \sqrt{4R^2 C_1 C_2 + 9R^2 C_2^2}}{2R^2 C_1 C_2} .$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{3}{RC_1} .$$

$$b. \text{ Le facteur de qualité } Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} . \text{ cf. circuit RLC.}$$

$$5. \text{ AN : } f_0 = 3355 \text{ Hz ; } Q = 10,54.$$

III.1.



$i'' = 0$ (cf. **III.2.**) courant d'entrée en A de l'A.O. figure 9.

$$\textcircled{1} \quad x - y = Ri + \frac{q}{C} ; i = \frac{dq}{dt} ;$$

$$y = Ri' ; i - i' = \frac{dq'}{dt} ; q' = yC ;$$

$$i = \frac{y}{R} + C \frac{dy}{dt}$$

Éliminons q puis i :

$$\frac{d}{dt} \textcircled{1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + RC \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y}{RC} + \frac{dy}{dt} .$$

$$\text{d'où } \frac{dx}{dt} = RC \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + \frac{y}{RC} .$$

2.a. $i'' = i_A = 0$: on peut admettre qu'entre C' et D' est branché un dipôle de résistance infinie. Par suite, on peut appliquer exactement les mêmes équations qu'en

I.2. car on a : $V_s = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_e$. On remarque que les bornes E^+ et E^- sont inversées (cf.

stabilité).

$$b. \text{ On remarquera : } V_s = x ; y = V_{C'} - V_{D'} = V_A - V_B + V_B - V_{D'} = V_e + e ;$$

$$\text{vu } \textbf{2.a.}, \quad V_s = x = \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) (y - e) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{dy}{dt} \text{ car } \frac{de}{dt} = 0 , \text{ et vu } \textbf{III.1.} :$$

$$RC \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(2 - \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{y}{RC} = 0 .$$

c. Le terme d'amortissement $\frac{2 - \frac{R_1}{R_2}}{RC}$ s'annule pour $R_1 = 2R_2$. La solution est alors sinusoïdale de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

3.a.α. En notation complexe, dans le régime sinusoïdal séparé du régime continu, (cf. alimentation) on a : $e = 0$.

On a $\underline{V}_s = \underline{X}$; $\underline{V}_e = \underline{Y}$; $\underline{T} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{\underline{V}_e}{\underline{V}_s} = \frac{1}{\underline{A}}$ soit $\underline{T}\underline{A} = 1$.

β. En transcrivant $y = \underline{Y}e^{j\omega t}$; $x = \underline{X}e^{j\omega t}$: $\frac{Y}{X} = \underline{T} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ (cf **2.a.**)

l'équation **III.1.** devient : $\underline{Y} \left(-\omega^2 + \frac{1}{R^2 C^2} + 3 \frac{j\omega}{RC} \right) = j \frac{\omega}{RC} \underline{X} = j \frac{\omega}{RC} \frac{R_1 + R_2}{R_2} \underline{Y}$;

L'identification en \underline{Y} des parties réelles et imaginaires donne $\omega^2 - \frac{1}{R^2 C^2} = 0$ soit

$\omega = \frac{1}{RC}$ et $\frac{1}{3} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ soit $R_1 = 2 R_2$.

b. $R_1 = 2000 \Omega$; $\omega_0 = 8333 \text{ rad.s}^{-1}$.

IV.1. Vu le montage de **IV.2.** le courant i'' en C' est nul (entrée sur A.O. idéal).

$\underline{V}_4 = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_3$ (cf. pont diviseur de tension) soit $\underline{V}_4 = \frac{\underline{V}_3}{1 + ja}$.

– Appliquons le théorème de Millman aux deux nœuds intermédiaires:

$\underline{V}_3 = \frac{\frac{\underline{V}_2}{R} + \frac{\underline{V}_4}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega}$ soit $\underline{V}_3 = \frac{\underline{V}_2 + \underline{V}_4}{2 + ja}$; $\underline{V}_2 = \frac{\frac{\underline{V}_1}{R} + \frac{\underline{V}_3}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega}$ soit $\underline{V}_2 = \frac{\underline{V}_1 + \underline{V}_3}{2 + ja}$.

– Le remplacement de $\underline{V}_3 = (1 + ja)\underline{V}_4$ permet de trouver $\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_4}$ puis $\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_4}$; on voit le rôle

simplificateur de la variable a . Ainsi $\frac{\underline{V}_4}{\underline{V}_1} = \underline{T} = \frac{1}{1 - 5a^2 + ja(6 - a^2)}$.

2.a. $i_{C'} = 0 \Rightarrow$ impédance de charge infinie sur le quadripôle D.

b.α. On a : $\underline{V}_s = \underline{V}_1$; $\underline{V}_e = \underline{V}_4 = \underline{T}\underline{V}_1 = \underline{T}\underline{V}_s$;

or $\underline{V}_s = \underline{A}\underline{V}_e$ d'où $\underline{A} = \frac{1}{\underline{T}} = 1 - 5a^2 + ja(6 - a^2)$.

β. Or ici $\underline{A} = -\frac{R_1}{R_2}$ cf. **I.1.** L'identification avec **2.b.α.** donne :

$-\frac{R_1}{R_2} = 1 - 5a^2$ et $a(6 - a^2) = 0$.

$\Rightarrow a = \sqrt{6} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC}$ car $a = 0$ est impossible d'où $\frac{R_1}{R_2} = 29$.

• *identification, Millman [théorème de], pont diviseur de tension*

6.1.1.2. Détecteur de crête Démodulateur de fréquence

Les signaux transportés vers et par les satellites de télécommunication doivent nécessairement, pour franchir la barrière de l'ionosphère, être émis à des fréquences nettement supérieures à une fréquence de coupure (au moins quelques dizaines de MHz). Les informations sont transmises en modulation de fréquence, le signal émis ayant la forme $u(t) = U_0 \cos(\Omega(t)t)$. La pulsation $\Omega(t)$ de l'onde varie au cours du temps autour d'une valeur moyenne, ou pulsation porteuse Ω_0 , selon la loi $\Omega(t) = \Omega_0(1 + \alpha \cos \omega t)$. Le signal lui-même (par exemple, l'image et le son correspondant à l'émission de télévision) est représenté par la fonction $s(t) = \alpha \cos \omega t$, la pulsation ω étant, en général, très inférieure à la pulsation de l'onde porteuse.

1. Lors de son arrivée au sol, le signal envoyé par le satellite doit faire l'objet d'une démodulation, c'est-à-dire qu'un dispositif électronique doit reconstituer, à partir de la tension $u(t)$ présentée plus haut, une tension proportionnelle à $s(t)$. Le montage de la figure 1 présente le principe d'un tel démodulateur. Exprimer en régime sinusoïdal permanent à la pulsation Ω , les relations exprimant les tensions \underline{u}_1 et \underline{u}_2 , en fonction de la tension \underline{u} . On utilisera la notion complexe et on supposera idéaux les amplificateurs opérationnels du montage.

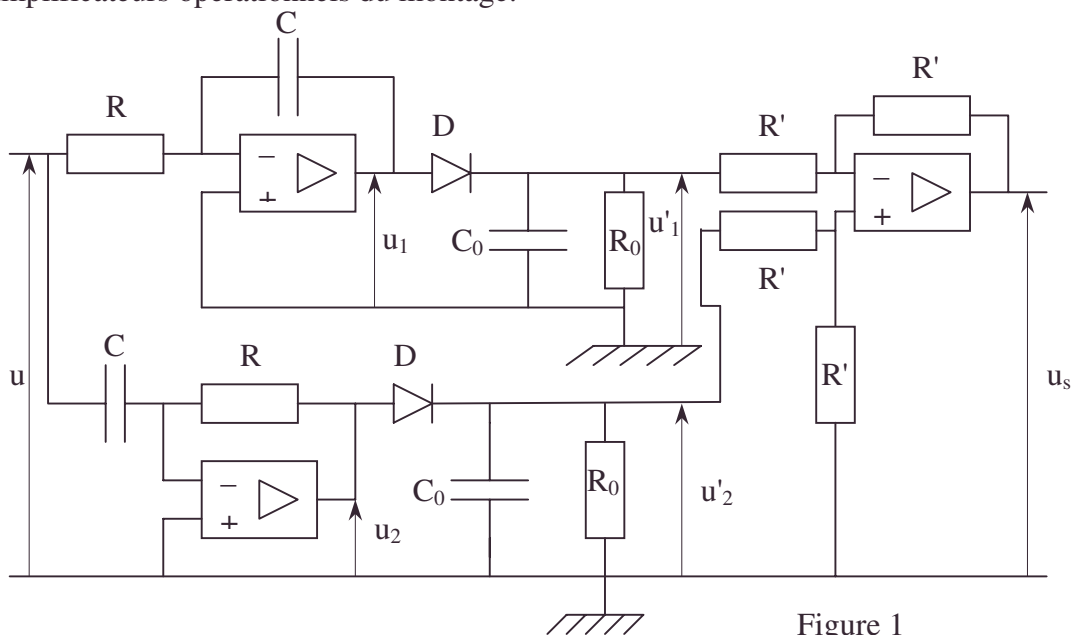


Figure 1

2. On appelle détecteurs de crête les montages présentés figure 2, dans lesquels la diode D est idéale et le pont R_0, C_0 est choisi de sorte que $R_0 C_0 \gg 1$.

1. Etablir la forme de la tension de sortie v' lorsque la tension d'entrée v est sinusoïdale : $v(t) = V_0 \cos \Omega t$.

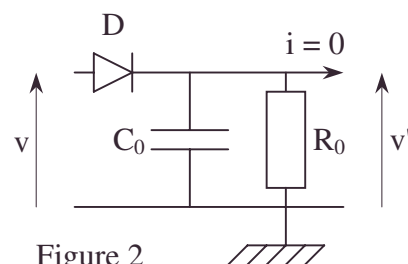


Figure 2

2. Justifier la dénomination (détecteur de crête) donnée à ce montage.

3. A quelle condition sur les résistances du montage les deux détecteurs de crête de la figure 1 opèrent-ils effectivement cette fonction ?

1. Montrer que la tension de sortie u_s du montage est pratiquement constante, proportionnelle à la valeur U_0 de la tension d'entrée $u(t)$. Les valeurs R et C sont choisies de façon que $1/RC = \Omega_0$, pulsation porteuse du signal transmis. On pose $u_s = kU_0$. Exprimer k en fonction de Ω et Ω_0 .

2. On admet que, même en situation de modulation de fréquence, Ω reste voisin de Ω_0 : $\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$. A quelle condition sur $\Delta\Omega$ un tel démodulateur est-il linéaire (à 1% près), c'est-à-dire fournit-il une tension de sortie u_s proportionnelle à $\Delta\Omega$?

4. En réalité, le démodulateur de fréquence de la figure 1 n'est utilisable qu'à des fréquences beaucoup plus faibles que celles utilisées en électronique de télévision.. Quelle partie du dispositif ci-dessus limite-t-elle les performances en haute fréquence de l'ensemble ?

Centrale ; Durée : 1h

Corrigé

1.a. Montage intégrateur (en haut à gauche)

Le théorème de Millman donne, appliqué à \underline{V}_{1-} :

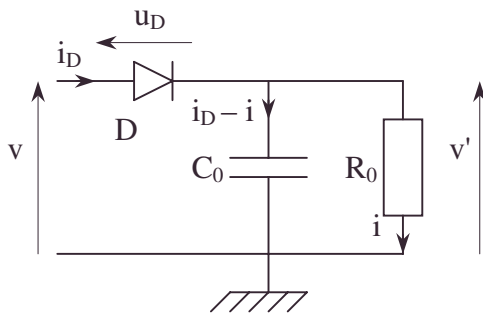
$$\underline{V}_{1-} = \frac{\frac{\underline{u}}{R} + jC\Omega \underline{u}_1}{\frac{1}{R} + jC\Omega} ; \text{ or } \underline{V}_{1-} = \underline{V}_{1+} = 0, \text{ d'où } \underline{u}_1 = -\frac{1}{RCj\Omega} \underline{u}.$$

b. Montage dérivateur (en bas à gauche)

Le théorème de Millman donne, appliqué à \underline{V}_{2-} :

$$\underline{V}_{2-} = \frac{jC\Omega \underline{u} + \frac{\underline{u}_2}{R}}{jC\Omega + \frac{1}{R}} ; \text{ or } \underline{V}_{2-} = \underline{V}_{2+} = 0, \text{ d'où } \underline{u}_2 = -RCj\Omega \underline{u}.$$

2.



2.1.a. $v' = v - u_D = R_0 i$;

si $v > v'$, la diode D est passante.

si $v < v'$ la diode D est bloquée, v' dépend de la charge électrique de C_0 .

b. $i_D = i + (i_D - i) = i + \frac{d(C_0 v')}{dt} = i + C_0 R_0 \frac{di}{dt}.$

c. Quand D conduit, $u_D = 0$, $i_D > 0$, on a donc $v = v' = R_0 i = V_0 \cos \Omega t$

$$\Rightarrow i_D = \frac{V_0}{R_0} \cos \Omega t - C_0 R_0 \Omega \frac{V_0}{R_0} \sin \Omega t ; i_D = \frac{V_0}{R_0} \cos \Omega t (1 - C_0 R_0 \Omega \tan \Omega t) \geq 0 ;$$

La diode cesse d'être passante pour :

$$1 - C_0 R_0 \Omega \tan \Omega t = 0 \Rightarrow \Omega t_n = \arctan \left(\frac{1}{C_0 R_0 \Omega} \right) + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow t_n \approx \frac{1}{R_0 C_0 \Omega^2} + \frac{n\pi}{\Omega} \text{ vu } R_0 C_0 \gg 1. \text{ On note } t_0 \text{ l'instant où } n = 0.$$

$$\Rightarrow \text{le signe positif de } 1 - R_0 C_0 \tan \Omega t \text{ pour } \Omega t \in \left[0, \frac{1}{R_0 C_0 \Omega} \right] \text{ en même temps que}$$

$$v' = V_0 \cos \Omega t \text{ positif permettent } i_D \geq 0.$$

Dès que $i_D < 0$ formellement négative, D se bloque et $i_D = 0$.

d. Quand D est bloquée, $i_D = 0$; $u_D < 0$; pour t un peu supérieur à t_0 , le condensateur se décharge dans R_0 : $v' = R_0 i$ et $0 = v' + R_0 C_0 \frac{dv'}{dt}$;

$$v' = V_0 \cos \Omega_0 t_0 e^{-\frac{t-t_0}{R_0 C_0}} \text{ et vu } \Omega t_0 \ll 1 \quad v' \approx V_0 e^{-\frac{t-t_0}{R_0 C_0}}.$$

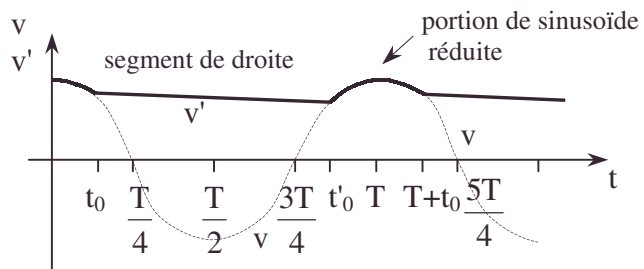
Ce régime demeure tant que $v' > V_0 \cos \Omega t$,

$$\text{et pour } \Omega_0 t < 2\pi, \quad \frac{t-t_0}{R_0 C_0} \approx \frac{t}{R_0 C_0} < \frac{2\pi}{R_0 C_0 \Omega_0} \text{ vu } R_0 C_0 \gg 1 \quad \frac{t-t_0}{R_0 C_0} \text{ reste petit,}$$

$v' \approx V_0 \left(1 - \frac{t-t_0}{R_0 C_0} \right)$, v' reste proche de V_0 sauf au voisinage immédiat de $\Omega t = 2\pi$ à gauche ;

On pourrait trouver la solution exacte de $V_0 \cos \Omega_0 t_0 e^{-\frac{t-t_0}{R_0 C_0}} = V_0 \cos \Omega t_0'$ pour $\Omega t_0' < 2\pi$, $t > t_0'$.

e. $v' < v$ et D devient passante :
 $v' = v$ pour $t_0' < t < T + t_0$ d'où la traduction graphique périodique ci-contre :



2. Ce montage est appelé détecteur de crête car les ruptures de pente (associées au changement d'état de la diode D) permettent de repérer les voisinages des maxima (de période $T = 2\pi/\Omega$) c'est-à-dire la valeur de V_0 .

3. $R_0 \gg \frac{1}{\Omega C_0}$ condition valable pour les 2 détecteurs, vu la question détaillée précédente.

1.a. Les ponts diviseurs de tension donnent pour l'A.O. de sortie :

$$V_- = \frac{u_1' + u_s}{2} ; V_+ = \frac{u_2'}{2} ; \text{ or } V_- = V_+ \Rightarrow u_s = u_2' - u_1'.$$

$$\text{b. On a vu 1. et 2. } u_1' \approx -\frac{u}{j\Omega RC} \approx \frac{\Omega_0 U_0}{\Omega} \text{ vu la notation de l'énoncé } \Omega_0 = \frac{1}{RC} ;$$

$$\text{de même } u_2' \approx \left| -RC\Omega u \right| \approx \frac{\Omega}{\Omega_0} U_0.$$

$$u_s = u'_2 - u', \text{ s'écrit : } u_s \# U_0 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega} \right) \Rightarrow k = \frac{\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{\Omega}.$$

$$2. \Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega : \frac{\Omega}{\Omega_0} = 1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} ; \frac{\Omega_0}{\Omega} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 \left(1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right)} = 1 - \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} + \left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right)^2 ;$$

$$k = 2 \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} - \left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right)^2 \text{ au } 3^{\text{ème}} \text{ ordre près.}$$

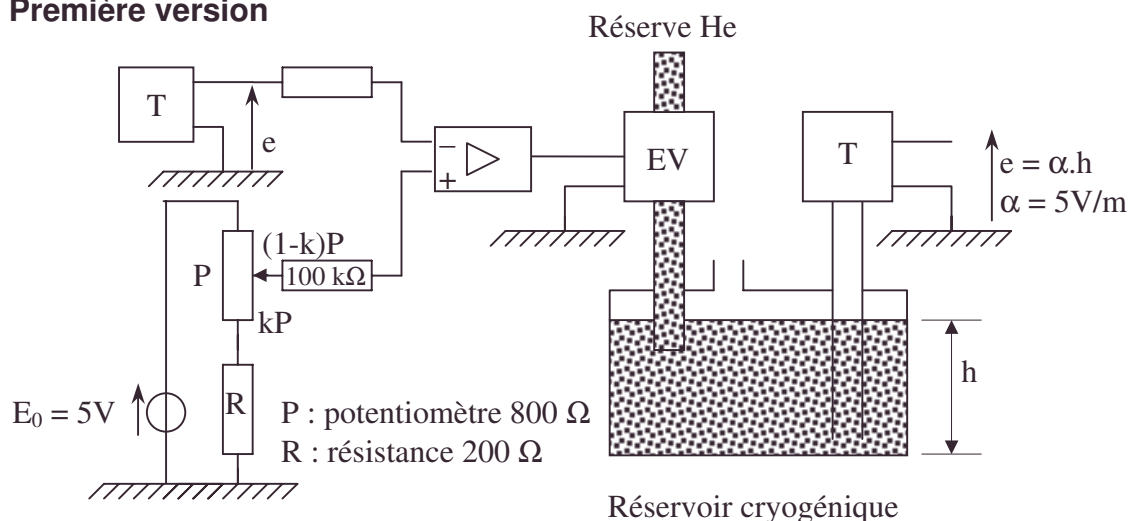
$$k \text{ est constant à } 1\% \text{ près si } \frac{|k - k_0|}{|k_0|} = \frac{\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right)^2}{2 \left| \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right|} = \frac{|\Delta\Omega|}{2\Omega_0} \leq 10^{-2} \text{ soit } \frac{|\Delta\Omega|}{\Omega_0} \leq 5 \cdot 10^{-3}.$$

4. Les fréquences de l'ordre de 10 GHz ne sont pas compatibles avec les bandes passantes des A.O., les capacités parasites des condensateurs ; les résistances présentent aussi des variations avec ces fréquences (cf. effet de peau).

6.1.1.3. Commande d'électrovanne

Cet exercice aborde l'étude d'un système simple de remplissage automatique d'un réservoir cryogénique. Un tel réservoir contenant de l'hélium liquide ($T = 4,2 \text{ K}$, $P = 10^5 \text{ Pa}$) ne peut pas rester plein, même si l'utilisateur ne soutire pas de liquide. En effet, l'apport de chaleur par le milieu extérieur est inévitable et, par évaporation, le niveau de liquide baisse. Pour des expériences de physique de longue durée, l'utilisateur ne souhaite pas avoir à surveiller le niveau du liquide cryogénique et charge le système suivant de cette tâche.

Première version



EV est une électrovanne (ouverte quand la tension à ses bornes dépasse 5v).
T est un transducteur qui fournit une tension e proportionnelle à la hauteur h du liquide restant : $e = \alpha \cdot h$ ($\alpha = 5 \text{ V/m}$).

L'amplificateur opérationnel est idéal et peut fournir la puissance nécessaire au bon fonctionnement de l'électrovanne. Ce montage est alimenté par une source unique de tension de 10 volts, et on admettra que la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel peut varier entre $V_S + = 10 \text{ V}$ et $V_S - = 0 \text{ V}$.

- développement au premier ordre ou plus, électrovanne, réservoir cryogénique.

L'utilisateur n'est pas satisfait de cette première version qui fonctionne à cadence beaucoup trop rapide et fluctuante.

Expliquez le fonctionnement de cette première version.

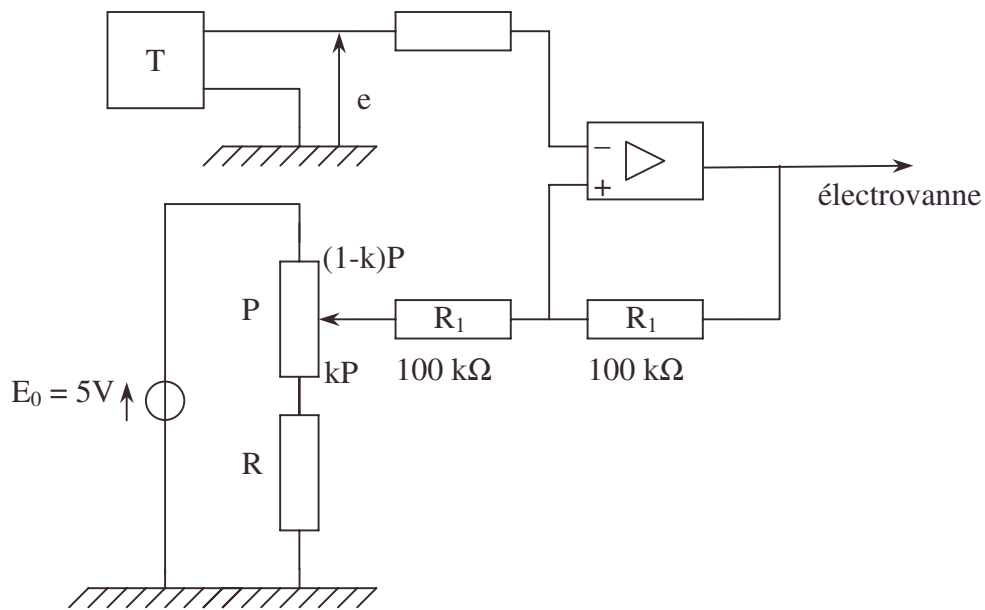
- Quel est son défaut principal ?
- Donnez la hauteur de régulation minimale et maximale (réglable par le potentiomètre P).

L'utilisateur souhaite, pour la qualité de ses mesures, une durée la plus grande possible entre deux remplissages sachant qu'il peut se permettre de laisser le niveau de liquide cryogénique descendre jusqu'à une valeur h_{\min} .

Deuxième version

P, R et T restant les mêmes que précédemment, ainsi que $e(h)$, analysez le fonctionnement de ce nouveau montage.

A.N. : donnez les hauteurs caractéristiques du liquide pour les deux positions extrêmes du potentiomètre P.



CCP ; Durée 0h30.

Corrigé

A.1.a. On a : $v_- = e = \alpha h$; $v_+ = \frac{kP + R}{P + R} E_0$ et d'après la formule du pont diviseur de tension : $\varepsilon_1 = v_+ - v_- = \frac{kP + R}{P + R} E_0 - \alpha h$. $\varepsilon_1 \neq 0$.

$\varepsilon_1 > 0$ $V_S = +10\text{ V}$ l'électrovanne soumise à une ddp fonctionne ;

$\varepsilon_1 < 0$ $V_S = +0\text{ V}$ l'électrovanne court-circuitée ne fonctionne pas.

L'électrovanne fonctionne pour $\varepsilon_1 > 0$ soit pour $h < h_0$ (avec $h_0 = \frac{kP + R}{P + R} \frac{E_0}{\alpha}$), commandée par un montage comparateur.

b. $h_{0\text{ Min}} = \frac{E_0 R}{(P + R)\alpha}$ a lieu pour $k = 0$; AN : $h_{0\text{ Min}} = 0,2\text{ m.}$;

$h_{0\text{ Max}} = \frac{E_0}{\alpha}$ a lieu pour $k = 1$; AN : $h_{0\text{ Max}} = 1\text{ m.}$

c. Dès que k est réglé, une hauteur h_0 est définie ; dès que ce niveau est atteint, l'électrovanne s'arrête ; mais le niveau de l'hélium va immédiatement baisser et l'électrovanne se remet en route pour s'arrêter peu après, le déficit étant comblé (mais le processus va reprendre) ; fonctionnements et arrêts de l'électrovanne s'alternent très rapidement si le transducteur est sensible, ce qui use l'électrovanne.

$$2.a. \text{ On a : } v_- = e = \alpha h ; v_+ = \frac{\frac{V_s}{R_1} + \frac{kP+R}{P+R} \frac{E_0}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{V_s}{2} + \frac{kP+R}{P+R} \frac{E_0}{2} \text{ (cf. Millman) ;}$$

$$\varepsilon_2 = v_+ - v_- \neq 0.$$

$$- \text{ Pour } \varepsilon_2 > 0 \quad V_s = V_{s+} ; \varepsilon_2 = \frac{V_{s+}}{2} + \frac{kP+R}{P+R} \frac{E_0}{2} - \alpha h > 0,$$

$$\text{soit } h < h_1 \text{ avec } h_1 = \frac{V_{s+}}{2\alpha} + \frac{kP+R}{P+R} \frac{E_0}{2\alpha}.$$

$$- \text{ Pour } \varepsilon_2 < 0 \quad V_s = V_{s-} ; \varepsilon_2 = \frac{V_{s-}}{2} + \frac{kP+R}{P+R} \frac{E_0}{2} - \alpha h < 0,$$

$$\text{soit } h < h_2 \text{ avec } h_2 = \frac{V_{s-}}{2\alpha} + \frac{kP+R}{P+R} \frac{E_0}{2\alpha}.$$

L'électrovanne fonctionne pour $\varepsilon_2 > 0$ soit pour $h < h_1$. Ce niveau h_1 une fois atteint, l'électrovanne s'arrête ; la disparition d'hélium ne provoque pas le redémarrage immédiat car le basculement de l'A.O. à $h = h_1$ court-circuite l'électrovanne tant que h reste supérieur à h_2 . L'électrovanne fonctionne alors jusqu'à ce que le niveau retrouve le niveau h_1 . Le montage électronique est un comparateur à hystérésis.

b. On a ainsi diminué le nombre des arrêts et mises en route (économie d'usure de l'électrovanne).

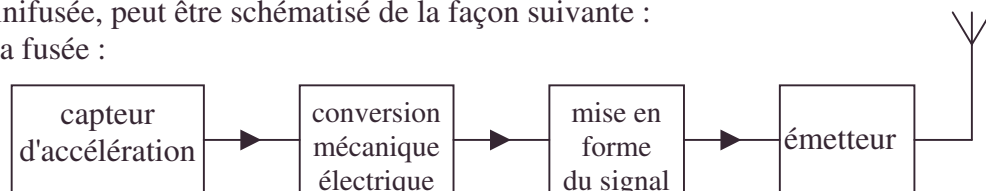
$$c. \text{ AN : } k = 0 ; h_1 = 1,1 \text{ m ; } h_2 = 0,1 \text{ m.}$$

$$k = 1 ; h_1 = 1,5 \text{ m ; } h_2 = 0,5 \text{ m.}$$

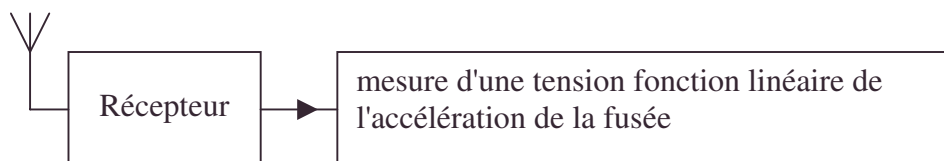
6.1.1.4. Capteur d'accélération à jauge de contrainte

Le principe d'une chaîne de télémessure permettant de connaître, au sol, l'accélération d'une minifusée, peut être schématisé de la façon suivante :

Dans la fusée :



Au sol :



Dans tout le problème, l'accélération de la pesanteur est un vecteur \vec{g} constant tel que

$$\|\vec{g}\| = g = 10 \text{ m.s}^{-2}.$$

Première partie : étude mécanique du capteur d'accélération

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un référentiel $Oxyz$, d'axe Oz vertical dirigé vers le haut, est lié à la fusée. Celle-ci est en translation selon Oz , son accélération par rapport au référentiel terrestre est $\vec{a}(t)$, t désignant le temps, et la mesure algébrique de la projection de cette accélération sur l'axe Oz est notée $a(t)$.

I.1. Un point matériel de masse M est astreint à se déplacer sur l'axe Oz . Nous poserons $\overline{OM} = z$ selon Oz . Le point M est rappelé vers O par un dispositif équivalent à un ressort de masse négligeable, de raideur K et de longueur au repos nulle. Il est soumis, de plus, à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ ($\lambda > 0$), où \vec{v} est la vitesse du point M par rapport à la fusée.

a. Ecrire, en la justifiant, l'équation différentielle en z du mouvement de la masse M par rapport à la fusée immobile au sol.

b. Avant le décollage, ($t < 0$), la masse M est en équilibre dans le référentiel de la fusée. Au moment du décollage, ($t = 0$), l'accélération galiléenne de la fusée passe brusquement de la valeur $\vec{0}$ à la valeur \vec{a}_0 , parallèle à l'axe Oz . Puis, pour $t > 0$, l'accélération de la fusée demeure constante, égale à \vec{a}_0 (de mesure algébrique $a_0 > 0$).

Donner l'équation horaire $z(t)$ du mouvement de la masse M dans les différents cas possibles.

c. Plaçons-nous désormais dans le cas du régime critique. Donner la relation unissant K et λ ; définir la constante de temps τ de ce régime critique transitoire et donner son expression.

d. Supposons maintenant que l'accélération de la fusée, pour $t > 0$, soit toujours parallèle à Oz , mais de mesure variable selon : $a(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t$. Montrer que, pour des temps suffisamment grands devant τ , et si ω est très inférieur à $\frac{1}{\tau}$, alors

$$z(t) \approx -\frac{M}{K} a(t) + z_0, \text{ où } z_0 \text{ est une constante.}$$

Justifier l'extension de cette formule à des accélérations $a(t)$ d'une forme quelconque mais de périodes très grandes devant τ .

2. Le ressort est en réalité une lame métallique parallélépipédique d'épaisseur e petite devant sa longueur L , de largeur d . Cette lame, de masse négligeable, est fixée rigidement par l'une de ses faces (e, d) de centre A , à la fusée. En l'absence de contrainte extérieure, l'axe AO' joignant A au centre O' de la face opposée à la face fixe, est horizontal et le point O' est confondu avec l'origine O du référentiel mobile $Oxyz$.

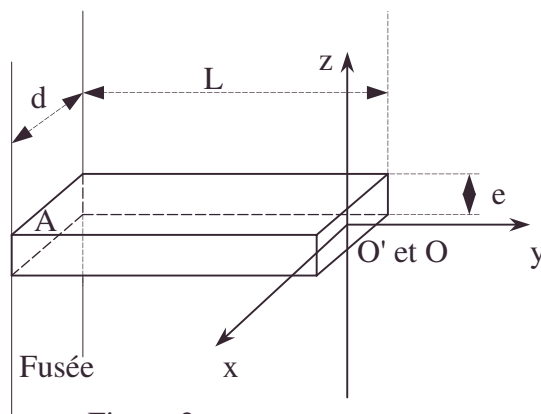


Figure 2
Lame en l'absence de contrainte

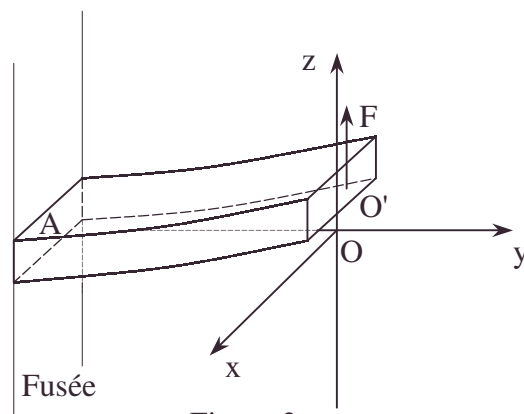


Figure 3
Lame faiblement courbée

Sous l'action d'une force \vec{F} parallèle à Oz, appliquée en O', la lame se courbe légèrement (c'est-à-dire que la distance OO' reste faible comparée à L).

2.a. Montrer qu'en un point P de coordonnées y,z la lame présente un rayon de courbure $R \approx \left| \frac{d^2 z}{dy^2} \right|^{-1}$.

b. La lame étant ainsi courbée avec un rayon de courbure R au point P(y,z), il s'exerce sur les 2 faces (e,d) d'un élément de lame autour de P deux couples opposés, parallèlement à Ox, dont les moments sont, en valeur absolue :

$$\|\vec{\Gamma}\| = \frac{EI}{R} \quad \text{où } E = \text{module d'Young caractéristique du matériau de la lame.}$$

$$I = \text{Intégrale dépendant de la forme de la lame. Ici, } I = \frac{e^3 d}{12}.$$

Soit Γ_p la valeur algébrique du moment du couple exercé par le reste de la lame sur la face de l'élément de lame, autour de P, dont l'ordonnée est la plus petite. Préciser le signe de Γ_p et sa valeur algébrique en fonction de $\frac{d^2 z}{dy^2}$.

c. Déterminer la valeur de Γ_p qui résulte de l'application de la force \vec{F} au point O'.

d. En déduire l'équation différentielle vérifiée par z(y).

$$\text{Intégrer cette équation et montrer que l'on a } z = z(y=0) = \frac{FL^3}{3EI}.$$

En déduire la raideur K du ressort équivalent à cette lame.

Commenter brièvement la dépendance de K par rapport aux dimensions L, e, d de la lame, en se référant à l'expérience courante.

e. d = 1 cm, e = 0,2 mm, L = 5 cm, M = 20 g, E = 2.10^{11} SI (acier). Calculer numériquement K, et la constante τ définie en I.1.c.

Deuxième partie : étude du montage électrique

La déformation de la lame est mesurée par des "jauges de contrainte". Ce sont des résistors dont la résistance varie avec la longueur du support sur lequel elles sont collées. Quand une telle jauge est collée sur la lame, sa résistance varie en fonction du déplacement vertical z de l'extrémité de la lame selon la loi approchée $R \approx R_0(1 + \alpha z)$ avec $\alpha z \ll 1$.

Fil conducteur sur un support en papier mince.

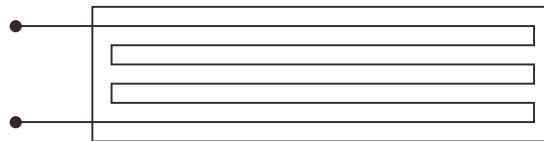


Figure 4 : Jauge de contrainte

II.1.a. Justifier le fait qu'un allongement du support provoque une augmentation de la résistance de la jauge dont le fil conducteur est métallique.

b. Sur quelles faces de la lame peut-on fixer une jauge ? Préciser le signe que prend α en fonction de la face choisie en justifiant brièvement la réponse.

2. Le dispositif élémentaire schématisé ci-contre peut servir à mesurer R. Par définition, sa sensibilité s est : $s = \frac{V - V_0}{V}$ où $V = V_0$ pour $z = 0$.

e : f.e.m. constante d'un générateur idéal

Quelle doit être l'impédance d'entrée de l'appareil de mesure branché entre A et B pour que s soit maximale ?

Cette impédance étant supposée utilisée, calculer s en fonction de R , R_0 et R_1 puis de R_1 , R_0 et αz .

Dans la pratique, la résistance de la jauge dépend à la fois de z et de la température, selon la loi :

$$R \approx R_0(1 + \alpha z + \beta(\theta - \theta_0)),$$

θ_0 = température de référence.

$\beta(\theta - \theta_0)$ du même ordre de grandeur que αz .

Quels sont les inconvénients que présente un montage aussi élémentaire ?

3. Quatre jauges sont fixées sur la lame :

- deux sur la surface supérieure, dont la résistance varie selon la loi :

$$R = R_0[1 + \alpha z + \beta(\theta - \theta_0)];$$

- deux sur la surface inférieure, dont la résistance varie selon la loi :

$$R = R_0[1 + \alpha' z + \beta(\theta - \theta_0)];$$

Préciser les signes α et α' .

Ces jauges sont branchées en pont de Wheatstone comme l'indique la figure 6.

J_1, J_2, J_3, J_4 : jauges.

G = générateur idéal de tension continue,

de f.e.m. e

$$V = V_A - V_B;$$

$$s = \frac{V - V_0}{V}, \text{ où}$$

$$V = V_0 \text{ quand } z = 0.$$

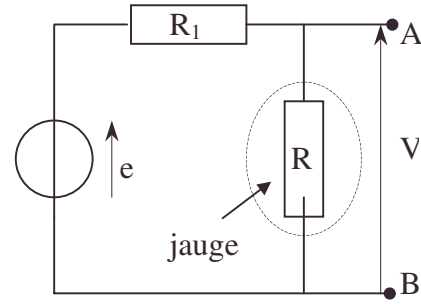


Figure 5

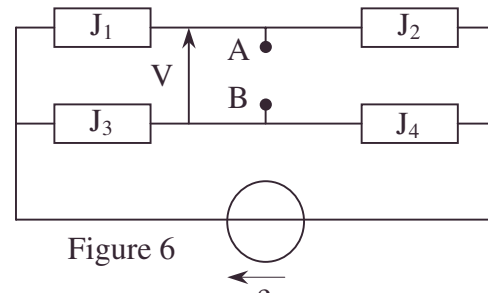


Figure 6

a. Comment faut-il brancher les jauges pour avoir la différence de potentiel V maximale quand la lame est courbée ?

b. Déterminer le générateur de tension (de Thévenin) équivalent au pont vu des points A et B.

c. Déterminer la sensibilité du montage quand une résistance ρ_1 est branchée entre A et B.

d. Quels sont les avantages de ce montage par rapport à celui de la question II.2. ?

4. La différence de potentiel V est mesurée par un montage utilisant trois amplificateurs opérationnels idéaux notés AOI₁, AOI₂ et AOI₃.

Les circuits d'alimentation ne sont pas dessinés.

$$V_A - V_B = V; V_{A'} - V_{B'} = V'; V_S - V_M = V''.$$

a. Montrer que la différence de potentiel V est égale à la f.e.m. du générateur de tension équivalent au pont de jauges.

b. Calculer les rapports $\frac{V'}{V}$ et $\frac{V''}{V'}$ en fonction des résistances ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 .

$$\text{En déduire le gain différentiel du montage, } G = \frac{V''}{V}.$$

Pour un gain G donné, comment doit-on choisir les rapports $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ et $\frac{\rho_4}{\rho_3}$ pour avoir, avec

des amplificateurs opérationnels réels, un montage performant ?

Un gain de 100 vous paraît-il réalisable avec ce montage ?

- maximum, ordre de grandeur, pont de Wheatstone, sensibilité

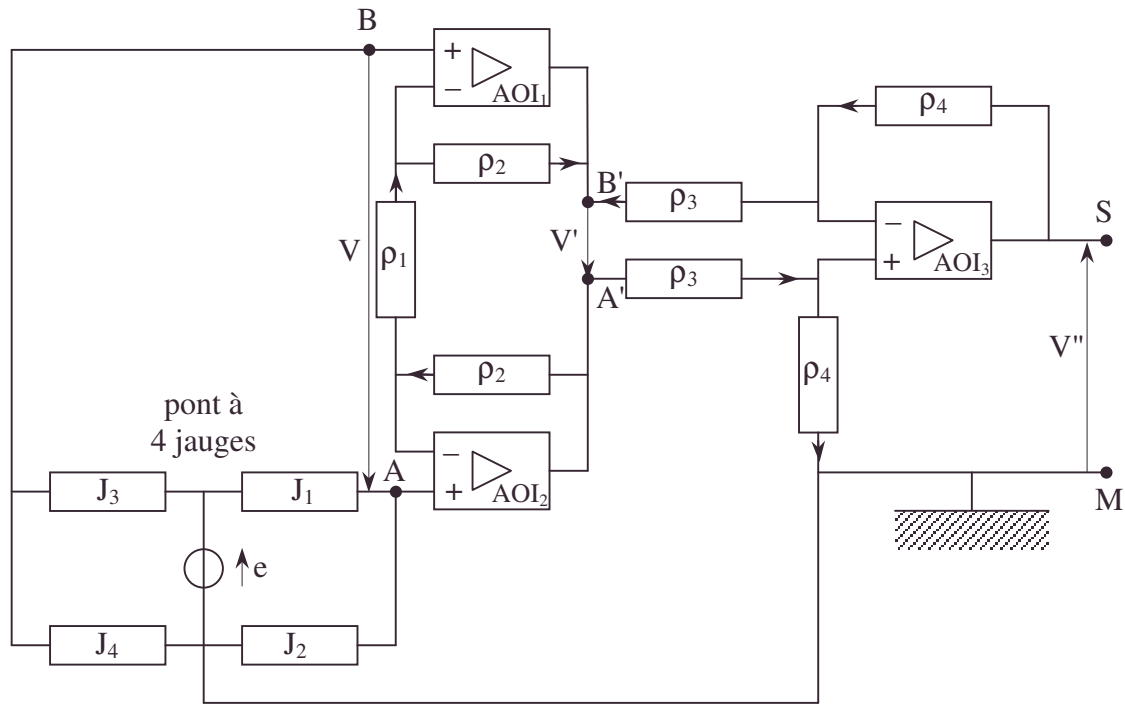


Figure 7

5. La technologie de l'émetteur nécessite de limiter des signaux transmis aux fréquences basses. Or les signaux issus du pont de jauges peuvent avoir un spectre de Fourier assez étendu à la suite du montage (figure 7). Il faut donc brancher un filtre passe-bas, dont le schéma est donné en figure 8.

S et M sont les bornes de sortie du montage de la figure 7.

$$C_1 = \sqrt{2}C ; C_2 = \frac{C}{\sqrt{2}}.$$

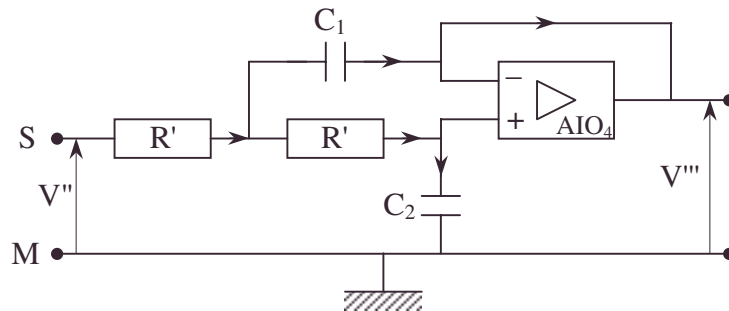


Figure 8 : filtre passe-bas dit de Butterworth

Nous admettons que la tension d'entrée V'' du filtre est sinusoïdale de pulsation ω et que le filtre fonctionne en régime permanent de vibrations forcées. Toute grandeur sinusoïdale telle que V'' sera représentée par un nombre complexe associé noté $\underline{V''}$.

a. Déterminer le rapport $\frac{\underline{V'''} }{\underline{V''}}$ en fonction de R' , C et ω .

b. Tracer le diagramme de Bode correspondant ; déterminer la bande passante à 3 dB de ce filtre ; quelle est sa pente en décibels par décade ? Justifie-t-elle une remarque ?

Pourquoi dit-on d'un tel filtre qu'il est du deuxième ordre ?

c. Il est souhaitable que la constante de temps τ définie au I.1.c. soit égale à $R'C$. Calculer R' sachant que $C_1 = 2C_2 = 1\mu\text{F}$.

Troisième partie : exploitation des résultats de la télémessure

a_g étant la mesure algébrique de l'accélération de la pesanteur comptée sur Oz dirigée verticalement vers le haut, et a , celle de la fusée, nous admettrons que le signal U reçu au sol est de la forme linéaire : $U = K(a - a_g) + Q$. Il est étalonné de la façon suivante :

Position de la fusée immobile sur le sol	U
Verticale, vers le haut	1,0 V
Horizontale	0 V

III.1. Donner la relation linéaire numérique entre U et l'accélération a de la fusée.

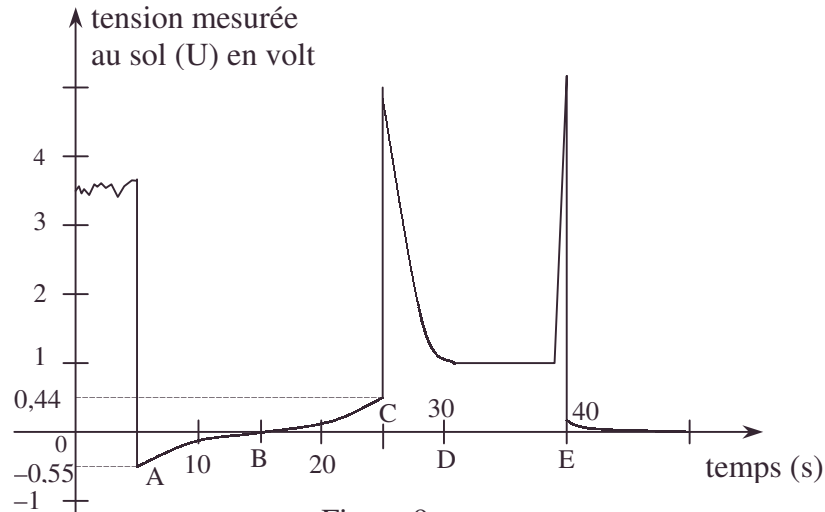


Figure 9

2. Le mouvement de la fusée comporte 3 phases :

- Une phase de propulsion – une phase de vol balistique – une phase de freinage sans parachute pour obtenir une arrivée au sol à une vitesse de l'ordre de 1m.s^{-1} .
(Le parachute est placé dans la coiffe de la fusée).

a. Préciser ces trois phases d'après le graphique de la figure 9. Pourquoi l'accélération de la fusée ne vaut-elle 10m.s^{-2} qu'au voisinage du sommet de la trajectoire ?

b. Montrer que la fusée est à son apogée pour un temps t de l'ordre de 15 s.

c. On donnera un ordre de grandeur de la vitesse maximale de la fusée.

Evaluer l'altitude maximale atteinte H .

Centrale ; Durée 4h.

Corrigé

I.1.a. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$M \ddot{z} = -Kz - \lambda \dot{z} - Mg.$$

On vérifie que le ressort est de longueur nulle au repos, avec

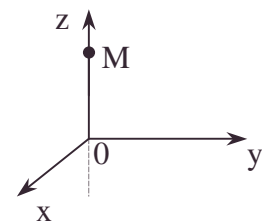
$$M = 0 \text{ et } \dot{z} = 0.$$

b. $M \ddot{z} = -Kz - \lambda \dot{z} - Mg - Ma_0,$

équation différentielle linéaire d'équation caractéristique $Mr^2 + \lambda r + K = 0$;

$$\Delta = \lambda^2 - 4KM.$$

α. $\lambda > 2\sqrt{KM}$;



$$z_\alpha = -\frac{M}{K}(g + a_0) + \left(A_1 \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4KM} t}{2M} + B_1 \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4KM} t}{2M} \right) e^{-\frac{\lambda t}{2M}};$$

Conditions initiales pour déterminer A_1 et B_1 :

$$z_0 = -\frac{Mg}{K} \text{ (cf. équilibre quand } a_0 = 0 \text{)}; \dot{z}_0 = 0. \text{ On vérifie :}$$

$$z_\alpha = -\frac{M}{K}(g + a_0) + \frac{Ma_0}{K} \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4KM} t}{2M} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4KM}} \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4KM} t}{2M} \right) e^{-\frac{\lambda t}{2M}}.$$

$$\beta. \lambda = 2\sqrt{KM}; z_\beta = -\frac{M}{K}(g + a_0) + (A_2 + B_2 t) e^{-\frac{\lambda t}{2M}}.$$

Les mêmes conditions initiales déterminent A_2 et B_2 :

$$z_\beta = -\frac{M}{K}(g + a_0) + \frac{Ma_0}{K} \left(1 + \frac{\lambda t}{2M} \right) e^{-\frac{\lambda t}{2M}}.$$

$$\gamma. \lambda < 2\sqrt{KM};$$

$$z_\gamma = -\frac{M}{K}(g + a_0) + \left(A_3 \cos \frac{\sqrt{4KM - \lambda^2} t}{2M} + B_3 \sin \frac{\sqrt{4KM - \lambda^2} t}{2M} \right) e^{-\frac{\lambda t}{2M}}.$$

Les mêmes conditions initiales déterminent A_3 et B_3 :

$$z_\gamma = -\frac{M}{K}(g + a_0) + \frac{Ma_0}{K} \left(\cos \frac{\sqrt{4KM - \lambda^2} t}{2M} + \frac{\lambda}{\sqrt{4KM - \lambda^2}} \sin \frac{\sqrt{4KM - \lambda^2} t}{2M} \right) e^{-\frac{\lambda t}{2M}}.$$

$$c. \lambda = \sqrt{2KM}; \tau = \frac{2M}{\lambda} = \sqrt{\frac{M}{2K}} \Rightarrow z_\beta = -\frac{M}{K}(g + a_0) + \frac{Ma_0}{K} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$d. M \ddot{z} = -Kz - \lambda \dot{z} - Mg - Ma_0 - Ma_1 \sin \omega t.$$

$\alpha.$ Solution générale de l'équation sans second membre $M \ddot{z} + \lambda \dot{z} + Kz = 0$:

$$z = (A_4 + B_4 t) e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ négligeable pour } t \gg \tau.$$

$\beta.$ Solutions particulières de l'équation avec second membre :

$$\bullet M \ddot{z} + \lambda \dot{z} + Kz = -M(g + a_0) \Rightarrow z_1 = -\frac{M}{K}(g + a_0).$$

$$\bullet M \ddot{z} + \lambda \dot{z} + Kz = -Ma_1 \sin \omega t \text{ associée à } M \ddot{z} + \lambda \dot{z} + Kz = -Ma_1 e^{j\omega t} \text{ de solution}$$

$$z_2 = \bar{z}_2 e^{j\omega t} \text{ telle que } (-M\omega^2 + \lambda j\omega + K)\bar{z}_2 = -Ma_1; \text{ Ainsi } \bar{z}_2 = \frac{-a_1}{-\omega^2 + 2j\frac{\omega}{\tau} + \frac{1}{4\tau^2}};$$

$$\text{or, } \omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \bar{z}_2 \approx \frac{-a_1}{\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2} \approx -4a_1\tau^2 \approx -a_1 \frac{M}{K} \text{ et la solution particulière de l'équation}$$

$$\text{réelle est } z_2 = -a_1 \frac{M}{K} \sin \omega t; \text{ finalement, } z = z_0 - \frac{M}{K} a \text{ avec } a = a_0 + a_1 \sin \omega t \text{ et}$$

$$z_0 = -\frac{Mg}{K}$$

$\gamma.$ Considérons un développement en série de Fourier. On a :

- conditions initiales, P.F.D., principe fondamental de la dynamique, terme d'amortissement

$$M \ddot{z} = -Kz - \lambda \dot{z} - Mg - Ma_0 - \sum_i a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \text{ avec } \omega_i = i\omega.$$

On supposera $a_i = 0$ quand i croît trop pour être en accord avec $\omega_i \ll \frac{1}{\tau}$;

Reprenons l'étude des solutions particulières de l'équation avec second membre :

- Pour chaque ω_i , $z_{2i} = \bar{z}_{2i} e^{j\omega_i t}$ avec $\bar{z}_{2i} = \frac{-a_i e^{j\varphi_i}}{-\omega_i^2 + 2j\frac{\omega_i}{\tau} + \frac{1}{4\tau^2}} \# -a_i \frac{M}{K} e^{j\varphi_i}.$

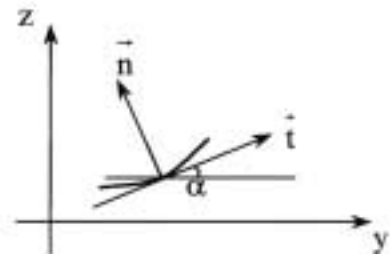
- La solution particulière réelle est : $z_{2i} = -a_i \frac{M}{K} \sin(\omega_i t + \varphi_i).$

- Finalement : $z = z_0 - \frac{M}{K} a$ avec $a = a_0 + \sum_i a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i).$

2.a. Rappelons la formule de Frenet entre le vecteur tangent \vec{t} , le vecteur normal \vec{n} et l'abscisse curviligne s : $ds^2 = dy^2 + dz^2$.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} ; \text{ de plus : } \frac{d\vec{t}}{d\alpha} = \vec{n} \text{ avec } \tan \alpha = \frac{dz}{dy}$$

$$\text{Dérivons : } \left[1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right] \frac{d\alpha}{dy} = \frac{d^2 z}{dy^2} ; \text{ or } \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\vec{n}}{\frac{ds}{d\alpha}}$$



$$\text{On retrouve } R = \frac{\sqrt{dz^2 + dy^2}}{d\alpha},$$

$$\text{soit } R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z}{dy^2}} \Rightarrow R \# \frac{1}{\frac{d^2 z}{dy^2}} \text{ car } \frac{dz}{dy} \ll 1 \text{ (cf. } \alpha \text{ petit, faible courbure).}$$

b.c. Pour le système entouré (partie de P à O') en équilibre, la somme des moments est nulle en P (ou en O') ;

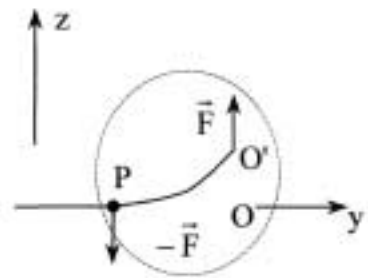
$$\text{sur l'axe des } x : \Gamma_P + F(-y) = 0 \Rightarrow \Gamma_P = yF.$$

$$y < 0, F > 0 \Rightarrow \Gamma_P < 0 \text{ et } \Gamma_P = -EI \frac{d^2 z}{dy^2} \text{ assure ce signe,}$$

vu la concavité de la figure.

$$\text{d. d'où } \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{-Fy}{EI}. \text{ Intégrons : } \frac{dz}{dy} = -\frac{Fy^2}{2EI} + C ; z = -\frac{Fy^3}{6EI} + Cy + D;$$

$$\text{or en A, } z = 0 \text{ et } \frac{dz}{dy} = 0 \text{ pour } y = -L, \text{ d'où } z = \frac{-Fy^3}{6EI} + \frac{FL^2 y}{2EI} + \frac{1}{3} \frac{FL^3}{EI}.$$



$$\text{Ainsi, } z = z(y = 0) = \frac{FL^3}{3EI} \Rightarrow K = \frac{F}{z(y = 0)} = \frac{3EI}{L^3} = \frac{E}{4} \left(\frac{e}{L} \right)^3 d.$$

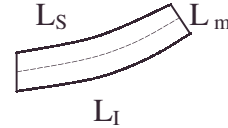
Remarques : $e \nearrow K \nearrow$; $d \nearrow K \nearrow$; $L \searrow K \nearrow$.

• courbure, développement au premier ordre ou plus, équilibre, Frenet [formules de], théorème du moment cinétique, série de Fourier

e. AN : $K = 32 \text{ N.m}^{-1}$; $\tau = \sqrt{\frac{M}{2K}}$; A.N. : $\tau = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

II.1.a. $R = \rho \frac{l}{s}$; l'allongement dû à l'étirement est associé à R croissant (en accord avec la diminution de s).

b. On peut fixer une jauge sur les 2 faces :
si $z > 0$ $L_S < L_m < L_I$ (cf. arcs de cercle).



$\alpha > 0$ pour une jauge sur une face "dessous" et $\alpha < 0$ pour une jauge sur une face "dessus" pour augmenter la différence de résistance due à z .

2. Le théorème de Thévenin donne pour le dipôle AB :

$$\xi_1 = \frac{eR}{R + R_1} ; R_1 = \frac{RR_1}{R + R_1}.$$

Si on branche une impédance (d'entrée) Z_1 , on a :

$$V = \xi_1 \frac{Z_1}{Z_1 + R_1} ; V_0 = \frac{eR_0}{R_0 + R_1} \frac{Z_1}{Z_1 + R_1},$$

$$\Rightarrow s = \frac{R_1(R - R_0)}{R \left(R_0 + R_1 + \frac{R_0 R_1}{Z_1} \right)} ;$$

$$s_{\max} \text{ pour } |Z_1| \rightarrow \infty : s_{\max} = \frac{R_1(R - R_0)}{R(R_0 + R_1)} \# \frac{R_1 R_0 \alpha z}{(R_1 + R_0) R_0 (1 - \alpha z)} \# \frac{R_1 \alpha z}{R_1 + R_0}.$$

En considérant αz petit, on voit que s_{\max} est petit.

Si θ intervient, $s_{\max} = \frac{R_1}{R_1 + R_0} (\alpha z + \beta(\theta - \theta_0))$. $\theta - \theta_0$ perturbe les mesures vu son

ordre de grandeur \Rightarrow nécessité d'un thermostat ou d'une mesure de $\theta - \theta_0$.

3. D'après **II.1.b.** $\alpha < 0$; $\alpha' > 0$ avec habituellement : $\alpha \neq -\alpha'$.

a. Il faut éviter $J_1 J_4 = J_2 J_3$ car $V = 0$; c'est évité avec $J_1 = J_4$ et $J_2 = J_3$, égalité correspondant aux jauges d'une même face, le branchement des 4 résistances s'en déduit.

b. Le théorème de Thévenin entre A et B donne une f.é.m. en C.O. :

$$\xi_2 = e \left[\frac{J_2}{J_3 + J_4} - \frac{J_4}{J_1 + J_2} \right] = e \frac{J_2 - J_1}{J_2 + J_1} \text{ et une résistance équivalente}$$

$$R_2 = \frac{J_3 J_4}{J_3 + J_4} + \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} = 2 \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \text{ vu a.}$$

Remarque : $\xi_2 > 0 \Rightarrow J_2 > J_1$ soit $J_1 = J_4 = R_0(1 + \alpha z + \beta(\theta - \theta_0))$ avec $\alpha < 0$ et $J_2 = J_3 = R_0(1 + \alpha' z + \beta(\theta - \theta_0))$ avec $\alpha' > 0$ (cf. $\xi_2 \max$).

c. $z = 0$; $J_1 = J_2$; $\xi_2 = 0 \Rightarrow V_0 = 0 \Rightarrow s = 1 \quad \forall \rho_1$ branché entre A et B.

d. s est plus grand ; si β est commun aux 4 jauges, l'influence de $\theta - \theta_0$ sur s a disparu (cf. $\xi_2 = e \frac{J_2 - J_1}{J_2 + J_1}$ où $\beta(\theta - \theta_0)$ disparaît dans le développement limité).

4.a. L'impédance d'entrée du système branché entre A et B est infinie ($i_+ = 0$) donc $V = \xi_2 = (V_A - V_B)_{CO}$.

On vérifie que le montage en pont reste le même.

• *théorème de Thévenin*

b.α. $2\rho_2 + \rho_1$ sont parcourus par une même intensité i :
 $V' = (2\rho_2 + \rho_1)i$. On a : $V = \rho_1 i$. Eliminons i :

$$V = V' \frac{\rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} \Rightarrow \frac{V'}{V} = 1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

β. Pour AOI₃ : la formule du pont diviseur de tension donne :

$$V_+ = V_A \frac{\rho_4}{\rho_3 + \rho_4} \text{ et } V_- - V'' = (V_{B'} - V'') \frac{\rho_4}{\rho_3 + \rho_4}.$$

En soustrayant terme à terme, on obtient : $V'' = V' \frac{\rho_4}{\rho_3 + \rho_4} + V'' \frac{\rho_4}{\rho_3 + \rho_4} \Rightarrow \frac{V''}{V'} = \frac{\rho_4}{\rho_3}.$

$$\gamma. G = \frac{V''}{V'} \cdot \frac{V'}{V} = (1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1}) \frac{\rho_4}{\rho_3}.$$

δ. Il faut une bande passante commune aux différents étages constitutifs pour avoir une bande passante maximum pour les deux étages. Ici, le produit gain bande passante est constant pour chaque étage. Le gain de chaque étage doit donc être le même ; pour 2 étages $G = 100$, chaque étage a un gain $g = 10$.

Littéralement : $g = \sqrt{G} = \frac{\rho_4}{\rho_3} = 1 + 2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\sqrt{G} - 1}{2}$; AN : $\frac{\rho_4}{\rho_3} = 10$; $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4,5$.

réalisable avec $\rho_3 = 10^4 \Omega$; $\rho_1 = 10^4 \Omega$; $\rho_4 = 10^5 \Omega$; $\rho_2 = 4,5 \cdot 10^4 \Omega$.

5.a. Utilisons V_1 le potentiel du point commun à R' et C_1 (paramétrage fréquent).

$$\underline{V}_- = \underline{V}''' = \underline{V}_+ = \underline{V}_1 \frac{z_{C_2}}{z_{C_2} + R'} \text{ car on a un pont diviseur de tension.}$$

appliquons le théorème de Millman au point de potentiel \underline{V}_1 :

$$\underline{V}_1 \left(\frac{2}{R'} + \frac{1}{z_{C_1}} \right) = \frac{V''}{R'} + \frac{V'''}{z_{C_1}} + \frac{V'''}{R'} \text{ avec } z_{C_2} = \frac{1}{jC_2\omega} = \frac{\sqrt{2}}{jC\omega} : z_{C_1} = \frac{1}{jC_1\omega} = \frac{1}{jC\omega\sqrt{2}}.$$

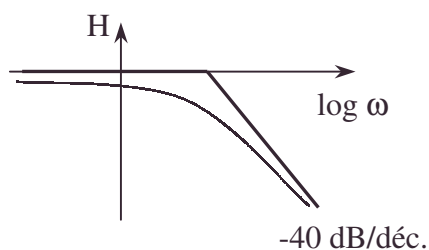
En éliminant \underline{V}_1 :

$$\frac{\underline{V}'''}{\underline{V}'} = \frac{1}{(1 - R'^2 C^2 \omega^2 + jR'C\omega\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\underline{V}'''}{\underline{V}'} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - R'^2 C^2 \omega^2)^2 + 2R'^2 C^2 \omega^2}} = \frac{1}{(1 + R'^4 C^4 \omega^4)}.$$

$$\mathbf{b.} H = -10 \log (1 + R'^4 C^4 \omega^4) ;$$

$$\text{asymptotes : } \begin{cases} H = 0 \text{ dB.} \\ H = 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{R'C}. \end{cases}$$



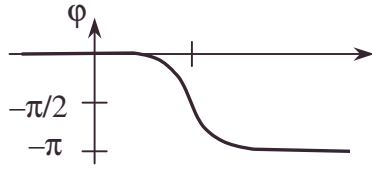
Bande passante : $[0, \omega_0]$.

Remarque :

la pente est double de celle des filtres du premier ordre : donc filtre du deuxième ordre.

$$\varphi = \frac{-\arctan R'C\omega\sqrt{2}}{1 - R'^2 C^2 \omega^2}.$$

II.5.c.



$$R' = \frac{\tau}{C} = \frac{\tau}{\sqrt{C_1 C_2}} ; \text{ A.N. : } \tau = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$$

$$R' = 25 \text{ k}\Omega.$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} ; \text{ A.N. : } \omega_0 = 56 \text{ rad.s}^{-1}.$$

III.1. Pour les 2 cas particuliers d'immobilité : $U = Ka + Q - Ka_g$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fusée verticale : } a = 0 ; a_g = -10 ; U = 1 \text{ V} \\ \text{Fusée horizontale : } a = 0 ; a_g = 0 ; U = 0 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow U = 0,1 a + 1$$

ainsi $K = 0,1 ; Q = 0$.

2.a.b. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < t < 5 \text{ s} \\ 0 < t < t_A \end{array} \right. \quad U = 3,5 \text{ V} \Rightarrow a = 25 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{propulsion.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ s} < t < 15 \text{ s} \\ t_A < t < t_B \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U \neq 0 \\ U < 0 \\ a < a_g < 0 \end{array} \right.$$

La fusée subit la pesanteur et une force dirigée vers le bas (cf. frottement fluide) \Rightarrow ascension sans doute sans propulsion (cf. phase précédente).

$$\text{A.N. : } a_{A+} = -15,5 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 15 \text{ s} < t < 25 \text{ s} \\ t_B < t < t_C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U \neq 0 \\ U > 0 \\ a > a_g \end{array} \right.$$

La fusée subit la pesanteur et une force dirigée vers le haut (cf. frottement fluide) \Rightarrow descente après ascension sans propulsion (cf. phase précédente).

$$\text{A.N. : } a_{C-} = -5,6 \text{ m.s}^{-2}.$$

Remarque :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 15 \text{ s} \\ t = t_B \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U = 0 \\ a_B = a_g \end{array} \right.$$

La fusée est sans vitesse à l'apogée de son ascension, la force de frottement fluide y est nulle.

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 25 \text{ s} \\ t = t_C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U = 5 \text{ V} \\ a_{C+} = + 40 \text{ m.s}^{-2} \end{array} \right.$$

Une force verticale vers le haut due à l'ouverture du parachute qui freine la chute.

$$\left\{ \begin{array}{l} 30 \text{ s} < t < 40 \text{ s} \\ t_D < t < t_E \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U = 1 \text{ V} \\ a = 0 \end{array} \right.$$

Descente à vitesse limite constante (cf. parachute).

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 40 \text{ s} \\ t = t_E \end{array} \right.$$

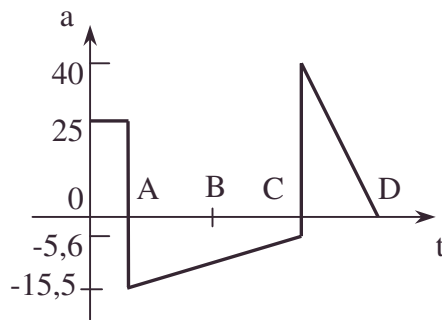
Perturbation brève inconnue dirigée vers le haut.
Exemple : choc sur le sol.

$$\left\{ \begin{array}{l} t > t_E \\ t > 40 \text{ s} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U = 0 \\ a = -g_0 \end{array} \right.$$

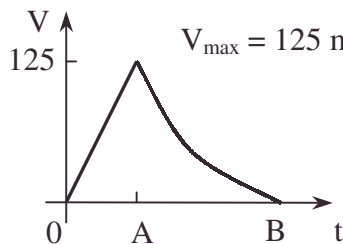
Capteur éventuellement détruit ou arrêt au sol avec fusée horizontale.

$$2.c. \quad V_{\max} = \int_0^{t_A} a dt$$

Modélisation :



Résultats déduits numériquement :



$$H_{\max} = \int_0^{t_A} v dt + \int_{t_A}^{t_B} v dt = \frac{1}{2} a_1 t_A^2 + \int_{t_A}^{t_B} v dt$$

$$H_{\max} \approx \frac{1}{2} a_1 t_A^2 + \frac{V_{\max}}{2} (t_B - t_A) \text{ soit } H_{\max} \approx 900 \text{ m}$$

6.1.1.5. Multiplieur

Voir page 874.

6.1.1.6. Rétroaction

Voir page 896.

6.1.1.7. Filtres

Voir page 912.

6.1.1.8. Oscillateurs

Voir page 939.

6.1.1.9. Modulation de fréquence

Voir page 987.

6.1.1.10. Voltmètre numérique

Voir page 1021.

6.1.1.11. Asservissement de position d'un moteur

Voir page 1127.

6.1.2. Multiplieur

Appartient aux programmes de PSI, TPC2

6.1.2.1. Multiplieur à impulsions variables

© Editions EYROLLES, *Problèmes d'électronique analogique*, tome 1, RAMI et DELUZURIEUX

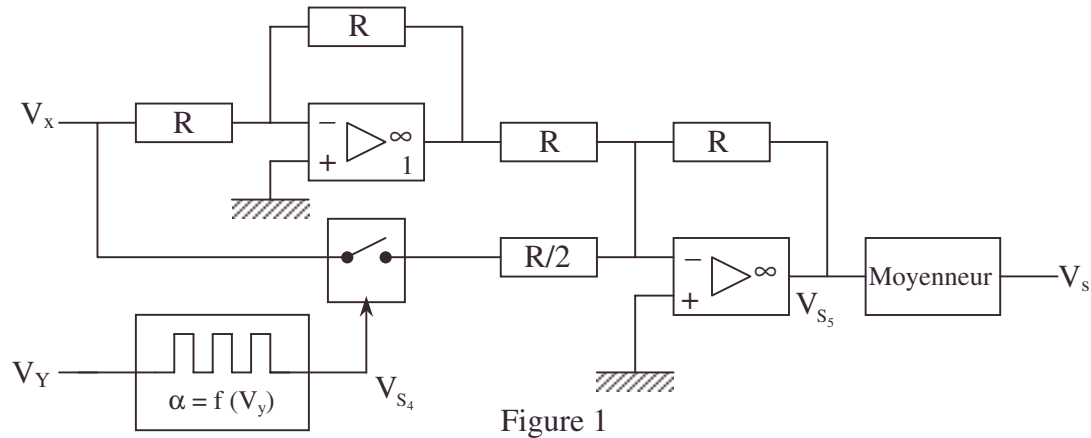


Figure 1

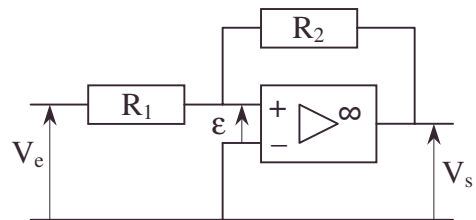
Générateur de signaux
rectangulaires à rapport
cyclique commandé par V_Y

$$\left(\alpha = \frac{T_1}{T_1 + T_2}, \text{ voir énoncé 1.7.3.} \right)$$

1. Etude du générateur: il est formé de 4 sous-ensembles.

1. Sous-ensemble 1

1. Quel est le type de réaction ?
Que peut-on dire du fonctionnement de l'amplificateur intégré ?
2. Exprimer ε en fonction de V_e , V_s , R_1 et R_2 .
3. On suppose que $V_s = +V_{\text{sat}} = +E$.
Pour quelles valeurs de V_e cet état se maintient-il ?
4. Même question pour $V_s = -V_{\text{sat}} = -E$.
5. On choisit $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 15 \text{ k}\Omega$ et $E = 15 \text{ V}$.



Tracer la caractéristique de transfert $V_s(V_e)$ du montage.

Quelle fonction reconnaît-on ?

1.2. Sous-ensemble 2

1. Quel est le type de réaction ?
Que peut-on dire du fonctionnement de l'amplificateur intégré ?

2. Ecrire l'équation différentielle liant V_s , V_e , R et C .

3. On donne $V_e = V_E = \text{constante}$, et $V_s(0) = V_{s_0} = \text{tension de sortie à l'instant } t = 0$

(charge initiale du condensateur).

Exprimer $V_s(t)$ en fonction de V_E , R , C , V_{s_0} .

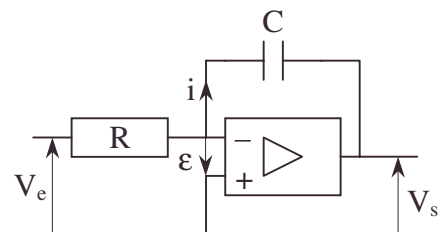


Figure 3

4. On choisit $R = 15 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ nF}$.

Représenter $v_s(t)$ pour $0 \leq t \leq 30 \mu\text{s}$, dans les 4 cas suivants :

- 1. $V_E = 15 \text{ V}$; $V_{s_0} = 0 \text{ V}$.
- 2. $V_E = -15 \text{ V}$; $V_{s_0} = 0 \text{ V}$.
- 3. $V_E = 15 \text{ V}$; $V_{s_0} = 10 \text{ V}$.
- 4. $V_E = -15 \text{ V}$; $V_{s_0} = -10 \text{ V}$.

5. Donner la valeur t_0 du temps que met V_s pour passer de $+10 \text{ V}$ à -10 V et du temps t_1 pour passer de -10 V à $+10 \text{ V}$.

6. Quelle fonction ce montage réalise-t-il ?

3. Association des sous-ensembles 1 et 2.

On associe les 2 sous-ensembles précédents de façon que la sortie de l'un soit reliée à l'entrée de l'autre.

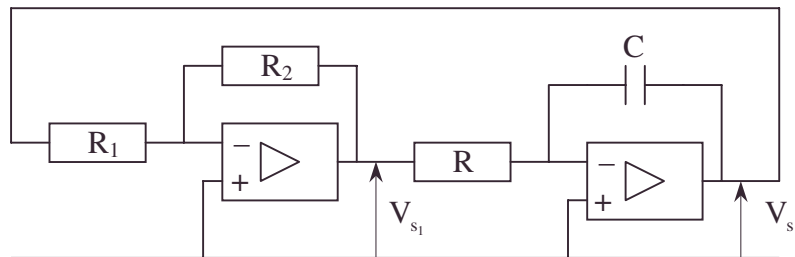


Figure 4

On suppose le condensateur initialement déchargé et V_{s_1} à l'état haut.

En utilisant les résultats précédents, expliquer le fonctionnement du montage.

Tracer les courbes $V_{s_1}(t)$ et $V_{s_2}(t)$ sur un même graphe pour $0 \leq t \leq 100 \mu\text{s}$.

Quelles sont les valeurs de $V_{s_2 \text{ max}}$, $V_{s_2 \text{ min}}$, la période T et la fréquence f de $V_{s_2}(t)$?

4. Sous-ensemble 3 de la figure 5.

1. Quel est le type de réaction ?

Que peut-on dire de ϵ ?

2. Exprimer V_s en fonction de V_{e_1} et V_{e_2} .

Quelle est la fonction ainsi réalisée ?

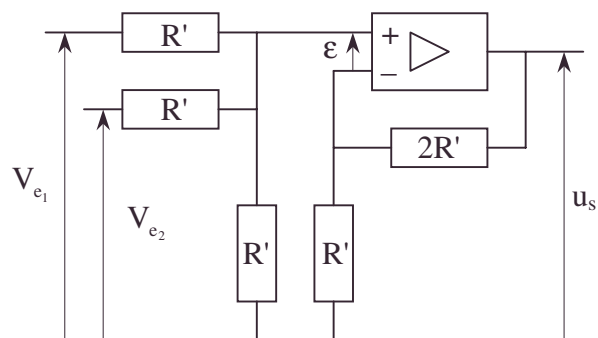


Figure 5

5. Association des 3 sous-ensembles.

On réalise $V_{e_1} = V_Y$ (tension continue évoluant entre $+10 \text{ V}$ et -10 V) et $V_{e_2} = V_{s_2}(t)$.

On appelle $V_{s_3}(t)$ la tension de sortie du troisième sous-ensemble.

1. Tracer $V_{s_3}(t)$ pour $V_Y = 5 \text{ V}$. Quelles sont les valeurs numériques de $V_{s_3 \text{ max}}$, $V_{s_3 \text{ min}}$, la période et la fréquence de $V_{s_3}(t)$?

2. Exprimer ces mêmes valeurs de façon générale, en fonction de V_Y , $V_{s_2 \text{ max}}$ et $V_{s_2 \text{ min}}$.

3. Donner la valeur numérique (pour $V_Y = 5V$), puis l'expression littérale en fonction de V_Y , T , $V_{s2 \max}$ du temps t_3 que met le signal $v_{s3}(t)$ pour passer de $V_{s3 \min}$ à 0.

4. Même question pour le temps t_4 nécessaire pour passer de 0 à $V_{s3 \max}$.

6. Sous-ensemble 4 de la figure 6.

Tracer la caractéristique de transfert $V_s(V_e)$.

Quelle est la fonction réalisée ?

7. Montage complet :

La tension $v_{s3}(t)$ précédente est appliquée à l'entrée du sous-ensemble 4.

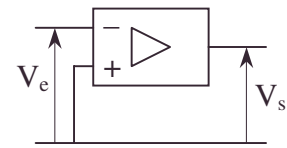


Figure 6

1. Dans le cas où $V_Y = 5V$, tracer la tension de sortie $v_{s4}(t)$ du sous-ensemble 4.

2. Exprimer, dans le cas où V_Y est quelconque, les durées t_H et t_L des temps haut et bas du signal $v_{s4}(t)$.

3. En déduire l'expression du rapport cyclique $\alpha = \frac{t_H}{T}$.

4. Entre quelles limites varie α lorsque $-V_{s2 \max} \leq V_Y \leq V_{s2 \max}$?

2. Etude du multiplieur de la figure 1.

Le signal $V_{s4}(t)$ commande un commutateur analogique :

lorsque V_{s4} est à l'état haut, l'interrupteur est fermé ;

lorsque V_{s4} est à l'état bas, l'interrupteur est ouvert.

1. Exprimer V_{s5} en fonction de V_x lorsque V_{s4} est à l'état bas.

2. Même question lorsque V_{s4} est à l'état haut.

3. Représenter alors $V_{s5}(t)$ pour $0 \leq t \leq 100\mu s$ (en considérant le signal $V_{s4}(t)$ obtenu précédemment) dans le cas où $V_x = 6V$.

4. Exprimer de façon générale la valeur moyenne V_s du signal $V_{s5}(t)$ en fonction de V_x , t_H , t_L et T , puis en fonction de V_x , V_Y , $V_{s2 \max}$ et $V_{s2 \min}$.

Cas particulier : $V_{s2 \max} = -V_{s2 \min}$

5. Le signal $V_{s5}(t)$ est périodique de fréquence f . On peut donc décomposer en série de Fourier.

1. Comment peut-on isoler la valeur moyenne de $V_{s5}(t)$?

2. On utilise pour cela le circuit suivant:

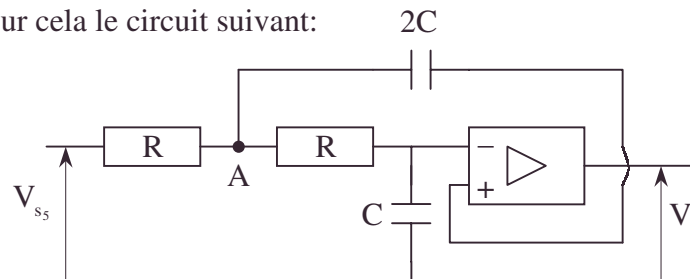


Figure 7

Exprimer la fonction de transfert $\underline{T} = \frac{V_s}{V_{s5}}$.

Donner l'expression de la fréquence de coupure f_c du circuit.

Comment choisir le produit RC pour que la première fréquence à éliminer soit au moins divisée par 100 ?

• analogique, commutateur, durée des temps haut du signal [numérisation], fonction de transfert, rapport cyclique

3. On suppose que le circuit précédent réalise parfaitement la fonction "moyenneur". Quelle est alors V_s dans le cas où $V_X = 6V$ et $V_Y = 5V$.

4. Tracer les caractéristiques de transfert $V_s(V_X)$ du multiplieur pour $-10V \leq V_X \leq 10V$ et pour quelques valeurs de V_Y ($-4V, -6V, 4V, 6V$).

Corrigé

I.1.1.1. La rétroaction mettant en jeu la borne + entraîne une instabilité (réaction positive) ; on fonctionnera en régime non linéaire $V_s = \pm V_{sat}$.

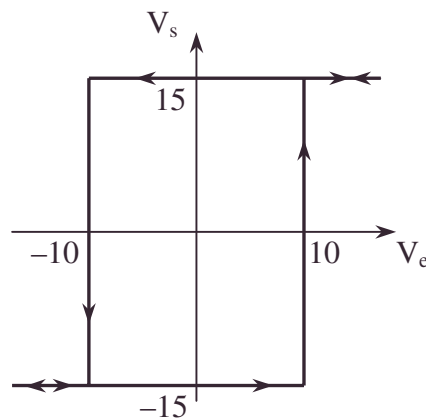
2. Appliquons le théorème de Millman : $V_+ = \frac{\frac{V_e}{R_1} + \frac{V_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} ; V_- = 0 ;$

$$\varepsilon = + \frac{V_e R_2 + V_s R_1}{R_1 + R_2}.$$

3. Pour que l'état $V_s = +V_{sat} = +E$ se maintienne, il faut conserver $\varepsilon > 0$ donc $V_e > -E \frac{R_1}{R_2}.$

4. Pour que l'état $V_s = -V_{sat} = -E$ se maintienne, il faut conserver $\varepsilon < 0$ soit $V_e < E \frac{R_1}{R_2}.$

5.a.



$$AN : E \frac{R_1}{R_2} = 10V$$

b. On reconnaît le fonctionnement en comparateur (de V_e par rapport à $\pm E \frac{R_1}{R_2}$) à hystérésis.

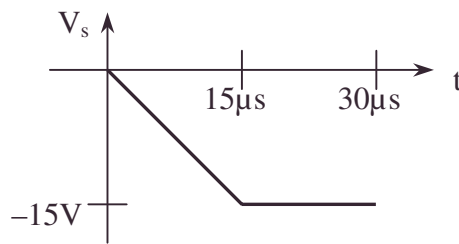
2.1. La rétroaction met en jeu la borne - ; le régime linéaire est possible si $|V_s| < V_{sat}$, alors $\varepsilon = 0$.

2. On retrouve l'intégrateur : $V_s = \frac{q}{C} = \frac{\int i dt}{C} = -\frac{\int V_e dt}{RC} \Rightarrow V_e + RC \frac{dV_s}{dt} = 0.$

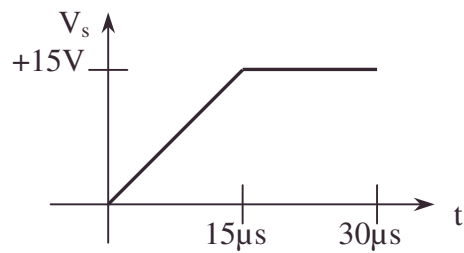
3. La solution de $\frac{dV_s}{dt} = -\frac{V_e}{RC}$ est : $V_s = -\frac{V_e}{RC} t + V_{s_0}$ tant que $|V_s| \leq V_{sat}.$

4.

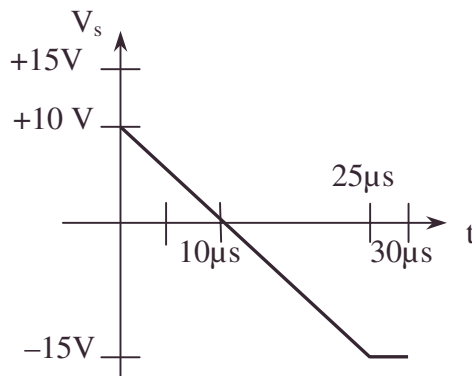
Cas 1



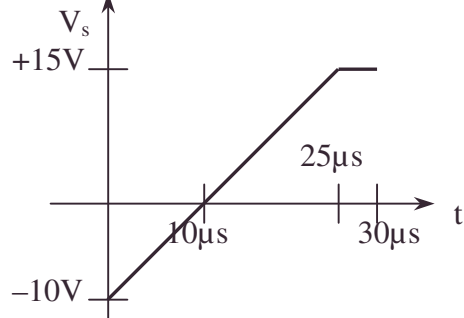
Cas 2



Cas 3



Cas 4



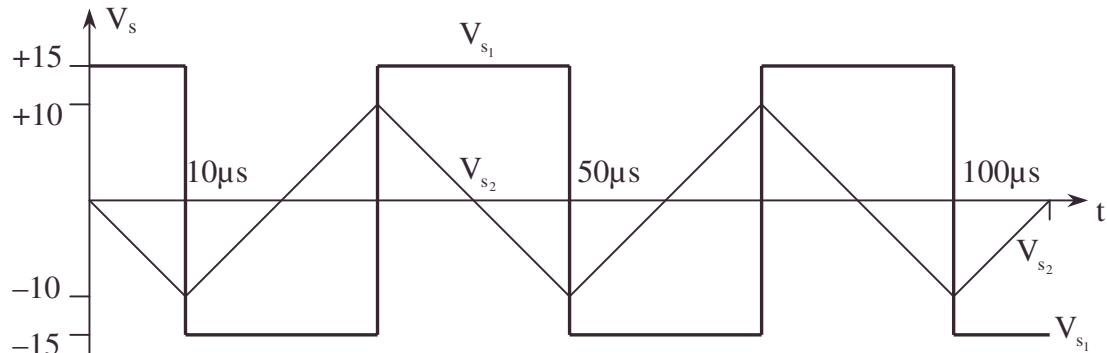
5. AN : vu la pente $\frac{DV}{Dt} = \left| \frac{V_E}{RC} \right| = 10^6 \text{V.s}^{-1}$: pour $\Delta V = 20\text{V}$ on a les durées

$t_0 = 20 \mu\text{s}$ et $t_1 = 20 \mu\text{s}$.

6. On a un montage intégrateur.

3.a. $V_{s_2}(0) = 0\text{V}$, $V_{s_1}(0) = +15\text{V}$: on se trouve dans le cas 1 de 1.2.4. ; $V_{s_2}(t)$ diminue de 0 à -10V , valeur à laquelle il y a basculement de l'autre sous-ensemble ; V_{s_1} est alors à -15V , on est alors dans le cas 4 de 1.2.4. : $V_{s_2}(t)$ passe de -10V à $+10\text{V}$ où il y a un nouveau basculement. $V_{s_1}(t)$ est alors à $+15\text{V}$, on se trouve dans le cas 3 de 1.2.4. : $V_{s_2}(t)$ passe de $+10\text{V}$ à -10V et on recommence.

b.



c. $V_{s_2 \text{ max}} = +10\text{V}$; $V_{s_2 \text{ min}} = -10\text{V}$; $T = 40 \mu\text{s}$; $f = \frac{1}{T} = 25\text{kHz}$.

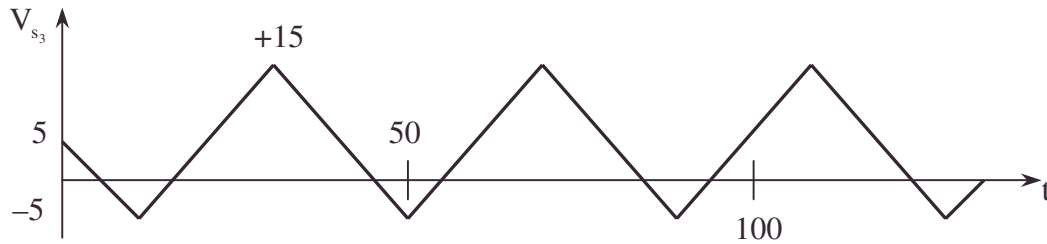
4.1. La rétroaction met en jeu la borne $-$. L'amplificateur peut fonctionner en régime linéaire: $\varepsilon = 0$ pour $|V_s| < V_{\text{sat}}$ soit pour des signaux d'entrée pas trop grands.

2. Dans le montage potentiométrique du bas à droite : $V_- = \frac{U_s}{3}$.

• D'après le théorème de Millman : $V_+ = \frac{\frac{V_{e_1}}{R'} + \frac{V_{e_2}}{R'}}{\frac{3}{R'}} \Rightarrow V_+ = \frac{V_{e_1} + V_{e_2}}{3}$.

• $u_s = V_{e_1} + V_{e_2}$: on a un additionneur.

5.1. On décale de +5 V la courbe précédente de V_{s_2} ; ($V_{s_3} = V_{s_2} + V_Y$)



$V_{s_3 \max} = 15V$; $V_{s_3 \min} = -5V$.

$T = 40\mu s$.

$f = 25 \text{ kHz}$.

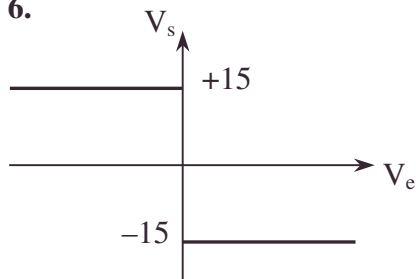
2. $V_{s_3 \max} = V_{s_2 \max} + V_Y$; $V_{s_3 \min} = V_{s_2 \min} + V_Y$.

3. Exprimons la pente de deux manières :

$$\frac{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}}{\frac{T}{2}} = \frac{0 - V_{s_3 \min}}{t_3} \Rightarrow t_3 = \frac{-V_{s_3 \min} \frac{T}{2}}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} = \frac{T - V_Y - V_{s_2 \min}}{2 V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}}.$$

4. De même, $t_4 = \frac{T}{2} \frac{V_{s_3 \max}}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} = \frac{T}{2} \frac{V_Y + V_{s_2 \max}}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}}$; AN : $t_3 = 5\mu s$. $t_4 = 15\mu s$.

6.



Fonction de comparateur à 0 ;

(Le cycle d'hystérésis est laminé à 0).

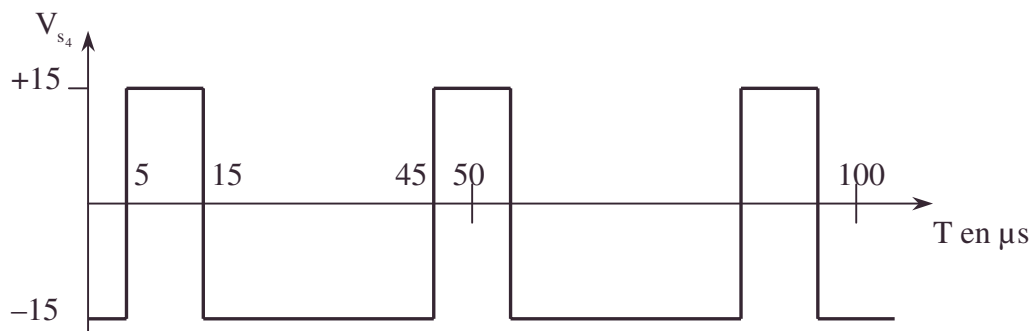
$V_s > 0$ si $V_e < 0$.

$V_s < 0$ si $V_e > 0$.

L'A.O. est alors sans rétroaction extérieure.

C'est un cas théorique.

7.1. On mettra en correspondance avec la courbe de V_{s_3} au 1.5.1. notamment les annulations et les basculements.



• additionneur, comparateur, Millman[théorème de], montage potentiométrique

2. Vu la correspondance des courbes V_{s_3} et V_{s_4} ,

$$t_H = 2t_3 = T \frac{-V_{s_2 \min} - V_Y}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} = \frac{-V_{s_3 \min} T}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} ; \text{AN : } T_H = 10\mu s.$$

$$t_L = 2t_4 = T \frac{V_{s_2 \max} + V_Y}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} = T \frac{V_{s_3 \max}}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} ; \text{AN : } T_L = 30\mu s.$$

$$3. \alpha = \frac{t_H}{T} = \frac{-V_{s_3 \min}}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} = \frac{-V_{s_2 \min} - V_Y}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} ;$$

$$\text{on a bien évidemment } \alpha = \frac{T_H}{T_H + T_L} ; \text{AN : } \alpha = 0,25.$$

4. La position haute est obtenue pour $V_{s_3} < 0$.

$$V_Y = +V_{s_2 \max} ; V_{s_3 \max} = 20V ; V_{s_3 \min} = +0V ; \alpha = 0$$

$$V_Y = -V_{s_2 \max} ; V_{s_3 \max} = 0V ; V_{s_3 \min} = -20V ; \alpha = 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 1.$$

2.1. cf. schéma du début: le commutateur peut être un transistor (V_{s_4} sur la base). Si V_{s_4} est à l'état bas, l'interrupteur est ouvert.

Le théorème de Millman appliqué en V_{-1} permet de trouver $0 = V_X + V_{s_1}$.

Le théorème de Millman appliqué en V_{-5} permet de trouver $0 = V_{s_1} + V_{s_5}$.

On en déduit $V_{s_5} = V_X$.

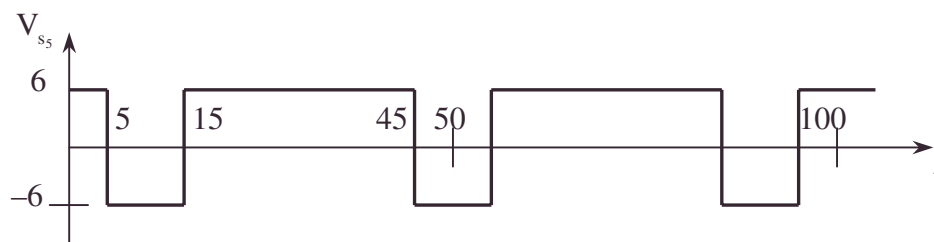
2. Si V_{s_4} est à l'état haut, l'interrupteur est fermé.

Le théorème de Millman appliqué en V_{-1} permet de trouver $0 = V_X + V_{s_1}$.

$$\text{Le théorème de Millman appliqué en } V_{-5} \text{ permet de trouver } 0 = \frac{V_X}{\frac{R}{2}} + \frac{V_{s_1}}{R} + \frac{V_{s_5}}{R}$$

$$\Rightarrow V_{s_5} = -2V_X - V_{s_1} = -V_X.$$

3. En correspondance avec V_{s_4} , tension de commande, on a :



$$4. V_s = -V_x \frac{t_H}{T} + V_x \frac{t_L}{T} = \frac{V_x}{T} (t_L - t_H) = V_x \frac{(2V_Y + V_{s_2 \max} + V_{s_2 \min})}{V_{s_2 \max} - V_{s_2 \min}} ;$$

$$\text{Si } V_{s_2 \max} = -V_{s_2 \min} : V_s = \frac{V_X V_Y}{V_{s_2 \max}}.$$

5.1. Il suffit d'éliminer toutes les composantes sinusoïdales de la série de Fourier de V_{s_5} par un filtre passe-bas tel que $f_c < f$.

2.a. $\underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{V}_s$; or vu le pont diviseur de tension,

$$\underline{V}_+ = \frac{\frac{V_A}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \Rightarrow \underline{V}_A = \underline{V}_s (1 + jRC\omega) :$$

- On applique le théorème de Millman à $\underline{V}_A = \frac{\frac{V_{s_5}}{R} + \underline{V}_s 2jC\omega + \frac{V_s}{R}}{\frac{2}{R} + 2jC\omega}$.
- On en déduit en éliminant \underline{V}_A ; $\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_{s_5}} = \frac{1}{1 - 2R^2C^2\omega^2 + 2jRC\omega}$.

b. $T_{\max} = 1$ pour $\omega = 0$; $|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $\omega = \omega_c$.

$$\text{avec } |\underline{T}|^2 = \frac{1}{1 + 4R^4C^4\omega_c^4} = \frac{1}{2} ;$$

$$R^4C^4\omega_c^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC\sqrt{2}} \text{ soit } f_c = \frac{1}{2\pi RC\sqrt{2}}.$$

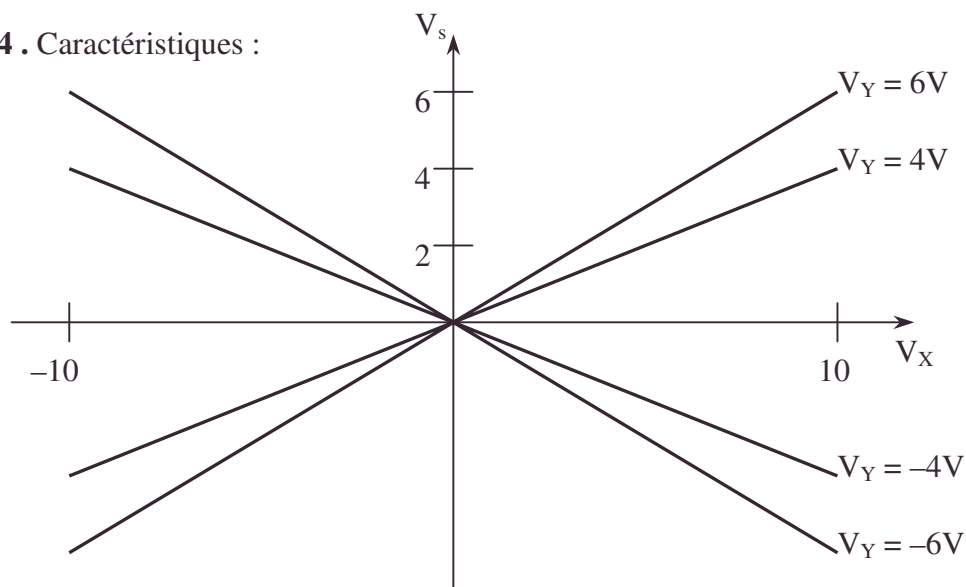
c. On veut $|\underline{T}|^2 = 10^{-4} = \frac{1}{1 + 4R^4C^4\omega^4} \Rightarrow \omega \neq 10\omega_c$.

On satisfait à la condition de l'énoncé si $f > \frac{10}{2\pi RC\sqrt{2}}$.

$$RC \geq \frac{10}{2\pi f \sqrt{2}}.$$

3. Avec $V_{s_2 \max} = 10V$ et $V_{s_2 \min} = -10V$, $V_s = \frac{V_X V_Y}{V_{s_2 \max}}$; AN : $V_s = 3V$

4. Caractéristiques :

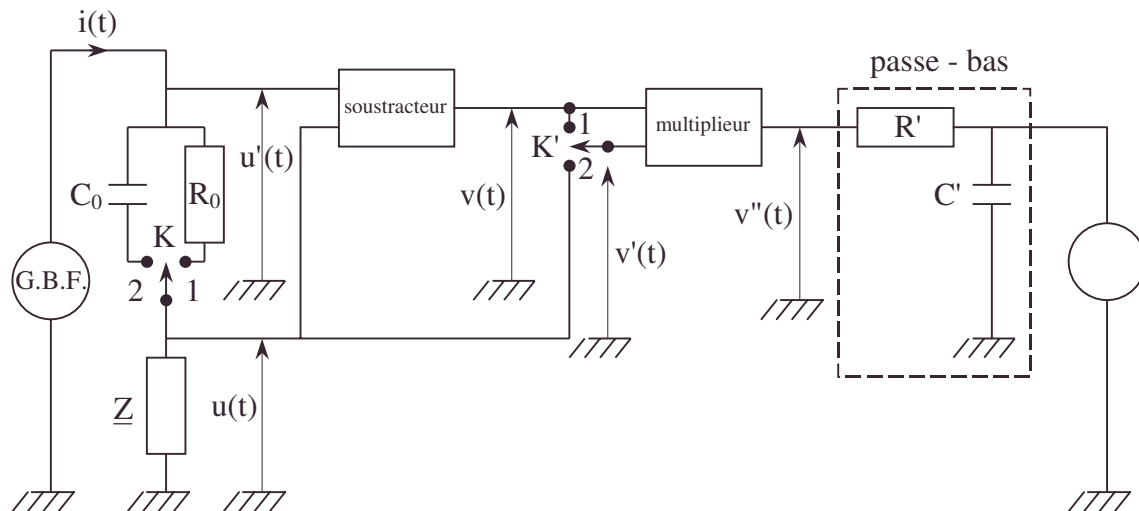


On vérifie pour $V_{s_2 \max} = 10V$, $V_X = 10V$: $V_s = V_Y$.

- caractéristique de dipôle, fonction de transfert, fréquence de coupure, Millman[théorème de], pont diviseur de tension

6.1.2.2. Mesure d'impédance par multiplicateur

Le dispositif représenté ci-dessous permet la mesure de la résistance $R(\omega)$ et de la réactance $X(\omega)$ de l'impédance $\underline{Z}(j\omega)$ d'un dipôle quelconque. Il comprend un soustracteur délivrant la tension $v(t) = u'(t) - u(t)$ et un multiplicateur délivrant une tension $v''(t) = kv(t)v'(t)$, k étant une constante réelle dimensionnée. Les résistances d'entrée du soustracteur et du multiplicateur sont infinies et leurs résistances de sortie nulles. Deux commutateurs K et K' permettent de réaliser quatre combinaisons de circuit.



La résistance R_0 et la capacité C_0 sont connues ainsi que la pulsation ω du courant $i(t) = i_m \cos \omega t$ délivré par le G.B.F. Le filtre passe-bas (R', C') ne laisse passer que la composante continue V de la tension $v''(t)$. Cette tension continue est mesurée à l'aide du voltmètre continu \textcircled{V} dont l'impédance d'entrée est infinie.

1. Déterminer l'expression de la tension mesurée :

- V_1 lorsque K et K' sont tous deux dans l'état (1) ;
- V_2 lorsque K est dans l'état (1) et K' dans l'état (2) ;
- V_3 lorsque K est dans l'état (2) et K' dans l'état (1) ;
- V_4 lorsque K et K' sont tous les deux dans l'état (2).

2.a. En déduire la résistance $R(\omega)$ et la réactance $X(\omega)$ du dipôle $\underline{Z}(j\omega)$ ainsi que son facteur de puissance $\cos \varphi$.

A.N. : $R_0 = 1\text{k}\Omega$; $C_0 = 0,1\mu\text{F}$; $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$; $f = \frac{\omega}{2\pi} = 1\text{kHz}$; $V_1 = 5\text{V}$; $V_2 = 10\text{V}$;

$V_3 = 125\text{mV}$; $V_4 = 800\text{mV}$.

Calculer numériquement $R(\omega)$, $X(\omega)$ et $\cos \varphi$ à la fréquence f de la mesure.

b. Le dipôle a-t-il un caractère inductif ou capacitif ?

Autres concours ; Durée : 0h30.

Corrigé

1.a. Dans l'état 1 pour K et K' : $\underline{u}' = (R_0 + \underline{Z})$; $\underline{u} = \underline{Z}I \Rightarrow \underline{V} = R_0 I$;

$$\underline{v}' = \underline{v} \Rightarrow v'' = R v^2(t).$$

$$\text{or } i = i_m \cos \omega t \Rightarrow v' = k R_0^2 i_m^2 \cos^2 \omega t = k R_0^2 i_m^2 \frac{(1 + \cos 2\omega t)}{2}.$$

• composante continue de la tension, dimension, facteur de puissance [cosinus du déphasage tension intensité], multiplicateur, réactance, soustracteur [rétroaction], unité

Multiplieur

Le filtre passe-bas laisse passer la composante continue (cf. valeur moyenne d'une série de Fourier) $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{2} k R_0 i_m^2$.

b. K est dans l'état 1, K' dans l'état 2.

Comme précédemment, $\underline{v} = R_0 \underline{i}$ mais $\underline{v}' = \underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$;

$v'' = k R_0 |\underline{Z}| i_m^2 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi = \arg \underline{Z}$; transformons le produit en somme :

$$v'' = k R_0 |\underline{Z}| i_m^2 \frac{1}{2} (\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)).$$

Après le filtre passe-bas, il reste :

$$V_2 = \frac{1}{2} R_0 k |\underline{Z}| i_m^2 \cos \varphi = \frac{1}{2} k R_0 R(\omega) i_m^2.$$

c. K est dans l'état 2, K' dans l'état 1.

$$\underline{v} = \underline{u}' - \underline{u} = \frac{\underline{i}}{jC\omega} = \underline{v}' ;$$

Le déphasage de $\frac{\pi}{2}$ du condensateur donne :

$$v' = \frac{i_m}{C_0 \omega} \sin \omega t \text{ et } v'' = k V'^2 = k \frac{i_m^2}{C_0^2 \omega^2} \sin^2 \omega t = k \frac{i_m^2}{2 C_0^2 \omega^2}.$$

Le filtre passe-bas récupère en sortie $V_3 = \frac{1}{2} \frac{k i_m^2}{C_0^2 \omega^2}$.

d. K et K' sont dans l'état 2.

On a toujours $\underline{v} = \frac{\underline{i}}{jC_0 \omega}$; $\underline{v}' = \underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$;

$$v'' = k \frac{i_m^2}{C_0 \omega} \sin \omega t |\underline{Z}| \cos(\omega t + \varphi).$$

Transformons le produit en somme ;

$$v'' = -\frac{1}{2} k \frac{i_m^2}{C_0 \omega} |\underline{Z}| (\sin \varphi - \sin(2\omega t + \varphi)).$$

Le filtre passe-bas donne : $V_4 = -\frac{1}{2} k i_m^2 \frac{|\underline{Z}|}{C_0 \omega} \sin \varphi$; $V_4 = -\frac{1}{2} \frac{k i_m^2}{C_0 \omega} X(\omega)$.

$$\mathbf{2.a.\alpha.} \quad R(\omega) = \frac{V_2}{\frac{1}{2} k R_0 i_m^2} = \frac{V_2}{\frac{V_1}{R_0}} = \frac{V_2}{V_1} R_0 ; \text{A.N. : } R(\omega) = 2\Omega.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad X(\omega) = \frac{V_4 C_0 \omega}{\frac{1}{2} k i_m^2} = -\frac{V_4}{V_3} \frac{1}{C_0 \omega} ; \text{A.N. : } X(\omega) = -10,2 \text{ k}\Omega.$$

$$\mathbf{\gamma.} \quad \cos \varphi = \frac{R(\omega)}{|\underline{Z}|} = \frac{R(\omega)}{\sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}} ; \cos \varphi = \frac{V_2}{V_1} \frac{R_0}{\sqrt{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 R_0^2 + \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^2 \frac{1}{(C_0 \omega)^2}}};$$

A.N. : $\cos \varphi = 0,19$.

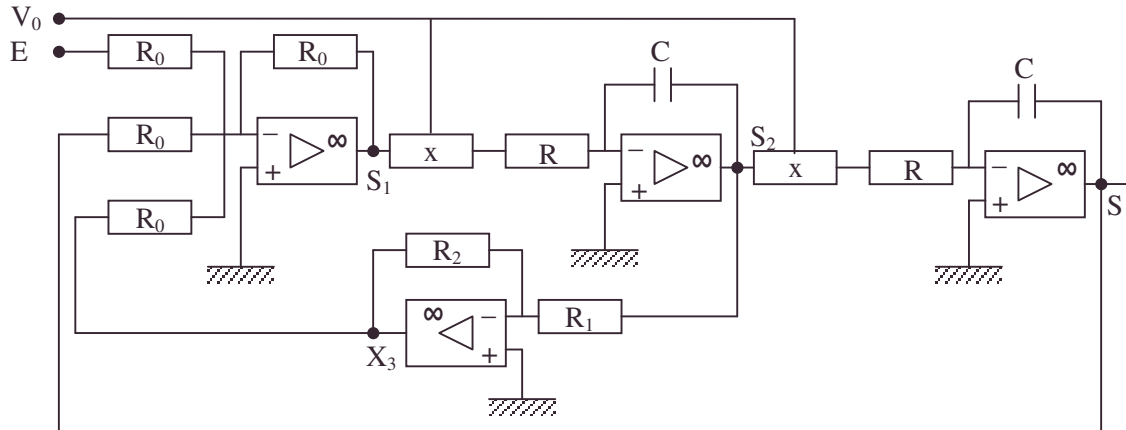
b. Le dipôle ayant une réactance négative est dit de type capacitif.

6.1.2.3. Filtrage temporel

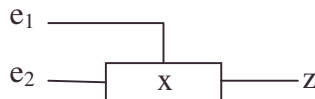
Application : fonction retard

Filtrage des signaux temporels

On considère le circuit ci-dessous où tous les amplificateurs opérationnels peuvent être considérés comme parfaits.



– Chaque composant noté x, représenté ci-dessous, est un multiplieur analogique.



Il réalise la fonction $z = k.e_1.e_2$
avec $k = 1 \text{ V}^{-1}$

- E est l'entrée du circuit qui comporte 3 sorties : S_1 , S_2 , S.
- V_0 est une tension constante ici.

Question 1

En notant $E(t)$, $S(t)$, $S_1(t)$, $S_2(t)$, et $X_3(t)$ les tensions en E, S, S_1 , S_2 et X_3 :

1. Exprimer $S_1(t)$ en fonction de $S(t)$, $X_3(t)$ et $E(t)$.
2. Exprimer $S_2(t)$ en fonction de $S_1(t)$.
3. Exprimer $S(t)$ en fonction de $S_2(t)$.
4. Ecrire l'équation différentielle reliant le signal de sortie $S(t)$ au signal d'entrée $E(t)$.
5. En déduire la fonction de transfert correspondante $H(j\omega)$ en régime harmonique.

Question 2

1. Mettre cette fonction de transfert sous la forme normalisée suivante :

$$H(j\omega) = - \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j2\xi\omega}{\omega_0}} = G(\omega).e^{j\varphi(\omega)}.$$

2. Calculer le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ pour que $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et, prenant $V_0 = 1 \text{ volt}$, calculer le

produit $R.C$ pour que la pulsation de coupure à -3 dB du filtre soit égale à 10000 rad.s^{-1} .

3.a. Tracer, en gardant les valeurs numériques définies ci-dessus, le module de cette fonction de transfert, dans le plan de Bode, pour $V_0 = 1 \text{ volt}$.

b. Montrer que la fréquence de coupure du filtre passe-bas ci-dessus définie peut être ajustée en réglant la tension V_0 ; tracer, dans le plan de Bode, le module de la fonction de transfert pour $V_0 = 2 \text{ volts}$.

- fonction retard, forme normalisée d'un filtre passe-bas d'ordre deux, fréquence de coupure ajustable d'un filtrage temporel, graphe

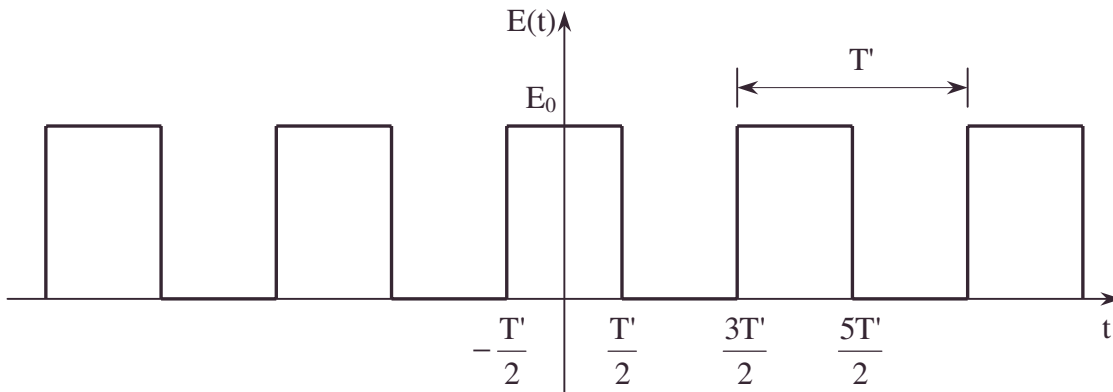
Dans tout le reste du problème on gardera $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $V_0 = 1$ volt et la valeur numérique du rapport $\frac{R_2}{R_1}$ ci-avant calculée.

Question 3

1. Calculer la fonction de transfert $H_2(j\omega)$ du circuit entre l'entrée E et la sortie S_2 .
2. Calculer la fonction de transfert $H_1(j\omega)$ du circuit entre l'entrée E et la sortie S_1 .
3. Tracer, dans le plan de Bode, les modules de ces deux fonctions de transfert.

Question 4

1. Calculer la décomposition en série de Fourier du signal périodique carré ci-dessous



Avec : $E_0 = 1$ volt et : $T' = \frac{2\pi}{\omega'_0}$ avec $\omega'_0 = 100 \text{ rad s}^{-1}$.

2. Ce signal étant appliqué sur l'entrée E du circuit étudié: donner la décomposition en série de Fourier du signal de sortie $S(t)$. On écrira en fonction de ω'_0 les formules générales donnant les amplitudes et phases des composantes sinusoïdales de $S(t)$.

Question 5

1. Montrer que la phase $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$, peut se mettre pour ω très petit devant ω_0 sous la forme : $\varphi = \pi - K.\omega$;

Calculer la constante K.

2. Dans les mêmes conditions, on considérera que le signal carré peut être assimilé à la somme de ses six premiers termes non nuls.

- a. Calculer les composantes correspondantes du signal de sortie.
- b. En faisant une approximation que l'on justifiera, montrer que les seuls effets du filtrage consistent en l'inversion du signal et en l'introduction d'un retard τ entre l'entrée $E(t)$ et la sortie $S(t)$.
- c. Calculer le retard ainsi introduit.

CCP ; Durée 2h

Corrigé

- 1.1. Appliquons le théorème de Millman à la borne V_- de l'A.O. de sortie S_1 .

$$\frac{4V_-}{R_0} = \frac{S_1}{R_0} + \frac{S}{R_0} + \frac{E}{R_0} + \frac{X_3}{R_0} \text{ or } V_- = V_+ = 0 \Rightarrow S_1 = -(S + X_3 + E).$$

$$2. kV_0 S_1 = Ri ; q = CS_2 ; \frac{dq}{dt} = -i .$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\frac{kV_0}{RC} S_1(t) , \Rightarrow S_2 = -\frac{kV_0}{RC} \int S_1 dt .$$

$$3. \text{De même, } \frac{dS}{dt} = -\frac{kV_0}{RC} S_2 , \Rightarrow S = -\frac{kV_0}{RC} \int S_2 dt .$$

$$\text{ou } S_2 = -\frac{RC}{kV_0} \frac{dS}{dt} .$$

$$4. \frac{d^2 S}{dt^2} = \left(\frac{kV_0}{RC} \right)^2 S_1 = -\left(\frac{kV_0}{RC} \right)^2 (S + X_3 + E) ;$$

or, $X_3 = -R_2 i_1$; $S_2 = R_1 i_1$; voir figure ci-contre.
en éliminant i_1 (variante au théorème de Millman)

$$X_3 = -\frac{R_2}{R_1} S_2 = \frac{R_2}{R_1} \frac{RC}{kV_0} \frac{dS}{dt} ;$$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{kV_0}{RC} \right) \frac{dS}{dt} + \left(\frac{kV_0}{RC} \right)^2 S = -\left(\frac{kV_0}{RC} \right)^2 E .$$

5. Avec la notation complexe $S = \underline{S} e^{j\omega t}$; $E = \underline{E} e^{j\omega t}$.

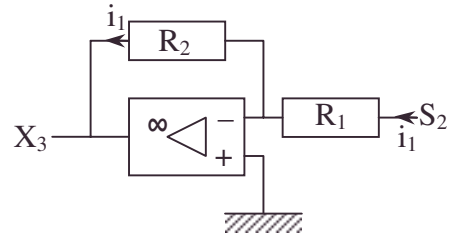
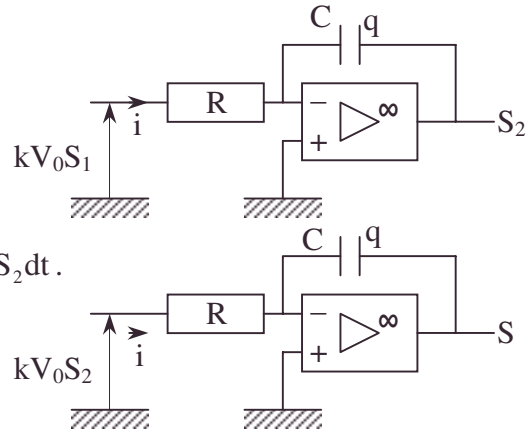
$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{-\left(\frac{kV_0}{RC} \right)^2}{-\omega^2 + j\omega \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{kV_0}{RC} \right) + \left(\frac{kV_0}{RC} \right)^2} .$$

$$2.1. \text{Posons } \omega_0^2 = \left(\frac{kV_0}{RC} \right)^2 ; \xi = \frac{R_2}{2R_1} :$$

$$H(j\omega) = -\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} .$$

$$G(\omega) = |H| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} ; \cos \varphi = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} .$$

$$\sin \varphi = \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} ; \text{on peut utiliser } \tan \varphi = \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} .$$

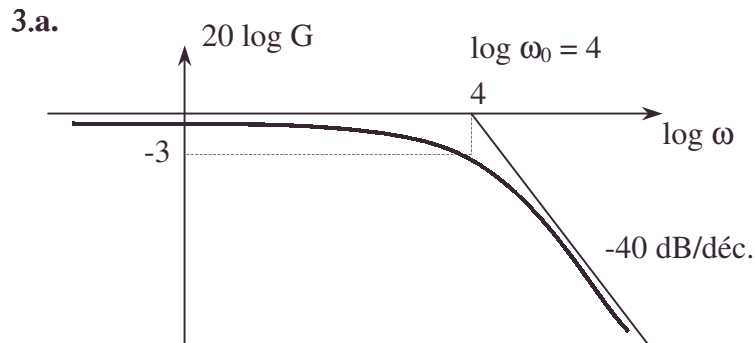


2.a. $\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{2}.$

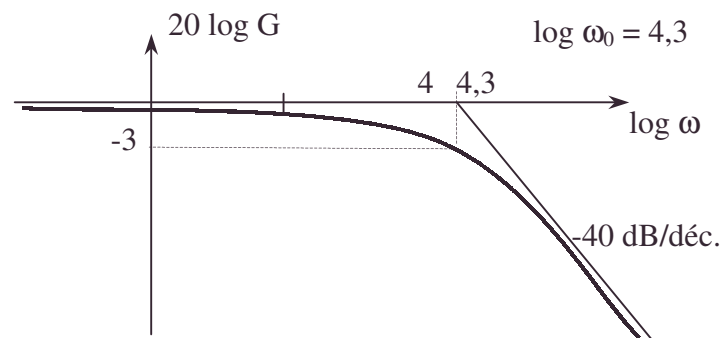
b. $G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}.$

$G_{\max} = 1 ; G_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega_c = \omega_0.$

$R.C = \frac{kV_0}{\omega_0} ; \text{AN} : R.C = 10^{-4} \text{ s}.$



b. $\omega_0 = \frac{kV_0}{RC}$, la fréquence de coupure peut être ajustée en réglant V_0 tout en gardant RC . A.N. : $\omega_0 = 2.10^4 \text{ rad.s}^{-1}.$

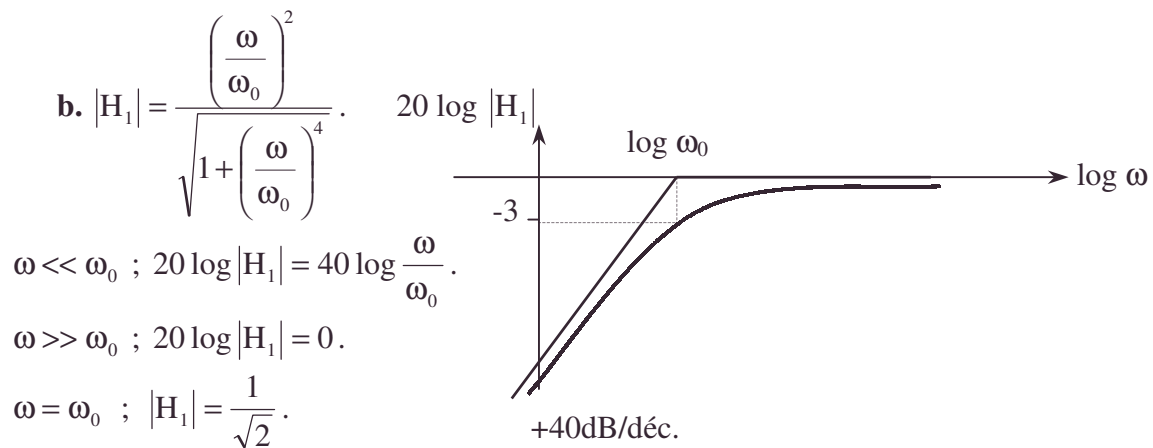
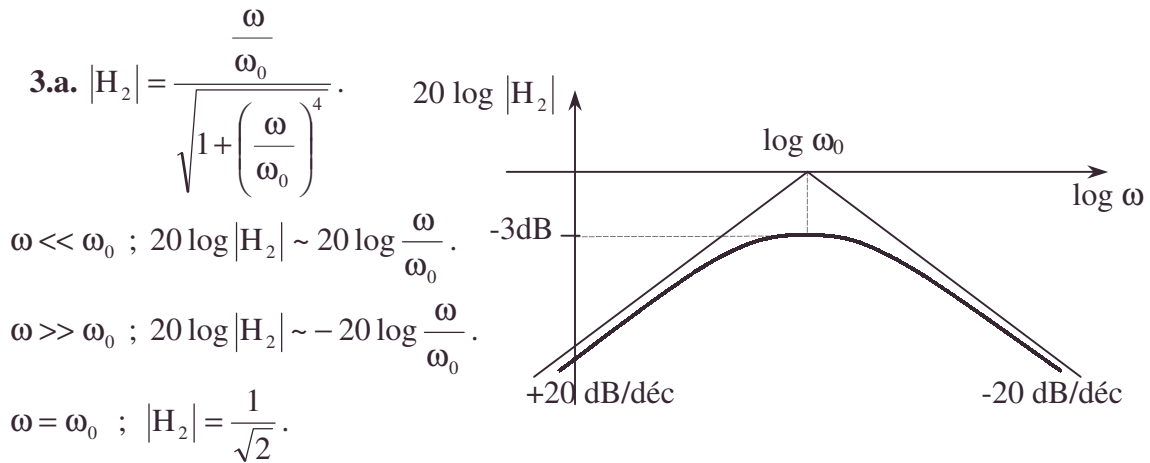


3.1. $S_2 = -\frac{1}{\omega_0} \frac{dS}{dt}$; avec la notation complexe, $\underline{S}_2 = -j\frac{\omega}{\omega_0} \underline{S}.$

$H_2(j\omega) = \frac{\underline{S}_2}{\underline{E}} = \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}} \cdot \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = -j\frac{\omega}{\omega_0} H = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_0}}.$

2. $S_1 = -\frac{1}{\omega_0} \frac{dS_2}{dt}$; avec la notation complexe : $\underline{S}_1 = -j\frac{\omega}{\omega_0} \underline{S}_2 ;$

$$H_1(j\omega) = \frac{\underline{S}_1}{\underline{E}} = \frac{\underline{S}_1}{\underline{S}_2} \cdot \frac{\underline{S}_2}{\underline{E}} = -j \frac{\omega}{\omega_0} H_2 = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0}}.$$



4.1. Cherchons un développement en série de Fourier de $E(t)$:

$$E(t) = \sum_0^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T'} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T'} t \right) \text{ avec } T' = \frac{2\pi}{\omega_0} ;$$

$$a_0 = \frac{1}{T'} \int_{-\frac{T'}{4}}^{+\frac{T'}{4}} E_0 dt = \frac{E_0}{2}.$$

$b_n = 0$ car $E(t)$ est une fonction paire et $\sin 2\pi \frac{nt}{T'}$ est impaire.

$$a_n = \frac{2}{T'} \int_{-\frac{T'}{4}}^{+\frac{T'}{4}} E_0 \cos 2\pi n \frac{t}{T'} dt = \frac{2E_0}{\pi n} \sin \frac{n}{2} \pi.$$

Pour $n = 2p$, $a_n = 0$; pour $n = 2p+1$, $a_n = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)\pi} E_0.$

2. $S = \mathcal{C}(E) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}(C_n e^{jn\omega_0 t}), \mathcal{C}$ désignant le transfert sur $\mathbb{C}.$

$$\mathcal{C}(C_n e^{jn\omega_0 t}) = \underline{H}(n\omega_0) C_n e^{jn\omega_0 t} = \underline{G}(n\omega_0) C_n e^{j(n\omega_0 t + \phi(n\omega_0))}.$$

En passant à la notation réelle :

• *diagramme de Bode de gain, plan de Bode, série de Fourier*

$$S = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} G((2p+1)\omega_0') \cos((2p+1)\omega_0' t + \varphi[(2p+1)\omega_0']) ,.$$

$$\text{avec } G((2p+1)\omega_0') = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (2p+1)^2 \left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 2(2p+1)^2 \left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2}} .$$

$$\tan \varphi((2p+1)\omega_0') = \frac{\sqrt{2}(2p+1) \frac{\omega_0'}{\omega_0}}{(2p+1)^2 \left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2 - 1} .$$

5.1.a. $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \sin \varphi \approx \frac{\omega\sqrt{2}}{\omega_0}$ et $\cos \varphi \approx -1$;

$$\Rightarrow \varphi = \pi - \frac{\omega\sqrt{2}}{\omega_0} \text{ soit de la forme } \varphi = \pi - K\omega .$$

b. $K = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} .$

2.a. $\omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega_0' = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ si on accepte $1 \ll 10$ approximation fréquente en électronique, on a pour le sixième terme $9 \frac{\omega_0'}{\omega_{0g}} \ll 1$.

$$\varphi_{2p+1} = \pi - (2p+1)\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0} \text{ pour } p \leq 5 .$$

n	0	1	3	5	7	9
G	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\pi - \varphi$ en rad	0,0000	0,0141	0,0424	0,0707	0,0990	0,1272
$n \frac{\omega_0'}{\omega_0} \sqrt{2}$	0,0000	0,0141	0,0423	0,0707	0,0990	0,1273

$$S = -E_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos(\omega_0' t - 0,0141) + 0,33 \cos(3\omega_0' t - 0,0424)) \dots \right.$$

$$\left. \dots + 0,20 \cos(5\omega_0' t - 0,0707) + 0,147 \cos(7\omega_0' t - 0,0990) + 0,111 \cos(9\omega_0' t - 0,1272) \right] .$$

b. En restreignant E à ses 6 premiers termes :

$$S = -E_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_0^4 \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\omega_0'(t - \tau)] \right) .$$

On a : $S(t) = -E(t - \tau)$ avec $\tau = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}$ dans le tableau car $\pi - \varphi = n \frac{\omega_0'}{\omega_0} \sqrt{2}$ (cf. tableau 4^{ème} ligne).

Il s'agit bien d'une inversion (changement de signe) et de l'introduction d'un retard τ .

c. AN : $\tau = 1,414 \cdot 10^{-4} \text{ s} .$

• développement au premier ordre ou plus, retard, tableau numérique

6.1.2.4. Filtrage numérique

Algorithmes informatiques simples

Un système de filtrage numérique, opérant sur un signal analogique $x(t)$ se ramène au schéma fonctionnel suivant :

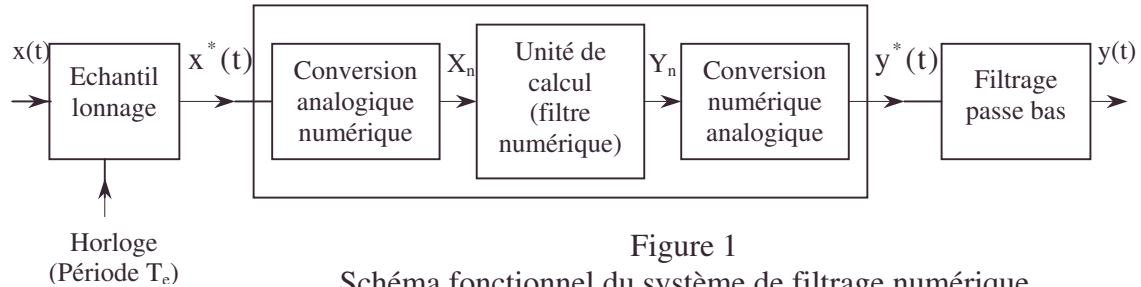


Figure 1
Schéma fonctionnel du système de filtrage numérique
 T_e : période du signal d'échantillonnage

- L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs du signal $x(t)$ à des instants multiples entiers de la période d'horloge. Soit $x(nT_e)$, la valeur analogique de l'échantillon pris à l'instant $t = nT_e$. L'ensemble de ces échantillons constitue le signal $x^*(t)$.
- Chaque échantillon est ensuite traduit dans une représentation numérique adaptée à l'unité de calcul. On notera X_n le nombre binaire associé à la valeur analogique $x(nT_e)$.
- L'unité de calcul effectue un algorithme qui, à partir de la suite des nombres X_n (définis précédemment) crée une suite de nouveaux nombres appelés Y_n .
- Ces nombres Y_n , convertis en grandeur analogique, permettent de définir le signal $y^*(t)$ formé des échantillons $y(nT_e)$.
- Après filtrage passe-bas du signal $y^*(t)$, on obtient le signal analogique de sortie $y(t)$.

Le but du problème est d'étudier les caractéristiques de $y(t)$ sachant que $x(t)$ est un signal analogique sinusoïdal : $x(t) = X \sin \omega t = X \sin(2\pi f t)$.

1. Etude du système dans le cas où l'unité de calcul effectue l'algorithme $Y_n = X_n$

Le traitement numérique étant réduit à l'égalité $Y_n = X_n$, le schéma fonctionnel est alors le suivant (cf. figure 2) :

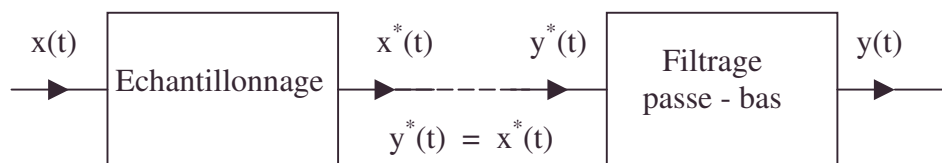


Figure 2 : Schéma fonctionnel pour l'algorithme $Y_n = X_n$

Grâce à cette structure simplifiée, ne restent à analyser que les fonctions échantillonnage et filtrage passe-bas.

1. Echantillonnage.

La prise d'échantillons est réalisée selon le principe suivant (cf. figure3) :



Figure 3 : prise d'échantillons.

Le signal $x(t)$ est sinusoïdal, d'amplitude $X = 2V$ et de fréquence $f = 833 \text{ Hz}$.

- *algorithme informatique [filtrage numérique], échantillonnage [numérisation], horloge*

$e(t)$ est le signal d'échantillonnage de période $T_e = \frac{1}{F_e}$ défini par la figure 4 :

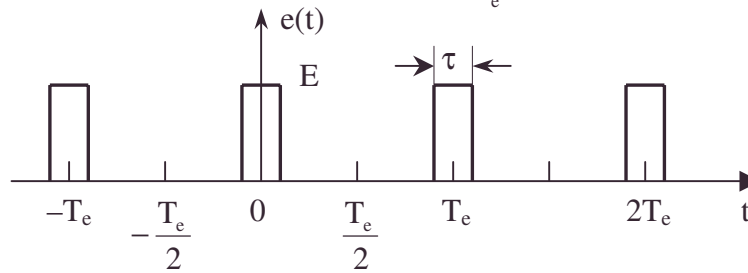


Figure 4 : graphe du signal d'échantillonnage $e(t)$

$E = 1\text{ V}$; $T_e = 0,1\text{ ms}$ et $\tau = 10\text{ }\mu\text{s}$

- Représenter les signaux $x^*(t)$ (en respectant la concordance des temps).
- $e(t)$ est un signal périodique, et est décomposable en série de Fourier.

Justifier qualitativement que $e(t)$ peut s'écrire : $e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos n\omega_e t$. $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$.

Trouver l'expression littérale de E_0 puis calculer sa valeur numérique.

c. Connaissant la décomposition de $e(t)$, exprimer $x^*(t)$ sous forme d'une somme de fonctions sinusoïdales.

d. En se limitant aux trois premières raies et sachant que $E_1 = 0,2\text{ V}$, représenter le spectre en fréquence de $x^*(t)$.

2. Filtrage passe-bas

Sachant que $y^*(t) = x^*(t)$, on souhaite obtenir $y(t)$ image parfaite de $x(t)$, soit :

$$y(t) = Y \sin \omega t = kX \sin \omega t.$$

Pour ne conserver que la raie de fréquence f , on réalise un filtrage passe-bas.

a. En raisonnant sur un filtre passe-bas idéal, trouver, en fonction de f , la valeur minimale de la fréquence F_e d'échantillonnage.

b. Une première approche de ce filtre consiste à utiliser un circuit passe-bas du 1^{er} ordre de fréquence de coupure f_c .

- Donner la transmittance d'un tel filtre. tracer son diagramme de Bode (diagrammes asymptotiques et courbes réelles de gain et de phase).
- Comment choisir f_c par rapport à $f_1 = 833\text{ Hz}$? Justifier l'inégalité proposée.
- Comment choisir f_c par rapport à $f_2 = 9167\text{ Hz}$ (et $f_3 = 10833\text{ Hz}$) ? Justifier l'inégalité proposée.

Ces deux inégalités sont-elles compatibles ?

Conclure sur l'utilisation d'un tel filtre. Quelle(s) solution(s) suggérez-vous ?

Dans la suite du problème, le filtre passe-bas sera supposé idéal. Dans le cas particulier où l'algorithme est l'égalité $Y_n = X_n$, la sortie $y(t)$ est donc rigoureusement proportionnelle à l'entrée $x(t)$. La deuxième partie du problème met en évidence les modifications sur $y(t)$ apportées par l'exécution d'un algorithme différent.

2. Etude du système dans le cas où l'unité de calcul effectue l'algorithme

$$Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}.$$

On rappelle que X_n est le nombre binaire associé à la valeur de $x(t) = X \sin \omega t$ prise à l'instant particulier $t = nT_e$.

$$X_n \longleftrightarrow x(nT_e) = X \sin(n\omega T_e).$$

Dès l'apparition du nombre X_n à l'instant $t = nT_e$, le calculateur fournit immédiatement le nombre $Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}$. La conversion du nombre Y_n en la grandeur analogique $y(nT_e)$ est instantanée.

1. Etablir l'expression de $y(nT_e)$. Montrer que celle-ci peut se mettre sous la forme :

$$y(nT_e) = Y \sin[n \omega T_e + \varphi].$$

Donner les expressions littérales de Y et φ en fonction de X , f et F_e .

2. L'échantillonnage de $x(t) = X \sin \omega t$ ($X = 2V$, $f = 833 \text{ Hz}$) a lieu comme indiqué dans la première partie, aux instants $0, T_e, 2T_e, nT_e$ pendant un temps τ considéré très court devant T_e ($T_e = 0,1 \text{ ms}$). Dans ces conditions, on admet que $x(t)$ est constant et égal à $x(nT_e)$ sur l'intervalle $\left[nT_e - \frac{\tau}{2}, nT_e + \frac{\tau}{2}\right]$.

a. Calculer les valeurs de $y(nT_e)$ pour n variant de 0 à 6.

b. En extrapolant les résultats ci-dessus, représenter $y^*(t)$ pour $0 \leq t \leq 1,2 \text{ ms}$.

c. La reconstitution du signal analogique $y(t)$ à partir du signal $y^*(t)$ formé des échantillons $y(nT_e)$ étant idéale, montrer qualitativement que :

$$y(t) = X \cos\left(\pi \frac{f}{F_e}\right) \sin\left(\omega t - \pi \frac{f}{F_e}\right);$$

En déduire la modification produite sur $x(t)$ par le filtrage numérique.

3. $x(t)$ est maintenant un signal sinusoïdal d'amplitude constante et de fréquence variant de 0 à $\frac{F_e}{2}$:

a. Justifier la valeur limite $f_{\max} = \frac{F_e}{2}$.

b. Réponse en fréquence du filtre numérique :

• Représenter, en échelle linéaire, l'évolution de $T = \frac{Y}{X}$, et de φ pour f variant de 0 à f_{\max} .

• Quelle est la bande passante à -3 dB ?

• Pour des signaux dont le spectre en fréquence s'étend de 0 à $\frac{F_e}{10}$, quelle est la fonction réalisée par le filtre numérique ?

On rappelle les fonctions trigonométriques :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)];$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

BTS ; Durée 3h

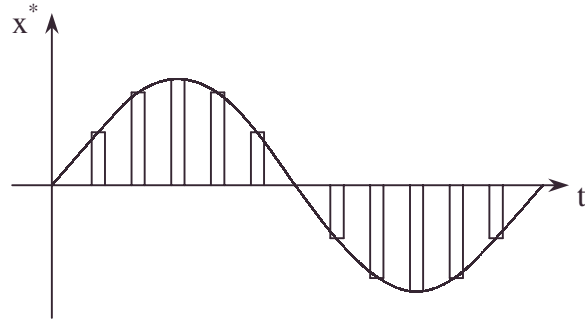
Corrigé

L'échantillonnage substitue aux valeurs d'une fonction un ensemble fini de valeurs : ici 12 valeurs par période ($\frac{T}{T_e} = 12$).

Cette technique est adaptée à la mémorisation informatique.

- bande passante, diode passante

1.1.a. $x^*(t) = k x(t) e(t)$;
 $x(t) = X \sin 2\pi f t$;
 Si $\tau \ll T_e$ $x^*(t)$ comme $e(t)$ vaut 0
 pendant $T - \frac{T}{T_e} \tau$ par période.



b. e étant paire, $b_n = \frac{2}{T_e} \int_{T_e} e(t) \sin n\omega_e t dt = 0$; $E_0 = \frac{1}{T_e} \int_{T_e} e(t) dt = E \frac{\tau}{T_e}$;

AN : $E_0 = 0,1V \Rightarrow e(t) = E_0 + \sum_1^\infty E_n \cos n\omega_e t$.

c. $x^*(t) = E_0 X \sin \omega t + \sum_1^\infty X E_n \cos \omega_e n t \sin \omega t$;

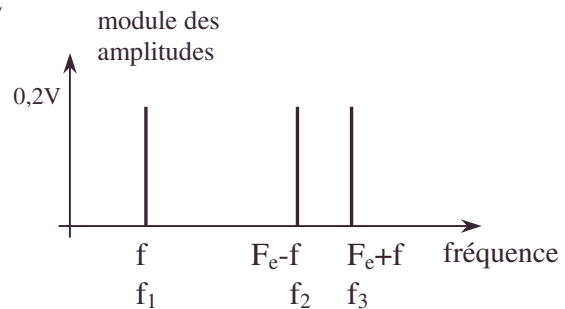
$x^*(t) = E_0 X \sin \omega t + \sum_1^\infty \frac{E_n X}{2} (\sin(\omega + n\omega_e)t - \sin(n\omega_e - \omega)t)$.

d. $n = 1$ donne 3 raies à f_1 , f_2 et f_3 qui sont les trois premières vu T_e et T .

$x^*(t) = E_0 X \sin \omega t - E_1 \frac{X}{2} \sin(\omega_e - \omega)t + E_1 \frac{X}{2} \sin(\omega_e + \omega)t$.

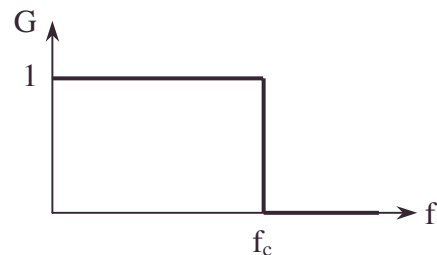
AN : $E_0 X = 0,2V$; $E_1 \frac{X}{2} = 0,2V$

$f = 833 \text{ Hz}$, $F_e = 10^4 \text{ Hz}$; $F_e - f = 9167 \text{ Hz}$.
 $F_e + f = 10833 \text{ Hz}$.



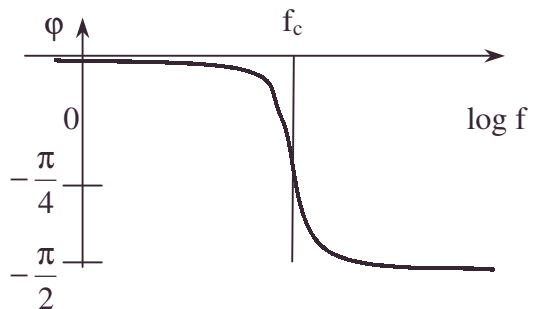
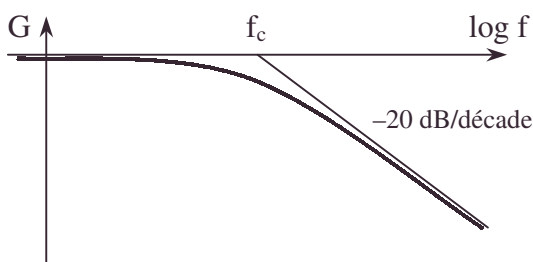
2.a. Gain d'un filtre passe-bas idéal.
 (figure ci(contre).

– Pour conserver f , il faut $f < f_c$.
 – Pour ne conserver que f , il faut $f_c < F_e - f$.
 Le passage à la limite donne pour $f = f_c$:
 $F_{e \min} = 2f$, soit $F_e > 2f$.



b.α. $T = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{2\pi f_c}}$.

β.



γ. L'atténuation n'étant plus immédiate, il faut substituer à $f < f_c$ un autre critère, $f < \frac{f_c}{10}$ (ou $\frac{f_c}{100}$) et à $f_c < f_2$ avec $f_2 = F_e - f$, un autre critère $f_c < \frac{f_2}{10}$ (ou $\frac{f_2}{100}$).

En résumé :

$$\left. \begin{array}{l} f_1 < \frac{f_c}{10} \Rightarrow f_c > 8330 \text{ Hz} \\ f_c < \frac{f_2}{10} \Rightarrow f_c < 917 \text{ Hz} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{deux relations incompatibles.} \\ \text{On ne peut utiliser ce filtre.} \end{array}$$

δ. Solutions proposées :

- Diminuer f , augmenter F_e .
- Augmenter la pente du filtre (augmentation de son ordre).

2. Algorithme $Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}$.

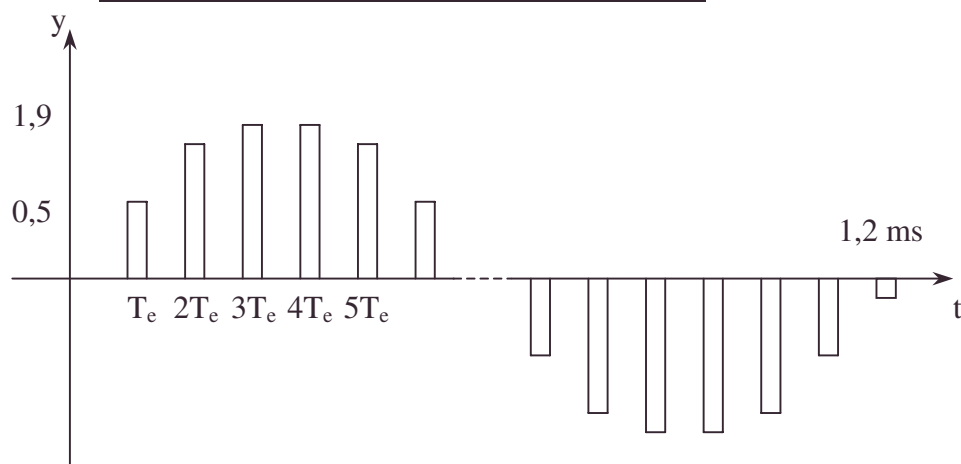
$$1. y(nT_e) = \frac{X}{2} (\sin n\omega T_e + \sin(n-1)\omega T_e) = X \cos \frac{\omega T_e}{2} \sin \left(n\omega T_e - \frac{\omega T_e}{2} \right);$$

$$Y = X \cos \frac{\omega T_e}{2} = X \cos \pi \frac{f}{F_e}; \quad \varphi = -\omega \frac{T_e}{2} = -\pi \frac{f}{F_e}.$$

2.a.

n	0	1	2	3	4	5	6
Y	-0,5	0,5	1,4	1,9	1,9	1,4	0,5

b.



c. L'enveloppe s'obtient par continuité par transcription de $n\omega T_e$ par ωt :

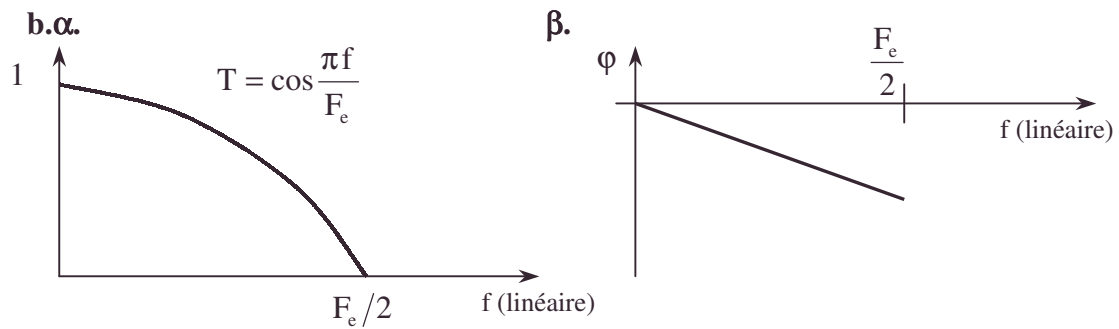
$$y(t) = X \cos \frac{\pi f}{F_e} \sin \left(\omega t - \pi \frac{f}{F_e} \right); \text{ c'est le seul signal de pulsation } \omega.$$

Conclusion : X subit le coefficient multiplicateur $\cos \pi \frac{f}{F_e} \neq 1$ et un retard de phase de

$$\pi \frac{f}{F_e}; \text{ AN : } \frac{\pi}{12}.$$

3.a. La sortie est nulle pour $\cos \frac{\pi f}{F_e} = 0$, soit $f_{\max} = \frac{F_e}{2}$; au-delà, il y aurait

changement de signe de $\cos \frac{\pi f}{F_e}$ (ou déphasage modifié de π).



γ. Bande passante : $\cos \pi \frac{f}{F_e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $f = \frac{F_e}{4}$.

AN : $f_{BP} = 2,5 \text{ kHz}$;

δ. $\cos \frac{\pi}{10} \# 1$; $y(t) = X \sin \left(\omega t - \pi \frac{f}{F_e} \right)$.

Conclusion : on a introduit un déphasage fonction de f (mais petit quand $f \leq \frac{F_e}{10}$).

C'est la conséquence de l'algorithme utilisé ici, soit $Y_n = \frac{X_n + X_{n-1}}{2}$ au lieu de $Y_n = X_n$.

Il ne résulte que de la technique calculatoire informatique.

6.1.2.5. Multiplieur à transistors

Voir page 966.

6.1.2.6. Modulation de fréquence

Voir page 987.

6.1.2.7. Etude fréquentielle d'un signal

Voir page 991.

6.1.2.8. Voltmètre numérique

Voir page 1021.

6.1.2.9. Simulation de la résonance d'un pendule pesant

Voir page 1038.

6.1.2.10. Régulation de fréquence d'un émetteur hyperfréquence

Voir page 1175.

6.1.3. Rétroaction

Appartient explicitement aux programmes de PSI
et à celui des sciences de l'ingénieur de PT et PSI

6.1.3.1. Association de quadripôles

Double intégration – Double dérivation

On considère les deux cellules en T, soit T_1 et T_2 , représentées sur les figures 1 et 2 ci-dessous :

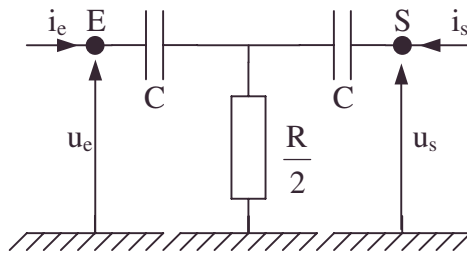


Figure 1 Cellule T_1

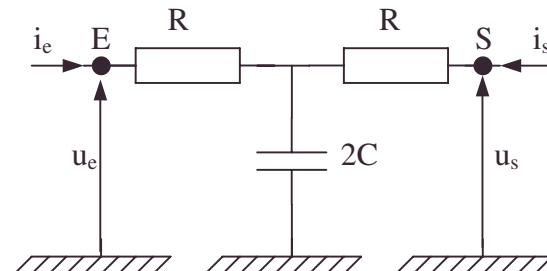


Figure 2 Cellule T_2

U_e , U_s , I_e , I_s sont les grandeurs complexes associées aux grandeurs caractéristiques u_e , u_s , i_e , i_s instantanées en régime sinusoïdal de pulsation ω : u_e et u_s sont les tensions d'entrée et de sortie prises par rapport à la masse ; i_e et i_s sont les courants d'entrée et de sortie pour lesquels on notera les sens d'orientation.

On considère la matrice admittance $\bar{\bar{Y}}$ définie par:
$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_e \\ U_s \end{bmatrix};$$

les Y_{ij} sont fonctions de R , C et ω .

1.a. Déterminer la matrice admittance de la cellule T_1 , soit $\bar{\bar{Y}}$.

b. Déterminer la matrice admittance de la cellule T_2 que l'on notera $\bar{\bar{X}}$ (éléments x_{ij}).

c. Existe-t'il une façon simple de déduire X_{ij} de Y_{ij} ?

d. Quelles sont les conséquences sur les Y_{ij} (ou les X_{ij}) de la symétrie des cellules T_1 et T_2 ?

2. On associe les 2 cellules T_1 et T_2 en parallèle pour former le quadripôle en double T représenté sur la figure 3.

La sortie des deux cellules est court-circuitée à la masse : $U_s = 0$.

a. Déterminer le rapport $\bar{S} = \frac{I_s}{U_e}$, appelé

transconductance du circuit.

b. Soit $S(\omega)$ le module $|\bar{S}|$ de la transconductance.

Etudier directement le comportement de $S(\omega)$ pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$ et vérifier ainsi la valeur de $S(\omega)$ pour les valeurs extrêmes de la pulsation.

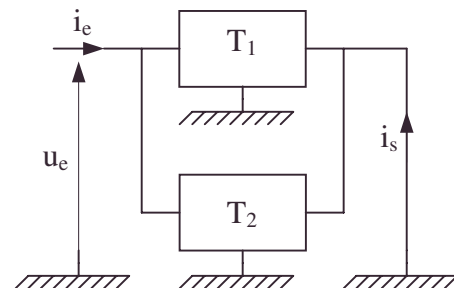


Figure 3

c. Tracer le graphe de $20 \log S(\omega)$ en fonction de $\log \omega$ avec les valeurs numériques suivantes : $R = 10^4 \Omega$, $C = 10^{-7} \text{ F}$.

3. On boucle un "amplificateur opérationnel" idéal avec les deux cellules T_1 et T_2 précédentes selon le schéma représenté sur la figure 4. Un tel amplificateur comporte en

Rétroaction

particulier deux bornes notées respectivement + (borne non-inverseuse) et – (borne inverseuse) . L'amplificateur fonctionne en régime linéaire. Pour un amplificateur opérationnel idéal, la tension ε entre les bornes + et – peut être considérée comme nulle, de même que les courants i^+ et i^- qui entrent ou sortent par ces bornes. Le montage est alimenté par une source $E(t)$ de pulsation ω .

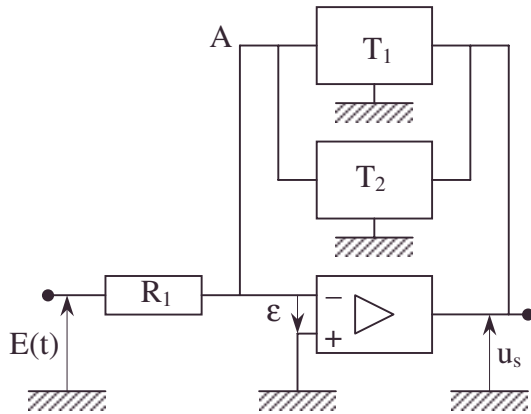


Figure 4

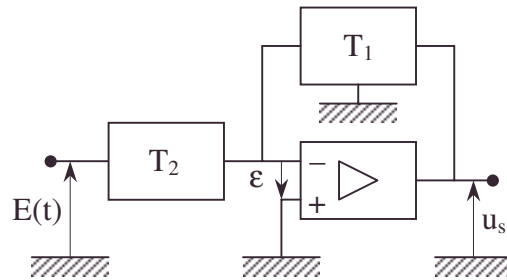


Figure 5

a. Déterminer le gain $G(\omega) = \left| \frac{U_s}{E} \right|$ en fonction de S et R_1 .

b. Il existe une valeur ω_c pour laquelle $G(\omega)$ devient infini. Pour quelle(s) raison(s), selon vous, observerait-on en réalité un comportement différent ?

4. On associe maintenant 2 cellules T_1 et T_2 à l'amplificateur opérationnel précédent suivant le schéma de la figure 5 ci-dessus.

a. En vous servant de la question 1. et d'une méthode de calcul suggérée par la question 2., calculer le gain $G(\omega) = \left| \frac{U_s}{E} \right|$ en fonction de R , C et ω .

b. Pourquoi peut-on dire que ce système réalise la double intégration d'un signal du type $E = E_0 \cos(\omega t - \phi)$?

c. Quel montage faudrait-il utiliser pour réaliser une double dérivation ?

Mines ; Durée 1h30

Corrigé

1. Pour le quadripôle en T :

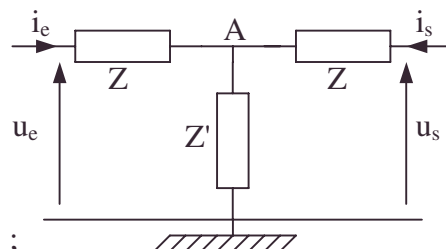
le théorème de Millman en A donne :

$$U_A = \frac{\frac{u_e}{Z} + \frac{u_s}{Z}}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z'}} = \frac{Z'(u_e + u_s)}{(2Z' + Z)} ;$$

$$i_e = \frac{u_e - u_A}{Z} = u_e \left(\frac{1}{Z} - \frac{Z'}{Z(2Z' + Z)} \right) - \frac{Z'}{Z(2Z' + Z)} u_s ;$$

$$i_s = \frac{u_s - u_A}{Z} = -\frac{Z' u_e}{Z(2Z' + Z)} + \left(\frac{1}{Z} - \frac{Z'}{Z(2Z' + Z)} \right) u_s \text{ d'où :}$$

$$Y_{11} = \frac{Z + Z'}{Z(Z + 2Z')} ; Y_{12} = \frac{-Z'}{Z(Z + 2Z')} ;$$



$$Y_{21} = \frac{-Z'}{Z(Z+2Z')} ; Y_{22} = \frac{Z+Z'}{Z(Z+2Z')}. \text{ La matrice est symétrique.}$$

$$\text{a. } Z = \frac{1}{jC\omega} ; Z' = \frac{R}{2} \text{ donne : } Y_{11} = \frac{1 + j\frac{R}{2}C\omega}{R - \frac{j}{C\omega}} = Y_{22} \text{ et } Y_{12} = \frac{-j\frac{R}{2}C\omega}{R - \frac{j}{C\omega}} = Y_{21}.$$

$$\text{b. } Z = R ; Z' = \frac{1}{2jC\omega} \text{ donne : } X_{11} = \frac{1 + 2jRC\omega}{2R(1 + jRC\omega)} = X_{22},$$

$$\text{et } X_{12} = \frac{-1}{2R(1 + jRC\omega)} = X_{21}.$$

$$\text{c. On passe de } X_{ij} \text{ à } Y_{ij} \text{ en échangeant } R \text{ et } \frac{1}{jC\omega}.$$

$$\text{d. La symétrie des cellules qui permet d'échanger (vu l'orientation) le rôle de l'entrée et de la sortie : } \left. \begin{array}{l} I_e = Y_{11}u_e + Y_{12}u_s \text{ devient } I_s = Y_{11}u_s + Y_{12}u_e \\ \text{or } I_s = Y_{22}u_s + Y_{21}u_e \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Y_{11} = Y_{22} \\ Y_{12} = Y_{21} \end{array}.$$

La matrice est symétrique ; dans les cas **1.a.** et **1.b.** en particulier.

$$\text{2.a. } I_s = I_{s1} + I_{s2} = Y_{21}U_e + X_{21}U_e \text{ (cf. } U_s = 0),$$

$$\Rightarrow \bar{S} = X_{21} + Y_{21},$$

$$\text{soit } \bar{S} = \frac{R^2 C^2 \omega^2 - 1}{2R(1 + jRC\omega)}, \text{ unité : } \Omega^{-1}.$$

$$\text{b.c. } |\bar{S}| = \frac{|R^2 C^2 \omega^2 - 1|}{2R\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} :$$

$$\bullet \omega \rightarrow 0 \quad \bar{S} \sim \frac{1}{2R}, 20 \log |\bar{S}| = -20 \log 2R ; \text{AN : } -86 \text{ dB.}$$

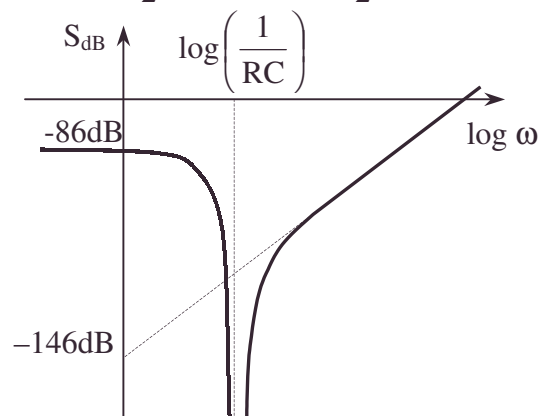
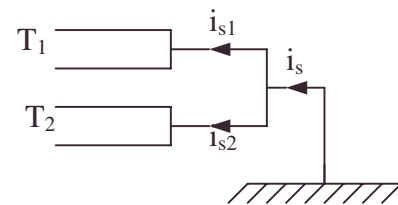
$$\bullet \omega \rightarrow \infty \quad \bar{S} \sim \frac{jC\omega}{2}, 20 \log |\bar{S}| = 20 \log \omega + 20 \log \frac{C}{2} ; \text{AN : } 20 \log \frac{C}{2} = -146 \text{ dB.}$$

• On vérifie physiquement :

• $\omega \rightarrow 0$: les capacités sont des coupures ; seule la résistance $2R$ subsiste entre entrée et sortie.

• $\omega \rightarrow \infty$: les capacités récupèrent le courant, on peut négliger le courant dans les résistances ; $i_{s2} \ll i_{s1}$. On n'a que les 2 capacités C entre entrée et sortie soit l'admittance $\frac{jC\omega}{2}$.

Le graphe confirme ces équivalents.



$$\text{3.a. } E = R_1(I_{e1} + I_{e2}) = R_1[(X_{11} + Y_{11})U_- + (Y_{12} + X_{12})U_s] ; \text{ or } U_- = 0 ;$$

$$G = \frac{1}{R_1(X_{12} + Y_{12})} = \frac{1}{R_1 \bar{S}} \text{ et } \left| \frac{U_s}{E} \right| = \frac{1}{R_1 |\bar{S}|}.$$

$$\text{b. Il faut } S = 0 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} ; \text{AN : } \omega_c = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Rétroaction

On a oublié les résistances de fuite des capacités qui provoquent une atténuation par consommation d'énergie. La saturation stoppera la croissance de u_s .

4.a. $I_{s_2} = -I_{e_1}$; $u_{s_2} = 0 = u_{e_1}$; $u_{e_2} = E$; $u_{s_1} = u_s$;

$$\left. \begin{array}{l} I_{e_1} = Y_{12} U_s \\ I_{s_2} = X_{12} E \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U_s}{E} = -\frac{X_{12}}{Y_{12}} = \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2} ; \left| \frac{U_s}{E} \right| = \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2}.$$

b. $U_s = \frac{E}{R^2 C^2 \omega^2}$ se transcrit : $\frac{d^2 u_s}{dt^2} = \frac{-1}{R^2 C^2} E$.

$u_s = -\frac{1}{R^2 C^2} \int (\int E dt) dt$; on a une "double intégration" de E par le montage.

c. Si on échange le rôle de R et de $\frac{1}{jC\omega}$ (cf. **1.c.**), on échange T_1 et T_2 et

$u_s = -EC^2 \omega^2 R^2$, soit $u_s = R^2 C^2 \frac{d^2 E}{dt^2}$ (si E est sinusoïdale).

On a une "double dérivation" de E par le montage de la figure 5 où on échange T_1 et T_2 .

6.1.3.2. Stabilité

1.1. On considère le montage de la figure 1 ; calculer, en régime linéaire et en supposant l'amplificateur opérationnel idéal (gain infini), le gain en tension

$G = \frac{V_s}{V_e}$ en fonction de R_1 et de R_2 .

2. L'approximation faite en supposant l'amplification infinie n'est en fait pas valable et la transmittance complexe A de l'amplificateur opérationnel est en

réalité : $A = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$; A_0 réel, $\omega_c = 2\pi f_c$.

Le schéma électrique équivalent de l'amplificateur opérationnel est alors donné par la figure 2.

On veut décrire le montage de la figure 1 par un schéma fonctionnel de principe donné en figure 3 et comportant une chaîne directe, caractérisée par le gain H, et une chaîne de retour, caractérisée par le gain β ; H et β peuvent prendre des valeurs complexes.

Compléter, sous forme de quadripôle, le schéma équivalent de la figure 2.

Déterminer H et β .

3.a. Mettre la transmittance complexe

$A' = \frac{V_s}{V_e}$ sous la forme $A' = \frac{A'_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega'_c}}$,

avec A'_0 réel. Donner les expressions littérales et les valeurs numériques de A'_0 et ω'_c .

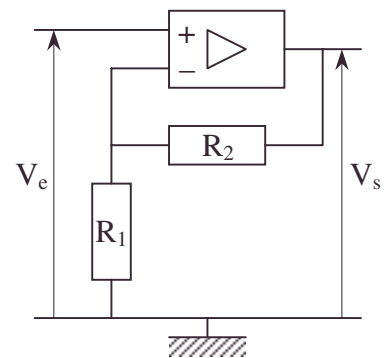


Figure 1

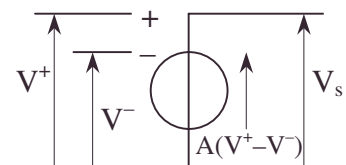


Figure 2

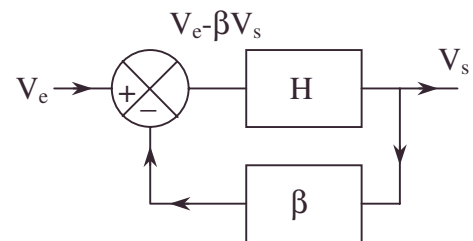


Figure 3

On prendra $A_0 = 10^5$, $f_c = 10$ Hz, $R_1 = 1$ k Ω , $R_2 = 99$ k Ω .

b. Montrer que, compte tenu des valeurs numériques, A'_0 ne dépend pratiquement que de R_1 et R_2 .

c. Tracer dans un système d'axes $G(f) = 20 \log |A|$ et $G' = 20 \log |A'|$ (diagramme de Bode). On précisera les droites asymptotes.

d. Quelle est la relation simple entre A_0 , f_c , A'_0 et f'_c ?
Quel est l'intérêt de ce montage ?

4. On applique à $t = 0$ la tension continue $V_e = 20$ mV et on se propose de déterminer $V_s(t)$; on suppose que $V_s(t) = 0$ pour $t < 0$.

a. Expliquer pourquoi, à votre avis, on peut obtenir l'équation différentielle vérifiée par $V_e(t)$ à partir de la relation linéaire entre V_e et V_s valable en régime sinusoïdal par substitution $j\omega V_s \rightarrow \frac{dV_s}{dt}$.

b. Déterminer la loi $V_s(t)$ et tracer le graphe correspondant.

II. On considère le montage de la figure 4 où, par rapport à la figure 1, les bornes + et - de l'amplificateur opérationnel ont été inversées.

1. De la même façon qu'en **I.2.** établir le schéma fonctionnel équivalent au montage de la figure 1 et représenté sur la figure 5.

On suppose que l'on a toujours, pour

$$\text{l'amplificateur opérationnel, } A = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}.$$

a. Préciser avec soin les grandeurs d'entrée et de sortie des chaînes directe et de retour et en déduire les relations entre H et H' d'une part, β et β' d'autre part.

b. Calculer le rapport $A'' = \frac{V_s}{V_e}$.

2. Donner la définition de la stabilité d'un système, et montrer que si $\frac{R_1 + R_2}{R_1} < A_0$ le

système de la figure 4 est instable.

Expliquer pourquoi la sortie ne peut alors prendre que les valeurs $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$ (V_{sat} est la tension de saturation de l'amplificateur opérationnel).

3. On se place dans le régime d'instabilité et on néglige le temps de passage de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$ ou de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$.

Tracer la courbe représentative de la fonction $V_s = f(V_e)$ pour $R_1 = 1$ k Ω , $R_2 = 1$ k Ω et $V_{\text{sat}} = 14$ V.

A quoi peut servir ce montage ?

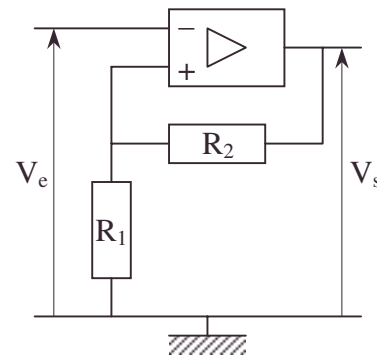


Figure 4

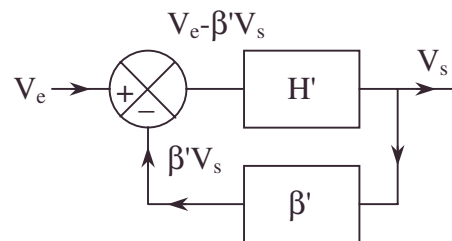


Figure 5

Mines ; Durée 1h

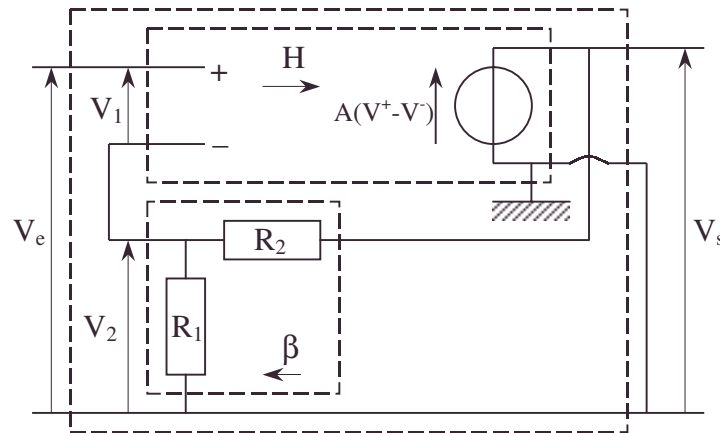
- chaîne de retour de rétroaction, chaîne directe [munie d'une chaîne de retour], condition initiale de tension de sortie, diagramme de Bode, diagramme de Bode asymptotique, graphe, inversion des bornes de l'amplificateur opérationnel, quadripôle, saturation d'un amplificateur opérationnel, stabilité

Corrigé

I.1. On applique la formule du pont diviseur de tension en $V_- = V_e$: $V_e = \frac{R_1 V_s}{R_1 + R_2}$

$$G = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

2.



L'identification avec le schéma fonctionnel donne : $H = A$ et comme

$$V_2 = \beta V_s = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \text{ (montage potentiométrique), on a } \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

On aurait pu trouver β et H par identification dans la formule de Black :

$$A' = \frac{V_s}{V_e} = \frac{A}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A} = \frac{H}{1 + \beta H}.$$

$$\text{3.a. Remplaçons } A : A' = \frac{\frac{A_0}{1 + \beta A_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c (1 + \beta A_0)}} = \frac{A'_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega'_c}} \Rightarrow A'_0 = \frac{A_0}{1 + \frac{R_1 A_0}{R_1 + R_2}};$$

$$\omega'_c = \omega_c \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A_0 \right); \text{ AN : } A'_0 = 100; \omega'_c = 63.10^3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{b. } A'_0 = \frac{1}{\frac{1}{A_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}}; \text{ or } \frac{1}{A_0} = 10^{-5}, \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10^{-2}; A'_0 \neq \frac{R_1 + R_2}{R_1} \text{ c.q.f.d.}$$

c. Asymptotes identiques :

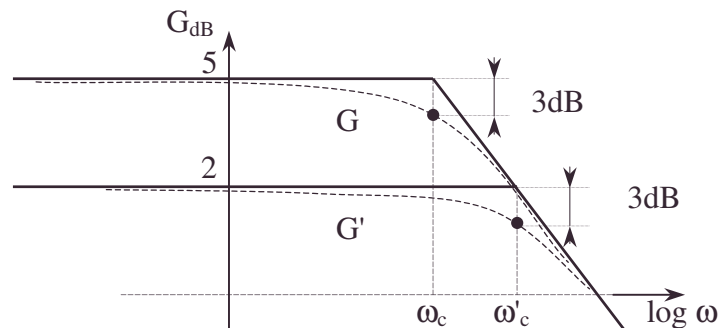
$$G = 20 \log A_0 \omega_c - 20 \log \omega;$$

$$G' = 20 \log A'_0 \omega'_c - 20 \log \omega.$$

d. $A_0 f_c = A'_0 f'_c$ car vu 3.a.

$$A'_0 \omega'_c = A_0 \omega_c.$$

Le produit gain passe-bande est constant. La contre réaction augmente la bande passante. On règle A'_0 à une valeur voulue (on perd en largeur de passante).



4.a. Utilisons la notation complexe $V_s = \underline{V}_s e^{j\omega t}$; $V_e = \underline{V}_e e^{j\omega t}$

et l'équation $V_s + \frac{1}{\omega_c'} \frac{dV_s}{dt} = A_0' V_e$ s'écrit $(\underline{V}_s + \frac{j\omega}{\omega_c'} \underline{V}_s) = A_0' \underline{V}_e$,

soit finalement $\underline{V}_s + j \frac{\omega}{\omega_c'} \underline{V}_s = A_0' \underline{V}_e$.

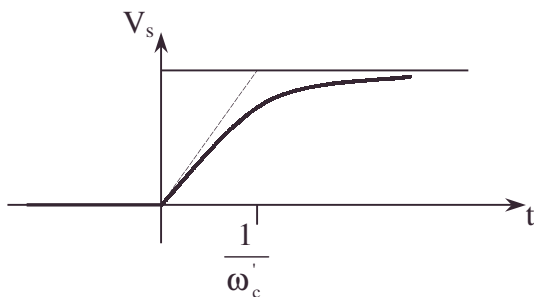
Il y a bijection (apparemment seulement) due à la notation complexe entre $\frac{dV_s}{dt}$ et $j\omega V_s$ et donc possibilité de substitution d'une forme par l'autre.

b. La solution de l'équation différentielle avec $V_e(t) = V_e H(t)$ est :

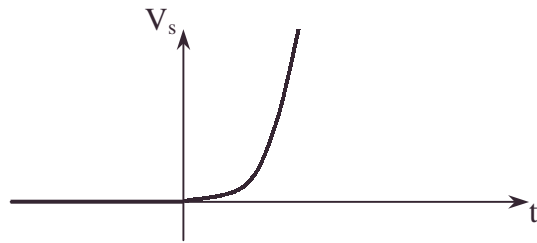
$$V_s(t) = A_0' V_e (1 - e^{-\omega_c' t}) H(t).$$

Soit $H(t)$ l'échelon de Heaviside : $H(t) = 0$ pour $t < 0$; $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$

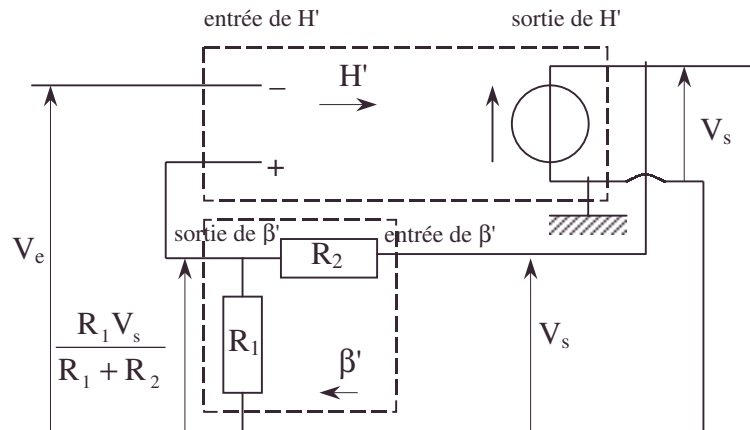
α. $1 + \beta A_0 > 0$



β. $1 + \beta A_0 < 0$



II.1.a. • β reste le même : $\beta' = \beta$.



• Le changement des bornes + et - change le signe de H dans la formule de

Black : $A' = \frac{-H}{1 - \beta H}$.

Conclusion :

$H' = -H$; $\beta' = +\beta$.

b. $A'' = \frac{-A}{1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} A} = \frac{A_0''}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c''}}$ avec $A_0'' = -\frac{A_0}{1 - \frac{R_1 A_0}{R_1 + R_2}}$;

• asymptote, bande passante, contre réaction, échelon de Heaviside, échelon de tension, graphe, produit gain bande passante

Rétroaction

$$\omega_c'' = \omega_c \left[1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} A_0 \right]$$

2.a. Un système est dit stable quand une perturbation sur l'entrée limitée dans le temps lui permet de retrouver une sortie nulle, un moment après la fin de la perturbation. (le système perturbé revient à son état de repos).

b. $V_s(t) = A_0 V_e H(t) (1 - e^{-\omega_c'' t})$ avec $\omega_c'' = \omega_c \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} A_0 \right)$ pour le régime

transitoire du type **I.4.** avec $A_0'' > 0$.

Si $\frac{R_1 + R_2}{R_1} < A_0$ alors $\omega_c'' < 0$ et $V_s(t)$ atteint la saturation et y demeure.

$e^{-\omega_c'' t}$ avec $\omega_c'' < 0$ croît avec t et $V_s(t)$ atteint $-V_{sat}$ si $V_e > 0$; $+V_{sat}$ si $V_e < 0$.

Remarque : on pourrait aussi raisonner sur une fonction créneau ou une impulsion.

3.a.

$$\begin{cases} \text{Si } V_s = +V_{sat} ; V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} = V_0 ; \text{AN : } V_0 = 7V. \\ \text{Si } V_s = -V_{sat} ; V_+ = -V_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } V_e < -V_0 ; \varepsilon = V_+ - V_e \leq \pm V_0 - V_e \text{ soit } \varepsilon > 0 \Rightarrow V_s = +V_{sat} \Rightarrow V_+ = +V_0. \\ \text{Si } V_e > V_0 ; \varepsilon \leq \pm V_0 - V_e \text{ soit } \varepsilon < 0 \Rightarrow V_s = -V_{sat} \Rightarrow V_+ = -V_0. \end{cases}$$

• Faisons croître V_e à partir d'une valeur inférieure à $-V_0$, $\varepsilon = +V_0 - V_e$ reste positif tant que $V_e < V_0$ alors $V_s = +V_{sat}$.

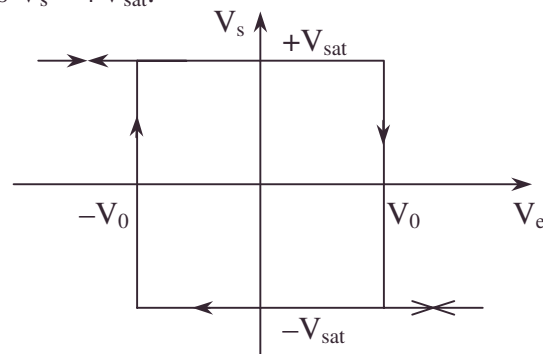
ε va changer de signe quand V_e croît au-delà de $+V_0$ alors $\varepsilon = -V_0 - V_e$ restera négatif pendant la croissance de V_e et alors $V_s = -V_{sat}$.

• Faisons décroître V_e à partir d'une valeur supérieure à $+V_0$, $\varepsilon = -V_0 - V_e$ reste négatif tant que $V_e > -V_0$ alors $V_s = -V_{sat}$.

ε va changer de signe quand V_e décroît au-dessous de $-V_0$ alors $\varepsilon = +V_0 - V_e$ restera positif pendant la décroissance de V_e et alors $V_s = +V_{sat}$.

On a le cycle d'hystérésis :

b. Usage : comparateur et ses dérivés.



6.1.3.3. Résistance différentielle négative Gyrateur

On étudie dans ce problème le fonctionnement et la mise en œuvre de circuits présentant le phénomène de résistance différentielle négative, c'est-à-dire tels que le

rapport $r = \frac{\Delta e}{\Delta i}$ des petites variations de tension et de courant autour d'un point de repos

soit négatif. Les amplificateurs opérationnels A.O. (figure 1a) intervenant dans les

- comparateur

divers montages auront des courants d'entrée i_1 et i_2 nuls et leur impédance d'entrée sera considérée comme infinie.

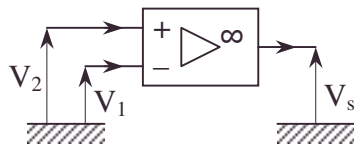


Figure 1a
Notations pour A.O.

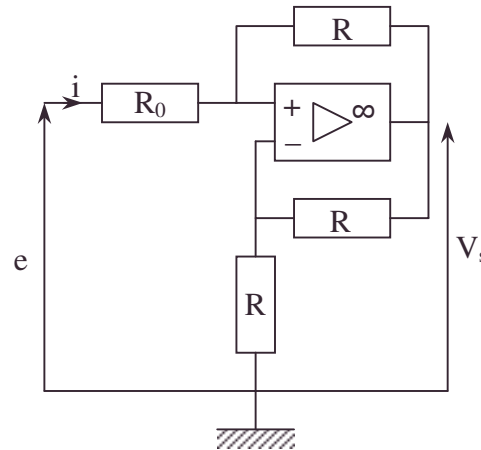


Figure 1b

Circuit pouvant exhiber $r = \frac{\Delta e}{\Delta i} < 0$

Première partie

Réalisation de circuits d'impédance différentielle négative

On considère d'abord que le gain des amplificateurs est infini ; dans ces conditions, le régime linéaire de fonctionnement se caractérise par $V_1 = V_2$; autrement, la tension de sortie est $V_s = \text{signe}(V_2 - V_1) \cdot E$ (régime dit de saturation, $E = 15 \text{ V}$ = tension de saturation).

1.1. Déterminer la relation $i(e)$ dans le circuit de la figure 1b, d'abord en régime linéaire, puis en régime de saturation. Pour quelles inégalités portant sur e , ce dernier régime est-il possible ? (Distinguer les cas, $V_s = \pm E$).

2. Représenter le graphe complet de la relation $i(e)$ lorsque $R_0 < R$, en précisant les points particuliers et les différents domaines de fonctionnement.

On considère maintenant que la tension de sortie des amplificateurs opérationnels s'exprime en fonction de la tension d'entrée par $V_s = A(V_2 - V_1)$, ou A est un nombre réel très grand devant 1. Les relations entre tensions et courants dans le circuit représenté sur la figure 2a (redessiné en 2b) sont linéaires et peuvent donc s'écrire, avec les conventions habituelles relatives aux grandeurs complexes décrivant le régime

harmonique :
$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$$
, soit en notation matricielle, $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$.

La matrice $[Y]$ ainsi introduite s'appelle matrice admittance.

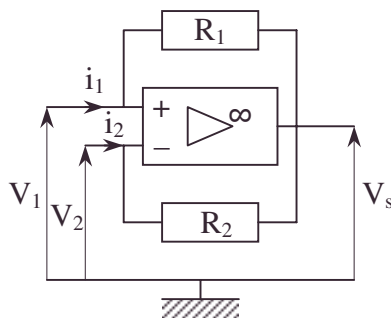


Figure 2a
Un circuit à A.O.

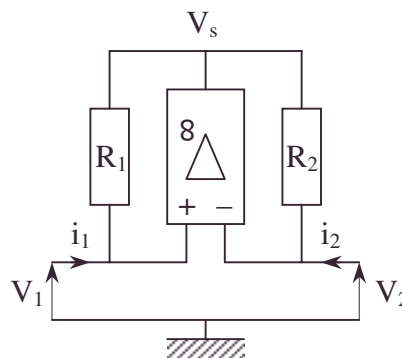


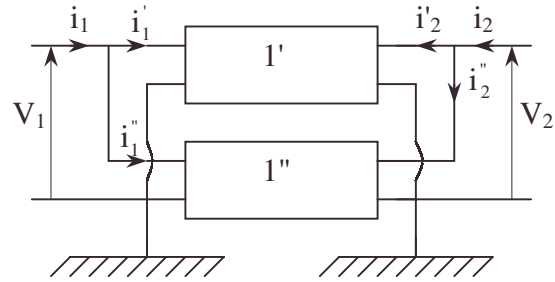
Figure 2b
Circuit 2a
présenté comme un quadripôle

Rétroaction

Remarquer que les courants sont comptés positivement quand ils entrent dans le quadripôle

3. Calculer la matrice $[Y]$ relative au circuit considéré.

4. Quelle est, dans le cas général, la matrice $[Y]$ relative à deux quadripôles de matrices admittances respectives $[Y']$ et $[Y'']$, montés en parallèle (c'est-à-dire en reliant ensemble leurs bornes homologues) ?



5. Calculer, pour le circuit de la figure 2, la matrice $[M]$ définie par $\begin{bmatrix} \underline{V_2} \\ \underline{I_2} \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} \underline{V_1} \\ \underline{I_1} \end{bmatrix}$.

Que devient cette relation lorsque A tend vers l'infini ? Quelle relation existe-t-il alors entre les grandeurs réelles V_1 et V_2 d'une part, i_1 et i_2 d'autre part ?

6. Soit $\underline{Z_1}$ l'impédance d'entrée du montage précédent, c'est-à-dire, comme indiqué à la figure 3a, l'impédance du dipôle entre la masse et la borne (1), lorsqu'on place une charge d'impédance complexe entre la masse et la borne (2). Soit de même $\underline{Z_2}$ l'impédance de sortie du montage de la figure 3b. Exprimer $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en fonction de R_1 , R_2 et Z .

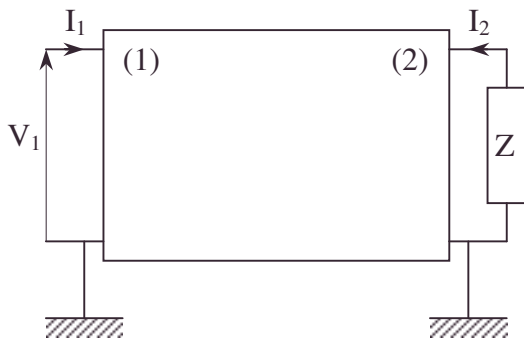


Figure 3a

Montage pour $\underline{Z_1}$ d'un quadripôle

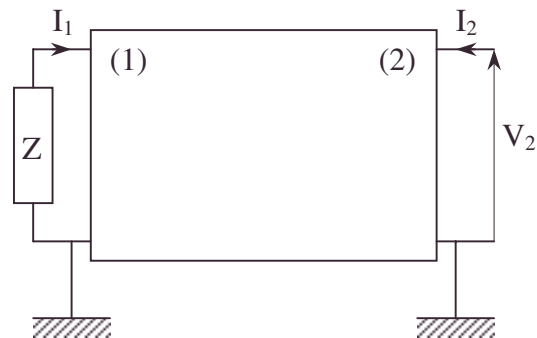


Figure 3b

Montage pour $\underline{Z_2}$ d'un quadripôle

7. On pose $K = \frac{R_1}{R_2}$. Donner l'expression des impédances $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en fonction de K

dans les deux cas suivants : $\underline{Z} = R$ d'une part, et $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ d'autre part, impédance capacitive.

Deuxième partie : réalisation d'un gyrateur

Un gyrateur est un quadripôle travaillant en régime linéaire sinusoïdal dont la matrice

admittance s'écrit : $\begin{bmatrix} \underline{I_1} \\ \underline{I_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{Y}{a} \\ aY & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V_1} \\ \underline{V_2} \end{bmatrix}$.

Les courants sont comptés positivement lorsqu'ils entrent dans le quadripôle, Y est une admittance réelle positive et a est un réel positif.

1. Quel est le rapport entre la puissance moyenne sortante et la puissance moyenne entrante ?
2. En déduire qu'un gyrateur fermé sur un composant qui ne consomme pas de puissance simule l'entrée un composant qui ne consomme pas non plus de puissance.
3. Que peut-on dire du quadripôle si a est strictement plus grand que l'unité?
4. Exprimer Z_1 , impédance d'entrée du gyrateur, en fonction de Z_μ impédance placée en sortie. Préciser ces expressions lorsque le quadripôle est fermé sur une inductance L , ou sur une capacité C . C'est plutôt sous cette dernière forme que le gyrateur est généralement utilisé. Quelle en est, selon vous, la raison?
5. On considère que dans le schéma de la figure 4, l'amplificateur fonctionne en régime linéaire. Déterminer la relation entre R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour que la matrice admittance du

quadripôle ainsi formé soit :
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_4} & 0 \end{bmatrix}.$$

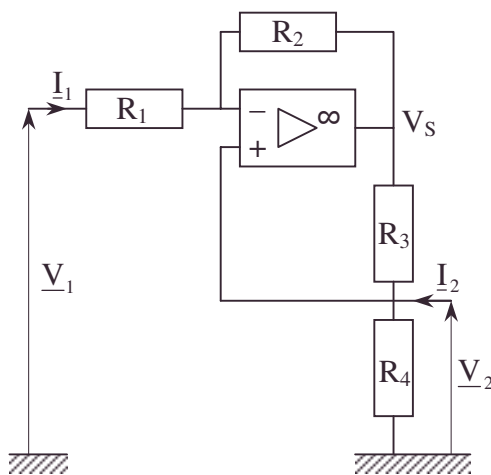


Figure 4

Schéma de la question II.5.

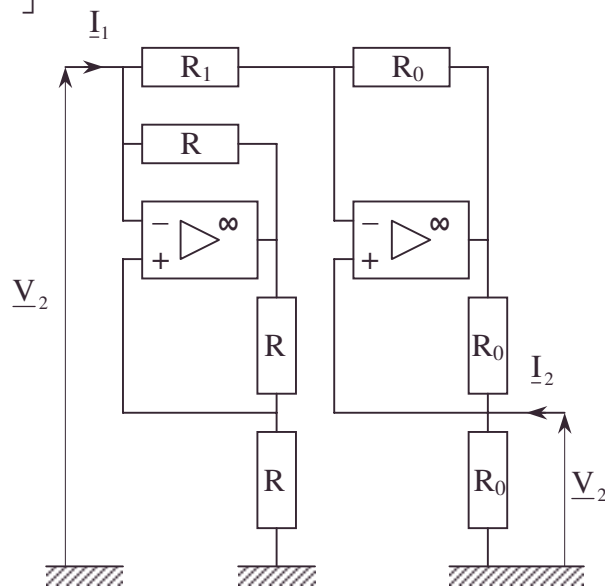


Figure 5

Une réalisation de gyrateur (question II.9.)

6. Représenter par ses éléments un quadripôle dont la matrice admittance est :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Représenter par ses éléments un quadripôle dont la matrice admittance est

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On utilisera à cet effet un amplificateur opérationnel, deux résistors de même résistance R et un résistor de résistance R_1 .

8. Comment brancher le quadripôle déterminé à la question 2.7. sur celui de la figure 4 pour obtenir un gyrateur ?

9. Avec le moins de calculs possible, montrer que le schéma de la figure 5 réalise un gyrateur et, toujours dans le cadre d'un régime de fonctionnement linéaire, donner les valeurs de Y et de a qui lui sont associées.

Troisième partie : utilisation du gyrateur

1. La figure 6 représente le gyrateur G de la figure 5 fermé sur l'association de R et C₂ montés en parallèle. Déterminer l'expression de la transmittance $\frac{V_s}{V_e}$ du filtre ainsi

réalisé (on pourra poser $\omega^2 = \frac{1}{R_1^2 C_1 C_2}$ et $Q = R C_2 \omega_0$. Qu'a-t-on ainsi simulé ?

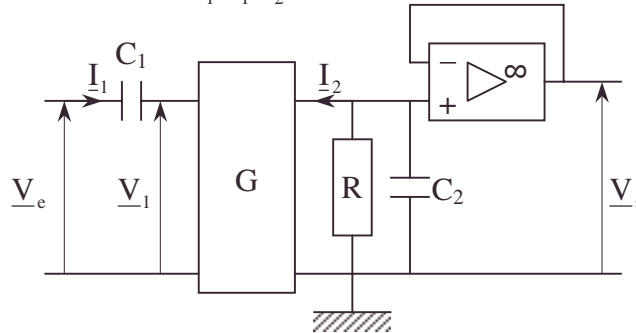


Figure 6 : filtre accordable utilisant un gyrateur

2. Quel est le rôle de l'amplificateur opérationnel en fin de montage ?

3. Donner l'expression de la fréquence d'accord, de la largeur de bande passante et du facteur de qualité de ce filtre, en fonction de la valeur de ses composants. Montrer que les réglages de la bande passante et de la fréquence d'accord sont indépendants l'un de l'autre.

Mines ; Durée : 1h30

Corrigé

$$\text{I.1. } V_- = \frac{V_s}{2} ; V_+ = \frac{\frac{e}{R_0} + \frac{V_s}{R}}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R}} = \frac{eR + V_s R_0}{R + R_0}, \text{ d'après le théorème de Millman.}$$

$$\text{a. Régime linéaire : } V_- = V_+ \Rightarrow e = \frac{V_s}{2R} (R - R_0) \Leftrightarrow V_s = \frac{2R}{R - R_0} e.$$

$$\text{La loi d'Ohm donne : } i = \frac{e - \frac{V_s}{2}}{R_0} = -\frac{e}{R - R_0}.$$

Son domaine d'existence est complémentaire du domaine d'existence de la saturation.

b. Régime de saturation :

$$\alpha. V_s = +E ; \text{ la loi d'Ohm donne : } i = \frac{e - E}{R_0 + R}.$$

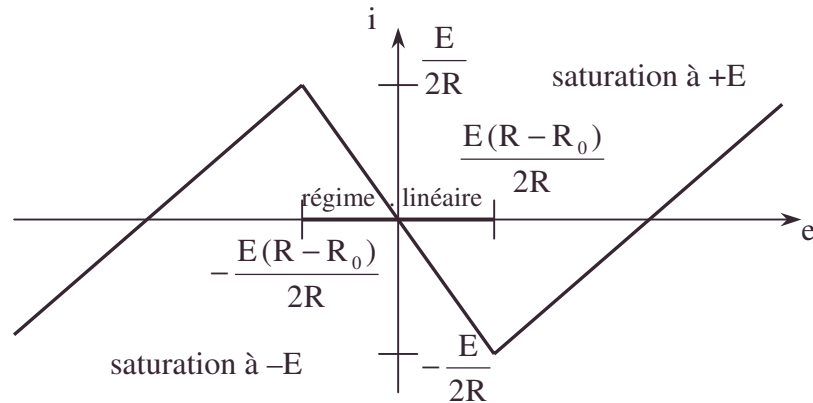
$$\text{Pour cela, } V_+ > V_- ; \frac{eR + ER_0}{R + R_0} > \frac{E}{2}, \text{ soit } e > \frac{E(R - R_0)}{2R}.$$

$$\beta. V_s = -E ; \text{ la loi d'Ohm donne } i = \frac{e + E}{R_0 + R}.$$

$$\text{Pour cela, } V_+ < V_- : \frac{eR - ER_0}{R + R_0} < -\frac{E}{2} ; e < -\frac{E(R - R_0)}{2R}.$$

• amplificateur opérationnel, bande passante, branchement d'un quadripôle, facteur de qualité [ou de surtension], identification, impédance, Millman [théorème de], quadripôle [branchement d'un], transmittance

2.



On lit sur le graphe :

$\frac{de}{di} < 0$ pour $-\frac{E(R - R_0)}{2R} < e < \frac{E(R - R_0)}{2R}$: résistance différentielle négative.

$\frac{de}{di} > 0$ pour $-\frac{E(R - R_0)}{2R} < e$ et $e > \frac{E(R - R_0)}{2R}$: résistance différentielle positive.

On a une discontinuité de $\frac{de}{di}$ pour $e = \pm \frac{E(R - R_0)}{2R}$.

3. i_1 associée à V_1 , vérifie la loi d'Ohm : $i_1 = \frac{V_1 - V_s}{R_1}$.

De même $i_2 = \frac{V_2 - V_s}{R_2}$ or $V_s = A(V_2 - V_1)$.

En régime sinusoïdal : $i_1 = V_1 \frac{(A+1)}{R_1} - \frac{A V_2}{R_1} \# \frac{A}{R_1} V_1 - \frac{A}{R_1} V_2$.

$i_2 = \frac{A}{R_2} V_1 - \frac{(A-1)}{R_2} V_2 \# \frac{A}{R_2} V_1 - \frac{A}{R_2} V_2$.

En notation complexe : $\underline{Y}_{11} = \frac{A}{R_1} = -\underline{Y}_{12}$; $\underline{Y}_{21} = \frac{A}{R_2} = -\underline{Y}_{22} \Rightarrow [\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{A}{R_1} & -\frac{A}{R_1} \\ \frac{A}{R_2} & -\frac{A}{R_2} \end{bmatrix}$.

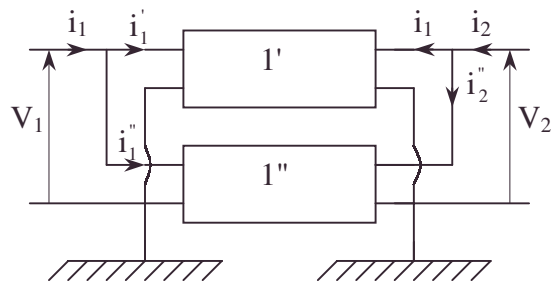
4. Soit le montage parallèle ci-contre :

La loi des nœuds s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}''_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \left[[\underline{Y}'_{ij}] + [\underline{Y}''_{ij}] \right] \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow [\underline{Y}_{ij}] = [\underline{Y}'_{ij}] + [\underline{Y}''_{ij}].$$



5.a. $\underline{I}_1 = \frac{A}{R_1} \underline{V}_1 - \frac{A}{R_1} \underline{V}_2 \Rightarrow \underline{V}_2 = \underline{V}_1 - \frac{R_1}{A} \underline{I}_1$.

$\underline{I}_2 = \frac{A}{R_2} \underline{V}_1 - \frac{A}{R_2} \underline{V}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{A}{R_2} \underline{V}_1 - \frac{A}{R_2} \left(\underline{V}_1 - \frac{R_1}{A} \underline{I}_1 \right) = \frac{R_1}{R_2} \underline{I}_1 = K \underline{I}_1$.

$$\underline{M}_{11} = 1 ; \underline{M}_{12} = -\frac{R_1}{A} \neq 0 ; \underline{M}_{21} = 0 ; \underline{M}_{22} = \frac{R_1}{R_2} = K \Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R_1}{A} \\ 0 & \frac{R_1}{R_2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{b.c. } A \rightarrow \infty ; \underline{M}_{11} = 1 ; \underline{M}_{12} = 0 ; \underline{M}_{21} = 0 ; \underline{M}_{22} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R_1}{R_2} \end{bmatrix}.$$

Soit $V_2 = V_1$; $i_2 = Ki_1$; conservation des d.d.p. ; multiplication par une constante du courant.

6.7.a.

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_1 - \frac{R_1}{A} \underline{I}_1 ; \underline{I}_2 = K \underline{I}_1 ; \underline{V}_2 = -\underline{Z} \underline{I}_2 \Rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} = \frac{-\underline{Z} K \underline{I}_1 + \frac{R_1}{A} \underline{I}_1}{\underline{I}_1} = \frac{R_1}{A} - \underline{Z} K$$

A étant grand $\underline{Z}_1 \neq -\underline{Z} K$ soit $\underline{Z}_1 = -\frac{R_1}{R_2} \underline{Z}$.

Si $\underline{Z} = R$, $\underline{Z}_1 = -KR < 0$; si $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$, $\underline{Z}_1 = \frac{jK}{C\omega}$ (type inductif).

On a un convertisseur d'impédance (négatif).

$$\text{b. } \underline{V}_2 = \underline{V}_1 - \frac{R_1}{A} \underline{I}_1 \text{ or } \underline{V}_1 = -\underline{Z} \underline{I}_1 ; \underline{Z}_2 = \frac{\underline{V}_2 \underline{I}_1}{\underline{I}_1 \underline{I}_2} = \frac{-\left[\underline{Z} + \frac{R_1}{A}\right]}{K} \neq -\frac{\underline{Z}}{K},$$

soit $\underline{Z}_2 = -\frac{R_1}{R_2} \underline{Z}$.

Si $\underline{Z} = R$, $\underline{Z}_2 = -\frac{R}{K} < 0$; si $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$, $\underline{Z}_2 = \frac{j}{KC\omega}$ (type inductif).

$$\text{II.1. } P_{\text{entrante}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\underline{I}_1 \underline{V}_1^*] = -\frac{1}{2} \frac{Y}{a} \text{Re}[\underline{V}_2 \underline{V}_1^*].$$

$$P_{\text{sortante}} = -\frac{1}{2} \text{Re}[\underline{I}_2 \underline{V}_2^*] = -\frac{1}{2} a Y \text{Re}[\underline{V}_1 \underline{V}_2^*] \text{ or } \text{Re}[\underline{V}_2 \underline{V}_1^*] = \text{Re}[\underline{V}_1 \underline{V}_2^*].$$

$$\frac{P_{\text{sortante}}}{P_{\text{entrante}}} = a^2.$$

2. Si $P_{\text{sortante}} = 0$; $P_{\text{entrante}} = 0$.

3. Si $a > 1$ $P_{\text{sortante}} > P_{\text{entrante}}$ nécessité d'une source d'énergie (alimentation) pour un ampli de puissance.

$$\text{4. } \underline{I}_1 = -\frac{Y}{a} \underline{V}_2 ; \underline{I}_2 = a Y \underline{V}_1 ; \underline{V}_2 = -\underline{Z}_\mu \underline{I}_2.$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_2} + \frac{\underline{I}_2}{\underline{V}_2} \frac{\underline{V}_2}{\underline{I}_1} = \frac{1}{a Y \left(-\frac{Y}{a}\right) (-\underline{Z}_\mu)} = \frac{1}{\underline{Z}_\mu Y^2}.$$

Si $\underline{Z}_\mu = jL\omega$, $\underline{Z}_1 = -\frac{j}{Y^2 L\omega}$ (type capacitif).

Si $\underline{Z}_\mu = \frac{1}{jC\omega}$, $\underline{Z}_1 = \frac{jC\omega}{Y^2}$ (type inductif).

Cette dernière forme est généralement employée car L est plus cher et plus encombrant que C.

5. D'après la figure 4, $V_+ = V_2$; la loi d'Ohm permet d'écrire :

$$V_1 - V_- = R_1 i_1 ; V_+ = V_- \Rightarrow i_1 = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} \Rightarrow \underline{Y}_{11}' = \frac{1}{R_1} ; \underline{Y}_{12}' = -\frac{1}{R_1} ;$$

La loi des nœuds permet d'écrire : $i_2 = \frac{V_2}{R_4} + \frac{V_2 - V_s}{R_3}$;

$$\text{or } V_s - V_1 = -(R_1 + R_2) i_1 = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1} (V_1 - V_2) \Rightarrow V_s = V_1 - \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} (V_1 - V_2) .$$

$$i_2 = V_2 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{1}{R_3} \left[V_1 - (R_1 + R_2) \left(\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} \right) \right] .$$

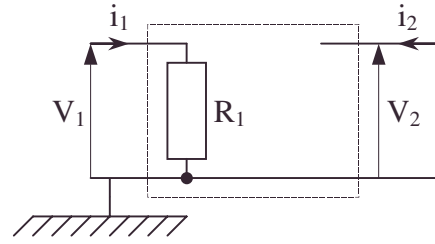
$$i_2 = V_2 \left[\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3} \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} \right] - \frac{V_1}{R_3} \left[1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right] = \frac{R_2}{R_1 R_3} V_1 + V_2 \left[\frac{1}{R_4} - \frac{R_2}{R_1 R_3} \right] .$$

$$\underline{Y}_{22}' = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{R_4 R_1 R_3} = 0 \Rightarrow R_2 R_4 = R_1 R_3 \Rightarrow \underline{Y}_{21}' = \frac{R_2}{R_1 R_3} = \frac{1}{R_4} .$$

La relation demandée est $R_2 R_4 = R_1 R_3$.

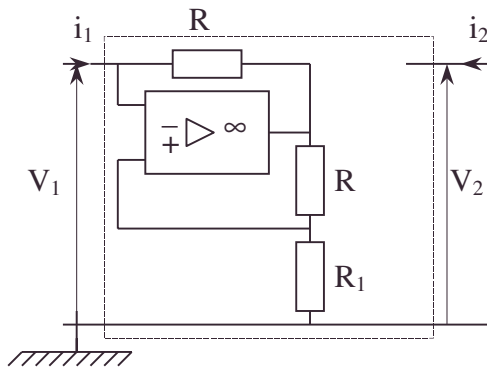
6. $i_1 = \frac{V_1}{R_1}$; $i_2 = 0$ est vérifié pour le

$$\text{quadripôle ci-contre : } [\underline{Y}_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$



7. Pour remplacer R_1 par $-R_1$, il suffit d'utiliser **I.6.** avec $R_1 = R_2 = R$, $\underline{Z} = R_1$ et la figure **2.b.** complétée par **3.a.** est donnée ci-contre.

$$[\underline{Y}_{ij}''] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$



8. Pour obtenir $Y_{11} = 0$ il suffit d'avoir

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{11}' + \underline{Y}_{11}'' = \frac{1}{R_1} + \left(-\frac{1}{R_1} \right) = 0$$

soit un montage en parallèle des quadripôles des questions 6. et 7. [cf. **I.3.b.**],

9. On retrouve la figure 4 dans le montage de la figure 5 avec $R_2 = R_3 = R_0$ et $R_4 = R_1$ ce qui assure la condition de **II.5.** : $R_1 R_0 = R_0 R_1$

$$\bullet [\underline{Y}_{ij}] = [\underline{Y}'_{ij}] + [\underline{Y}''_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

L'identification avec la matrice admittance d'un gyrateur donne :

$$\frac{Y}{a} = \frac{1}{R_1} ; aY = \frac{1}{R_1} \Rightarrow Y = \frac{1}{R_1} ; a = 1. \text{ On a donc un gyrateur.}$$

III.1. La matrice admittance du gyrateur impose $\underline{I}_1 = -\frac{\underline{V}_2}{R_1}$ (cf. $Y = \frac{1}{R_1}, a = 1$) et

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_1}{R_1} ; \text{ on remarquera } \underline{V}_2 = \underline{V}_s ;$$

$$\text{D'autre part, } \frac{1}{\underline{Z}_\mu} = \frac{1 + jRC_2\omega}{R} \text{ (cf. } R // C_2) \Rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{1}{Y^2 \underline{Z}_\mu} = \frac{R_1^2}{R} (1 + jRC_2\omega), \text{ vu le}$$

$$\text{gyrateur ; la loi d'Ohm donne } \underline{V}_e = \underline{V}_1 + \frac{\underline{I}_1}{jC_1\omega}.$$

$$\text{Eliminons } \underline{V}_1 \text{ et } \underline{I}_1 \text{ car } \underline{I}_1 = -\frac{\underline{V}_2}{R_1} \text{ et } \underline{V}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = -\underline{Z}_1 \frac{\underline{V}_2}{R_1} ;$$

$$\underline{V}_e = -\underline{Z}_1 \frac{\underline{V}_2}{R_1} - \frac{\underline{V}_2}{jR_1 C_1 \omega} = -\underline{V}_s \left[\frac{R_1}{R} (1 + jRC_2\omega) + \frac{1}{jR_1 C_1 \omega} \right].$$

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{1}{\frac{R_1}{R} \left[1 + j \left(RC_2\omega - \frac{R}{R_1^2 C_1 \omega} \right) \right]} = -\frac{\frac{R}{R_1}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

$$\text{avec } \frac{Q}{\omega_0} = RC_2, Q\omega_0 = \frac{R}{R_1^2 C_1} \text{ soit } \omega_0^2 = \frac{1}{R_1^2 C_1 C_2} \text{ et } Q = \frac{R^2 C_2}{R_1^2 C_1}.$$

On a simulé un filtre passe bande réalisé habituellement par un circuit R', L', C'_1 en série.

2. L'A.O. suiveur permet de rendre $V_2 = V_s$ indépendant de la charge.

$$\textbf{3.} \text{ La fréquence d'accord } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 \sqrt{C_1 C_2}} ;$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC_2} ; Q^2 = \frac{R^2 C}{R_1^2 C_1}.$$

On règle $\Delta\omega$ par action de R, C_2 puis f_0 par action sur R_1 et C_1 indépendamment.

6.1.3.4. Oscillateur sinusoïdal

Voir page 940.

6.1.3.5. Oscillateur à transistors

Voir page 973.

6.1.3.6. Automatique

Voir page 1127.

• filtre passe-bande, identification

6.1.4. Filtres

Appartient aux programmes de PCSI, PTSI, PT, MP, TSI1 et 2

6.1.4.1. Gabarit de filtre passe-bas

L'étude en 4 parties qui suit est relative aux filtres passe-bas. La partie **D.** est indépendante des 3 autres.

Le régime sera harmonique.

Les grandeurs instantanées seront notées par des lettres minuscules (ex. i pour intensité, v pour tension...)

La notation complexe sera systématique, l'amplitude complexe associée à v sera notée \underline{V} (majuscule soulignée).

Les grandeurs non soulignées seront des modules $V = |\underline{V}|$.

La pulsation des grandeurs sinusoïdales est $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence.

Un filtre est un système capable de séparer des signaux utiles d'autres signaux considérés comme indésirables.

A. Quelle est, selon vous, l'allure de la courbe traduisant le gain en décibels ($G_{dB} = 20 \log \left| \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \right|$) d'un filtre passe-bas idéal en fonction de la fréquence ? (Figure 1).



Figure 1

Comment définiriez-vous dans ce cas, les termes "bande passante" et "bande atténuée" ? Quelle devrait être la valeur du déphasage introduit par un filtre idéal dans la "bande passante" ?

B. Dipôle R – C (cf. Figure 2).

1. En utilisant la variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

exprimer $\underline{T}_B = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$ ainsi que $\varphi_B = \arg \underline{T}_B$ en

fonction de x .

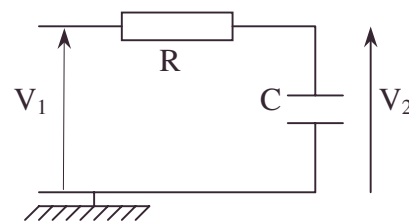


Figure 2

Donner l'allure des courbes donnant $G_B(dB) = 20 \log |\underline{T}_B|$ en fonction de $\log x$, ainsi que φ_B en fonction de la même variable.

On précisera les caractéristiques des directions asymptotiques ; on indiquera clairement la "bande passante" à -3 dB et la "bande atténuée".

On indiquera la valeur de la pente de la direction asymptotique en dB/décade dans la "bande atténuée".

Ce filtre est-il idéal ?

2. On souhaite imposer un "gabarit" au filtre, c'est-à-dire les conditions suivantes (qui seront toujours les mêmes par la suite, chaque fois qu'il sera question du "gabarit") :

1. Bande passante à -3 dB limitée à la valeur $x = x_p = 1$, on a donc :

$$0 \leq x \leq x_p \Leftrightarrow 0 \geq G(dB) \geq G(x_p) = G_p = -3dB.$$

2. Dans la bande atténuée, le comportement de G aux hautes fréquences obéit à

Filtres

l'inégalité : $x \geq x_a = 2x_p = 2 \Leftrightarrow G(\text{dB}) \leq G(x_a) = G_a \leq -10\text{dB}$.

3. La valeur $x = x_p = 1$ correspond à la fréquence $f_0 = 1000 \text{ Hz}$.

a. Quelle valeur de R la condition 3. du gabarit impose-t-elle pour $C = 20 \text{ nF}$?
Le dipôle RC peut-il satisfaire à l'ensemble des autres conditions du gabarit ?

b. En réalité ce filtre est inséré entre une source et une charge de conductance g (cf. Figure 3).

Calculer $T_B = \frac{V'_2}{V'_1}$ puis $G'_B(\text{dB}) = 20 \log(T_B)$

Peut-on satisfaire au "gabarit" souhaité en adoptant pour R et C les valeurs données ou calculées précédemment ?

Quel défaut systématique présente ce montage ?

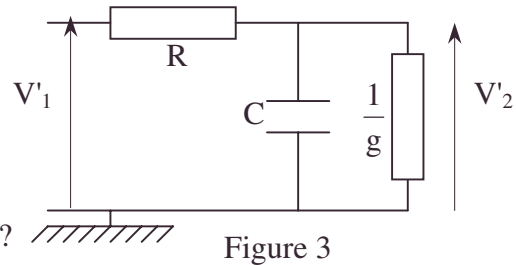


Figure 3

C. L'utilisation d'un amplificateur opérationnel (désigné par A.O.) permet entre autres choses d'éliminer le défaut précédent : on réalise donc les 2 montages suivants notés (1) et (2) (cf. figures 4 et 5).

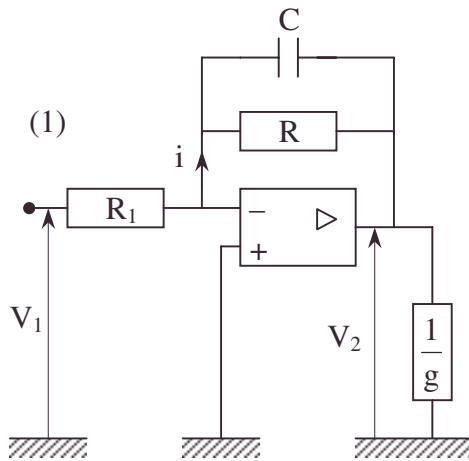


Figure 4

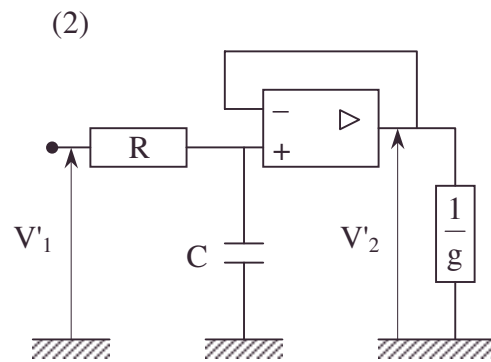


Figure 5

Dans ces schémas, on adopte pour l'A.O. le modèle "idéal" représenté figure 6 dans lequel les dérives sont négligées, la résistance d'entrée infinie, le coefficient d'amplification μ_0 en boucle ouverte infinie, la résistance de sortie ρ nulle.

On donne : $C = 20 \text{ nF}$;

$$\frac{1}{g} = 10\text{k}\Omega.$$

Les fréquences utilisées ne dépasseront pas 2000 Hz compte tenu du "gabarit" souhaité.

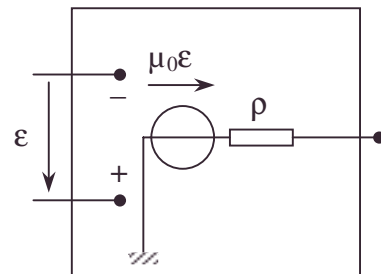


Figure 6

1. Calculer les fonctions de transfert $H_1(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ et $H_2(j\omega) = \frac{V'_2}{V'_1}$.

Vérifier que le défaut du montage de la figure 3 est effectivement éliminé. Quelle est la propriété fondamentale de l'amplificateur opérationnel qui assure ce résultat ?

• charge de circuit, coefficient d'amplification en boucle ouverte, conductance électrique[inverse de résistance], défauts systématiques de filtre passe bas, fonction de transfert, gabarit

On utilisera par la suite des expressions de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 dans lesquelles figurera la variable sans dimension $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. En déduire $G_i(\text{dB}) = 20 \log |\underline{H}_i(j\omega)|$ ($i = 1, i = 2$).

2. Peut-on satisfaire au "gabarit" souhaité avec l'un ou l'autre des 2 montages figure 4 ou figure 5 ? Calculer R_1 dans le montage figure 4 si la bande passante du gabarit est respectée. Quelle est la différence entre les deux montages ?

3. Comment devrait être à votre avis modélisé le système actif permettant de réaliser le dit "gabarit" ? L'explication doit porter uniquement sur l'ordre de la fonction de transfert du système bouclé $\underline{H}(j\omega)$. On ne demande donc pas a priori de schéma électrique.

4. En supposant l'A.O. parfait dans le schéma de la figure 7, (c'est-à-dire μ_0 infini, $\rho = 0$, $\varepsilon = 0$), montrer que le montage permettrait de réaliser le "gabarit" limite souhaité. Calculer C_1 et C_2 si $R = 10\text{k}\Omega$, toujours pour $f_0 = 1000 \text{ Hz}$.

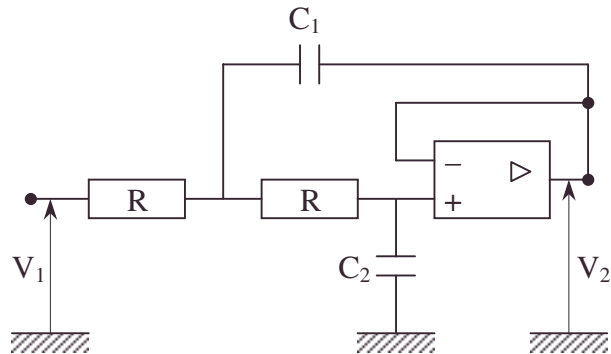


Figure 7

D. On utilise aussi des filtres passe-bas passifs chargés par leur impédance caractéristique (Figure 8).

Le filtre est placé entre les bornes AB et MN. On charge ce filtre (entre M et N) par une impédance \underline{Z}_C de telle sorte que le dipôle AB obtenu soit équivalent à \underline{Z}_C ;

\underline{Z}_C est appelé impédance caractéristique.

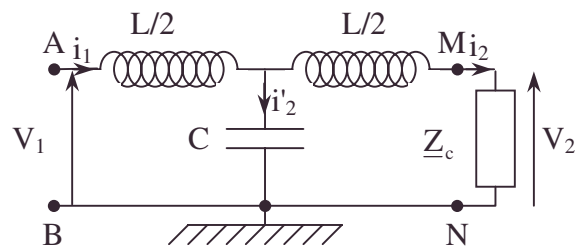


Figure 8

1. Calculer \underline{Z}_C^2 en fonction de L , C et ω . Vérifier qu'il existe une pulsation ω_c qui sépare le domaine des pulsations où \underline{Z}_C est modélisable par une résistance R_C , du domaine des pulsations où \underline{Z}_C est modélisable par une réactance X_C .

Que vaut ω_c en fonction de L et de C ?

2. Calculer $\underline{T}_D = \frac{V_2}{V_1}$.

3. On considère le domaine des pulsations où $\underline{Z}_C = R_C$. Montrer que \underline{T}_D est un nombre complexe de module 1. Est-ce le domaine bande passante ou bande atténuée du filtre ? Calculer $\varphi_D = \arg \underline{T}_D$. Tracer sommairement $\varphi_D = f(\omega)$.

Indiquer quelle serait la variation de ce même déphasage pour un filtre idéal.

4. On considère le domaine des pulsations pour lequel $\underline{Z}_C = jX_C$.

Quel est le signe de X_C ? Justifier.

Est-ce le domaine bande passante ou bande atténuée du filtre ?

Montrer que \underline{T}_D est un nombre complexe de module variable avec la fréquence et d'argument égal à π .

• bande passante, charge de circuit, déphasage pour un filtre idéal., filtre passe-bas, gabarit, graphe, impédance caractéristique, ordre d'une fonction de transfert

Filtres

5. En déduire l'allure générale de la courbe $G_D(\text{dB}) = 20 \log |\underline{T}_D|$ en fonction de $\log x = \log \frac{\omega}{\omega_c}$ (dans tout le domaine de fréquences).

6. En utilisant le comportement de \underline{Z}_C pour les fréquences $\omega = 0$, $\omega = \omega_c$ et $\omega \rightarrow \infty$, quel montage suggérez-vous pour réaliser l'impédance caractéristique \underline{Z}_C ?

Centrale ; Durée 2h

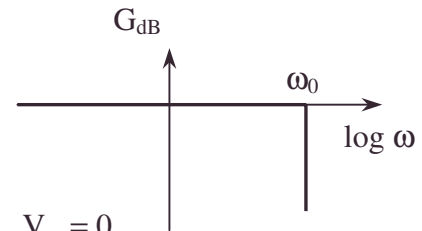
Corrigé

A.a. Un filtre passe-bas idéal :

b. La bande passante $[0, \omega_0]$ correspond au passage intégral $\underline{H} = 1$.

c. La bande atténuée $[\omega_0, \infty]$ correspond à l'extinction $\underline{V}_2 = 0$.

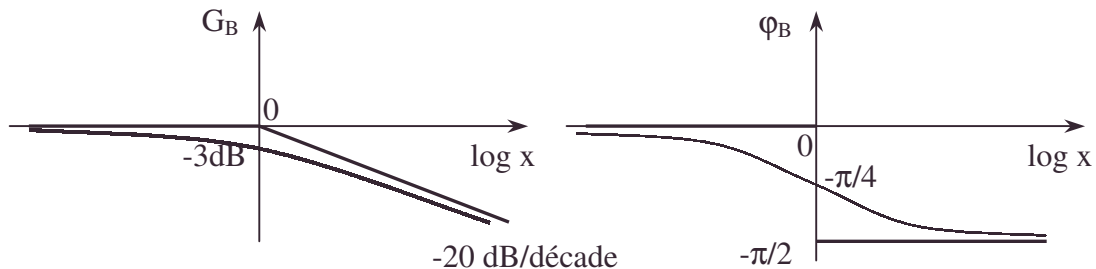
d. $\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \quad \forall \omega \in [0, \omega_0]$.



B.1.a. D'après la formule du pont diviseur $V_2 = \frac{-\frac{j}{C\omega}}{R - \frac{j}{C\omega}} V_1 \Rightarrow \underline{T}_B = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$;

$\varphi_B = -\arctan x$; $G_{B(\text{dB})} = -10 \log(1+x^2)$.

b.



Ainsi, la "bande passante" est $[0, \omega_0]$ et la "bande atténuée" $[\omega_0, +\infty]$.

c. Le filtre n'est pas idéal (cf. A.)

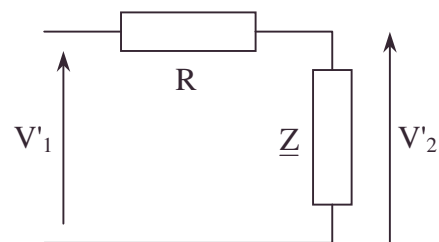
B.2.a. $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi f_0 C}$; AN : $R = 7958 \Omega$.

Le dipôle satisfait alors aux conditions 1 et 3 mais pas à 2 car $G(2) = -7\text{dB} > -10\text{dB}$.

b. $\underline{V}'_2 = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \underline{V}'_1$, cf. potentiomètre

avec $\underline{Z} = \frac{1}{g + jC\omega}$.

$\underline{T}'_B = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}}} = \frac{1}{1 + Rg + jRC\omega} = \frac{1}{1 + Rg + jx}$.



$G'_{\text{dB}} = -10 \log (x^2 + (1+Rg)^2)$.

– La condition 1 n'est pas satisfaite ; $G_p = -10 \log(2 + R^2g^2 + 2Rg) < -3$.

– La condition 2 : $G_a = -10 \log(5 + 2Rg + R^2g^2) < -10$ est possible pour les valeurs suffisamment grandes de g tel que $R^2g^2 + 2Rg > 5$.

• bande atténuée [filtre], bande passante, diagramme de Bode, identification, impédance caractéristique, pont diviseur de tension, potentiomètre

– La condition 3 n'est plus satisfaite avec les valeurs $C = 20\text{nF}$, $R = 7958\ \Omega$; pour $g \neq 0$.
Le gabarit n'est pas satisfait.

Le défaut systématique : la charge g intervient dans G (la bande passante en dépend) :

$$\omega_0' = \frac{1}{RC(1+R_g)}.$$

$$\text{C.1.a. } \underline{H}_1 = \frac{-\underline{Z}'i}{R_1 i} \text{ avec } \underline{Z}' = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}} \Rightarrow \underline{H}_1 = -\frac{R}{R_1} \frac{1}{1+jx}; \tan \arg \underline{H}_1 = +x.$$

$$\text{b. } \underline{V}'_2 = V_+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}'_1 \text{ cf. potentiomètre (cf. B.)};$$

$$\underline{H}_2 = \frac{1}{1+jx} : \text{on constate ici l'intérêt du montage suiveur qui isole le quadripôle du B.}$$

de la charge g . $\tan \arg \underline{H}_2 = -x$.

c. Le défaut systématique (la dépendance de g) est supprimé. L'écriture des équations précédentes a été possible vu $i_+ = 0$ car on a une résistance d'entrée infinie pour l'A.O.

$$\text{d. } G_1 = 20 \log \frac{R}{R_1} - 10 \log (1+x^2); G_2 = -10 \log (1+x^2).$$

C.2.a. Le montage de la figure 5 ne peut satisfaire au gabarit par analogie avec **B.2.a.**. Pour satisfaire $G_p = -3$ pour $x_p = 1$ (cf. condition 1), le montage de la figure 4 nécessite $\frac{R}{R_1} = 1$, alors $G_1 = -10 \log (1+x^2)$ et la condition 2 ne peut être satisfaite (cf. **B.2.a.**).

Les 2 montages ne peuvent satisfaire le gabarit.

$$\text{b. } G_p = -3 \text{ pour } x = 1 \Rightarrow R_1 = R; R \text{ correspond à } f_0 = 1000 \text{ Hz, } R_1 = 7958\ \Omega.$$

Il n'y a donc pas de différence entre les 2 montages, puisque $20 \log \frac{R}{R_1} = 0$, en ce qui

concerne G mais il y a un décalage de π sur les phases à cause de $-\frac{R}{R_1}$ qui est négatif.

(cf. **C.1.a.** et **b.**).

C.3. Il y a 4 relations ou inégalités à satisfaire \Rightarrow 4 paramètres au moins, dans un cadre polynomial associé à la notion d'ordre.

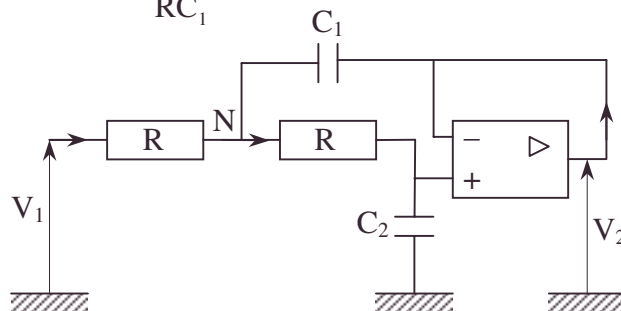
$$G = -10 \ln (ax^3 + bx^2 + cx + d).$$

Or $G = -10 \log |\underline{H}|^2$; ainsi H est d'ordre $3/2$ au moins.

Remarque :

si on veut prendre un ordre entier, on prendra 2 (cf. équation bicarrée et **C.4.**).

C.4. Posons $x = RC_1\omega \Rightarrow \omega = \frac{x}{RC_1}$. Appliquons le théorème de Millman.



• bande passante, charge de circuit, défauts systématiques de filtre passe bas, gabarit, Millman [théorème de], montage suiveur, potentiomètre

$$\text{a. en N : } \underline{V}_N = \frac{\frac{V_1}{R} + \frac{V_-}{R}}{\frac{2}{R} + jC_1\omega} = \frac{V_1 + V_2}{2 + jx} \text{ avec } \underline{V}_- = \underline{V}_2.$$

$$\text{b. en } V_+ : \underline{V}_+ = \underline{V}_2 = \frac{\frac{1}{jC_2\omega} \underline{V}_N}{R + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{\underline{V}_N}{1 + jRC_2\omega} = \frac{\underline{V}_N}{1 + j\frac{C_2}{C_1}x}.$$

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 = \underline{V}_2 \left(1 + j\frac{C_2}{C_1}x \right) (2 + jx) ; \underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{C_2}{C_1}x^2 + 2j\frac{C_2}{C_1}x}.$$

$$G = -10 \log \left[\left(1 - \frac{C_2}{C_1}x^2 \right)^2 + 4 \frac{C_2^2}{C_1^2}x^2 \right] ;$$

$$G(1) : x_p = 1 ; G_p = -3 \Rightarrow \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right)^2 + 4 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{1 + \sqrt{6}}{5} ;$$

$$G(3) : x = 1 \Rightarrow RC_1 = \frac{1}{2\pi f_0} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2\pi f_0 R} ; \text{AN : } C_1 = 15,9 \text{ nF} ; C_2 = 11 \text{ nF}.$$

$$G(2) : x_a = 2 ; G_a = -10,3 \leq -10.$$

On vérifie alors que le gabarit est satisfait pour les conditions 1, 2, 3.

$$\text{D.1.a. } Z_{AB} = j\frac{L}{2}\omega + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{Z_C + j\frac{L}{2}\omega}} = Z_C \Rightarrow Z_C^2 = \frac{L}{C} \left(1 - \frac{LC\omega^2}{4} \right).$$

$$\text{b. } \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} ; Z_C^2 = \frac{L}{C} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right).$$

$$\text{Si } \omega > \omega_c ; Z_C^2 < 0 ; \text{ on a une réactance } Z_C = jX_C \text{ avec } X_C = \pm \sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1 \right)} ;$$

$$\text{Si } \omega < \omega_c ; Z_C = \pm \sqrt{\frac{L}{C} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)} \in \mathbb{R} , Z_C \text{ est modélisable par une résistance si le signe}$$

est +. Le signe – nécessiterait un gyrateur avec son alimentation.

D.2. $\underline{V}_1 = \underline{Z}_C \underline{i}_1$; $\underline{V}_2 = \underline{Z}_C \underline{i}_2$; on a un pont diviseur de courant ; on utilise le théorème sur une suite de rapports égaux.

$$\frac{\frac{\underline{i}_2}{1}}{(Z_C + jL\omega)} = \frac{\frac{\underline{i}_2'}{jC\omega}}{\frac{1}{(Z_C + jL\omega)} + jC\omega} = \frac{\frac{\underline{i}_2 + \underline{i}_2'}{1}}{jC\omega + \frac{1}{(Z_C + jL\omega)}},$$

$$\text{et } \underline{T}_D = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = \frac{1}{1 + jC\omega(Z_C + jL\omega)} = \frac{1}{1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + jZ_C\omega C}.$$

$$\mathbf{D.3.a.} \quad Z_C = R_C; |\underline{T}_D| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right)^2 + \omega^2 LC \left(1 - \frac{LC\omega^2}{4}\right)}} = 1$$

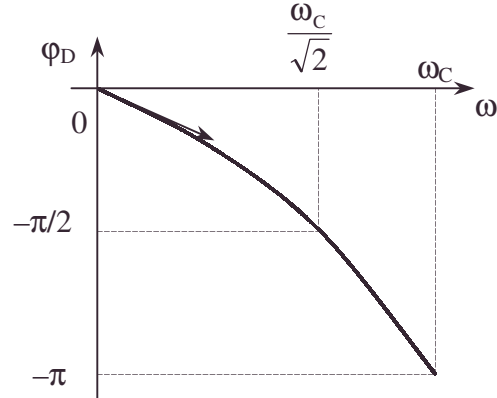
b. Ainsi $|\underline{T}_D| = 1$ pour $0 < \omega < \omega_C$ (Z_C réel) ; c'est le domaine de la bande passante.

c. Posons $x = \frac{\omega}{\omega_C}$; $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}(1 - x^2)$;

$Z_C = R_C$ est limité à $\omega < \omega_C$ soit $x < 1$.

$$\underline{T}_D = \frac{1}{1 - 2x^2 + 2jx\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\Rightarrow \varphi_D = -\arctan 2x \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2x^2} ;$$



d. Pour le filtre idéal $\varphi_D = 0$ (cf. **A.**)

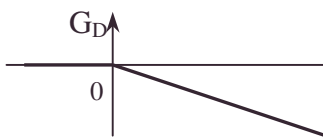
D.4.a. $\omega > \omega_C$ pour avoir $Z_C = jX_C$; c'est le domaine de la bande atténuée.

D.4.b. a priori $X_C \in \mathbb{R}$ (cf. **D.5.**) c'est-à-dire X_C peut être positif ou négatif .

$$\mathbf{D.4.c.} \quad \underline{T}_D = \frac{1}{1 - 2x^2 \pm 2x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{(x \mp \sqrt{x^2 - 1})^2} \text{ avec } \pm \text{ représentant le signe de } X_C.$$

$$|\underline{T}_D| = \frac{1}{(x \mp \sqrt{x^2 - 1})^2} \quad \text{avec } \underline{T}_D = -|\underline{T}_D| \Rightarrow \arg \underline{T}_D = \pi.$$

D.5. $G_D = 0$ pour $\omega < \omega_C$; $G = -40 \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ pour $\omega > \omega_C$.



• Si $X_C < 0$, $|\underline{T}_D| \approx \frac{1}{\left(x - x\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)\right)}$ pour $x \rightarrow \infty$

soit $|\underline{T}_D| \sim 4x^2$, on a un passe haut.

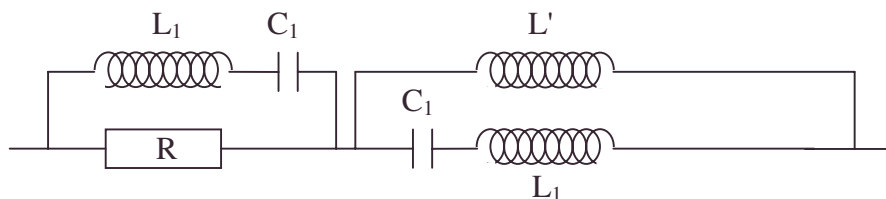
Conclusion : X_C est de type selfique.

$$\mathbf{D.6.a.} \quad Z_C(0) = \sqrt{\frac{L}{C}} ; Z_C(\omega_C) = 0 ; |Z_C(\infty)| = \infty.$$

b. Considérons un résistor de résistance $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ monté en parallèle et en série par un ensemble self et capacité en série d'impédance $j\left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)$ capable de s'annuler

pour $\omega_C = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$. Une dernière self L' montée en parallèle sur $L_1 C_1$ permet

d'annuler cette réactance pour $\omega = 0$.



• bande passante, réactance

On vérifie physiquement le circuit équivalent :

$\omega = 0$	R
$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$	$0 + 0 = 0$
$\omega \rightarrow \infty$	$+\infty + \infty = +\infty$

6.1.4.2. Filtre passe-bande Série de Fourier

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel (A.O.) est idéal. Le fonctionnement du dispositif est linéaire.

1. Que se passerait-il si on échangeait l'entrée inverseuse et l'entrée non inverseuse de l'amplificateur opérationnel ?

2. La tension d'entrée v_e est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω à laquelle on associe la tension complexe notée $\underline{v_e}$. De même à v_s on associera $\underline{v_s}$. On définit \underline{T} (transmittance complexe du

montage) : $\underline{T} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}}$.

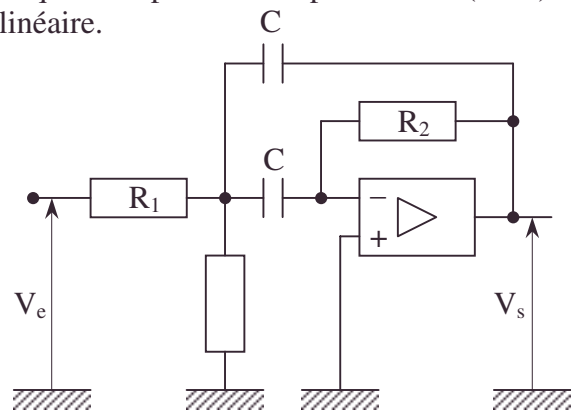


Figure 1

Montrer que \underline{T} peut se mettre sous la forme : $\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$, expression dans

laquelle $j^2 = -1$, T_0 est une fonction réelle de R_1 et R_2 , Q est une fonction réelle de R , R_1 , R_2 et x est égal à $\frac{\omega}{\omega_0}$. (ω_0 est une pulsation que l'on exprimera en fonction de R_1 ,

R_2 , R et C). On pourra poser $R' = \frac{R R_1}{R + R_1}$ et exprimer certains des résultats demandés à l'aide de R' .

3. On définit le gain G du montage par $G = 20 \log T$ (T est le module de \underline{T} , le logarithme est le logarithme décimal).

Tracer l'allure du diagramme donnant G en fonction du logarithme décimal de la pulsation. Préciser les asymptotes. Quelle sera la fonction de ce montage ?

4. Application numérique : $C = 1 \text{ nF}$; $R = 10 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$.

a. Calculer T_0 , Q , ω_0 , $N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

b. Définir et calculer la bande passante à -3dB . On donnera les valeurs numériques des fréquences de coupure.

5.a. On considère maintenant que la tension d'entrée v_e est une tension en crêteaux de période T , qui vaut V_0 pour $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ et $-V_0$ pour $\frac{T}{2} \leq t \leq T$.

Donner le développement en série de Fourier pour cette tension.

b. Que devient le développement si :

$$v_e = V_0 \text{ pour } -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \text{ et } v_e = -V_0 \text{ pour } \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} ?$$

c. Compte tenu des valeurs numériques données au **4.**, quelle doit être $N = \frac{1}{T}$ la

fréquence de v_e pour que N_0 (défini et calculé au **2.**) corresponde à la fréquence de l'harmonique 3 de la décomposition du **5.a.** ?

Quelles seront les amplitudes du fondamental et des harmoniques 2, 3, 4 et 5 à l'entrée et à la sortie du montage ? On fera les calculs littéraux et numériques de ces amplitudes, on prendra $V_0 = 0,5$ volt . Conclure.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1. Par inversion du signe du terme théorique " $\beta\mu$ " on aurait un fonctionnement en saturation (instabilité).

2. Appliquons le théorème de Millman ;

$$\text{en A : } V_A = \frac{\frac{v_e}{R_1} + jC\omega v_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega}$$

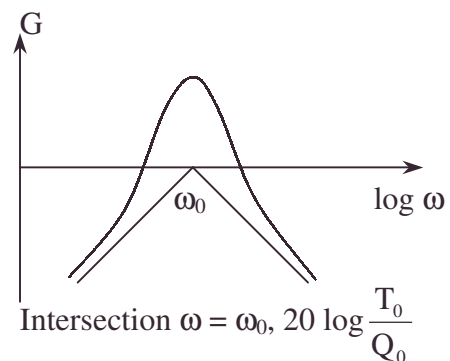
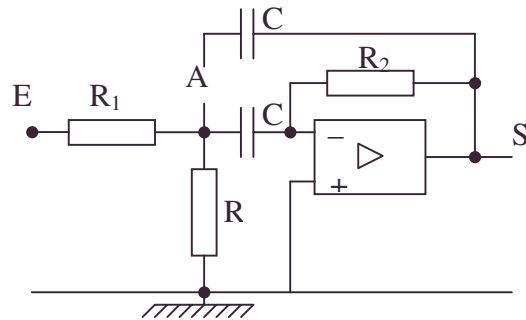
$$\text{en } V_- : 0 = V_+ = V_- = \frac{\frac{v_s}{R_2} + jC\omega V_A}{\frac{1}{R_2} + jC\omega}$$

$$\underline{v_s} = -jR_2 C \omega V_A = -jR_2 C \omega \frac{\frac{v_e}{R_1} + jC\omega v_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega} \Rightarrow \underline{v_s} \left[\frac{1 + R'R_2 C^2 \omega^2}{1 + 2jR'C\omega} \right] = \underline{v_s} - j \frac{R_2}{R_1} \frac{C\omega R' \underline{v_e}}{1 + 2jR'C\omega}$$

$$T = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{-\frac{R_2}{2R_1}}{1 + j \left[\frac{R_2}{2} C\omega - \frac{1}{2R'C\omega} \right]} = \frac{T_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)},$$

$$\text{avec } T_0 = -\frac{R_2}{2R_1} ; Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R'}}.$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C^2 R_2 R'}}.$$



$$\mathbf{3. Asymptotes :} \quad \omega \ll \omega_0 \quad G = 20 \log \frac{T_0 \omega_0}{Q_0} - 20 \log \omega ;$$

$$\omega \gg \omega_0 \quad G = 20 \log \frac{T_0}{Q_0 \omega_0} + 20 \log \omega .$$

$G_{\max} = 20 \log T_0$ pour $\omega = \omega_0$; on a un ampli sélectif (passe bande).

Filtres

4.a. AN : $T_0 = -5$; $Q = 5,024$; $\omega_0 = 10490 \text{ rad.s}^{-1}$; $N_0 = 1570 \text{ Hz}$.

b. La bande passante est définie par $(G_{\max} - 3) \text{ dB}$.

Soit $Q \left[\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right] = \pm 1$; $f_{c_1} = 1518 \text{ Hz}$; $f_{c_2} = 1836 \text{ Hz}$.

5. On a à calculer $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v_e dt$; $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_e \cos n \omega t dt$; $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_e \sin n \omega t dt$.

$$\text{a. } v_e = \frac{4V_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1} \right) ; \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On peut trouver des astuces pour éviter le calcul complet.

$$\text{b. } v_e = \frac{4V_0}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} + \dots + (-1)^p \frac{\cos(2p+1)\omega t}{2p+1} \right).$$

c. $N = \frac{N_0}{3}$; A.N. : $N = 556 \text{ Hz}$: fondamental 1 :

$$\frac{4V_0}{\pi} \text{ A.N. : } 0,64 \text{ V, en sortie } T(N) \cdot \frac{4V_0}{3\pi} ; \text{ A.N. : } 0,2$$

Harmoniques 2 et 4 A.N. 0 ;

Harmonique 3 : $\frac{4V_0}{3\pi}$ A.N. 0,21 V ; en sortie $\frac{T_0 \cdot 4V_0}{3\pi}$; A.N. : 1,06 V.

Harmonique 5 : $\frac{4V_0}{5\pi}$ A.N. 0,127 V, en sortie $T(5N) \cdot \frac{4V_0}{5\pi}$; A.N. : 0,1 V.

L'ampli n'est pas très sélectif cf. $Q = 5$.

6.1.4.3. Filtre à self

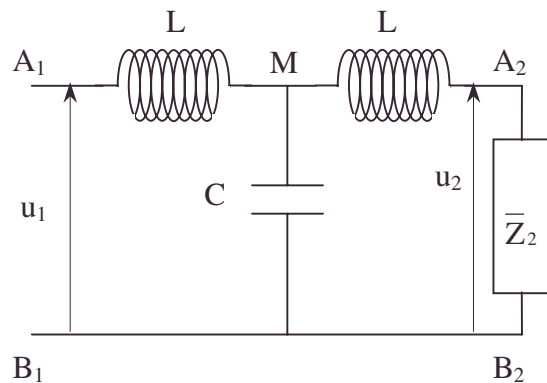
I. Réalisation d'un filtre

Le circuit représenté ci-contre est alimenté entre les bornes d'entrée $A_1 B_1$ par un générateur de tension sinusoïdal de pulsation ω réglable, d'impédance interne négligeable qui fournit une tension u_1 de valeur efficace U_1 constante.

Les inductances sont pures et le condensateur est parfait.

On donne : $L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H}$.

$$C = 10^{-9} \text{ F}.$$



1.1. Exprimer en fonction de ω , L , C et de \bar{Z}_2 , impédance branchée à la sortie, l'impédance d'entrée \bar{Z}_1 vue des points A_1 et B_1 .

2. Dédurre de ce calcul l'impédance caractéristique \bar{Z}_C définie par la condition $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_C$.

3. Pour quelles valeurs de la pulsation ω l'impédance caractéristique est-elle modélisable par un résistor de résistance R_C ?

Dans toute la suite du problème, on branche à la sortie entre les bornes A_2 et B_2 un résistor de résistance R_{C_0} égale à la valeur de R_C lorsque la pulsation ω tend vers zéro.

Exprimer R_{C_0} en fonction de L et C et donner sa valeur numérique.

• bande passante, condensateur, impédance caractéristique, résistance

II. Réponse fréquentielle

2.1. Donner l'expression de la fonction de transfert $\bar{H}(j\omega) = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1}$, en fonction du seul

paramètre $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$.

On rappelle que la sortie est fermée sur R_{C_0} précédemment définie.

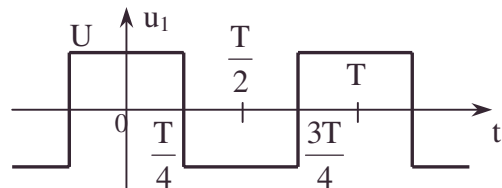
2. En déduire les expressions du module H et du déphasage retard φ de u_2 par rapport à u_1 . Tracer les courbes représentant $H(x)$ et $\varphi(x)$ en échelles normales.

3. Donner l'allure des courbes représentant H en décibels en fonction de $\log x$ et φ en fonction de $\log x$. Préciser les asymptotes.

III. Recherche d'une tension de sortie

La tension appliquée à l'entrée est à présent le créneau alternatif d'amplitude U , de période

constante $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 10^{-4}$ s.



3.1. On rappelle que $u_1(t)$ admet un développement en série de Fourier de la forme :

$$u_1(t) = a_0 + a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t + \dots + a_N \cos N \Omega t + b_N \sin N \Omega t + \dots$$

Montrer rapidement que a_0 , b_N et a_{2p} , quels que soient N et p entiers, sont nuls ;

calculer a_{2p+1} .

2. Montrer que l'expression développée de $u_2(t)$ peut s'obtenir très simplement à partir de l'expression développée de $u_1(t)$ et de la fonction de transfert. On posera :

$$x_{2p+1} = (2p+1) \frac{\Omega}{\omega_0} \text{ et on notera : } H_{2p+1} \text{ et } \varphi_{2p+1} \text{ les valeurs correspondantes de } H \text{ et de } \varphi.$$

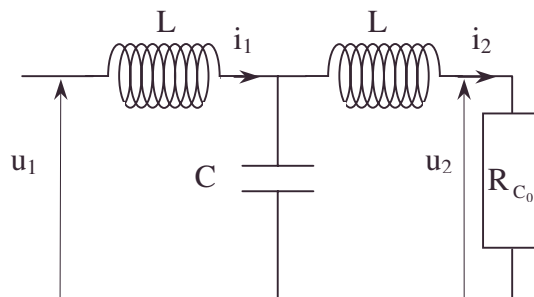
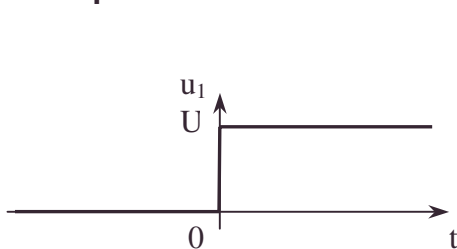
Donner alors l'expression du terme général d'ordre $2p+1$ du développement de $u_2(t)$.

3. Quelle est la condition portant sur $H(x)$ d'une part et sur $\varphi(x)$ d'autre part pour que la tension de sortie soit identique à la tension d'entrée avec un simple décalage retard dans le temps que l'on notera τ .

Calculer numériquement les valeurs de H_1 , H_3 , H_5 ainsi que celles de φ_1 , φ_3 , φ_5 et montrer que la condition précédente est remplie si l'on accepte de représenter $u_3(t)$ par les trois premiers termes de son développement.

Calculer numériquement le temps de retard τ de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$.

IV. Réponse indicielle



On applique entre les bornes d'entrée A_1 et B_1 l'échelon de tension d'amplitude U à l'instant zéro.

4.1. Former le système différentiel que vérifient $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

2. Sans chercher à résoudre les équations différentielles, donner les valeurs de

$$i_1(0+), i_2(0+), \frac{di_1}{dt}(0+); \frac{di_2}{dt}(0+), \text{ juste après l'instant zéro.}$$

Donner également les valeurs de i_1 et i_2 au bout d'un temps très long.

• asymptote, décibel, diagramme de Bode, fonction de transfert, fonction retard, graphe, réponse fréquentielle, réponse indicielle, série de Fourier, valeur finale, valeur post commutation

En déduire l'allure des courbes représentant $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps.

Autres concours ; Durée : 1h30

Corrigé

1.1. L'ensemble C, L, Z_2 a une impédance : $\frac{1}{\bar{Z}} = jC\omega + \frac{1}{\bar{Z}_2 + jL\omega} = \frac{jC\omega(\bar{Z}_2 + jL\omega) + 1}{\bar{Z}_2 + jL\omega}$;

$$\bar{Z}_1 = jL\omega + \bar{Z} = jL\omega + \frac{\bar{Z}_2 + jL\omega}{jC\omega(\bar{Z}_2 + jL\omega) + 1} = \frac{-LC\omega^2(\bar{Z}_2 + jL\omega) + 2jL\omega + \bar{Z}_2}{1 + jC\omega(\bar{Z}_2 + jL\omega)} ;$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_2(1 - LC\omega^2) + jL\omega(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{1 + jC\omega\bar{Z}_2 - LC\omega^2} .$$

Divisons haut et bas par $jC\omega$; on obtient :

$$\bar{Z}_1 = \frac{\frac{L}{C} + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)(\bar{Z}_2 + jL\omega)}{\bar{Z}_2 + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} .$$

$$2. \bar{Z}_C = \frac{\frac{L}{C} + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)(\bar{Z}_C + jL\omega)}{\bar{Z}_C + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} ;$$

$$\bar{Z}_C^2 + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\bar{Z}_C = \frac{L}{C} + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\bar{Z}_C - L\omega\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \Rightarrow \bar{Z}_C^2 = \frac{2L}{C} - L^2\omega^2 .$$

$$3. R_C = L\omega\sqrt{\frac{2}{LC\omega^2} - 1} \text{ réel } (> 0) \text{ pour } \omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}} ; R_{C_0} = \sqrt{\frac{2L}{C}} ; \text{AN : } R_{C_0} = 2k\Omega .$$

2.1. Appliquons le théorème de Millman :

$$a. \text{ en M : } \left(\frac{2}{jL\omega} + jC\omega\right)\bar{V}_M = \frac{\bar{u}_1}{jL\omega} + \frac{\bar{u}_2}{jL\omega} .$$

$$b. \text{ en } A_2 : \left(\frac{1}{R_{C_0}} + \frac{1}{jL\omega}\right)\bar{u}_2 = \frac{\bar{V}_M}{jL\omega} ;$$

$$jL\omega\left(\frac{1}{R_{C_0}} + \frac{1}{jL\omega}\right)\left(\frac{2}{jL\omega} + jC\omega\right)\bar{u}_2 = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{jL\omega} ;$$

$$\left[\left(\frac{jL\omega}{R_{C_0}} + 1\right)(2 - LC\omega^2) - 1\right]\bar{u}_2 = \bar{u}_1 \Rightarrow \bar{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - CL\omega^2 + j\frac{L\omega}{R_{C_0}}(2 - LC\omega^2)} ;$$

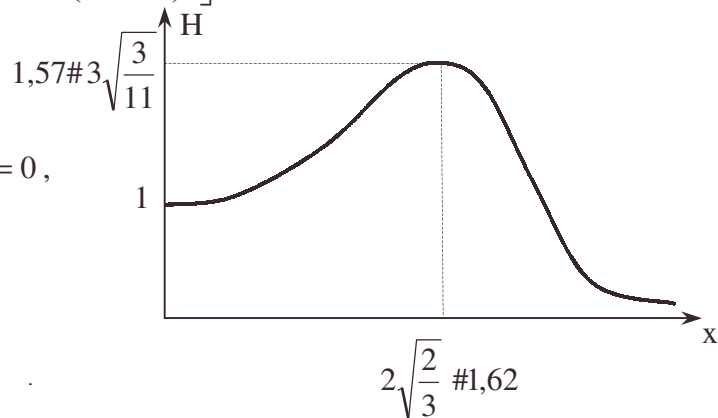
$$\text{or, } \frac{L}{R_{C_0}} = \sqrt{\frac{LC}{2}} = \frac{1}{2\omega_0} \Rightarrow \bar{H} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + j\frac{x}{2}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

$$2.a. H = |\bar{H}| = \left[\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} ;$$

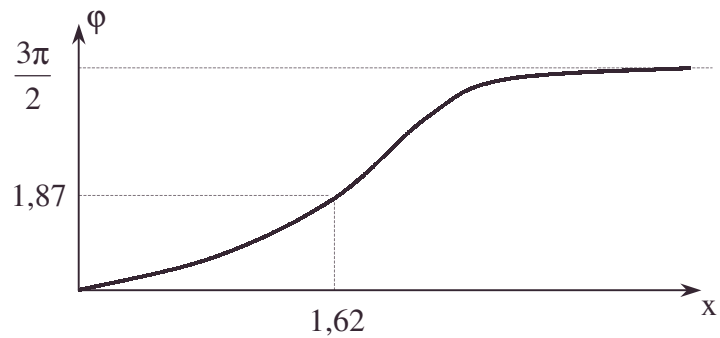
$$\frac{dH}{dx} = \frac{x^3}{2} \left(1 - \frac{3x^2}{8} \right) \left[\left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{x^2}{4} \left(2 - \frac{x^2}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} ;$$

$$\frac{dH}{dx} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } 1 - \frac{3x^2}{8} = 0 ,$$

$$\text{soit } x = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$



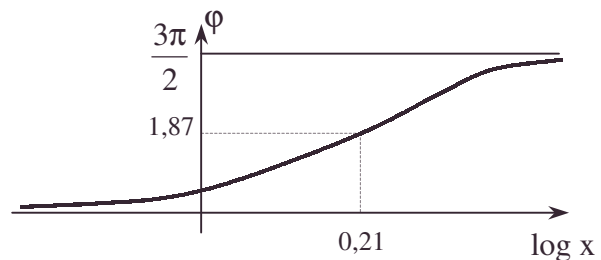
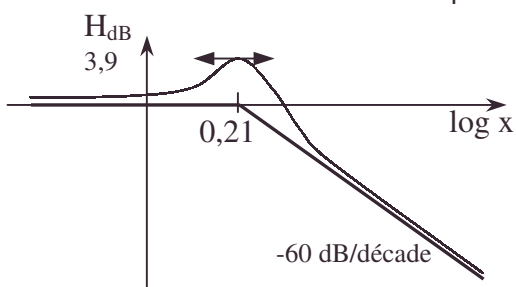
$$\text{b. } \varphi = \arctan \frac{\frac{x}{2} \left(2 - \frac{x^2}{2} \right)}{1 - \frac{x^2}{2}} = -\arg \bar{H} \text{ (retard de } u_2 \text{ par rapport à } u_1) ;$$



3. $H_{dB} = 20 \log_{10} H$; on a les asymptotes pour :

- $x \rightarrow 0 \Rightarrow H_{dB} = 0$ et

- $x \rightarrow +\infty \Rightarrow H \sim -20 \log \frac{x^3}{4} ; H_{dB} \sim 40 \log_{10} 2 - 60 \log_{10} x .$



1. $a_0 = \langle u_1 \rangle = 0$; u_1 est paire $\Rightarrow b_N = 0$ coefficients de projection sur les fonctions impaires.

$$a_{2p} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2p\Omega t u_1(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \cos 2p\Omega t u_1(t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos 2p\Omega t u_1(t) dt .$$

Introduisons $t = t' - \frac{T}{2}$ dans la première intégrale :

$$a_{2p} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(2p\Omega t' - 2p\Omega \frac{T}{2} \right) u_1 \left(t' - \frac{\pi}{2} \right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos 2p\Omega t u_1(t) dt ;$$

• asymptote, diagramme de Bode, graphe, série de Fourier

Filtres

or $u_1\left(t' - \frac{T}{2}\right) = -u_1(t')$. Les 2 intégrales se détruisent et $a_{2p} = 0$.

$$a_{2p+1} = \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} \cos(2p+1)\Omega t u_1(t) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos(2p+1)\Omega t u_1(t) dt \right);$$

$$a_{2p+1} = \frac{2}{T} \left(U \left[\frac{\sin(2p+1)\Omega t}{(2p+1)\Omega} \right]_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}} - U \left[\frac{\sin(2p+1)\Omega t}{(2p+1)\Omega} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right);$$

$$a_{2p+1} = \frac{4U}{T} \frac{\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}}{(2p+1)\Omega} - \frac{2U}{T} \frac{\sin(2p+1)\frac{6\pi}{4} - \sin(2p+1)\frac{\pi}{2}}{(2p+1)\Omega};$$

$$a_{2p+1} = \frac{4(-1)^p U}{(2p+1)\pi} \text{ car } \Omega T = 2\pi.$$

2. La réponse est la somme des réponses de chaque terme.

$$u_2(t) = \sum_0^\infty \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi} U H_{2p+1} \cos[(2p+1)\Omega t - \varphi_{2p+1}];$$

$$\text{soit } u_2(t) = \frac{4U\Omega}{\pi\omega_0} \sum_{x_{2p+1}} \frac{(-1)^p}{x_{2p+1}} H_{2p+1} \cos[x_{2p+1}\omega_0 t - \varphi_{2p+1}].$$

3.a. On veut $H_{2p+1} = 1 \quad \forall p$ et $\tau_{2p+1} = \frac{\varphi_{2p+1}}{(2p+1)\Omega} = \frac{\varphi_{2p+1}}{x_{2p+1}\omega_0} = \tau \quad \forall p$.

b. $x_{2p+1} = (2p+1) \frac{2\pi}{T} \sqrt{2LC}$.

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$
x_{2p+1}	0,126	0,377	0,628
$H_{2p+1}(x)$	1,000	1,002	1,018
$\varphi_{2p+1}(x)$	0,126	0,373	0,614
$x_{2p+1} \omega_0$	62831	188 495	314 180
τ_{2p+1}	$2,005 \cdot 10^{-6}$	$1,979 \cdot 10^{-6}$	$1,954 \cdot 10^{-6}$

On a réalisé les conditions imposées **3.a.** avec :

$$\tau \# 2 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$$

4.1. $u_1 = \frac{q}{C} + L \frac{di_1}{dt}$ et $\frac{dq}{dt} = i_1 - i_2$, avec $\frac{q}{C} = R_{C_0} i_2 + L \frac{di_2}{dt}$;

$$\Rightarrow U = R_{C_0} i_2 + L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt}; \quad i_1 - i_2 = R_{C_0} C \frac{di_2}{dt} + LC \frac{d^2 i_2}{dt^2}.$$

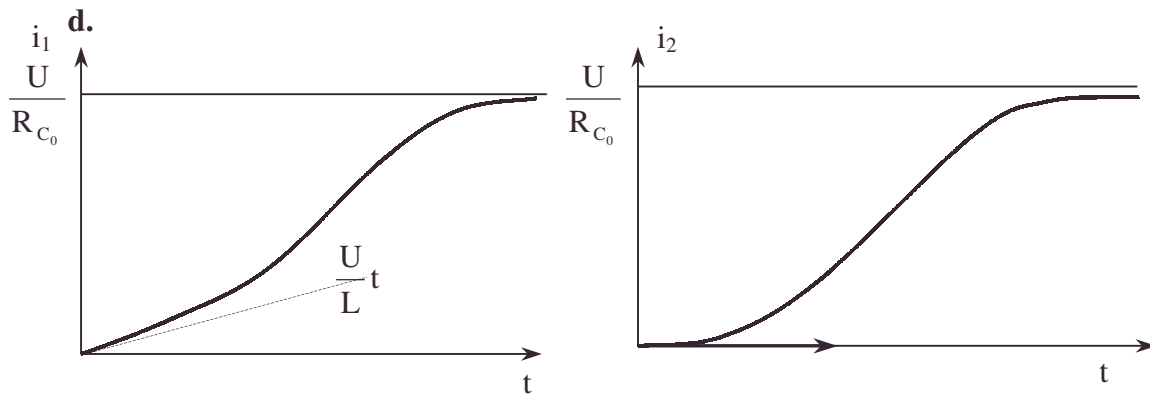
2.a. Dans une self, i est continu: $\begin{cases} i_1(0+) = i_1(0-) = 0 \\ i_2(0+) = i_2(0-) = 0 \end{cases}$

b. Dans C , q est continu : $q(0+) = q(0-) = 0$; pour les 2 mailles :

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{u_1}{L} - \frac{q}{CL} \Rightarrow \frac{di_1}{dt}(0+) = \frac{U}{L}; \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{q}{LC} - \frac{R_{C_0}}{L} i_2 \Rightarrow \frac{di_2}{dt}(0+) = 0;$$

c. $t \rightarrow +\infty$; L est un court-circuit, C est une coupure;

$$u_1 = u_2; \quad i_1 = i_2; \quad u_2 = R_{C_0} i_2 \Rightarrow i_2(\infty) = i_1(\infty) = \frac{U}{R_{C_0}}.$$



6.1.4.4. Filtre à selfs et mutuelles

Réponses indicielle et sinusoïdale

- Notation : dans ce problème, l'expression $f(a \pm)$ désignera la quantité $\lim_{x \rightarrow a \pm} f(x)$.

Première partie

1. On considère le circuit de la figure 1 (schéma-bloc (\mathcal{A})) faisant correspondre la tension de sortie $s(t)$ à la tension d'entrée $e(t)$. Le circuit étant alimenté entre A_1 et B_1 par $e(t)$ donné et étant ouvert entre C_1 et D_1 , établir l'équation différentielle satisfaite par $s(t)$.

2. $e(t)$ est un échelon de tension tel que :

$$\begin{cases} t < 0, e(t) = 0 ; \\ t > 0, e(t) = E. \end{cases}$$

1.a. Préciser les valeurs de $s(0 \pm)$.

b. Etablir l'expression de $s(t)$ pour $t > 0$.

c. Donner la valeur de $s(t)$ quand $t \rightarrow \infty$.

2.a. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en t pour $t > 0$ de $s(t)$, au voisinage de $t = 0$.

b. Quel est alors le comportement de $s(t)$ par rapport à $e(t)$?

Quelle dénomination peut-on donner au bloc (\mathcal{A}) ?

c. Quel est l'ordre de grandeur de la durée pendant laquelle ce comportement est conservé ?

3. $e(t)$ est maintenant une tension sinusoïdale telle que $e(t) = \text{Re}(Ee^{j\omega t})$, où E est l'amplitude de $e(t)$.

On considère le régime permanent tel que $s(t)$ soit de la forme $s(t) = \text{Re}(\underline{S}e^{j\omega t})$ où \underline{S} est l'amplitude complexe de $s(t)$.

On pose : $\underline{A}(\omega) = \frac{\underline{S}}{E}$; $g(\omega) = 20 \log |\underline{A}(\omega)|$; $\theta = \arg \underline{A}(\omega)$.

1. Sans expliciter $\underline{A}(\omega)$, et en utilisant les résultats précédents adéquats, déterminer les comportements asymptotiques du circuit.

Pour ces comportements, on mettra $g(\omega)$ sous la forme $g(\omega) = M + N \log \omega$.

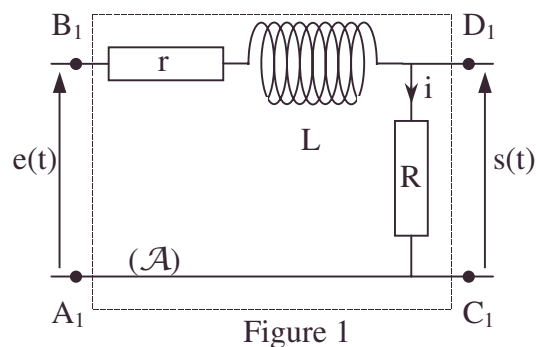


Figure 1

- développement au premier ordre ou plus, échelon de Heaviside, échelon de tension, graphe, ordre de grandeur, réponse fréquentielle, réponse indicielle, schéma-bloc, valeur finale, valeur post commutation

2.a. Calculer explicitement $\underline{A}(\omega)$, $g(\omega)$ et $\theta(\omega)$.

b. Définir et calculer une pulsation de coupure ω_q à -3dB .

c. On donne : $R = 100\Omega$; $r = 150\Omega$; $L = 20\text{mH}$.

Construire successivement les graphes représentant les variations de $g(\omega)$ et $\theta(\omega)$ en fonction de $\log \omega$.

d. Vérifier sur ces graphes le résultat du **2.2.c.**

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, la représentation de la figure 2 aura trait à des amplificateurs opérationnels, notés A.O., différant de l'A.O. parfait par les seules caractéristiques suivantes :

1. Il existe deux tensions de saturation en sortie opposées, $\pm V_{\text{sat}}$, avec $V_{\text{sat}} = 15\text{V}$.

2. L'A.O. est un amplificateur de tension pour lequel la tension de sortie v_s satisfait à

l'équation différentielle : $\frac{1}{\omega_c} \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu_0 \varepsilon$, où ω_c et μ_0 sont des réels positifs.

Toutefois, seules les conséquences qualitatives découlant de cette équation différentielle devront être retenues ; en particulier, les ordres de grandeur des quantités ω_c et μ_0 devront être supposés suffisamment grands pour que les réponses demandées dans le problème s'obtiennent, le cas échéant, par des passages à la limite.

Aucun résultat ne devra faire intervenir la valeur de ces deux grandeurs.

Remarque : du fait des imperfections des bobines et des A.O., les circuits du problème peuvent ne pas conduire aux résultats escomptés ; cependant, leur comportement est conforme à la théorie si on suppose que les bobines et les inductances mutuelles sont en réalité simulées par des circuits électroniques adéquats.

Dans le circuit ci-dessous, la tension $v_s(t)$ est la réponse à la tension d'entrée $v_e(t)$.

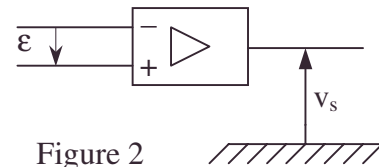


Figure 2

1. On considère d'abord le cas où un régime permanent sinusoïdal est établi et on pose :

$$\begin{cases} v_e(t) = \text{Re}(\underline{V}_1 e^{j\omega t}) ; \\ v_s(t) = \text{Re}(\underline{V}_2 e^{j\omega t}) ; \\ \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} ; \end{cases}$$

où \underline{V}_1 et \underline{V}_2 sont les amplitudes complexes de $v_e(t)$ et $v_s(t)$.

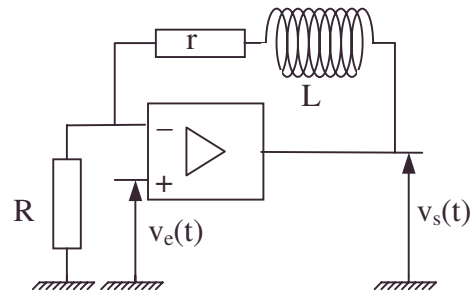


Figure 3

a. Quelle relation simple existe-t-il entre $\underline{H}(\omega)$ et $\underline{A}(\omega)$ calculé dans la partie I. ?

b. En déduire le graphe de $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$.

c. Quelle propriété remarquable peut-on déduire lorsque $\omega \rightarrow \infty$?

2.a. Mettre le schéma de la figure 3 sous forme d'un système bouclé dont la chaîne directe est l'A.O. et dont on explicitera la chaîne de rétroaction.

b. Montrer qu'on retrouve le résultat de la question **1.a.** de la partie II.

3. Dans cette question, on suppose que $v_e(t)$ est un échelon de tension :

$$\begin{cases} t < 0 : v_e(t) = 0 ; \\ t > 0 : v_e(t) = E ; 0 < E < V_{\text{sat}}. \end{cases}$$

On suppose en outre qu'un régime permanent était établi pour $t < 0$.

On pose $V'_s = \frac{R+r}{R}E$, $V'_s < V_{\text{sat}}$.

Établir l'expression de $v_s(t)$ pour $t > 0$ et représenter l'allure du graphe de ses variations avec le temps dans les mêmes conditions. On fera intervenir les quantités v'_s , ω_q et les constantes de l'énoncé qui pourront apparaître.

4. $v_e(t)$ est maintenant un créneau tel que :
- $$\begin{cases} t < 0 : & v_e(t) = 0, \\ 0 < t < T : & v_e(t) = E ; E = 5V, \\ t > T : & v_e(t) = 0, \end{cases}$$

où T est une constante donnée.

En utilisant les résultats précédents adéquats, établir l'expression de $v_s(t)$ pour $t > 0$.

Discuter suivant les valeurs de T .

5. Vérifier que, dans tous les cas, le régime permanent est atteint au bout d'un temps au plus égal à $2T$.

6. Application numérique : tracer sur deux feuilles les variations de $v_s(t)$ avec les conditions initiales suivantes :

a. $E = 5V$; $R = 100\Omega$; $r = 150\Omega$; $L = 20\text{mH}$; $T = 1\text{ms}$.

b. $E = 5V$; $R = 100\Omega$; $r = 150\Omega$; $L = 200\text{mH}$; $T = 1\text{ms}$.

Troisième partie

1. On considère le circuit de la figure 4 (schéma-bloc (\mathcal{B})).

M est le coefficient d'inductance mutuelle des 2 bobines d'inductances propres L et L' ; M est une grandeur algébrique.

A chaque instant la tension u_L aux bornes de la bobine d'inductance propre L satisfait à la relation

$$u_L = L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt}.$$

Dans toute cette partie, on suppose que $M^2 \neq LL'$ et que $L > M$. On posera :

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\rho L + (R+r)L'}{LL' - M^2};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho(R+r)}{LL' - M^2}}.$$

a. Le circuit étant alimenté entre A_2 et B_2 par $e(t)$ donné, et étant ouvert entre C_2 et D_2 , établir l'équation différentielle satisfaite par $s(t)$.

b. Vérifier que, lorsque $L > L'$, un cas particulier peut apparaître pour une certaine valeur de M que l'on précisera.

c. Montrer que l'on ne peut avoir pour $s(t)$ ni de régime pseudo-périodique ni de régime critique.

2. On suppose que $e(t)$ est un échelon de tension, avec : $t < 0$, $e(t) = 0$ et $t > 0$, $e(t) = E$. On suppose en outre que pour $t < 0$ un régime permanent était établi.

Quelles sont les expressions de $s(0^+)$ et $\frac{ds}{dt}(0^+)$?

3. On suppose dans cette question qu'un régime permanent sinusoïdal est établi et on pose : $e(t) = \text{Re}(\underline{E}e^{j\omega t})$ et $s(t) = \text{Re}(\underline{S}e^{j\omega t})$.

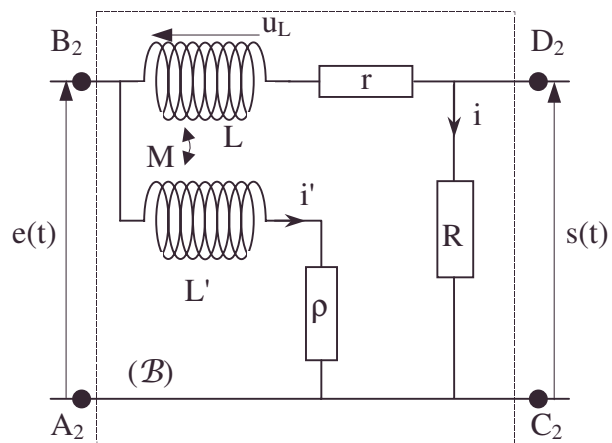


Figure 4

a. Etablir l'expression de la fonction de transfert $\underline{B}(\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$.

b. Etudier les comportements asymptotiques des quantités $h(\log \omega) = 20 \log |\underline{B}|$ et $\phi(\log \omega) = \arg \underline{B}$.

Discuter en tenant compte en particulier de la question 3.1.b. de la troisième partie.

4. On considère à présent, et dans toutes les questions ultérieures de cette partie, le circuit de la figure 5 :

Les deux bobines ont les mêmes caractéristiques qu'à la question 3.1. ; $v_e(t)$ est un échelon de tension comme à la question 3.2. et on suppose qu'un régime permanent était établi pour $t < 0$; on donne $E = 5V$.

a. Quelles sont les valeurs de :

$$i(0_+), i'(0_+), \frac{di}{dt}(0_+) \text{ et } \frac{di'}{dt}(0_+) ?$$

b. Etablir les équations différentielles satisfaites, dans une première phase, par $i(t)$ et $i'(t)$ pour $t > 0$, en utilisant ω_0 et λ ?

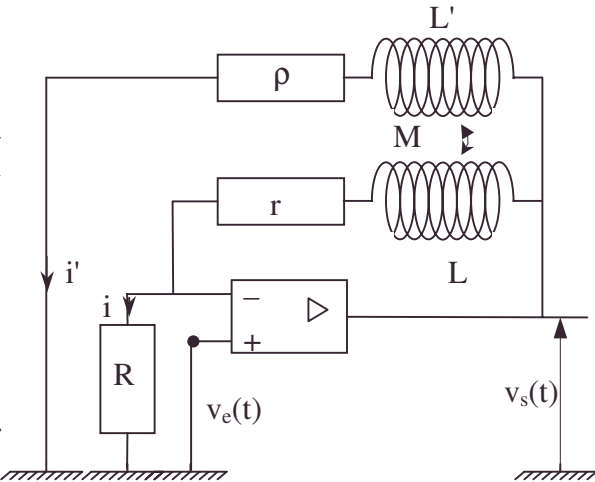


Figure 5

5. Il peut éventuellement exister une seconde phase de l'évolution du circuit à partir d'un certain instant t_1 , $t_1 > 0$. Donner pour cette seconde phase l'expression de $v_s(t)$ en fonction des données de t_1 , t_1 étant supposé connu.

Quels commentaires suggèrent ces résultats comparés à ceux du 3.3.b. ?

6. Application numérique :

On donne $L = 600\text{mH}$, $L' = 150\text{mH}$, $M = 100\text{mH}$, $r = 300\Omega$, $R = 200\Omega$, $\rho = 125\Omega$. Représenter graphiquement les variations de $v_s(t)$.

Quatrième partie

On considère le schéma-bloc (\mathcal{B}) de la figure 4 de la troisième partie, mais dans le cas où $M^2 = LL'$.

1. $e(t)$ étant donné, établir l'équation différentielle à laquelle satisfait $s(t)$.

2. $e(t)$ est un échelon de tension analogue à la question 3.2.

a. Quelle est la valeur de $s(0^+)$?

b. Pour quelle relation particulière entre les paramètres apparaît-il une situation analogue à celle de la troisième partie ?

c. Que vaut $s(t)$ pour $t > 0$?

3. On suppose dans cette question qu'un régime permanent sinusoïdal est établi et on pose : $e(t) = \text{Re}(\underline{E}e^{j\omega t})$ et $s(t) = \text{Re}(\underline{S}e^{j\omega t})$.

a. Donner l'expression de la fonction de transfert $\underline{B}'(\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$.

b. Etudier les comportements asymptotiques des quantités $h'(\log \omega) = 20 \log |\underline{B}'|$ et $\phi'(\log \omega) = \arg \underline{B}'$. Discuter.

4. On considère le circuit de la figure 5, avec encore $M^2 = LL'$ et on étudie la réponse $v_s(t)$ dans les mêmes conditions que celles de la question 3.4.

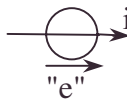
On suppose de plus $L' > M$. Exprimer $v_s(t)$ pour $t > 0$.

Autres concours ; Durée 4h

• asymptote, comportement asymptotique, échelon de Heaviside, échelon de tension, fonction de transfert, graphe, schéma-bloc, valeur post commutation

Corrigé

I. Rappel : on associera formellement à une bobine une force électromotrice d'induction

remplaçant  par " e " = $-L \frac{di}{dt}$ ou " e " = $-L \frac{di}{dt} - M \frac{di'}{dt}$ s'il y

a mutuelle inductance avec une autre bobine parcourue par un courant i' .

1. $e = ri + L \frac{di}{dt} + Ri$; $s = Ri \Rightarrow L \frac{ds}{dt} + (r + R)s = Re$.

a. La bobine possède une énergie $W = \frac{1}{2} Li^2$ qui varie continûment (cf. conservation de l'énergie) ; i est donc continu et $s = Ri$ aussi :

$e = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow s(-0) = 0$, donc $s(+0) = 0$.

b. $t > 0$; $e = E \Rightarrow s = \frac{RE}{r + R} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R + r}$.

La valeur initiale donne : $s = \frac{RE}{r + R} (1 - e^{-\frac{t}{L/(r+R)}})$.

c. $t \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow \frac{RE}{r + R}$.

2.a. $1 - e^{-x} \sim -x \Rightarrow s \sim \frac{RE}{r + R} \frac{t}{L} (r + R)$ soit $s \sim \frac{RE}{L} t$.

b. $s = \frac{R}{L} \int_0^t e(t) dt$ au voisinage de 0 : A se comporte comme un circuit intégrateur.

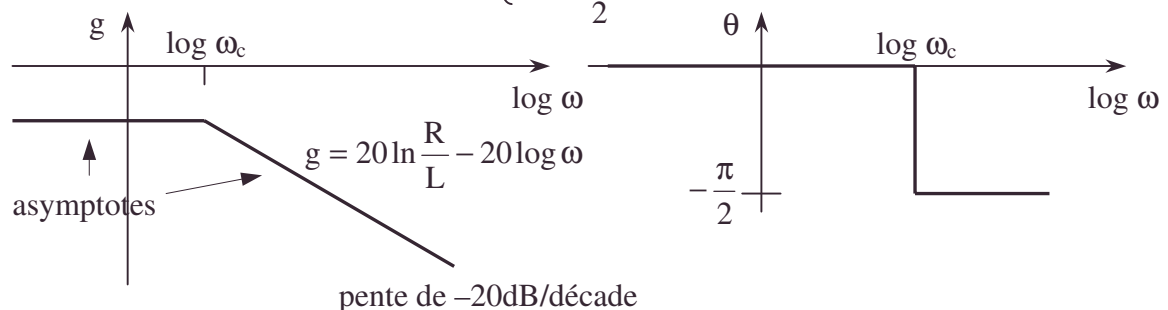
c. Assimiler la courbe à sa tangente à l'origine est classiquement possible sur l'intervalle $[0, \tau]$. τ est donc l'ordre de grandeur demandé.

3.1.a. $\omega \rightarrow 0$ en courant continu permanent (cf. **2.1.b.c.**) ;

$s = \frac{RE}{r + R} \Rightarrow g(\omega) \sim 20 \log \frac{R}{R + r}$ et $\theta = 0$.

b. $\omega \rightarrow \infty$, le terme principal des 3 impédances $r, jL\omega, R$ est $jL\omega$:

$$\underline{E} = jL\omega \underline{I} \text{ et } \underline{S} = R \underline{I} \Rightarrow \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{jL\omega} \Rightarrow \begin{cases} g(\omega) \sim 20 \ln \frac{R}{L} - 20 \log \omega \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



L'intersection donne ω_c : $20 \log \omega_c = 20 \ln \frac{R}{L} - 20 \log \frac{R}{r + R} = 20 \log \frac{r + R}{L}$; $\omega_c = \frac{r + R}{L}$.

• continuité de l'intensité d'une bobine, continuité de l'énergie, développement au premier ordre ou plus, diagramme de Bode, énergie magnétique, intégrateur électronique, ordre de grandeur, valeur finale, valeur initiale

2.a. L'équation différentielle s'écrit en notation complexe :

$$\underline{S}(jL\omega + r + R) = R\underline{E} \Rightarrow A(\omega) = \frac{R}{r + R + jL\omega}, \text{ et en introduisant } \omega_c,$$

$$\alpha. A(\omega) = \frac{\frac{R}{r+R}}{1 + j \frac{\omega}{\frac{R+r}{L}}}; \text{ cf. opérateur passe-bas. } |A(\omega)| = \frac{\frac{R}{r+R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\frac{R+r}{L}}\right)^2}}.$$

$$\beta. g(\omega) = 20 \log \frac{R}{R+r} - 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{R+r}{L}\right)^2} \right).$$

$$\gamma. A(\omega) = \frac{\frac{R}{R+r}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{R+r}{L}\right)^2}}} \frac{\left(1 - j \frac{\omega}{\frac{R+r}{L}} \right)}{\sqrt{L + \frac{\omega^2}{\left(\frac{R+r}{L}\right)^2}}};$$

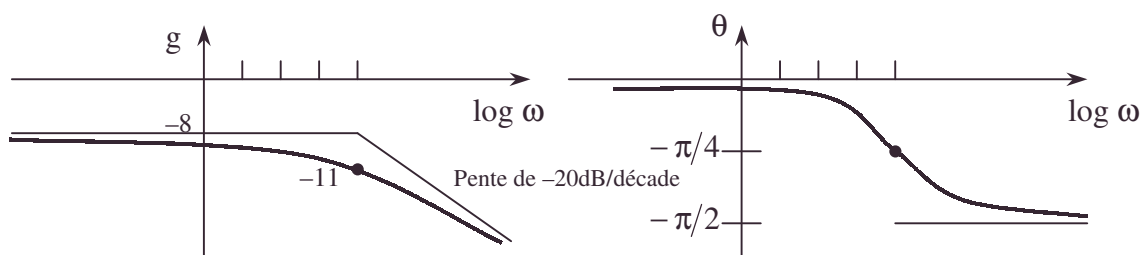
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{R+r}{L}\right)^2}}} \text{ et } \sin \theta = \frac{-\frac{\omega}{\frac{R+r}{L}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{R+r}{L}\right)^2}}}; \theta = -\arctan \frac{\omega}{\frac{R+r}{L}}.$$

$$b.\alpha. \omega_q \text{ correspond à } g = g_{\max} - 3 \text{ ou } |A| = \frac{|A|_{\max}}{\sqrt{2}};$$

$$\beta. |A|_{\max} = \frac{R}{R+r};$$

$$g_{\max} = 20 \log \frac{R}{R+r}; \text{ la solution de } 1 + \frac{\omega^2}{\left(\frac{R+r}{L}\right)^2} = 2 \text{ est } \omega_q = \frac{R+r}{L}.$$

$$c. AN : \omega_q = 12500 \text{ rad.s}^{-1}; \log \omega_q = 4,1; |A|_{\max} = 0,4; g_{\max} = -8 \text{ dB}.$$



On vérifie les asymptotes trouvées précédemment.

- *diagramme de Bode, intersection des asymptotes, maximum*

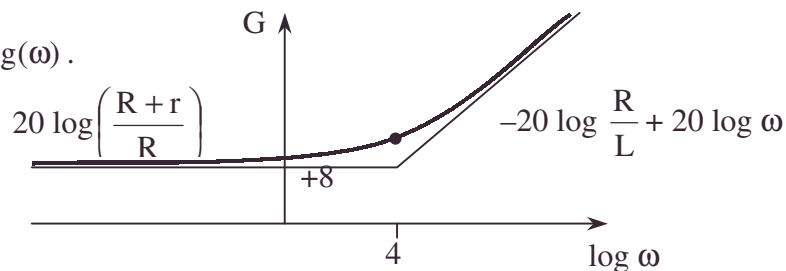
$$\text{AN : } g(\omega) = 20 \log \frac{R}{R+r} = -8 ; g(\omega) = 74 - 20 \log \omega \Rightarrow \log \omega_c = 4,1.$$

d. Le comportement en intégrateur correspond à l'asymptote ($\omega \rightarrow \infty$). Soit pour $\omega > \omega_q$, c'est-à-dire pour des durées caractéristiques $t_1 < t_q = \frac{1}{\omega_q}$, soit $t_1 < \frac{L}{R+r}$.

II.1.a. $V_- = V_+ = \underline{V}_e$; le théorème de Millman appliqué en V_- donne :

$$\underline{V}_- = \frac{\frac{\underline{V}_s}{(r+jL\omega)}}{\frac{1}{r+jL\omega} + \frac{1}{R}} \Rightarrow \underline{H} = \frac{R+r}{r} \left(1 + j \frac{L\omega}{R+r} \right) \Rightarrow \underline{H}\underline{A} = 1 \text{ soit } 20\log|\underline{H}| + 20\log|\underline{A}| = 0.$$

$$\text{b.1.a.} \Rightarrow G_\omega = -g(\omega).$$

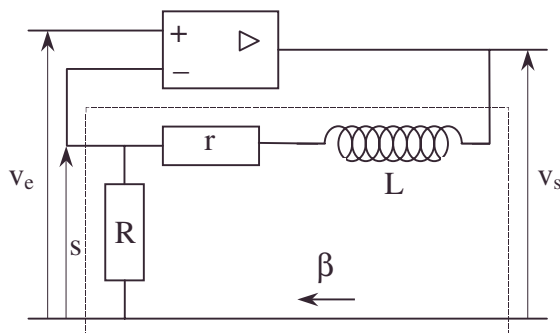


c. Le comportement asymptotique $G = -20\log \frac{R}{L} + 20 \log \omega$ opposé à celui de g

est celui d'un dérivateur.

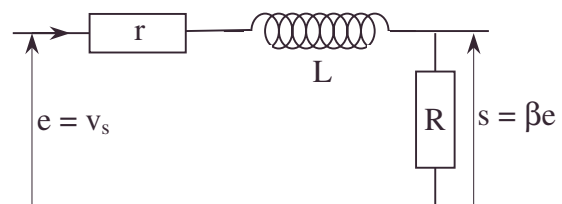
2.a. Schéma (à mettre en parallèle avec les quadripôles de rétroaction).

Montage série à gauche, parallèle à droite.



2.b.

β Correspond bien au montage I.1. Fig.1



La formule de Black $\underline{H} = \frac{\mu}{1 + \beta\mu}$ tend

vers $\frac{1}{\beta}$ quand $\mu \rightarrow +\infty$.

L'énoncé a noté $\beta = \underline{A}$; on a bien $\underline{H} = \frac{1}{\underline{A}}$.

3. • Valeur initiale : $v_s(0^-) = 0$ pour le régime permanent, donc $i_R(0^-) = 0$ et $V_-(0^-) = 0$.

• Ainsi par continuité de l'énergie dans L et donc de i à $t = +0$, $V_-(0^+) = 0$;

or $V_+(0^+) = +E$: l'ampli est donc saturé à $+V_{\text{sat}}$.

• L'état $v_s = +V_{\text{sat}}$ dure tant que $V_+ - V_- \geq 0$, or d'après I, on a l'équation différentielle

$$L \frac{ds}{dt} + (r+R)s = RV_{\text{sat}} \text{ pour } e = +V_{\text{sat}}, \text{ de solution } s = \frac{R}{R+r} V_{\text{sat}} (1 - e^{-\omega_q t}) = V_-$$

or $V_+ = E$; le basculement a lieu à l'instant t_0 où $V_- = V_+ = E$.

$$E = \frac{R}{R+r} V_{\text{sat}} (1 - e^{-\omega_q t_0}) \text{ soit } t_0 = \frac{1}{\omega_q} \ln \frac{V_{\text{sat}}}{V_{\text{sat}} - V_s'}$$

• $t = t_0 - 0$, $i = \frac{s(t_0)}{R} = \frac{E}{R}$ et $\varepsilon = 0$.

• asymptote, basculement mécanique, Black [formule de], comportement asymptotique, continuité de l'intensité d'une bobine, continuité de l'énergie, dérivateur, diagramme de Bode, intégrateur électronique, Millman [théorème de], rétroaction, valeur initiale

Filtres

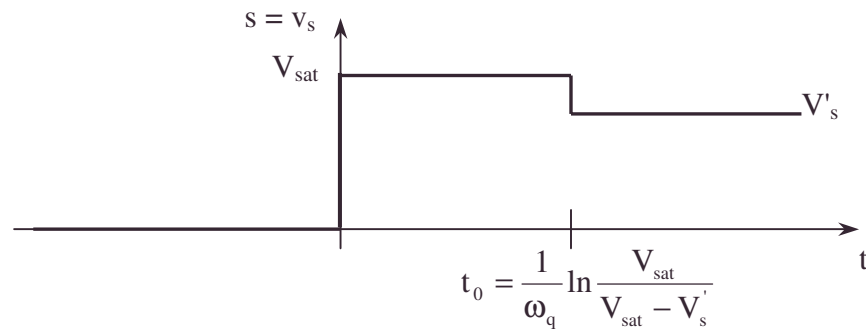
• Physiquement : la self s'oppose aux variations de courant et cet état peut se maintenir à $t = t_0 + 0$ pour $v_s = (R + r)i = (R + r)\frac{E}{R} = V'_s$ (compatible avec $\varepsilon = 0$) (alors que l'état $v_s = \pm V_{\text{sat}}$ est impossible car exige une variation instantanée de i qui est continue).

L'obtention du régime linéaire impose une valeur de $v_s = V'_s$ permanente.

- Calculatoirement, la résolution de $L \frac{ds}{dt} + (R + r)s = RV'_s = (R + r)E$ confirme :

$$s = E + \lambda e^{-\omega_q(t-t_0)} \text{ soit}$$

$$\lambda = 0 \text{ vu } s(t_0) = E ; s = E \text{ ne peut évoluer, } v_s \text{ de même } \Rightarrow v_s = (R + r)\frac{E}{R} = V'_s.$$

**4.a. $T < t_0$.**

- $v_s = +V_{\text{sat}} \quad \forall t \in]0, T[$ vu **3.** $\Rightarrow s(t) > 0$;

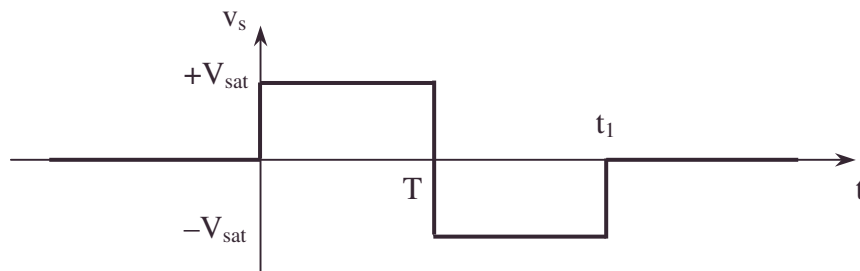
l'arrêt de v_e provoque une discontinuité de ε : $\varepsilon(T-0) = E - s(T-0)$, $\varepsilon(T+0) = 0 - s(T+0)$ avec $s(T+0) = s(T-0)$, vu la continuité de i d'où $\varepsilon < 0 \Rightarrow V_s = -V_{\text{sat}}$.

- L'équation $L \frac{ds}{dt} + (R + r)s = -RV_{\text{sat}}$ a pour solution :

$$s = -\frac{RV_{\text{sat}}}{R + r} \left[1 + \left(1 - 2e^{\omega_q T} \right) e^{-\omega_q t} \right], \text{ fonction monotone.}$$

- On obtient le régime linéaire pour $s = 0$ à l'instant t_1 tel que $t_1 = \frac{1}{\omega_q} \ln(2^{\omega_q T} - 1)$,

état qui se maintient (cf. **3.**) et pour lequel $v_s = 0$.

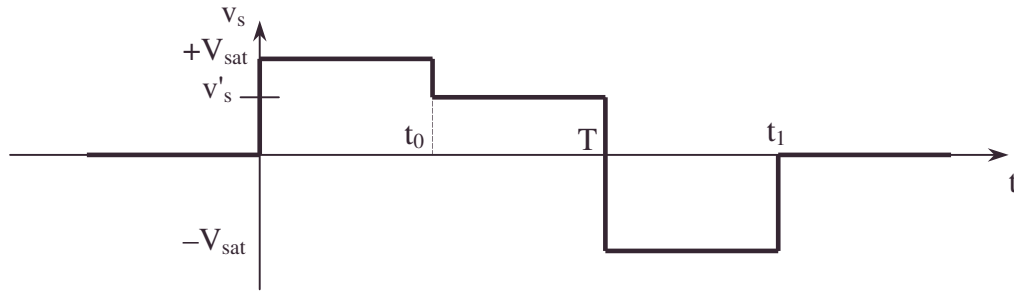


b. $T > t_0$: vu **3.** Le problème est étudié jusqu'à T où l'arrêt de v_e provoque une discontinuité de ε à $t = T$:

$$\varepsilon(T-0) = 0, \varepsilon(T+0) = 0 - s(T+0) = -s(T-0) = -E.$$

$$\varepsilon < 0 \Rightarrow v_s = -V_{\text{sat}} \text{ et l'on continue comme en 4.a.}$$

- continuité de l'intensité d'une bobine, graphe

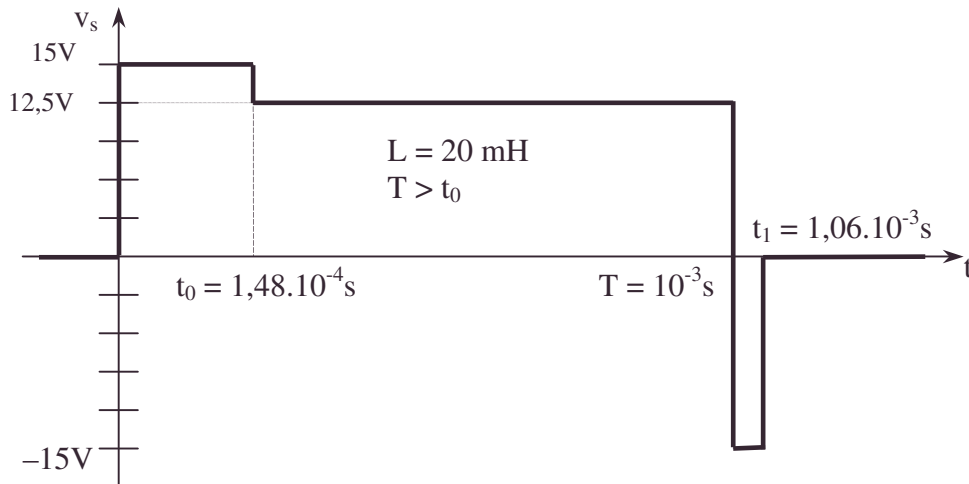


II.5. Vu l'énoncé, linéarisons $2e^{\omega_q T} - 1 \approx 2(1 + \omega_q T) - 1 \approx 1 + 2\omega_q T$.

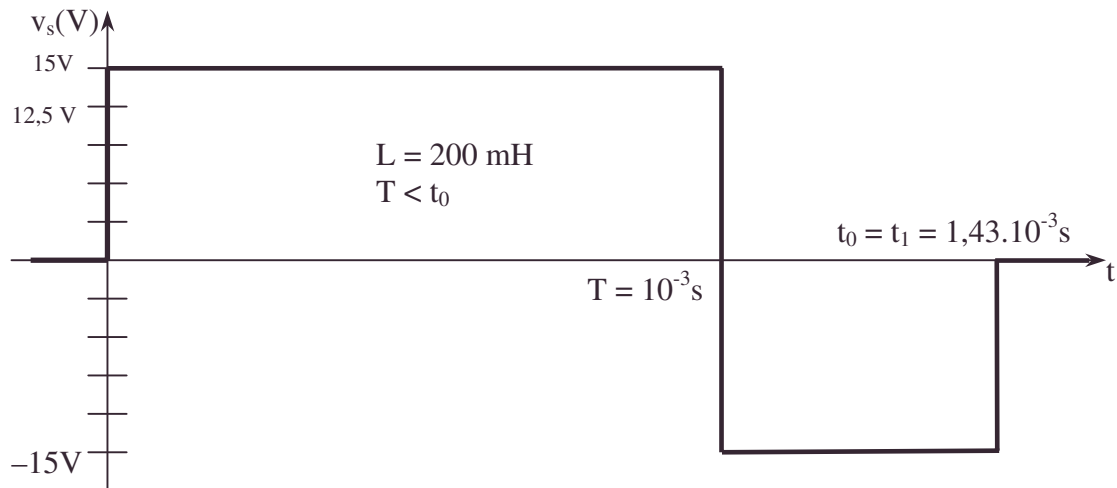
$$\Rightarrow \textcircled{1} \ln(1 + 2\omega_q T) < 2\omega_q T \Rightarrow t_1 < 2T$$

(on vérifie $\textcircled{1}$ aussi numériquement ou graphiquement).

6.a.



b.



III.1.a. [1] $s = Ri$; [2] $e = L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} + (R + r)i$; [3] $e = L' \frac{di'}{dt} + M \frac{di}{dt} + \rho i'$;

– Eliminons $\frac{di'}{dt}$; $(L' - M)e = (LL' - M^2) \frac{di}{dt} + L'(R + r)i - \rho Mi'$.

– On en tire i' que l'on reporte dans la 2^{ème} équation :

$$e = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{\rho} \left[(M - L') \frac{de}{dt} + (LL' - M^2) \frac{d^2 i}{dt^2} + L'(R + r) \frac{di}{dt} \right].$$

– Remplaçons $i = \frac{s}{R}$:

• *graphe, linéarisation*

Filtres

$$(LL'-M^2) \frac{d^2s}{dt^2} + [L'(R+r) + L\rho] \frac{ds}{dt} + \rho(R+r)s = \rho Re + R(L'-M) \frac{de}{dt}.$$

$$\text{b. Posons : } \lambda = \frac{1}{2} \frac{\rho L + (r+R)L'}{LL'-M^2} ; \omega_0^2 = \frac{\rho(R+r)}{LL'-M^2} \Rightarrow LL' > M^2 ;$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{R(L'-M)}{LL'-M^2} \frac{de}{dt} + \frac{\rho R}{LL'-M^2} e.$$

Cas particuliers : **α.** $LL' = M^2$ exclu ;

β. $L' = M$ qui supprime $\frac{de}{dt}$ et donc la solution particulière associée ;

Quand $L' = M$, on a $L > M$ d'où $LL' \geq M^2$; soit $L > L'$. Aussi quand on fait décroître M , on rencontre d'abord $M = L$ puis $M = \sqrt{LL'}$, puis $M = L'$ où apparaît le cas particulier.

$$\text{c. Etude de l'équation sans second membre: } \frac{d^2s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0.$$

$$\text{Etudions } \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \frac{[\rho L - (R+r)L']^2 + 4\rho M^2(R+r)}{4(LL'-M^2)^2} \geq 0 \quad (\text{cf. } LL' - M^2 \neq 0).$$

On ne peut donc avoir de régime critique ni de régime sinusoïdal amorti pseudo-périodique.

2.a. La continuité de l'énergie de chaque bobine implique à M fixé la continuité du courant i et i' et donc la continuité de s : $s(0^+) = s(0^-) = 0$.

$$\text{b. On calcule : } \frac{ds(0^+)}{dt} = R \frac{di(0^+)}{dt} \quad \text{vu } i(0^+) = 0;$$

or $\frac{di(0^+)}{dt}$ se calcule à partir des équations **2.** et **3.** de **III.1.** :

$$e(0^+) = E = L \frac{di}{dt}(0^+) + M \frac{di'}{dt}(0^+) = L' \frac{di'}{dt}(0^+) + M \frac{di}{dt}(0^+), \quad \text{vu } i'(0^+) = 0 = i(0^+).$$

$$\Rightarrow \frac{di'}{dt}(0^+) = \frac{L-M}{L'-M} \frac{di}{dt}(0^+) \quad \text{et} \quad \frac{di}{dt}(0^+) = E \frac{L'-M}{LL'-M^2} \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0^+) = RE \frac{L'-M}{LL'-M^2}.$$

3.a. La notation complexe introduite dans **1.b.** donne :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega) \underline{s} = [j(L'-M)\omega + \rho] \frac{RE}{LL'-M^2}; \underline{B} = \frac{R}{LL'-M^2} \frac{\rho + j(L'-M)\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega}.$$

$$\text{b.}\alpha. \omega \rightarrow 0 ; \underline{B} \rightarrow \frac{R\rho}{(LL'-M^2)\omega_0^2} = \frac{R}{R+r} ; h = 20\log \frac{R}{R+r} ; \phi = 0.$$

$$\text{β. } \omega \rightarrow +\infty ; |\underline{B}| \rightarrow \frac{R|(L'-M)|}{2\lambda(LL'-M^2)\omega} \quad h = 20\log \frac{R|(L'-M)|}{LL'-M^2} - 20\log \omega ;$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } L' > M. \quad \phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } L' < M.$$

$$\gamma. \text{ Cas particulier de } \text{3.1.b.} : L' = M : \underline{B} = \frac{R}{M(L-M)} \frac{\rho}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda_1 j\omega} ;$$

$$\omega \rightarrow 0 ; \underline{B} \rightarrow \frac{R}{R+r} \quad \text{et} \quad h = 20\log \frac{R}{R+r} ; \phi = 0 ;$$

$$\omega \rightarrow +\infty ; \underline{B} \sim \frac{-\rho R}{\omega^2(L-M)M} \quad \text{et} \quad h = 20\log \frac{\rho R}{M(L-M)} - 40\log \omega ; \phi = \pi.$$

4.a.α. Par continuité $i(0^+) = i(0^-) = 0$; $i'(0^+) = i'(0^-) = 0$.

β. $V_-(0^+) = 0 \Rightarrow \varepsilon(0^+) = E \Rightarrow V_s(0^+) = V_{\text{sat}}$ (v_e joue le rôle de e de la figure 4).

$$V_{\text{sat}} = L \frac{di}{dt}(0^+) + M \frac{di'}{dt}(0^+) = L' \frac{di'}{dt}(0^+) + M \frac{di}{dt}(0^+) ; \text{ on en tire, comme en 2.b.,}$$

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{L'-M}{LL'-M^2} V_{\text{sat}} ; \frac{di'}{dt}(0^+) = \frac{L-M}{LL'-M^2} V_{\text{sat}} .$$

b. Dans une première phase : $v_s = V_{\text{sat}}$; $v_e = E$.

Les équations différentielles satisfaites par i et i' sont :

$$V_{\text{sat}} = L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} + (R+r)i ; V_{\text{sat}} = L' \frac{di'}{dt} + M \frac{di}{dt} + \rho i' .$$

On élimine $\frac{di'}{dt}$; on en déduit i' qu'on reporte ;

$$\text{on trouve : } \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\lambda \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{\rho}{LL'-M^2} V_{\text{sat}} ; \frac{d^2 i'}{dt^2} + 2\lambda \frac{di'}{dt} + \omega_0^2 i' = \frac{R+r}{LL'-M^2} V_{\text{sat}} .$$

5.a. La seconde phase commence quand $\varepsilon = 0$ (soit à l'instant t_1 tel que $Ri(t_1) = E$).

Le régime $i = \frac{E}{R}$ s'installe avec $\varepsilon = 0$ (cf. rôle de l'inductance s'opposant aux variations)

$$v_s = 0 + M \frac{di'}{dt} + \frac{R+r}{R} E \text{ et } v_s = L' \frac{di'}{dt} + \rho L' ; \text{ on élimine } \frac{di'}{dt} ;$$

$$\text{on en déduit } i' \text{ qu'on reporte ; on trouve : } \frac{dv_s}{dt} + \frac{\rho}{L'-M} v_s = \frac{R+r}{L'-M} \frac{\rho}{R} E \text{ sauf si } L' = M,$$

$$\text{de constante de temps } \tau' = \frac{L'-M}{\rho} .$$

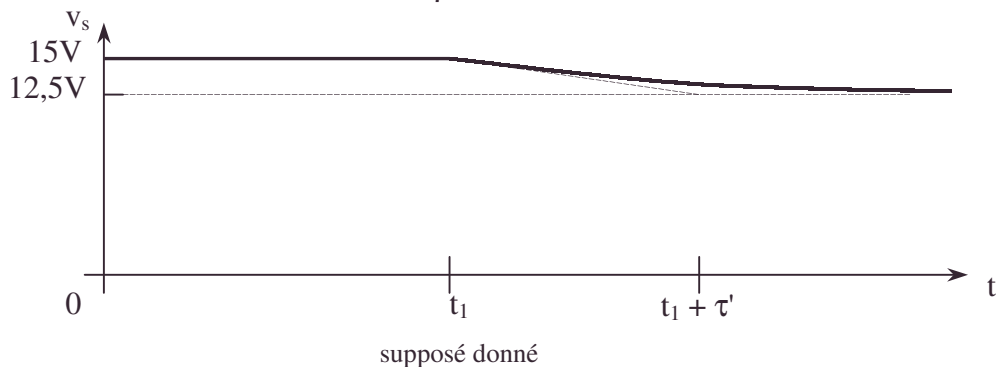
$$\text{Pour } t = t_1, v_s = V_{\text{sat}} ; v_s = \frac{R+r}{R} E + \left[V_{\text{sat}} - \frac{R+r}{R} E \right] e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau'}} \text{ pour } t > t_1 .$$

$$\text{b. Si } M = L'-0, v_s = \frac{R+r}{R} E \forall t .$$

$$\text{c. } v_s \rightarrow \frac{R+r}{R} E ; \text{ or quand } \omega \rightarrow 0, \underline{S} \rightarrow \frac{R}{R+r} \underline{E} ; \frac{v_s}{E} \cdot \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = 1 \text{ cf. } \underline{HA} = 1 ;$$

$$\text{d. Si } M > L', \frac{L'-M}{\rho} < 0 ; v_s \text{ sature ; il faudra } L' \geq M .$$

$$\text{6. A.N. : } \frac{R+r}{R} E = 12,5V ; \tau' = \frac{L'-M}{\rho} = 4.10^{-4} s .$$



IV.1. Reprenons **III.1.a.** : $s = Ri$; $e = L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} + (R+r) i$; $e = L' \frac{di'}{dt} + M \frac{di}{dt} + \rho i'$.

Eliminons $\frac{di'}{dt}$, vu $LL' - M^2 = 0$; $i' = \frac{1}{\rho M} ((R+r) i - (L'-M) e)$ est réinjecté ;

comme $i = \frac{s}{R}$, on trouve l'équation de **III.1.a.** simplifiée vu $M^2 = LL'$.

$$(\rho L + (R+r)L') \frac{ds}{dt} + \rho(R+r)s = \rho Re + R(L'-M) \frac{de}{dt} .$$

2.a. Par continuité de i , on a la continuité de s : $s(0+) = s(0-) = 0$.

b. $L' = M$; or $LL' = M^2 \Rightarrow L = L' = M$.

c. $e = E \Rightarrow \frac{de}{dt} = 0$; l'équation en s s'écrit : $(\rho L + (R+r)L') \frac{ds}{dt} + \rho(R+r)s = \rho RE$,

$$\Rightarrow s = \frac{RE}{R+r} (1 - e^{\frac{-t}{\frac{\rho L + (R+r)L'}{\rho(R+r)}}}) .$$

3.a. L'équation différentielle du **IV.1.** s'écrit :

$$S[\rho(R+r) + j\omega(L'(R+r) + \rho L)] = R(j\omega(L'-M) + \rho)E .$$

$$\underline{B'} = \frac{R}{R+r} \cdot \frac{1 + j\omega \frac{L'-M}{\rho}}{1 + j\omega \left(\frac{L'}{\rho} + \frac{L}{R+r} \right)} .$$

b.α. $L' \neq M$: $\omega \rightarrow 0$; $B' \rightarrow \frac{R}{R+r}$; $h' = 20 \log \frac{R}{R+r}$; $\phi' = 0$.

$$\omega \rightarrow +\infty ; B' \rightarrow \frac{R}{R+r} \cdot \frac{L'-M}{L' + \frac{\rho L}{R+r}} ; h' = 20 \log \frac{R}{R+r} \frac{|L'-M|}{\left(L' + \frac{\rho L}{R+r} \right)} ;$$

$\phi' = 0$ si $L' > M$ et $\phi' = \pi$ si $L' < M$.

β. $L' = M$: $\omega \rightarrow 0$; $B' \rightarrow \frac{R}{R+r}$; $h' = 20 \log \frac{R}{R+r}$; $\phi' = 0$.

$$\omega \rightarrow +\infty , B' \sim \frac{R}{R+r} \frac{1}{j\omega \left(\frac{L'}{R} + \frac{L}{R+r} \right)} , h' = 20 \log \left(\frac{R}{L + (R+r) \frac{L'}{R}} \right) - 20 \log \omega , \phi' = -\frac{\pi}{2} .$$

4. Reprenons les questions **III.4.** et **5.**

• La condition $M^2 = LL'$ apporte des modifications sur l'équation en i mais non sur le résultat de v_s qui reste identique formellement à celui de **III.5.a.**

$L' > M$ assure la stabilité, soit :

pour $t < t_1$, $v_s = V_{sat}$

$$\text{et pour } t > t_1 , v_s = \frac{R+r}{R} E + \left(V_{sat} - \frac{R+r}{R} E \right) e^{-\frac{t-t_1}{\frac{L'-M}{\rho}}}$$

• La valeur physique de M intervient dans t_1 (M, L, L', E, R, ρ, r) toujours défini par $Ri(t_1) = E$ (cf. $\varepsilon = 0$) :

• asymptote, continuité de l'intensité d'une bobine, valeur initiale

- i satisfait à $t < t_1$ à **III.4.** : $(\rho L + (R + r)L') \frac{di}{dt} + \rho(R + r)i = \rho V_{\text{sat}}$.

Soit avec les conditions initiales : $i = \frac{V_{\text{sat}}}{R + r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\frac{\rho L + (R + r)L'}{\rho(R + r)}}} \right)$.

On a : $\frac{RV_{\text{sat}}}{R + r} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\frac{\rho L + (R + r)L'}{\rho(R + r)}}} \right) = E \Rightarrow t_1 = -\frac{\rho L + (R + r)L'}{\rho(R + r)} \ln \left(1 - \frac{R + r}{R} \frac{E}{V_{\text{sat}}} \right)$.

6.1.4.5. Filtrage temporel

Voir page 884.

6.1.4.6. Filtrage numérique

Voir page 890.

6.1.4.7. Analyse harmonique

Voir page 982.

6.1.4.8. Modulation de fréquence

Voir page 987.

6.1.4.9. Etude fréquentielle d'un signal

Voir page 991.

6.1.4.10. Fonction retard

Voir page 1008.

6.1.5. Oscillateurs

Appartient aux programmes de PCSI, MP, TSI2

6.1.5.1. Multivibrateur astable

Une tension créneau alternatif d'amplitude U , de fréquence réglable est obtenue grâce au montage ci-contre.

L'amplificateur opérationnel est parfait; on note $\varepsilon = V^+ - V^-$ la tension différentielle d'entrée et les tensions de saturation à la sortie sont $+U$ et $-U$.

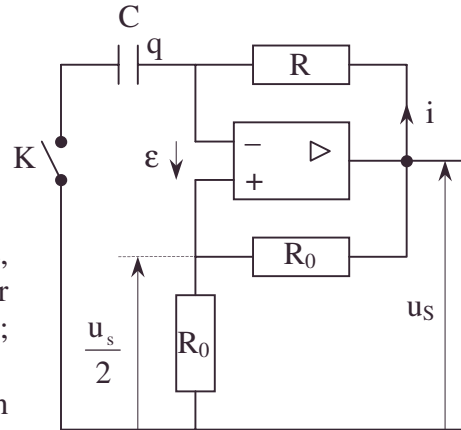
1. Le condensateur est initialement déchargé, l'interrupteur K ouvert et l'amplificateur opérationnel est en saturation basse, soit $u_s = -U$; à $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

Exprimer la tension différentielle d'entrée ε en fonction du temps et en déduire l'instant t_1 où l'amplificateur opérationnel bascule en saturation haute, soit $u_s = +U$.

2. Exprimer dans cette nouvelle phase la tension différentielle d'entrée ε en fonction du temps et en déduire l'instant t_2 où se produit le basculement en saturation basse.

3. Montrer qu'un phénomène périodique apparaît et calculer sa période T en fonction de R et de C .

Tracer les courbes représentant $\varepsilon(t)$ et $u_s(t)$ en fonction du temps.



Autres concours ; Durée : 0h30

Corrigé

$$1. i = \frac{dq}{dt}; \frac{q}{C} = u_s - Ri = \frac{u_s}{2} - \varepsilon \Rightarrow \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = u_s;$$

$$\text{or } \frac{q}{C} = \frac{u_s}{2} - \varepsilon \Rightarrow RC \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon = -\frac{u_s}{2} + RC \frac{du_s}{dt};$$

$$\text{Résolution : } t = 0; u_s = -U; q(0+) = 0; \Rightarrow \varepsilon(0+) = -\frac{U}{2} \Rightarrow u_s = -U; \frac{du_s}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t) = U \left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

ε change de signe pour $t = RC \ln 2$ ce qui provoque $u_s = +U$ et par continuité,

$$q(t_1 + 0) = -\frac{CU}{2}.$$

$$2. \text{ A } t = RC \ln 2 + 0, u_s = U \Rightarrow \varepsilon + RC \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{u_s}{2}; \text{ or } q(t_1 + 0) = -\frac{CU}{2}.$$

$$\text{or } \varepsilon = \frac{U}{2} - \frac{q}{C} \Rightarrow \varepsilon(t_1 + 0) = U \Rightarrow \varepsilon = \frac{U}{2} \left(-1 + 3e^{-\left(\frac{t-t_1}{RC}\right)} \right). \text{ Le changement de signe de}$$

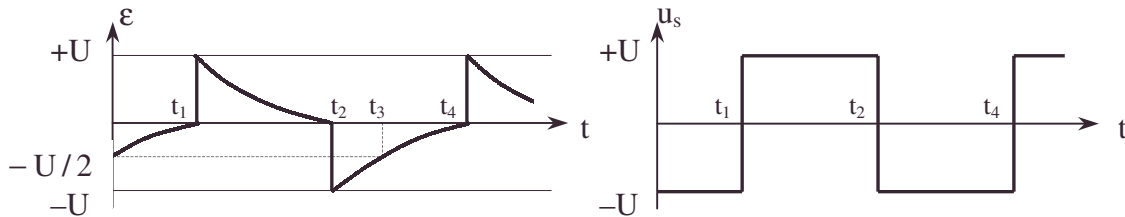
ε se fait pour $t_2 - t_1 = RC \ln 3$, ce qui provoque le basculement de u_s à $-U$;

$$q(t_2^-) = \frac{CU}{2} ; t_2 = RC(\ln 2 + \ln 3).$$

$$3. q(t_2^-) = q(t_2^+) = C \frac{U}{2} ; \text{ or } u(t_2 + 0) = -U \text{ d'où } \varepsilon(t_2 + 0) = -\frac{U}{2} ;$$

$$\varepsilon + RC \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{U}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{U}{2} \left(1 - 3e^{-\frac{(t-t_2)}{RC}} \right) ;$$

ε vaut $-\frac{U}{2}$ pour $t_3 - t_2 = RC \ln \frac{3}{2}$ et alors $q(t_3) = 0$. On recommence le cycle.



t_3 est la période : $T = t_3 = t_3 - t_2 + t_2 - t_1 + t_1 = RC(\ln \frac{3}{2} + \ln 3 + \ln 2) = 2RC \ln 3$.

6.1.5.2. Oscillateur sinusoïdal

A. Etude d'un oscillateur à réaction

1. Une bobine d'inductance propre L et de résistance interne r très faible, supposée associée en série avec L , est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω_0 (nous supposons $r \ll L \omega_0$).

1. Quelle doit être la résistance R du dipôle de la figure 1 où L est une inductance pure égale à celle de la bobine, pour que celui-ci ait pratiquement, pour une pulsation ω_0 , même impédance complexe que la bobine ?

2. Application numérique : $L = 100 \text{ mH}$; $r = 10 \Omega$; $\omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$. Calculer R . Calculer également les impédances complexes de la bobine et du dipôle de la figure 1 pour les pulsations $\omega_{01} = 9000 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_{02} = 11000 \text{ rad.s}^{-1}$.

Conclure.

2. Le circuit (noté \mathcal{A}) de la figure 2 est alimenté par une source idéale de tension sinusoïdale $u = U_0 \cos \omega t$ de pulsation ω variable (non représentée sur la figure). La différence de potentiel entre les points B' et B est de la forme $v = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

1. Calculer la fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{U_0 e^{j\omega t}} \text{ de ce circuit.}$$

2. On pose $\underline{H} = B.e^{j\varphi}$ (B réel positif). Etudier les variations de B et de φ en fonction de ω . Déterminer en particulier la pulsation ω_0 pour laquelle B est maximum, les

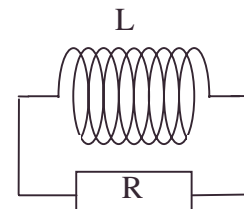


Figure 1

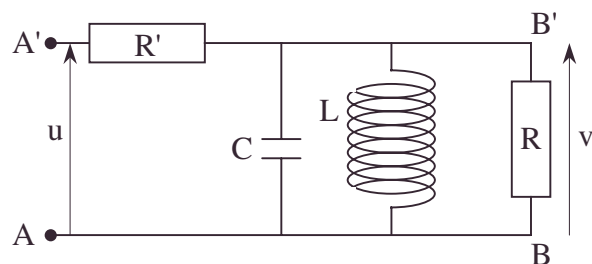


Figure 2 : circuit \mathcal{A}

pulsations ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) qui délimitent la bande passante (à -3dB) et le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ de ce circuit.

3. Application numérique : $L = 100 \text{ mH}$; $\omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$. La valeur de R a été déterminée à la question **A.1.2.**, $R' = 10 \text{ k}\Omega$.

Calculer C , $B_0 = B(\omega_0)$, ω_1 , ω_2 , $\omega_2 - \omega_1$ et Q . Ce circuit est-il très sélectif ? Représenter l'allure des courbes $B(\omega)$ et $\phi(\omega)$.

Expliquer comment et dans quelles conditions on pourra utiliser la bobine de la question **A.1.** pour réaliser ce circuit.

3. On considère un amplificateur opérationnel (noté A.O.) idéal dont la tension de saturation de la sortie vaut V_{sat} ($V_{\text{sat}} > 0$). La caractéristique de transfert de cet A.O. est représentée en figure 3.

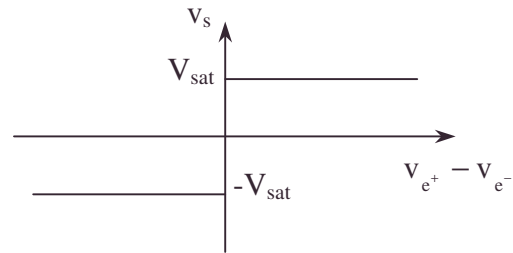
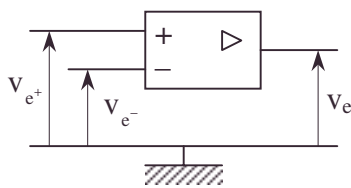


Figure 3

Pour	$v_{e+} - v_{e-} = 0$	L'A.O. a un fonctionnement linéaire.
	$v_{e+} - v_{e-} \neq 0$	un phénomène de saturation apparaît.
	$v_{e+} - v_{e-} > 0$	$v_s = V_{\text{sat}}$.
	$v_{e+} - v_{e-} < 0$	$v_s = -V_{\text{sat}}$.

L'A.O. est employé dans le circuit (noté \mathcal{B}) de la figure 4.

1. On suppose que l'A.O. a un fonctionnement linéaire.

a. Calculer la tension de sortie v_s en fonction de la tension d'entrée v_e et des résistances R_1 et R_2 . En déduire le gain $G_0 = \frac{v_s}{v_e}$ de ce montage amplificateur.

Préciser les limites v_{e1} et v_{e2} ($v_{e1} < v_{e2}$) que ne doit pas dépasser la tension d'entrée v_e pour que l'A.O. conserve un régime de fonctionnement linéaire.

b. Application numérique : $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$; $V_{\text{sat}} = 12 \text{ V}$. Calculer G_0 , v_{e1} , v_{e2} .

2. Le régime de fonctionnement de l'A.O. n'est plus supposé linéaire a priori.

Représenter les graphes :

– de la tension de sortie v_s en fonction de la tension d'entrée v_e .

– du gain $G = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction de v_e .

3. On alimente le circuit \mathcal{B} par une tension sinusoïdale d'amplitude V_{e0} ($V_{e0} > 0$) et de pulsation ω : $v_e = V_{e0} \cos \omega t$.

a. On suppose $V_{e0} \leq v_{e2}$ et on pose $v_s = A_1 \cos \omega t$.

Exprimer A_1 en fonction de G_0 et V_{e0} .

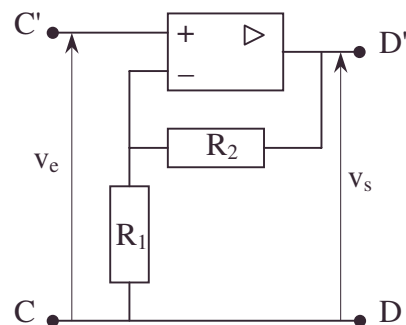


Figure 4 : circuit \mathcal{B}

b. On suppose $V_{e_0} \geq v_{e_2}$ et on pose $v_{e_2} = V_{e_0} \cos \theta_0$ ($\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

– Représenter l'allure de la tension de sortie v_s en fonction de ωt .

– On se propose de décomposer v_s en série de Fourier :

$$v_s = A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots$$

– Quelle est la valeur de A_0 ?

– Quelles sont les valeurs des B_n pour $n = 1, 2, 3, \dots$?

Calculer A_1 en fonction de V_{sat} et de θ_0 . Représenter l'allure des variations de A_1 en fonction de θ_0 .

c. On considère la tension $V_{s_1} = A_1 \cos \omega t$ (A_1 étant défini au cours des deux questions précédentes pour $V_{e_0} \leq v_{e_2}$ et pour $V_{e_0} \geq v_{e_2}$). Représenter l'allure des variations de A_1 en fonction de V_{e_0} .

4. On associe les deux circuits \mathcal{A} et \mathcal{B} suivant le schéma de montage de la figure 5. La résistance de charge de ce circuit est supposée infinie ; par suite, le courant de sortie i_s est nul.

1. L'amplificateur est supposé fonctionner en régime linéaire.

a. Une source idéale de tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos \omega t$ (non représentée sur la figure 5) alimente le circuit précédent. La tension de sortie S est alors sinusoïdale et vaut $S(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Calculer la fonction de transfert

$$G = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{E_0 e^{j\omega t}} \text{ de ce circuit en fonction}$$

de G_0 et de \underline{H} .

b. A quelle condition portant sur \underline{H} et G_0 la tension de sortie S peut-elle être différente de zéro alors que la tension d'entrée E est nulle ? Lorsque cette condition est réalisée, un tel circuit développe un signal de sortie S sinusoïdal dès que l'on connecte les tensions d'alimentation de l'A.O. (c'est-à-dire lors de la mise sous tension du circuit.) : il constitue un générateur de tension sinusoïdale ou oscillateur sinusoïdal.

En utilisant les résultats de la question A.2., en déduire :

– La pulsation ω'_0 de l'oscillation sinusoïdale en fonction de ω_0 .

– La valeur G_{0c} que doit avoir le gain G_0 de l'A.O. en fonction de R et R' pour que la condition ci-dessus soit réalisée.

c. Application numérique: en reprenant les valeurs numériques de la question A.2., calculer ω'_0 et G_{0c} .

d. Nous supposons que le gain G_0 du circuit amplificateur \mathcal{A} ne soit pas égal à G_{0c} a priori. Dans ces conditions, nous nous proposons de préciser comment le circuit de la figure 5 peut donner naissance à une oscillation entretenue lors de sa mise sous tension, à l'instant $t = 0$. A cet instant, nous supposons qu'il apparaît pendant une durée ε très petite, une "micro-tension" à l'entrée de ce circuit.

1. Etablir l'équation différentielle à laquelle doit obéir la tension de sortie $S(t)$ pour $t > \varepsilon$.

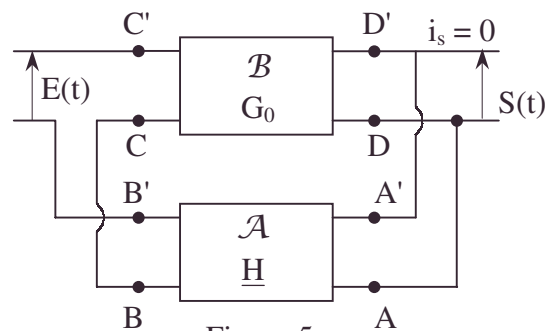


Figure 5

2. On pose $\frac{2}{\tau} = \frac{|G_0 - G_{0c}|}{CR'}$ et on suppose $\frac{1}{\tau} < \omega_0$. En déduire la forme des solutions $S(t)$ de cette équation différentielle pour $t > \varepsilon$ dans les trois cas $G_0 < G_{0c}$, $G_0 = G_{0c}$, $G_0 > G_{0c}$ en fonction de τ et ω_0 . (On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.) Conclure.

2. Le régime de fonctionnement de l'A.O. n'est plus supposé linéaire a priori. Au cours de cette question, on utilisera les résultats des questions A.2. et A.3., valeurs numériques comprises.

a. Application numérique : calculer τ .

Vérifier que l'on a $G_0 > G_{0c}$ et $\frac{1}{\tau^2}$ négligeable devant ω_0^2 .

b. Expliquer pourquoi, en régime permanent, la tension aux bornes du condensateur C est (quasi) sinusoïdale de pulsation ω_0 : $v(t) = V_{0i} \cos \omega_0 t$. (Les explications fournies tiendront compte des résultats numériques trouvés aux questions A.2. et A.3.)

c. Déterminer à l'aide d'une méthode graphique, l'amplitude V_{0i} de la tension v ; (le résultat tiendra compte des valeurs numériques de G_0 et G_{0c}).

d. Application numérique : calculer V_{0i} .

e. On pose $G_{ey} = \frac{A_1}{V_{0i}}$ (A_1 étant défini à la question A.3.3.). Interpréter la relation

qui existe entre G_{ey} et $H(\omega_0)$.

B. Etude d'un oscillateur à résistance négative

1. L'A.O. précédent est maintenant utilisé dans le circuit dipolaire BB' de la figure 6.

1. Dans le cas où l'A.O. conserve un régime de fonctionnement linéaire, montrer que le dipôle BB' est équivalent à une résistance négative ($-R_N$), ($R_N > 0$) que l'on exprimera en fonction de R_1 , R_2 et R' .

2. Le régime de fonctionnement de l'A.O. n'étant plus supposé linéaire a priori, déterminer la caractéristique $i = f(v)$ du dipôle BB', lorsque v varie entre $-V_{sat}$ et $+V_{sat}$. Représenter la courbe $i = f(v)$.

3. Nous admettons, dans toute la suite de ce problème, que nous pouvons remplacer l'équation $i = f(v)$ de la caractéristique trouvée ci-dessus par l'équation approchée $i = g(v) = av(-1 + bv^2)$ où a et b désignent deux constantes positives. Déterminer les constantes a et b de manière à ce que les fonctions $f(v)$ et $g(v)$:

- soient nulles pour les mêmes valeurs de la tension v .
- admettent la même tangente en $v = 0$.

On exprimera a et b en fonction de R_N et de V_{sat} .

2. Le dipôle ci-dessus est inséré dans le circuit de la figure 7.

1. L'A.O. est supposé fonctionner en régime linéaire.

a. Etablir l'équation différentielle que vérifie la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur C et la comparer à celle obtenue à la question A.4.1.d. Conclure en comparant le circuit de la figure 7 et celui de la figure 5 (dans lequel on fait $E = 0$).

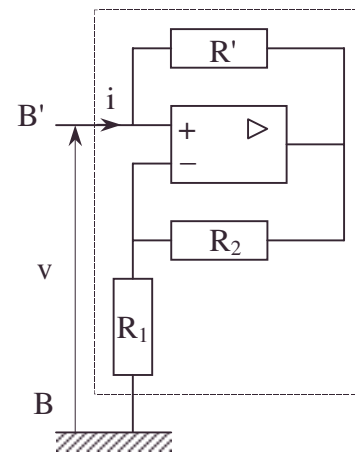


Figure 6

b. En déduire la condition pour que le circuit soit le siège d'oscillations sinusoïdales dont on déterminera la pulsation.

2. Le régime de fonctionnement de l'A.O. n'est plus supposé linéaire à priori et on admet que la caractéristique du dipôle BB' est bien représentée par la relation $i = g(v)$. On suppose $R > R_N$ et

$$\left[\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R} \right) \right]^2 \ll \omega_0^2.$$

a. Que devient l'équation différentielle trouvée ci-dessus ?

b. On donne aux différentes composantes du circuit les mêmes valeurs numériques que dans la partie A du problème. Montrer que, en régime permanent, la tension $v(t)$ est (quasi) sinusoïdale de pulsation ω_0 . Déterminer l'amplitude V_{01}' de la tension $v(t)$ en écrivant que sur une période l'énergie consommée par la résistance R est compensée par celle fournie par le dipôle BB'. On exprimera V_{01}' en fonction de V_{sat} , R et R_N .

c. Application numérique : calculer V_{01}' et comparer cette valeur à l'amplitude V_{01} obtenue à la question A.4.2.d. Conclure.

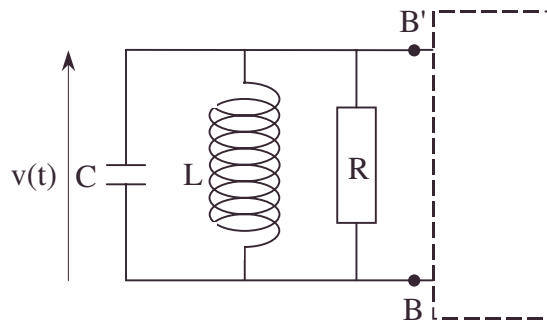


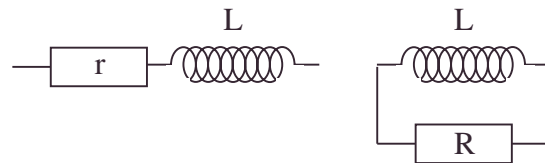
Figure 7

Centrale ; Durée 4h

Corrigé

A.1.1. $Z_1 = r + jL\omega_0$;

$$Z_2 = \frac{jRL\omega_0}{R + jL\omega_0} = \frac{jR^2L\omega_0 + RL^2\omega_0^2}{R^2 + L^2\omega_0^2};$$



L'identification de Z_1 et Z_2 sur \mathbb{C} donne :

$$L\omega_0 = \frac{R^2L\omega_0}{R^2 + L^2\omega_0^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{1 + \frac{L^2\omega_0^2}{R^2}} \Rightarrow R \gg L\omega_0.$$

$$r = \frac{RL^2\omega_0^2}{R^2 + L^2\omega_0^2} = \frac{L^2\omega_0^2}{R \left(1 + \frac{L^2\omega_0^2}{R^2} \right)} = \frac{L^2\omega_0^2}{R}.$$

$$R = \frac{L^2\omega_0^2}{r}.$$

2.a. AN : $R = 10^5 \Omega = 100 \text{ k}\Omega$.

b. $\omega_{01} = 9000 \text{ rad.s}^{-1}$; $Z_1 = 10 + j900$; $Z_2 = 8,1 + j900$.

$\omega_{02} = 11000 \text{ rad.s}^{-1}$; $Z_1 = 10 + j1100$; $Z_2 = 12,1 + j1100$.

c. Vu $r \ll L\omega_0$; Z quasi proportionnel à ω_0 : $Z \approx jL\omega_0$.

2.1. On a un montage potentiométrique : $\underline{v} = \frac{\underline{u}Z}{Z + R'}$ avec $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$,

$$\text{soit } Z = \frac{R}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} ; \underline{H} = \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{1}{1 + \frac{R'}{Z}} = \frac{1}{1 + \frac{R'}{R} + jR'\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

$$\mathbf{2.a.} \quad B = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R'}{R}\right)^2 + R'^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} ; \varphi = \arctan \frac{RR'}{R + R'} \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right).$$

(Voir graphiques)

b. Le maximum de B correspond au minimum du dénominateur soit $LC\omega_0^2 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$\mathbf{c.} \quad B_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{R'}{R}}. \text{ Calculons } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ tels que } B(\omega) = \frac{B_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Soit à résoudre : $R'^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 = \left(1 + \frac{R'}{R}\right)^2$ soit encore :

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = \pm \frac{(R + R')}{RR'} \text{ d'où } LC\omega^2 \pm \frac{(R + R')}{RR'}L\omega - 1 = 0.$$

On trouve :

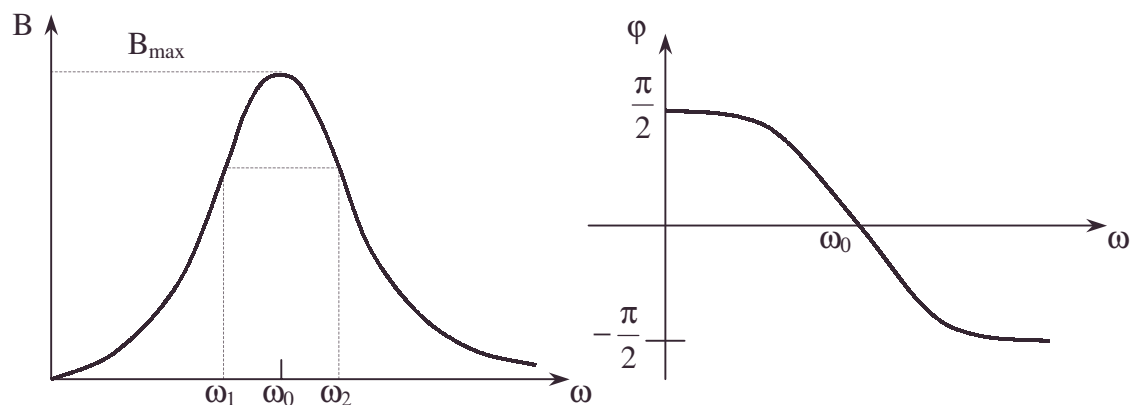
$$\omega_1 = \frac{R + R'}{2RR'C} \left[\sqrt{1 + \frac{4C}{L} \left(\frac{RR'}{R + R'} \right)^2} - 1 \right] \text{ et } \omega_2 = \frac{R + R'}{2RR'C} \left[\sqrt{1 + \frac{4C}{L} \left(\frac{RR'}{R + R'} \right)^2} + 1 \right].$$

$$\mathbf{d.} \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \text{ avec } \omega_2 - \omega_1 = \frac{R + R'}{RR'C} \Rightarrow Q = \frac{RR'}{R + R'} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$\mathbf{3. AN :} \quad C = \frac{1}{L\omega_0^2} ; C = 100 \text{ nF} ; \omega_1 = 9465 \text{ rad.s}^{-1} ; \omega_2 = 10565 \text{ rad.s}^{-1} ; B_0 = \frac{1}{1 + \frac{R'}{R}} ;$$

$$B_0 = 0,90 ; \omega_2 - \omega_1 = 1100 \text{ rad.s}^{-1} ; Q = 9,1.$$

Le circuit est peu sélectif pour ces valeurs numériques.



On pourra utiliser à la place de L et de R en parallèle la bobine de la question **A.1.** au voisinage de $\omega = \omega_0$. Les valeurs alors calculées montrent la validité du remplacement pour ω_0 et pour des valeurs voisines, soit dans la bande passante.

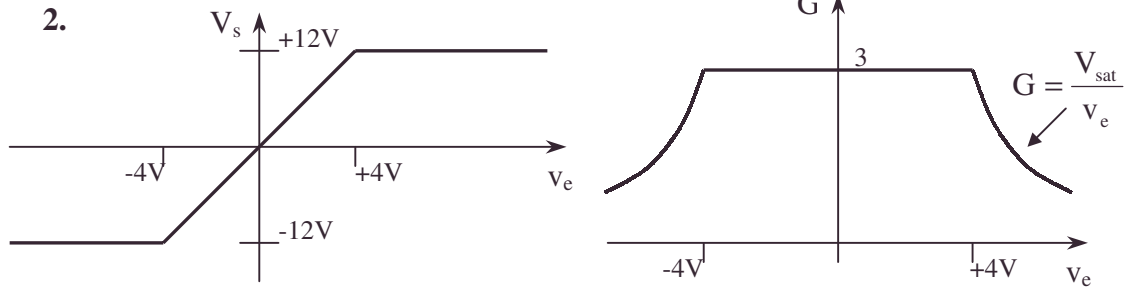
3.1.a. Dans le montage potentiométrique $V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \Rightarrow V_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_e$ car

$$V_- = V_+ = v_e, \text{ d'où } G_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

$-V_{\text{sat}} < v_s < +V_{\text{sat}}$ pour que le régime soit linéaire, d'où : $\frac{-V_{\text{sat}}}{1 + \frac{R_2}{R_1}} < v_e < \frac{+V_{\text{sat}}}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$;

$$\Rightarrow V_{e_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} ; V_{e_1} = \frac{-R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}.$$

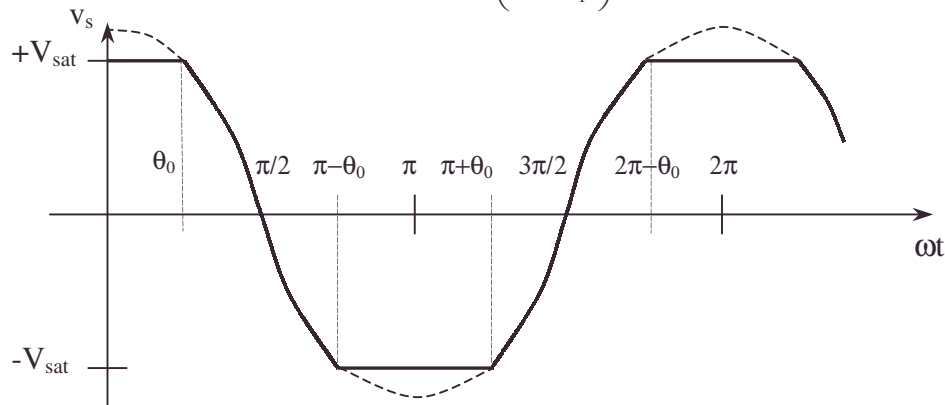
b. AN : $G_0 = 3$; $V_{e_1} = -4V$; $V_{e_2} = +4V$.



3.a. $v_s = G_0 v_e = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{e_0} \cos \omega t$, d'où $A_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{e_0}$.

b.α. Tant que $V_{e_1} < V_e < V_{e_2}$, le régime est linéaire. Pour $V_e < V_{e_1}$ ou $V_e > V_{e_2}$, le régime est saturé. Cas limite, on a : $V_e = \pm V_{e_2}$ soit $V_{e_0} \cos \omega t = \pm V_{e_0} \cos \theta_0$ soit

$\omega t = \theta_0, \pi - \theta_0, \pi + \theta_0, 2\pi - \theta_0$. On a alors $\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{e_0} \cos \theta_0 = V_{\text{sat}}$.

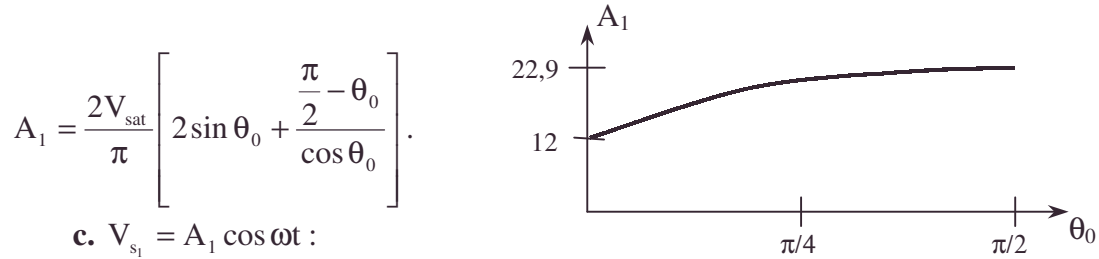


β. $A_0 = \overline{V_s} = \frac{1}{T} \int_0^T V_s(t) dt = 0$; V_s étant une fonction paire, les coefficients de projection sur les fonctions $\sin n\omega t$ (impaires) sont nuls : $B_n = 0$.

$A_1 = \frac{2}{T} \int_0^T V_s(t) \cos \omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_s(t) \cos \omega t dt$ vu v_s paire en la prolongeant ainsi pour $t < 0$.

$$A_1 = \frac{4}{T} \left[\int_0^{\frac{\theta_0}{\omega}} V_{\text{sat}} \cos \omega t dt + \int_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\pi - \theta_0}{\omega}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{e_0} \cos^2 \omega t dt + \int_{\frac{\pi - \theta_0}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} (-V_{\text{sat}}) \cos \omega t dt \right] + 0$$

(cf. contributions opposées).



– pour $0 \leq V_{e_0} \leq V_{e_2}$; $A_1 = V_{e_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$;

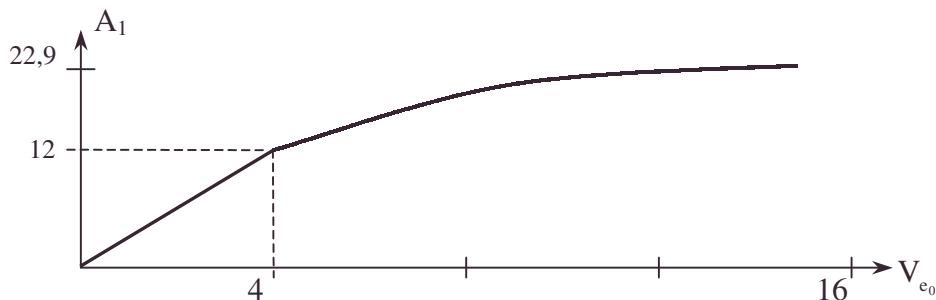
– pour $V_{e_0} \geq V_{e_2}$: A.N. : $V_{e_0} \geq 4V$.

$$A_1 = \frac{2V_{\text{sat}}}{\pi} \left(2\sin\theta_0 + \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_0}{\cos\theta_0} \right) \text{ avec } \cos\theta_0 = \frac{V_{e_2}}{V_{e_0}} ;$$

soit
$$A_1 = \frac{2V_{\text{sat}}}{\pi} \left[2\sqrt{1 - \left(\frac{V_{e_2}}{V_{e_0}} \right)^2} + \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{V_{e_2}}{V_{e_0}}}{\frac{V_{e_2}}{V_{e_0}}} \right] \text{ avec } V_{e_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} .$$

soit
$$A_1 = \frac{2V_{\text{sat}}}{\pi} \left[2\sqrt{1 - \left(\frac{R_1 V_{\text{sat}}}{(R_1 + R_2) V_{e_0}} \right)^2} + \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{R_1 V_{\text{sat}}}{(R_1 + R_2) V_{e_0}}}{\frac{R_1 V_{\text{sat}}}{(R_1 + R_2) V_{e_0}}} \right] .$$

On a un point anguleux pour $V_{e_0} = V_{e_2}$.



4.1.a. Soient $\underline{V}_1 = \underline{V}_{C'} - \underline{V}_C$ et $\underline{V}_2 = \underline{V}_{B'} - \underline{V}_B$.

$$\underline{S} = G_0 \underline{V}_1 \text{ et } \underline{V}_2 = \underline{H} \underline{S} ; \text{ or } \underline{E} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = \frac{\underline{S}}{G_0} - \underline{H} \underline{S} = \frac{\underline{S}}{G_0} (1 - G_0 \underline{H}) .$$

$$G = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{G_0}{1 - G_0 \underline{H}} .$$

Le signe – du dénominateur est lié au montage proposé et reste dans le cadre.

b.α. $\underline{S} = \frac{G_0 \underline{E}}{1 - G_0 \underline{H}} \neq 0$ pour $\underline{E} = 0$ si $1 - G_0 \underline{H} = 0$.

β. $G_0 = \frac{1}{\underline{H}}$ s'écrit $\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{R + R'}{R} + jR' \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$.

On en déduit sur \mathbb{C} : $LC\omega_0'^2 = 1$ soit $\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ et $G_{0c} = \frac{R+R'}{R} = \frac{R_1+R_2}{R_1}$.

c. AN : $\omega_0' = 10000 \text{ rad.s}^{-1}$; $G_{0c} = 1,1$ avec les valeurs de **A.2**.

d.1. $G_0 \neq G_{0c}$; Ecrivons l'équation différentielle en s de pour $E = 0$ (C'est à dire

quand $t > \varepsilon$) : $\underline{V}_2 = \underline{V}_1 = \frac{\underline{S}}{G_0} = \underline{H}\underline{S}$.

$$\text{Vu } \frac{ds}{dt} = j\omega s \text{ et } \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s, \quad \frac{\underline{S}}{\underline{H}} = \frac{\underline{S}}{G_0} \Rightarrow \frac{R+R'}{R}s + R'C \frac{ds}{dt} - \frac{R'}{L} \int_0^t s dt = \frac{s}{G_0}$$

se transcrit : $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{G_{0c}-G_0}{CR'} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$.

2. Soit $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \gamma \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ avec $\gamma = +1$ si $G_0 < G_{0c}$; $\gamma = -1$ si $G_0 > G_{0c}$

de discriminant réduit $\Delta' = \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 < 0$ vu l'énoncé.

a. $G_0 < G_{0c}$; $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ a pour solutions vu $\Delta' < 0$:

$$s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} t + \varphi_1\right) \text{ régime sinusoïdal amorti.}$$

b. $G_0 = G_{0c}$: $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$ a pour solutions :

$s(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$ régime sinusoïdal non amorti ni amplifié.

c. $G_0 > G_{0c}$: $\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{2}{\tau} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ a pour solutions :

$$s(t) = Ae^{\frac{t}{\tau}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} t + \varphi_3\right) \text{ régime sinusoïdal amplifié.}$$

Conclusion : seul le régime $G_0 = G_{0c}$ est recherché (Utilisation fréquente d'oscillateurs).

$$\mathbf{2.a.} \quad \tau = \frac{2CR'}{|G_0 - G_{0c}|} ; \text{AN : } \tau = 1,05 \cdot 10^3 \text{ s.}$$

On a $G_0 > G_{0c}$ car $3 > 1,1$; $\frac{1}{\tau^2} \ll \omega_0^2$ car $10^{-6} \ll 10^8$ (en s^{-2}).

b. $G_0 > G_{0c}$: $s = Ae^{\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t + \varphi_3)$.

On sortira du régime linéaire au voisinage des crêtes. Le filtre passe-bande \mathcal{A} ne retiendra que la pulsation ω_0 dans le développement en série de Fourier.

$$V_2 = A_1 H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} = \frac{A_1}{G_{0c}} e^{j\omega_0 t} \text{ (cf. 4.1.a.)}$$

La tension aux bornes de C est donc de la forme: $V = V_{0_1} \cos \omega_0 t$ avec $V_{0_1} = \frac{A_1}{G_{0c}}$.

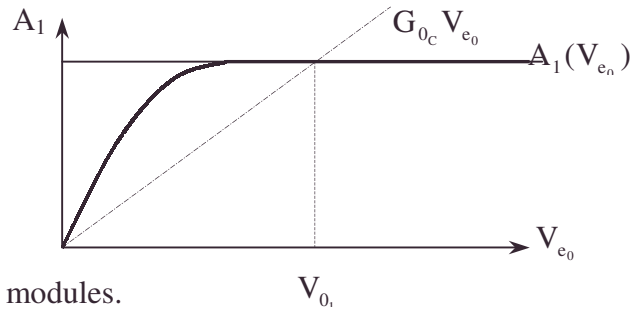
c. On considère l'intersection de $A_1 = A_1(V_{e_0})$ et de $A_1 = G_{0c} V_{e_0}$

On en déduit V_{0_1} .

d. AN : $V_{0_1} = 20,5V$.

e. $G_{e_y} = \frac{A_1}{V_{0_1}} = G_{0_c} = \frac{1}{H(\omega_0)}$.

$$G_{e_y} = \frac{1}{H(\omega_0)}.$$



C'est la condition d'oscillation sur les modules.

B.1.1. $v = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$; $v - V_s = R'i = v - \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) v = -\frac{R_2}{R_1} v$.

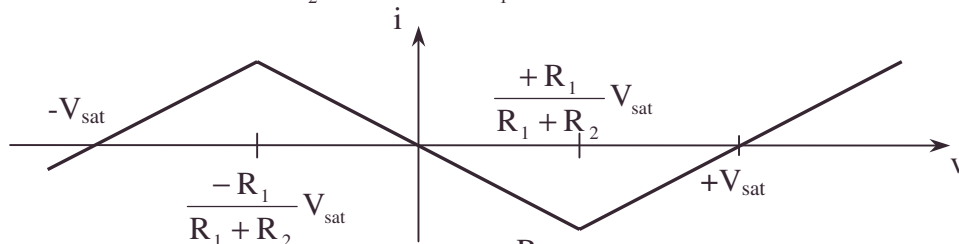
$$v = -\frac{R_1 R'}{R^2} i.$$

Le dipôle satisfait à $v = -R_N i$ avec $R_N = \frac{R_1}{R_2} R'$.

2. En régime non-linéaire, $V_s = \pm V_{sat}$; or $V_s = v - R'i \Rightarrow i = \frac{v \pm V_{sat}}{R'}$.

A la limite, $i = 0$ quand $v = \pm V_{sat}$.

– En régime linéaire, $v = -\frac{R_1}{R_2} R'i \Rightarrow i = -\frac{R_2}{R_1 R'} v$.



La limite du régime linéaire est pour $v = \pm \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ (cf. intersections des droites).

3. On veut $g(+V_{sat}) = g(-V_{sat}) = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{V_{sat}^2}$;

On veut $\frac{di}{dv}(0) = -\frac{R_2}{R_1 R'} = \frac{dg}{dv}(0) = -a \Rightarrow a = \frac{R_2}{R_1 R'} = +\frac{1}{R_N}$.

On a donc $i = \frac{v}{R_N} \left(\frac{v^2}{V_{sat}^2} - 1 \right)$.

2.1.a. En utilisant la même méthode qu'en **A.4.1.d.1.**, vu $i = -\frac{V}{Z} = -\frac{V}{R_N}$ avec

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega, \text{ on obtient après dérivation } \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0,$$

naturellement de même forme qu'en **A.4.1.d.** Les deux circuits différents de R' placée différemment (cf. théorème de Miller) mais cela ne change pas la possibilité d'oscillation.

b. L'analyse déjà citée donne $R = R_N$ pour des oscillations non amorties ni amplifiées. On a la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2.a. "2.1.a." permet d'écrire:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = -\frac{1}{C} \frac{di}{dt} = -\frac{dg}{CdV} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{C} \left[\frac{3v^2}{R_N V_{sat}^2} - \frac{1}{R_N} \right] \frac{dv}{dt}; \quad \text{or} \quad \frac{3v^2}{R_N V_{sat}^2} \quad \text{est}$$

numériquement au plus de l'ordre de $\frac{1}{R_N}$ et donc le terme $\frac{1}{C} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} + \frac{3v^2}{R_N V_{sat}^2} \right] \frac{dv}{dt}$

est négligeable vu $\left[\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R} \right)^2 \right] \ll \omega_0^2$. Il reste $\frac{d^2v}{dt^2} + \omega_0^2 v = 0$.

b. L'équation précédente donne $v = V_{0i}' (\cos \omega_0 t + \varphi)$; pour simplifier les calculs, on fera un décalage d'origine des dates et on prendra $V_0 = V_{0i}' \cos \omega_0 t$.

α. Energie consommée par R : $W_1 = \int_0^T \frac{v^2}{R} dt = \frac{T}{2} \frac{V_{0i}'^2}{R}$ sur une période.

β. Energie fournie sur une période par le dipôle BB' :

$$W_2 = -\int_0^T v i dt = -\int_0^T V_{0i}'^2 \frac{\cos^2 \omega_0 t}{R_N} \left(\frac{V_{0i}'^2}{V_{sat}^2} \cos^2 \omega_0 t - 1 \right) dt;$$

$$W_2 = -\int_0^T \frac{V_{0i}'^4 \cos^4 \omega_0 t}{R_N V_{sat}^2} dt + \int_0^T \frac{V_{0i}'^2 \cos^2 \omega_0 t}{R_N} dt = -\frac{V_{0i}'^2}{R_N} \left[\frac{V_{0i}'^2}{V_{sat}^2} \frac{3T}{8} - \frac{T}{2} \right].$$

γ. Ecrire $W_1 = W_2$ donne $V_{0i}' = V_{sat} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{R_N}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$.

c. AN : $V_{0i}' = 13,51V$. valeur différente de la valeur approchée $V_{0i} = 20,5V$.

de **A.4.2.c.**

On voit l'écart entre les 2 approches (prise en compte de l'alimentation en énergie, de la non linéarité...).

6.1.5.3. Montages classiques d'A.O.

Voir page 850.

6.1.5.4. Oscillateurs à transistor

Voir page 973.

6.1.5.5. Voltmètre électronique

Voir page 1021.

6.1.5.6. Oscillateur d'un émetteur hyperfréquence

Voir page 1178.

6.1.6. Transistor

6.1.6.1. Diffusion et transistor

I. Schématiquement, un certain type de transistor est constitué par une base d'épaisseur a , matériau pauvre en électrons, où se déroulent des phénomènes de diffusion de charges électriques, comprise entre un émetteur et un collecteur riches en électrons (fig.1.). Dans tout ce qui suit, on ne considérera qu'une seule dimension représentée par l'axe des x et on ne s'intéressera qu'aux phénomènes physiques se passant dans la base.

Le courant électrique est exclusivement assuré par des électrons dont le nombre n par unité de longueur (nombre de porteurs) est contrôlé par deux phénomènes :

- d'une part un phénomène de disparition (recombinaison avec des ions positifs). Le nombre de porteurs par unité de longueur disparaissant de ce fait par unité de temps

vaut $\frac{n - n_0}{\tau}$, où n_0 et τ sont deux constantes

caractéristiques de la base ;

- d'autre part un phénomène de diffusion reliant en chaque point l'intensité I du courant électrique traversant la section droite de la base à la dérivée $\frac{\partial n}{\partial x}$ du nombre de

porteurs par unité de longueur, au moyen de la relation : $I = qD \frac{\partial n}{\partial x}$, où D est la

constante de diffusion et q la valeur absolue de la charge de l'électron.

1. Démontrer que l'équation générale vérifiée par le nombre de porteurs dans la base

est :
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_0 - n}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

2. Le nombre de porteurs n par unité de longueur est donné par :

$$n(x, t) = N \exp\left(-\frac{q\phi(x, t)}{kT}\right), \text{ où } N \text{ est une constante, } k \text{ la constante de Boltzmann, } T \text{ la}$$

température absolue, et $\phi(x, t)$ un potentiel électrique convenable :

- lorsque l'ensemble de la base est à un potentiel électrique constant et uniforme (équilibre électrique), ϕ prend la valeur constante ϕ_0 et n prend la valeur n_0 ;

- on établit entre l'émetteur et la base (en $x = 0$) une différence de potentiel V_e , le nombre de porteurs en $x = 0$ est alors donné par l'expression ci-dessus où on prend $\phi = \phi_0 - V_e$.

- lorsqu'on établit entre le collecteur et la base (en $x = a$) une différence de potentiel V_c en sens inverse de la précédente, et telle que la valeur de ϕ soit positive et très grande, le nombre de porteurs n par unité de longueur est alors égal à zéro en $x = a$.

Exprimer en fonction de n_0 , V_e et T le nombre de porteurs en $x = 0$.

3. On étudie maintenant le fonctionnement du transistor en régime continu permanent. V_e est alors constant (différence de potentiel continue).

a. Ecrire l'équation vérifiée par n , en posant $L = \sqrt{\tau D}$. Déterminer la fonction $n(x)$ en fonction des paramètres n_0 , V_e , T , a , L . Quelle est l'interprétation physique de L ?

E = émetteur
C = collecteur

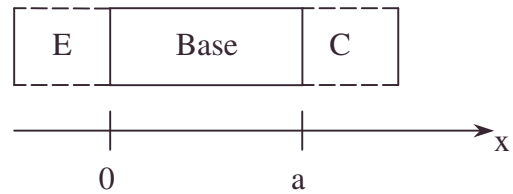


Figure 1

b. Calculer l'intensité $I(x)$ du courant électrique dans la base. On désignera par I_e et I_c les valeurs de l'intensité respectivement en $x = 0$ et $x = a$.

Calculer le gain statique $\alpha_0 = \frac{I_c}{I_e}$ en fonction de a et de L en supposant que a est très petit devant L et que qV_e est très petit devant kT .

4. On superpose maintenant à la différence de potentiel V_e de la question précédente une petite différence de potentiel v sinusoïdale : $v = v_e \exp(i\omega t)$.

a. En supposant que qv_e est très petit devant kT , écrire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$ pour le nombre de porteurs n .

b. Calculer le terme dépendant du temps $n_1(x, t)$ du nombre de porteurs. On posera pour simplifier : $\beta^2 = \frac{1 + i\omega\tau}{L^2}$.

c. Calculer, comme précédemment, les courants alternatifs i_e en $x = 0$ et i_c en $x = a$. Calculer le gain dynamique défini par $\alpha = \frac{i_c}{i_e}$.

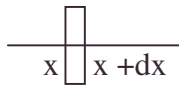
Si a est très petit devant L et pour des fréquences faibles ($\omega\tau$ petit devant 1), exprimer α . Quelle est l'interprétation physique de la partie imaginaire de α ?

d. Calculer la pulsation ω_1 pour laquelle le module du gain dynamique s'écarte de 10 % du gain statique α_0 .

ENS ; Durée : 1h30

Corrigé

1. Divisons la base en tranches d'épaisseur dx , d'aire S ; soit la tranche définie par x :



On considère $n(x, t) = \frac{dN}{d\tau} \cdot S$; $\frac{dN}{d\tau}$ nombre de porteurs par unité de volume. n est bien un nombre de porteurs par unité de longueur.

La tranche située en x , d'épaisseur dx : contient $n(x, t)dx$ porteurs ; celui-ci varie ; faisons le bilan pendant dt :

– le phénomène de disparition par recombinaison consomme en nombre : $\frac{n - n_0}{\tau} dx dt$.

– la diffusion fait entrer par la section définie par x des charges + en nombre $\frac{I}{q} dt = D \frac{\partial n}{\partial x}(x, t) dt$. Il s'agit de fait d'une sortie d'électrons.

– la diffusion fait sortir par la section définie par $x + dx$ des charges + : $D \frac{\partial n}{\partial x}(x + dx, t) dt$.

– la variation du nombre d'électrons de la tranche est :

$$d[ndx] = -\frac{(n - n_0)}{\tau} dx dt - D \frac{\partial n}{\partial x}(x, t) dt + D \frac{\partial n}{\partial x}(x + dx, t) dt ; \text{ soit pour } dx \text{ donné :}$$

$$dx dn = -\frac{(n - n_0)}{\tau} dx dt + q D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dx dt, \text{ d'où : } \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_0 - n}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

2. Puisque ϕ est indépendant de t , $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$.

$$\text{L'énoncé dit : } n_0 = N e^{\frac{-q\phi_0}{kT}} ; n(x = 0) = N e^{\frac{-q(\phi_0 - V_e)}{kT}}.$$

• base, condition limite, développement au premier ordre ou plus, superposition des régimes quasi stationnaires

Transistor

Eliminons N et ϕ_0 en faisant le rapport des 2 expressions :

$$\frac{n(x=0)}{n_0} = e^{\frac{qV_c}{kT}} \Rightarrow n(x=0) = n_0 e^{\frac{qV_c}{kT}}.$$

3.a. En régime permanent, résolvons $\frac{d^2 n}{dx^2} = \frac{n - n_0}{D\tau} = \frac{n - n_0}{L^2}$.

L est une constante d'espace caractéristique de ces phénomènes (cf. ligne ci-après).

$$\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{L^2} = -\frac{n_0}{L^2} \text{ a pour solution : } n = n_0 + A_1 e^{\frac{x}{L}} + A_2 e^{-\frac{x}{L}}.$$

– L'énoncé nous rappelle que V_c est tel que $n(a) = 0$: $n_0 + A_1 e^{\frac{a}{L}} + A_2 e^{-\frac{a}{L}} = 0$.

– En $x = 0$, $n_0 + A_1 + A_2 = n_0 e^{\frac{qV_c}{kT}}$.

Résolvons les équations linéaires en A_1, A_2 :

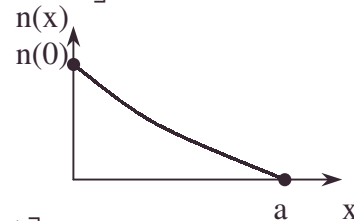
$$A_1 + A_2 = n_0 \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \Rightarrow A_2 = n_0 \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) - A_1.$$

$$A_1 e^{\frac{a}{L}} + A_2 e^{-\frac{a}{L}} = -n_0 \Rightarrow A_1 \left[e^{\frac{a}{L}} - e^{-\frac{a}{L}} \right] = -n_0 - n_0 e^{-\frac{a}{L}} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right).$$

$$A_1 = \frac{-n_0}{e^{\frac{a}{L}} - e^{-\frac{a}{L}}} \left[1 + e^{-\frac{a}{L}} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \right] \Rightarrow A_2 = \frac{n_0}{e^{\frac{a}{L}} - e^{-\frac{a}{L}}} \left[1 + e^{\frac{a}{L}} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \right].$$

$$n(x) = n_0 \left[1 - \frac{e^{\frac{(x-a)}{L}} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right)}{2 \sinh \frac{a}{L}} + \frac{e^{-\frac{(x-a)}{L}} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right)}{2 \sinh \frac{a}{L}} - \frac{e^{\frac{x}{L}} - e^{-\frac{x}{L}}}{2 \sinh \frac{a}{L}} \right].$$

$$n(x) = n_0 \left[1 - \frac{\sinh \frac{x}{L}}{\sinh \frac{a}{L}} + \frac{\sinh \frac{a-x}{L}}{\sinh \frac{a}{L}} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \right];$$



b. $\frac{dn(x)}{dx} = \frac{-n_0}{L \sinh \frac{a}{L}} \left[\cosh \frac{x}{L} + \cosh \frac{(a-x)}{L} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \right]; \frac{dn}{dx} \neq 0 \forall x \in [0, a].$

$$I = \frac{-qDn_0}{L \sinh \frac{a}{L}} \left[\cosh \frac{x}{L} + \cosh \frac{(a-x)}{L} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \right].$$

en $x = 0$, $I_e = \frac{-qDn_0}{L \sinh \frac{a}{L}} \left(1 + \cosh \frac{a}{L} \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \right).$

en $x = a$, $I_c = \frac{-qDn_0}{L \sinh \frac{a}{L}} \left[\cosh \frac{a}{L} + \left(e^{\frac{qV_c}{kT}} - 1 \right) \right].$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{I_c}{I_e} = \frac{\cosh \frac{a}{L} + \left(e^{\frac{qV_e}{kT}} - 1 \right)}{1 + \cosh \frac{a}{L} \left(e^{\frac{qV_e}{kT}} - 1 \right)} ; \text{ pour } a \ll L ; qV_e \ll kT :$$

Le développement au 1^{er} ordre donne $\alpha_0 = \frac{1 + \frac{qV_e}{kT}}{1 + \frac{qV_e}{kT}} = 1$.

Cela nous rappelle que le courant de base est négligeable devant I_e , ou I_c .

4.a. $e^{\frac{qV'_e}{kT}} = 1 + \frac{qV'_e}{kT}$ si $qV'_e \ll kT$; ici $V'_e = V_e + v_e e^{i\omega t}$.

α. $n(x=0) = n_0 e^{\frac{qV'_e}{kT}} = n_0 + \frac{n_0 q}{kT} V_e + \frac{n_0 q}{kT} v_e e^{i\omega t} = n_0 \left(1 + \frac{qV_e}{kT} \right) + \frac{n_0 q}{kT} v_e e^{i\omega t}$;

le terme dépendant du temps, donc de v , s'écrit $n_1(a, t) = n_0 \frac{qV_e}{kT} e^{i\omega t}$.

β. $n(x=a) = 0$ soit $n_1(a, t) = 0$.

b. Remarquons que le terme temporel avec $v_e \ll V_e$ peut être considéré comme une perturbation (tant sur V_e que sur n) : on peut considérer $n_1(x, t)$, la perturbation de $n(x, t)$ due à v_e , infiniment petit du 1^{er} ordre devant $n(x) \forall x$; en particulier $n_1 \ll n_0$.

Utilisons la méthode complexe $n_1(x, t) = n_1(x) e^{i\omega t}$ et la méthode des perturbations $n(x, t) = n(x) + n_1(x, t)$ avec $n_1 \ll n(x)$;

cela permet de transcrire $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_0 - n}{\tau} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$:

Le terme d'ordre 0 en $n(x)$ satisfait à : $0 = \frac{n_0 - n(x)}{\tau} + D \frac{d^2 n(x)}{dx^2}$.

Le terme d'ordre 1 en $n_1(x) e^{i\omega t}$ satisfait à : $i\omega n_1(x) = -\frac{n_1(x)}{\tau} + D \frac{d^2 n_1}{dx^2}$.

$$\frac{d^2 n_1}{dx^2} = \left(\frac{i\omega}{D} + \frac{1}{\tau D} \right) n_1 = \frac{1 + i\omega\tau}{L^2} n_1 = \beta^2 n_1.$$

$$n_1(x) = B_1 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} \text{ avec } n_1(a) = 0 = B_1 e^{\beta a} + B_2 e^{-\beta a},$$

et aussi en $x = 0$: $B_1 + B_2 = \frac{n_0 q V_e}{kT}$.

On résout le système linéaire en B_1 et B_2 : $B_2 = \frac{n_0 q V_e}{kT} - B_1$,

$$\Rightarrow B_1 (e^{\beta a} - e^{-\beta a}) = -\frac{n_0 q V_e}{kT} e^{-\beta a} \Rightarrow B_1 = -\frac{n_0 q V_e e^{-\beta a}}{e^{\beta a} - e^{-\beta a}} \text{ et } B_2 = \frac{n_0 q V_e e^{\beta a}}{e^{\beta a} - e^{-\beta a}}.$$

$$n_1(x) = \frac{n_0 q V_e}{2kT \sinh \beta a} (-e^{\beta(x-a)} + e^{\beta(a-x)}) = \frac{n_0 q V_e}{kT \sinh \beta a} \sinh \beta(a-x).$$

$$n_1(x, t) = \frac{n_0 q V_e}{kT} \frac{\sinh \beta(a-x)}{\sinh \beta a} e^{i\omega t}.$$

• base, développement au premier ordre ou plus

Transistor

c.α. On étend la méthode de calcul des perturbations :

$$I(x, t) = I(x) + i(x, t) \text{ avec } |i| \ll |I|.$$

$$I = qD \frac{\partial n}{\partial x} \Rightarrow i(x, t) = qD \frac{\partial n_1}{\partial x} = -qDe^{i\omega t} \frac{n_0 q v_e}{kT} \beta \frac{\cosh \beta(a-x)}{\sinh \beta a}.$$

$$\text{en } x = 0, i_e(x, t) = -q^2 D e^{i\omega t} \frac{n_0}{kT} v_e \beta \frac{\cosh \beta a}{\sinh \beta a}.$$

$$\text{en } x = a; i_c(x, t) = -q^2 D e^{i\omega t} \frac{n_0 v_e}{kT} \frac{\beta}{\sinh \beta a}.$$

$$\alpha \equiv \frac{i_c}{i_e} = \frac{1}{\cosh \beta a}.$$

$$\beta. \beta^2 a^2 = \frac{a^2}{L^2} (1 + i\omega\tau).$$

$$|\beta| \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\cosh \beta a} = \frac{1}{1 + \frac{\beta^2 a^2}{2}} = 1 - \frac{\beta^2 a^2}{2} \text{ au } 4^{\text{ème}} \text{ ordre près sur } \mathbb{C}.$$

$$\alpha = 1 - \frac{\beta^2 a^2}{2} = 1 - \frac{a^2}{2L^2} - \frac{ia^2}{2L^2} \omega\tau; \text{ N.B. : } \alpha \rightarrow 1 \text{ quand } \frac{a}{L} \rightarrow 0.$$

$$\text{Im}(\alpha) = -\frac{a^2 \omega\tau}{2L^2}; \quad \arg \alpha = -\arctan \frac{\omega\tau a^2}{2L^2 \left(1 - \frac{a^2}{2L^2}\right)}.$$

$$\arg \alpha \approx -\frac{\omega\tau a^2}{2L^2} \text{ terme principal.}$$

$$i_c = \alpha i_e \Rightarrow \arg i_c = \arg i_e + \arg \alpha.$$

i_c aura un retard temporel sur i_e mais il est très faible :

$$(a \ll L; \omega\tau \ll 1).$$

$$\text{d. } \omega \rightarrow 0; \alpha \text{ statique} = 1 - \frac{a^2}{2L^2}.$$

$$|\alpha|^2 = \left(1 - \frac{a^2}{2L^2}\right)^2 \left[1 + \frac{a^4}{4L^4} \frac{\omega^2 \tau^2}{\left(1 - \frac{a^2}{2L^2}\right)^2}\right] \approx \left(1 - \frac{a^2}{2L^2}\right)^2 \left(1 + \frac{a^4 \omega^2 \tau^2}{4L^4}\right)$$

$$|\alpha| \approx \alpha_{\text{stat}} \left(1 + \frac{a^4 \omega^2 \tau^2}{8L^4}\right);$$

$$\frac{|\alpha| - \alpha_{\text{stat}}}{\alpha_{\text{stat}}} = 0,1 = \frac{a^4 \omega^2 \tau^2}{8L^4} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{0,8} L^2}{a^2 \tau} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \frac{L^2}{a^2 \tau}.$$

6.1.6.2. Etude progressive du transistor

I. On considère le circuit de la figure 1 où R est une résistance pure, Γ est un condensateur de capacité Γ et V_0 un générateur de tension continue, parfait (de résistance interne nulle) de force électromotrice (f.é.m.) V_0 .

1. Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . La différence de potentiel (d.d.p) aux bornes de la capacité est nulle à $t = 0$. On posera $\tau = R\Gamma$.

A. Calculer:

a. $V(t)$: d.d.p. aux bornes de Γ .

b. $I(t)$: courant dans le circuit.

B. Représenter graphiquement sur la même figure $V(t)$ et $I(t)$.

C. Quelles seront les valeurs de $V(t)$ et $I(t)$, lorsque le régime permanent sera établi au bout d'un temps infiniment long ?

2. On considère l'état du système à la date t .

A. Quelle est l'énergie W_G fournie par le générateur pendant l'intervalle de temps $[0, t]$?

B. Quelle est l'énergie W_R dissipée dans la résistance pendant cet intervalle de temps $[0, t]$?

C. Quelle est l'énergie W_Γ emmagasinée dans la capacité à la date t ?

D. Quelle relation lie ces trois grandeurs W_G , W_R et W_Γ ? Expliquer. Cette dernière relation est-elle toujours vraie même si $R = 0$? Expliquer ce résultat.

II. On considère le circuit de la figure 2. $V(t) = V_M - V_B$.

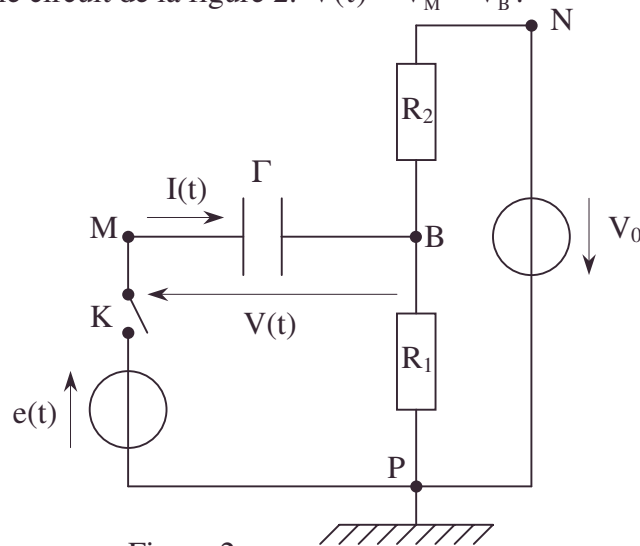


Figure 1

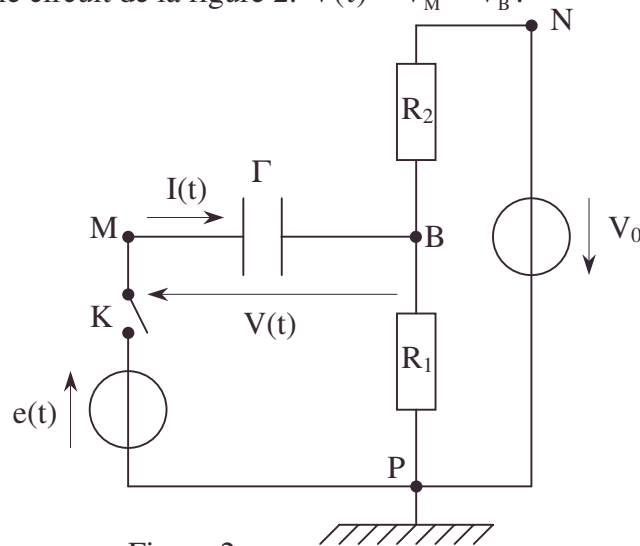


Figure 2

Il est alimenté par un générateur parfait de tension continue V_0 . R_1 et R_2 sont deux résistances pures. Γ est un condensateur de capacité Γ . $e(t)$ est un générateur de tension alternative de résistance interne nulle et de f.é.m. : $e(t) = E_0 \cos \omega t$.

1. L'interrupteur K étant ouvert, calculer le potentiel V_B de B (sachant que $V_P = 0$ et $V_N = -V_0$; $V_0 > 0$).

2. On appelle $V(t)$ la d.d.p. aux bornes de la capacité Γ et $I(t)$ le courant qui la traverse $V(t) = V_M - V_B$. On supposera dans cette question que $e(t) = 0$ (soit $E_0 = 0$).

On posera $\tau' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Gamma$.

A la date $t = 0$ on ferme l'interrupteur K (à $t = 0$ on supposera que $V(t) = 0$, c'est-à-dire que la capacité n'est pas chargée).

Calculer :

A. $V(t)$ en fonction de V_1 , τ' et t .

B. $I(t)$ en fonction de V_0 , R_2 , τ' et t .

3. On suppose maintenant que $e(t)$ n'est plus nulle mais $e(t) = E_0 \cos \omega t$. A la date $t = 0$ (date à laquelle $V(t) = 0$) on ferme l'interrupteur K.

A. Calculer $V(t)$. On montrera que $V(t)$ est la somme des deux termes:

a. Un régime transitoire $Ae^{-\frac{t}{\tau'}}$.

b. Un régime permanent : $-V_1 + B \cos(\omega t - \varphi)$.

Déterminer A , B , et φ .

B. En déduire $I(t)$.

C. Au bout d'un temps suffisamment long le régime transitoire a disparu. Quelles sont alors les expressions de $I(t)$ et $V(t)$?

D. On suppose maintenant et aussi pour la question suivante **E** que la capacité est très grande (c'est-à-dire que $\frac{1}{\Gamma \omega}$ est très inférieur à R_1 et R_2) :

a. En déduire les nouvelles expressions de $V(t)$ et $I(t)$ déduites de **C**.

b. Montrer que pour calculer $I(t)$ on peut alors considérer que le générateur de f.é.m. $e(t)$ est fermé sur les deux résistances R_1 et R_2 associées en parallèle.

E. On se propose dans cette question de justifier (ou de retrouver) le résultat de la question **II.3.D.b**. Si on considère le régime permanent (le régime transitoire ayant disparu) on peut écrire les différentes grandeurs électriques sous la forme :

[1] $V(t) = V^* + v(t)$ où V^* est une grandeur indépendante du temps (composante continue) représentant la valeur statique de $V(t)$ et $v(t)$ est une grandeur fonction du temps (grandeur dynamique), ici alternative de pulsation ω .

a. Ecrire les potentiels des points N, P, B et M sous la forme [1].

Comment se comporte Γ vis-à-vis des tensions alternatives et des tensions continues ?

Quel est le rôle de Γ ?

b. Montrer alors en utilisant le théorème de superposition des régimes permanents que l'on peut remplacer le circuit de la figure 2 par deux circuits:

- Un circuit permettant de calculer les grandeurs indépendantes du temps (grandeurs statiques);

- Un circuit permettant de calculer les grandeurs sinusoïdales dépendantes du temps (grandeurs dynamiques).

c. A l'aide de ces deux circuits on vérifiera les résultats de la question **II.3.D**.

III. On considère un composant électronique à trois entrées E, B et C (figure 3) appelé transistor tripolaire normal. Les caractéristiques utiles pour l'étude proposée sont données sur les figures 4a et 4b. On introduit cet élément dans le réseau décrit figure 5.

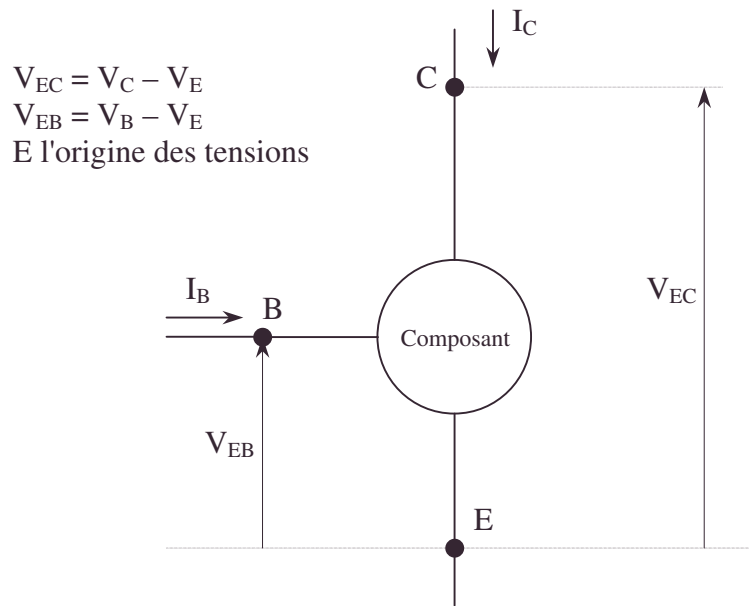


Figure 3

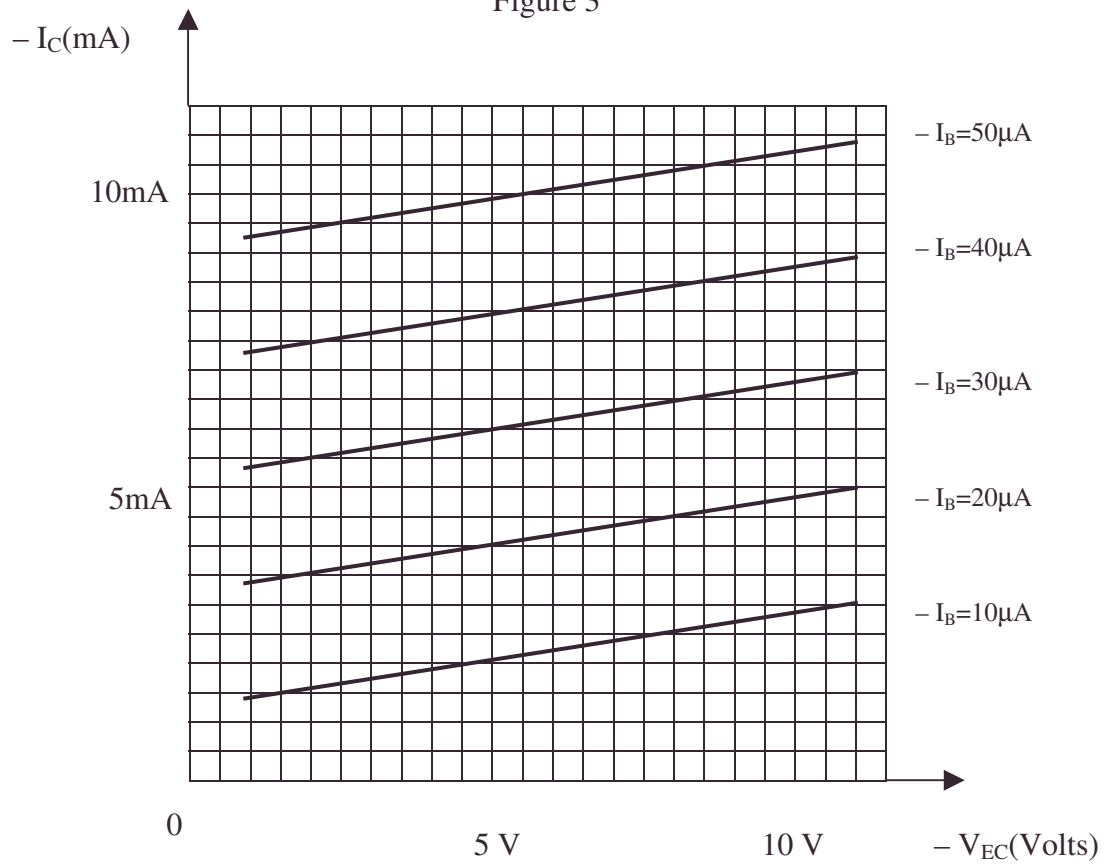


Figure 4a

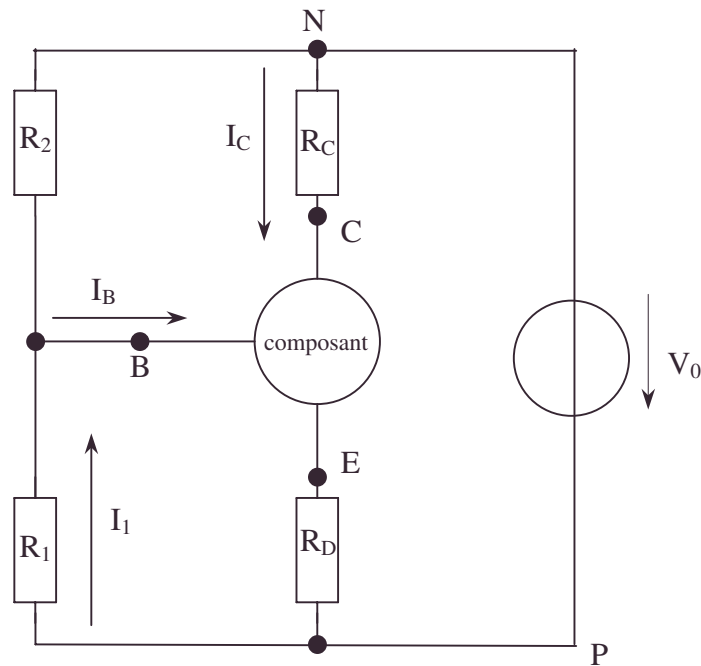
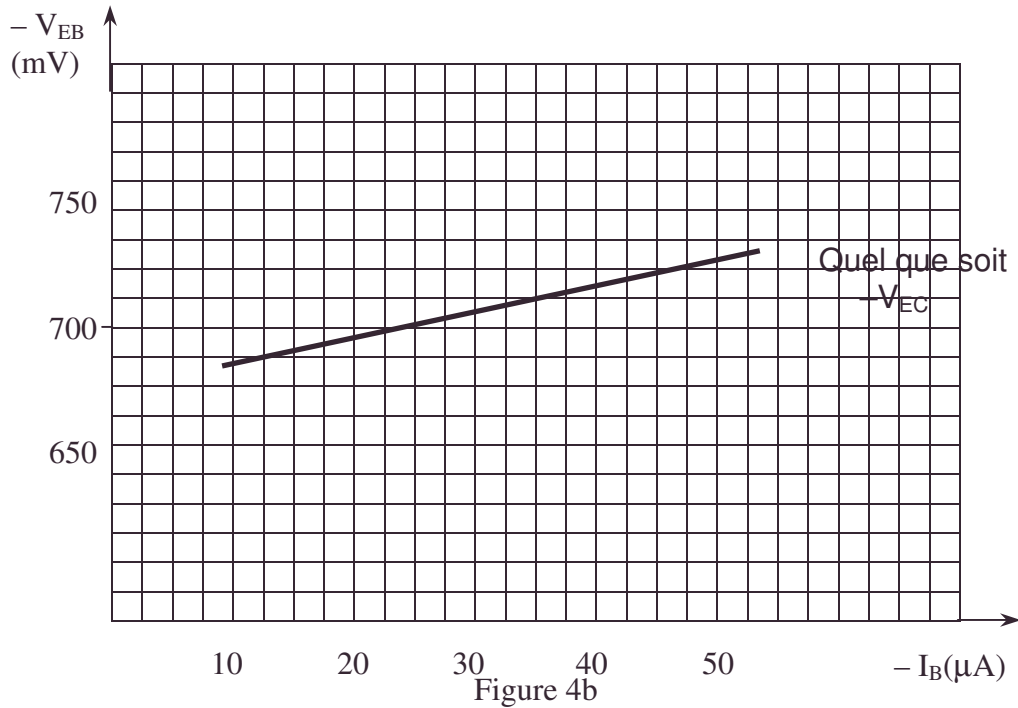


Figure 5

On impose : $R_C = 500 \, \Omega$; $R_D = 500 \, \Omega$; $V_0 = 10$ volts.

1.A.a. Montrer que l'intensité qui passe dans R_D est sensiblement égale à l'intensité I_C qui passe dans R_C .

b. En déduire la relation qui existe entre I_C et V_{EC} (en fonction de V_0 , R_D , et R_C).

c. Reporter la courbe obtenue (relation liant $-V_{EC}$ et $-I_C$) sur le réseau de caractéristiques de la figure 4 : en déduire la pente ainsi que les intersections avec les axes.

B. On veut que $V_{EC} = -5$ volts. En déduire la valeur numérique de I_C .

C. En déduire les valeurs numériques de I_B et V_{EB} .

Quel est alors le potentiel V_B de B ?

D. On veut que l'intensité I_1 du courant dans la résistance R_1 soit telle que :

• solution graphique

$I_1 = -10 I_B$. Calculer R_1 et R_2 .

2. On désire étudier maintenant comment se comporte ce composant vis-à-vis de très petites variations autour du point de fonctionnement continu (statique) défini numériquement aux questions **III.1.B,C et D**.

Pour cela on écrira les différentes grandeurs électriques sous la même forme que précédemment : $V = V^* + v$, où V^* est la valeur statique indépendante du temps (valeur continue) et v la valeur dynamique dépendante du temps (généralement alternative). On supposera que $|v| \ll |V^*|$ c'est-à-dire que les variations seront faibles par rapport aux valeurs continues.

On posera :

$$V_{EC} = V_{EC}^* + v_{EC}; V_{EB} = V_{EB}^* + v_{EB}; I_C = I_C^* + i_C; I_B = I_B^* + i_B; V_{EC}^* = -5 \text{ volts}$$

A.a. Montrer (en se servant du réseau de caractéristiques) que l'on peut écrire les relations suivantes entre les valeurs dynamiques : [2]

$$[2] \quad v_{EB} = r i_B$$

$$[3] \quad i_C = \beta i_B + \frac{v_{EC}}{\rho}$$

b. Calculer numériquement β , r et ρ (en se servant toujours du réseau de caractéristiques).

B. Montrer que l'on peut alors remplacer ce composant électronique par un circuit équivalent en régime dynamique à celui de la figure 6. On déterminera les divers paramètres :

- La résistance a à partir de la relation [2]
- La résistance b et I_0 (I_0 représentant l'intensité débitée par un générateur de courant parfait) à partir de la relation [3].

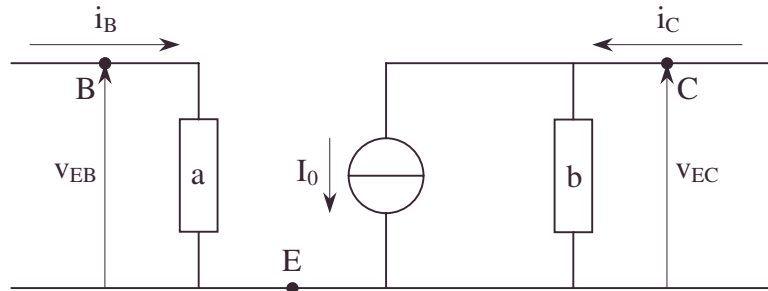


Figure 6

IV. On désire réaliser à l'aide de ce composant un amplificateur. On considère le schéma de la figure 7 : $e(t)$ est un générateur de f.é.m. $e(t) = E_0 \cos \omega t$.

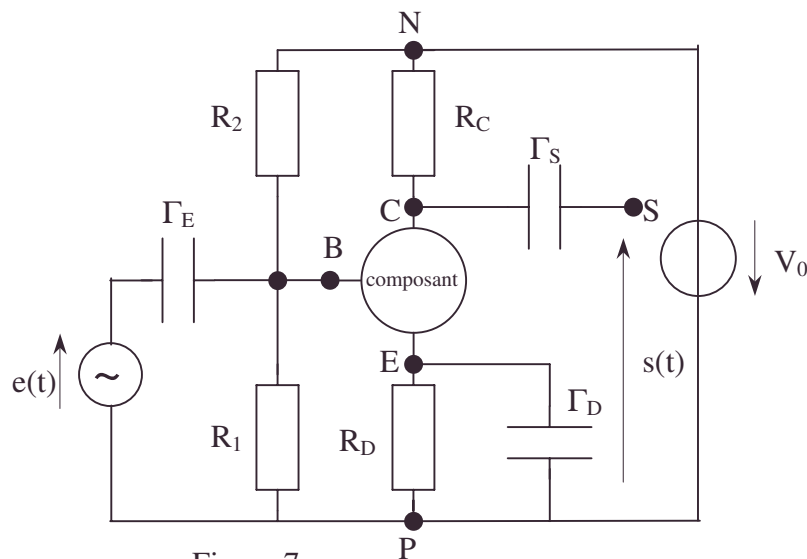


Figure 7

- amplificateur, composant, développement au premier ordre ou plus, réseau de caractéristiques du transistor, solution graphique

La pulsation ω du générateur est telle que l'on pourra négliger devant toutes les résistances les grandeurs suivantes : $\frac{1}{\Gamma_E \omega}$; $\frac{1}{\Gamma_D \omega}$ et $\frac{1}{\Gamma_S \omega}$.

R_1 et R_2 ont les valeurs calculées précédemment (question III.1.D.) ;

$V_0 = 10$ volts et $R_C = R_D = 500 \Omega$.

S est la sortie de cet amplificateur.

On ne considérera dans cette partie que les valeurs alternatives (valeurs dynamiques) des diverses grandeurs électriques.

1.A. Montrer que l'ensemble R_D, Γ_D se comporte comme un court-circuit vis-à-vis de ces grandeurs alternatives.

B. Expliquer les rôles de Γ_E (capacité d'entrée) et Γ_S (capacité de sortie).

2. Dessiner le réseau électrique équivalent à ce circuit pour les grandeurs alternatives en complétant le schéma de la figure 6.

3.A. Calculer alors, en fonction des différents paramètres étudiés précédemment, le rapport qui existe entre la tension de sortie alternative $s(t)$ à la tension d'entrée $e(t)$.

$$A = \frac{s(t)}{e(t)}.$$

B. Calculer numériquement A.

4. Quelle est l'impédance d'entrée alternative de cet amplificateur (en régime dynamique)?

Faire l'application numérique.

CCP; Durée : 3h

Corrigé

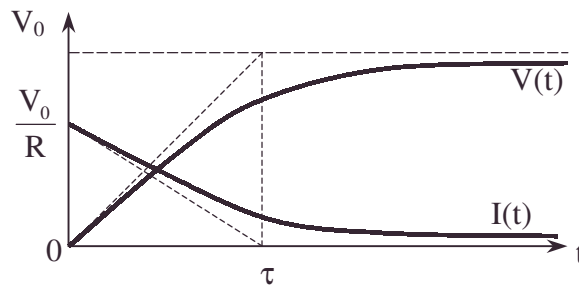
I.1. La loi d'Ohm s'écrit $V_0 = RI + V$ avec $I = \frac{d(\Gamma V)}{dt} = \Gamma \frac{dV}{dt}$.

On obtient l'équation différentielle : $\tau \frac{dV}{dt} + V = V_0$ à $t \geq 0$;

A.a. La solution est : $V = V_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

$$\text{b. } I = \Gamma \frac{dV}{dt} \Rightarrow I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

B.



C. $t \rightarrow +\infty$; $V \rightarrow V_0$; $I \rightarrow 0$.

$$\text{2.A. } P_G = V_0 I \Rightarrow W_G = \int_0^t P_G dt = V_0 \int_0^t I dt = \Gamma V_0^2 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

$$\text{B. } P_R = RI^2 \Rightarrow W_R = \int_0^t P_R dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{\Gamma V_0^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}).$$

$$\text{C. } W_{\Gamma} = \frac{1}{2} \Gamma V^2 = \frac{1}{2} \Gamma V_0^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2.$$

D.a. On a : $V_0 = RI + V$ ou encore $V_0 I dt = RI^2 dt + V \overbrace{Idt}^{dQ}$. En intégrant entre 0 et t , on trouve $W_G = W_R + W_{\Gamma}$.

b. L'énergie fournie par le générateur assure la consommation d'énergie dans la résistance (effet Joule) et le stockage d'énergie dans le condensateur.

c. Cela est vrai en particulier si $R = 0$.

d. La conservation de l'énergie s'applique toujours mais la constante de temps $\tau \rightarrow 0$.

II.1. K étant ouvert, $I = 0$; $V_1 = -V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ (cf. pont diviseur de tension).

2.A. $I = \frac{d(\Gamma V)}{dt}$; soit I_1 le courant de P vers B ;

la loi d'Ohm s'écrit : $V_0 = R_1 I_1 + R_2(I + I_1)$ et $V = R_1 I_1$ car $e = 0$.

Éliminons I et I_1 , on obtient $V_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V + R_2 \Gamma \frac{dV}{dt}$, soit $\tau' \frac{dV}{dt} + V = -V_1$.

On vérifie la solution : $V = -V_1(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}})$.

$$\text{B. } I = \Gamma \frac{dV}{dt} \Rightarrow I = \frac{V_0}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau'}}.$$

3.A. $I = \frac{d(\Gamma V)}{dt}$; la loi d'Ohm s'écrit : $V - e = R_1 I_1 = V_1$ et $V_0 = R_1 I_1 + R_2(I_1 + I_2)$.

On obtient : $\tau' \frac{dV}{dt} + V = e - V_1$. La solution générale de cette équation est égale à la somme de l'équation sans second membre et de 2 solutions particulières correspondant respectivement à e et à $-V_1$.

- $A e^{-\frac{t}{\tau'}}$ est la solution de l'équation sans second membre.
- $-V_1$ est la solution particulière de $\tau' \frac{dV}{dt} + V = -V_1$.
- $B \cos(\omega t - \varphi)$ est la solution particulière de $\tau' \frac{dV}{dt} + V = E_0 \cos \omega t$.

Détermination de B et φ : l'équation complexe associée est $\tau' \frac{dV}{dT} + V = E_0 e^{j\omega t}$.

Sa résolution sur \mathbb{C} consiste à la recherche de $V = B e^{-j\varphi} e^{j\omega t}$ soit $V = \underline{V} e^{j\omega t}$ vérifiant

$$(j\tau'\omega + 1)\underline{V} = E_0. \text{ Une détermination possible est } B = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (\tau'\omega)^2}} \text{ et } e^{-j\varphi} = \frac{1 - j\tau'\omega}{\sqrt{1 + (\tau'\omega)^2}}$$

soit $\tan \varphi = \tau'\omega$ ou $\varphi = \arctan(\tau'\omega)$ avec $\cos \varphi > 0$.

On remarquera : $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau'\omega)^2}}$.

Détermination de A : on utilisera la solution complète (la seule physiquement recevable) qui doit satisfaire $V(0) = 0$.

• conservation de l'énergie, constante de temps, effet Joule, équation différentielle complexe associée, loi d'Ohm, pont diviseur de tension, stockage d'énergie dans le condensateur

$$V(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} - V_1 + B \cos(\omega t - \varphi) \text{ devient } 0 = A - V_1 + B \cos \varphi \text{ ou } A = V_1 - B \cos \varphi, \text{ soit}$$

$$A = V_1 - \frac{E_0}{1 + \tau'^2 \omega^2}.$$

II.3.B. $I = \Gamma \frac{dV}{dt}$; $I = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \left(V_1 - \frac{E_0}{1 + \tau'^2 \omega^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\Gamma \omega E_0}{\sqrt{1 + \tau'^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \arctan \tau' \omega).$

C. $I(t) = \frac{E_0 \omega \Gamma}{\sqrt{1 + \tau'^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \arctan \tau' \omega) ;$

$$V(t) = -V_1 + \frac{E_0}{\sqrt{1 + \tau'^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctan \tau' \omega).$$

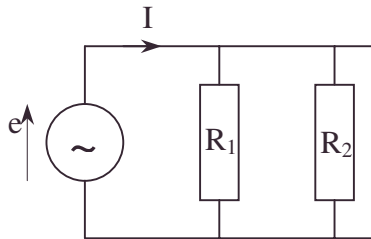
D.a. $\frac{1}{\omega \Gamma} \ll R_1 ; \frac{1}{\omega \Gamma} \ll R_2 \Rightarrow \omega \Gamma \gg \frac{1}{R_1} ; \omega \Gamma \gg \frac{1}{R_2} ; \text{ soit } 2\omega \Gamma \gg \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} ;$

$$2\omega \Gamma \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \gg 1, \text{ soit } \omega \tau' \gg 1 \Rightarrow B \sim \frac{E_0}{\omega \tau'} \text{ soit } B \neq 0 \text{ et } \varphi = +\frac{\pi}{2} ;$$

"3.C." s'écrit : $I(t) = \frac{E_0 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \cos \omega t$ courant alternatif sans partie continue ;

$$V(t) = -V_1 + 0, \text{ tension continue sans partie alternative.}$$

b. Quand $e(t)$ est branché sur R_1 , montée en parallèle avec R_2 :



$$e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I \text{ soit } I = E_0 \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \cos \omega t.$$

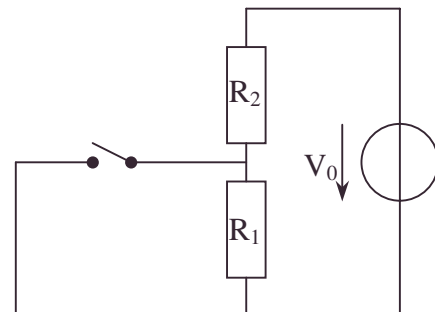
On peut conclure à l'identité de **"3.D.a."** et **"3.D.b."**

E.a.α. $V_N = -V_0 + 0 ; V_P = 0 + 0 ; V_B = e - V(t) = e - V_1 = (-V_1) + e ;$
 $V_M = e = 0 + e$

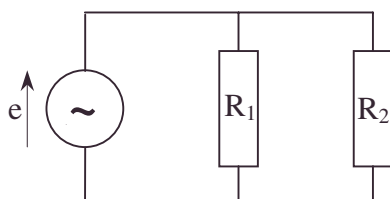
β. $V = V_M - V_B = +V_1 + 0$ aux bornes du condensateur permet d'affirmer que Γ est un court-circuit du signal alternatif ; il est une coupure en courant continu permanent.

γ. On peut attribuer un rôle d'interrupteur à Γ fermé à $\omega \neq 0$, ouvert à $\omega = 0$.

b.α. Grandeurs statiques (continues) :



β. Grandeurs dynamiques (alternatives) :



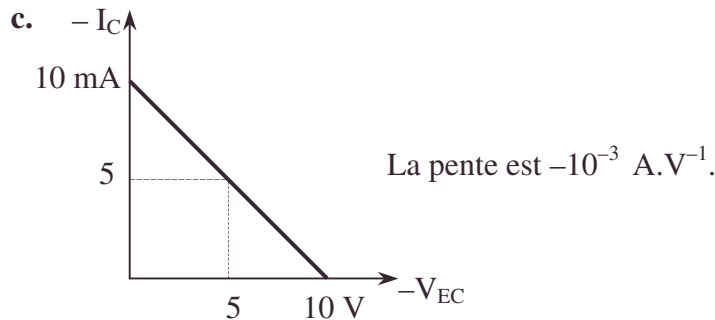
Remarque : le générateur continu V_0 est alors comme un court-circuit :
 cf. $V_P - V_N = V_0 + 0.$

c. Vu les études déjà faites de **3.E.b.α.β.**, le théorème de superposition permet de retrouver : $V = -V_1 + 0$ et $I(t) = 0 + E_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cos \omega t$.

III.1.A.a. Appelons I_E le courant de E vers P. La conservation de la charge pour le système que constitue le composant donne en régime quasi-stationnaire : $I_B + I_C - I_E = 0$; or $|I_B| \leq 5 \cdot 10^{-5} \text{ A}$ et $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ A} \leq |I_C| \leq 11 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ (avec I_C variant peu à I_B donné).

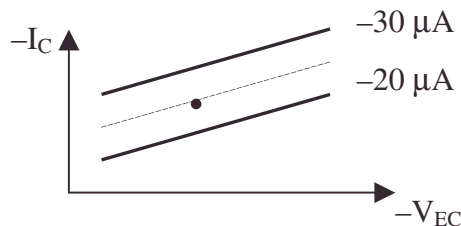
On a donc $|I_B| \ll |I_C| \Rightarrow I_E \approx I_C$.

b. Ecrivons la loi d'Ohm dans la maille de droite : $0 = R_C I_C + V_{EC} + R_D I_E + V_0$
vu $I_E \approx I_C$: $(-V_{EC}) = V_0 - (R_C + R_D)(-I_C)$ à I_B fixé.



B. AN : $V_{EC} = -5\text{V} \Rightarrow I_C = -5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$.

C.a. On reporte ce point sur la figure 4a et on trace la courbe $I_B = \text{cste}$ passant par ce point. L'interpolation nous laisse penser : $I_B \approx -25 \mu\text{A}$.



b.α. On en déduit par la figure 4b : $V_{EB} = -700 \text{ mV}$.

β. $V_B = V_{EB} + R_D I_C$ (si $V_P = 0$ car un potentiel n'existe que si le potentiel 0 est défini) ; AN : $V_B = -3,2 \text{ V}$.

D. La loi d'Ohm dans R_1 donne $R_1 I_1 = -V_{EB} - R_D I_C \Rightarrow R_1$
et dans R_2 : $R_2(I_1 - I_B) = -V_0 - R_1 I_1 = -V_0 + V_{EB} + R_D I_C \Rightarrow R_2$.
AN : $R_1 = 30 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 11,1 \text{ k}\Omega$.

2.A.a.α. L'équation de la caractéristique de la figure 4b est valable pour toutes les valeurs et en particulier en absence de signaux alternatifs :

$$-V_{EB} = a_1 + b_1 (-I_B) \quad [1].$$

$$-V_{EB}^* = a_1 + b_1 (-I_B^*) \quad [2].$$

Soustrayons membre à membre, il reste : $-V_{EB} = b_1(-i_B)$ soit de la forme $V_{EB} = r i_B$ avec $r \equiv b_1$, la pente de la droite de la figure (4b).

β. à $V_{EC} = \text{cste}$, on constate que $-I_C = c_1 + I_B d_1$, c_1 et d_1 constantes.

A $I_B = \text{cste}$, on constate que $-I_C = f_1 + g_1(-V_{EC})$ avec f_1 et $g_1 = \text{cste}$. On en déduit par

$$\text{intégration de } -\left(\frac{\partial I_C}{\partial I_B}\right) = d_1 \text{ et } +\frac{\partial I_C}{\partial V_{EC}} = g_1 : -I_C = g_1(-V_{EC}) + I_B d_1 + h_1 ;$$

g_1, h_1, d_1 constantes.

Quand il n'y a pas de signal (ni à l'entrée, ni donc en sortie) :

$$-I_C^* = g_1(-V_{EC}^*) + I_B^* d_1 + h_1.$$

• caractéristique de dipôle, comparaison numérique, conservation de la charge, courant de base négligeable dans un transistor, droite de charge [cf dipôle de Thévenin-Norton], interpolation linéaire, loi aux noeuds, Ohm [loi d'], solution graphique, théorème de superposition des régimes quasi permanents

Transistors

Soustrayons membre à membre, il reste: $-i_C = g_1(-V_{EC}) + i_B d_1$, soit de la forme :

$$i_C = \frac{V_{EC}}{\rho} + \beta i_B \text{ avec } g_1 = \frac{1}{\rho} \text{ et } \beta = -d_1 ;$$

- g_1 est la pente de la courbe caractéristique de la figure 4a.
- à $V_{EC} = \text{cste}$: $\Delta(-I_C) = d_1 \Delta I_B$ sur la figure 4a donne d_1 et donc β .

b. AN : $r = 1000 \Omega$; $\rho = 9000 \Omega$; $\beta = 200$.

B. Avec le schéma adopté (figure 6) on a les relations :

$$v_{EB} = a i_B \text{ à l'entrée et } i_C = I_0 + \frac{v_{EC}}{b} \text{ à la sortie.}$$

Cela s'identifie avec la forme des relations de **2.A.a.** avec $a = r$ à l'entrée, $I_0 = \beta i_B$ et $b = \rho$ en sortie.

IV.1.A. Calculons l'impédance équivalente à Γ_D en parallèle avec R_D :

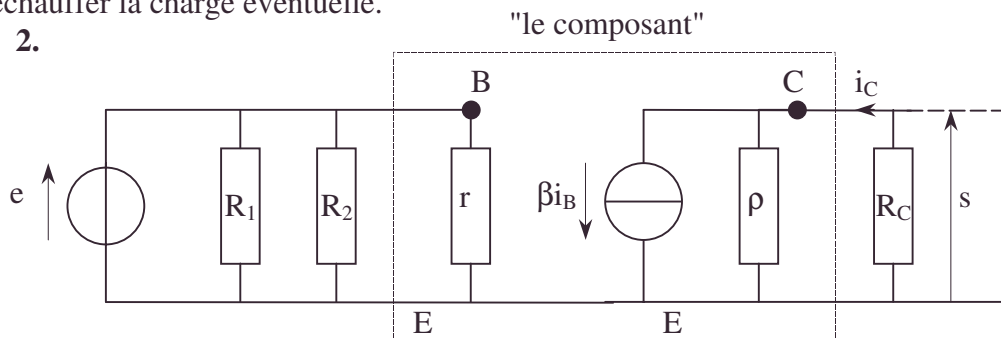
$$\underline{z} = \frac{z_C R_D}{R_D + z_C} \sim z_C \text{ négligeable; on considérera donc } \underline{z} \neq 0 .$$

On a un court-circuit en régime alternatif. R_D intervient pour les grandeurs statiques.

B.a. Γ_E protège le générateur de signaux alternatifs du courant continu; Γ_E laisse passer intégralement le signal (cf. **II.3.D.a.**)

b. Γ_S laisse passer intégralement le signal et empêche le courant continu d'échauffer la charge éventuelle.

2.



V_0 est un court-circuit en alternatif.

3.A. $v_{EB} = e$; $v_{EC} = s$; par ailleurs, $r i_B = e$; pour une charge extérieure infinie, on

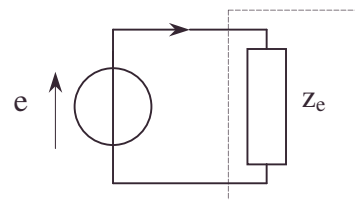
$$a : 0 - s = R_C i_C \text{ et ainsi : } -s = R_C \left(\beta \frac{e}{r} + \frac{s}{\rho} \right) \Rightarrow s \left(1 + \frac{R_C}{\rho} \right) = -\beta \frac{R_C}{r} e ;$$

$$A = \frac{s}{e} = \frac{-\beta \rho R_C}{r(\rho + R_C)} .$$

B. AN : $A = -94,7$.

4.a. L'identification de la partie de gauche du schéma **IV.2.** avec le schéma ci-dessous donné :

$$\frac{1}{z_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r} \text{ soit } z_e = \frac{r R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 r + R_2 r} .$$



b. AN : $z_e = 894 \Omega$, valeur plutôt élevée comme il se doit dans un ampli de tension. On remarque la faible influence numérique de R_1 et R_2 .

6.1.6.3. Multiplieurs à transistors

Application à une mesure de résistance

Première partie

1. La sortie d'un multiplieur analogique comporte un amplificateur différentiel monté conformément à la figure 1. Les deux sources de courant I et I' sont étudiées en détail dans les questions suivantes.

L'amplificateur opérationnel est supposé idéal, c'est-à-dire d'amplification infinie, d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle.

Exprimer u_s en fonction de R , I et I' .

Dans toute la suite les transistors seront supposés tels que le courant collecteur reste pratiquement égal au courant émetteur.

Pour le transistor T_n on notera I_n ce courant. Le courant base sera donc toujours négligé devant le courant émetteur.

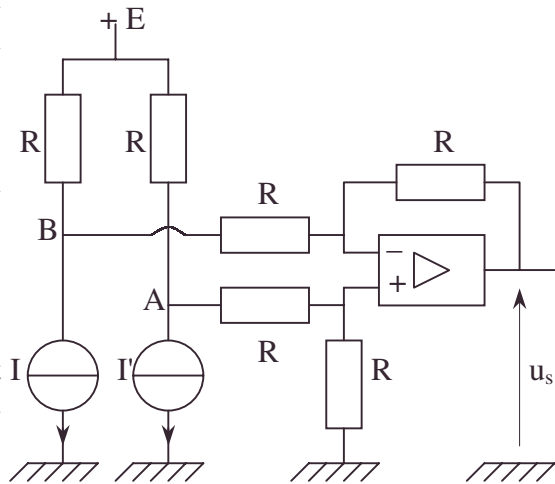


Figure 1

2. Dans le montage de la figure 2, la source de courant I_A est supposée constante. On posera x rapport entre I_1 et I_A ($I_1 = x I_A$).

On supposera que les transistors T_1 et T_2 fonctionnent à même tension base - émetteur - E .

Ecrire l'équation liant I_2 à x et I_A .

Exprimer la relation liant X , tension appliquée entre la base de T_1 et celle de T_2 , à : I_A , R et x .

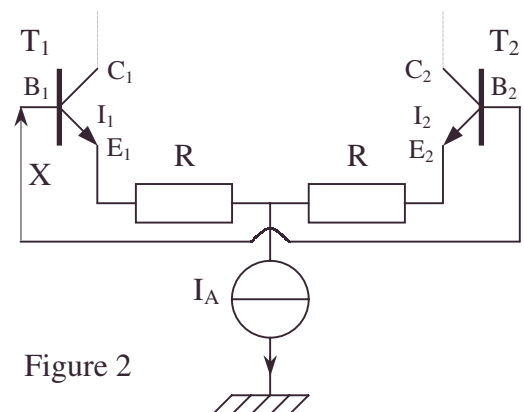


Figure 2

3. Un montage identique (figure 3) doit conduire à exprimer l'équation liant I_4 à y et I_B ainsi que la relation liant Y à I_B , R et y sachant que y est défini par l'égalité $I_3 = y I_B$, écrire ces relations.

N.B. : I_B n'est pas un courant de base.

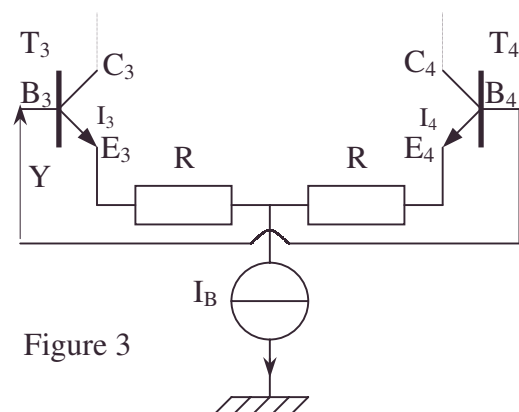


Figure 3

4. Dans le montage de la figure 4, on adoptera pour les transistors T_5 à T_{10} l'hypothèse suivante : $v_{BE} = \frac{kT}{q} \ln \frac{I}{I_s}$, I étant le courant émetteur du transistor. $I_s = \text{constante}$.

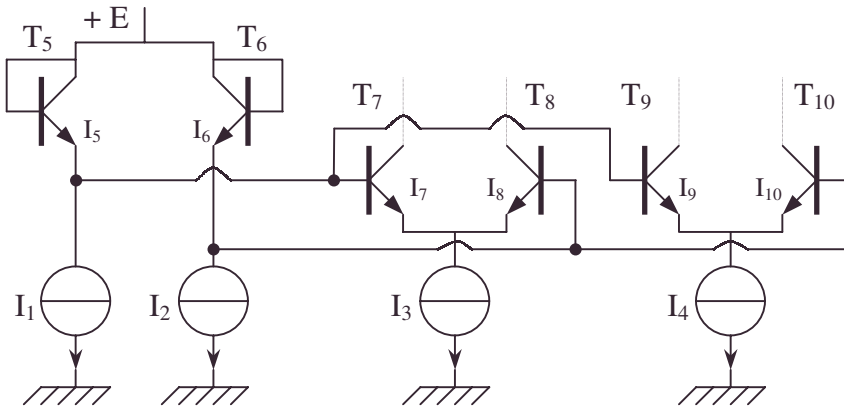


Figure 4

1. En utilisant l'hypothèse précédente, écrire la relation liant les courants I_5 , I_6 , I_7 , I_8 .
 2. Les courants I_1 , I_2 , I_3 , I_4 sont les courants calculés dans les paragraphes 2. et 3. de ce problème.
- En utilisant les relations établies aux paragraphes 2., 3. et 4.1. et les hypothèses exposées en fin du paragraphe 1., exprimer les courants I_7 et I_8 en fonction de x , y et I_B .
3. Exprimer de même les courants I_9 et I_{10} en fonction de x , y et I_B .

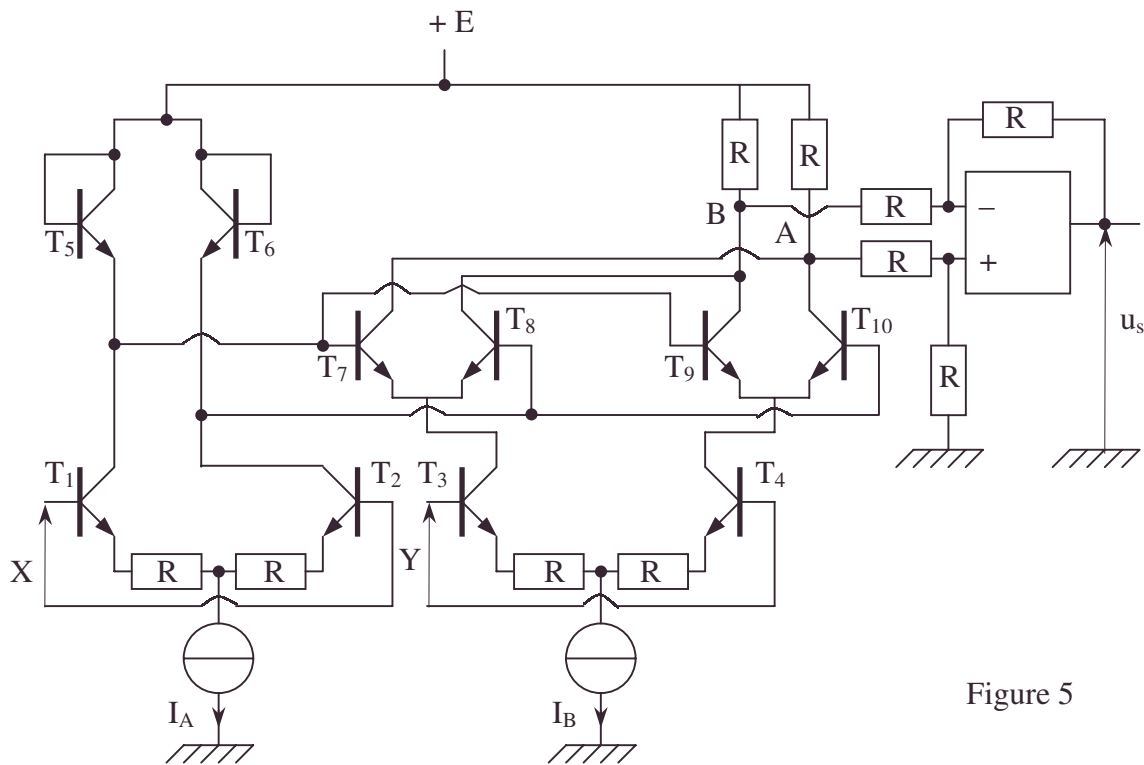


Figure 5

5. Le montage complet est représenté en figure 5.

1. Exprimer la tension de sortie u_s en fonction des tensions X et Y .

2. On suppose $I_A = I_B = 0,5 \text{ mA}$; $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Donner la valeur de u_s en fonction des tensions X et Y .

6. La source de courant I_A ou I_B est réalisée conformément à la figure 6.

Les trois transistors T_{11} , T_{12} et T_{13} intégrés sont supposés être strictement identiques (même géométrie, même caractéristiques électriques). De plus, ils sont supposés être

toujours dans les mêmes conditions de température. La relation du paragraphe 4. et l'hypothèse du paragraphe 1. restent applicables.

On rappelle que : $\frac{kT}{q} \approx 28.10^{-3} \text{ V}$ à 25°C et que $I_s \approx 10^{-13} \text{ A}$.

Les résistances sont supposées constantes en fonction de la température.

1. Soit I le courant traversant R_1 , T_{12} , T_{13} et R_3 , soit V_D la tension base-émetteur de T_{12} et de T_{13} .

Exprimer le courant I_{11} en fonction de E , V_D , V_{BE11} , R_2

et du rapport $\frac{R_3}{R_1 + R_3}$.

2. On souhaite que le courant I_{11} reste insensible aux variations de la température T . Montrer que cela est possible en choisissant de rendre $I \approx I_{11}$ et en prenant pour rapport $\frac{R_3}{R_1 + R_3}$ une valeur que l'on

précisera.

3. On souhaite obtenir $I_{11} = 0,5 \text{ mA}$. Donner les valeurs des résistances R_1 , R_2 et R_3 ; $E = 15 \text{ volts}$.

Deuxième partie

Le multiplieur sera représenté conformément à la figure 7.

1. Une résistance inconnue R_x est mise en série avec une résistance étalon R , et alimentée conformément à la figure 8.

V_1 est un signal sinusoïdal : $V_1 = V_{1M} \sin \omega_1 t$.

V_2 est un signal sinusoïdal obtenu par multiplication, à l'aide du multiplieur précédemment étudié, de V_1 , avec un signal V_3 supposé constant : $V_2 = kV_1V_3$.

1. Exprimer la tension ε en fonction des tensions V_1 , V_3 , des résistances R et R_x et du coefficient k .

2. Quelle condition doit lier V_3 à R , R_x et k pour que ε soit nulle ? Le but du montage est de réaliser automatiquement l'annulation de ε par le choix judicieux de V_3 . Ainsi V_3 "mesurera" la résistance R_x . Pour ce faire, on commence par détecter l'amplitude ε_M du signal $\varepsilon = \varepsilon_M \sin \omega_1 t$.

2. Pour cela on réalise le montage suivant : (figure 9).

Montrer qu'il faut pour détecter ε_M faire suivre ce montage d'un filtre passe-bas.

3. Le filtrage de V_e est réalisé par le montage figure 10 dans lequel l'amplificateur est supposé idéal, c'est-à-dire de gain et d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle.

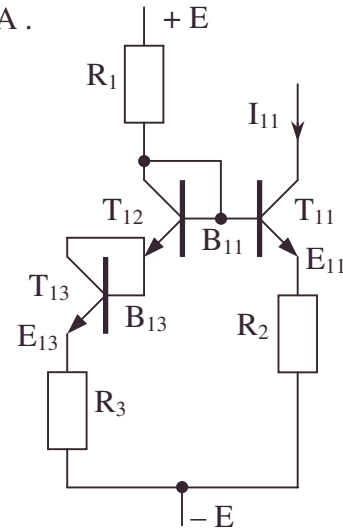


Figure 6

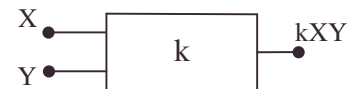


Figure 7

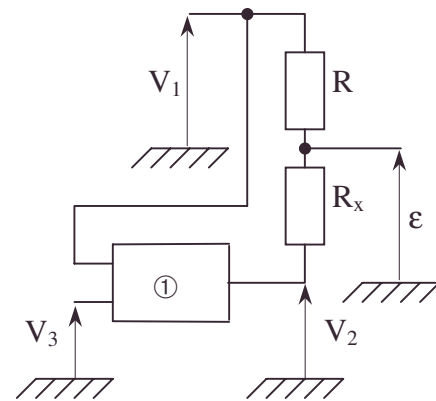


Figure 8

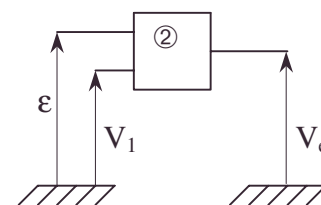


Figure 9

1. Donner l'expression du gain complexe de ce filtre : $G(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$.

2. Donner la valeur de la pulsation propre ω_0 de ce filtre ainsi que son coefficient d'amortissement.

3. On posera $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ (pulsation réduite).

Tracer l'allure de courbes donnant le gain $20\log|G(j\omega)|$ en fonction de $\log u$ ainsi que la phase $\phi = \arg G(j\omega)$ en fonction de $\log u$.

4. Application numérique : $k = 1/10$; $V_{1M} = 10$ volts. Sachant que la fréquence du signal V_1 est de 30 Hz ($\omega_1 = 60\pi$ rad/s) et que l'on souhaite obtenir en sortie du filtre un signal égal, à 1% près, à $\varepsilon_M / 2$, choisir les éléments R_1 et C_1 du filtre.

5. Quelle est alors la fréquence de coupure à 3 dB de ce filtre ?

4. Le signal V_s issu du filtre est supposé égal à $\frac{\varepsilon_M}{2}$. Le montage de la figure 11 est alors mis en série avec le filtre. Quelle équation lie u à V_s ?

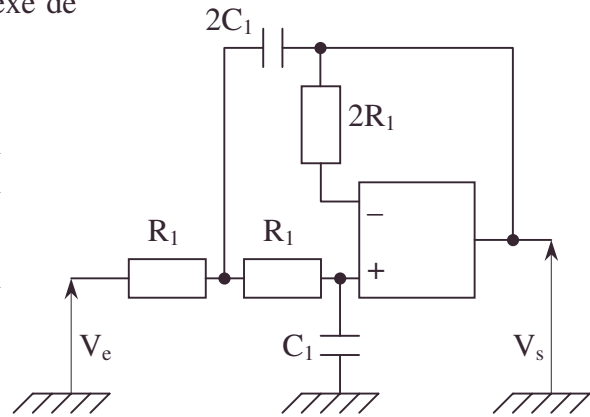


Figure 10

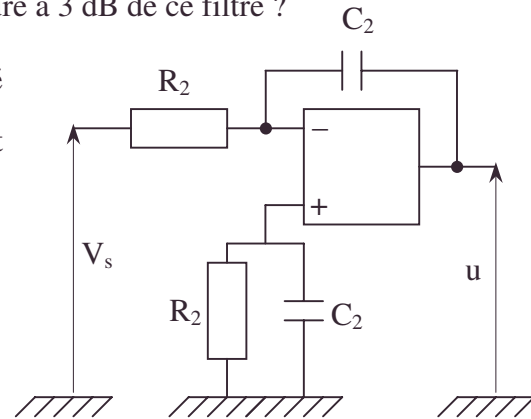


Figure 11

5. Le montage complet est représenté figure 12.

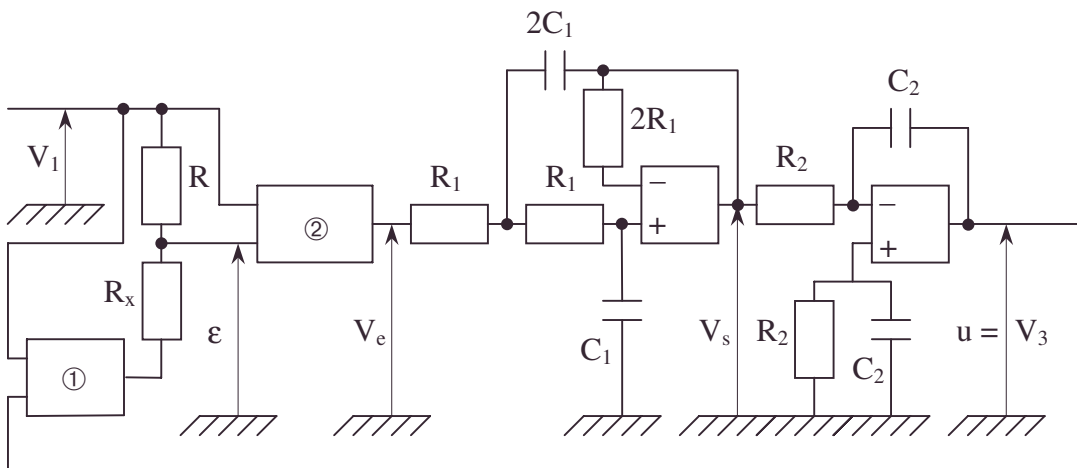


Figure 12

1. R_x étant supposée constante, et V_s étant supposé égal à $\frac{\varepsilon_M}{2}$, écrire l'équation différentielle qui régit l'évolution du signal V_3 en fonction des divers éléments et paramètres.

• coefficient d'amortissement d'un filtre, diagramme de Bode, fréquence de coupure, transmittance

2. Retrouver sur cette équation que le régime permanent statique conduit à une valeur V_{3_0} de V_3 qui est proportionnelle à R_x .

Application numérique : V_3 doit rester en module inférieur à 10 volts, k étant égal à 1/10, montrer que la résistance R_x ne doit pas excéder une limite que l'on précisera.

3. Le système étant initialement au repos $V_3 = 0$, on souhaite que quelle que soit la valeur de R_x (valeur compatible avec la limitation vue au paragraphe précédent), la valeur V_{3_0} soit atteinte à 1% près en moins d'une seconde. En déduire la condition qui doit lier $R_2 C_2$ aux divers paramètres.

Application numérique : choisir R_2 et C_2 sachant que $V_{1M} = 10$ volts et $k = 1/10$.

ENS ; Durée : 3h

Corrigé

Première partie : problème n° 1

1. • Exprimons V_- et V_+ d'après le théorème de Millman :

$$V_+ = \frac{\frac{V_A}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{V_A}{2} ; V_- = \frac{\frac{V_B}{R} + \frac{u_s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} ; V_+ = V_- \Rightarrow u_s = V_A - V_B.$$

• Exprimons la loi aux nœuds A et B afin de trouver V_A et V_B ;

$$\text{En A : } I' = \frac{E - V_A}{R} - \frac{V_A}{2R} ; \text{ en B : } I = \frac{E - V_B}{R} + \frac{u_s - V_B}{2R}, \text{ d'où :}$$

$$V_A = \frac{2}{3}(E - RI') ; V_B = \frac{2}{3}(E - RI) + \frac{u_s}{3}.$$

• Remplaçons V_A et V_B dans u_s : $u_s = \frac{2}{3}R(I - I') - \frac{u_s}{3} \Rightarrow u_s = \frac{R}{2}(I - I')$;

Nous avons une source de tension commandée par une différence de courant.

2. • La loi d'Ohm donne : $X = -V_{BE_2} - RI_2 + RI_1 + V_{BE_1}$;

$$\text{or, } V_{BE_1} = V_{BE_2} ; X = R(I_1 - I_2).$$

• La loi aux nœuds au point commun des 2 résistances R donne :

$$I_A = I_1 + I_2 = xI_A + I_2 \Rightarrow I_2 = I_A(1 - x).$$

$$\text{Ainsi, } X = R(I_A x - I_A(1 - x)) \Rightarrow X = RI_A(2x - 1).$$

3. Par analogie formelle : $Y = R(I_3 - I_4)$; $I_4 = I_B(1 - y)$; $Y = RI_B(2y - 1)$.

4.1. • Ecrivons la loi des mailles pour la maille allant du générateur + E de T_5 au générateur + E de T_6 en passant par les transistors T_5 , T_7 , T_8 , T_6 dans l'ordre ;

$$\text{on a : } V_{BE_5} + V_{BE_7} - V_{BE_8} - V_{BE_6} = 0.$$

• Utilisons l'équation de la caractéristique :

$$\frac{kT}{q} \left(\ln \frac{I_5}{I_s} + \ln \frac{I_7}{I_s} - \ln \frac{I_8}{I_s} - \ln \frac{I_6}{I_s} \right) = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{I_5 I_7}{I_8 I_6} \right) = 0 \Rightarrow I_5 I_7 = I_8 I_6.$$

2. • Les courants de base étant négligeables : $I_{B_7} \neq 0$; $I_{B_9} \neq 0$;

$$\text{On en déduit : } I_5 = I_1 = xI_A ; \text{ de même, } I_6 = I_2 = I_A(1 - x) ; I_{B_{10}} \neq 0 ; I_{B_8} \neq 0.$$

• La loi 4.1. s'écrit : $xI_A I_7 = (1 - x)I_A I_8 \Rightarrow xI_7 = I_8(1 - x)$.

• La loi au nœud de jonction des émetteurs de T_7 et T_8 donne : $I_7 + I_8 = I_3 = yI_B$.

• La loi 4.1. permet donc d'obtenir : $I_7 = yI_B(1 - x)$ et $I_8 = x y I_B$.

• analogie, courant de base négligeable dans un transistor, loi aux nœuds, loi des mailles, Millman [théorème de], Ohm [loi d'], transistor

Transistors

3. Par analogie : $I_5 I_9 = I_6 I_{10}$ soit $x I_9 = I_{10} (1 - x)$.

De même, $I_9 + I_{10} = I_4 = I_B (1 - y)$; on a donc $I_9 = (1 - y) I_B (1 - x)$ et $I_{10} = x (1 - y) I_B$.

5.1. Identifions le montage de la figure 1 dans la partie droite de la figure 5.

Le point A se trouve commun à T_7 et T_{10} ; le point B se trouve commun à T_8 et T_9 .

De plus comme $I_c \neq I$ on trouve en A : $I = I_8 + I_9$; en B, $I' = I_{10} + I_7$.

Comme $u_s = \frac{R}{2} (I - I') = \frac{R}{2} (I_8 - I_7 + I_9 - I_{10})$ et en remplaçant I_7, I_8, I_9, I_{10} ,

on trouve : $u_s = \frac{R}{2} I_B (2x - 1) (2y - 1)$; or $X = R I_A (2x - 1)$ et $Y = R I_B (2y - 1)$.

On substitue $2x - 1$ et $2y - 1$ et $u_s = \frac{XY}{2R I_A}$; on a obtenu un multiplicateur.

$$2. u_s = \frac{XY}{10}.$$

6.1. Ecrivons la loi d'Ohm de $+E$ à $-E$ de 2 façons :

$2E = (R_3 + R_1) I + 2v_D$ et $2E = R_2 I_{11} + V_{BE_{11}} + R_1 I$, car on rappelle que les intensités de base sont négligeables.

En éliminant I , on a : $I_{11} = \frac{2E}{R_2} \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{V_{BE_{11}}}{R_2} + \frac{2v_D}{R_2} \left(1 - \frac{R_3}{R_1 + R_3} \right)$.

2. Si $I = I_{11}$ le fonctionnement de T_{11} s'identifie à celui de T_{12} et T_3 ,

alors $v_{BE_{11}} = v_D$, $I_{11} = I = \frac{2E}{R_2} \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} \right) + \frac{v_D}{R_2} \left(1 - \frac{2R_3}{R_1 + R_3} \right)$ avec $v_D = \frac{kT}{q} \ln \frac{I}{I_s}$.

On supprime l'influence de T en supprimant l'influence de v_D , les autres paramètres

étant indépendants de T . Il faut donc : $\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 0,5$ soit $R_1 = R_3$; alors $I_{11} = I = \frac{E}{R_2}$.

$$3.a. I_{11} = I = \frac{E}{R_2} ; R_2 = \frac{E}{I_{11}} ; \text{A.N. : } R_2 = 30 \text{ k}\Omega.$$

$$b. v_D = \frac{kT}{q} \ln \frac{I}{I_s} ; \text{A.N. : } v_D = 0,625 \text{ V.}$$

La première loi d'Ohm de 6.1. donne : $R_1 = \frac{E - \frac{kT}{q} \ln \frac{I}{I_s}}{I}$; A.N. : $R_1 = R_3 = 28,75 \text{ k}\Omega$.

Deuxième partie : cf. Figures 7 et 8.

1.1. Appliquons le théorème de Millman au point commun de R et R_x :

$$\varepsilon = \frac{\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R_x}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_x}} = V_1 \frac{(R_x + kV_3 R)}{R_x + R}.$$

2. $\varepsilon = 0$ si $R_x + kV_3 R = 0$; on rappelle V_3 potentiel constant positif ou négatif.

2. $V_e = k\varepsilon V_1 = k\varepsilon_M V_{IM} \sin^2 \omega_1 t = k\varepsilon_M V_{IM} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega_1 t}{2} \right)$. Pour détecter ε_M il faut

éliminer la pulsation $2\omega_1$ par exemple avec un filtre passe-bas de $\omega_c < 2\omega_1$.

3.1. paramétrons en utilisant le potentiel V_A du point commun aux deux résistances R_1 .

• analogie, identification, loi d'Ohm, Millman [théorème de], multiplicateur

- Dans le montage potentiométrique A, +, masse :

$$\underline{V}_+ = \frac{\underline{V}_A \left(-\frac{j}{C_1 \omega} \right)}{R_1 - \frac{j}{C_1 \omega}} \text{ or } \underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{V}_s \Rightarrow \underline{V}_A = \underline{V}_s (1 + j R_1 C_1 \omega).$$

- Appliquons le théorème de Millman en A : $\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{V}_e}{R_1} + \frac{\underline{V}_s}{R_1} + \underline{V}_s 2j C_1 \omega}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + 2j C_1 \omega}.$

- Les 2 égalités permettent d'obtenir : $\underline{G} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1}{1 + 2j R_1 C_1 \omega - 2R_1^2 C_1^2 \omega^2}.$

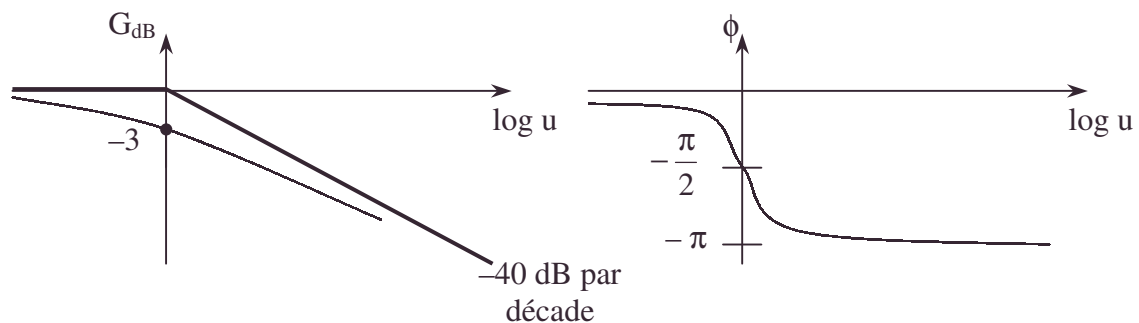
2. $\underline{V}_s (1 + 2j R_1 \omega - 2R_1^2 C_1^2 \omega^2) = \underline{V}_e$ permet d'obtenir l'équation différentielle correspondante : $\left(\text{car } j\omega \underline{V}_s e^{j\omega t} = \frac{dv_s}{dt} \text{ et } -\omega^2 \underline{V}_s e^{j\omega t} = \frac{d^2 v_s}{dt^2} \right).$

On a : $2R_1^2 C_1^2 \frac{dv_s^2}{dt^2} + 2R_1 \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$, de la forme $\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\lambda \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \omega_0^2 v_e$,

avec $\omega_0^2 = \frac{1}{2R_1^2 C_1^2}$ et $\omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1 \sqrt{2}}$. $\lambda = \frac{1}{R_1 C_1^2}$ le coefficient d'amortissement physique

3. En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ on obtient $\underline{G} = \frac{1}{1 + j\sqrt{2}u - u^2}$;

$$|G|^2 = \frac{1}{(1 - u^2)^2 + 2u^2} = \frac{1}{1 + u^4} \text{ et } G_{dB} = -10 \log(1 + u^4).$$



4. $V_e = \frac{\epsilon_M}{2} - \frac{\epsilon_M}{2} \cos 2\omega_1 t$, on veut en sortie : $V_s = \frac{\epsilon_M}{2} - |G_{2\omega}| \frac{\epsilon_M}{2} \cos(2\omega_1 t + \phi)$,

avec $|G_{(2\omega_1)}| < 10^{-2}$ soit $G_{dB} = -40 \text{ dB} \Rightarrow u = \frac{2\omega_1}{\omega_0} = 10$,

soit $R_1 C_1 \frac{120\pi\sqrt{2}}{10} = 1$; A.N. : $R_1 C_1 = 0,01876 \text{ s}$. d'où la proposition banale

$R_1 = 3.10^4 \Omega$; $C_1 = 0,625 \mu\text{F}$.

5. $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{R_1 C_1 2\pi\sqrt{2}}$; A.N. : $f_0 = 6 \text{ Hz}$.

4. Le théorème de Millman donne :
$$V - \frac{\frac{V_s}{R_2} + jC_2\omega u}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega} = 0 \Rightarrow V_s = -R_2 C_2 \frac{du}{dt}.$$

On a un montage dérivateur.

5.1. $u = V_3$ et vu l'énoncé et 1.1.
$$V_s = \frac{\varepsilon_M}{2} = \frac{V_{IM}}{2} \frac{R_x + kV_3 R}{R_x + R} = -R_2 C_2 \frac{dV_3}{dt}.$$

On obtient l'équation différentielle :
$$\frac{2(R_x + R)}{kRV_{IM}} R_2 C_2 \frac{dV_3}{dt} + V_3 = -\frac{R_x}{kR}.$$

2. Le régime statique où $\frac{dV_3}{dt} = 0$, est $V_{30} = -\frac{R_x}{kR}$; c'est la finalité de la méthode : mesurer R_x en mesurant V_{30} . A.N. : $V_{30} < 10 \text{ V} \Rightarrow R_x < R$.

3. • La solution de 5.1. est $V_3(t) = V_{30} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ avec $\tau = 2R_2 C_2 \left(\frac{R_x + R}{kRV_{IM}} \right)$.

• $V_3 = \frac{99}{100} V_{30}$ pour $t_1 = \tau \ln 100$.

A.N. : $t_1 \leq 1 \text{ s} \Rightarrow \tau \leq 0,217 \text{ s}$ soit $\frac{2R_2 C_2 (R_x + R)}{kRV_{IM}} \leq 0,217$.

• Optimisation par rapport à R : $R_x < R \Rightarrow 1 + \frac{R_x}{R}$ maximum pour $R_x = R$ soit $R + R_x = 2R$.

Il reste alors $R_2 C_2 \leq \frac{kV_{IM}}{4} \cdot 0,217$; A.N. : $R_2 C_2 < 0,054 \text{ s}$ d'où la proposition banale

$R_2 = 3 \cdot 10^4 \Omega$ et $C_2 = 1 \mu\text{F}$.

6.1.6.4. Oscillateurs à transistor

Question I

Un montage amplificateur de tension peut être représenté par le schéma de la figure 1.

D'une manière générale, ce schéma à deux bornes d'entrée A et B, et deux bornes de sortie, C et D, porte le nom de quadripôle. La tension appliquée à l'entrée entre les bornes A et B est $v_e = v_A - v_B$. R_e est appelée résistance d'entrée. La source de tension interne, liée à la tension d'entrée v_e par la relation Gv_e , caractérise l'amplification de tension. G est le gain en tension. La résistance R_s est appelée résistance de sortie.

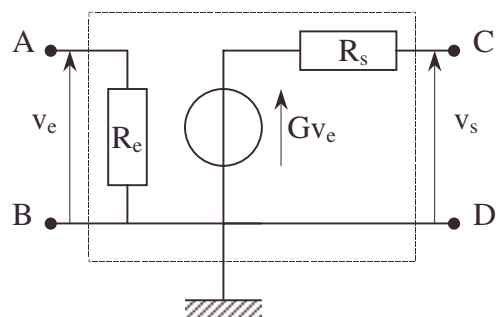


Figure 1

On recueille entre les bornes C et D la tension dite de sortie $v_s = v_C - v_D$.

Ce montage amplificateur est associé à des éléments extérieurs R_1 , C_1 , R_2 , C_2 suivant le montage de la figure 2.

1. On suppose l'amplificateur de tension parfait, c'est-à-dire R_e est infinie et R_s est nulle.

a. Soit i l'intensité instantanée du courant qui traverse la branche $R_1 C_1$; établir l'équation différentielle du second ordre permettant de calculer i en fonction du temps et de G , R_1 , C_1 , R_2 , C_2 .

b. A quelle condition portant sur le gain G , la solution de cette équation est-elle sinusoïdale pure ?

On vient ainsi de réaliser un oscillateur et, compte tenu des deux branches de pont, formées par les éléments $R_1 C_1$ et $R_2 C_2$, ce montage est appelé oscillateur en pont de Wien.

Calculer dans ce cas la fréquence d'oscillation f_0 en fonction de R_1 , R_2 , C_1 , C_2 .

c. Application numérique: on prend $R_1 = R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega$; $C_1 = C_2 = 0,1 \mu\text{F}$.

Calculer G et f_0 lorsque la condition d'oscillation est remplie.

2. On considère maintenant un amplificateur réel : R_e n'est plus infinie, R_s n'est plus nulle. Modifier les résultats précédents, retrouver les nouvelles valeurs de G et de f_0 qui donnent une oscillation.

Application numérique : aux données précédentes, on ajoute: $R_s = 0,5 \text{ k}\Omega$, $R_e = 6 \text{ k}\Omega$.

Calculer G et f_0 .

Question II : recherche d'une mise en équation de la condition d'oscillation (Théorie de la réaction)

1. L'amplificateur de tension parfait ABCD de gain G réel positif est associé au quadripôle passif (dépourvu de générateur) A'B'C'D' (figure 3) de façon que l'entrée A'B' soit reliée à la sortie CD de l'amplificateur.

Le quadripôle impose le rapport $\frac{V_{C'D'}}{V_{A'B'}} = Q$ où $V_{C'D'}$ et $V_{A'B'}$ désignent respectivement les

tensions entre les points C' et D' et entre les points A' et B'.

Ce montage met en évidence la notion de "réaction". C'est-à-dire que, par le canal du quadripôle passif A'B'C'D', une fraction de la tension de sortie v_s est réinjectée à l'entrée de l'amplificateur en série, dans le montage proposé, avec la tension v_1 .

Calculer le gain $\frac{v_s}{v_1}$ de l'ensemble en

fonction de G et de Q .

2. A quelle condition portant sur Q et G , v_s peut-il garder une valeur finie quand $v_1 \rightarrow 0$?

Dans ce cas, on peut annuler la source de tension v_1 car le montage, instable, devient auto-oscillateur.

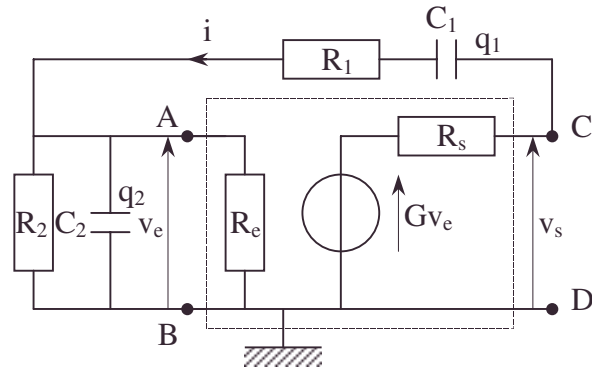


Figure 2

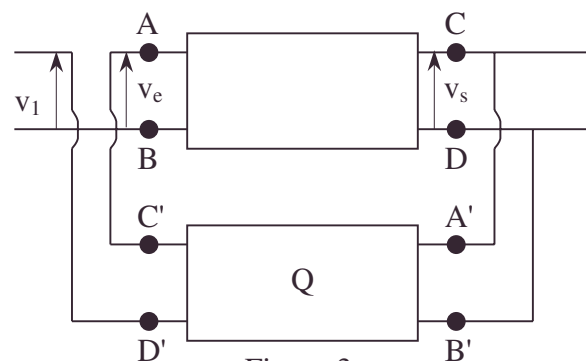


Figure 3

3. On reprend le montage de la figure 2 avec un amplificateur de tension parfait.

a. Représenter sur un schéma le quadripôle qui correspond à la cellule A'B'C'D' de la figure 3 dans le cas où $v_1 = 0$.

b. On suppose que le système bouclé oscille sinusoïdalement avec la pulsation ω .

En considérant la cellule A'B'C'D' calculer le nombre complexe Q en fonction de ω , R_1 , R_2 , C_1 , C_2 .

c. Calculer le module et l'argument de Q dans le cas particulier où $C_1 = C_2$ et où $R_1 = R_2$. Quelles sont leurs significations physiques ?

d. Application numérique : Calculer le module et l'argument pour :

$$R_1 = R_2 = 1,5k\Omega ; C_1 = C_2 = 0,1\mu F ; f = 100Hz, 1kHz, 3kHz \text{ et } 10kHz.$$

e. Appliquer la condition d'instabilité (formule du II.2) au dispositif de la figure 2 pour retrouver la fréquence d'oscillation et le gain adéquat de l'amplificateur.

Question III : oscillateur à réseau déphaseur

On considère l'oscillateur constitué de l'amplificateur de tension parfait A et du réseau déphaseur comportant trois cellules en Γ du type RC (figure 4).

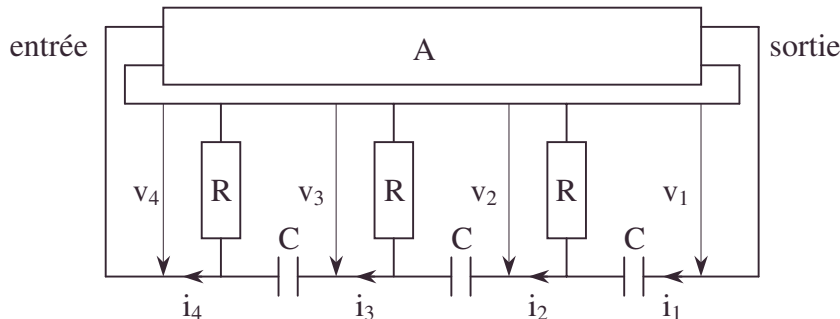


Figure 4

1. Etude du réseau déphaseur

a. On considère la première cellule en Γ (figure 4). Etablir la matrice de transfert

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} ;$$

a, b, c, d seront calculés en fonction de Z_1 impédance complexe du condensateur et Z_2 impédance de la résistance ; on appellera ω la pulsation du courant supposé sinusoïdal.

b. Etablir la matrice de transfert (T) de l'ensemble du réseau déphaseur: $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = (T) \begin{pmatrix} v_4 \\ i_4 \end{pmatrix}$.

c. calculer le rapport $\frac{v_1}{v_4}$ en fonction de $x = \frac{Z_1}{Z_2}$ (noter que R_e est infinie).

d. Calculer le module et l'argument de $\frac{v_1}{v_4}$.

2.a. Sachant que l'oscillateur a un gain réel négatif, calculer la fréquence d'oscillation et le gain optimal en utilisant la condition trouvée au II.2.

b. Application numérique: calculer la fréquence et le gain pour $R = 4,7k\Omega$; $C = 10nF$.

3. L'amplificateur de tension n'est plus parfait:

a. R_e est infinie mais R_s vaut $2k\Omega$.

1. On peut remplacer l'amplificateur réel par un amplificateur idéal à condition de modifier le réseau déphaseur. Représenter par un schéma ce nouveau réseau déphaseur.

• condition d'instabilité, fréquence d'oscillation, oscillateur

2. Calculer, pour cet amplificateur idéal équivalent le rapport $\frac{\text{tension d'entrée}}{\text{tension de sortie}}$.

3. En déduire la nouvelle fréquence d'oscillation f_0' et le nouveau gain G' de l'amplificateur idéal équivalent en fonction de R , C , R_s (G' réel).

4. Calculer l'erreur relative commise sur f_0 lorsqu'on ne tient pas compte de R_s .
Application numérique.

b.1. En fait R_e est grande mais non infinie ; R_s conserve la valeur de $2k\Omega$. On désire la même fréquence f_0 d'oscillation et le même gain G' de l'amplificateur. Montrer que rien n'est changé au résultat du **III.3.a.** à condition de remplacer la résistance R de la troisième cellule Γ du réseau déphaseur par une résistance R' que l'on calculera en fonction de R et R_e .

2. Application numérique : Calculer R' sachant que $R_e = 40k\Omega$.

Question IV : oscillateur Colpits

1. Théorie générale de l'oscillateur à quatre bornes

Un oscillateur comporte une cellule amplificatrice A , constituée par un quadripôle caractérisé par sa matrice admittance:

$$i_e = y_{11}V_e + y_{12}V_s.$$

$$i_s = y_{21}V_e + y_{22}V_s.$$

On lui associe la cellule de réaction R (figure 5) qui est un quadripôle caractérisé par la matrice :

$$i'_e = y'_{11}V'_e + y'_{12}V'_s.$$

$$i'_s = y'_{21}V'_e + y'_{22}V'_s.$$

a. On demande la matrice admittance de l'ensemble AR , c'est-à-dire la matrice

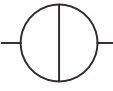
(Y) telle que $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (Y) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$; les termes

de (Y) seront calculés en fonction des y_{ij} et des y'_{ij} .

b. Il y a oscillation si les tensions d'entrée et de sortie v_1 et v_2 peuvent avoir une valeur non nulle lorsque $i_1 = 0$ et $i_2 = 0$. En déduire la condition portant sur la matrice (Y) pour que l'oscillation s'établisse (accrochage).

2. Application à l'oscillateur Colpits

a. La cellule amplificatrice A est constituée par le réseau actif suivant (figure 6) :
 R_B , h_{11} , R_C sont des résistances pures.

βi_e
 : ce symbole représente un générateur d'intensité idéal débitant le courant d'intensité βi_e .

Etablir les paramètres y_{ij} de la matrice admittance en fonction de R_B , h_{11} , R_C et β , puis en fonction de R_C , β et $h'_{11} = \frac{R_B h_{11}}{R_B + h_{11}}$.

b. La cellule de réaction R est constituée par le réseau passif suivant (figure 7).
 L auto-inductance pure, C_1 , C_2 capacités.

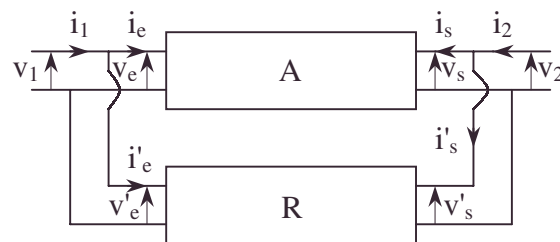


Figure 5

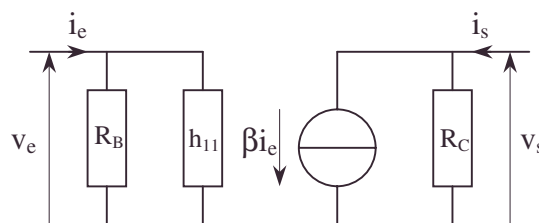


Figure 6

Transistors

En supposant que le système oscille sinusoïdalement à la pulsation ω , établir les paramètres y'_{ij} de la matrice admittance en fonction de L , C_1 , C_2 et ω .

c. Après avoir établi la matrice admittance de l'ensemble AR, expliciter les conditions d'accrochage.

d. Dans le cas particulier où $y_{11} = 0$ et $y_{22} = 0$, calculer la pulsation d'oscillation ω_0 en fonction de L , C_1 et C_2 . Application numérique : $C_1 = C_2 = 47000\text{pF}$; $L = 10\text{mH}$.

e. On considère un amplificateur tel que $y_{11} = 0$ mais tel que le rapport $\frac{\beta}{h'_{11}} = S$ soit différent de zéro. Calculer la valeur de R_C correspondant à l'accrochage en fonction de C_1 , C_2 et S .

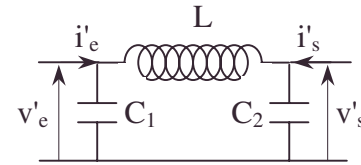


Figure 7

Centrale ; 4 h

Corrigé

I.1.a. Appliquons la loi d'Ohm à la branche R_1C_1 :

$$[1] \quad Gv_e - v_e = \frac{q_1}{C_1} + R_1 i \quad \text{avec} \quad \frac{dq_1}{dt} = i ;$$

La loi des nœuds en A donne : [2] $i = \frac{v_e}{R_2} + \frac{dq_2}{dt}$ avec $q_2 = C_2 v_e$.

Dérivons [1] et éliminons $\frac{dv_e}{dt}$; on obtient :

$$R_1 \frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \left(1 - G + \frac{R_1}{R_2} \right) \right] \frac{di}{dt} + \frac{i}{R_2 C_1 C_2} = 0$$

b. Pour avoir une solution sinusoïdale pure solution d'une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants, il faut qu'elle soit de la forme

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega^2 i = 0.$$

Le crochet facteur de $\frac{di}{dt}$ doit être nul: $G = 1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2}$;

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

c. $G = 3$; $f_0 = 1061 \text{ Hz}$.

2. Formellement, on a remplacé R_1 par $R_1 + R_s$ et R_2 par $\frac{R_2 R_e}{R_2 + R_e}$ (soit $R_e // R_2$).

$$\Rightarrow G = 1 + \frac{C_2}{C_1} + (R_1 + R_s) \frac{(R_2 + R_e)}{R_2 R_e} ; \text{AN : } G = 3,67.$$

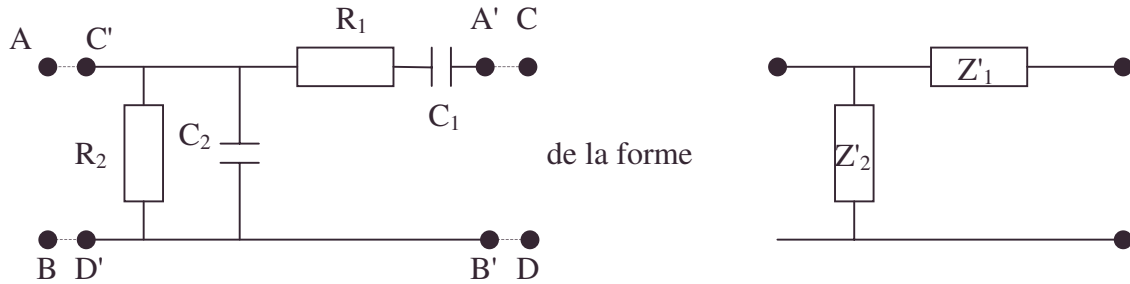
$$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{C_1 C_2 (R_1 + R_s) R_2 R_e}{R_2 + R_e}}} ; \text{AN : } f_0 = 1027 \text{ Hz}.$$

II.1. A l'entrée : $v_1 = -V_{C'D'} + v_e \Rightarrow G' = \frac{v_s}{v_1} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{G}{1 - \frac{V_{C'D'}}{v_e}}$; or $\frac{V_{C'D'}}{v_e} = \frac{V_{C'D'}}{V_{A'B'}} \frac{V_{A'B'}}{v_e}$;

$\frac{V_{C'D'}}{v_e} = Q.G \Rightarrow G' = \frac{G}{1 - QG}$. Le signe au dénominateur est lié au montage.

2. Si $v_1 \rightarrow 0$ $v_s = G'v_1$ peut garder une valeur finie si $G' \rightarrow \infty$ soit $QG = 1$.

3.a. On déforme le circuit de la figure 2 pour le transformer ; on obtient :



b. i_A à travers R_e est nul car $R_e \rightarrow \infty$; on a donc un pont diviseur de tension.

$Q = \frac{V_{C'D'}}{V_{A'B'}} = \frac{Z_2'}{Z_1' + Z_2'} = \frac{1}{\frac{Z_1'}{Z_2'} + 1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R_2} + jC_2\omega \right) \left(R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} \right)}$;

c. $Q = \frac{1}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)} = \frac{3 - j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)^2}$;

$|Q| = \frac{1}{\sqrt{7 + (RC\omega)^2 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}}$;

$\arg Q = \arctan \frac{1 - R^2 C^2 \omega^2}{3RC\omega}$.

$|Q|$ donne le rapport des modules des tensions d'entrée et de sortie ; $\arg Q$ donne le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée : $\arg Q = \arg v_s - \arg v_e$.

d.

F	100 Hz	500 Hz	1000 Hz	3000 Hz	10000 Hz
$ Q $	$0,91 \cdot 10^{-1}$	$3,0 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$
$\arg Q$ (rad)	1,29	0,50	0,04	-0,70	-1,26

e. $GQ = 1 \Rightarrow |Q| = \frac{1}{G}$ et $\arg Q = 0 \Rightarrow R^2 C^2 \omega^2 = 1$; $f = \frac{1}{2\pi RC}$,

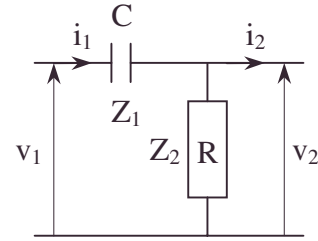
et $G = \frac{1}{|Q|} = \sqrt{7 + (RC\omega)^2 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}$; A.N. : $G = 3$; $f = 1061$ Hz.

Question III**III.1.a.** La loi d'Ohm écrite pour C : $v_1 - v_2 = Z_1 i_1$.La loi aux nœuds : $i_1 = i_2 + \frac{v_2}{Z_2}$; $Z_1 = \frac{1}{jC\omega}$; $Z_2 = R$;

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) + i_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} ; \text{ soit } (t) \text{ la matrice de transfert ;}$$

$$a = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} ; b = Z_{1Z} ; c = \frac{1}{Z_2} ; d = 1.$$

b. on applique 3 fois la matrice de transfert entre $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_4 \\ i_4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = (t)(t)(t) \begin{pmatrix} v_4 \\ i_4 \end{pmatrix} \text{ et } (T) = (t)^3 = \begin{bmatrix} 1 + 6\frac{Z_1}{Z_2} + 5\frac{Z_1^2}{Z_2^2} + \frac{Z_1^3}{Z_2^3} & Z_1 \left(3 + 4\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1^2}{Z_2^2} \right) \\ \frac{1}{Z_2} \left(3 + 4\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1^2}{Z_2^2} \right) & 1 + 3\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1^2}{Z_2^2} \end{bmatrix}.$$

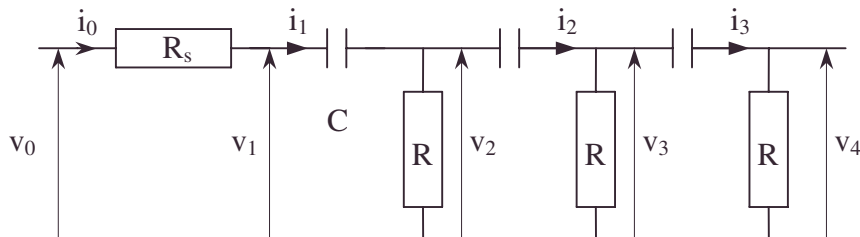
c. Or $i_4 = 0$ car R_e infini. $\Rightarrow \frac{v_1}{v_4} = T_{11} = x^3 + 5x^2 + 6x + 1$; or $x = \frac{1}{jRC\omega}$;

$$\frac{v_1}{v_4} = 1 - \frac{5}{R^2 C^2 \omega^2} + j \left(\frac{1}{R^3 C^3 \omega^3} - \frac{6}{RC\omega} \right).$$

$$\text{d. } \left| \frac{v_1}{v_4} \right| = \sqrt{1 + \frac{26}{(RC\omega)^2} + \frac{13}{(RC\omega)^4} + \frac{1}{(RC\omega)^6}} ; \arg \frac{v_1}{v_4} = -\arctan \frac{6(RC\omega)^2 - 1}{RC\omega((RC\omega)^2 - 5)}.$$

$$\text{2.a. } Q = \frac{v_4}{v_1} = \frac{1}{G} ; G \text{ réel} < 0 \Rightarrow \arg \frac{v_4}{v_1} = \pi \Rightarrow \omega_0^2 = (6R^2 C^2)^{-1} \text{ et } f_0 = \frac{1}{2\pi RC\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow G = 1 - \frac{5}{R^2 C^2 \omega_0^2} \text{ vu c.}$$

b. AN : $G = -29$; $f_0 = 433 \text{ Hz}$.**3.a.1.**

$$\text{2. On introduit } \begin{pmatrix} v_0 \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T) \begin{pmatrix} v_4 \\ i_4 \end{pmatrix} ;$$

Comme $i_4 = 0$, $\frac{v_0}{v_4}$ se déduit de la matrice comme précédemment en **III.1.c**. On

remarquera que pour l'amplificateur idéal qui donne v_0 :

$$\frac{\text{tension d'entrée}}{\text{tension de sortie}} = \frac{v_4}{v_0} = \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 6x + 1 + \frac{R_s}{R}(x^2 + 4x + 3)} = Q'.$$

$$\frac{v_4}{v_0} = \frac{1}{T_{11} + R_s T_{12}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{R^2 C^2 \omega^2} - \frac{R_s}{R R^2 C^2 \omega^2} + 3 \frac{R_s}{R}\right) - j \left(\frac{1}{R^3 C^3 \omega^2} - \frac{6}{R C \omega} - \frac{4 R_s}{R^2 C \omega}\right)};$$

$$\text{3. Or : } \arg Q' = \arctan \frac{\left(\frac{4 R_s}{R^2 C \omega} + \frac{6}{R C \omega} - \frac{1}{R^3 C^3 \omega^3}\right)}{1 - \frac{5}{R^2 C^2 \omega^2} - \frac{R_s}{R^3 C^2 \omega^2} + \frac{3 R_s}{R}};$$

$$\arg Q' = \pi \Rightarrow \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2} = 6 + \frac{4 R_s}{R} \Rightarrow f'_0 = \frac{1}{2 \pi R C \sqrt{6 + 4 \frac{R_s}{R}}}; \text{ AN : } f'_0 = 315 \text{ Hz.}$$

$$G' = \frac{1}{Q'} = \frac{v_0}{v_4} = 1 + 5x^2 + \frac{R_s}{R}(3 + x^2) \text{ et vu } \arg Q' = \pi, G' = 1 + 3 \frac{R_s}{R} - \left(5 + \frac{R_s}{R}\right) \left(6 + 4 \frac{R_s}{R}\right)$$

AN : $G' = 66,8$.

$$\text{4. } \frac{f_0 - f'_0}{f_0} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{2 R_s}{3 R}}} + 1; \text{ AN : } \frac{f_0 - f'_0}{f_0} = + 27\%.$$

On n'a pas pratiqué de développement limité.

$$\text{b.1. } R' \text{ et } R_e \text{ montées en parallèle doivent être équivalentes à } R \Rightarrow R' = \frac{R R_e}{R_e - R}.$$

$$\text{2. AN : } R' = 1,56 \text{ k}\Omega.$$

$$\text{IV.1.a. } i_1 = i_e + i'_e; v_e = v'_e = v_1;$$

$$i_2 = i_s + i'_s;$$

$$v_s = v'_s = v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (y) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + (y') \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [(y) + (y')] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$[Y] = (y) + (y')$ soit $Y_{ij} = y_{ij} + y'_{ij}$.

b. Le système de Cramer devenu homogène admet des solutions non nulles si le déterminant de $(Y) = 0$.

$$\text{2.a. A l'entrée : } i_e = v_e \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{h_{11}} \right) + 0 v_s;$$

$$\text{A la sortie : } i_s = \beta i_e + \frac{v_s}{R_s} = \beta v_e \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{h_{11}} \right) + \frac{v_s}{R_C}; \text{ on déduit :}$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{h_{11}} = \frac{1}{h'_{11}}; y_{12} = 0; y_{21} = \beta \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{h_{11}} \right) = \frac{\beta}{h'_{11}}; y_{22} = \frac{1}{R_C}.$$

b. A l'entrée de la cellule: $i_e' = jC_1\omega v_e' + \frac{v_e' - v_{s'}}{jL\omega}$;

A la sortie : $i_s = -\frac{v_e' - v_{s'}}{jL\omega} + jC_2\omega v_s'$ d'où $y_{11}' = jC_1\omega + \frac{1}{jL\omega}$; $y_{12}' = -\frac{1}{jL\omega}$;

$y_{21}' = -\frac{1}{jL\omega}$; $y_{22}' = jC_2\omega + \frac{1}{jL\omega}$.

c. $(Y) = (y) + (y')$. Ecrivons $|(Y)| = 0$; sur \mathbb{C} , on obtient deux relations :

$\text{Re}(y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12}) = 0$; $\text{Im}(y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12}) = 0$.

(1') $\frac{1}{R_c h_{11}'} - \left(C_1\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \left(C_2\omega - \frac{1}{L\omega} \right) + \frac{1}{L^2\omega^2} = 0$;

(2') $\frac{1}{R_c} \left(C_1\omega - \frac{1}{L\omega} \right) + \frac{1}{h_{11}'} \left(C_2\omega - \frac{1}{L\omega} \right) - \frac{\beta}{h_{11}'L\omega} = 0$.

d. vu **2.** $y_{11} = 0 \Rightarrow h_{11}' \rightarrow \infty$; $y_{22} = 0 \Rightarrow R_c \rightarrow \infty$.

On obtient de **2.c.** : $(LC_1\omega_0^2 - 1)(LC_2\omega_0^2 - 1) = 1$ soit en effectuant : $\omega_0 = \left(\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} \right)^{\frac{1}{2}}$;

(on élimine $\omega = 0$) :

$C_1 = C_2 \Rightarrow \omega_0 = \left(\frac{2}{LC_1} \right)^{\frac{1}{2}}$; AN : $\omega_0 = 65222 \text{ rad.s}^{-1}$.

e. $y_{11} = 0 \Rightarrow h_{11}'$ grand mais $\frac{\beta}{h_{11}'} = S \neq 0$ soit β grand, de l'ordre de h_{11}' .

$R_c \neq 0$ mais non infinitésimalement petite.

(1') $\Rightarrow \omega_0 = \frac{(C_1 + C_2)^{\frac{1}{2}}}{(LC_1C_2)^{\frac{1}{2}}}$;

(2') s'écrit $\frac{1}{R_c} \left(C_1\omega_0 - \frac{1}{L\omega_0} \right) = \frac{S}{L\omega_0} \Rightarrow R_c = \frac{LC_1\omega_0^2 - 1}{S}$ soit $R_c = \frac{C_1}{C_2S}$.

6.1.6.5. Electronique du hacheur

Voir page 1082.

- condition d'oscillations, ordre de grandeur

6.1.7. Théorie du signal

Appartient aux programmes de TP en MPSI, PT, TSI2

6.1.7.1. Analyse harmonique

© Editions EYROLLES, *Electronique des petits signaux : problèmes d'examens corrigés et commentés, tome 1. BENADDA et VAUDEVILLE.*

Le but du problème est de relever le spectre en fréquence d'un signal périodique non sinusoïdal. Pour cela, on intercale entre le générateur et un voltmètre de résistance pratiquement infinie, un quadripôle fournissant une tension $v_s(t)$.

I. Etude du signal d'entrée

Un dispositif électronique délivre une tension $v_e(t)$ non sinusoïdale de fréquence : $f_0 = 10 \text{ kHz}$ telle que :

- $v_e(t) = 0$ pour $0 \leq t < \frac{t_1}{2}, \frac{T}{2} - \frac{t_1}{2} \leq t < \frac{T}{2} + \frac{t_1}{2}, T - \frac{t_1}{2} \leq t < T$.
- $v_e(t) = V_0$ pour $\frac{t_1}{2} \leq t < \frac{T}{2} - \frac{t_1}{2}$.
- $v_e(t) = -V_0$ pour $\frac{T}{2} + \frac{t_1}{2} \leq t < T - \frac{t_1}{2}$.

1.1. Donner la représentation graphique de $v_e(t)$.

2. Montrer que $v_e(t)$ peut s'écrire : $v_e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{(2k+1)} \sin\{(2k+1)\omega_0 t\}$;

On posera $\omega_0 = 2\pi f_0$.

3. Donner le spectre en fréquence du signal $v_e(t)$ pour $t_1 = 0$.

2. Etude du quadripôle Q

1. Le quadripôle Q est représenté figure 1, $i_s = 0$.

1. Exprimer la transmittance complexe $\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ lorsque le quadripôle est alimenté par un signal sinusoïdal de fréquence f .

2. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de $\underline{A}_v(j\omega)$ (gain et argument).

A.N. : données plus loin dans l'énoncé.

3. Montrer que le module de \underline{A}_v passe par un maximum pour une fréquence f que l'on précisera. Calculer ce maximum.

4. Si $L_1 = 10 \text{ mH}$ et $R_1 = 10 \Omega$, quelle doit être la valeur de C_1 pour que le circuit soit accordé sur le fondamental ?

Quelle est alors la valeur du module A_v de \underline{A}_v pour le premier harmonique soit $3\omega_0$? Peut-on considérer que le voltmètre mesure V_1 ?

2. Le quadripôle Q est maintenant constitué d'un amplificateur idéal d'impédance d'entrée infinie, d'impédance de sortie nulle, d'amplification $\underline{A}_0 = \frac{\underline{V}_s}{\underline{E}}$ associé à deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 conformément à la figure 2.

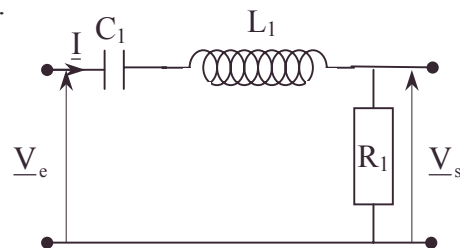


Figure 1

Calculer la transmittance complexe $\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$. Montrer que si \underline{A}_0 est infinie, on a

$$\underline{A}_v = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}.$$

3. Les impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 sont représentées figure 3.

Elles sont telles que $L_1 C_1 = L_2 C_2$: \underline{A}_0 est toujours infinie.

1. Montrer que le module A_v de \underline{A}_v passe par un maximum pour une fréquence f que l'on déterminera.

2. Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de $\underline{A}_v(j\omega)$ (gain et argument).

3. Le montage est accordé sur le fondamental et on a :

$$R_1 = 10\Omega ; L_1 = 10 \text{ mH} ;$$

$$R_2 = 1\text{k}\Omega ; L_2 = 250 \mu\text{H}.$$

Calculer le module A_v de \underline{A}_v pour le fondamental et le premier harmonique.

Quel est l'intérêt de ce second dispositif ?

4. On a maintenant : $C_1 = 2,8 \text{ nF}$, R_1 , L_1 , R_2 , L_2 gardant les mêmes valeurs et C_2 étant telle que $L_1 C_1 = L_2 C_2$: que peut-on déduire de cette mesure ?

5. Calculer L_1 pour que le filtre soit accordé sur l'harmonique 5 .

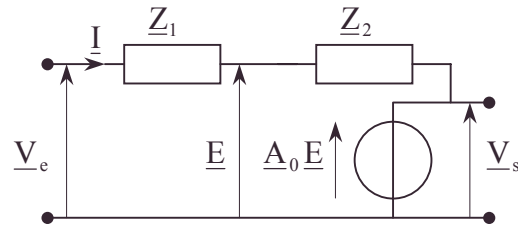


Figure 2

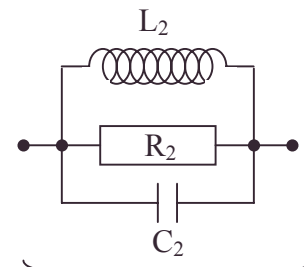
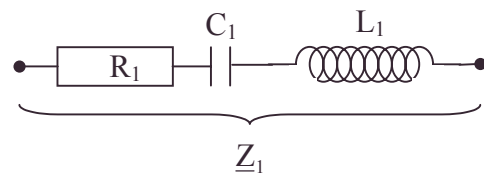
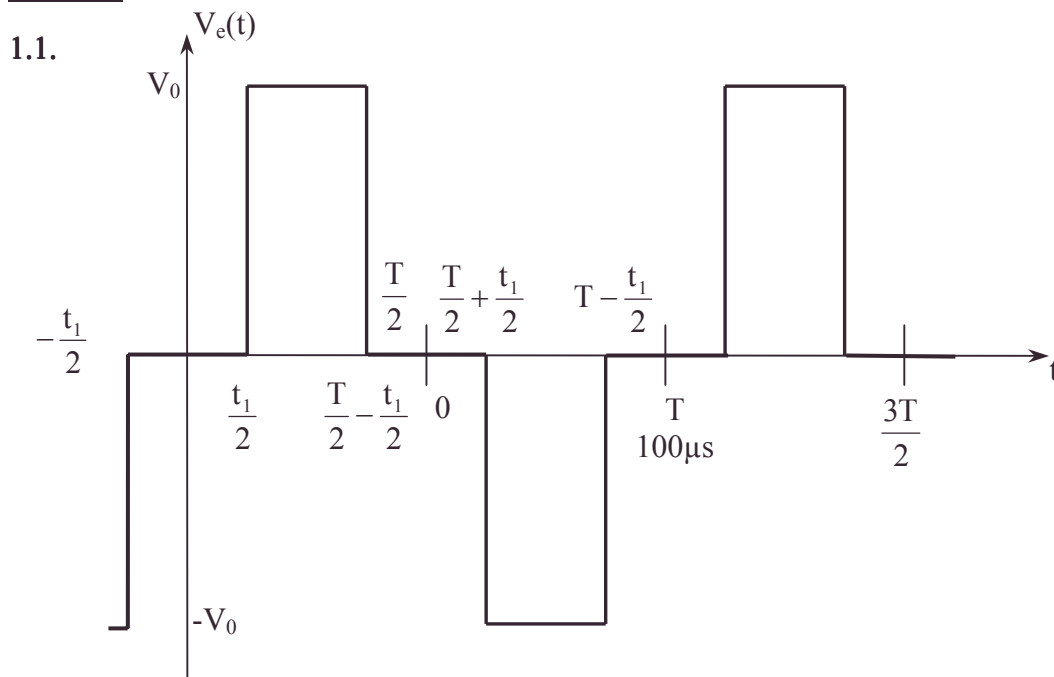


Figure 3

BTS ; Durée : 4h

Corrigé



2. Développons en série de Fourier : $v_e(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_1^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$

- v_e étant impaire, les projections sur les cosinus fonctions paires sont nulles : $a_n = 0, \forall n$.

$$\bullet b_n = \frac{2}{T} \int_0^T V_e(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2V_0}{T} \left[\int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{T-t_1}{2}} \sin n\omega_0 t dt - \int_{\frac{T-t_1}{2}}^{\frac{T+t_1}{2}} \sin n\omega_0 t dt \right].$$

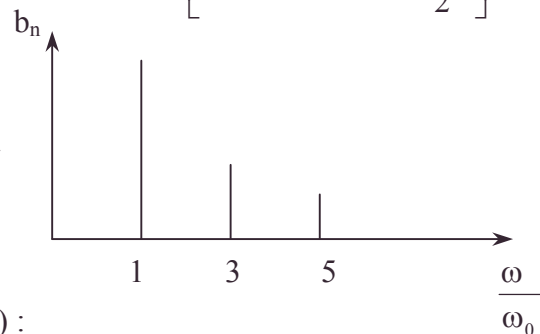
$$\bullet b_n = \frac{-2V_0}{Tn\omega_0} \left[\cos n\omega_0 \left(\frac{T}{2} - \frac{t_1}{2} \right) - \cos n\omega_0 \frac{t_1}{2} - \cos n\omega_0 \left(T - \frac{t_1}{2} \right) + \cos n\omega_0 \left(\frac{T}{2} + \frac{t_1}{2} \right) \right].$$

$$\bullet b_{2k} = \frac{-2V_0}{2k \cdot 2\pi} [\cos k\omega_0 t_1 - \cos k\omega_0 t_1 - \cos k\omega_0 t_1 + \cos k\omega_0 t_1] = 0.$$

$$\bullet b_{2k+1} = \frac{-2V_0}{(2k+1)2\pi} \left[-\cos(2k+1) \frac{t_1\omega_0}{2} - \cos(2k+1) \frac{t_1\omega_0}{2} - \cos(2k+1) \frac{t_1\omega_0}{2} \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots \dots - \cos(2k+1) \frac{t_1\omega_0}{2} \right].$$

$$\bullet b_{2k+1} = \frac{4V_0}{(2k+1)\pi} \cos(2k+1) \frac{t_1\omega_0}{2}.$$

3. $b_1 = 1,27 V_0$; $b_3 = 0,42 V_0$; $b_5 = 0,25 V_0$.
On remarquera $b_1 > V_0$.



1. On a un pont diviseur de tension ($i_s = 0$) :

$$\underline{V}_s = \frac{R_1 \underline{V}_e}{R_1 + j \left(C_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)} \Rightarrow \underline{A}_v = \frac{1}{1 + j \frac{1}{R_1} \left(L_1 2\pi f - \frac{1}{C_1 2\pi f} \right)}.$$

$$2. |\underline{A}_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R_1^2} \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)^2}} ; \arg \underline{A}_v = \arctan \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{C_1 \omega} - L_1 \omega \right) = \varphi$$

$$\bullet \omega \rightarrow +0 \quad G_{dB} \sim 20 \log R_1 C_1 \omega = 20 \log R_1 C_1 + 20 \log \omega ; \varphi \rightarrow +\frac{\pi}{2}.$$

$$\bullet \omega \rightarrow \infty \quad G_{dB} \sim -20 \log \frac{L_1}{R_1} \omega = 20 \log \frac{R_1}{L_1} - 20 \log \omega ; \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

A.N. de l'énoncé : $L_1 = 10 \text{ mH}$; $R_1 = 10 \Omega$; $C_1 = 2,8 \text{ nF}$.

On a les pulsations particulières $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$; AN : $\omega_1 \# 4 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$; $\log \omega_1 = 6,6$.

$$\omega_2 = \frac{R_1}{L_1} ; \text{AN : } \omega_2 = 1000 \text{ rad.s}^{-1} ; \log \omega_2 = 3.$$

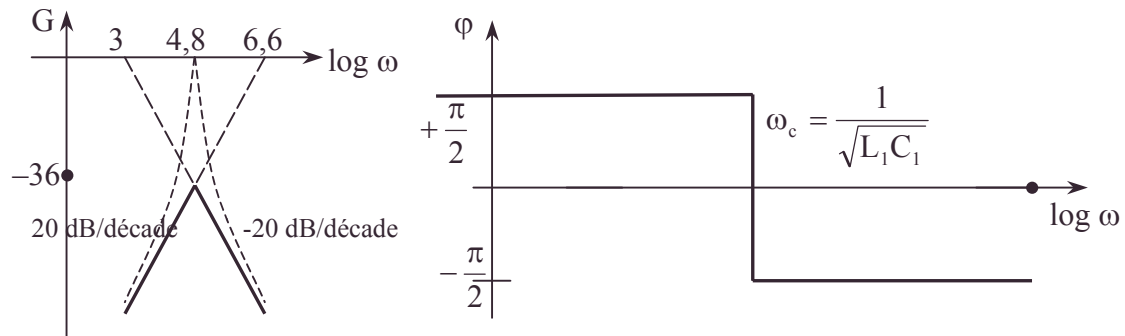
$$\omega_0 = 2\pi f_0 ; \text{AN : } \omega_0 = 6,3 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1} ; \log \omega_0 = 4,8.$$

$$\text{Intersection des asymptotes : } 20 \log R_1 C_1 \omega = -20 \log \frac{L_1}{R_1} \omega \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

$$\text{A.N. : } \log \omega_0 = 4,8.$$

• pont diviseur de tension, série de Fourier

$$G_1 = 20 \log \frac{R_1 C_1}{\sqrt{L_1 C_1}} ; \text{A.N. : } G_1 = -36 \text{ dB.}$$



$$3. |A_v|_{\max} = 1 \text{ pour } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} ; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} ; \text{A.N. : } f_0 = 10027 \text{ Hz.}$$

$$4.a. C_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L_1} ; \text{AN : } C_1 = 25,33 \text{ nF.}$$

b. $A_v(3 f_0) = 5,97 \cdot 10^{-3} \ll 1$, le voltmètre mesure la tension de sortie du fondamental à $2^0/_{00}$ car $b_3 < b_1$.

2.a. $\underline{V}_s = \underline{A}_0 \underline{E}$; or d'après le théorème de Millman:

$$\underline{E} = \frac{\frac{\underline{V}_e}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_s}{\underline{Z}_2}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{V}_e + \underline{Z}_1 \underline{V}_s}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{A}_0} \Rightarrow \underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{A}_0 \underline{Z}_2}{(\underline{Z}_2 + (1 - \underline{A}_0) \underline{Z}_1)}.$$

$$b. |\underline{A}_0| \rightarrow \infty, \underline{A}_v \rightarrow \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}.$$

$$3.1. \underline{Z}_1 = R_1 + j \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right) ; \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j L_2 \omega} + j C_2 \omega ;$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_2} \left(1 + j R_2 \left(C_2 \omega - \frac{1}{L_2 \omega} \right) \right).$$

$$\underline{A}_v = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{j}{R_1} \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right) \left(1 + j R_2 \left(C_2 \omega - \frac{1}{L_2 \omega} \right) \right)} \text{ de la forme } \underline{A}_v = \underline{A}_1 \underline{A}_2 \underline{A}_3.$$

$$|\underline{A}_v| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R_1^2} \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)^2} \sqrt{1 + R_2^2 \left(C_2 \omega - \frac{1}{L_2 \omega} \right)^2}} ; \text{ on a un minimum simultané}$$

$$\text{des deux termes du dénominateur pour } \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} ;$$

$$|\underline{A}_{v_{\max}}| = \frac{R_2}{R_1} \text{ pour } f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}.$$

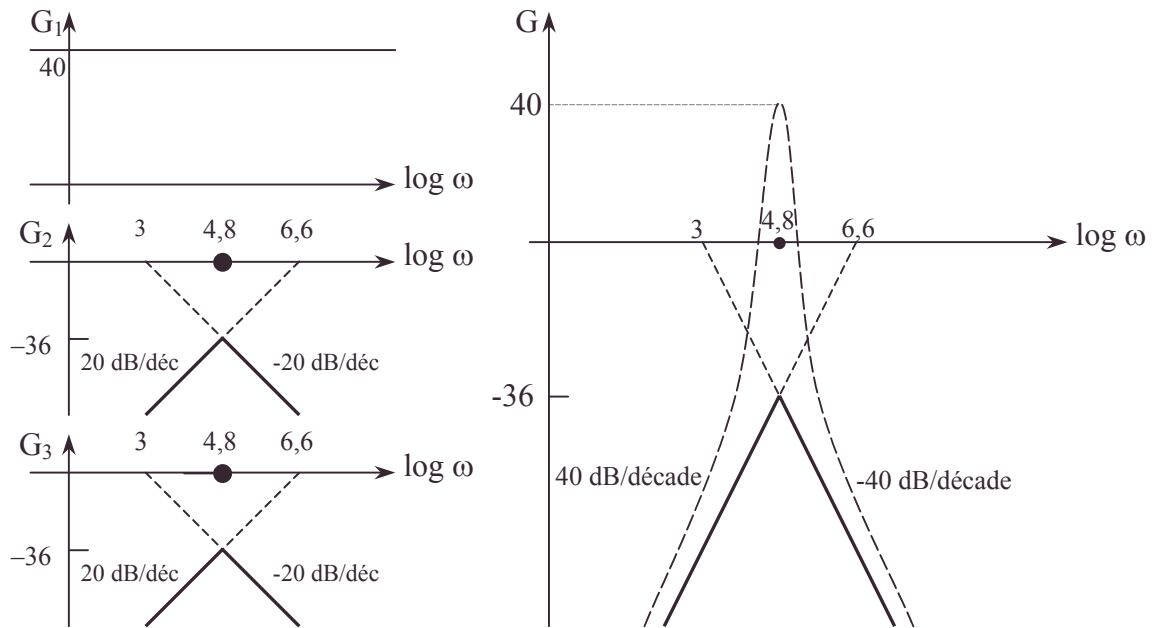
$$2.a. G_{dB} = 20 \log \frac{R_2}{R_1} - 10 \log \left[1 + \frac{1}{R_1^2} \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)^2 \right] - 10 \log \left[1 + R_2^2 \left(C_2 \omega - \frac{1}{L_2 \omega} \right)^2 \right]$$

de la forme $G = G_1 + G_2 + G_3$, G_2 et G_3 étant de la forme étudiée en 2.1. de pulsations

de coupure $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$; AN : $\omega_1 = 3,9 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega_2 = \frac{R_1}{L_1}$; AN : $\omega_2 = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$.

$\omega'_1 = \frac{R_2}{L_2}$; AN : $\omega'_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega'_2 = \frac{1}{C_2 R_2}$; AN : $\omega'_2 = 987 \text{ rad.s}^{-1}$.

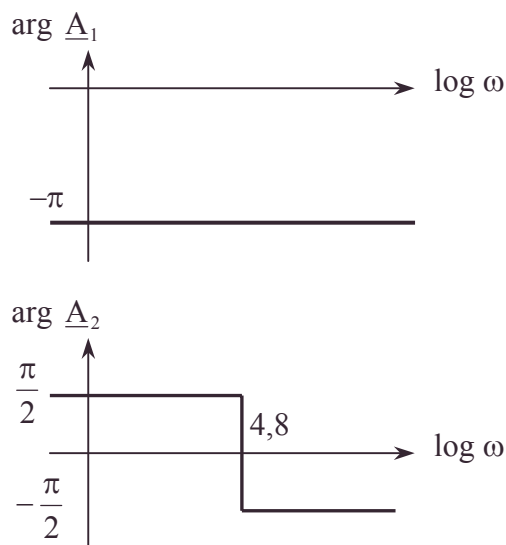
Intersection des asymptotes en $\log \omega_0 = 4,8$ et $G = -36 \text{ dB}$; en additionnant point à point les asymptotes, on a:

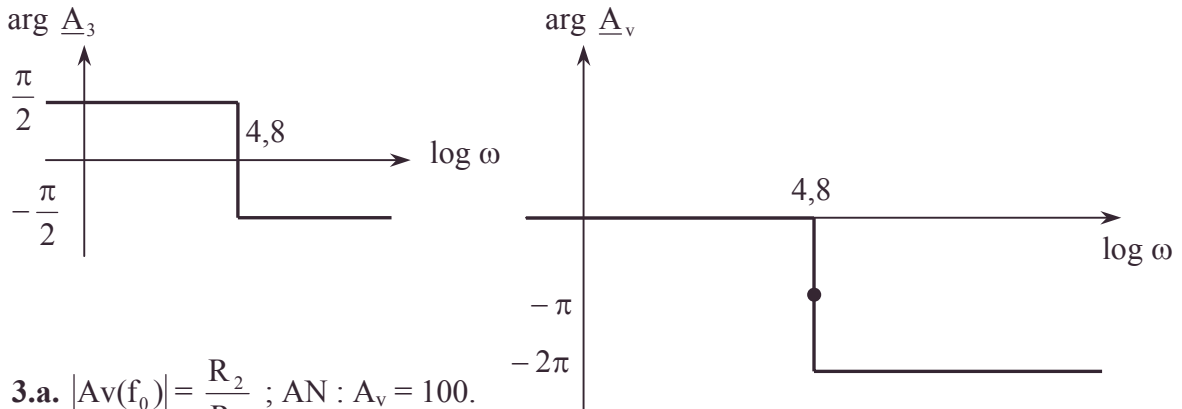


Le filtre passe-bande est plus sélectif.

$$2.b. \arg A_v = \arg \underline{A}_1 + \arg \underline{A}_2 + \arg \underline{A}_3$$

On fait l'addition point à point des asymptotes des arguments :





b. $C_2 = \frac{L_1}{L_2} C_1 = 1,01 \mu\text{F}$ $|A_v(3f_0)| = 3,52 \cdot 10^{-3}$.

Le montage est très sélectif : il amplifie le fondamental et atténue les harmoniques davantage encore que le montage du 2.1.

4. $f'_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$; AN : $f'_0 = 30077 \text{ Hz}$.

Le montage sélectionne $f'_0 = 3f_0$, on mesure la tension de sortie du premier harmonique V_3 au voltmètre (et non plus V_1).

5. L'harmonique suivante est $n = 5$: $f''_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$ avec $f''_0 = 50000 \text{ Hz}$.

$L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_0'^2 C_1}$; AN : $L_1 = 3,62 \text{ mH}$ avec $C_1 = 2,8 \text{ nF}$.

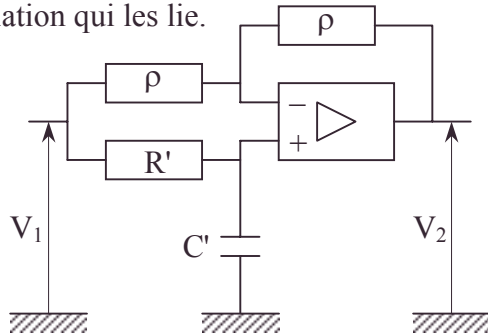
Le montage sélectionne alors la tension de sortie du 2^{ème} harmonique V_5 entre tous les harmoniques.

6.1.7.2. Modulation de fréquence

On admettra ici que les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

1. Indiquer le montage réalisant l'intégration d'un signal à partir d'un amplificateur opérationnel, d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C .

Cet intégrateur étant représenté par le schéma de la figure 1, représenter sur votre schéma les grandeurs d'entrée x et de sortie y et donner, en fonction de R et C , la relation qui les lie.



Réseau (D)

Figure 2

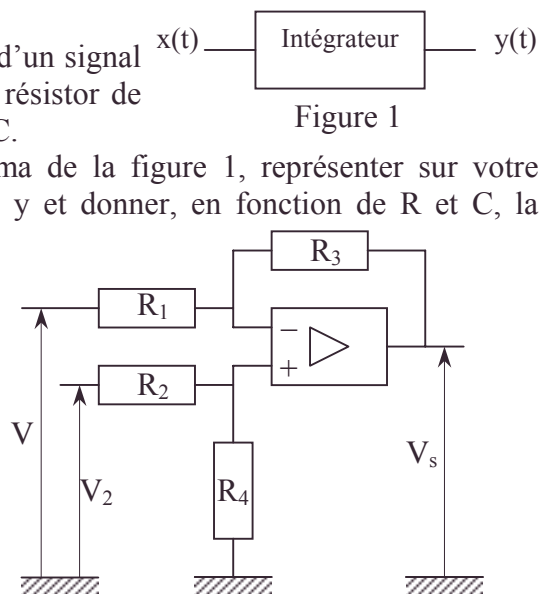
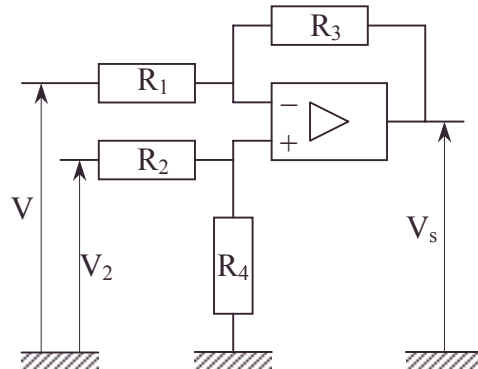


Figure 1



Réseau (S)

2. Dans le réseau (D) ci-dessus, utilisé en régime sinusoïdal permanent, R' et ρ désignent des résistances et C' une capacité. Déterminer le gain en tension du circuit. Tracer l'allure de son diagramme de Bode (amplitude du gain, en dB, et phase en fonction du logarithme de la fréquence). Déterminer la fonction de ce réseau.
3. Dans le réseau (S) ci-dessus, R_1 , R_2 , R_3 et R_4 désignent des résistances. A quelle condition (S) fonctionne-t-il en soustracteur ? Quelle est alors l'expression de v_s , en fonction de v et v_2 ?
4. On associe ces réseaux dans le modulateur d'Armstrong selon le schéma ci-dessous, dans lequel (S) est utilisé en soustracteur et où un multiplieur fournit en sortie une tension $K y v_1$ proportionnelle aux tensions y et v_1 imposées à l'entrée.

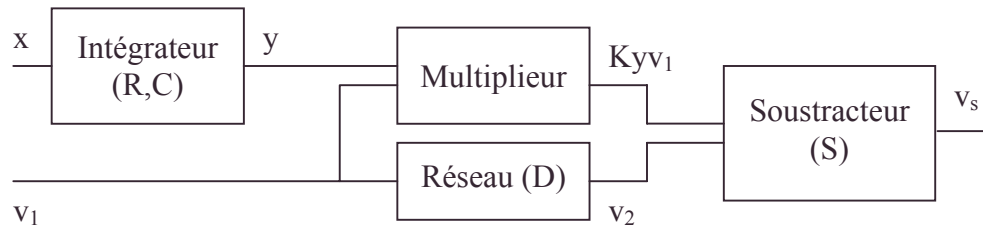


Figure 3

On impose à l'entrée de l'ensemble les tensions: $x(t) = x_0 \cos \omega t$ et $v_1(t) = V_1 \cos \omega_1 t$. De plus, on s'assure que $y(t=0) = 0$ et que (D) est réglé pour un retard de phase de v_2 par rapport à v_1 égal à $\pi/2$. Montrer que la tension de sortie de l'ensemble s'écrit:

$$v_s(t) = U_0 \sqrt{1 + \alpha^2 \sin^2 \omega t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

où on exprimera:

- α en fonction de K , x_0 , R , C et ω ;
- $\tan \varphi$ en fonction de K , x_0 , R , C , ω et du temps t ;
- U_0 en fonction de R_1 , R_3 et V_1 .

5. On suppose que le coefficient α est petit devant 1. Donner une expression approchée de la tension de sortie de l'ensemble. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme d'une tension modulée en fréquence:

$$v_s(t) \approx U_0 \sin(\omega_1 t + m \sin(\omega t)) = U_0 \sin[\psi(t)]$$

de pulsation porteuse élevée ω_1 , de taux de modulation m , de pulsation modulante ω et de phase instantanée $\psi(t)$. Identifier la valeur de m . Vérifier l'homogénéité de l'expression de m .

6. On convient d'appeler pulsation instantanée du signal $v_s(t)$ la grandeur $\Omega(t) = d\psi(t)/dt$. Etablir l'expression liant $\Omega(t)$, ω_1 , K , RC et $x(t)$.

Justifier alors le nom de modulation de fréquence effectivement donné à ce type de modulation.

7. La modulation de fréquence est utilisée par exemple :

- avec une porteuse de moyenne fréquence (environ 100 MHz) pour le transport de signaux de basse fréquence (acoustique, jusqu'à 20 kHz) pour la transmission radio;
- avec une porteuse de haute fréquence (environ 10 GHz) pour le transport de signaux de moyenne fréquence (quelques 10 MHz) pour la transmission d'images de télévision par satellite.

Connaissez-vous un avantage de ce mode de transport de l'information par rapport à une émission directe du signal ? Par rapport à la modulation d'amplitude ?

Mines ; Durée : 1h

- développement au premier ordre ou plus, diagramme de Bode, homogénéité d'une grandeur [analyse dimensionnelle], identification, multiplieur, soustracteur [rétroaction]

Corrigé

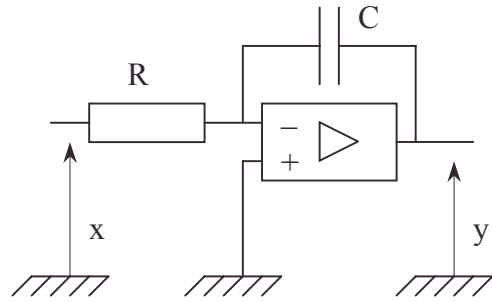
1. Soit le montage intégrateur ci-contre :

Le théorème de Millman appliqué à la borne

$$\text{inverseuse donne : } \underline{V}_- = \frac{\frac{x}{R} + yjC\omega}{\frac{1}{R} + jC\omega};$$

$$\text{comme } \underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0, y = -\frac{x}{RCj\omega}$$

$$\text{soit encore : } y = -\frac{1}{RC} \int_0^t x(t)dt \text{ si le condensateur est déchargé en } t = 0.$$



2.a. Le même théorème donne, appliqué à la borne :

$$\alpha. \text{ inverseuse : } \underline{V}_- = \frac{\underline{V}_1 + \underline{V}_2}{2}.$$

$$\beta. \text{ non inverseuse : } \underline{V}_+ = \frac{\frac{\underline{V}_1}{R'}}{\frac{1}{R'} + jC'\omega} = \frac{\underline{V}_1}{1 + jR'C'\omega}.$$

$$\text{Comme } \underline{V}_- = \underline{V}_+ : \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = \frac{2\underline{V}_1}{1 + jR'C'\omega};$$

$$\underline{V}_2 = \left(\frac{2}{1 + jR'C'\omega} - 1 \right) \underline{V}_1 = \frac{1 - jR'C'\omega}{1 + jR'C'\omega} \underline{V}_1; \underline{H}(j, \omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{1 - jR'C'\omega}{1 + jR'C'\omega}.$$

b. Diagramme de Bode

$$\alpha. 20 \log |\underline{H}| = 20 \log 1 = 0.$$

$$\beta. \arg \underline{H} = \arg N - \arg D = \arctan(-R'C'\omega) - \arctan(R'C'\omega) \\ = -2 \arctan(R'C'\omega)$$

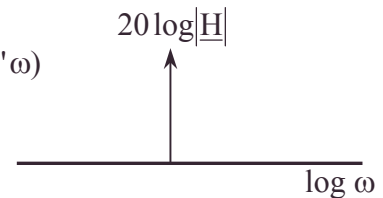


Figure alpha

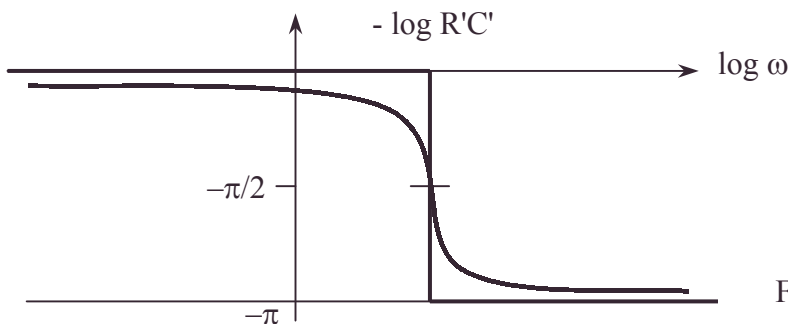


Figure beta

c. Ce réseau est dit déphaseur car de phase réglable selon ω .

3.a. Pour le réseau (S) le théorème de Millman donne, appliqué à :

$$\alpha. \underline{V}_- = \frac{\frac{\underline{V}_s}{R_3} + \frac{\underline{V}}{R_1}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1 \underline{V}_s + R_3 \underline{V}}{R_3 + R_1}.$$

$$\beta. \underline{V}_+ = \frac{\frac{\underline{V}_2}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_4 \underline{V}_2}{R_4 + R_2}.$$

$$\gamma. \underline{V}_+ = \underline{V}_- \Rightarrow \underline{V}_s = \frac{(R_3 + R_1)R_4 \underline{V}_2}{(R_4 + R_2)R_1} - \frac{R_3}{R_1} \underline{V} = \frac{R_3}{R_1} \left(\frac{R_4(R_3 + R_1)}{R_3(R_4 + R_2)} \underline{V}_2 - \underline{V} \right).$$

Le réseau fonctionne en soustracteur de la forme $\underline{V}_s = A(\underline{V}_2 - \underline{V})$.

si $\frac{R_4(R_3 + R_1)}{R_3(R_4 + R_2)} = 1$ soit $R_1 R_4 = R_2 R_3$, alors $\underline{V}_s = \frac{R_3}{R_1}(\underline{V}_2 - \underline{V})$.

On a bien $v_s = A(v_2 - v)$ avec $A = \frac{R_3}{R_1}$ si $R_1 R_4 = R_2 R_3$.

$$4.a. x = x_0 \cos \omega t \Rightarrow y = -\frac{x_0 \sin \omega t}{RC\omega}.$$

$$\beta. v_1 = v_1 \cos \omega_1 t \Rightarrow v_2 = V_1 \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = V_1 \sin \omega_1 t.$$

$$\gamma. \text{Le multiplieur a pour tension de sortie : } Kyv_1 = -\frac{x_0 K v_1}{RC\omega} \sin \omega t \cos \omega_1 t.$$

$$\delta. \text{Le soustracteur donne : } v_s = \frac{R_3}{R_1} \left(V_1 \sin \omega_1 t + \frac{x_0 K V_1}{RC} \sin \omega t \cos \omega_1 t \right) \text{ que l'on peut}$$

mettre sous la forme $v_s = E(t) \sin(\omega_1 t + \varphi(t)) = E \sin \omega_1 t \cos \varphi(t) + E \cos \omega_1 t \sin \varphi(t)$ et que l'on peut identifier formellement (vu le résultat à trouver) moyennant :

$$E \cos \varphi(t) = \frac{R_3}{R_1} V_1 ; E \sin \varphi(t) = \frac{R_3}{R_1} \frac{x_0 K V_1}{RC\omega} \sin \omega t, \text{ d'où :}$$

$$E^2 = E^2 \cos^2 \varphi + E^2 \sin^2 \varphi = \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 V_1^2 \left(1 + \left(\frac{x_0 K}{RC\omega}\right)^2 \sin^2 \omega t\right).$$

On peut prendre $U_0 = \frac{R_3}{R_1} V_1$ (au signe près qui se répercuterait sur la détermination de

$$\varphi) \text{ et } \alpha = \frac{K x_0}{RC\omega}.$$

$$\text{On en déduit : } \tan \varphi = \frac{K x_0}{RC\omega} \sin \omega t = \alpha \sin \omega t.$$

$$5.a.\alpha. \alpha \ll 1 \Rightarrow \tan \varphi \ll 1 ; \tan \varphi \approx \varphi = \frac{K x_0}{RC\omega} \sin \omega t.$$

$$\beta. \sqrt{1 + \alpha^2 \sin^2 \omega t} \approx 1 \Rightarrow v_s = \frac{R_3}{R_1} V_1 \sin\left(\omega_1 t + \frac{K x_0}{RC\omega} \sin \omega t\right), \text{ donc bien de la forme}$$

$$\text{donnée avec } U_0 = \frac{R_3}{R_1} V_1 \text{ et } m = \frac{K x_0}{RC\omega} = \alpha ; \psi = \omega_1 t + \frac{K x_0}{RC\omega} \sin \omega t.$$

b. m a même dimension que α , qui est sans dimension comme 1 cf. 4. On remarquera $RC\omega$ sans dimension de même que $K x_0$.

$$6. \Omega(t) = \omega_1 + \frac{K}{RC} x_0 \cos \omega t = \omega_1 + \frac{K}{RC} x(t) = 2\pi \nu.$$

• développement au premier ordre ou plus, identification, Millman [théorème de], soustracteur [rétroaction]

La fréquence ν est modulée par le signal modulant $x(t)$.

La fréquence moyenne est $\frac{\omega_1}{2\pi}$; $\frac{d\nu}{dx} = \frac{K}{2\pi RC}$ constante.

7. L'utilisation d'une porteuse de haute fréquence permet une meilleure qualité de la transmission du son et de l'image, via les satellites ou les relais car on contourne par ce procédé les ennuis de l'absorption et de la réflexion des ondes basse fréquence (modulées en amplitude ou envoyées directement).

Les plages de fréquence sont par conséquent plus vastes ou plus nombreuses et permettent des chaînes mieux définies et plus nombreuses.

6.1.7.3. Etude fréquentielle d'un signal Echantillonnage – Démodulations

Notation : on utilisera comme outil d'écriture :

- la fonction $\delta(x)$ impulsion unité telle que :

$$\delta(x) = 1 \text{ si } x = 0 ; \delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Attention : ceci n'est pas une distribution de Dirac, souvent notée de même.

- la fonction impulsion unité translatée $\delta_a(x) = \delta(x - a)$;

$$\delta_a(x) = 1 \text{ si } x = a ; \delta_a(x) = 0 \text{ si } x \neq a \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

I. Etude fréquentielle des signaux

1. Spectre discontinu d'un signal périodique

Un signal périodique $s(t)$ de période T_0 de fréquence $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ se décompose en série

de Fourier sur \mathbb{C} selon : $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi\nu_0 n t}$ de coefficients de Fourier

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi\nu_0 n t} dt.$$

On définit la densité spectrale ou spectre d'un signal périodique $s(t)$ par :

$$S(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \delta(\nu - n\nu_0).$$

Soit le signal $s = x_0 |\cos 2\pi\nu_0 t|$.

1. Représenter graphiquement $s(t)$ en fonction du temps
2. Calculer S_0, S_{2k+1}, S_{2k} .
3. Représenter le module de $S(\nu)$ en fonction de ν .
4. Représenter l'argument de $S(\nu)$ en fonction de ν .

2. Spectre continu d'un signal apériodique $s(t)$

On définit la densité spectrale d'un signal apériodique $s(t)$ par :

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi\nu t} dt. \quad \text{Notation : } S(\nu) = \text{TF}[s(t)] \text{ (en physique).}$$

On admettra sans démonstration que la transformation inverse TF^{-1} est telle que :

$s(t) = \text{TF}^{-1}[S(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{+j2\pi\nu t} d\nu$ et qu'il y a bijectivité dans les conditions d'application de ce problème.

- densité spectrale, homogénéité d'une grandeur [analyse dimensionnelle], impulsion unité

Les conditions requises pour l'existence des intégrales seront toujours satisfaites dans ce problème, notamment $s = 0$ pour $|t| \rightarrow +\infty$.

1. Soit le signal dit porte $p(t)$ tel que : $p(t) = 1$ pour $-a \leq t \leq a$;
 $p(t) = 0$ pour $|t| > a$, $a > 0$.

Donner l'expression de sa densité spectrale $P(v)$.

2. Représenter le module $P(v)$ en fonction de v .
3. Représenter l'argument de $P(v)$ en fonction de v .

3. Produit de convolution de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$

On définit le produit de convolution $C_{xy}(\tau)$ de $x(t)$ et $y(t)$ par l'intégrale (prise au sens général par exemple de Lebesgue) : $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(\tau - t) dt$;

notation de l'opération de convolution : $C_{xy} = x * y$.

Vérifier rapidement que :

1. $x * y = y * x$;
2. $TF[x * y] = TF[x] \cdot TF[y]$;
3. $TF[x \cdot y] = TF[x] * TF[y]$.

4. Soit $\delta(t)$ le signal élément neutre considéré comme évident du produit de convolution : $\delta * x = x$.

1. Calculer $TF[\delta]$.
2. Montrer que $\delta(t) = \delta(-t)$.
3. Posons $\delta_{nT_0}(t) = \delta(t - nT_0)$. Calculer $TF[\delta_{nT_0}]$.

En déduire que si $C_{x\delta_{nT_0}} = x * \delta_{nT_0}$, $C_{x\delta_{nT_0}}(\tau) = x(\tau - nT_0)$.

4. En déduire $x(nT_0) = x(t) \delta(t - nT_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - nT_0) dt$.

4. Energie d'un signal $x(t)$

On définit la fonction de corrélation R_{xy} de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ par :

$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{y}(t - \tau) dt$ (quand $R_{xy}(\tau)$ existe), \bar{y} désignant le nombre complexe conjugué de y . On remarquera qu'intervient $(t - \tau)$ et non $(\tau - t)$.

On définit la fonction d'autocorrélation $\Gamma_x(\tau)$ d'un signal $x(t)$ par $\Gamma_x(\tau) = R_{xx}(\tau)$ (quand $R_{xx}(\tau)$ existe) ; à un coefficient multiplicatif près nécessaire pour assurer l'homogénéité, on définit l'énergie d'un signal $x(t)$ (de carré sommable) par $\Gamma_x(0)$.

1. Démontrer que $TF[\Gamma_x] = |TF[x]|^2$.
2. En déduire : $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(v)|^2 dv$.
3. Comparer l'énergie de $s(t)$ et de $S(v)$.
4. Application au signal porte $p(t)$.
 1. Exprimer la fonction d'autocorrélation $\Gamma_p(\tau)$.
 2. Représenter graphiquement $\Gamma_p(\tau)$.
 3. En déduire l'énergie du signal $p(t)$.
 4. Exprimer $TF[\Gamma_p]$.
5. A quelle occasion rencontre-t-on une telle fonction ?

5. Puissance d'un signal périodique $s(t)$

On définit pour un signal $s(t)$ périodique de période T_0 développable en série de

Fourier : $s(t) = \left| \sum S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \right|$.

- La puissance moyenne sur une période de $s(t)$: $P_s = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt$.
- La fonction d'autocorrélation moyenne sur une période de $s(t)$:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \bar{s}(t - \tau) dt$$
.

1. Démontrer que :

1. $P_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2$. S_n coefficients de Fourier de $s(t)$.

2. $\varphi_s(\tau) = \sum_{n=-\infty}^n |S_n|^2 e^{j2\pi v_0 n \tau}$.

2. Application à un signal périodique : $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_0)$ avec $T_0 > 2a$.

1. Représenter graphiquement $h(t)$.

2. Trouver H_0 , $H_{n \neq 0}$ (cf. I.1.)

3. Trouver $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |H_n|^2$.

II. Echantillonnage

1. Signal de spectre borné

1. On considère qu'un signal $s(t)$ est de spectre borné s'il existe v_M tel que $S(v) = 0$ pour $|v| > v_M$.

On considère un signal périodique $f(t)$ de période T_0 et son signal générateur $g(t)$ défini

par $g(t) = f(t)c(t)$ avec $c(t) = 1$ pour $|t| \leq \frac{T_0}{2}$ et $c(t) = 0$ pour $|t| > \frac{T_0}{2}$.

1. Exprimer $F(v)$ en fonction de T_0 , $G(v)$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(v - nv_0)$.

On rappelle que $F(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(v - nv_0)$. F_n est le coefficient de Fourier de f .

On pourra introduire les échantillons $G(nv_0)$ de la fonction $G(v)$.

On admettra que tout se passe comme si $TF[\delta_{nT_0}] = \frac{\delta(v - nv_0)}{T_0}$ et que

$$TF[\delta(v - nv_0)] = \frac{\delta_{nT_0}}{v_0} .$$

2. Montrer que : $G(v) = \sum_n G(nv_0) \frac{\sin \pi(v - nv_0) T_0}{\pi(v - nv_0) T_0}$ dans l'espace fréquentiel.

2. Application à échantillonnage dans l'espace temporel.

Considérons un signal $s(t)$ de spectre borné $S(v)$ avec $S(v) = 0$ pour $|v| > v_M$.

1. En utilisant le résultat précédent, et en introduisant les échantillons $s(nT)$ de $s(t)$, montrer que :

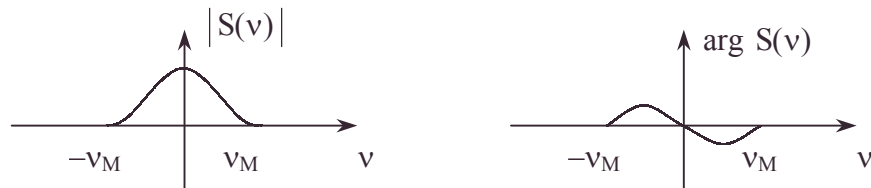
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \frac{\sin \pi(2v_M t - n)}{\pi(2v_M t - n)} \text{ avec } T = \frac{1}{2v_M}, \text{ de la forme } s(t) = \sum s(nT) s_n(t).$$

2. Préciser $TF[s_0]$; en déduire $TF[s_n] = TF[s_0] e^{-j \frac{n\pi v}{v_M}}$.

3. Montrer que l'énergie de $s(t)$ vaut $\frac{1}{2v_M} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2 \right)$.

2. Signal échantillonné

1. On considère un signal $s(t)$ défini par $S(v)$.

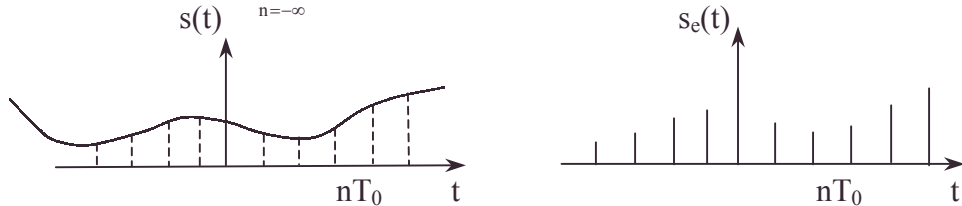


Ce signal est échantillonné avec une période T_0 . Soit $s_e(t)$ le signal échantillonné.

$$s_e(t) = s(nT_0) \text{ pour } t = nT_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$s_e(t) = 0 \quad \text{pour } t \neq nT_0.$$

On peut écrire $s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) \delta(t - nT_0)$.



1. Montrer que $S_e(v) = \frac{1}{T_0} \sum_n S(v - nv_0)$ avec $v_0 = \frac{1}{T_0}$.

2. Représenter $S_e(v)$ et $\arg S_e(v)$ en fonction de v .

3. Après une transmission parfaite de $s_e(t)$ et un filtrage passe bas idéal de fonction de transfert $F(v)$ ci-contre, retrouver simplement $s(t)$.

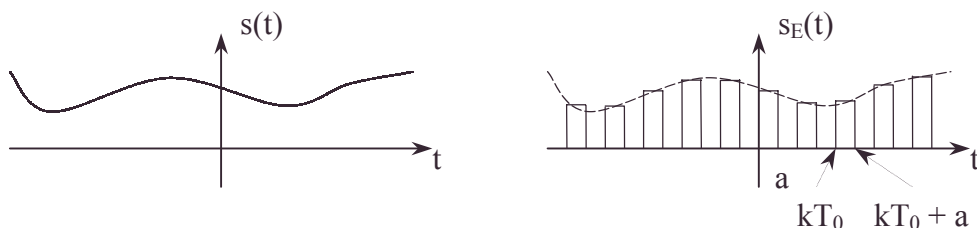
Quelles conditions évidentes s'imposent ?

2. On effectue maintenant un échantillonnage à l'aide du signal porte $\pi(t)$ ($\neq p(t)$) défini par $\pi(t) = 1$ pour $0 \leq t \leq a$; $\pi(t) = 0$ pour $t < 0$ et $t > a$.

Le signal échantillonné est alors :

$$s_E(t) = s(kT_0) \text{ pour } t \in [kT_0, kT_0 + a] \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$s_E(t) = 0 \quad \text{pour } t \in [kT_0, kT_0 + a].$$



1. Calculer $TF[\pi]$.

2. Calculer $S_E(\nu) = TF[s_E]$ en fonction de T_0 , $TF[\pi]$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} S(\nu - n\nu_0)$.

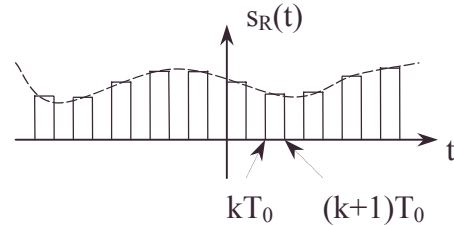
3. En supposant a assez petit devant $\frac{1}{\nu_M}$, représenter graphiquement l'allure de

$|S_e(\nu)|$; quel phénomène est analogue ?

4. Après une transmission parfaite de $s_E(t)$, comment pourrait-on choisir des filtres idéaux simples pour reconstituer parfaitement $s(t)$?

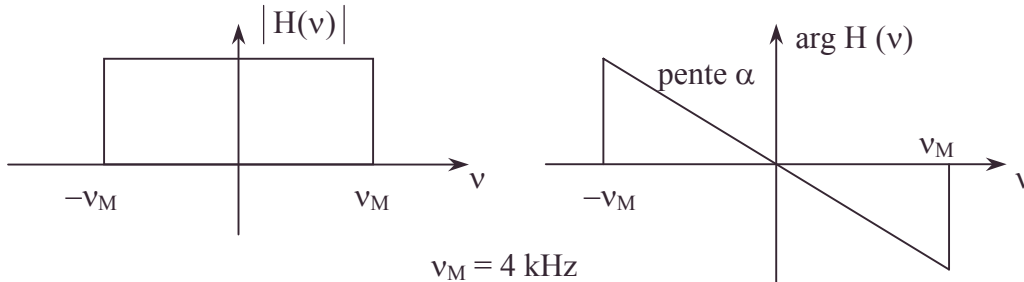
3. En réalité, on ne transmet pas des échantillons $s(nT_0)$ mais des valeurs numériques qui permettent à la réception, d'obtenir le signal $s_R(t)$ suivant :

$$s_R(t) = s(kT_0) \text{ pour } t \in [kT_0, (k+1)T_0].$$



1. Donner l'expression de $S_R(\nu)$ à l'aide de $\sum_{-\infty}^{+\infty} S(\nu - n\nu_0)$.

2. Considérons un signal $h(t)$ défini par $H(\nu)$.



On donne $s(t) = s_0 \cos 2\pi\nu_1 t$ avec $\nu_1 \leq 3 \text{ kHz}$.

On effectue l'opération $s_R * h = s_H$;

1. Déterminer $TF[s_H]$ en fonction de $s_0, \nu_1, T_0, \delta(\nu - \nu_1), \delta(\nu + \nu_1)$.

2. Déterminer $s_H(t)$. Commenter.

3. A.N. : $s_0 = 1$; $T_0 = \frac{1}{\nu_M} = 10^{-4} \text{ s}$, $\nu_1 = 500 \text{ Hz}, 1 \text{ kHz}, 2 \text{ kHz}, 3 \text{ kHz}$.

Calculer l'amplitude de s_H et commenter.

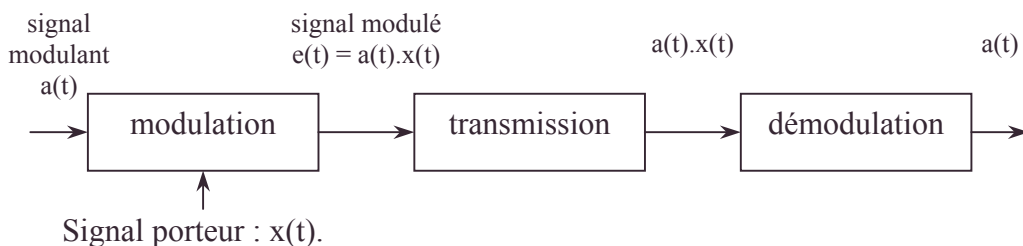
4. Que caractérise $H(\nu)$?

III. Démodulations et démodulations d'amplitude

1. Démodulation d'amplitude simple alternance

Le schéma général de transmission d'un signal $a(t)$ par modulation d'amplitude est représenté ci-dessous.

On distingue 3 parties :
Un modulateur,
Un canal de transmission, supposé ici idéal,
Un démodulateur.



• analogie, courbe échantillonnée ou numérisée, développement au premier ordre ou plus, échantillonnage [numérisation], graphe, restauration analogique à partir d'un signal discrétisé

1. Question préalable

Considérons le système non linéaire dont la caractéristique est la suivante :

$w(x) = x$ pour $x \geq 0$; $w(x) = 0$ pour $x < 0$. On injecte à l'entrée de ce système un signal périodique de la forme $x(t) = x_0 \cos 2\pi\nu_0 t$.

Le signal $s(t) = w(x(t))$ est filtré par un filtre passe bande ayant pour fonction de transfert $H(\nu)$ telle que : $H(\nu) = \gamma * [\delta_{2\nu_0} + \delta_{-2\nu_0}]$.

Avec : $\gamma(\nu) = u\left(\nu + \frac{B}{2}\right) - u\left(\nu - \frac{B}{2}\right)$; $u(\nu) = \begin{cases} 1 & \nu \geq 0 \\ 0 & \nu < 0 \end{cases}$,

fonction échelon unitaire.

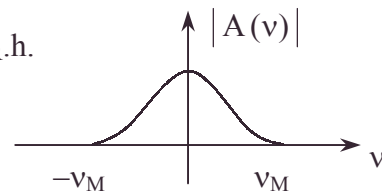
H est le produit de convolution de $\gamma(\nu)$ avec la somme des fonctions impulsions unité centrées en $+2\nu_0$ et $-2\nu_0$. On a de plus $0 < B < \nu_0$.

1. Représenter graphiquement le module de $H(\nu)$.

2. Déterminer le signal de sortie du filtre $s_H(t) = s_R.h$.

2. Démodulation d'amplitude simple alternance

Le spectre $A(\nu)$ du signal modulant $a(t)$ [$a(t) > 0$, modulation d'amplitude] a l'allure suivante (on ne tient pas compte de sa phase) :



Le signal à l'entrée du système non linéaire est maintenant $e(t) = a(t).x(t)$, soit $s_a(t) = w[a(t).x(t)]$ le signal de sortie.

1. Donner l'expression de $S_a(\nu) = TF[S_a(t)]$ en fonction d'une série mettant en jeu $A(\nu - n\nu_0)$ et S_n , coefficients de Fourier de $S(\nu)$.

2. Représenter $|S_a(\nu)|$ graphiquement.

3. A l'aide d'un système simple, placé à la suite du système non linéaire, on veut obtenir $a(t)$. Quel système idéal simple peut-on utiliser ? A quelle(s) condition(s) cela est-il possible ?

2. Démodulateur synchrone

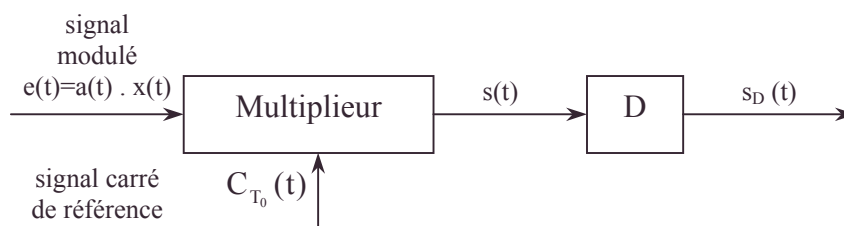
On considère le signal modulé $e(t) = a(t).x(t)$ où $a(t)$ est le signal défini à la question 1.2.

$x(t)$ est un signal périodique quelconque, de période T_0 , dont la décomposition en série de Fourier est la suivante : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{+j2\pi\nu_0 t}$.

1. Donner l'expression de $E(\nu) = TF[e(t)]$ à l'aide d'une série mettant en jeu $A(\nu - n\nu_0)$ et X_n .

2. Donner l'allure du graphe.

3. $x(t)$ est à valeur moyenne nulle (exemple : porteur sinusoïdal). On veut extraire le signal $a(t)$ en utilisant le dispositif suivant : D est un filtre passe bas idéal.

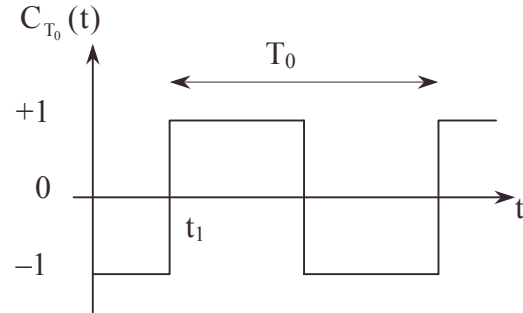


Théorie du signal

Les caractéristiques du signal de référence

$C_{T_0}(t)$ sont représentées ci-contre :

On posera $\varphi_1 = 2\pi\nu_0 t_1$.



1. Donner l'expression du spectre de $C_{T_0}(t)$ soit $C_{T_0}(\nu)$ sous la forme $C_{T_0} \delta(\nu - n\nu_0)$.

2. Donner l'expression de $S_D(\nu)$ en fonction de $A(\nu)$ et des coefficients de Fourier de $x(t)$ et de $C_{T_0}(t)$.

3. Application : $x(t) = x_0 \cos 2\pi\nu_0 t$.

1. Donner l'expression de $S_D(\nu)$. Quel en est l'intérêt ?

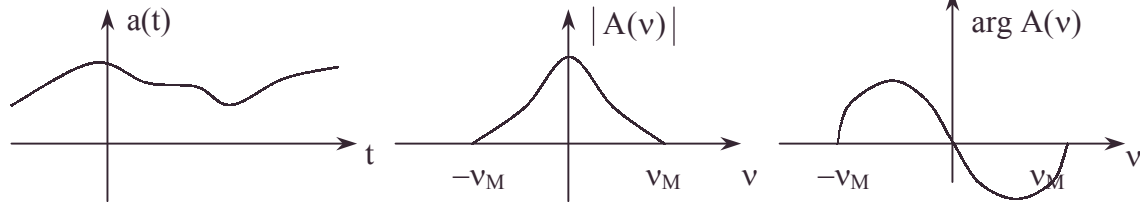
2. Comment peut-on réaliser pratiquement le signal $C_{T_0}(t)$ à partir du signal modulé ?

3. Proposer un schéma fonctionnel à l'aide de schémas blocs pour ce démodulateur synchrone

4. Quel est le défaut principal de la détection simple alternance ?

3. Restauration à partir d'un signal découpé avec un rapport cyclique

On considère un signal $a(t)$ à support spectral borné : $A(\nu) = 0, \forall |\nu| > \nu_M$.



Ce signal module le signal d'horloge $p_\alpha(t)$ défini de la manière suivante :

$p_\alpha(t)$ est périodique de période T_1 .

$$\text{pour } t \in [0, T_1[\quad p_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & \text{pour } \alpha < t < T_1 \end{cases} \quad \nu_1 = \frac{1}{T_1}$$

Soit $e(t)$ le signal modulé : $e(t) = a(t) \cdot p_\alpha(t)$.

1. Représenter l'allure de $e(t)$.

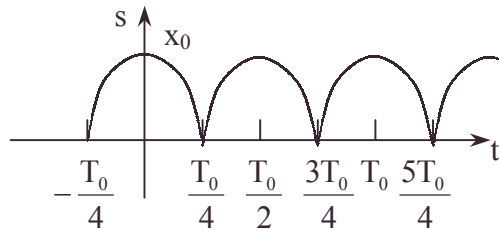
2. Déterminer le spectre de $e(t)$ en fonction de $A(\nu)$ sous la forme

$$E(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n A(\nu - n\nu_1) \text{ et représenter l'allure de } |E(\nu)| \text{ et de } \arg E\nu.$$

3. A quelle condition peut-on obtenir $a(t)$ à partir de $e(t)$?

Définir le filtre passe bas idéal qui permet d'obtenir $a(t)$ à partir de $e(t)$.

Agrégation de physique appliquée ; Durée : 4h.

Corrigé**I. Etude fréquentielle**
1. Spectre discontinu

1. La période est $\frac{T_0}{2}$, la fréquence est donc $2\nu_0$.

$$2.a. S_0 = \frac{2x_0}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos(2\pi\nu_0 t) dt = \frac{4x_0}{2\pi\nu_0 T_0} [\sin(2\pi\nu_0 t)]_0^{\frac{T_0}{4}} = \frac{2x_0}{\pi}.$$

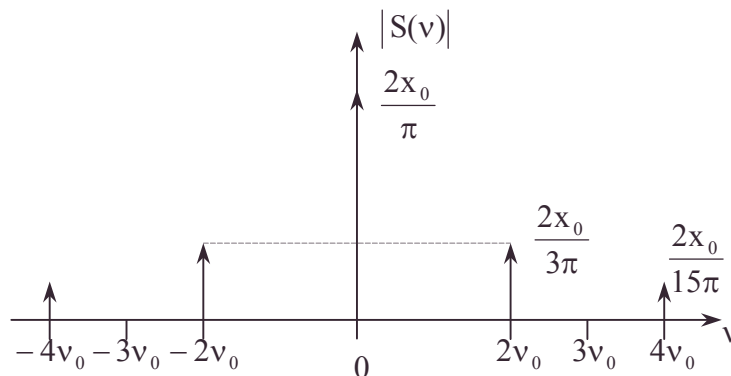
$$b. s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n \cdot 2\nu_0 t} \text{ montre que de fait } s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_{2k} e^{j2\pi\nu_0 2kt},$$

soit que $S_{2k+1} = 0$.

$$c. S_{2k} = \frac{2x_0}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos(2\pi\nu_0 t) e^{-j4\pi k\nu_0 t} dt = \frac{2x_0}{2T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} (e^{j2\pi\nu_0 t(1-2k)} + e^{j2\pi\nu_0 t(1+2k)}) dt$$

$$S_{2k} = \frac{2x_0}{4\pi\nu_0 T_0} \left(\frac{2j^{(1-2k)}}{(1-2k)j} - \frac{2j^{-(1+2k)}}{j(1+2k)} \right) = \frac{j^{-2k} x_0}{2\pi} \left(\frac{j}{j(1-2k)} + \frac{j}{j(1+2k)} \right) = \frac{2x_0}{\pi} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}.$$

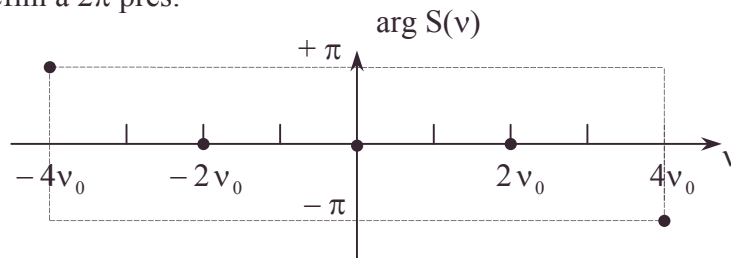
3.



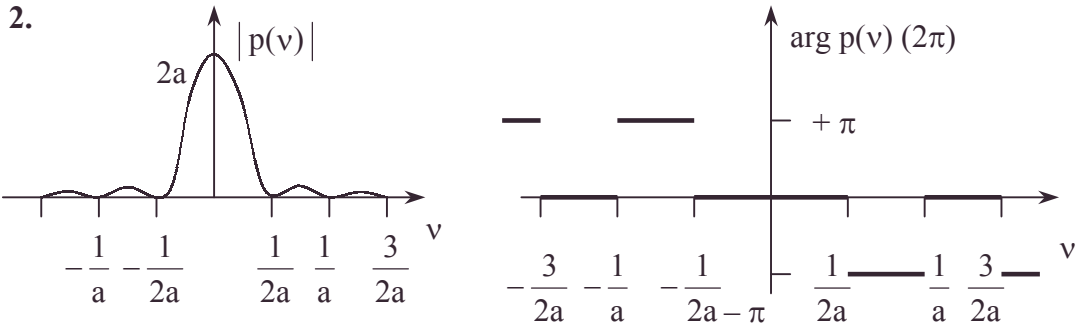
$$4. k=1; S_2 > 0; S_{-2} > 0. \quad \arg S_{\pm 2} = 0$$

$$k=2; S_4 < 0; S_{-4} < 0. \quad \arg S_{\pm 4} = \pi$$

Argument défini à 2π près.

**2. Spectre continu**

$$1. P(v) = \int_{-a}^{+a} e^{-j2\pi vt} dt = 2a \frac{\sin 2\pi v a}{2\pi v a}.$$



3. Produit de convolution

1. $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau-t)dt$ posons $t' = \tau - t$.

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau-t')y(t')dt' = C_{yx}(\tau) \Rightarrow x * y = y * x.$$

2. $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau-t)dt$ or $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(v)e^{j2\pi vt}dv$.

$$y(\tau-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(v)e^{j2\pi v(\tau-t)}dv \Rightarrow \text{en changeant l'ordre des intégrations}$$

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} Y(v)e^{j2\pi v(\tau-t)}dvdt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(v)e^{j2\pi v\tau} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi vt}dt \right) dv.$$

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v)Y(v)e^{j2\pi v\tau}dv = \text{TF}^{-1}[X(v).Y(v)].$$

En inversant : $\text{TF}[x * y] = \text{TF}[x].\text{TF}[y]$.

3. Remplaçons TF par TF^{-1} : $\text{TF}^{-1}[f * g] = \text{TF}^{-1}[f].\text{TF}^{-1}[g]$.

Inversons : $f * g = \text{TF}[\text{TF}^{-1}[f]\text{TF}^{-1}[g]]$.

Posons $f = \text{TF}[x]$ soit $x = \text{TF}^{-1}[f]$; $g = \text{TF}[y]$ soit $y = \text{TF}^{-1}[g]$.

$$\text{TF}[x] * \text{TF}[y] = \text{TF}[x.y].$$

4.1. $x * \delta = x$; $\text{TF}[x * \delta] = \text{TF}[x].\text{TF}[\delta] = \text{TF}[x] \Rightarrow \text{TF}[\delta] = 1$.

2. $x * \delta = x$; $\text{TF}^{-1}[x * \delta] = \text{TF}^{-1}[x].\text{TF}^{-1}[\delta] = \text{TF}^{-1}[x] \Rightarrow \text{TF}^{-1}[\delta] = 1$.

$$\text{TF}[\delta(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)e^{-j2\pi vt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')e^{j2\pi vt'}dt' = 1 ;$$

$$\text{inversons : } \delta(-t) = \text{TF}^{-1}[1] = \delta(t) ; \Rightarrow \delta(t) = \delta(-t).$$

3. $\text{TF}[\delta_{nT_0}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)e^{-j2\pi vt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')e^{-j2\pi v(t'+nT_0)}dt'$ avec $t' = t - nT_0$.

$$\text{TF}[\delta_{nT_0}] = e^{-j2\pi vnT_0}.$$

• $\text{TF}[x * \delta_{nT_0}] = \text{TF}(x).\text{TF}(\delta_{nT_0}) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi vt}dt \right) . e^{-j2\pi vnT_0}$; posons $t = t' - nT_0$.

$$\text{TF}[x * \delta_{nT_0}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t' - nT_0)e^{-j2\pi vt'}dt' = \text{TF}[x(t' - nT_0)].$$

Inversons : $C_{x\delta_{nT_0}}(\tau) = x(\tau - nT_0)$.

4. On sait $x(\tau) = \delta * x = x * \delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(\tau-t)dt$; Or $\delta(t') = \delta(t')$ avec $t' = \tau - t$

$$\Rightarrow x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - \tau)dt \text{ et avec } \tau = nT_0 ; x(nT_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_0)dt.$$

Par ailleurs, il est évident que $x(nT_0) = x(t)\delta(t - nT_0)$

4. Energie d'un signal

$$1. \Gamma_x(\tau) = x * \bar{x}(-t) \text{ or } \text{TF}[\bar{x}(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(-t) e^{-j2\pi vt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(t') e^{j2\pi vt'} dt'.$$

$$\Rightarrow \text{TF}[\bar{x}(-t)] = \overline{\text{TF}[x(t)]}; \text{TF}[\Gamma_x] = \text{TF}[x] \cdot \overline{\text{TF}[x]} = |\text{TF}[x]|^2.$$

$$2. \text{ Rappelons que avec } \tau = 0 : \Gamma_s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \bar{s}(t) dt ;$$

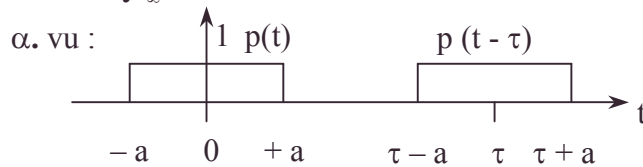
$$S(v) = \text{TF}[s] \Rightarrow |\text{TF}[s]|^2 = |S(v)|^2$$

$$\text{Appliquons } \text{TF}^{-1} \text{ à 4.1. pour } x = s : \Gamma_s[\tau] = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(v)|^2 e^{+j2\pi v\tau} dv.$$

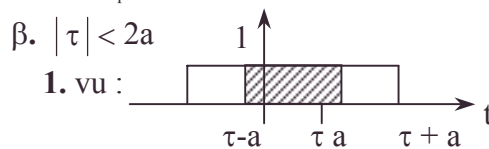
$$\text{Faisons } \tau = 0 : \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(v)|^2 dv.$$

3. L'énergie de $s(t)$ définie sur l'espace temporel égale l'énergie de $S(v)$ définie sur l'espace fréquentiel.

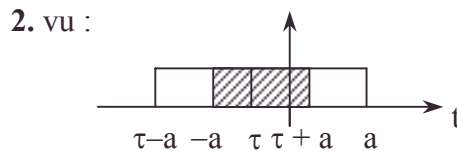
$$4.1. \Gamma_p(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) p(t-\tau) dt.$$



$$\Rightarrow |\tau| > 2a \quad \Gamma_p(\tau) = 0.$$

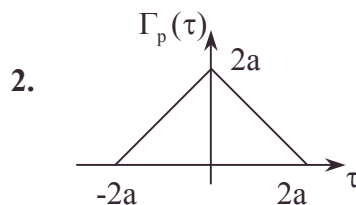


$$\Rightarrow 0 < \tau < 2a \quad \Gamma_p(\tau) = \int_{\tau-a}^a dt = 2a - \tau.$$



$$-2a < \tau < 0 \quad \Gamma_p(\tau) = \int_{-a}^{\tau+a} dt = 2a + \tau.$$

$$\text{Conclusion : } \Gamma_p(\tau) = 2a - |\tau|.$$



$$3. \Gamma_p(0) = 2a.$$

$$4. \text{TF}[\Gamma_p] = |\text{TF}[p]|^2 = 4a^2 \left(\frac{\sin 2\pi va}{2\pi va} \right)^2 \text{ car}$$

$$\text{TF}[p] = \int_{-a}^{+a} e^{-j2\pi vt} dt = \left[\frac{e^{-j2\pi vt}}{-j2\pi v} \right]_{-a}^{+a} = a \frac{e^{j2\pi va} - e^{-j2\pi va}}{j2\pi va} = 2a \text{sinc } 2\pi va.$$

• analogie, énergie d'un signal [cf Parseval], espace fréquentiel, espace temporel

5. On rencontre une telle fonction dans l'intensité diffractée par une fente fine.

5.1.a. Le théorème de Parseval démontre $P_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} |S_n|^2$.

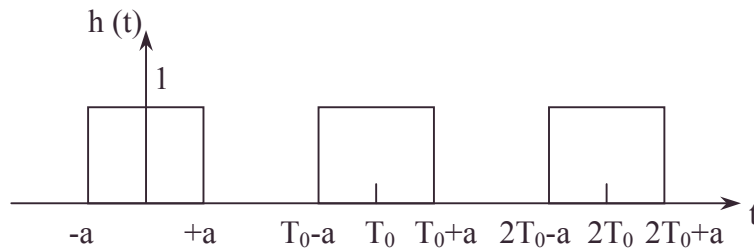
$$b. \varphi_s(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \bar{s}(t-\tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \left(\sum_n S_n e^{j2\pi n v_0 t} \right) \left(\sum_m \bar{S}_m e^{-j2\pi m(t-\tau)v_0} \right) dt.$$

$$\varphi_s(\tau) = \frac{1}{T_0} \left[\sum_n \sum_m S_n \bar{S}_m e^{j2\pi n v_0 m \tau} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi v_0 t(n-m)} dt \right].$$

$$\text{Or } \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi v_0 t(n-m)} dt = \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} \quad \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq m \\ = 1 & \text{si } n = m \end{cases}.$$

$$\text{Il reste : } \varphi_s(\tau) = \sum_n |S_n|^2 e^{j2\pi n v_0 \tau}.$$

2.1.



2. La fonction est périodique. Sa valeur moyenne $H_0 = \frac{2a}{T_0}$.

$$H_n = \frac{1}{T_0} \int_{-a}^{+a} e^{-j2\pi n v_0 t} dt = \frac{\sin 2\pi n v_0 a}{n\pi}.$$

$$3. P_s = \sum |H_n|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} h^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-a}^{+a} dt = \frac{2a}{T_0}.$$

II. Echantillonnages

1.1.

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-j2\pi n v_0 t} dt \\ G(v) &= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} g(t) e^{-j2\pi v t} dt \end{aligned} \right\} F_n = \frac{G(nv_0)}{T_0}.$$

$$F(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(v - nv_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(nv_0) \delta(v - nv_0).$$

$$F(v) = \frac{G(v)}{T_0} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(v - nv_0) \right) \text{ ainsi qu'on peut le vérifier.}$$

$$2. G(v) = \text{TF}[g] = \text{TF}[f] * \text{TF}[c].$$

$$\text{TF}[c] = T_0 \frac{\sin \pi v T_0}{\pi v T_0} \text{ cf. } p(v) \text{ avec } a = \frac{T_0}{2}.$$

$$G(v) = \sum_n G(nv_0) \frac{\sin \pi v T_0}{\pi v T_0} * \delta(v - nv_0) \text{ vu I.3.1.}$$

$$G(v) = \sum_n G(nv_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}[\pi v T_0 \delta(v - nv_0)] dv$$

• élément neutre de la corrélation, fonction d'échantillonnage [numérisation], fonction échantillonnée [numérisation], produit de convolution de transformées de Fourier, théorème de Parseval

$$G(v) = \sum G(nv_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(v) \operatorname{sinc}[\pi(v - nv_0)T_0] dv \text{ vu } \mathbf{I.3.1.}$$

$$G(v) = \sum G(nv_0) \operatorname{sinc} \pi(v - nv_0)T_0 \text{ vu l'élément neutre de la corrélation.}$$

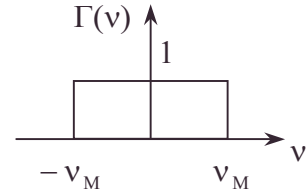
$$G(v) = \sum G(nv_0) \frac{\sin \pi(v - nv_0)T_0}{\pi(v - nv_0)T_0}$$

2.1. On transpose la procédure :

Posons $S(v) = S_E(v)\Gamma(v)$ en définissant la fonction porte

$\Gamma(v)$ fréquentielle représentée ci-contre,

cf $g(t) = f(t)c(t)$ $2v_M$ remplace T_0 , S remplace g , S_E remplace f .



$$\text{TF}^{-1}[\Gamma] = 2v_M \frac{\sin 2\pi v_M t}{2v_M \pi t}; s_E(t) = \sum s(t)\delta(t - nT) = \sum s(nT)\delta(t - nT) \text{ analogue à } F(v).$$

cf. courbe échantillonnée.

$$\text{On déduit par analogie avec } \mathbf{1.2.} : s(t) = \sum s(nT) \frac{\sin 2\pi v_M(t - nT)}{2\pi v_M(t - nT)} \text{ avec } T_0 = \frac{1}{2v_M}.$$

$$\mathbf{2.} \text{ Par identification } s_n(t) = \frac{\sin 2\pi v_M(t - nT)}{2\pi v_M(t - nT)}; \text{ pour } n = 0 : s_0(t) = \frac{\sin 2\pi v_M t}{2\pi v_M t}.$$

$$\text{Vérifions que } \overline{\text{TF}}[\Gamma(v)] = \int_{-v_M}^{+v_M} e^{+j2\pi vt} dv = \frac{e^{j2\pi v_M t} - e^{-j2\pi v_M t}}{j2\pi t} = \frac{\sin 2\pi v_M t}{\pi t} = 2v_M s_0$$

$$\text{Prenons la conjuguée } \text{TF}[\Gamma(v)] = 2v_M s_0$$

$$\text{Inversons : } \text{TF}[s_0] = \frac{1}{2v_M} \Gamma(v);$$

$$\text{ainsi } S_0(v) = \text{TF}(s_0) = \frac{1}{2v_M} \text{ pour } |v| \leq v_M; S_0(v) = \text{TF}(s_0) = 0 \text{ pour } |v| > v_M.$$

$$\text{et d'après } s_n(t) = \frac{\sin 2\pi v_M \left(t - \frac{n}{2v_M}\right)}{2\pi v_M \left(t - \frac{n}{2v_M}\right)} = s_0(t) * \delta_{\frac{n}{2v_M}} \text{ cf. } \mathbf{I.3.4.3.}$$

$$\text{vu } \mathbf{I.3.} \text{ et } \mathbf{I.4.}, \text{TF}[s_n] = \text{TF}[s_0] e^{-j\frac{\pi n v}{v_M}} = S_0(v) e^{-j\frac{\pi n v}{v_M}}.$$

$$\mathbf{3.} \int_{-\infty}^{+\infty} |s|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{TF}[s]|^2 dv.$$

$$\text{TF}[s] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \text{TF}[s_k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) S_0(v) e^{-j\frac{k\pi v}{v_M}}.$$

$$\overline{\text{TF}}[s] = \sum_{\ell} \bar{s}(\ell T) \bar{S}_0(v) e^{j\frac{\ell\pi v}{v_M}}.$$

$$|\text{TF}[s]|^2 = \text{TF}[s] \cdot \overline{\text{TF}}[s] = \left[\sum_k |s(kT)|^2 + \sum_{\ell \neq k} s(kT) \bar{s}(\ell T) e^{-j(k-\ell)\frac{\pi v}{v_M}} \right] |S_0|^2.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{TF}[s]|^2 dv = \int_{-v_M}^{+v_M} \left[\sum_k |s(kT)|^2 |S_0|^2 \right] dv + \sum_{\ell \neq k} s(kT) \bar{s}(\ell T) |S_0|^2 \int_{-v_M}^{+v_M} e^{-j(k-\ell)\frac{\pi v}{v_M}} dv.$$

• analogie, énergie d'un signal [cf Parseval]

$$\text{or } \int_{-v_M}^{v_M} e^{-j(k-\ell)\frac{\pi v}{v_M}} dv = 2v_M \frac{\sin(k-\ell)\pi}{(k-\ell)\pi} = 0 \text{ pour } k-\ell \neq 0.$$

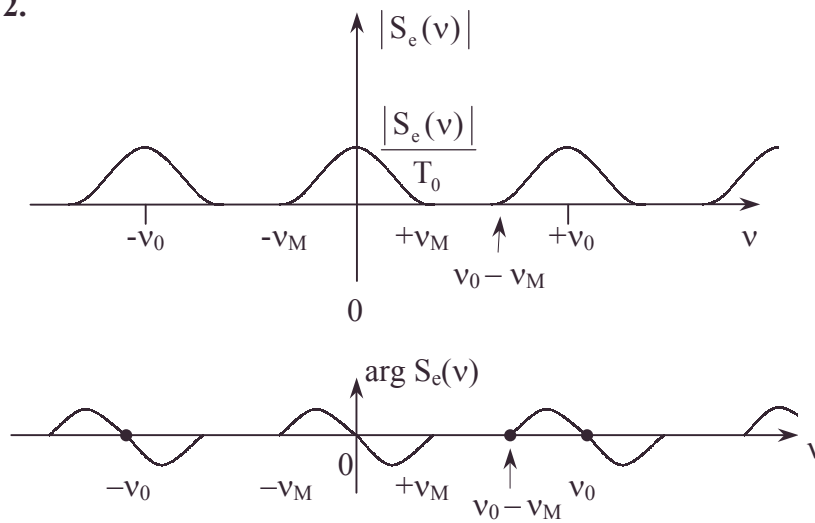
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s|^2 dt = \left(\sum_k |s(kT)|^2 \right) \cdot \frac{1}{4v_M^2} \cdot 2v_M = \frac{1}{2v_M} \sum_k |s(kT)|^2.$$

2.1.1. $s_e(t) = s(t) \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \right)$ de vérification évidente.

$$S_e(v) = S(v) * \text{TF} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) \right] = S(v) * \sum \delta\left(\frac{v - kv_0}{T_0}\right).$$

$$S_e(v) = \frac{1}{T_0} \left(\sum_k S(v - kv_0) \right).$$

2.

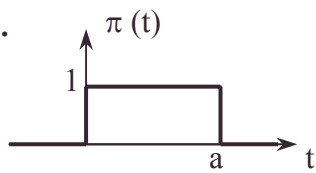


3. Il faut ne récupérer que la partie centrale

$$v_M \leq \frac{B}{2} \leq v_0 - v_M ; F_{\max} = T_0 \text{ pour que } S_e(v) F(v) = S(v).$$

2.1.

$$\Pi(v) = \text{TF}[\pi] = \int_0^a e^{-j2\pi vt} dt.$$



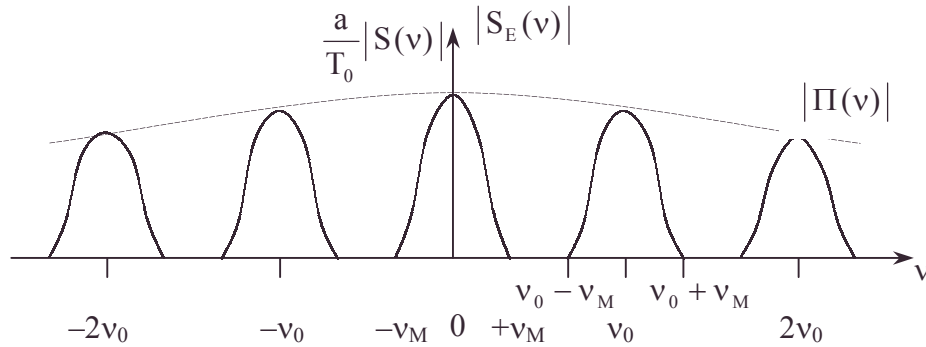
Posons $t' = -\frac{a}{2} + t$.

$$\text{TF}|\pi| = e^{j\pi av} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j2\pi vt'} dt' = e^{j\pi av} \frac{e^{-j\pi av} - e^{+j\pi av}}{-2j\pi v} = a \frac{\sin \pi va}{\pi va} e^{-j\pi va}$$

$$\begin{aligned} 2. s_e(t) &= \sum_k s(kT_0) \pi(t - kT_0) = \sum_k s(kT_0) \pi(t) * \delta(t - kT_0) \\ &= \pi(t) * (s(t) \cdot \sum_k \delta(t - kT_0)) = \pi(t) * \left(\sum s(t - kT_0) \right). \end{aligned}$$

$$S_E(v) = \pi(v) \cdot \frac{1}{T_0} \left[\sum_k S(v - kv_0) \right] \text{ vu I.3.2.}$$

3. $\frac{\sin \pi va}{\pi va}$ varie peu sur un intervalle $nv_0 - v_M, nv_0 + v_M$ car $v_M \ll \frac{1}{a}$.



La modulation d'interférence par la diffraction est analogue en ce qui concerne la valeur absolue de l'amplitude scalaire.

4. Il faut filtrer avec un filtre passe bas idéal tel que $v_M \leq \frac{B}{2} \leq v_0 - v_M$

et de $F_{\max} = \frac{T_0}{a}$ pour récupérer le lobe central de $S(v)$ et donc récupérer $s(t)$ car le raisonnement se prolonge sur l'argument.

3.1. Ici $a = T_0$ $S_E(v)$ devient $S_R(v) = e^{j\pi v T_0} \frac{\sin \pi v T_0}{\pi v T_0} \left(\sum_k S(v - kv_0) \right)$.

2.1. $s_0 \cos 2\pi v_1 t = \frac{s_0}{2} e^{j2\pi v_1 t} + \frac{s_0}{2} e^{-j2\pi v_1 t}$; $S(v) = \frac{s_0}{2} \delta(v - v_1) + \frac{s_0}{2} \delta(v + v_1)$.

$H(v) = 1 \cdot e^{-j\alpha v}$ pour $|v| \leq v_M$; $H(v) = 0$ pour $|v| > v_M$.

$s_R * h = s_H \Rightarrow S_H(v) = S_R(v) H(v) = \frac{\Pi(v)}{T_0} S(v) H(v)$.

$S_H(v) = \frac{s_0}{2T_0} \frac{\sin \pi v_1 T_0}{\pi v_1} \left[e^{j(-\alpha v_1 + \pi v_1 T_0)} \delta(v - v_1) + e^{+j(-\alpha v_1 + \pi v_1 T_0)} \delta(v + v_1) \right]$.

2. Vu I.3.4.

$TF^{-1}[\delta[v - v_1]] = e^{j2\pi v_1 t} \Rightarrow s_H(t) = TF^{-1}[S_H] = s_0 \frac{\sin \pi v_1 T_0}{\pi v_1 T_0 v_0} \cos \left[2\pi v_1 \left[t + \frac{T_0}{2} - \frac{\alpha}{2\pi} \right] \right]$.

s_H a un retard sur s : $t_0 = \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{T_0}{2}$ indépendant de v_1 .

3. Amplitude de $s_H = s_0 \frac{\sin \pi v_1 T_0}{\pi v_1 T_0}$

v_1 en kHz	0,5	1	2	3
$\frac{\sin \pi v_1 T_0}{\pi v_1 T_0}$	0,996	0,984	0,936	0,858

L'amplitude diminue avec v_1 mais de moins de 15% dans l'intervalle [0,3 kHz].

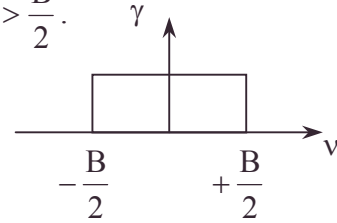
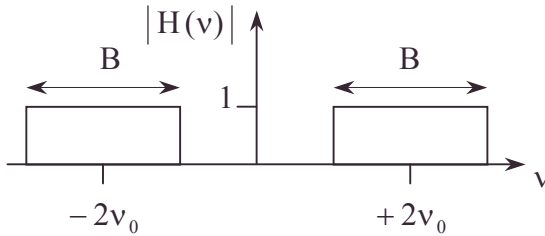
4. $H(v)$ est la fonction de transfert d'un filtre qui n'est pas loin d'être idéal pour la transmission d'un signal : amplitude $s_H \approx s_0$, retard constant indépendant de v_1 .

III. Démodulation

1.1.1. $u\left(v + \frac{B}{2}\right) = 1$ pour $v > -\frac{B}{2}$; $u\left(v - \frac{B}{2}\right) = 1$ pour $v > \frac{B}{2}$.

On n'a ici que deux termes :

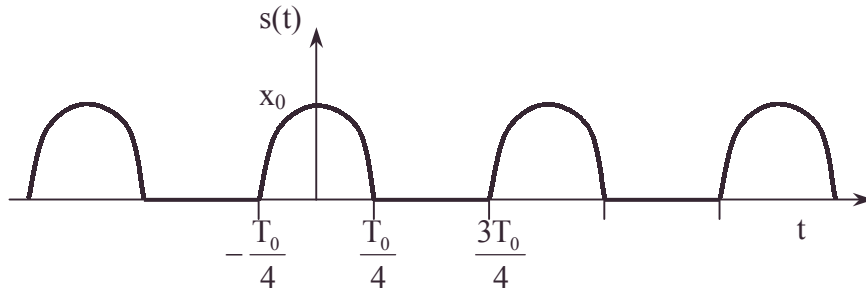
$$H(v) = \gamma(v + 2v_0) + \gamma(v - 2v_0).$$



2. Vu **2.3.**, $S_H(v) = H(v)S(v)$ avec $S(v) = \sum S_n \delta(v - nv_0)$, série de Fourier.

Vu les zones où $H(v) = 0$, on est limité à :

$$S_H(v) = S_{-2}\delta(v + 2v_0) + S_2\delta(v - 2v_0).$$



$$S_2 = x_0 \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos 2\pi v_0 t e^{-j4\pi v} dv = \frac{x_0}{\pi} \frac{(-1)^1}{1-4} = \frac{x_0}{3\pi} \text{ vu } \mathbf{1.2.}$$

$$S_H(v) = \frac{x_0}{3\pi} (\delta(v + 2v_0) + \delta(v - 2v_0))$$

Appliquons TF^{-1} : $s_H(t) = \frac{x_0}{3\pi} (e^{-j4\pi v_0 t} + e^{+j4\pi v_0 t}) = \frac{2x_0}{3\pi} \cos 4\pi v_0 t$.

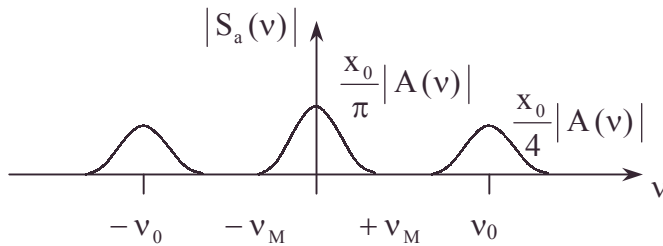
2.1. $e(t) = a(t) x(t)$; $s_a(t) = w[a(t) x(t)] = a(t) w[x(t)]$ car $a(t) > 0$.

$$S_a(v) = A(v) * S(v) = A(v) * \left[\sum S_n \delta(v - nv_0) \right] = \sum S_n A(v) * \delta_{nv_0} ;$$

$$S_a(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n A(v - nv_0).$$

2. $S_0 = \frac{x_0}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos 2\pi v_0 t dt = \frac{x_0}{\pi} ;$

$$S_1 = \frac{x_0}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos 2\pi v_0 t e^{-j2\pi v_0 t} dt = \frac{x_0}{2T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} (1 + e^{+4j\pi v_0 t}) dt = \frac{x_0}{4}.$$



3. Il suffit de filtrer par un filtre passe bas $F(v)$

idéal tel que $v_M < \frac{B}{2} < v_0 - v_M$ et $F_{\max} = \frac{\pi}{x_0}$;

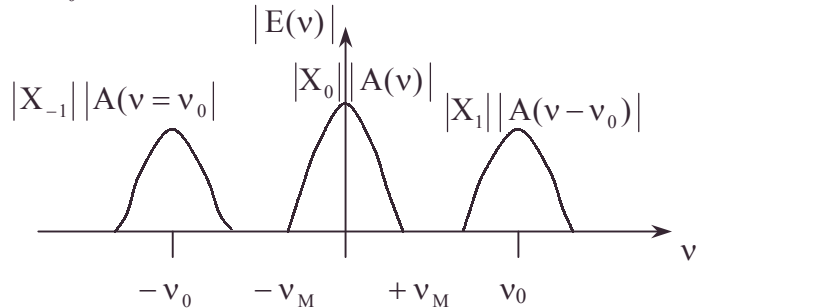
on remarquera $v_0 > 2v_M$, théorème de Shannon.

$$2.1. x = \sum X_n e^{j2\pi n v_0 t} ; X(v) = \sum X_n \delta(v - n v_0).$$

$$e = a(t) x(t) \Rightarrow E(v) = A(v) * X(v) = \sum X_n A(v) * \delta_{n v_0}.$$

$$E(v) = \sum X_n A(v - n v_0).$$

2.



$$3.1. C_{T_0}(t) = \sum C_{T_{0n}} e^{j2\pi n v_0 t} \text{ avec } C_{T_{0n}} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} C_{T_0}(t) e^{-j2\pi n v_0 t} dt.$$

$$C_{T_{0n}} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi n v_0 t} dt - \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\frac{T_0}{2}}^{t_1+T_0} e^{-j2\pi n v_0 t} dt \text{ avec } t = u - t_1.$$

$$C_{T_{0n}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi n v_0 t_1} e^{-j2\pi n v_0 u} du - \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} e^{-j2\pi n v_0 t_1} e^{-j2\pi n v_0 u} du.$$

Posons $u = V - \frac{T_0}{2}$ dans la 2^{ème} intégrale.

$$C_{T_{0n}} = \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi n v_0 t_1} I(n) - \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi n v_0 t_1} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi n \frac{v_0 T_0}{2}} e^{-j2\pi n v_0 V} dV \text{ avec } 2\pi \frac{v_0 T_0}{2} = \pi.$$

$$\text{avec } I(n) = \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi n v_0 t} dt \begin{cases} = \frac{1}{2j\pi n v_0} (1 - e^{-j\pi n}) & \text{si } n \neq 0 \\ = 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$C_{T_{0n}} = \frac{e^{-j2\pi n v_0 t_1}}{T_0} I(n) (1 - e^{-j\pi n}) = \frac{e^{-j2\pi n v_0 t_1}}{2j\pi n} (1 - e^{-j\pi n})^2$$

$$\text{or } e^{-j2\pi k} = 1 ; e^{-j\pi(2k+1)} = -1 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Si } n = 2k, C_{T_{02k}} = 0 ; \text{ si } n = 2k+1, C_{T_{02k+1}} = \frac{2e^{-j2\pi(2k+1)v_0 t_1}}{j\pi(2k+1)}.$$

• produit de convolution double,

$$2. s(t) = e(t) C_{T_0}(t) = a(t) x(t) C_{T_0}(t); S(v) = A(v) * [X(v) * C_{T_0}(v)]$$

$$X(v) * C_{T_0}(v) = \sum_{n,m} X_n C_{T_{0m}} \delta(v - nv_0 - mv_0) \text{ (cf. multiplication de série entière).}$$

D est un filtre passe bas, on sélectionne le pic en $v = 0$ possible pour $(m+n)v_0 = 0$, soit $m = -n$.

$$S_D(v) = A(v) * \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n C_{T_{0-n}} \delta(v) \right); S_D(v) = A(v) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n C_{T_{0-n}} \right) \text{ vu I.3.3.}$$

$$3.1. x = x_0 \cos 2\pi v_0 t = \frac{x_0}{2} (e^{j2\pi v_0 t} + e^{-j2\pi v_0 t}); X(v) = \frac{x_0}{2} [\delta(v + v_0) + \delta(v - v_0)].$$

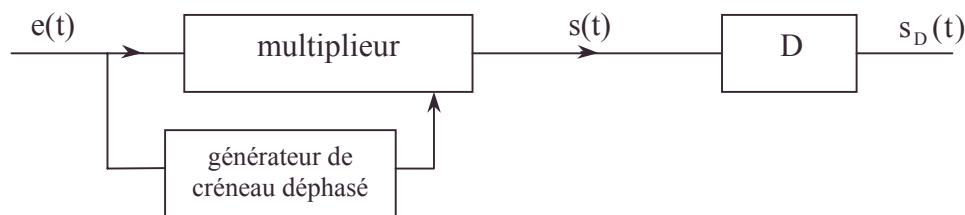
On n'a que deux termes à la série de Fourier.

$$S_D(v) = A(v) (C_{T_{01}} X_{-1} + C_{T_{0-1}} X_{+1}) \text{ cf. } k = 0.$$

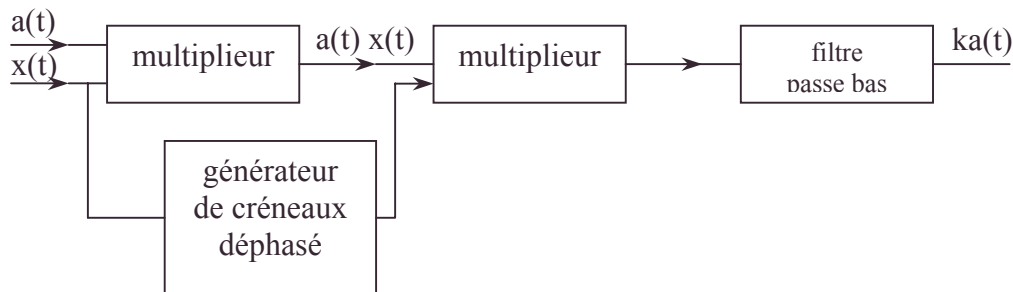
$$S_D(v) = \frac{x_0}{2} A(v) \left(\frac{e^{-j2\pi v_0 t_1}}{j\pi} - \frac{e^{+j2\pi v_0 t_1}}{j\pi} \right) = -\frac{x_0}{\pi} A(v) \sin 2\pi v_0 t_1.$$

On en déduit $a(t)$ le signal modulant (par TF^{-1}).

2. On peut réaliser C_{T_0} soit numériquement (F.F.T.) soit analogiquement par un générateur de fonction créneau déphasé par rapport à $x(t_0)$ (cf. oscillateurs).

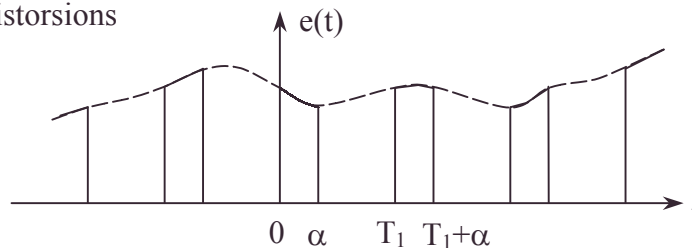


3.



4. Le système non linéaire classique utilise une diode dont la caractéristique réelle entraîne des distorsions

3.1.



$$2.1. e(t) = p_\alpha(t) a(t) \Rightarrow E(v) = P_\alpha(v) * A(v).$$

or, vu I.3.2., $P_\alpha(v) = \frac{1}{T_1} \sum \pi_\alpha(nv_1) \delta(v - nv_1)$. On a le spectre de P_α qui donne :

$$P_\alpha(nv) = \frac{1}{T_1} \int_0^\alpha e^{-j2\pi nv_1 t} dt; \text{ posons } t' = -\frac{\alpha}{2} + t$$

$$P_{\alpha}(nv) = \frac{e^{-j\pi nv_1 \alpha}}{T_1} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} e^{-j2\pi nv_1 t'} dt' = e^{-j\pi nv_1 \alpha} \frac{[e^{-j\pi nv_1 \alpha} - e^{+j\pi nv_1 \alpha}]}{-2j\pi nv_1 T_1}.$$

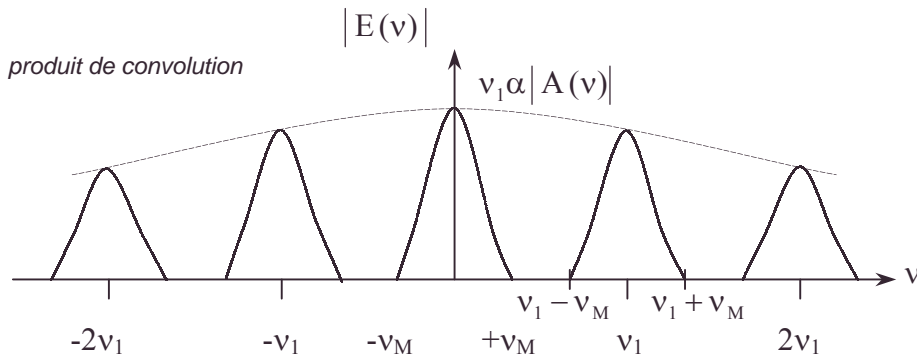
$$\pi_{\alpha}(nv_1) = \frac{e^{-j\pi nv_1 \alpha} \sin \pi nv_1 \alpha}{\pi nv_1};$$

$$E(v) = \sum \frac{e^{-j\pi nv_1 \alpha}}{\pi n} \sin \pi nv_1 \alpha * A(v - nv_1)$$

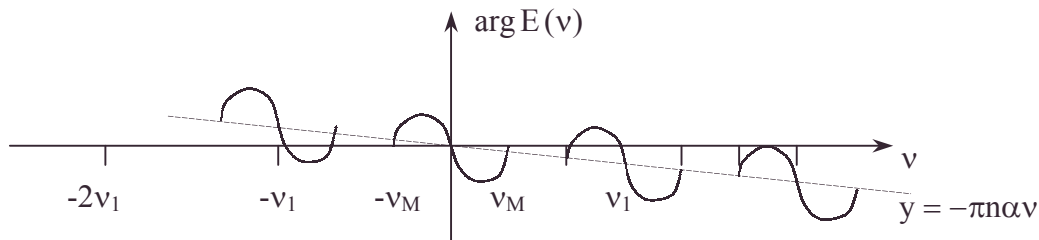
$$\Rightarrow \sum e^{j\pi nv_1 \alpha} [\text{sinc}(\pi nv_1 \alpha) v_1 \alpha] A(v - nv_1) \text{ vu I.3.3.}$$

2.

• multiplieur, produit de convolution



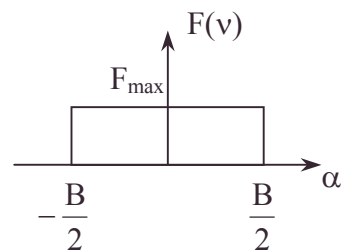
$$3. \arg E = -\pi nv_1 \alpha + \arg A(v - nv_1).$$

On prend $\arg \text{sinc} \pi nv_1 \alpha = 0$ pour simplifier.

3. Avec un filtre passe bas idéal pour récupérer le lobe central :

$$v_M < \frac{B}{2} < v_1 - v_M \text{ soit } v_1 > 2v_M \text{ (cf. Shannon).}$$

$$\text{et } F_{\max} = \frac{T_1}{\alpha}.$$



6.1.7.4. Fonction retard réalisation, application

Ce problème traite dans la première partie de l'étude et de la réalisation de la fonction retard et dans la seconde partie d'une application de la fonction retard. La seconde partie est quasiment indépendante de la première, seule la question I.1. est nécessaire.

On se place dans le cadre de l'approximation des états quasi stationnaires des signaux électriques. Le représentant complexe d'une grandeur sinusoïdale $x(t)$ est noté \underline{X} .

Les figures et quelques rappels mathématiques sont donnés en fin d'énoncé.

• ARQS, courbes de transformées de Fourier d'un signal, fonction retard, quadripôle

I. Fonction retard

1. Caractérisation de la fonction retard.

On appelle fonction retard une fonction qui, à tout signal d'entrée $e(t)$, associe un signal de sortie $s(t)$ égal à $e(t-\tau)$ quel que soit t , où τ constant est le retard (figure 1).

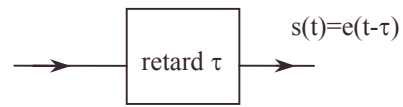


Figure 1

1. Pour une entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, exprimer $s(t)$.
2. Exprimer la fonction de transfert complexe : $\underline{F} = \underline{S}/\underline{E}$.
3. Tracer module et argument de \underline{F} en fonction de la fréquence en échelle linéaire.

2. Réalisation approchée de la fonction retard.

1. On appelle cellule le quadripôle représenté figure 2. La sortie de ce quadripôle étant fermée sur un conducteur ohmique de résistance R (figure 3), calculer la fonction de transfert complexe $\underline{T}(j\omega) = \underline{V}_s / \underline{V}_e$.

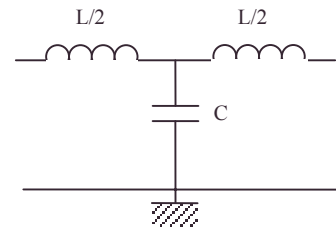


Figure 2

Mettre cette fonction de transfert sous la forme $1/\underline{P}(j\omega)$, avec $\underline{P}(j\omega)$ polynôme en $j\omega$ que l'on écrira suivant les puissances croissantes de $j\omega$.

2. Réalisation approchée du retard.

1. Montrer à l'aide d'un développement limité au second ordre que le quadripôle de la figure 3 réalise un retard, pour des fréquences suffisamment basses et moyennant une condition sur R .

2. Exprimer le retard τ et la valeur particulière R_0 de R en fonction de L et C .
3. Préciser les conditions de validité de l'approximation.

3. Impédance d'entrée.

1. Calculer l'impédance d'entrée \underline{Z}_e du quadripôle (figure 3) lorsque $R = R_0$.

2. Dans les conditions de l'approximation de la question I.2.2., donner une valeur approchée de \underline{Z}_e en fonction de R_0 .

4. Impédance caractéristique.

On définit l'impédance caractéristique du quadripôle (figure 2) par la valeur \underline{Z}_0 de l'impédance \underline{Z} qu'il faut placer en sortie (figure 4) pour que l'impédance d'entrée soit égale à \underline{Z}_0 .

1. Calculer \underline{Z}_0 . Indiquer suivant les valeurs de ω la nature de l'impédance \underline{Z}_0 .

2. Donner une valeur approchée de \underline{Z}_0 , en basse fréquence, en fonction de R_0 .

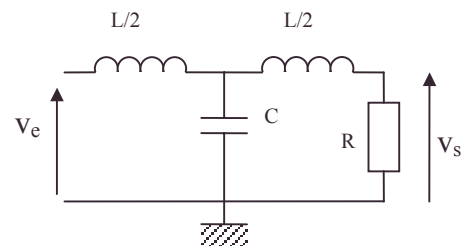


Figure 3

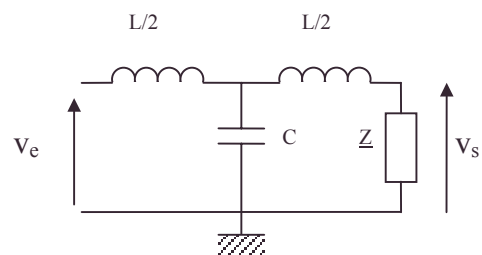


Figure 4

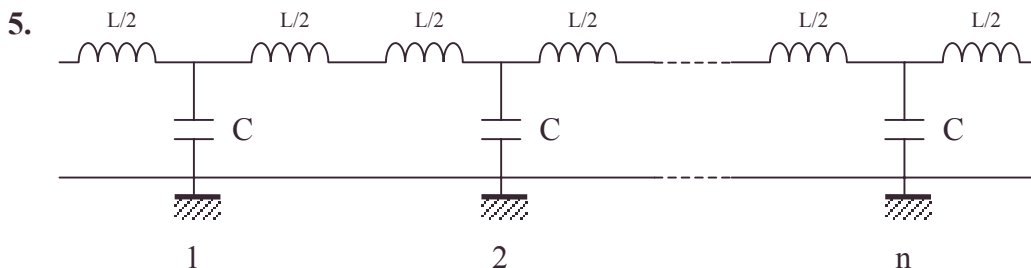


Figure 5

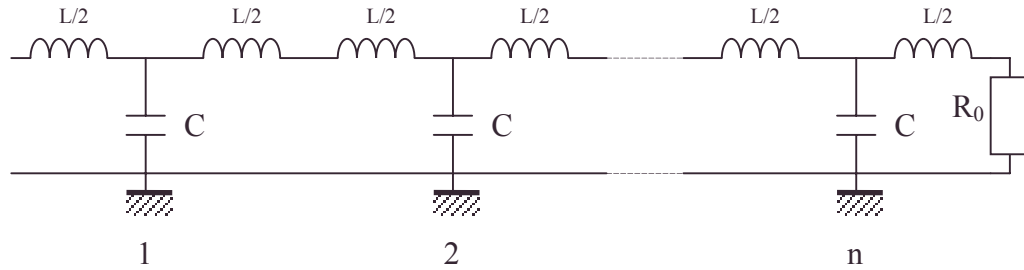


Figure 6

On réalise une ligne en branchant n cellules identiques en cascade (figure 5). La sortie de la dernière cellule étant branchée sur R_0 (figure 6), quelle est, en basse fréquence, l'impédance vue à l'entrée de la ligne ?

6. On considère la ligne figure 6.

1. Quel est, en basse fréquence, le retard total apporté par la ligne (figure 6) ?

2. A.N. : Calculer L et C pour une ligne de 6 cellules, sachant que $R_0 = 330 \, \Omega$ et que le retard total est $6,2 \, \mu\text{s}$.

3. Calculer numériquement les valeurs de L et C permettant d'obtenir le même retard de $6,2 \, \mu\text{s}$ avec une seule cellule, pour $R_0 = 330 \, \Omega$.

4. Quel est l'intérêt d'utiliser, pour obtenir le même retard, plusieurs cellules en cascade au lieu d'une seule ?

II. Une application de la fonction retard

On utilise des filtres basés sur un retard pour réduire le bruit sur certains enregistrements magnétiques par exemple d'un signal vidéo. Les irrégularités de la couche magnétique introduisent en effet lors de la lecture un bruit qui se superpose au signal enregistré. Ce bruit étant plutôt de fréquences élevées, la méthode consiste à :

- accentuer le signal (c'est à dire relever les hautes fréquences) avant l'enregistrement.
- puis désaccentuer le signal lu sur la bande (c'est à dire réduire les hautes fréquences), ce qui permet de retrouver le signal d'origine tout en réduisant le bruit.

On considérera un retard correspondant à la durée d'une ligne vidéo soit $\tau = 64 \, \mu\text{s}$.

1. Filtre récursif analogique.

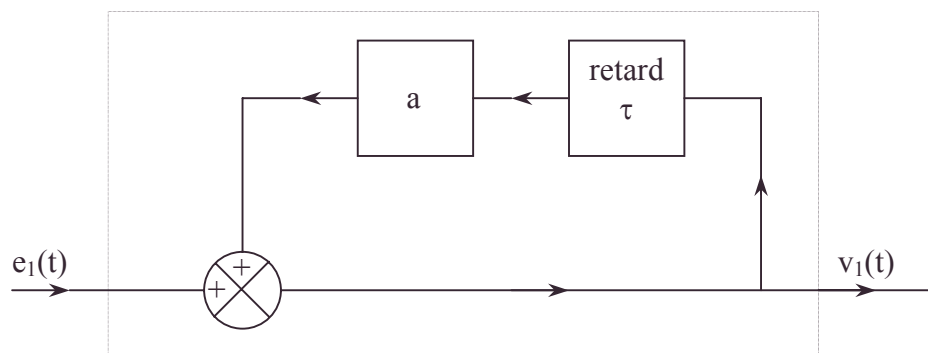


Figure 7

On considère le schéma fonctionnel de la figure 7 où a est un coefficient réel constant tel que $0 < a < 1$. La fonction correspondante, multiplication par a , est définie figure 8.

1. Ecrire la relation entre $e_1(t)$ (tension d'entrée à l'instant t) et la tension de sortie v_1 .

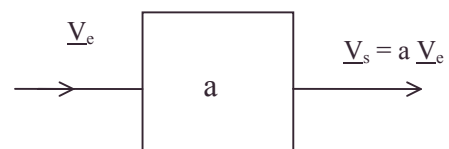


Figure 8

2. On appelle $u_1(t)$ la réponse indicielle du filtre de la figure 7 : $u_1(t)$ est la fonction $v_1(t)$ lorsque $e_1(t)$ est un échelon de hauteur U ($e_1(t) = 0$ pour $t < 0$, $e_1(t) = U$ pour $t \geq 0$).

1. Sachant que la sortie a une valeur nulle ($u_1(t) = 0$) pour $t < 0$ et en procédant par récurrence, calculer les valeurs successives de $u_1(n\tau^+)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

2. Evaluer la limite de $u_1(t)$ pour $t \rightarrow \infty$.

3. Dessiner sur un même graphique l'échelon d'entrée et l'allure de la courbe $u_1(t)$, on prendra $a = 0,80$ et $U = 0,20$ V.

4. D'après l'allure de la courbe $u_1(t)$, justifier le fait que le filtre est de type passe-bas.

3. Fonction de transfert complexe du filtre figure 7.

1. Exprimer la fonction de transfert complexe en tension : $\underline{H}(j\omega) = \underline{V}_1 / \underline{E}_1$ de ce filtre (figure 7), valable en régime sinusoïdal.

2. Montrer que l'on peut retrouver, avec $\underline{H}(j\omega)$, la valeur $u_1(t)$ quand $t \rightarrow \infty$.

3. $\underline{H}(j\omega)$ est une fonction périodique de la pulsation ω , préciser la "période" ω_0 .

4. Donner l'allure du graphe du module $|\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de ω , pour $a = 0,80$.

5. Que peut-on dire du filtre pour des signaux d'entrée limités à des fréquences telles que $\omega < \frac{\omega_0}{2}$?

2. Dispositif d'accentuation.

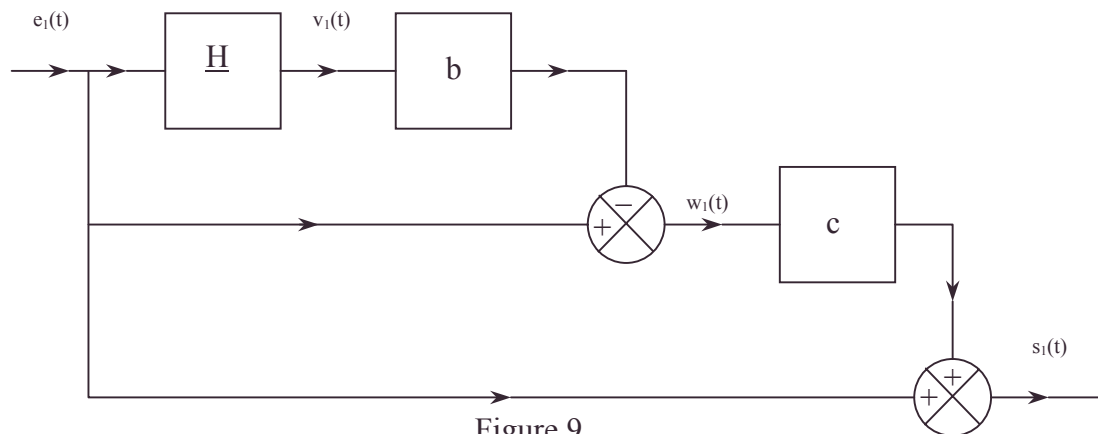


Figure 9

Le filtre précédent est utilisé dans le dispositif dont le schéma fonctionnel est représenté figure 9 et dans lequel les constantes multiplicatives b et c sont des réels positifs.

1. Etablir la fonction de transfert complexe : $\underline{H}_1(j\omega) = \underline{W}_1 / \underline{E}_1$.

2. On appelle $u'_1(t)$ la fonction $w_1(t)$ lorsque $e_1(t)$ est un échelon de hauteur U . Déterminer $u'_1(\infty)$. Montrer que $u'_1(\infty) = 0$ si on choisit $b = 1 - a$. On prendra $b = 1 - a$ dans toute la suite.

3. Fonction de transfert complexe du dispositif figure 9.

1. Etablir la fonction de transfert complexe : $\underline{T}_1(j\omega) = \underline{S}_1 / \underline{E}_1$. On l'exprimera en fonction de a , c , τ et ω .

2. A l'aide d'un développement limité, montrer qu'une expression approchée de $\underline{T}_1(j\omega)$ est : $\underline{T}_{1a}(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$; exprimer τ_1 et τ_2 en fonction de a , c et τ .

3. Préciser dans quel domaine de pulsation ω l'approximation peut être considérée comme valable.

4. Diagrammes de Bode : gain en décibel G_{1a} et argument en fonction de $\log(f)$, correspondant à \underline{T}_{1a} , $f = \frac{\omega}{2\pi}$ étant la fréquence en Hz. On prendra $a = 0,80$ et $c = 9,0$.

1. Faire une étude précise des diagrammes “asymptotiques” et les tracer.

2. Dédire des diagrammes asymptotiques l’allure des courbes réelles. Quel déphasage représente $\arg(\underline{T}_{1a}(j\omega))$?

5. Expliquer la fonction d’accentuation à partir des diagrammes de Bode.

3. Dispositif de désaccentuation.

On désire obtenir un dispositif dont le schéma fonctionnel, très proche de celui de la figure 9, réalise la fonction de transfert : $\underline{T}_2(j\omega) = \frac{1 - a'c' - a'(1 - c')e^{-j\omega\tau}}{1 - a'e^{-j\omega\tau}}$, avec a' , $b' = 1 - a'$ et c' les constantes multiplicatives analogues aux constantes a , b et c du filtre (figure 9).

Dans les mêmes conditions d’approximation qu’à la question II.2.3.3., une expression approchée de $\underline{T}_2(j\omega)$ est : $\underline{T}_{2a}(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau'_1}{1 + j\omega\tau'_2}$, avec : $\tau'_1 = \frac{a'(1 - c')}{1 - a'}\tau$ et

$$\tau'_2 = \frac{a'}{1 - a'}\tau.$$

1. Représenter le schéma fonctionnel réalisant $\underline{T}_2(j\omega)$ et correspondant à une petite modification de la figure 9.

2. Tracer, sur la même feuille; les diagrammes de Bode “asymptotiques” : gain en décibel et argument de \underline{T}_{2a} en fonction de la fréquence f , on prendra : $a' = 0,976$ et $c' = 0,90$.

3. Expliquer la fonction de désaccentuation à partir des diagrammes de Bode.

4. Dispositif de réduction du bruit.

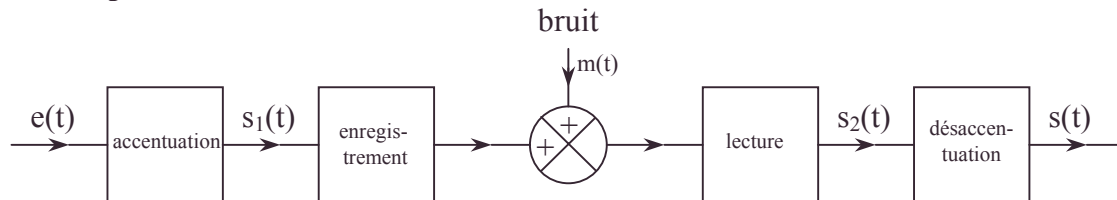


Figure 10

La figure 10 représente le dispositif complet de réduction du bruit :

- l’entrée $e(t)$ est le signal vidéo à reproduire ;
- la sortie $s_1(t)$ du dispositif d’accentuation est enregistrée sur la bande magnétique ;
- les irrégularités de celle-ci introduisent un bruit noté $m(t)$;
- le signal $e_2(t)$, somme de $s_1(t)$ et du bruit $m(t)$, est lu sur la bande magnétique et entre dans le dispositif de désaccentuation ;
- la sortie $s(t)$ de l’ensemble doit reproduire $e(t)$ avec un bruit réduit.

Les fonctions de transfert $\underline{T}_1(j\omega)$ et $\underline{T}_2(j\omega)$ sont celles respectivement calculée au II.2.3.1. et donnée au II.3., on admettra pour les dispositifs d’enregistrement et de lecture des fonctions de transfert égales à 1.

1. On suppose d’abord qu’il n’y a pas de bruit.

1. A quelles conditions, supposées vérifiées pour la suite, la fonction de transfert du dispositif complet est-elle le produit des fonctions de transfert ? Etablir la fonction de transfert complexe : $\underline{T}(j\omega) = \underline{S} / \underline{E}$ du dispositif figure 10.

2. A quelles conditions sur les coefficients a , c , a' , c' la fonction \underline{T} est-elle indépendante de ω ? On exprimera alors a' et c' en fonction de a et c .

Ces conditions seront supposées remplies pour toute la suite.

- diagramme de Bode asymptotique, fonction de transfert, graphe, réduction du bruit, réponse indicielle

3.1. Calculer $\underline{T}(j\omega)$.

2. A.N. : $a = 0,80$ et $c = 9,0$, calculer a' et c' .

4. Donner graphiquement la réponse indicielle du dispositif figure 10 (toujours en l'absence de bruit).

2. On suppose maintenant un bruit $m(t)$.

On appelle rapport signal sur bruit le rapport $\frac{(\text{valeur efficace du signal})^2}{(\text{valeur efficace du bruit})^2}$.

Le signal $e(t)$ est une sinusoïde d'amplitude E_m et le bruit a une densité spectrale $\gamma(f)$ nulle en dehors de la bande de fréquences $[f_2, f_0]$ avec $f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2}$ et $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$.

Le carré de la valeur efficace du bruit dans la bande de fréquences $[f_2, f_0]$ est donné par $\int_{f_2}^{f_0} \gamma(f) df$.

1. Quelle est l'unité de la densité spectrale $\gamma(f)$?

2. On note R_{sans} le rapport signal sur bruit en l'absence du système accentuation-désaccentuation et R_{avec} ce même rapport avec le système de réduction du bruit. En utilisant pour $\underline{T}(j\omega)$ l'expression approchée $\underline{T}_{2a}(j\omega)$, notamment son diagramme asymptotique, supposé valable sur la bande $[f_2, f_0]$, calculer le rapport $\frac{R_{\text{avec}}}{R_{\text{sans}}}$ et conclure.

Annexe

Rappels mathématiques :

- Convergence d'une série géométrique : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$.
- Développement en série de l'exponentielle : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Autres concours ; Durée : 3h.

Corrigé

I.1.1. Vu l'énoncé, $s(t) = E_m \cos \omega(t - \tau)$.

2. $\underline{E} = E_m$; $\underline{S} = E_m e^{-j\omega\tau} \Rightarrow \underline{F} = e^{-j\omega\tau}$.

3.a. $|\underline{F}| = 1$.

b. $\arg \underline{F} = -\omega\tau$.

2.1.

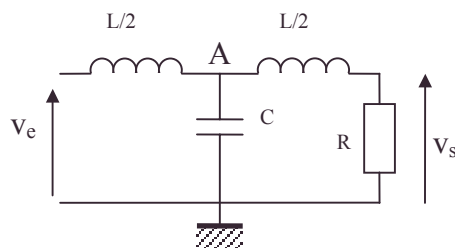
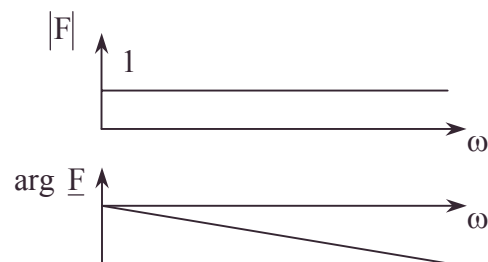


Figure 3



La formule du pont diviseur de tension donne $\underline{V}_s = \frac{R}{R + j\frac{L\omega}{2}} \underline{V}_A$.

Or la formule de Millman appliquée à A s'écrit :

$$\underline{V}_A = \frac{\left(\frac{2\underline{V}_s}{jL\omega} + \frac{2\underline{V}_e}{jL\omega} \right)}{\left(\frac{2}{jL\omega} + \frac{2}{jL\omega} + jC\omega \right)} = \frac{\underline{V}_s + \underline{V}_e}{2 - \omega^2 \frac{LC}{2}}.$$

$$\text{Or, } \underline{V}_A = \left(1 + j \frac{L\omega}{2R} \right) \underline{V}_s \Rightarrow \underline{V}_s \left[\left(1 + j \frac{L\omega}{2R} + \frac{1}{\frac{L}{2}C\omega^2 - 2} \right) \right] = \frac{\underline{V}_e}{2 - \frac{L}{2}C\omega^2}.$$

$$T(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \left[\frac{1}{-1 - \left(1 + j \frac{L\omega}{2R} \right) \left(\frac{L}{2}C\omega^2 - 2 \right)} \right] = \frac{1}{1 + j \frac{L\omega}{R} - \frac{LC\omega^2}{2} - \frac{jL^2C\omega^3}{4R}};$$

$$\Rightarrow P(j\omega) = 1 + \frac{L}{R}(j\omega) + \frac{L}{2}C(j\omega)^2 + \frac{L^2C}{4R}(j\omega)^3.$$

2.1. La fonction retard étudiée en **I.1.1.** peut être développée au 2^{ème} ordre ainsi que $T(j\omega)$ pour $\omega\tau \ll 1$.

$$e^{-j\omega\tau} = 1 - j\omega\tau + \frac{(j\omega\tau)^2}{2}; \quad T(j\omega) = 1 - j\omega \frac{L}{R} - (j\omega)^2 \frac{LC}{2}.$$

On a l'identification totale pour $\frac{L}{R} = \tau = \sqrt{LC}$.

$$\mathbf{2.a.} \quad \tau = \sqrt{LC}.$$

$$\mathbf{b.} \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

3. $\omega\tau \ll 1$ permet le développement limité de $e^{-j\omega\tau}$.

$\omega\tau \ll 1$, $\frac{LC}{2}\omega^2 \ll 1$, $\frac{L^2C\omega^3}{4R} \ll 1$ permet le développement de $T(j\omega)$.

Ces conditions s'identifient pour les valeurs de τ et R_0 adoptées.

3.1. Appliquons les formules d'association des impédances :

$$\underline{Z}_e = j \frac{L\omega}{2} + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R_0 + j \frac{L\omega}{2}}} = \frac{R_0 + jL\omega + \frac{R_0LC}{2}(j\omega)^2 + \frac{L^2C}{4}(j\omega)^3}{1 + R_0Cj\omega + \frac{LC}{2}(j\omega)^2}.$$

$$\mathbf{2.} \quad \underline{Z}_e = R_0 \frac{\left(1 + j\omega\tau + \frac{\tau^2}{2}(j\omega)^2 + \frac{\tau^3}{4}(j\omega)^3 \right)}{1 + j\omega\tau + \frac{\tau^2}{2}(j\omega)^2};$$

$\omega\tau \ll 1$; en négligeant le 3^{ème} ordre en $\omega\tau$ on a par simple division: $\underline{Z}_e = R_0$.

4.1.a. Remplaçons R_0 et \underline{Z}_e par \underline{Z}_0 dans l'expression de **I.2.3.1.** et faisons le produit en croix afin de supprimer le dénominateur :

$$\underline{Z}_0 + j\omega C \underline{Z}_0^2 + \underline{Z}_0 \frac{LC}{2} (j\omega)^2 = \underline{Z}_0 + jL\omega + LC \underline{Z}_0 \frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{L^2 C}{4} (j\omega)^3 ;$$

$$\text{il reste : } \underline{Z}_0^2 = \frac{L}{C} - \frac{L^2 \omega^2}{4} ; \underline{Z}_0 = \text{rac} \left(\frac{L}{C} - \frac{L^2 \omega^2}{4} \right).$$

b.α. Si $\omega \leq \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{L^2 \omega^2}{4}}$ de type résistance, donc positive.

β. Si $\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $\underline{Z}_0 = \pm j \sqrt{\frac{L^2 \omega^2}{4} - \frac{L}{C}}$ réactance pure (inductive ou capacitive)

2. Si $\omega \ll \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0.$

5. Si $\omega \ll \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $\underline{Z}_0 = R_0$ car cela est vrai pour la cellule la plus à droite cf.

figure 3 avec $R = R_0$; puis pour celle qui la précède, jusqu'à par itération à se trouver à l'entrée où $\underline{Z}_e = R_0.$

6.1. La cellule la plus à droite fermée par R_0 entraîne un retard $\tau = \frac{L}{R_0}$; elle entraîne par son impédance la même situation pour la cellule qui la précède soit un retard supplémentaire de τ et ainsi de suite pour les n cellules, qui génèrent (en basse fréquence) un retard total de $n\tau = \frac{nL}{R_0}.$

2. $L = R_0 \tau$; $C = \frac{\tau}{R_0}$ avec $\tau = \frac{\tau_{\text{total}}}{n}.$

A.N. : $L = 0,34 \text{ mH}$; $C = 3,1 \text{ nF}$ pour $n = 6.$

3. A.N. : $L = 2,00 \text{ mH}$; $C = 18,6 \text{ nF}$ pour $n = 1.$

4. La condition $\omega\tau \ll 1$ avec $\tau = \frac{\tau_{\text{total}}}{n}$ est plus facile à obtenir et donc moins chère avec n cellules ($n > 1$) qu'avec une.

II.1.1. $v_2(t) = v_1(t - \tau)$

$$\Rightarrow v_1(t) = e_1(t) + a v_1(t - \tau),$$

véritable algorithme.

2.1.a. $t < 0$; $e_1 = 0$; $u_1 = 0.$

b. $t = +0$; $e_1 = U = u_1$ car $u_1(-\tau) = 0.$

c. $t = \tau + 0$; $e_1 = U$; $u_1(\tau+) = (1 + a)U.$

d. $t = 2\tau + 0$; $e_1 = U$; $u_1(2\tau + 0) = U(1 + a(1 + a)) = (1 + a + a^2)U.$

e. Supposons $u_1((n-1)\tau) = (1 + a + \dots + a^{n-1})U ;$

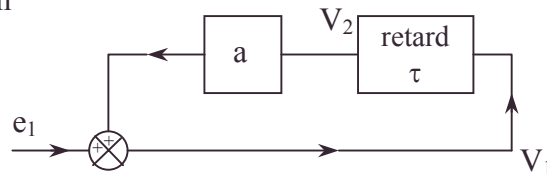
à $t = n\tau + ; u_1(n\tau+) = U(1 + a(1 + a + \dots + a^{n-1})) = (1 + a + a^n)U.$

La récurrence est démontrée.

2. On connaît : $1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$ cf. ligne précédente ;

or $0 < a < 1$; $n \rightarrow \infty$; $u_1 \rightarrow \frac{U}{1 - a}.$

• *algorithme, récurrence*

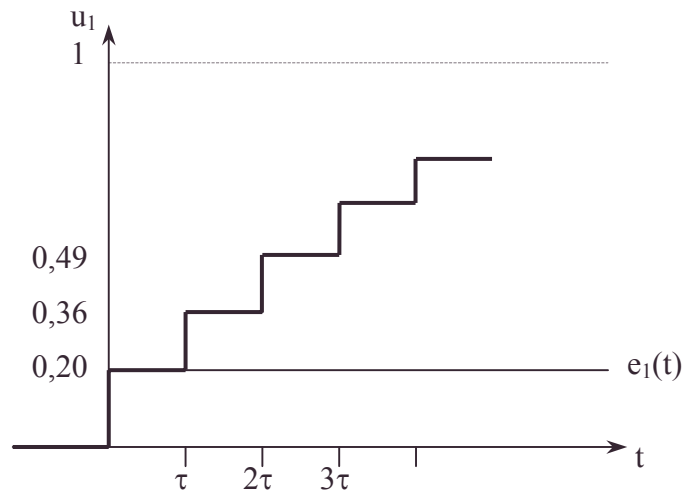


3. A.N. : $\frac{U}{1-a} = 1 \text{ V}.$

$u_1(t)$ fonction en escalier

tendant vers $\frac{U}{1-a}.$

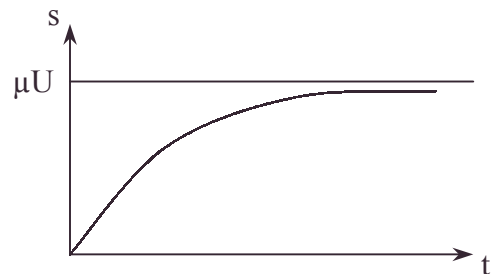
Les hauteurs de marches vont décroître.



4. A une excitation échelon u , un filtre passe-bas du premier ordre obéit à :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{\mu}{\tau} e \text{ avec } s = \mu u \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); s = \mu u \text{ à } 1\% \text{ près pour } t = 6,9 \tau.$$

Avec $\mu = \frac{1}{1-a}$ et un échantillonnage pour mémoriser la courbe ; on retrouve la fonction en escalier approximativement ; on remarque la parenté des situations : on dira que le filtre est de type passe bas.



3.1. En notation complexe (à défaut d'utiliser la notation de Laplace cf. $j\omega = p$), l'algorithme s'écrit en utilisant la fonction retard $\underline{V}_1 = \underline{E}_1 + a\underline{V}_1 e^{-j\omega\tau}$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V}_1}{\underline{E}_1} = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega\tau}}.$$

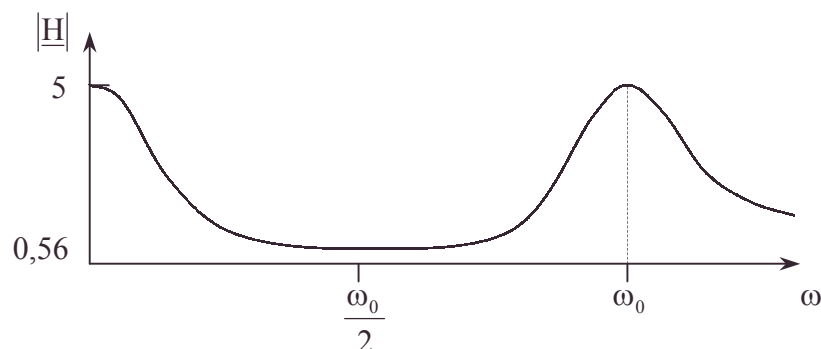
2. $\omega \rightarrow 0$, on a l'excitation e_1 échelon d'amplitude U ; $u_1 \rightarrow \frac{U}{1-a}.$

3. e^{-jx} est de période 2π ; posons $\omega_k \tau = 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$;

$\omega_0 = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{\tau}$ est la période ω_0 de la pulsation ω .

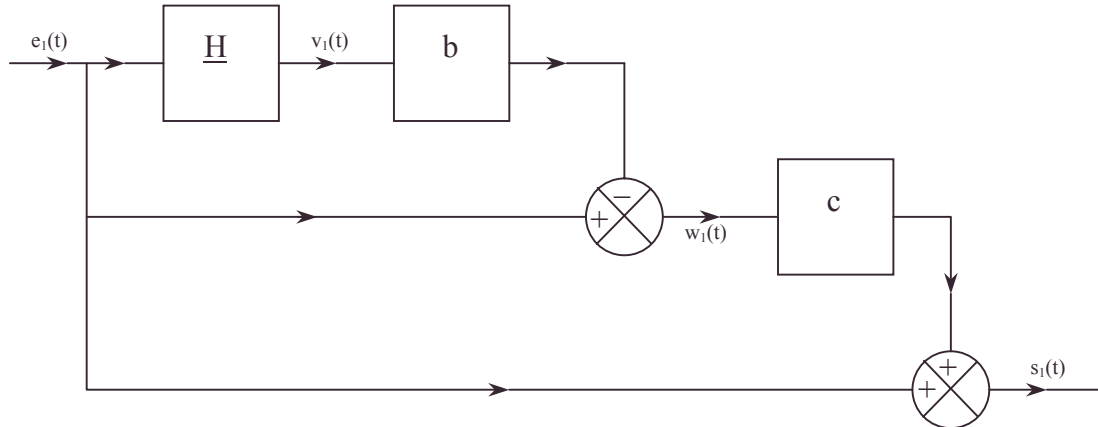
4. $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1 - a \cos \omega\tau) + ja \sin \omega\tau} ;$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega\tau)^2 + a^2 \sin^2 \omega\tau}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega\tau}}.$$



5. Pour $0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$; $0,5 < |\underline{H}| < 5$; on peut considérer le filtre comme passant pour ces basses pulsation, on le dira passe bas.

2.1.



$$w_1(t) = e_1(t) - bv_1(t) ; \text{ soit en notation complexe : } \underline{W}_1 = \underline{E}_1 - b\underline{H}\underline{E}_1 = (1 - b\underline{H})\underline{E}_1 .$$

$$\underline{H}_1(j\omega) = 1 - b\underline{H} = \frac{1 - b - ae^{-j\omega\tau}}{1 - ae^{-j\omega\tau}} .$$

2.a. En écriture de Laplace : $H_1(p) = \frac{1 - b - ae^{-p\tau}}{1 - ae^{-p\tau}} .$

Utilisons le théorème de la valeur finale sachant que l'excitation échelon a comme transformée de Laplace U/p :

$$u'_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[H_1(p) \frac{U}{p} \right] = \frac{1 - b - a}{1 - a} U = \left(1 - \frac{b}{1 - a} \right) U .$$

b. $u'_1(\infty) = 0$ si $b = 1 - a$.

3. $b = 1 - a$ $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{a(1 - e^{-j\omega\tau})}{1 - ae^{-j\omega\tau}} .$

1. $s_1(t) = e_1(t) + cw_1(t) .$

$$\underline{S}_1 = \underline{E}_1 + c\underline{W}_1 = \underline{E}_1 + c\underline{H}_1\underline{E}_1 = \underline{E}_1(1 + c\underline{H}_1) .$$

$$\underline{T}_1(j\omega) = \frac{\underline{S}_1}{\underline{E}_1} = 1 + c\underline{H}_1 = 1 + \frac{ac(1 - e^{-j\omega\tau})}{1 - ae^{-j\omega\tau}} = \frac{1 + ac - a(1 + c)e^{-j\omega\tau}}{1 - ae^{-j\omega\tau}} .$$

2. $e^x = 1 + x$ au premier ordre, de même :

$e^{-j\omega\tau} = 1 - j\omega\tau$ au premier ordre ; on a :

$$\underline{T}_{1a}(j\omega) = \frac{1 - a + j\omega\tau(1 + c)a}{1 - a + aj\omega\tau} = \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2} \text{ avec } \tau_1 = a\tau \frac{(1 + c)}{1 - a} ; \tau_2 = \frac{a\tau}{1 - a} .$$

3. $e^x = 1 + x$ exige sur \mathbb{C} $|x| \ll 1$ soit ici $\omega\tau \ll 1$.

4. Diagramme de Bode : voir page 1019.

$$G_{1a} = 20 \log \left(\frac{1 + \omega^2 \tau_1^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 10 \log \frac{1 + \omega^2 \tau_1^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} = 10 \log \frac{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_1^2}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_2^2} .$$

$$\arg \underline{T}_{1a} = \arg(1 + j\omega\tau_1) - \arg(1 + j\omega\tau_2) = \arctan \omega\tau_1 - \arctan \omega\tau_2 .$$

1. Diagrammes asymptotiques : introduisons les fréquences

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} \text{ A.N. : } f_1 = 62 \text{ Hz et } f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2} \text{ A.N. : } f_2 = 620 \text{ Hz.}$$

a. $f \ll f_1 \ll f_2$; $G_{1a} = 0 \text{ dB}$; $\arg T_{1a} = 0 \text{ rad}$.

b. $f_1 \ll f \ll f_2$; $G_{1a} = 10 \log 4\pi^2 f^2 \tau_1^2 = 20 \log f - 20 \log f_1$.

$$\arg T_{1a} = \arctan \frac{f}{f_1} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

c. $f_1 \ll f_2 \ll f$; $G_{1a} = 20 \log \frac{f_2}{f_1}$; A.N. : $G_{1a} = 20 \text{ dB}$.

$$\arg T_{1a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

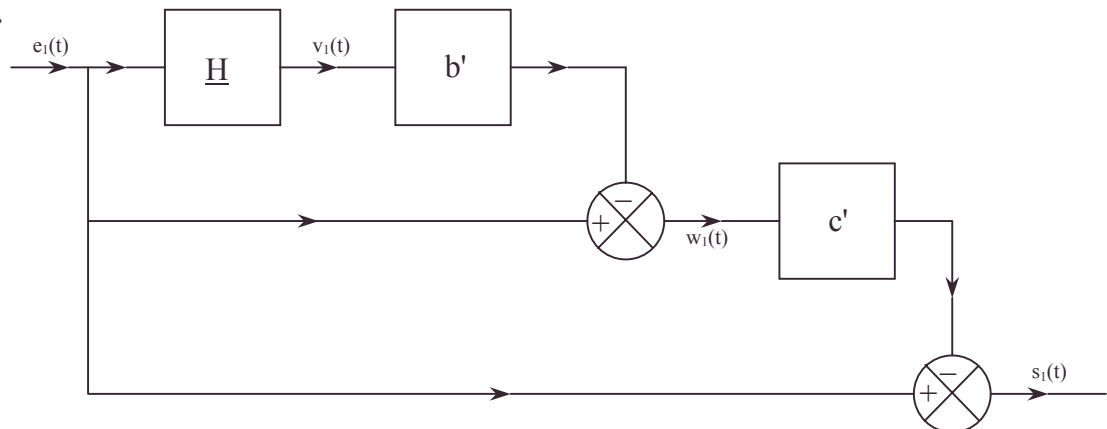
2.a. Le calcul de G_{1a} permet un tracé voisin des asymptotes.

b. $\arg(T_{1a}) = \arg S_1 - \arg E_1$ est le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

5. On remarque l'accentuation des hautes fréquences $f \gg f_2 \gg f_1$ de manière uniforme : $G_{1a} = 20 \text{ dB}, \forall f$; les B.F. ne sont pas modifiées.

3. On constate une transcription de a en a' et c en -c'

1.



Le changement de signe se fait grâce à un soustracteur mis à la place du sommateur.

2. $G_{2a} = 10 \log \frac{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_1'^2}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau_2'^2}$; $\arg T_{2a} = \arctan 2\pi f \tau_1' - \arctan 2\pi f \tau_2'$.

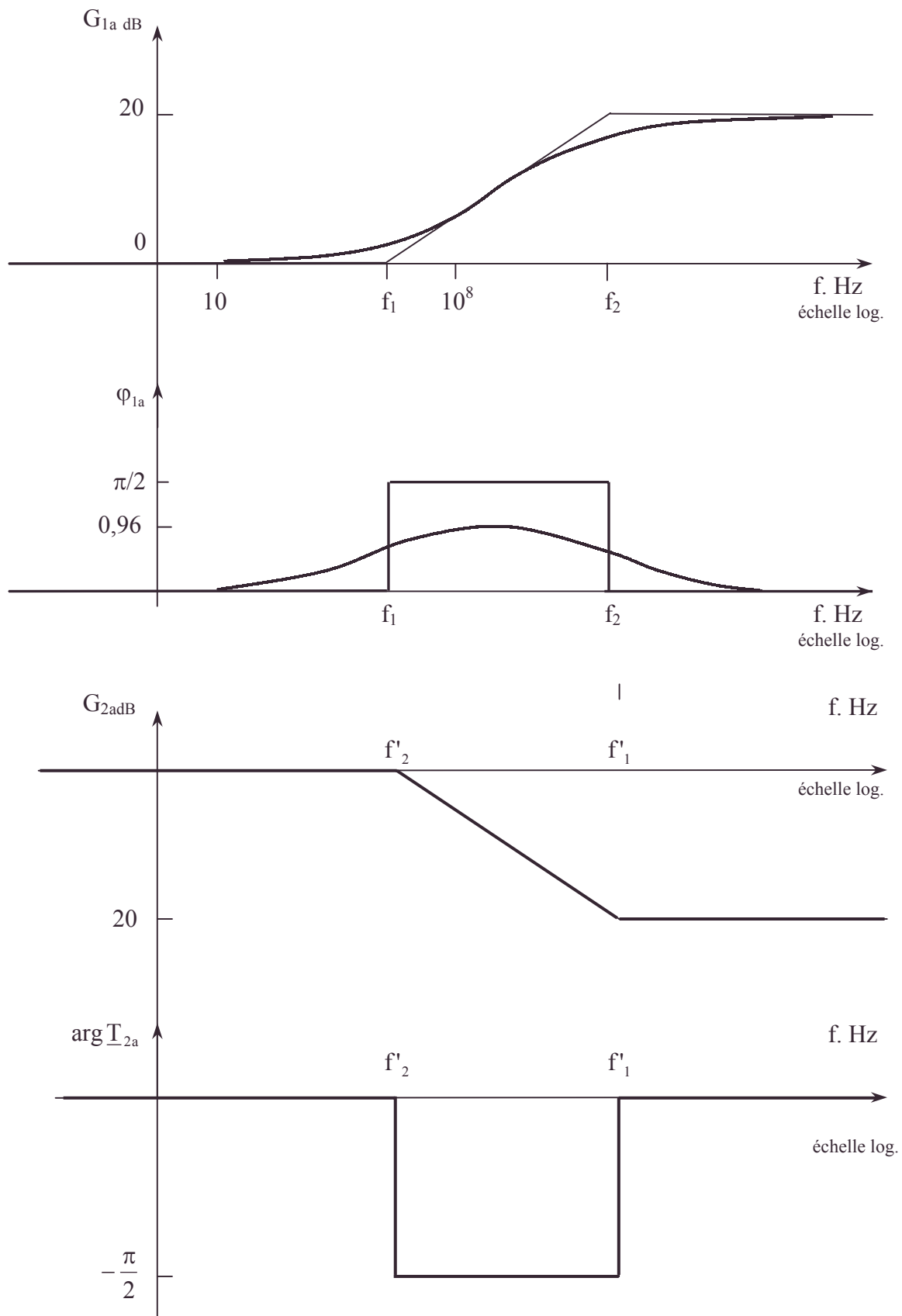
Introduisons : $f'_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1'}$; A.N. : $f'_1 = 620 \text{ Hz}$.

et $f'_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2'}$; A.N. : $f'_2 = 62 \text{ Hz}$.

a. $f \ll f'_2 \ll f'_1$; $G_{2a} = 0 \text{ dB}$; $\arg T_{2a} = 0 \text{ rad}$.

b. $f'_2 \ll f \ll f'_1$; $G_{2a} = -20 \log f + 20 \log f'_2$; $\arg T_{2a} = -\arctan \frac{f}{f'_2}$.

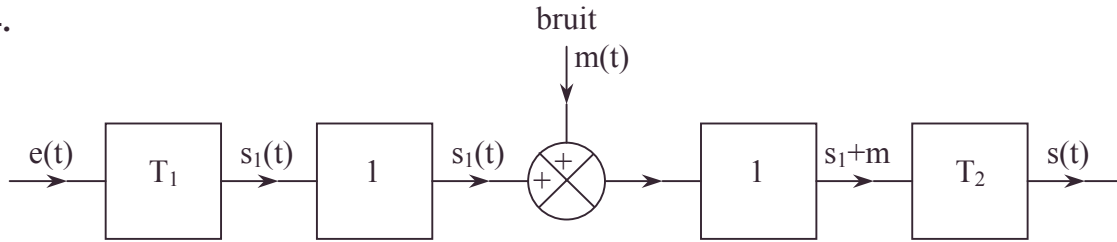
c. $f'_2 \ll f'_1 \ll f$; $G_{2a} = 20 \log \frac{\tau_1'}{\tau_2'}$; A.N. : $G_{2a} = -20 \text{ dB}$; $\arg T_{2a} = 0$.



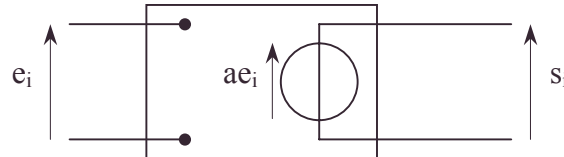
3. Les hautes fréquences sont toute atténuées : $G_{2a} = -20 \text{ dB}, \forall f$.
Il y a désaccentuation. Les B.F. ne sont pas modifiées.

- désaccentuation

4.



1.1.a. $m = 0$; les opérateurs sur les tensions agissent par une multiplication simple quand leurs impédances d'entrée sont infinies et leurs impédances de sortie nulles ; on a un quadripôle équivalent :



b. $\underline{T} = \underline{T}_1 \cdot \underline{T}_2$ par conséquent.

$$\underline{T} = (1 + ac)(1 - a'c') \cdot \frac{1 - \frac{a(1+c)}{1+ac} e^{-j\omega\tau}}{1 - a'e^{-j\omega\tau}} \cdot \frac{1 - \frac{a'(1-c')}{1-a'c'} e^{-j\omega\tau}}{1 - ae^{-j\omega\tau}}.$$

2.1. \underline{T} est indépendant de ω en étant indépendant de $e^{-j\omega\tau}$, s'il y a identité des numérateurs et des dénominateurs comportant $e^{-j\omega\tau}$; soit pour :

$$a' = \frac{a(1+c)}{1+ac} \text{ et } a = \frac{a'(1-c')}{1-a'c'}.$$

La solution est supposée unique. $\underline{T} = (1 + ac)(1 - a'c')$. cf. **b.**

2. **1.** $\Rightarrow c' = \frac{a-a'}{(1-a)a'}$ et en remplaçant a' , il reste $c' = \frac{c}{1+c}$.

3. **1.** $\Rightarrow a'c' = \frac{ac}{1+ac}$; ajoutons 1 $\Rightarrow 1 - a'c' = \frac{1}{1+ac} \Rightarrow (1+ac)(1 - a'c') = 1 \Rightarrow \underline{T} = 1$.

2. A.N. : $a' = 0,976$; $c' = 0,9$. C'est le cas de **3.**

4.



2.1. $V_{be}^2 = \int_{f_2}^{f_0} \gamma(f) df \Rightarrow$ l'unité de γ est : $V^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$.

2. $R_{\text{sans}} = \frac{V_{ec}^2}{\int_{f_2}^{f_0} \gamma(f) df}$; $R_{\text{avec}} = \frac{V_{ec}^2}{\int_{f_2}^{f_0} |\underline{T}_{2a}|^2 \gamma(f) df}$.

Toutes choses égales par ailleurs : V_{ec}^2 et $\gamma(f)$ conservées.

En effet, le signal de tension du bruit n'est traité que par \underline{T}_{2a} et on a la définition du carré de la valeur de tension efficace qui ici doit tenir compte de la densité spectrale en sortie.

$$|\underline{T}_{2a}| \text{ constant pour } f > f_2 : \int_{f_2}^{f_0} |\underline{T}_{2a}|^2 \gamma(f) df = |\underline{T}_{2a}|^2 \int_{f_2}^{f_0} \gamma(f) df \Rightarrow \frac{R_{\text{avec}}}{R_{\text{sans}}} = \frac{1}{|\underline{T}_{2a}|^2}.$$

$$\frac{R_{\text{avec}}}{R_{\text{sans}}} = \frac{1}{|\underline{T}_{2a}|^2} ; \text{A.N. : } f_2 = 620 \text{ Hz} ; |\underline{T}_{2a}| = 0,1 . \quad \frac{R_{\text{avec}}}{R_{\text{sans}}} = 100 .$$

Le rapport est amélioré d'un facteur 100 ; le bruit a été bien réduit par le système.

• quadripôle, unité

6.1.8. Electronique numérique

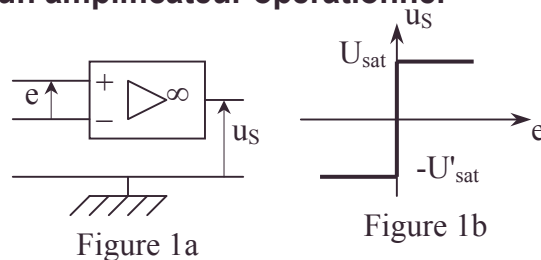
Appartient partiellement aux programmes de TP de MPSI, TSI1

6.1.8.1. Voltmètre numérique

Le sujet, étude du principe de fonctionnement d'un voltmètre numérique, comporte trois parties assez largement indépendantes. La réponse à chaque question devra être accompagnée d'une justification précise pour être prise en compte.

I. Limites au modèle idéal et linéaire d'un amplificateur opérationnel

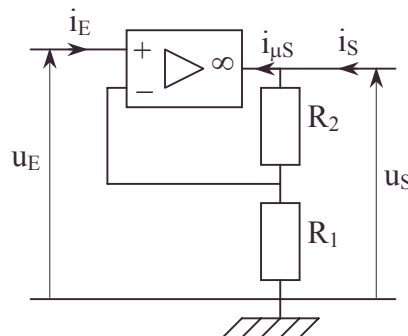
On étudie ici quelques limites au modèle AOIL (amplificateur opérationnel idéal et linéaire). On rappelle la caractéristique de transfert d'un amplificateur opérationnel, ou amplificateur de différence, idéal. (Figures 1a et 1b).



1. Dans le montage représenté figure 2, le quadripôle étudié est formé d'un AO et de deux résistances, l'AO est idéal et fonctionne dans sa zone linéaire.

Exprimer :

- A tel que $u_s(t) = A u_E(t)$.
- La résistance d'entrée du quadripôle.
- La résistance de sortie du quadripôle.



2. Limites au fonctionnement linéaire de l'AO idéal

Figure 2

On considère le montage de la figure 2.

- Comment mesurer expérimentalement les tensions de saturation U_{sat} et $-U'_{sat}$?
- Le constructeur indique un $i_{\mu S \max}$ de 20 mA. On applique à l'entrée du quadripôle $U_e(t) = U_{e,m} \cos(\omega t)$ avec $U_{e,m} = 1,0 \text{ V}$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $U_{sat} = U'_{sat} = 14,0 \text{ V}$. Comment choisir la valeur d'une résistance R_u placée en sortie pour garder un fonctionnement linéaire ?

- La sortie ne reste linéaire que si $\left| \frac{du_s}{dt} \right| < \sigma$, σ est appelé vitesse (maximale) de

balayage de l'AO (slew rate), le constructeur indique pour l'AO précédent $\sigma = 1,0 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$.

On applique à l'entrée la même tension qu'au b., on augmente ω ; jusqu'à quelle valeur ω_1 de ω , $u_s(t)$ restera-t-elle théoriquement sinusoïdale ?

Décrire la formation de $u_s(t)$ et dessiner l'allure du graphe $u_s(t)$ pour des valeurs $\omega > \omega_1$.

On peut se servir de l'apparition de cette déformation pour estimer σ .

Proposer une autre méthode de mesure expérimentale de σ .

3. Influence de quelques "défauts" d'un AO réel

On considère un modèle d'AO réel en fonctionnement linéaire où l'on néglige tension de décalage et courants de polarisation (Figure 3).

- On prend r_d infinie et μ (gain différentiel) fini. Représenter le schéma équivalent du montage de la figure 2 avec ce modèle pour l'AO.

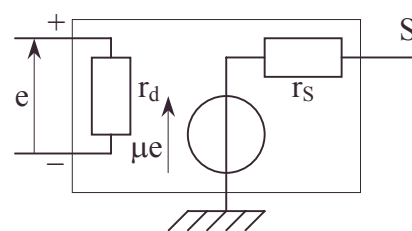


Figure 3

Définir puis calculer la résistance de sortie du quadripôle en fonction de r_s , R_1 et R_2 .

b. On considère maintenant μ fini et fonction de la fréquence f de la tension appliquée à l'entrée, à l'exclusion de tout autre défaut, notamment on prend r_d infinie et $r_s = 0$.

On adopte comme modèle pour le gain complexe $\underline{\mu}$: $\underline{\mu}(f) = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{f}{f_c}}$ avec $j^2 = -1$.

Comment nomme-t-on ce modèle ?

1. Etablir alors la fonction de transfert du quadripôle figure 2 et l'écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_0}}. \text{ Calculer } H_0 \text{ en fonction de } \mu_0 \text{ et } A \text{ (1.) et } f_0 \text{ en fonction de } f_c, A \text{ et } \mu_0.$$

2. On prend $\mu_0 = 1,0 \cdot 10^5$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $f_c = 10 \text{ Hz}$.

Calculer numériquement H_0 et en donner une expression littérale approchée.

Tracer, sur le même graphe, l'allure des diagrammes de Bode asymptotiques en amplitude pour $\underline{\mu}$ et \underline{H} . Interpréter les limitations en fréquence observées expérimentalement avec le montage de la figure 2.

II. Etude d'un dispositif pouvant servir d'horloge

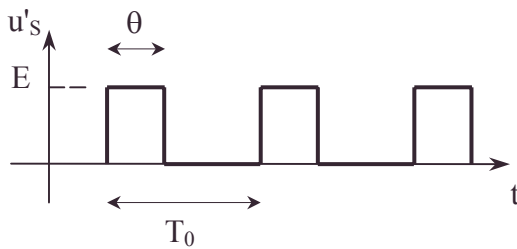


Figure 4

On désire obtenir en sortie d'un oscillateur, qui servira d'horloge, la tension représentée à la figure 4.

On appelle rapport cyclique : $\alpha = \frac{\theta}{T_0}$.

1. Montage de base (Figure 5)

Il utilise un AO idéal fonctionnant dans sa zone non linéaire (comparateur à hystérésis). Les tensions de saturation de l'AO sont U_{sat} et $-U_{\text{sat}}$.

a. A $t = 0$, $V_- = 0$ et $u_s = +U_{\text{sat}}$, on note $V_1 = U_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

Exprimer $V_-(t)$ pour $t \geq 0$, en fonction de t , R , C , V_1 et U_{sat} .

b. Représenter $V_-(t)$, $u_s(t)$ et $u_s(V_-)$.

c. Calculer la période T_0 en fonction de R , C , V_1 et U_{sat} , puis R , C , R_1 et R_2 .

Calculer α .

AN : $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 80 \text{ k}\Omega$, $R = 5,0 \text{ k}\Omega$ et on veut $T_0 = 20 \mu\text{s}$. Calculer C .

d. Qualitativement, comment le slew rate σ limite de l'AO modifie-t-il la forme de $u_s(t)$? On donnera l'allure du graphe $u_s(t)$. $U_{\text{sat}} = 14,0 \text{ V}$.

Numériquement, quelle condition devrait respecter σ pour que les commutations soient acceptables ; par exemple : durée de commutation inférieure à $T_0/2$?

- comparateur à hystérésis, défauts de signal corrigés par une fonction retard, diagramme de Bode asymptotique, fonction de transfert, horloge, période, rapport cyclique, schéma équivalent de montage

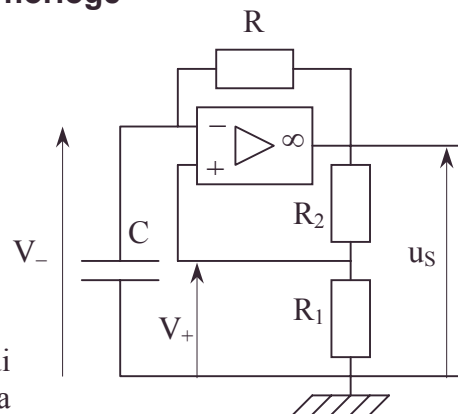


Figure 5

On envisage maintenant des modifications du montage de base permettant des réglages indépendants de la période, du rapport cyclique et de l'amplitude de la tension de sortie.

2. Modification de la période

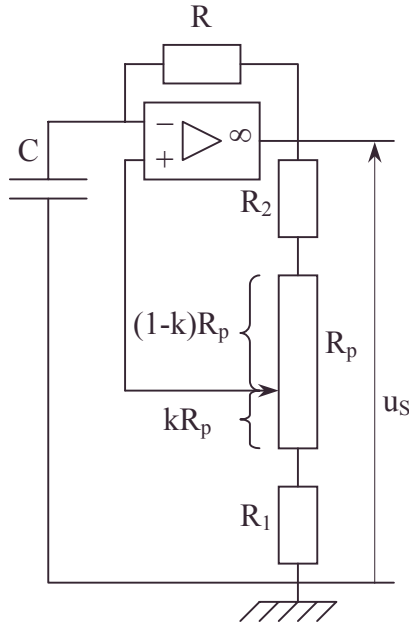


Figure 6

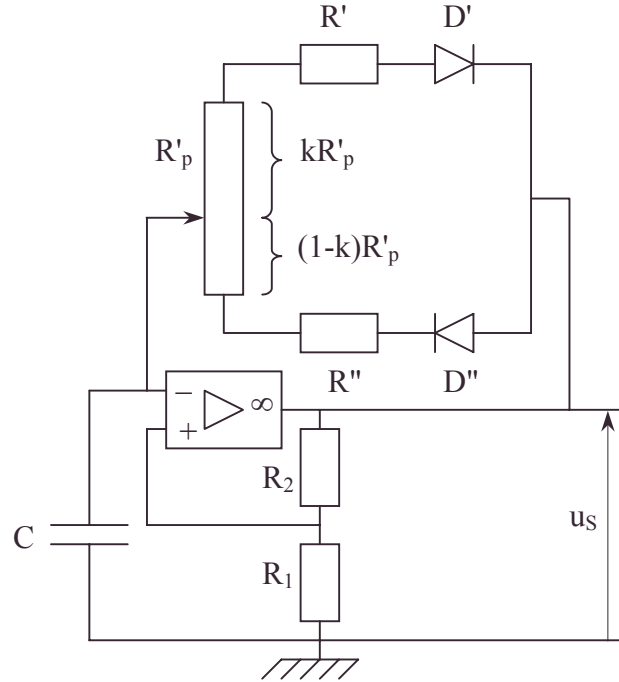


Figure 7

On réalise le montage de la figure 6, où R_p est un potentiomètre de $25\text{ k}\Omega$, k variant de 0 à 1. Les autres composants ont les valeurs indiquées au II.1.

- Exprimer T_0 en fonction de R , C , R_1 , R_2 , R_p et k .
- Quelles sont les valeurs numériques extrêmes de $f_0 = 1/T_0$?
- Que vaut, dans ce cas, le rapport cyclique ?

3. Modification du rapport cyclique

On réalise le montage de la figure 7, où R'_p est un potentiomètre de $4,7\text{ k}\Omega$, k variant de 0 à 1, $R' = R'' = 100\text{ }\Omega$. Les diodes sont idéales et les autres composants ont les valeurs indiquées au II.1.

- Calculer la période T_0 . Dépend-elle de k ?
- Calculer le rapport cyclique α en fonction de R' , R'' , R'_p et k .

Quelles sont ses valeurs numériques extrêmes pour k variant de 0 à 1 ?

4. Modification de l'amplitude

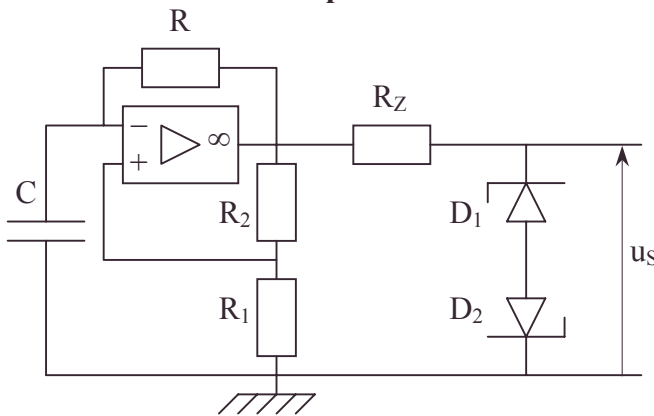


Figure 8a

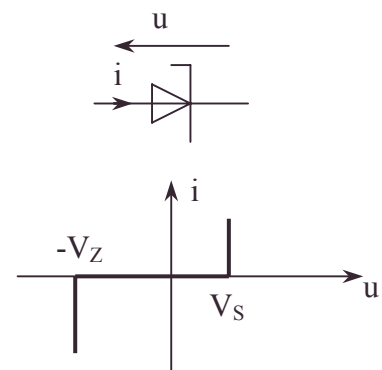


Figure 8b

On réalise le montage de la figure 8a où D_1 et D_2 sont des diodes Zener de tensions Zener respectives $V_{Z_1} = 9,0 \text{ V}$ et $V_{Z_2} = 3,0 \text{ V}$ et de tension seuil $V_S = 0,6 \text{ V}$, conformément à la caractéristique de la figure 8b. Les autres composants ont les valeurs indiquées au II.1. Déterminer et représenter le graphe de $u_S(t)$. Si les diodes supportent un courant d'intensité maximale $I_{\max} = 10 \text{ mA}$, comment choisir R_Z ?

III. Principe de fonctionnement d'un voltmètre numérique

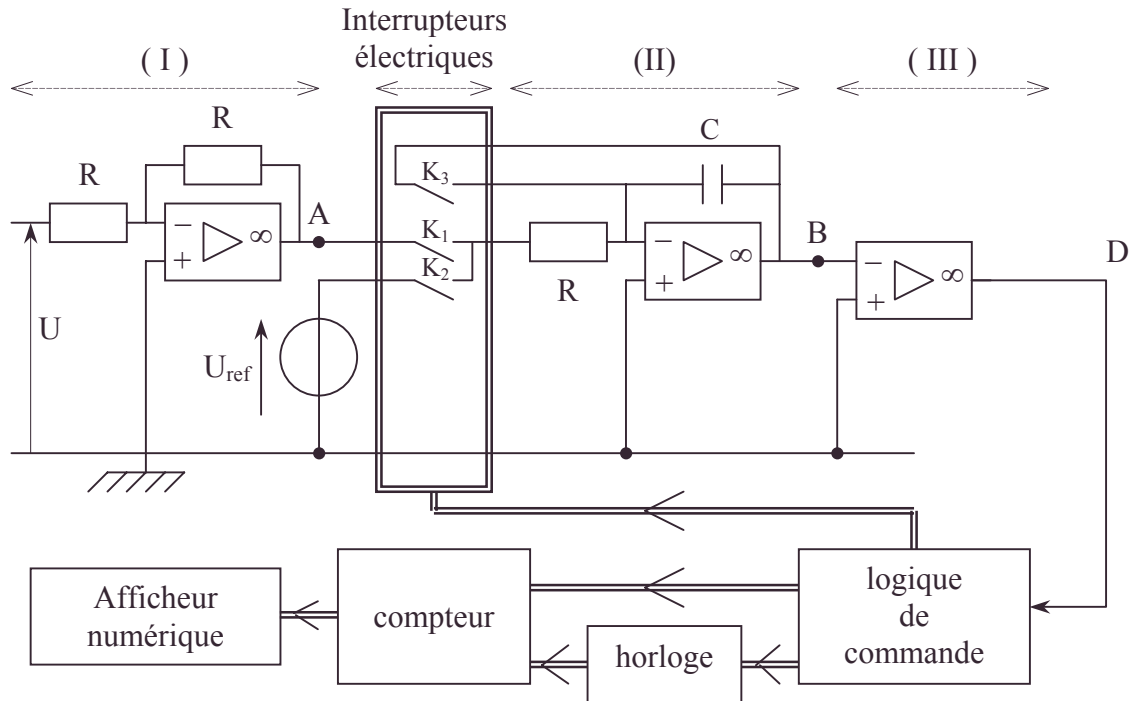


Figure 9

La figure 9 donne le schéma de principe d'un voltmètre numérique à double rampe. La tension à mesurer U (supposée constante) et la tension de référence U_{ref} sont positives. Les AO sont idéaux, de tensions de saturation telles que $U_{\text{sat}} = U'_{\text{sat}} = 14,0 \text{ V}$.

On notera V_A , V_B , et V_D les potentiels des points A, B, D par rapport à la masse.

1. Le schéma

- Quelle est la fonction de (I), K_2 étant ouvert ? Que vaut V_A ?
- K_3 étant ouvert, montrer que (II) est un intégrateur.
- Quelle est la fonction de (III) ? Exprimer V_D en fonction de V_B .

C'est la valeur de V_D qui détermine l'action de la logique de commande sur les interrupteurs et le compteur. Lorsque cette commande le permet, le compteur reçoit des impulsions de période T_0 délivrées par l'horloge.

Le résultat du comptage est transmis à l'afficheur.

2. Fonctionnement

Pour $t < 0$, K_3 est fermé, K_1 et K_2 ouverts.

A partir de $t = 0$, K_1 est fermé, K_2 et K_3 ouverts.

A partir de $t = t_1 = N_1 T_0$, K_2 est fermé, K_1 et K_3 ouverts, N_1 est fixé indépendamment de U .

- Exprimer et représenter graphiquement $V_B(t)$ entre $t = 0$ et t_1 , puis pour $t > t_1$ (on rappelle que U est positif).

On note t_2 l'instant où V_D bascule, entraînant la commande : K_3 fermé, K_1 et K_2 ouverts. Qu'est-ce qui provoque le basculement de V_D ?

- Exprimer $(t_2 - t_1)$ en fonction de U , U_{ref} , N_1 et T_0 .

• amplificateur opérationnel, graphe, intégrateur électronique, masse électronique, période

c. Comment choisir U_{ref} par rapport à U pour que le cycle de mesure, déclenché par la logique de commande, puisse reprendre à $2t_1 = 2N_1 T_0$?

d. Peut-on choisir N_1 aussi grand que l'on veut ?

3. Mesure

Le compteur enregistre les impulsions fournies par l'horloge uniquement entre t_1 et t_2 , soit pendant $(t_2 - t_1)$, une impulsion est comptée pour chaque période T_0 écoulée.

On note $N_2 = \frac{t_2 - t_1}{T_0}$.

a. Exprimer N_2 en fonction de N_1 , U_{ref} et U .

b. On choisit $\frac{N_1}{U_{\text{ref}}} = 10^p$, où U_{ref} est en volts et p est un entier positif.

Justifier brièvement ce choix. Quelle est la relation entre l'indication N' du compteur et N_2 ? (On considérera que le nombre d'impulsions comptées est égal au nombre de périodes entières T_0 contenues dans $(t_2 - t_1)$).

c. La précision de mesure dépend-elle de la précision avec laquelle T_0 est connue ? Quelle qualité de l'horloge intervient essentiellement dans la fiabilité de la mesure ? Quelle modification de caractéristique de l'horloge augmenterait la précision de la mesure ?

d. A.N. : $T_0 = 20,0 \mu\text{s}$; $N_1 = 1000$; $U_{\text{ref}} = 10,0 \text{ V}$; $R = 20,0 \text{ k}\Omega$; $C = 1,00 \mu\text{F}$.

Calculer N' pour $U = 2,430 \text{ V}$ et pour $U = 0,552 \text{ V}$.

4. Utilisation du voltmètre en régime variable

La mesure des valeurs efficaces (fonction RMS des voltmètres numériques, ou root mean square : racine carrée de la moyenne du carré) peut se ramener à la mesure d'une tension continue.

a. Soit $v(t) = v_0 + v_a(t)$, avec $v_0 = \langle v(t) \rangle$, v_0 est la valeur moyenne de $v(t)$ et $v_a(t)$ la composante alternative.

On rappelle que la valeur efficace est définie par $V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

1. Etablir la relation entre V_{eff} , v_0 et $V_{a \text{ eff}}$; $V_{a \text{ eff}}$ est la valeur efficace de la composante alternative. - En fonctionnement RMS – AC + DC l'appareil donne V_{eff} .
- En fonctionnement RMS – AC l'appareil donne $V_{a \text{ eff}}$.

2. Calculer les valeurs efficaces, en fonction de E , des tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ représentées figure 10.

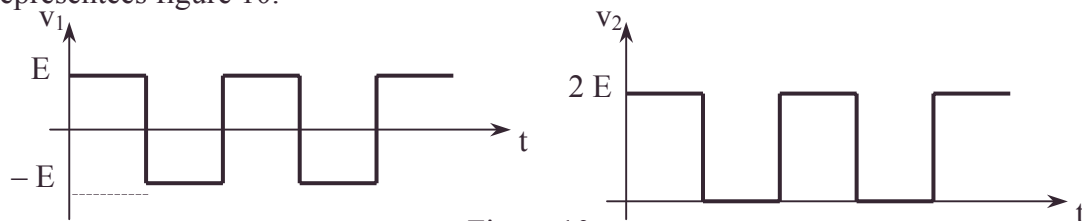


Figure 10

b. La figure 11 donne le schéma de traitement de la tension variable $v(t)$ avant application au voltmètre numérique.

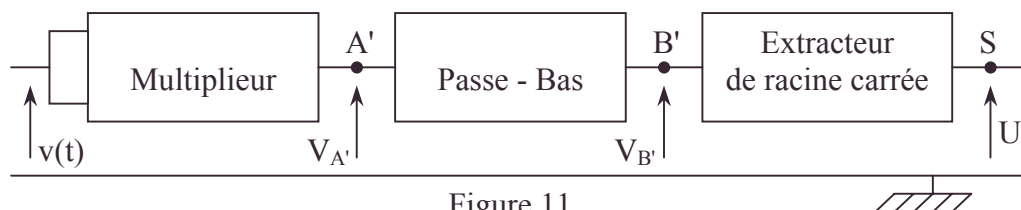


Figure 11

• AC [alternating current], basculement mécanique, commande logique de renouvellement des cycles de mesure [numérisation], comptage des impulsions d'horloge transmis à l'afficheur[numérisation], DC[direct current], fonction MRS [mean square root][pour voltmètre numérique], graphe, horloge, impulsions délivrées par l'horloge, période, qualité de l'horloge

1. Le multiplieur analogique auquel on appliquerait $x(t)$ et $y(t)$ fournirait en sortie $z(t) = \frac{x(t)y(t)}{E_0}$. On considère $v(t)$ sinusoïdale alternative : $v(t) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t)$.

Montrer que $\langle V_{A'} \rangle \neq 0$. ($V_{A'}$ potentiel du point A' est défini sur la figure 11). Représenter et comparer les spectres de fréquence de $v(t)$ et $V_{A'}$.

2. Le passe-bas est un filtre RC : figure 12. Donner la fonction de transfert de ce filtre, la pulsation de coupure en fonction de R_0 et C_0 . Comment choisir $R_0 C_0$ pour que $V_{B'} = \langle V_{A'} \rangle$?

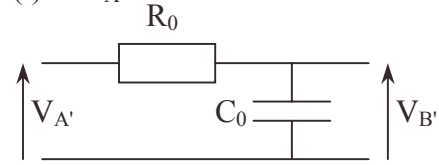


Figure 12

3. L'extracteur de racine carrée : figure 13. Q est un quadripôle dont la fonction de transfert est $s' = f(e')$, l'AO est idéal et linéaire. Quelle fonction donne s à partir de e ? Montrer que le choix d'un multiplieur pour Q permet d'obtenir s proportionnel à \sqrt{e} , (soit $s = \sqrt{E_0 e}$). Représenter le schéma correspondant.

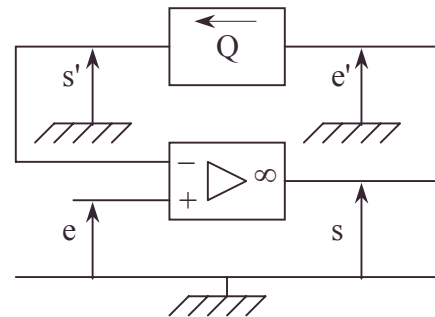


Figure 13

4. On utilise l'extracteur de racine carrée avec $e = V_{B'}$ et $s = U$.

Soit $v(t)$ sinusoïdale alternative : $v(t) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t)$.

En supposant R_0 et C_0 choisis convenablement, montrer que U est proportionnel à U_{eff} . Si $v(t)$ est une fonction périodique quelconque, indiquer comment choisir $R_0 C_0$ pour que U soit proportionnel à V_{eff} .

5. Mesure des faibles tensions

Avec le voltmètre de principe, figure 9, aucune rampe de charge n'est obtenue quand $U = 0$. Pour pouvoir mesurer des tensions faibles, on modifie la partie intégrateur de la façon indiquée figure 14. U et U_{ref} sont prises positives.

Le fonctionnement est le suivant :

Pour $t < 0$,

K_3 et fermé,

K_1 et K_2 ouverts.

A partir de $t = 0$,

K_1 est fermé,

K_2 et K_3 ouverts

C'est la phase 1.

A partir de $t = t_1 = N_1 T_0$,

K_2 est fermé,

K_1 et K_3 ouverts,

N_1 est fixé indépendamment de U ,

C'est la phase 2.

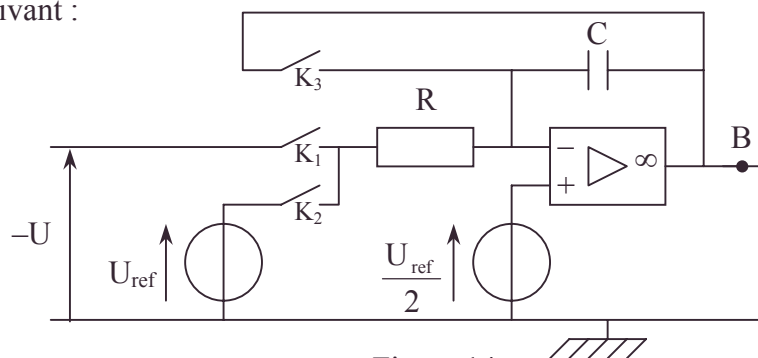


Figure 14

a. Exprimer, pour chaque phase, $V_B(t)$ en fonction de t , R , C , U_{ref} , U et t_1 .

Représenter graphiquement $V_B(t)$, en indiquant les durées proportionnelles aux nombres d'impulsions N_1 et N_2 (à une unité près) comptées pendant les phases 1 et 2.

b. Sur le même graphe faire apparaître $V_B(t)$ lors d'une mesure de $U = 0$.

On note N_{02} le nombre d'impulsions correspondant à la phase 2 dans ce cas.

c. Montrer que U s'exprime en fonction de U_{ref} , N_2 et N_1 seulement.
Si l'on souhaite un nombre indiqué par le compteur proportionnel à U , quand doit-on commencer l'enregistrement des impulsions ?

Autres concours ; Durée : 3h

Corrigé

I.1.a. $V_+ = u_E = V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_S$

vu le pont diviseur de tension $\Rightarrow u_S = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_E$; $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

b. $R_E = \frac{u_E}{i_E}$ or $i_E = 0 \Rightarrow R_E \rightarrow \infty$.

c. $R_S = 0$ car vu les fig.2 et 3 $u_S = \mu u_E - R_S i_S = A u_E$ indépendant de i_S .

2.a. On mesure u_S et on augmente $|u_E|$ ou $\frac{R_2}{R_1}$; on fera 2 séries d'expériences :

$u_E > 0$ ou $u_E < 0$ en notant la tension de sortie. On veillera à ne pas dépasser $i_{\mu S \max}$ (supposée compatible avec l'obtention désirée).

. On note la valeur constante qu'on obtiendra en sortie $+U_{sat}$ et $-U'_{sat}$

b. $i_{\mu S} = -u_S \left[\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right] = -A u_E \left[\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right]$.

A la limite maximum de $i_{\mu S}$; on mesure $u_{E \min}$.

$$R_{u \min} = \frac{1}{\frac{i_{\mu S \max}}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_{E \min}} - \frac{1}{R_2 + R_1}} \quad \text{A.N. : } R_{u \min} = 553 \Omega.$$

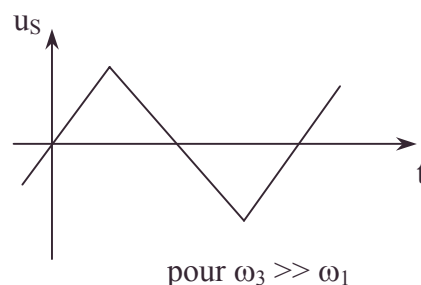
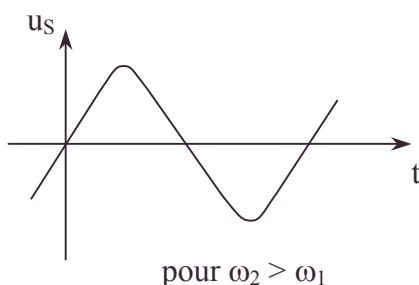
Il faut $R_u > 553 \Omega$ pour ne pas atteindre $i_{\mu S \max}$.

c. $\frac{du_S}{dt} = -A \omega U_{e,m} \sin \omega t$; si μS reste sinusoïdale, on peut considérer qu'à la limite

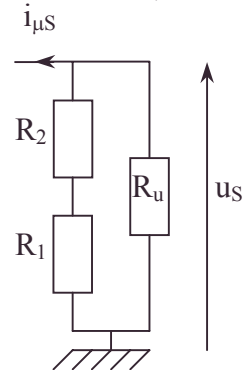
la contrainte ne se fait qu'en $\omega t = \frac{\pi}{2}$ (π) pour $\sigma = A \omega U_{e \min}$;

$$\omega_1 = \frac{\sigma}{U_{e,m} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)} ; \text{A.N. : } \omega_1 = 9,1.10^4 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Si $\omega > \omega_1$; les portions de sinusoïdes de pentes les plus élevées sont linéarisées à la pente σ (quand la pente en valeur absolue aurait dépassé σ). Il y a triangulation de u_S .

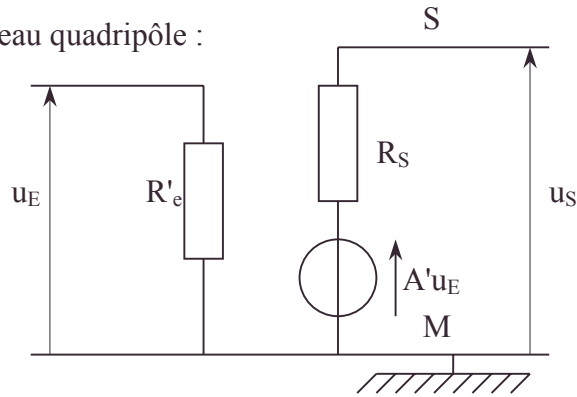


- confrontation expérimentale, graphe, impulsions d'horloge comptées en nombres proportionnels aux durées [numérisation], intégrateur électronique, pont diviseur de tension

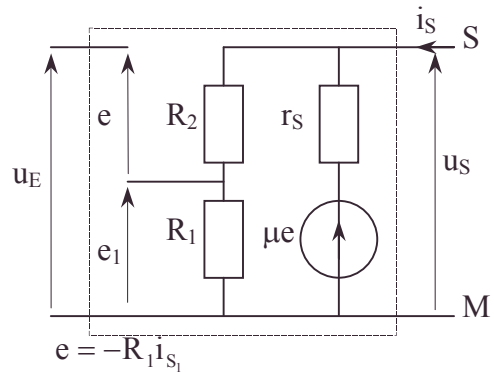
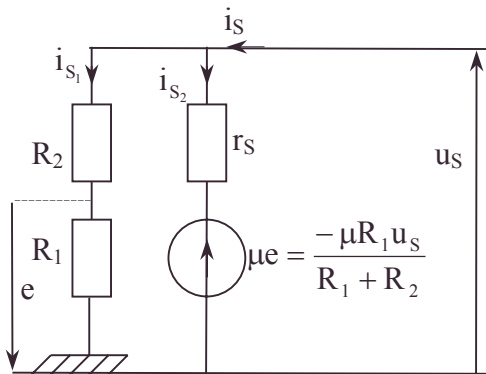


Autre méthode expérimentale : on impose un échelon de pente infinie qui permet d'atteindre $\frac{du_s}{dt}$ maximum à l'entrée et on mesure $\frac{dV_s}{dt} (\neq 0)$, éventuellement grâce à la fonction dérivation).

3.a. On a un nouveau quadripôle :



Vu le schéma précédent, la résistance de sortie entre M et S est la résistance entre M et S du dipôle quand $u_E = 0$: $e_1 = -e$; on fait entrer i_S extérieurement et $R_S = \frac{u_S}{i_S}$.



$$e = -R_1 i_{S1}$$

$$i_{S1} = \frac{u_S}{R_1 + R_2}; e = -e_1 = -\frac{R_1 u_S}{R_1 + R_2}$$

$$i_{S2} = \frac{u_S - \mu e}{r_S} = \frac{u_S}{r_S} \left(1 + \frac{\mu R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

$$i_S = i_{S1} + i_{S2};$$

$$i_S = u_S \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \left(\frac{1}{r_S} + \frac{\mu R_1}{(R_1 + R_2) r_S} \right) \right];$$

$$R_S = \frac{u_S}{i_S} = \frac{(R_1 + R_2) r_S}{r_S + R_1 + R_2 + \mu R_1} = \frac{r_S}{1 + \frac{\mu R_1 + r_S}{R_1 + R_2}}.$$

Vérifions que quand $\mu \rightarrow \infty$, $R_S \rightarrow 0$; on a un ampli de tension parfait.

b. On nomme ce modèle "passe-bas d'ordre 1" (filtre + ampli).

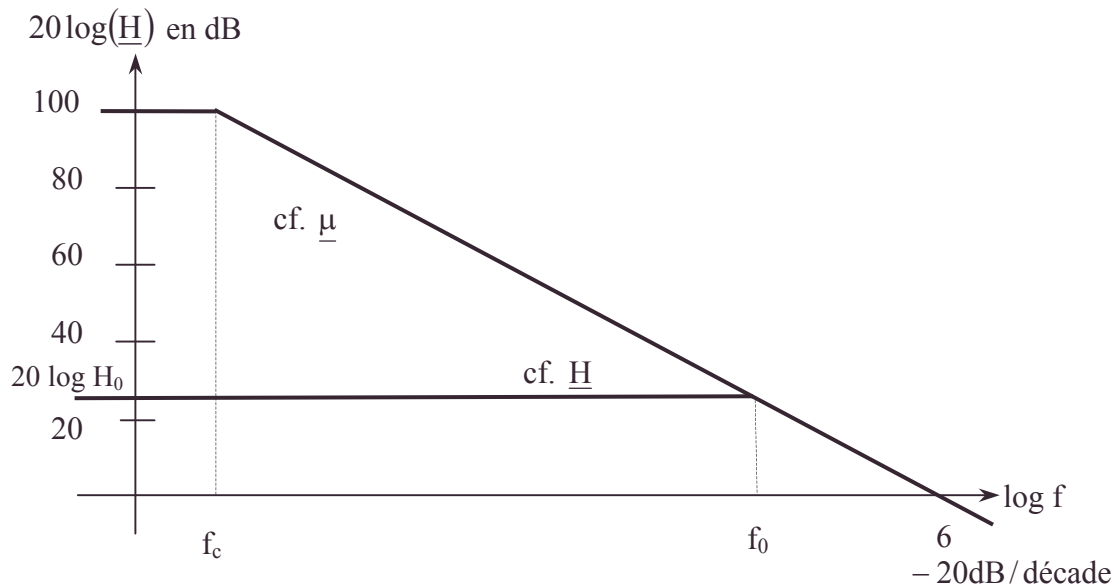
1. Vu la 1^{ère} figure du **3.a.** et $A = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$, $u_S = \mu e$,

mais $e = u_E - e_I = u_E - \frac{R_1 u_S}{R_1 + R_2}$ (cf théorie de la rétroaction).

$$\Rightarrow u_s = \mu u_E - \frac{\mu}{A} u_s \Rightarrow \frac{u_s}{u_E} = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{A}} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + j \frac{f}{f_c}}}{1 + \frac{\mu_0}{A \left(1 + j \frac{f}{f_c} \right)}} = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0}{A} + j \frac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0}{A}}}{1 + j \frac{f}{\left(1 + \frac{\mu_0}{A} \right) f_c}} \Rightarrow H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0}{A}} = \frac{\mu_0 A}{A + \mu_0} = \frac{A}{1 + \frac{A}{\mu_0}} ; f_0 = f_c \left(1 + \frac{\mu_0}{A} \right).$$

2. $A = 11$ donc $\frac{A}{\mu_0} \rightarrow 0$ et $H_0 = A$; A.N.: $H_0 = 11$; $f_0 = 9,1 \cdot 10^4$ Hz



2 passe-bas de gain max et de fréquence de coupure liés par $H_0 f_0 = \mu_0 f_c$

$$\Rightarrow \text{même asymptote quand } f \rightarrow \infty : \underline{H} \approx \underline{\mu} \text{ car } \frac{H_0}{f} = \frac{\mu_0}{f}.$$

Les limitations en fréquence du montage de la figure 2 sont dues à l'AO filtre passe-bas et en particulier à l'existence de f_0 , vu f_c .

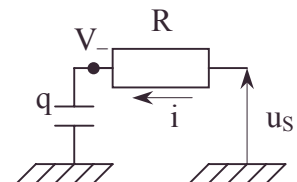
II.1.a. Soit $q_C = CV$.

Etudions la charge du condensateur : $q = CV_-$.

$$i = \frac{dq}{dt} ; V_- = u_s - Ri \Rightarrow V_- + RC \frac{dV_-}{dt} = U_{\text{sat}},$$

$$\Rightarrow V_- = U_{\text{sat}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \text{ vu } V_- = 0 \text{ à } t = 0 \text{ pour la première phase, tant que}$$

$$\varepsilon = V_+ - V_- \geq 0 \text{ avec } V_+ = V_1, \text{ vu } u_s = +U_{\text{sat}}.$$



Le basculement a lieu pour $\varepsilon = 0$, pour $t = t_1$, soit $V_1 = U_{\text{sat}} \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right)$,

$$\text{soit } t_1 = RC \ln \frac{U_{\text{sat}}}{U_{\text{sat}} - V_1}.$$

N.B. : on a alors : $V_- = V_1$.

Pour $t > t_1$, la décharge du condensateur obéit à $V_- + RC \frac{dV_-}{dt'} = -U_{\text{sat}}$;

En posant $t' = t - t_1$, $V_- = -U_{\text{sat}} + A e^{-\frac{t'}{RC}}$, avec $V_- = V_1$ par continuité de l'énergie du condensateur en $t' = 0$.

$$V_- = (V_1 + U_{\text{sat}}) e^{-\frac{t'}{RC}} - U_{\text{sat}}, \text{ tant que } \varepsilon \leq 0.$$

On a $\varepsilon = -V_1 - V_-$ et le basculement a lieu en t'_1 où $\varepsilon = 0$.

$$V_- = (V_1 + U_{\text{sat}}) e^{-\frac{t'}{RC}} - U_{\text{sat}} = -V_1 \text{ soit } t'_1 = RC \ln \frac{U_{\text{sat}} + V_1}{U_{\text{sat}} - V_1}.$$

Pour $t' > t'_1$, la charge du condensateur obéit à :

$$V_- + RC \frac{dV_-}{dt''} = +U_{\text{sat}}, \text{ en posant } t'' = t - t'.$$

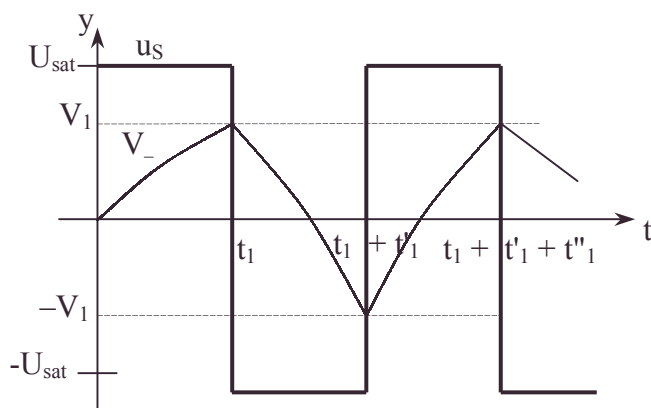
$V_- = U_{\text{sat}} + A' e^{-\frac{t''}{RC}}$ avec $V_- = -V_1$ à $t'' = 0$ ce qui est un critère de continuité de la charge.

$$V_- = U_{\text{sat}} - (U_{\text{sat}} + V_1) e^{-\frac{t''}{RC}} \text{ tant que } \varepsilon > 0.$$

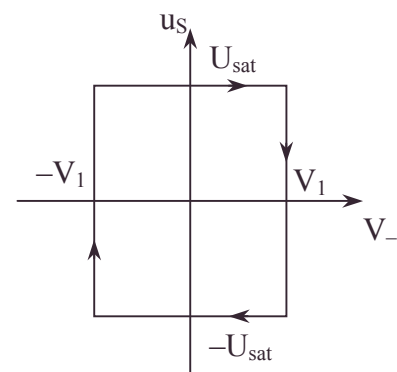
Or, $\varepsilon = V_1 - V_-$ et le basculement a lieu en t'' , où $\varepsilon = 0$.

$$-(U_{\text{sat}} + V_1) e^{-\frac{t''}{RC}} + U_{\text{sat}} = V_1 \Rightarrow t''_1 = RC \ln \frac{U_{\text{sat}} + V_1}{U_{\text{sat}} - V_1}.$$

b. $u_s = \pm U_{\text{sat}}$ a le signe de ε .



d'où :



$$\text{c. } T_0 = t'_1 + t''_1 = 2RC \ln \frac{U_{\text{sat}} + V_1}{U_{\text{sat}} - V_1} = 2RC \ln \frac{2R_1 + R_2}{R_2}.$$

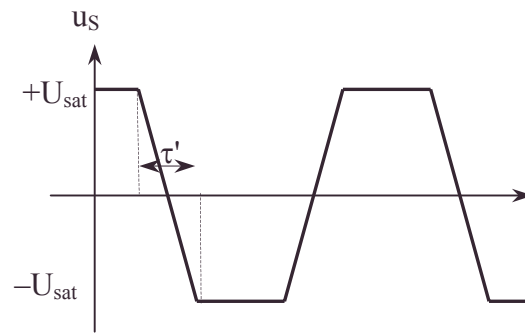
$t'_1 = t''_1$, les durées sont égales pour l'état haut et bas $\alpha = 0,5$.

$$C = \frac{T_0}{2R \ln \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_2} \right)} ; \text{ A.N. : } C = 4,9 \text{ nF}.$$

• charge du condensateur, continuité de la charge d'un condensateur, continuité de la ddp aux bornes d'un condensateur, décharge du condensateur, diagramme de Bode, fréquence de coupure

d. La dérivée $\frac{du_s}{dt}$ ne peut être infinie mais est limitée à $\pm \sigma$ d'où la durée d'une commutation $\tau' = \frac{2U_{sat}}{\sigma}$.

$$2 \frac{U_{sat}}{\sigma} < \frac{T_0}{2} \Rightarrow \sigma > \frac{4U_{sat}}{T_0}.$$

$$\sigma > 2,8 \text{ V}\mu\text{s}^{-1}.$$


2.a. On adopte la notation : $T_0 = 2RC \ln \left(1 + 2 \frac{R'_1}{R'_2} \right)$ avec $R'_1 = R_1 + kR_p$,

$$R'_2 = R_2 + (1-k)R_p.$$

$$\Rightarrow T_0 = 2RC \ln \left(1 + \frac{2(R_1 + kR_p)}{R_2 + (1-k)R_p} \right).$$

b.α. $k = 0$; $f'_0 = \frac{1}{2RC \ln \left(1 + \frac{2R_1}{R_2 + R_p} \right)}$; A.N. : $f'_0 = 63 \text{ kHz}$.

β. $k = 1$; $f''_0 = \frac{1}{2RC \ln \left(1 + \frac{2(R_1 + R_p)}{R_2} \right)}$; A.N. : $f''_0 = 27 \text{ kHz}$.

c. vu 1.a. $\forall V_1$ les durées des 2 phases successives restent égales : $\alpha = 0,5$.

3.a. D" laisse passer le courant quand $u_s = +U_{sat}$ (et non D') cf. t'_1 .

D' laisse passer le courant quand $u_s = -U_{sat}$ (et non D'') cf. t'_1 .

• pendant la phase type t'_1 , $R = R' + kR'_p$, d'où $t'_1 = C(R' + kR'_p) \ln \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right)$.

• pendant la phase type t''_1 ,

$$R = R'' + (1-k)R'_p \text{ d'où } t''_1 = C(R'' + (1-k)R'_p) \ln \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right);$$

d'où $T_0 = t'_1 + t''_1 = C(R' + R'' + R'_p) \ln \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right)$. T_0 ne dépend pas de k .

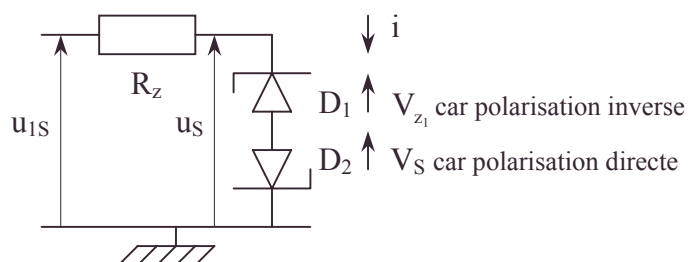
b. $\alpha = \frac{t''_1}{T_0} = \frac{R' + (1-k)R'_p}{R' + R'' + R'_p}$; A.N. : $k = 1$; $\alpha_0 = 2.10^{-2}$; $k = 0$; $\alpha_0 = 0,98$.

4. On remarque :

• $V_z > V_S$.

• Les deux diodes Zener montées en inverse en série (avec $i \neq 0$) sont avec des d.d.p. différentes caractérisées par V_z et V_S .

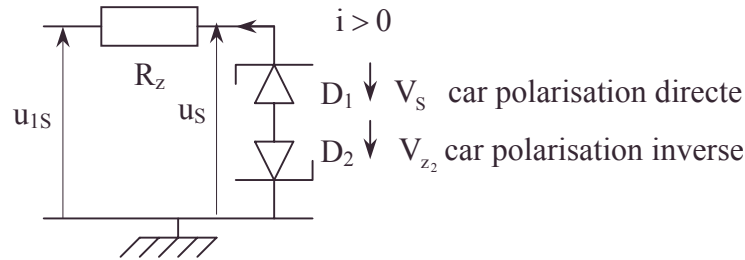
a. Si $u_{1S} = U_{sat}$; voir figure ci-contre.



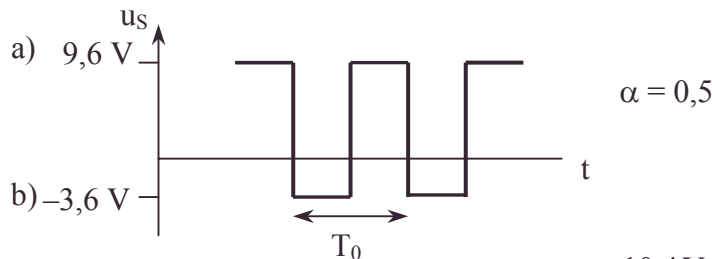
• courbes synchronisées, durée d'une commutation

$$\Rightarrow u_S = V_{z_1} + V_S = 9,6 \text{ V} ; R_Z i = u_{1S} - u_S = 4,4 \text{ V} . \quad i > 0 .$$

b. Si $u_{1S} = -U_{\text{sat}}$



$$\Rightarrow u_S = -(V_S + V_{z_2}) = -3,6 \text{ V} ; R_Z |i| = u_{\text{sat}} + u_S = 10,4 \text{ V} .$$



c. $|i|$ est maximale pour $u_{1S} = -U_{\text{sat}} . R_{Z\text{min}} = \frac{10,4 \text{ V}}{I_{\text{max}}} = 1040 \Omega \Rightarrow R_Z > 1040 \Omega .$

III.1.a. Ecrivons le théorème de Millman : $V_- = V_+ = 0 = \frac{\frac{U}{R} + \frac{V_A}{R}}{\frac{2}{R}} \Rightarrow V_A = -U .$

On a multiplié par -1 : (I) est un inverseur.

$$\mathbf{b.} \quad V_- - V_B = \frac{q}{C} = \int_0^t \frac{i \, dt}{C} = -V_B ; \text{ or } \frac{V_e}{R} = i ;$$

$$V_B = \frac{-\int_0^t V_e \, dt}{RC} : \text{ (II) est intégrateur.}$$

c. Si $V_B > 0 ; \varepsilon < 0 ; V_D = -U_{\text{sat}} .$

Si $V_B < 0 ; \varepsilon > 0 ; V_D = U_{\text{sat}} .$

Fonction : on compare V_B à 0 ; $V_D = -U_{\text{sat}}$.(signe V_B).

2.a. $t < 0 ; V_B = 0 ; t_1 \geq t \geq 0 ; K_1 \text{ fermé} \Rightarrow V_e = V_A = -U .$

$$K_2, K_3 \text{ ouverts} \Rightarrow V_B = -\int_0^t \frac{U}{RC} \, dt = \frac{U t}{RC} .$$

$$t = t_1 ; V_B = \frac{U N_1 T_0}{RC} ; q_{t_1} = -C V_B = -\frac{U N_1 T_0}{R} .$$

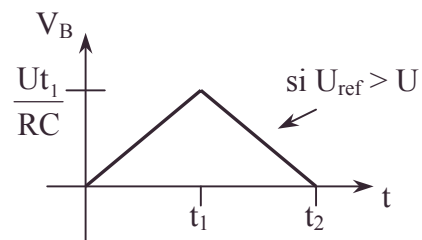
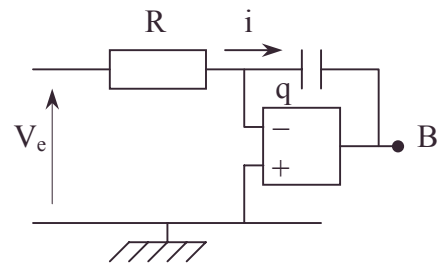
$$t > t_1 ; K_2 \text{ fermé} \Rightarrow V_e = U_{\text{ref}} ; q = q_{t_1} + \int_{t_1}^t \frac{V_e}{RC} \, dt \Rightarrow V_B = -\frac{q}{C} = \frac{U t_1}{RC} - \frac{(t - t_1) U_{\text{ref}}}{RC} ;$$

Quand V_B change de signe, V_D change de signe.

Ce changement a lieu pour $0 = \frac{U t_1 - (t_2 - t_1) U_{\text{ref}}}{RC}$

$$\mathbf{b.} \quad t_2 - t_1 = \frac{U}{U_{\text{ref}}} t_1 = \frac{U}{U_{\text{ref}}} N_1 T_0 .$$

c. Pour avoir $t_2 < 2t_1$, il faut $t_2 - t_1 < t_1 .$



soit $\frac{U}{U_{\text{ref}}} < 1$; cf. figure ; $U_{\text{ref}} > U$.

d. $V_B < U_{\text{sat}}$: on ne peut choisir t_1 aussi grand que l'on veut, de même N_1 .

3.a. Nombre réel de périodes : $\frac{t_2 - t_1}{T_0} = \frac{U}{U_{\text{ref}}} N_1 = N_2$.

b. $\log N_2 = \log U + \log \frac{N_1}{U_{\text{ref}}} = p + \log U$.

$N_2 = U \cdot 10^p$ cf. notation scientifique si $1V < U < 10V$; p représente la puissance de 10 entière liée aux décades des calibres d'appareils de mesure classiques.

Si N' = partie entière de N_2 : $N_2 - 1 \leq N' \leq N_2$.

c. La régularité des impulsions est la qualité essentielle dans la fiabilité des mesures : T_0 doit être confiné dans un créneau étroit ce qui n'a rien à voir avec la précision effective de la mesure de T_0 . La précision relative de la mesure peut être définie sur \mathbb{R} par $\frac{N_2}{N_2 - N'}$; elle est d'autant plus grande que N_2 est grand, autrement dit que T_0 soit plus petit.

d. Vu **a.** et **b.** $N' = 243$ pour $U = 2,43V$; $N' = 55$ pour $U = 0,552V$.

$$4.a.1. \left\langle v^2 \right\rangle \frac{1}{T} \int_0^T (v_0 + v_a)^2 dt = v_0^2 + \frac{2}{T} v_0 \int_0^T \underbrace{V_a}_{=0} dt + V_a^2 \text{eff} ; V_{\text{eff}}^2 = v_0^2 + V_{a\text{eff}}^2$$

$$2.\alpha. v_0 = 0 ; V_a^2 = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt = E^2 ; V_{a\text{eff}} = E \Rightarrow V_{\text{eff}} = E.$$

β . $V_0 = E$; la définition de v_a permet de voir $v_a = v_1$;

$$V_a^2 = E^2 ; V_{a\text{eff}} = E \Rightarrow V_{\text{eff}} = E\sqrt{2}.$$

La méthode directe donne : $V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^T 4E^2 dt} = E\sqrt{2}$.

$$b.1. V_{A'} = 2 \frac{U_{\text{eff}}^2}{E_0} \cos^2 \omega t \Rightarrow \langle V_{A'} \rangle = \frac{U_{\text{eff}}^2}{E_0} \neq 0.$$

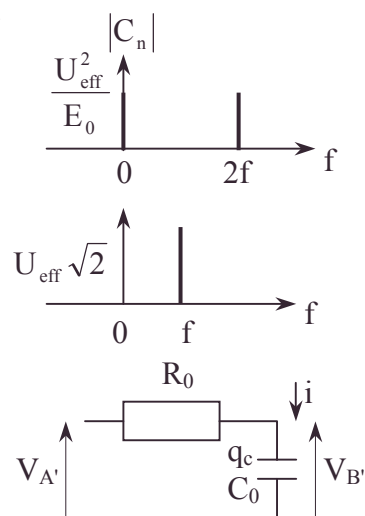
$V_{A'} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{E_0} (1 + \cos 2\omega t)$ de spectre à deux composantes égales dépendantes de E_0 pour 0 et $2f$ à comparer à celui de $v = \sqrt{2} U_{\text{eff}} \cos \omega t$ à une seule composante pour f .

$$2. \frac{dq}{dt} = i \text{ avec } q_c = C_0 V_{B'}.$$

$$\text{Or, } V_{A'} - V_{B'} = R_0 i \Rightarrow V_{A'} = V_{B'} + R_0 C_0 \frac{dV_{B'}}{dt}$$

Soit, en notation complexe,

$$\underline{V_{A'}} = \underline{V_{B'}} (1 + j\omega R_0 C_0) \Rightarrow \frac{\underline{V_{B'}}}{\underline{V_{A'}}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{R_0 C_0}, \text{ la pulsation de coupure.}$$



• élévation au carré par un multiplieur, fonction MRS [mean square root][pour voltmètre numérique], graphe, intégrateur électronique, maximum, Millman[théorème de], multiplieur, notation scientifique et numérisation, période, régularité des impulsions [numérisation], spectre

Pour que $V_{B'} = \langle V_{A'} \rangle$ constante, il faut éliminer la pulsation 2ω ; cela est fait si $\omega_0 < 2\omega$ soit $1 < 2\omega R_0 C_0$ en supposant le filtrage parfait (sinon on peut prendre $\omega_0 = \frac{2\omega}{10}$).

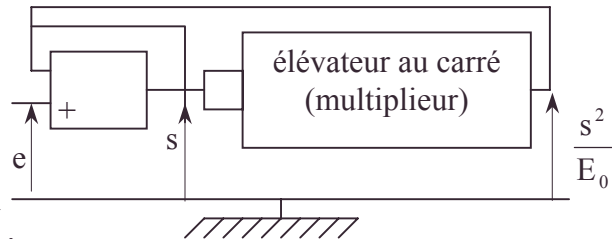
3. En supposant la rétroaction compatible avec le régime linéaire :

$$e = s' ; e' = s \text{ or } s' = f(e') \Rightarrow e = f(s) \Rightarrow s = f^{-1}(e).$$

La fonction inverse de l'extraction de la racine carrée est l'élévation au carré (cf. multiplieur).

Ainsi,

$$f(x) = \frac{x^2}{E_0} = y \Rightarrow x = \sqrt{yE_0} \Rightarrow s = \sqrt{eE_0}.$$



4. de par la figure 11 :

a. si $v = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$ et $2\omega > \omega_0 = \frac{1}{R_0 C_0}$,

$$V_{A'} = 2 \frac{U_{\text{eff}}^2}{E_{0_1}} \cos^2 \omega t \text{ cf. 1}^{\text{er}} \text{ multiplieur} \Rightarrow V_{B'} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{E_{0_1}} \Rightarrow U = U_{\text{eff}} \sqrt{\frac{E_{0_2}}{E_{0_1}}} \text{ vu 3.}$$

Simplification si $E_{0_1} = E_{0_2}$; $U = U_{\text{eff}}$.

b. Soit $v = v_0 + v_a$, $v_a = \sum_1^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$, développement en série de Fourier

de fondamental ω ; si $\omega > \omega_0 = \frac{1}{R_0 C_0}$ assure le filtrage passe bas, de $\frac{v^2}{E_{0_1}}$ ne passe à

travers le filtre passe bas que $\frac{V_{\text{eff}}^2}{E_{0_1}}$ car tous les termes variables sont éliminés

$$\Rightarrow U = V_{\text{eff}} \sqrt{\frac{E_{0_2}}{E_{0_1}}} \text{ si les deux multiplieurs sont différents.}$$

5.a. Reprenons l'étude faite en III.1.2..

$t \leq 0$; $q_c = 0$; $0 < t < t_1$: K_1 fermé, K_2 et K_3 ouverts.

Phase 1 : $V_- = V_+ = \frac{U_{\text{ref}}}{2}$.

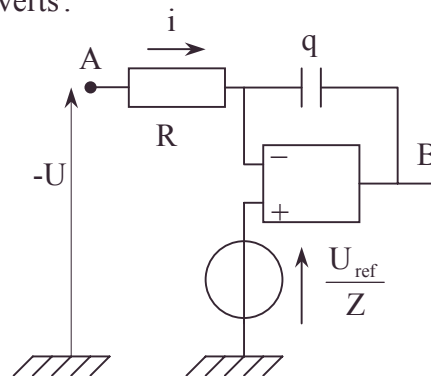
$$Ri = -U - \frac{U_{\text{ref}}}{2}.$$

$$q = \int_0^t i dt = -\left(u + \frac{U_{\text{ref}}}{2}\right) \frac{t}{R} = \left(\frac{U_{\text{ref}}}{2} - V_B\right) C.$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{U_{\text{ref}}}{2} + \left(U + \frac{U_{\text{ref}}}{2}\right) \frac{t}{RC}.$$

Phase 2 : K_2 fermé, K_1 ouvert : $V_A = U_{\text{ref}}$, K_3 ouvert.

$$V_- = V_+ = \frac{U_{\text{ref}}}{2} ; Ri = +U_{\text{ref}} - \frac{U_{\text{ref}}}{2} = \frac{U_{\text{ref}}}{2} ; i = \frac{dq}{dt}.$$



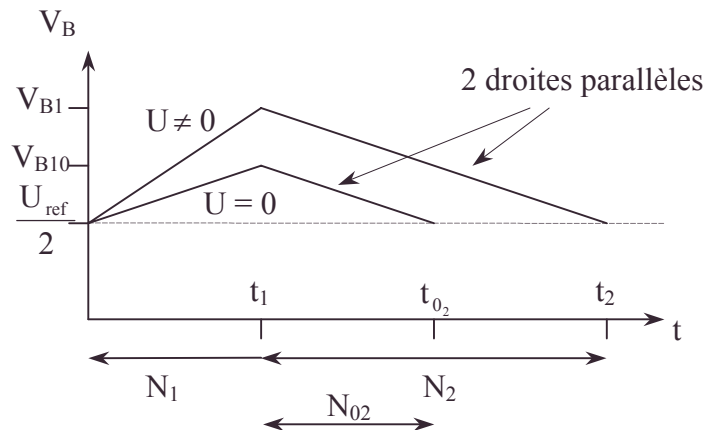
$$q = -\left(U + \frac{U_{\text{ref}}}{2}\right) \frac{t_1}{R} + \frac{U_{\text{ref}}}{2R} (t - t_1) = C \left(\frac{U_{\text{ref}}}{2} - V_B \right).$$

$$V_B = \frac{U_{\text{ref}}}{2} + \left(U + \frac{U_{\text{ref}}}{2}\right) \frac{t_1}{RC} - \frac{U_{\text{ref}}}{2RC} (t - t_1) = \frac{U_{\text{ref}}}{2} + \frac{(U + U_{\text{ref}})}{RC} N_1 T_0 - \frac{U_{\text{ref}}}{2RC} t.$$

b. Si $U = 0$ Phase 1 : $V_B = \frac{U_{\text{ref}}}{2RC} t + \frac{U_{\text{ref}}}{2}$;

Phase 2 : $V_B = -\frac{U_{\text{ref}}}{2RC} t + \frac{U_{\text{ref}}}{RC} N_1 T_0 + \frac{U_{\text{ref}}}{2}$.

Graphe 5.a.b.



Vu le graphe et la symétrie $\Rightarrow N_{02} = N_1$

Il faudra introduire aussi $\frac{U_{\text{ref}}}{2}$, générateur de tension sur la borne V_+ de l'AO entre B et D.

c. $V_B = \frac{U_{\text{ref}}}{2}$ pour $t_2 = 2 \frac{(U + U_{\text{ref}})}{U_{\text{ref}}} N_1 T_0 = (N_1 + N_2) T_0 \Rightarrow U = \frac{U_{\text{ref}}}{2} \left(\frac{N_2 - N_1}{N_1} \right).$

$T_0(N_2 - N_1)$ correspond à la durée commençant en t_{02} , référence connue $t_{02} = 2N_1 T_0$. On peut alors commencer l'enregistrement pour avoir ainsi un nombre proportionnel à U .

6.1.8.2. Convertisseur analogique numérique (C.A.N.)

Notes préliminaires

- Le plus grand soin doit être apporté à la rédaction. On numéroteira clairement les questions et l'on respectera scrupuleusement les notations données sur les figures et dans l'énoncé.

- Tous les résultats seront exprimés sous forme littérale avant les applications numériques.

- Les approximations faites seront clairement explicitées et légitimées.

On considère le montage ci-dessous et on veut calculer, selon la position des commutateurs B_j , les caractéristiques du générateur de Thévenin apparaissant entre la masse et P_n où la tension est V_n . Ces commutateurs peuvent, indépendamment les uns des autres, relier les résistances R dont ils représentent les extrémités au potentiel de valeur $(b_j \cdot E)$ où b_j est un coefficient qui vaut :

- $b_j = 0$ lorsque le commutateur est à la masse.
- $b_j = 1$ lorsque le commutateur est au potentiel fixe E .

Lorsqu'un commutateur est en service, il occupe l'une des deux positions précédentes. Lorsqu'il n'est pas en service, l'extrémité de la résistance R correspondante est "en l'air" c'est-à-dire non reliée.

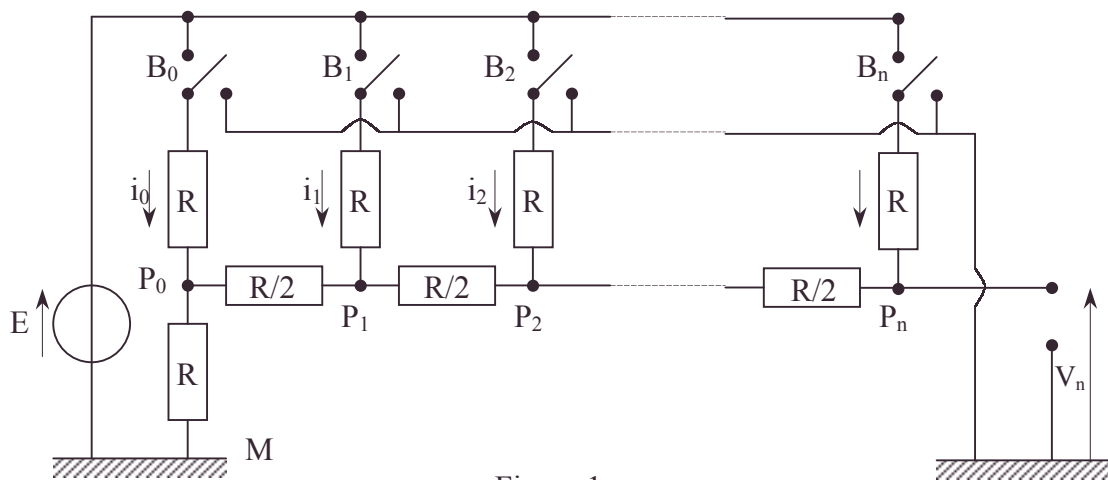


Figure 1

1. Considérer d'abord le commutateur B_0 seul en service et en déduire les caractéristiques du générateur de Thévenin apparaissant entre P_0 et la masse.

2. Mettre ensuite B_1 en service.

• Donner un nouveau schéma de la partie du montage en service, en faisant apparaître la source E et le générateur de Thévenin précédent.

• En déduire les caractéristiques du générateur de Thévenin apparaissant entre P_1 et la masse.

3. • Calculer ensuite la tension V_n et la résistance interne du générateur apparaissant entre P_n et la masse lorsque les n commutateurs sont en service.

• Montrer que la tension V_n est proportionnelle au nombre binaire exprimé par la suite des b_n à savoir: $(b_n \cdot 2^n + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0)$.

4. On utilise maintenant un amplificateur opérationnel de tension idéal selon le schéma ci-dessous : (figure 2).

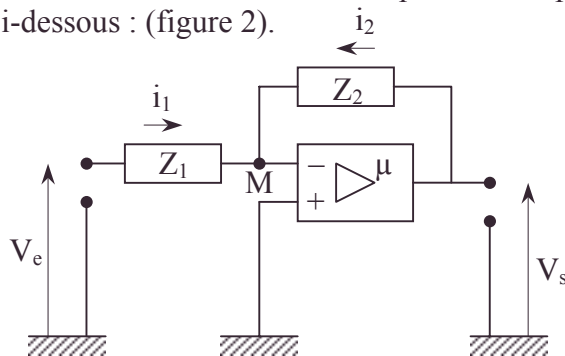


Figure 2

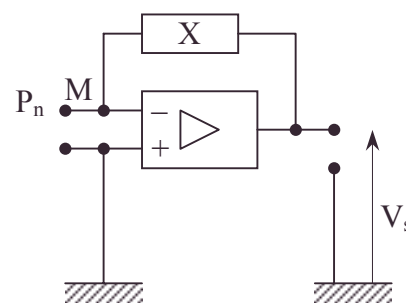


Figure 3

• Rappeler les propriétés d'un tel amplificateur opérationnel seul, en régime linéaire.

• Pourquoi peut-on appeler M "masse virtuelle" et que pouvez-vous en déduire sur les intensités i_1 et i_2 dans le montage ci-dessus ?

• Montrer que le gain en tension A_V est alors indépendant de celui $\mu \neq \infty$ mais grand de l'amplificateur seul, en boucle ouverte.

5. On introduit directement en M , sur cet amplificateur opérationnel, la sortie P_n du montage précédent. Z_2 est une résistance X (Figure 3). On ne branche pas V_e sur Z_1 .

– Calculer X pour que la tension de sortie V_s soit, en valeur absolue, au plus égale à une valeur donnée U du domaine linéaire de l'amplificateur.

• amplificateur opérationnel, commutateur, masse, masse virtuelle, nombre binaire [numérisation], pont diviseur de tension

CCP ; Durée 1h30

Corrigé

1. – Si $b_0 = 1$, on a un pont diviseur de tension car rien n'est branché en P_n .

$$V_{P_0M} = \frac{E}{2} \text{ et en court-circuitant } E, \mathcal{R}_{0eq} = \frac{R}{2} ;$$

$$- \text{ Si } b_0 = 0, V_{P_0M} = 0 ; \text{ on écrira } V_{P_0M} = b_0 \frac{E}{2} ;$$

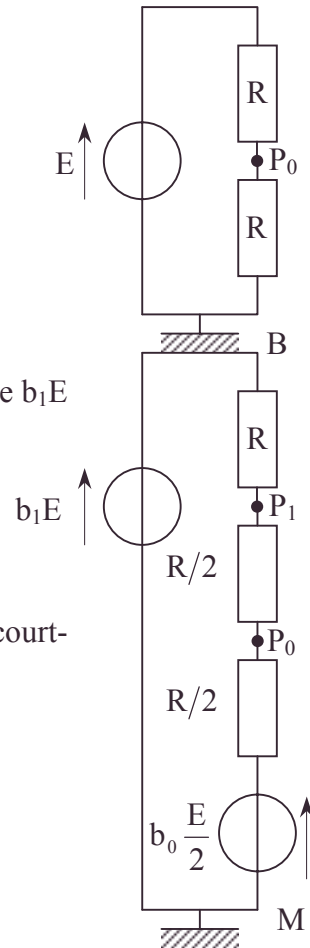
f.é.m. du générateur de Thévenin.

2. On a $b_1 = 1$.

On a un pont diviseur de tension et P_1 est le point milieu entre b_1E et $b_0 \frac{E}{2}$.

$$V_{P_1M} = \frac{b_1E + b_0 \frac{E}{2}}{2} : \text{ f.é.m. du générateur de Thévenin.}$$

La résistance équivalente entre P_1 et M (obtenue en court-circuitant les f.é.m.) vaut : $\mathcal{R}_{1eq} = \frac{R}{2}$.



3. Démonstration par récurrence.

Admettons le résultat à l'ordre $n-1$ (tiré de 1. et 2. et de l'énoncé) :

$$V_{P_{n-1}M} = (b_{n-1}2^{-(n-1)} + b_{n-2}2^{-(n-2)} \dots + b_12^1 + b_02^0) \frac{E}{2^n} \text{ et } \mathcal{R}_{n-1eq} = \frac{R}{2}.$$

Pour l'ordre n , on a le schéma suivant :

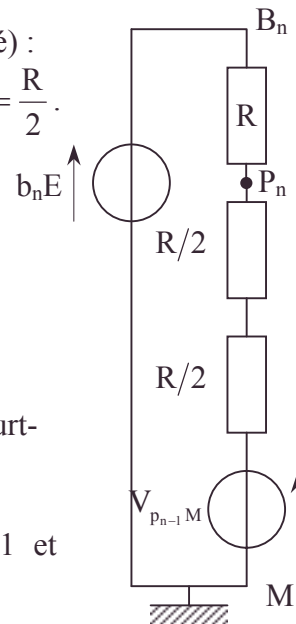
P_n est le point milieu entre b_nE et $V_{P_{n-1}M}$;

$$V_{P_nM} = \frac{b_nE}{2} + \frac{(b_{n-1}2^{n-1} + \dots b_12^1 + b_02^0) E}{2^{n+1}},$$

$$\text{d'où : } V_{P_nM} = (b_n2^n + b_{n-1}2^{n-1} + \dots b_12^1 + b_02^0) \frac{E}{2^{n+1}}.$$

La résistance équivalente entre P_n et M (obtenue en court-circuitant les f.é.m.) vaut comme en 1. et 2. : $\mathcal{R}_{neq} = \frac{R}{2}$.

L'expression étant vraie à l'ordre 1, supposée à l'ordre $n-1$ et démontrée à l'ordre n est vraie.



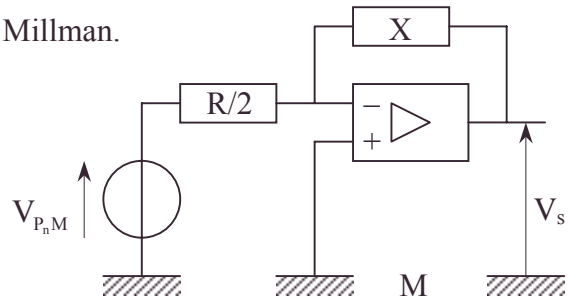
4.a. $V_+ - V_- = 0$; $i_+ = i_- = 0$

b. $V_+ = 0$ permet de dire que le point est une masse, mais virtuelle car le contact n'est pas direct par un fil mais par un composant actif réagissant à d'éventuelles commandes.

c. $i_1 = -i_2$; $V_e = Z_1 i_1$; $V_s = Z_2 i_2 \Rightarrow A_v = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_2}{Z_1}$ indépendant de μ .

5. $V_- = 0 \Rightarrow 0 = \frac{V_s}{X} + \frac{V_{P_n M}}{\frac{R}{2}}$ cf. théorème de Millman.

$$V_s = -\frac{X}{\frac{R}{2}} V_{P_n M} \text{ avec } |V_s| < U ;$$



Par remplacement,

$$X \leq \frac{RU2^{n+1}}{E(2^n b_n + \dots b_1 2^1 + b_0 2^0)}$$

$\forall b_j$ en particulier quand $b_j = 1$, $\forall j$

$$X \leq \frac{RU2^{n+1}}{E(2^n + \dots 2^1 + 2^0)} \Rightarrow X \leq \frac{RU}{2E(1 - 2^{-(n+1)})}.$$

A.N. : pour $n = 8$ (cf. 8 bits) $2^{-9} = 2.10^{-3}$

$$\text{Pour } n = 16 \quad 2^{-17} = 7,6.10^{-6} \Rightarrow X \leq \frac{RU}{2E}.$$

6.1.8.3. Simulation de la résonance d'un pendule pesant O.C.T. et échantillonneur

On se propose dans cette partie de décrire un dispositif électrique utilisable pour simuler l'excitation forcée d'un pendule pesant. Pour étudier les propriétés de chacun des différents montages auxquels ce dispositif fait appel, on applique entre les bornes d'entrée E_1 et E_2 d'un montage donné une différence de potentiel (d.d.p.) $V_E = V_{E_2} - V_{E_1}$ et on mesure entre les bornes de sortie S_1 et S_2 la différence de potentiel $V_s = V_{S_2} - V_{S_1}$.

Les montages font intervenir des amplificateurs opérationnels idéaux, dont les principales propriétés sont les suivantes :

- Aucun courant ne circule dans les voies d'entrée $+$ et $-$, ce qui assure (voir figure 1a.) $i_+ = i_- = 0$;

- Le gain G de l'amplificateur, paramètre qui relie la d.d.p. entre la borne de sortie S et la masse à la d.d.p. susceptible d'exister entre les bornes $+$ et $-$ par $V_s = G(V_+ - V_-)$ est supposé infini, de sorte qu'on est toujours dans l'une des deux situations suivantes :

- soit $V_+ = V_-$;

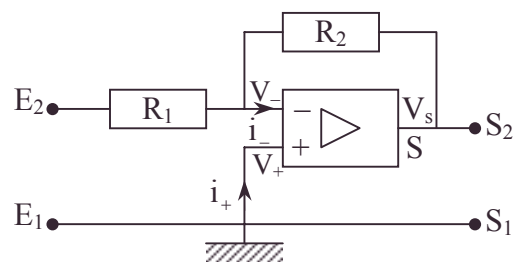


Figure 1a

• alimentation, amplificateur opérationnel, INT intégrateur, MID module inertiel et dissipatif, résonance

• soit l'amplificateur est saturé, V_S prenant une valeur constante égale à $\pm E$, E étant par hypothèse la valeur (positive) de la tension d'alimentation des amplificateurs opérationnels ; le signe de V_S coïncide alors avec celui de la d.d.p. $(V_+ - V_-)$, quand elle n'est pas nulle.

1. Module inertiel et dissipatif

a. Pour le montage représenté sur la figure 1a., exprimer V_S en fonction de V_E , R_1 , R_2 .

b. On considère le montage "INT" de la figure 1b. Exprimer le courant dans la capacité C_1 en fonction de \dot{V}_S .

Exprimer $V_S(t)$ sous forme intégrale en fonction de V_E , R_1 , C_1 .

c. Pour le montage représenté sur la figure 1c., écrire l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ (Sortie), $v_a(t)$ (Entrée), et R , R' , C . On repérera dans la suite ce montage par le bloc "M.I.D."

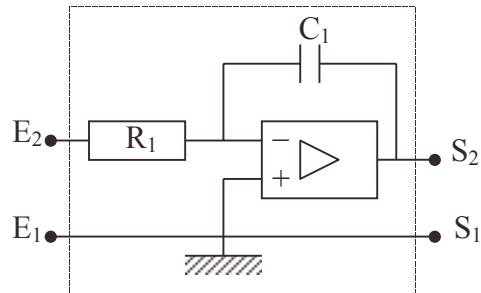


Figure 1b

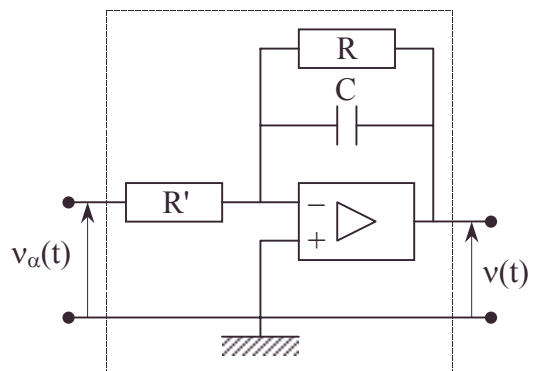


Figure 1c "M.I.D."

2. Oscillateur commandé en tension.

a. On relie l'entrée $V_E(t)$ du montage de la figure 1b. à un générateur délivrant une tension $V_A(t)$. On définit $\tau_1 = R_1 C_1$. On suppose $V_A(t) = V_0$, constante positive. Si à $t = 0$, on a $V_S(t) = 0$, comment s'exprime V_S en fonction de t ?

b. On considère le montage de la figure 2.a.

α. Pourquoi l'amplificateur opérationnel ne peut-il fonctionner dans un régime tel que $V_+ = V_-$?

Discuter les valeurs possibles de V_S en fonction des valeurs de V_E . Tracer l'allure complète de la caractéristique " V_S en fonction de V_E " de ce montage.

Justifier la dénomination "comparateur à hystérésis" pour "COMP".

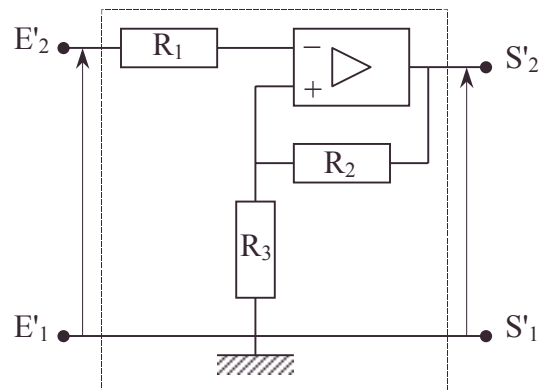
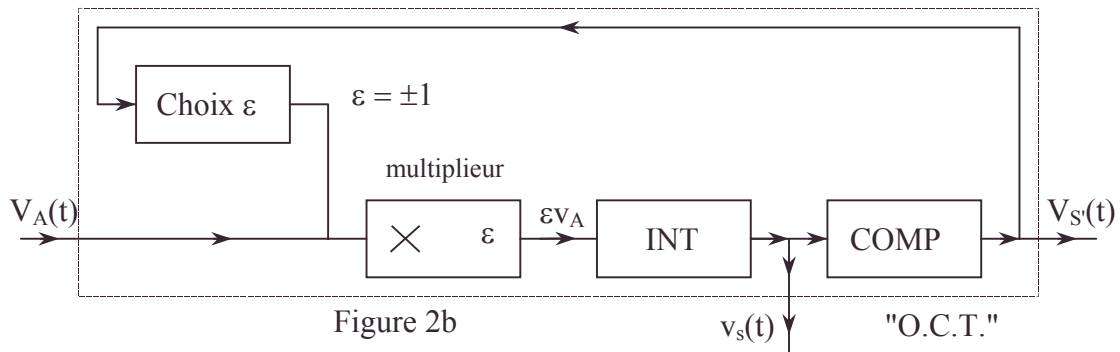


Figure 2a "COMP"

β. Si on relie l'entrée $V_E(t)$ à la sortie $V_S(t)$ du montage du 2.a. et si, à $t = 0$, on a $V_S(t) = -E$, montrer que $V_S(t)$ reste égal à $-E$ jusqu'à un instant t_c que l'on précisera.

On admettra qu'alors $V_S(t)$ devient égal à $+E$ en un temps très court devant t_c .

c. On intercale entre la source d'alimentation $V_A(t)$ de 2.a. et l'entrée $V_E(t)$ du montage 2.a. un dispositif multipliant la tension par la constante $\varepsilon = \pm 1$. Le choix de ε dépend du signe de la sortie $V_S(t)$ du comparateur (Figure 2b.).



1. Comment faut-il choisir le signe du produit $\varepsilon V_S'$ pour obtenir une variation périodique des tensions $V_S(t)$ et $V_S'(t)$?

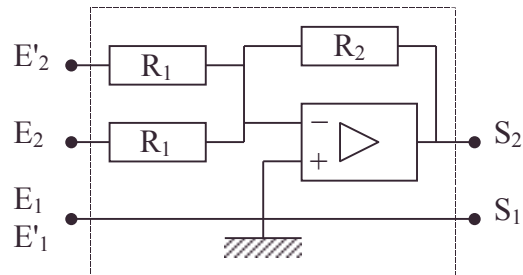
2. Représenter graphiquement dans cette hypothèse, l'allure des variations de V_S et V_S' .

3. Calculer la fréquence $\tilde{\nu}$ de ces deux signaux.

Comment varie-t-elle avec V_0 ? Justifier le nom donné au montage, "Oscillateur Commandé en Tension" : "O.C.T.".

3. Sommateur : "SOMM".

Déduire de 1.a. l'expression de V_S en fonction de V_E et $V_{E'}$ pour le montage de la figure 3.



4. Echantillonneur – bloqueur

On suppose, dans cette question, que la tension de commande du bloc O.C.T. (étudié au 2.) fait intervenir, outre la tension constante $V_0 > 0$, une composante variable notée $v(t)$. Les sources correspondant à ces deux composantes peuvent, par exemple, avoir été associées avant l'entrée sur l'O.C.T. à l'aide d'un sommateur du type SOMM décrit au 3.

a. Préciser les limitations à imposer à $v(t)$ pour ne pas perturber le fonctionnement de l'O.C.T.

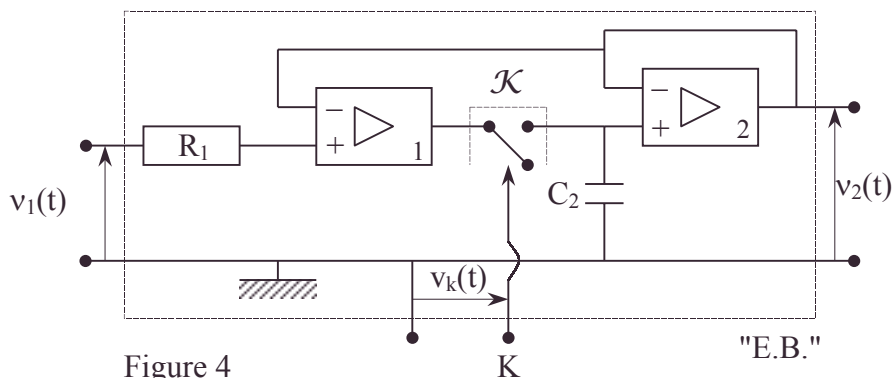
b. Le signal $v_S(t)$ obtenu n'est plus périodique .

On appelle t_1, \dots, t_n, \dots la suite des instants marquant les commutations successives du comparateur de $v_S' = -E$ à $v_S' = +E$ (dans le sens $-E \rightarrow +E$).

Montrer que : $k \int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t) dt + (2\pi \tilde{\nu})(t_{n+1} - t_n) = 2\pi$, où le paramètre $\tilde{\nu}$ a été calculé au

2.c. et où k est une constante dont on donnera l'expression.

c. On considère le montage de la figure 4, où \mathcal{K} est un interrupteur.



• commande d'interrupteur par OCT, commutations, comparateur, détection d'un flanc montant de signal, échantillonnage [numérisation], échantillonneur bloqueur [numérisation], interrupteur, sommateur SOMM

Corrigé

1.a.α. $V_- = V_+ = 0$; le théorème de Millman appliqué en $V_- = 0$ donne :

$$\frac{V_S}{R_2} + \frac{V_E}{R_1} = 0 ; \quad V_S = -\frac{R_2}{R_1} V_E .$$

β. Cas de la saturation :

$$(\text{Par continuité}) \quad V_S = \pm E = -\frac{R_2}{R_1} V_{E \text{ lim}} ;$$

on voit pour $|V_E| \geq \frac{R_1}{R_2} E : |V_S| = E$.

b. $i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_E}{R_1} = -C_1 \frac{dV_S}{dt}$ (régime linéaire).

$$V_S(t) = V_S(0) - \frac{1}{R_1 C} \int_0^t V_E dt .$$

c. $i = i_1 + i_2$ se transcrit :

$$\text{soit : } \frac{v_\alpha}{R'} = -\frac{v}{R} - C \frac{dv}{dt} ;$$

$$RC \frac{dv}{dt} + v = -\frac{R}{R'} v_\alpha .$$

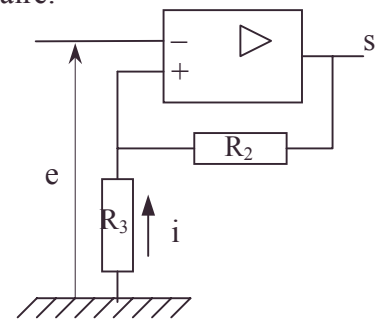
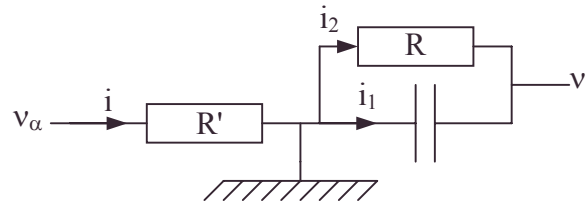
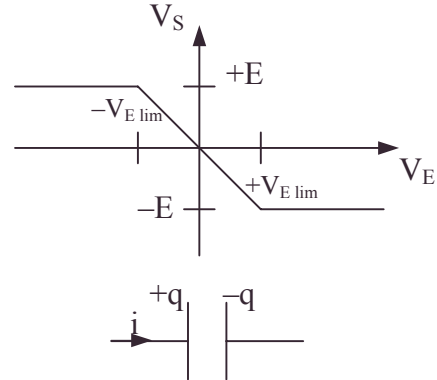
2.a. 1.b. $\Rightarrow V_S(t) = -\frac{1}{\tau_1} \int_0^t V_A dt = -V_0 \frac{t}{\tau_1}$ en régime linéaire.

b.1.α. Considérons le montage ci-contre :

– En régime linéaire : $V_- = V_+ = e = -R_3 i$;

$$\text{or, } s = -(R_2 + R_3) i = \frac{(R_2 + R_3) e}{R_3} ;$$

$$s = \frac{e}{\beta} \text{ avec } \beta = \frac{R_3}{R_2 + R_3} > 0 .$$



D'après le cours sur la contre-réaction, le bouclage devrait être sur la borne inverseuse, car sinon $1 + "G" \beta = 0$ est possible.

Il y a donc instabilité, et on atteint la saturation. On n'a donc pas $V_+ = V_-$.

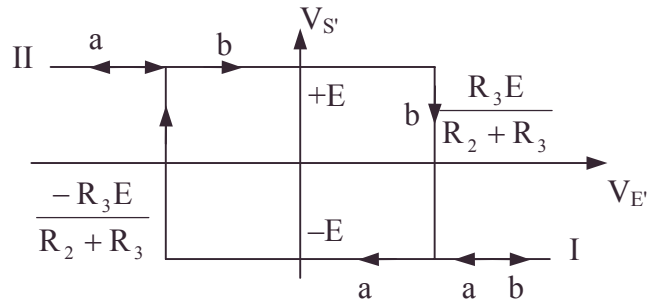
β. • $V_+ - V_- > 0 \Leftrightarrow V_{S'} = +E ; V_+ = \frac{R_3 V_{S'}}{R_2 + R_3} ; V_- = V_{E'} ;$

$$\text{soit } \frac{R_3 E}{R_2 + R_3} > V_{E'} \text{ pour } V_{S'} = E .$$

Parallèlement : $V_+ - V_- < 0 \Leftrightarrow V_{S'} = -E ; V_+ = \frac{-R_3 E}{R_2 + R_3} ; V_- = +V_{E'} ,$

$$V_{E'} > \frac{-R_3 E}{R_2 + R_3} \text{ pour } V_{S'} = -E .$$

On vérifie le passage a pour $V_{E'}$ décroissant de I à II et le passage b pour $V_{E'}$ croissant de II à I.



γ. On compare $V_{E'}$ à 2 valeurs, d'où le nom de comparateur. La caractéristique rappelle le cycle d'hystérésis des matériaux magnétiques : on a un comparateur à hystérésis.

δ. On a : $V_{E'} = -V_0 \frac{t}{\tau_1}$ et à $t = 0$: $V_{S'} = -E$.

D'après le parcours de I à II, $V_{S'} = -E$ jusqu'à $V_{E'} = \frac{-R_3}{R_2 + R_3} E$;

Soit pour : $t_c = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{E}{V_0} \tau_1$.

c.1.● Hypothèse $\varepsilon V_{S'} > 0$:

Soit en $t = 0$: $V_{S'} = -E \Rightarrow \varepsilon = -1$ et $V_{E'} = \frac{-1}{\tau_1} \int_0^t (\varepsilon V_A) dt = + \frac{V_0}{\tau_1} t > 0$.

$V_{E'}$ croissant, $V_{S'}$ reste égal à $-E$ dès que $V_{E'} > \frac{-R_3 E}{R_2 + R_3}$.

Rien ne peut changer (d'après la figure).

• Hypothèse $\varepsilon V_{S'} < 0$:

Soit en $t = 0$, $V_{S'} = -E \Rightarrow \varepsilon = +1$; $V_{E'} = \frac{-V_0 t}{\tau_1}$, lorsque $t = t_c + 0$ il y a basculement,

$V_{S'} = +E$. Alors $\varepsilon = -1$ et $V_{E'} = V_{E'}(0) - \frac{1}{\tau_1} \int_0^{t'} \varepsilon V_0 dt'$ avec $t' = t - t_c$.

$$V_{E'} = \frac{V_0}{\tau_1} (t - t_c) - \frac{R_3 E}{R_2 + R_3} = \frac{V_0 t}{\tau_1} - \frac{2R_3 E}{R_2 + R_3}.$$

Ainsi, $V_{E'}$ augmente jusqu'à $V_{E'} = \frac{R_3 E}{R_2 + R_3}$ où il y a basculement, soit pour $t = 3 t_c$

alors vu le basculement $V_{S'} = -E$.

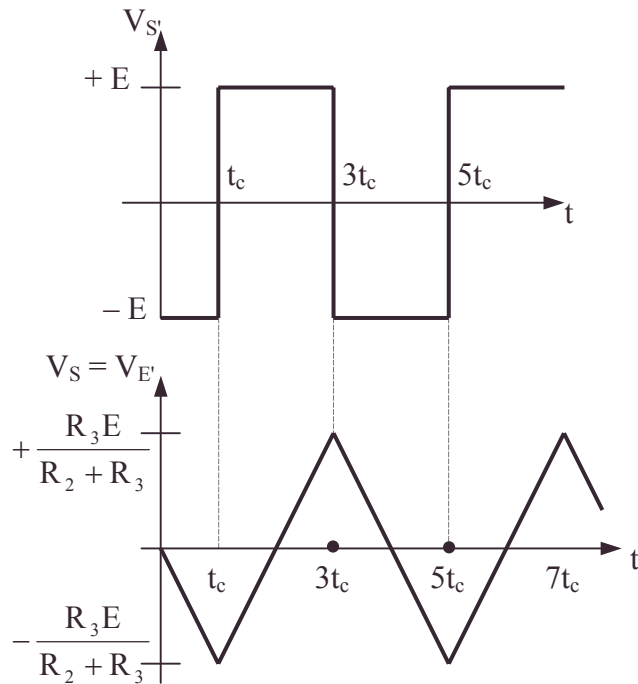
Et tout recommence :

$$V_{E'} = -\frac{V_0}{\tau_1} (t - 3t_c) + \frac{R_3 E}{R_2 + R_3} \text{ décroît jusqu'à } V_{E'} = -\frac{R_3 E}{R_2 + R_3} \text{ à } t = 5t_c.$$

Il faut donc choisir $\varepsilon V_{S'} < 0$ pour obtenir des variations de V_S et $V_{S'}$ périodiques voir graphe 5.

2.

$$\text{Période : } 4t_c = \frac{4R_3 E \tau_1}{(R_2 + R_3) V_0}.$$



$$3. \text{ Fréquence } \tilde{\nu} = \frac{1}{4t_c} = \frac{R_2 + R_3}{4R_3} \frac{V_0}{E \tau_1} = \frac{(R_2 + R_3) V_0}{4E R_1 R_3 C_1}.$$

$\tilde{\nu}$ est proportionnelle à V_0 ; la tension de commande définit la fréquence de l'oscillateur : ainsi est justifié le sigle O.T.C.

$$3. \text{ En } V_-, \text{ appliquons le théorème de Millman : } 0 = \frac{V_{E_2}}{R_1} + \frac{V_{E'_2}}{R_1} + \frac{V_S}{R_2} ;$$

$$\Rightarrow V_S = \frac{-R_2}{R_1} (V_E + V_{E'}).$$

4.a. L'analyse 2.c. reste valable avec $\int_0^t (V_0 + v(t) dt)$ au lieu de $\int_0^t V_0 dt$, mais la résolution temporelle est plus compliquée si v non négligeable devant V_0 . Il n'y a pas de perturbation pour $v \ll V_0$.

b. Nommons t'_n l'instant, immédiatement ultérieur à t_n , de commutation de $V_{S'}$ de $+E$ à $-E$. On conserve t_n pour désigner l'instant de commutations de $-E$ à $+E$.

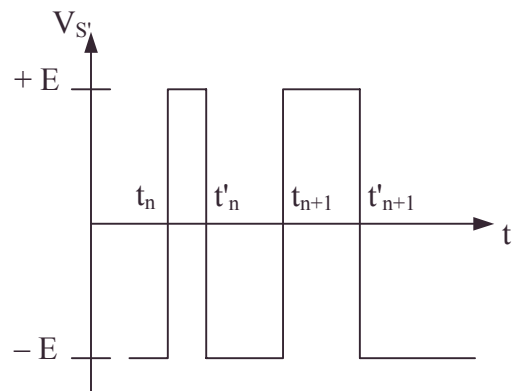
• Entre t_n et t'_n , $V_{S'} = +E$ vu $\varepsilon V_{S'} < 0$, $\varepsilon = -1$; à la sortie de l'intégrateur :

$$V_S(t'_n) - V_S(t_n) = \frac{1}{\tau_1} \int_{t_n}^{t'_n} (V_0 + v) dt.$$

• Entre t'_n et t_{n+1} , $V_{S'} = -E$; $\varepsilon = +1$; à la sortie de l'intégrateur :

$$V_S(t_{n+1}) - V_S(t'_n) = -\frac{1}{\tau_1} \int_{t'_n}^{t_{n+1}} (V_0 + v) dt.$$

• Par soustraction de la première relation pour former $\int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t) dt$:



• conservation de la charge, constante de temps, discrétisation [numérisation], EB, intégrateur électronique, Millman [théorème de], période

$$V_S(t_{n+1}) + V_S(t_n) - 2V_S(t'_n) = -\frac{1}{\tau_1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v dt - \frac{V_0}{\tau_1} (t_{n+1} - t_n) ;$$

$$\bullet \text{ Or, } V_S(t_{n+1}) = V_S(t_n) = \frac{-R_3 E}{R_2 + R_3} \text{ (cf. } V_E) \text{ et } V_S(t'_n) = \frac{R_3 E}{R_2 + R_3} ;$$

$$\text{On en déduit : } -4 \frac{R_3 E}{R_2 + R_3} = -\frac{V_0}{\tau_1} (t_{n+1} - t_n) - \frac{1}{\tau_1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v dt ;$$

$$\text{Pour introduire } 2\pi \tilde{v} = \frac{2\pi}{4R_3} \frac{R_2 + R_3}{E} \frac{V_0}{\tau_1}, \text{ multiplions par } -\frac{2\pi}{4R_3} \frac{R_2 + R_3}{E} ;$$

$$\text{Il vient : } 2\pi = 2\pi \tilde{v} (t_{n+1} - t_n) + \frac{\pi(R_2 + R_3)}{2R_3 E \tau_1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v dt \text{ de la forme demandée avec}$$

$$k = \frac{\pi(R_2 + R_3)}{2R_3 E \tau_1 C_1}.$$

c.1. $V_{1-} = V_{2-} = v_1 = v_2$ quand \mathcal{K} est fermé.

2. A l'instant t_α tel que \mathcal{K} est fermé (pendant la durée τ_f), $v_2 = v_1(t_\alpha)$.

Quand \mathcal{K} s'ouvre (rapidement) : V_{2+} demeure constante vu la conservation de la charge de C_2 .

$V_{2+} = v_2 = v_1(t_\alpha)$: ainsi $v_2(t)$ reste égal à $v_1(t_\alpha)$ jusqu'à la fermeture suivante de \mathcal{K} . La capacité bloque la tension v_2 à sa valeur. La capacité intervient sur la constante de temps τ_f , durée après laquelle C_2 est chargée de $C_2 V_1(t_\alpha)$.

3. Par l'intermédiaire de l'interrupteur, les valeurs $v_1(t_\alpha)$ sont transférées de v_1 sur v_2 et disponibles pendant des durées "notables" (blocage). (cf. C_2). A la fonction continue v_1 , on associe un ensemble de valeurs $v_1(t_\alpha)$: on a échantillonné. t_α est habituellement une période pour l'échantillonnage.

On a ainsi justifié la dénomination "E.B."

$$\mathbf{4.a.} \quad \xi_{n+1} - \xi_n = 2\pi - 2\pi \tilde{v} (t_{n+1} - t_n) = k \int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t) dt \text{ vu } \mathbf{4.b.}$$

β. Si l'échantillonnage de v_1 est effectué à un rythme rapide, on peut assimiler

$$\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{t_{n+1} - t_n} \text{ et } \dot{\xi}. \text{ Le théorème de la moyenne appliqué à } \mathbf{c.4.a.} \text{ donne :}$$

$$\xi_{n+1} - \xi_n = k(t_{n+1} - t_n) v(t) \text{ avec } t \in [t_n, t_{n+1}] \text{ et vu les faibles écarts, on peut assimiler } \dot{\xi} \text{ et } kv(t) = \frac{\Delta \xi}{\Delta t}. \text{ Tout se passe comme si } \xi \text{ était continue.}$$

5.a. Entre $t_n + \tau_f$ et t_{n+1} , $v_2(t) = v_1(t_n) = V_1 \sin(2\pi \tilde{v} t_n + \eta_0)$, soit :

$$2\pi \tilde{v} t_n + \eta_0 = (2n+1)\pi + \eta_0 + \eta - \xi_n \text{ vu } \mathbf{4.c.4.}$$

Pour assimiler $\sin(2\pi \tilde{v} t_n + \eta_0)$ à $\sin \xi_n$, il suffit que $\eta_0 + \eta = 0 \Rightarrow \eta = -\eta_0$.

Par la rapidité de l'échantillonnage, on peut visualiser sur un écran $\sin \xi$ grâce à $\sin \xi_n$ et donc les confondre : $v_2(t) = V_1 \sin \xi$.

$$\mathbf{b.a.} \text{ A l'entrée du M.I.D., } v_\alpha = -\frac{R_2}{R_1} (v_F + v_2) \text{ avec } RC \frac{dv}{dt} + v = \frac{-R}{R'} v_\alpha ;$$

$$\text{en remplaçant } v \text{ par } \frac{\dot{\xi}}{k}, \text{ on obtient } \ddot{\xi} + \frac{\dot{\xi}}{RC} - \frac{kV_1 R_2}{R' C R_1} \sin \xi = \frac{kR_2}{R' C R_1} v_F, \text{ soit la forme}$$

demandée.

β. $\mu = \frac{1}{RC}$; $\rho = -\frac{k}{R'C} \frac{R_2}{R_1}$. On aura $\rho = \frac{-k}{R'C}$ indépendant de R_1, R_2 si $R_1 = R_2$.

c. $\Omega_0 = \sqrt{\frac{-kV_1}{R'C}}$; A.N. : $\Omega_0 = 3544,9 \text{ rad.s}^{-1}$ un peu rapide en mécanique ;

$Q = \frac{\Omega_0}{\mu} = R \sqrt{\frac{-kV_1 C}{R'}}$; A.N. : $Q = 3,899$. Sélectivité faible.

6.1.8.4. Multiplieur à impulsions variables

Voir page 874.

6.1.8.5. Filtrage temporel

Voir page 884.

6.1.8.6. Filtrage numérique

Voir page 890.

6.1.8.7. Multivibrateur astable

Voir page 939.

6.1.8.8. Electronique du hacheur

Voir page 1082.

6.1.8.9. Suspension à correcteur numérique Transformation en Z

Voir page 1150.

6.2. Electrotechnique

6.2.1. Transformateur

Appartient explicitement aux programmes de PSI, PC et TSI1
(en génie électrique)

6.2.1.1. Transformateur réel

Ce problème étudie les principes (simplifiés) de certaines applications électrotechniques du phénomène d'induction électromagnétique. Aucune connaissance d'électrotechnique particulière n'est nécessaire pour aborder ce problème. Dans tout le problème on se placera dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents (appelée aussi approximation des états quasi-stationnaires A.R.Q.S.).

A. Enroulements électriques sur un tore de section carrée

On considère un tore de section carrée dont les caractéristiques géométriques sont données sur les figures 1 et 1bis.

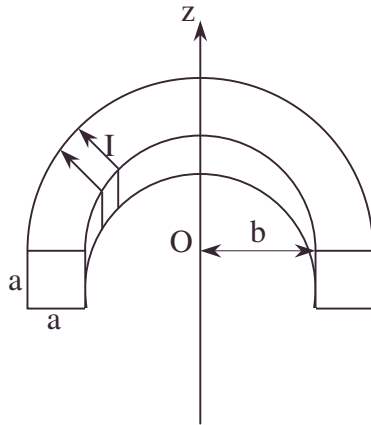


Figure 1

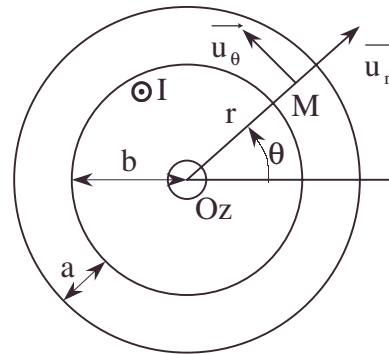


Figure 1bis

L'axe du tore est l'axe Oz, l'origine O de cet axe étant placée de telle façon que le tore se trouve dans l'espace compris entre les cotes $z = -a/2$ et $z = +a/2$. On bobine régulièrement sur ce tore N spires de fil électrique. Ces N spires sont en série et traversées par un courant I. On supposera que l'enroulement est effectué uniformément sur tout le tore ce qui fait que le système admet une symétrie de révolution autour de l'axe Oz (les fils de connexion amenant le courant sont supposés sans influence sur cette symétrie). Le tore est assimilé au vide pour ce qui concerne ses propriétés magnétiques.

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique créé par l'enroulement torique en tout point de l'espace.

2. Un point M de l'espace étant repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , montrer qu'en ce point le champ magnétique doit être de la forme $\vec{B} = B(r, z)\vec{u}_\theta$, où $B(r, z)$ est une fonction ne dépendant que de r et de z et pas de θ .

3. En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi et que l'on justifiera très clairement, montrer que le champ magnétique est nul à l'extérieur du tore.

4. Calculer de même la valeur du champ magnétique à l'intérieur du tore en fonction de μ_0 (perméabilité magnétique du vide), N, I, r et \vec{u}_θ .

5. Calculer le flux magnétique ϕ_1 à travers une section carrée du tore.

6. Montrer que l'on peut relier le flux ϕ_1 au courant I passant dans l'enroulement par une relation du type : $NI = \alpha\phi_1$, où α est une constante que l'on déterminera en fonction de μ_0 , a et b .

B. Etude du transformateur

1. Sur le tore précédent, on bobine maintenant deux enroulements électriquement indépendants et possédant respectivement N_1 et N_2 spires. Le premier enroulement sera appelé enroulement primaire, le second enroulement secondaire. Le primaire est traversé par un courant I_1 , et le secondaire par un courant I_2 . On supposera que les deux enroulements sont orientés de la même façon et conservent la symétrie axiale autour de Oz. Montre la relation : $N_1 I_1 + N_2 I_2 = \alpha\phi$.

2. On impose aux bornes de l'enroulement primaire une tension $U_1(t)$ sinusoïdale alternative du type $U_1(t) = U_{10} \cos \omega t$ avec U_{10} et ω constants. La résistance de cet enroulement est R_1 . Le secondaire a une résistance R_2 , la tension à ses bornes sera notée U_2 , de la forme $U_2 = U_{20} \cos(\omega t + \xi)$. Démontrer en notation complexe les relations suivantes (avec $j^2 = -1$) : $U_1 = R_1 I_1 + N_1 j \omega \phi_1$; $U_2 = R_2 I_2 + N_2 j \omega \phi_1$.

Remarque : on supposera qu'on a la même convention récepteur pour les deux enroulements.

3. Le secondaire est supposé ouvert : $I_2 = 0$.

a. Déterminer $\frac{U_2}{U_1}$ en fonction de N_1 , N_2 , R_1 , ω et α .

b. Déterminer I_1 en fonction de U_1 , R_1 , ω , α et N_1 . Montrer que ce courant peut se mettre sous la forme $I_1 = I_{10} \cos(\omega t + \psi)$ en déterminant I_{10} et ψ . Montrer que, vu du primaire, le système se comporte comme une résistance R_1 montée en série avec une bobine pure dont on donnera l'inductance.

c. Déterminer la puissance consommée par le système en fonction de R_1 et I_{10} .

d. On se place dans le cas idéal où $R_1 = 0$. Reprendre les 3 questions précédentes et commenter.

4. Le secondaire est maintenant court-circuité (R_1 n'étant plus nulle) ; $U_2 = 0$.

a. Déterminer ϕ_1 en fonction de I_1 , N_1 , α , ω , N_2 et R_2 .

b. Déterminer I_1 en fonction de U_1 , R_1 , ω , N_1 , α , N_2 et R_2 .

c. Déterminer I_2 en fonction des mêmes variables.

d. On se place dans le cas où R_1 et R_2 sont très faibles (mais non rigoureusement nulles). Montrer qu'alors ϕ_1 est presque nul et exprimer simplement I_1 en fonction de I_2 . Donner alors les expressions simplifiées de I_1 et I_2 en fonction de U_1 , R_1 , R_2 , N_1 et N_2 .

e. Montrer alors que, vu du primaire, l'ensemble se comporte comme une résistance pure dont on donnera la valeur en fonction de R_1 , R_2 , N_1 et N_2 .

5. Le secondaire est maintenant connecté à un dipôle formé par une résistance R en série avec une bobine d'inductance L .

Pour simplifier on prendra pour cette question $R_1 = R_2 = 0$

a. Déterminer la relation très simple liant alors U_1 et U_2 .

b. Déterminer I_2 en fonction de U_1 , N_1 , N_2 , R , L et ω . Montrer que, vu du secondaire, le système se comporte comme un générateur de tension parfait dont on déterminera la force électromotrice.

c. Déterminer I_1 en fonction de I_1 , N_1 , N_2 , R , L , α et ω .

d. Montrer qu'alors, vu du primaire, le système se comporte comme un ensemble de deux dipôles montés en parallèle que l'on déterminera.

CCP ; Durée : 1h30

• charge électrotechnique, enroulement primaire d'un transformateur, secondaire

Corrigé

A.1. Tout plan méridien passant par Oz est plan de symétrie. \vec{B} lui est orthogonal et donc est orthoradial : $\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$.

2. L'invariance des causes dans les rotations d'axe Oz et d'angle quelconque se reporte sur les conséquences : θ n'intervient pas. $\vec{B} = B(r, z)\vec{u}_\theta$.

3. \vec{B} étant orthoradial, un contour γ circulaire centré sur Oz (de rayon r) est une ligne de champ.

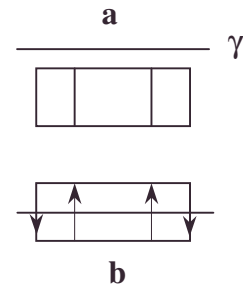
Le théorème d'Ampère s'écrit : $\oint_\gamma \vec{B} d\ell = \mu_0 i_{\Sigma_\gamma \text{ ntb}} = \oint B d\ell = B \cdot 2\pi r$.

Si γ est totalement extérieur au tore : soit 2 coupes **a.** et **b.**

a. Soit aucun fil ne le traverse, alors $i_{\Sigma_\gamma} = 0 \Rightarrow B = 0$.

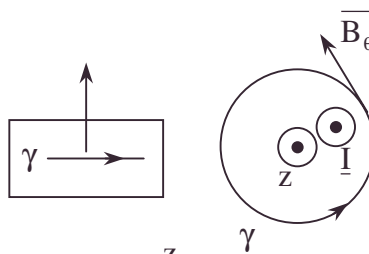
b. Soit il est traversé par le fil : N avec un courant ascendant
N avec un courant descendant

Soit au total : $i_\Sigma = (N - N)i = 0 \Rightarrow B = 0$.

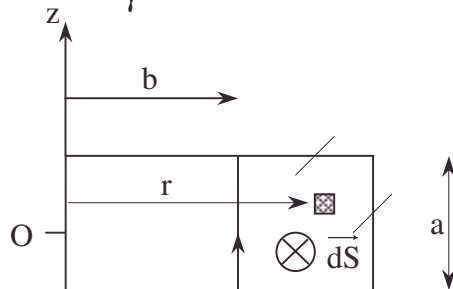


4. $i_\Sigma = NI$. vu les figures

$$\Rightarrow \vec{B}_\theta = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$



$$\begin{aligned} 5. \phi_1 &= \iint \vec{B}_\theta d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} dr dz \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi} a \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} a \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$



$$6. \phi_1 = \frac{NI}{\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{2\pi}{\mu_0 a \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)} \Rightarrow NI = \alpha \phi_1.$$

α est une caractéristique indépendante du courant.

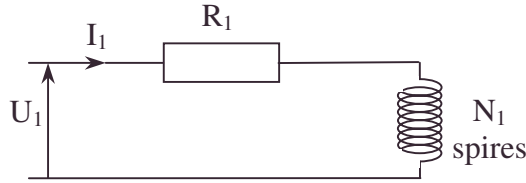
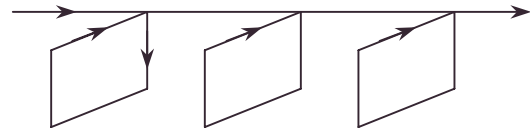
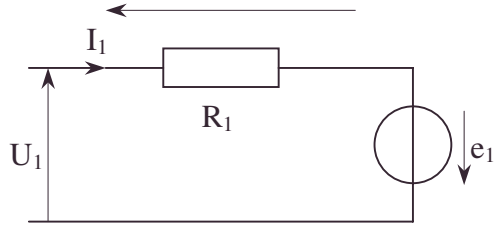
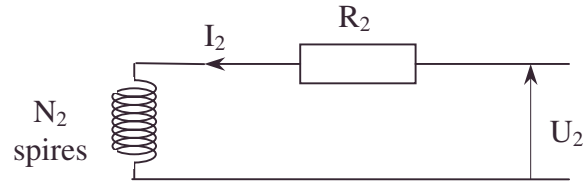
B.1. $i_{\Sigma_\gamma} = N_1 I_1 + N_2 I_2$ remplace formellement $NI \Rightarrow \alpha \phi_t = N_1 I_1 + N_2 I_2$.

2. Le flux total ϕ_{t_1} dans le circuit 1 est $\phi_{t_1} = N_1 \phi_1$ en supposant le circuit décomposé en N_1 spires planes séparées par très peu de fil cf. figure β ci-après.

Ces spires sont le siège d'une f.é.m; induite : $e_1 = \frac{d\phi_{t_1}}{dt} = -N_1 \frac{d\phi_t}{dt} = -j\omega N_1 \phi_t$ en notation complexe.

On a la figure γ : $U_1 = R_1 I_1 - e_1 = R_1 I_1 + N_1 j\omega \phi_1$.

De même en permutant le rôle des indices 1 et 2 : $U_2 = R_2 I_2 + N_2 j\omega \phi_1$, cf. figure δ , car l'énoncé précise que la convention est la même pour les deux enroulements considérés comme des récepteurs (avec par exemple une charge résistive) d'où l'orientation relative de U_1 et I_1 (et de U_2 et I_2 de même).

Figure α Figure β Figure γ Figure δ

3. Nous avons les relations :

$$\begin{cases} N_1 I_1 = \alpha \phi_1 \\ U_1 = R_1 I_1 + N_1 j\omega \phi_1 \\ U_2 = N_2 j\omega \phi_1 \end{cases}$$

a.
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2 j\omega N_1 I_1}{\alpha (R_1 + N_1 j\omega N_1) I_1} = \frac{N_2 N_1 j\omega}{R_1 \alpha + N_1^2 j\omega}.$$

b.
$$U_1 = \left(R_1 + \frac{N_1^2 j\omega}{\alpha} \right) I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{U_1}{R_1 + \frac{N_1^2}{\alpha} j\omega} = I_{10} e^{j\psi} = I_{10} (\cos \psi + j \sin \psi).$$

or $U_1 = U_{10}$ si la référence des phases est $U_1 : \xi = 0$.

$$\Rightarrow I_{10} = \frac{U_{10}}{\sqrt{R_1^2 + \frac{N_1^4 \omega^2}{\alpha^2}}} \Rightarrow \cos \psi + j \sin \psi = \frac{U_1 \left(R_1 - \frac{N_1^2 j\omega}{\alpha} \right)}{\sqrt{R_1^2 + \frac{N_1^4 \omega^4}{\alpha^2}}},$$

soit $\cos \psi = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + \frac{N_1^4 \omega^2}{\alpha^2}}}$; $\sin \psi = \frac{-\frac{N_1^2 j\omega}{\alpha}}{\sqrt{R_1^2 + \frac{N_1^4 \omega^4}{\alpha^2}}}$ ou encore $\psi = -\arctan \frac{N_1^2 \omega}{\alpha R_1}.$

Tout se passe formellement comme si $U_1 = (R_1 + jL_1 \omega) I_1$ avec $L_1 = \frac{N_1^2}{\alpha}.$

c. $P = \frac{1}{2} R_1 I_{10}^2$ (cf. effet Joule en alternatif).

d. $R_1 = 0 \Rightarrow \alpha. \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$ cf. transformateur parfait.

$\beta.$ Seule demeure $L_1 = \frac{N_1^2}{\alpha}.$

$\gamma. \psi = -\frac{\pi}{2}$; la consommation est nulle : $P = 0.$

• effet Joule, équivalence de formulation [tout se passe comme si], tout se passe comme si [équivalence de formulation]

4. $U_2 = 0$: les équations sont : $U_1 = R_1 I_1 + N_1 j\omega \phi_1$ ①

$0 = R_2 I_2 + N_2 j\omega \phi_1$ ②

$\phi_1 = \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{\alpha}$ ③

a. Eliminons I_2 entre ② et ③ ; $\phi_1 = \frac{I_1}{\alpha} N_1 - \frac{N_2^2 j\omega \phi_1}{\alpha R_2} \Rightarrow \phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\alpha + \frac{N_2^2 j\omega}{R_2}}$.

b. Reportons ϕ_1 dans ① : $U_1 = I_1 \left[R_1 + \frac{N_1^2 j\omega}{\alpha + \frac{N_2^2 j\omega}{R_2}} \right] \Rightarrow I_1 = \frac{U_1}{R_1 + \frac{N_1^2 j\omega}{\alpha + \frac{N_2^2 j\omega}{R_2}}}$.

c. Reportons ϕ_1 dans ② : $I_2 = \frac{-N_1 N_2 j\omega I_1}{\left(\alpha + \frac{N_2^2 j\omega}{R_2} \right) R_2}$.

$I_2 = \frac{-N_1 N_2 j\omega U_1}{R_2 \left[\alpha + N_2^2 \frac{j\omega}{R_2} \right] \left[R_1 + \frac{N_1^2 j\omega}{\alpha + N_2^2 \frac{j\omega}{R_2}} \right]} = \frac{-N_1 N_2 j\omega U_1}{\alpha R_1 R_2 + R_2 N_1^2 j\omega + R_1 N_2^2 j\omega}$.

d.α. R_2 très faible $\Rightarrow \phi_1 \rightarrow 0$ vu **4.a.**

β. ③ $\Rightarrow N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{N_2}{N_1} I_2$ cf. transformateur parfait.

γ. 4.b. donne quand R_2 faible : $I_1 = \frac{U_1}{R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2} \Rightarrow I_2 = -\frac{N_1}{N_2} \frac{U_1}{R_1 + \frac{N_1^2 R_2}{N_2^2}}$.

e. $U_1 = \left(R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 \right) I_1$.

Dans le primaire, le système a une résistance pure équivalente : $R = R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2$.

5.a. La jonction nouvelle donne : $U_2 = -(R + jL\omega) I_2$

Nos équations sont : $U_1 = N_1 j\omega \phi_1$ ①'

$U_2 = N_2 j\omega \phi_1 = -(R + jL\omega) I_2$ ②'

$\alpha \phi_1 = N_1 I_1 + N_2 I_2$ ③'

②' / ①' $\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$.

b. ②' s'écrit $U_2 = N_2 \frac{U_1}{N_1} = -(R + jL\omega) I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{N_2}{N_1} \frac{U_1}{(R + jL\omega)} = -\frac{U_2}{R + jL\omega}$;

vu du secondaire, le système se comporte comme un générateur de tension parfait de f.é.m. U_2 .

c. Reportons dans ③' :

$$I_1 = \frac{1}{N_1} \left[\frac{\alpha U_1}{N_1 j\omega} \right] - \frac{N_2}{N_1} \left[-\frac{N_2}{N_1} \right] \frac{U_1}{R + jL\omega} = U_1 \left[\frac{\alpha}{N_1^2 j\omega} + \frac{N_2^2}{N_1^2 (R + jL\omega)} \right].$$

d. On a : $I_1 = U_1 \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right]$, Z_1 et Z_2 représentant les impédances de deux dipôles passifs montés en parallèle.

α. $\frac{1}{Z_1} = \frac{\alpha}{N_1^2 j\omega} = \frac{1}{L_1 j\omega}$ avec $L_1 = \frac{N_1^2}{\alpha}$ cf. **B.3.b.**

β. $\frac{1}{Z_2} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{1}{R + jL\omega}$; on retrouve l'impédance de charge du circuit 2 multiplié par $\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$.

On a la formule classique de l'impédance ramenée dans le primaire par un transformateur parfait.

6.2.1.2. Transformateurs à carcasse magnétique saturable sans hystérésis

Le problème porte sur l'étude de transformateurs en électronique de puissance. Dans tout le problème, on ne s'intéresse qu'au régime permanent. On néglige les pertes par hystérésis et par courants de Foucault. Les lettres minuscules représentent les valeurs instantanées.

Les interrupteurs à semi-conducteurs sont idéalisés : chute de tension nulle à l'état passant, courant de fuite nul à l'état bloqué.

I. Etude d'un circuit magnétique

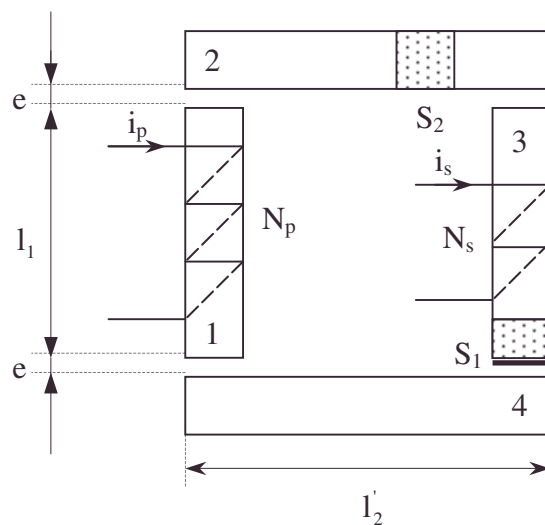


Figure 1

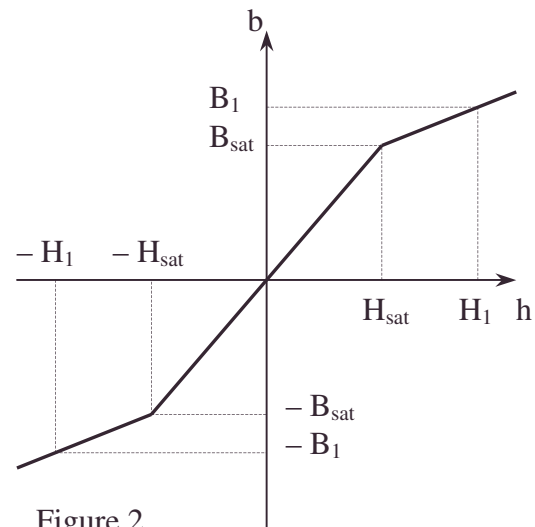


Figure 2

$$\begin{aligned} B_{\text{sat}} &= 1,2 \text{ T} & H_{\text{sat}} &= 600 \text{ A.m}^{-1} \\ B_1 &= 1,6 \text{ T} & H_1 &= 5300 \text{ A.m}^{-1} \end{aligned}$$

Le circuit étudié (figure 1) est constitué d'un matériau ferromagnétique (tronçons 1, 2, 3, 4) dont la caractéristique $b(h)$ idéalisée est représentée à la figure 2, et de quatre entrefers. Le régime dit saturé commence dès que $h \geq H_{\text{sat}}$.

Notations :

- l_1 longueur des tronçons 1 et 3 et longueur de la ligne de champ moyenne dans 1 et 3
 $l_1 = 18 \text{ cm}$.
- l_2 longueur de la ligne de champ moyenne dans les tronçons 2 et 4. $l_2 = 13 \text{ cm}$.
- l'_2 longueur des tronçons 2 et 4.
- e longueur d'un entrefer. $e = 0,10 \text{ mm}$.
- S_1 section des tronçons 1 et 3. $S_1 = 44 \text{ cm}^2$.
- S_2 section des tronçons 2 et 4. $S_2 = 54 \text{ cm}^2$.
- b_1 champ magnétique (tronçons 1 et 3).
- b_2 champ magnétique (tronçons 2 et 4).
- b_e champ magnétique dans les entrefers.
- h_1 excitation magnétique dans les tronçons 1 et 3.
- h_2 excitation magnétique dans les tronçons 2 et 4.
- h_e excitation magnétique dans les entrefers.
- N_p nombre de spires de l'enroulement primaire. $N_p = 1000$.
- N_s nombre de spires de l'enroulement secondaire. $N_s = 700$.
- i_p valeur instantanée du courant dans l'enroulement primaire.
- i_s valeur instantanée du courant dans l'enroulement secondaire.
- μ_0 (perméabilité du vide) $= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$.

• circuit magnétique, électronique de puissance, matériau ferromagnétique, nombre de spires de l'enroulement primaire du transformateur, nombre de spires de l'enroulement secondaire du transformateur

Les hypothèses d'étude sont les suivantes :

- toutes les lignes de champ sont canalisées par le circuit magnétique ;
- les entrefers possèdent une section S_1 ;
- le champ magnétique est uniforme dans chacune des pièces ferromagnétiques et les entrefers ;
- pour le calcul de circulation du champ d'excitation magnétique H , on prend, pour chaque tronçon, la longueur de la ligne de champ moyenne.

1. Quelles relations peut-on écrire entre b_1 , b_2 et b_e pour exprimer la conservation du flux du champ magnétique ?

2. Ecrire le théorème d'Ampère pour ce circuit.

3. On note $B_{\text{sat } 1}$ la valeur de b_1 pour laquelle le tronçon 1 commence à se saturer, et $B_{\text{sat } 2}$ la valeur de b_1 pour laquelle le tronçon 2 commence à se saturer.

1. Préciser les valeurs de $B_{\text{sat } 1}$ et $B_{\text{sat } 2}$.

2. $0 \leq b_1 \leq B_{\text{sat } 1}$.

1. Donner l'expression numérique de $\varepsilon = N_p i_p - N_s i_s$ en fonction du flux $\varphi = b_1 S_1$, A , l_1 , l_2 , e , S_1 , S_2 . On appellera ε force magnétomotrice.

2. On introduit \mathcal{R} telle que $\varepsilon = \mathcal{R} \varphi$, où \mathcal{R} représente la réluctance équivalente à l'ensemble du circuit magnétique lorsque celui-ci n'est pas saturé. $-B_{\text{sat } 1} \leq b_1 \leq B_{\text{sat } 1}$.

Calculer \mathcal{R} numériquement.

3. $B_{\text{sat } 1} \leq b_1 \leq B_{\text{sat } 2}$;

Donner l'expression numérique de ε en fonction de φ .

4. $b_1 \geq B_{\text{sat } 2}$; donner l'expression numérique de ε en fonction de φ .

Tracer la caractéristique $\varphi(\varepsilon)$ quand $\varphi = -\Phi_M \cos \theta$ avec $\Phi_M = 8,0 \text{ mWb}$ et $\theta = \omega t$. Préciser les points particuliers de cette caractéristique.

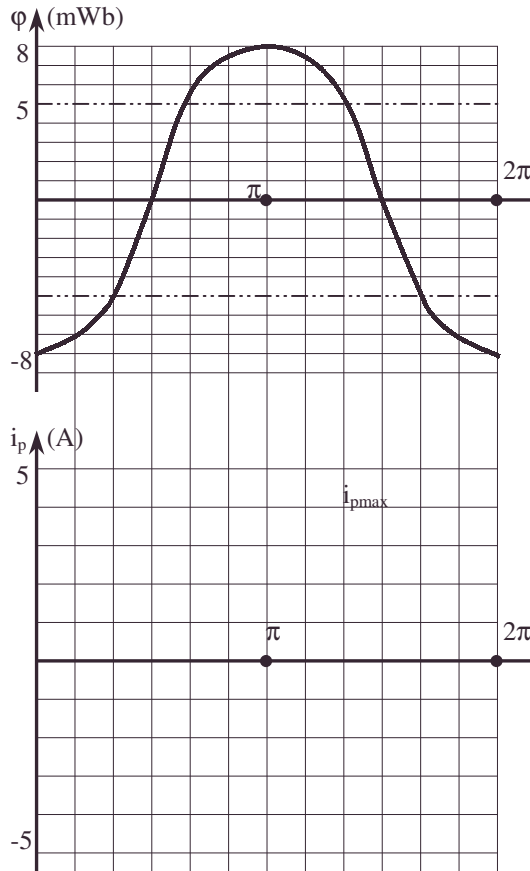
Justifier l'appellation "caractéristique".

4. On ouvre l'interrupteur de l'enroulement secondaire : $i_s = 0$. $\varphi = -\Phi_M \cos \theta$ avec $\Phi_M = 8,0 \text{ mWb}$ et $\theta = \omega t$. Représenter, sur le document-réponse 1, $i_p = i_{pv}(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Préciser les points particuliers.

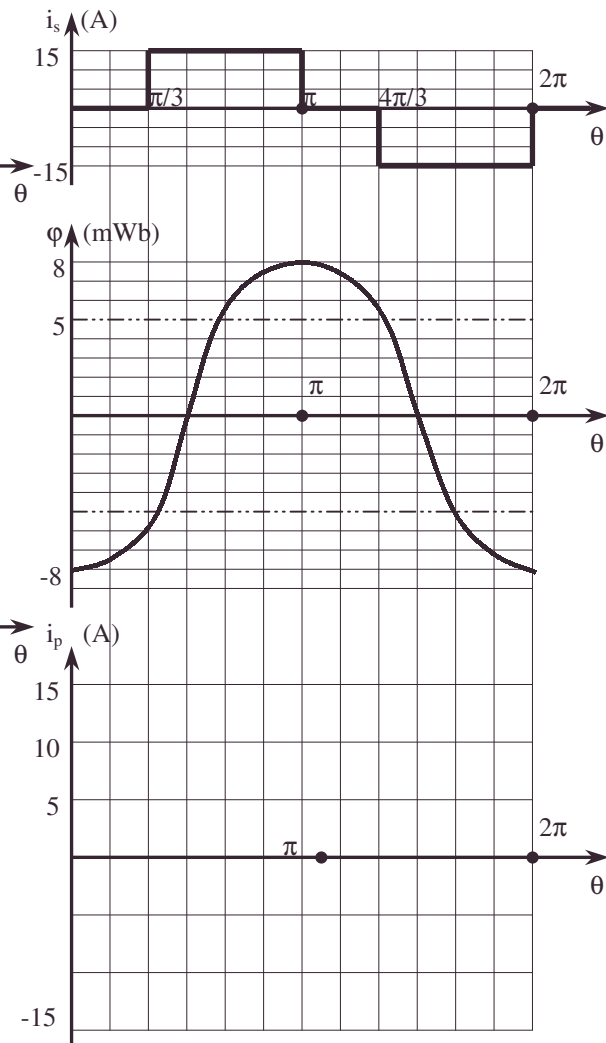
5. $\varphi = -\Phi_M \cos \theta$ avec $\Phi_M = 8,0 \text{ mWb}$. L'évolution de $i_s(\theta)$ est représentée sur le document-réponse 2. Exprimer i_p en fonction de i_{pv} et i_s .

Représenter $i_p(\theta)$ sur le document-réponse 2.

Document réponse 1



Document réponse 2



2. Etude d'un transformateur monophasé basse fréquence.

Le transformateur possède un enroulement primaire de N_p spires et un enroulement secondaire de N_s spires. $N_p = 188$, $N_s = 96$. On néglige la résistance des enroulements primaire et secondaire.

La caractéristique idéalisée $\varphi(\varepsilon)$ équivalente à l'ensemble du circuit magnétique est définie par trois relations :

$$\begin{aligned} \varphi &\leq -\Phi_{sat} & \varepsilon &= c\varphi + d ; \\ -\Phi_{sat} &\leq \varphi \leq \Phi_{sat} & \varepsilon &= a\varphi ; \\ \varphi &\geq \Phi_{sat} & \varepsilon &= c\varphi - d . \end{aligned}$$

avec $\varepsilon = N_p i_p - N_s i_s$; $\Phi_{sat} = 5,23 \text{ mWb}$, $a = 91,0 \cdot 10^3$, $c = 2,14 \cdot 10^6$, $d = 10,7 \cdot 10^3$.

Le flux φ est le flux dans une section S du circuit magnétique sur lequel sont bobinées les N_p spires primaires et les N_s spires secondaires.

$S = 43,6 \text{ cm}^2$. ε et φ sont exprimés en unités S.I.

1. Le transformateur alimente un montage redresseur (figure 3).

L'enroulement primaire est alimenté par une source de tension sinusoïdale

$$v_p(t) = V_p \sqrt{2} \sin \omega t,$$

avec $V_p = 230 \text{ V}$ et $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$.

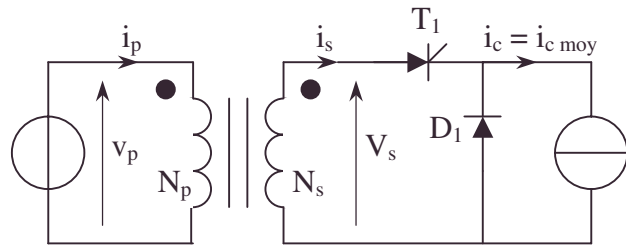


Figure 3

On a expérimentalement $\varphi(t) = -\Phi_M \cos \omega t + \Phi_{\text{moy}}$.

1. Quelle est la valeur moyenne $I_{p \text{ moy}}$ du courant primaire.

2. Le montage redresseur impose un courant secondaire i_s constant ou nul par morceau de valeur moyenne $I_{s \text{ moy}}$ non nulle. Exprimer ϵ_{moy} , valeur moyenne de ϵ , en fonction de $I_{s \text{ moy}}$.

3. $\varphi(t_1) = -\Phi_{\text{sat}}$ avec $\omega t_1 = \theta_1 = \frac{\pi}{3}$. Calculer Φ_{moy} et Φ_M .

4. En déduire les différentes expressions de $\epsilon(t)$ pour $0 \leq \omega t \leq 2\pi$.

On utilisera $\Phi_M, \Phi_{\text{moy}}, a, c, d$.

5. Exprimer ϵ_{moy} en fonction de $\Phi_{\text{moy}}, \Phi_M$ et θ_1 .

En déduire les valeurs numériques

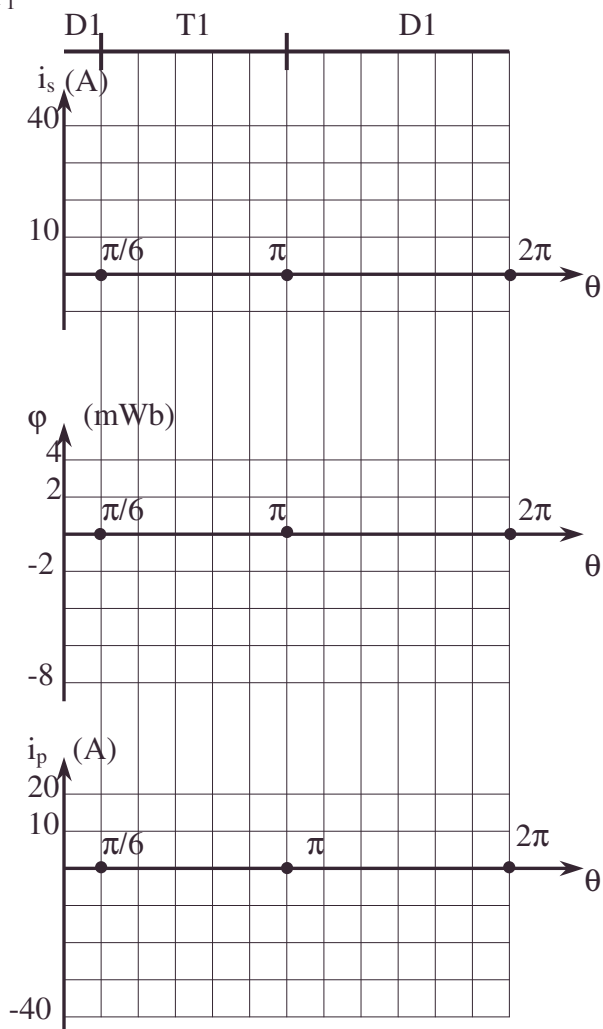
moyennes ϵ_{moy} , de $I_{s \text{ moy}}$ et de $I_{s \text{ max}}$

sachant que l'interrupteur commandé T_1

est passant de $\frac{\pi}{6}$ à π .

6. Représenter, sur le document-réponse 3, dans le cas expérimental cité d'un courant i_s donné, $i_s(\theta)$, $\varphi(\theta)$ et $i_p(\theta)$.

Document-réponse 3



3. Transformateur triphasé

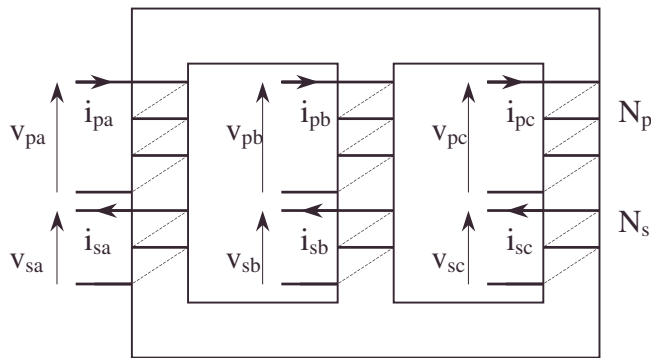


Figure 4

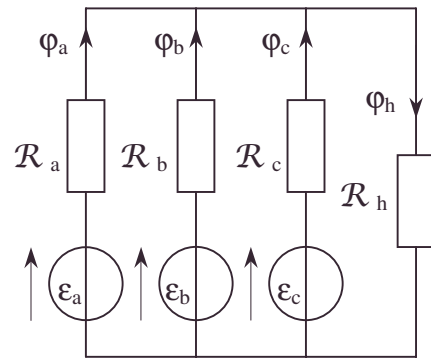


Figure 5

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement d'un transformateur triphasé (figure 4), dont le schéma magnétique équivalent précisé à la figure 5.

Caractéristiques du transformateur :

- Les tensions du réseau peuvent s'exprimer sous forme instantanée.

$$v_{pa} = V \cdot \sqrt{2} \sin \omega t ; v_{pb} = V \cdot \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) ; v_{pc} = V \cdot \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

- Tension nominale pour chaque enroulement primaire : $V = 230 \text{ V}$.
- Nombre de spires pour chaque enroulement primaire : $N_p = 261$.
- Nombre de spires pour chaque enroulement secondaire : $N_s = 152$.
- Le circuit est supposé non saturé, et les réluctances \mathcal{R} équivalentes à chacun de ces trois noyaux sont supposées identiques . $\mathcal{R} = 38,1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$.
- La réluctance \mathcal{R}_h a pour valeur $1,05 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$
- On néglige les résistances et les inductances de fuite des enroulements primaires et secondaires.

1. Equations générales

1. Ecrire les relations reliant les tensions primaires v_{pi} et les tensions secondaires v_{si} aux flux ϕ_i dans les noyaux, $i \in \{a, b, c\}$.

2. Ecrire quatre équations indépendantes relatives au circuit magnétique, reliant ϵ_i , \mathcal{R} , ϕ_i , \mathcal{R}_h , ϕ_h .

Préciser les expressions de ϵ_i , en fonction de i_{pi} et de i_{si} .

2. Les enroulements primaires sont couplés "en étoile"(cf. figure.6), et le point commun des enroulements est relié à un fil, dit neutre du réseau (figure 6) triphasé équilibré.

Les tensions du réseau peuvent s'exprimer sous forme instantanée :

$$v_a = V \cdot \sqrt{2} \sin \omega t ; v_b = V \cdot \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) ; v_c = V \cdot \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right),$$

ou complexe :

$$\underline{V}_a = [V; 0] ; \underline{V}_b = \left[V; -\frac{2\pi}{3} \right] ; \underline{V}_c = \left[V; -\frac{4\pi}{3} \right] ,$$

avec $f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$ et $V = 230 \text{ V}$.

Les enroulements secondaires sont également couplés "en étoile" avec un fil dit neutre par l'intermédiaire d'une charge (figure 6).

- charge électrotechnique, fil neutre du triphasé, primaires en étoile, schéma équivalent à un transformateur, transformateur triphasé à secondaires en étoile

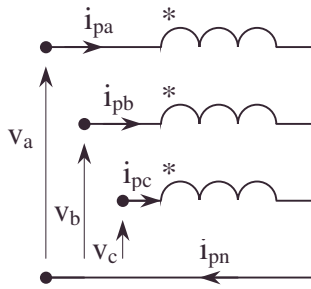


Figure 6

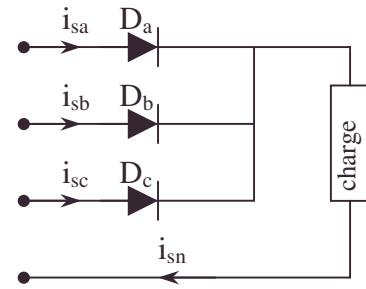


Figure 7

1. Montrer que ce couplage primaire impose $\varphi_h = \text{cste} = \Phi_{h \text{ moy}}$. Exprimer $\Phi_{h \text{ moy}}$ en fonction de \mathcal{R} , \mathcal{R}_h , N_s et $I_{n \text{ moy}}$ valeur moyenne du courant dans le neutre secondaire.

2. Le transformateur est à vide : pour chaque enroulement secondaire $i_{si} = 0$. Toutes les grandeurs sont sinusoïdales.

1. Quelle est la valeur de $\varphi_{h \text{ moy}}$?

2. Donner les expressions littérales en représentation complexe puis numérique de Φ_{aV} , flux à vide dans le noyau a, et des courants à vide I_{pav} et I_{pnv} en fonction des données.

3. On note i_{pav} et φ_{av} les expressions instantanées des grandeurs complexes obtenues lors du fonctionnement à vide. On branche dans les secondaires un montage redresseur (figure 7).

Le courant absorbé par la charge a pour expression $i_{sn} = I_{sn \text{ moy}} + I_{s1} \sqrt{2} \sin(3\omega t - \varphi_1)$, avec $I_{sn \text{ moy}} = 15 \text{ A}$, $I_{s1} = 1,92 \text{ A}$ et $\varphi_1 = 3,9 \text{ rad}$.

Les intervalles de conduction des interrupteurs sont donnés pour la variable θ :

$$\text{pour } D_a : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]; \text{ pour } D_b : \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right]; \text{ pour } D_c : \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi + \frac{2\pi}{6} \right].$$

1. Exprimer φ_a , flux en charge dans le noyau a, en fonction de φ_{av} et $\Phi_{h \text{ moy}}$.

2. Exprimer i_{pa} en fonction de i_{pav} , i_{sa} , $I_{sn \text{ moy}}$, N_p et N_s .

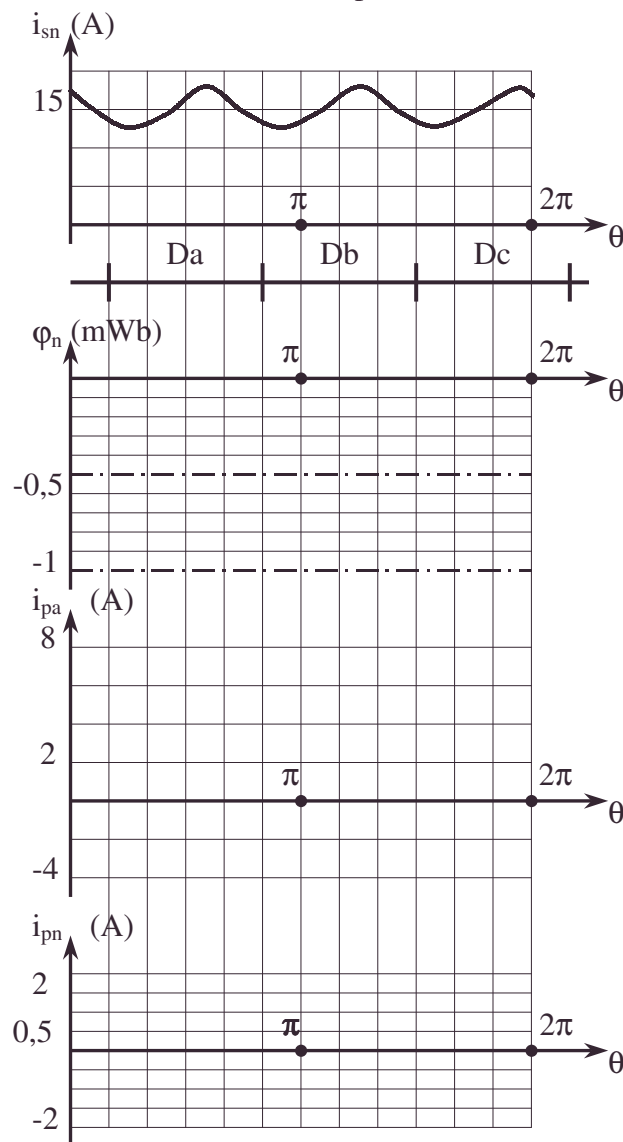
3. Exprimer i_{pn} en fonction de i_{sn} , $I_{sn \text{ moy}}$, N_s et N_p .

Justifier l'annulation de certains termes.

4. Représenter, sur le document-réponse 4, $\varphi_h(\theta)$, $i_{pa}(\theta)$ et $i_{pn}(\theta)$.

Pour le tracé de $i_{pa}(\theta)$, on pourra négliger i_{pav} .

Document-réponse 4



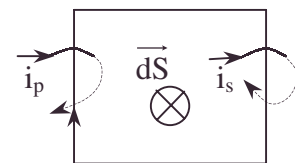
Agregation de physique appliquée ; durée : 3 h.

Corrigé

1.1. La conservation du flux s'écrit : $b_1 S_1 = b_2 S_2 = b_e S_1$.

2. Vu l'orientation de la ligne de champ moyenne et celles des courants primaire et secondaire, le théorème d'Ampère $\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = I_{\Sigma}$ se transcrit par :

$$2h_1 l_1 + 2h_2 l_2 + 4h_e e = N_p i_p - N_s i_s.$$



3.1. $S_1 < S_2$. On en tire : $b_1 = b_2 \frac{S_2}{S_1} > b_2$.

La saturation du tronçon 1 a naturellement lieu pour $b_1 = B_{\text{sat}} = B_{\text{sat1}}$;

AN : $B_{\text{sat1}} = 1,2 \text{ T}$.

La saturation du tronçon 2 a lieu pour $b_2 = B_{\text{sat}}$ soit pour $b_1 = B_{\text{sat}} \frac{S_2}{S_1} = B_{\text{sat2}}$;

- Ampère [théorème d'], conservation du flux magnétique, saturation d'un amplificateur opérationnel

$$\text{AN : } B_{\text{sat}2} = 1,47 \text{ T.}$$

$$2.1. A = \frac{B_{\text{sat}}}{H_{\text{sat}}} = 2.10^{-3} \text{ T.m.A}^{-1}.$$

Quand $0 \leq b_1 \leq B_{\text{sat}1}$, aucun tronçon n'est saturé : $b = Ah$ dans la matière ferromagnétique. Le théorème d'Ampère s'exprime en fonction de b_1 puis de φ :

$$\varepsilon = 2b_1 \left(\frac{l_1}{A} + \frac{l_2 S_1}{A S_2} + \frac{2e}{\mu_0} \right) = \frac{2}{S_1} \left(\frac{l_1}{A} + \frac{l_2 S_1}{A S_2} + \frac{2e}{\mu_0} \right) \varphi ; \text{AN : } \varepsilon = 137,3.10^3 \varphi.$$

$$2. \mathcal{R} = 137,3.10^3 \text{ H}^{-1} \text{ (H = henry).}$$

$$3. C = \frac{B_1 - B_{\text{sat}}}{H_1 - H_{\text{sat}}} ; \text{AN : } C = 8,51.10^{-5} ; D = B_{\text{sat}} - C H_{\text{sat}} ; \text{AN : } D = 1,15 \text{ T.}$$

Quand $B_{\text{sat}1} \leq b_1 \leq B_{\text{sat}2}$, on a : $b_1 = C h_1 + D$ (état "saturé").

$$b_2 = A h_2 \text{ (état non saturé).}$$

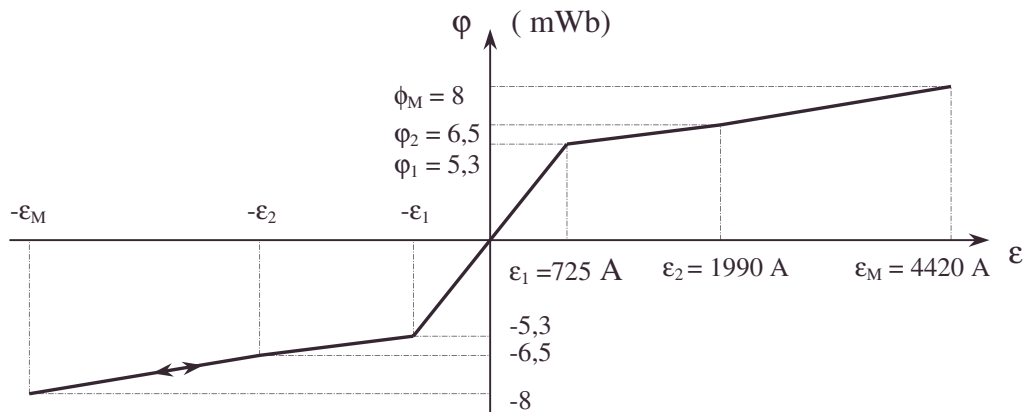
$$b_e = \mu_0 h_e \text{ (vide).}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{S_1} \left(\frac{l_1}{C} + \frac{l_2 S_1}{A S_2} + 2 \frac{e}{\mu_0} \right) \varphi - 2 l_1 \frac{D}{C} ; \text{AN : } \varepsilon = 1,06.10^6 \varphi - 4860.$$

$$4. b_1 \geq B_{\text{sat}2} ; \text{ on a } b_1 = C h_1 + D ; b_2 = C h_2 + D ; b_e = \mu_0 h_e.$$

$$\varepsilon = \frac{2}{S_1} \left(\frac{l_1}{C} + \frac{l_2}{C} \frac{S_1}{S_2} + 2 \frac{e}{\mu_0} \right) \varphi - 2(l_1 + l_2) \frac{D}{C} ; \text{AN : } \varepsilon = 1,60.10^6 \varphi - 8370.$$

5. La fonction est impaire, vu la caractéristique $b = b(h)$.



Les relations affines ou linéaires entre φ et ε permettent de calculer les points particuliers pour $b_1 = B_{\text{sat}1}$ et $b_1 = B_{\text{sat}2}$, ou pour $\varphi = \varphi_M$ (reportés sur le graphe) et de tracer les portions de droite. On rappelle qu'en électrocinétique, on nomme caractéristique la courbe $i = i(u)$; or, la loi d'Ohm $u = Ri$ est formellement analogue à $\varepsilon = \mathcal{R} \varphi$ avec analogie entre u et ε , R et \mathcal{R} , i et φ . $\varphi = \varphi(e)$ est donc analogue à une caractéristique électrocinétique. Elle est parcourue en alternatif sans hystérésis.

$$4. i_s = 0 \Rightarrow i_p = i_{pv} = \frac{\varepsilon_1}{N_p} [\varphi(\theta)] ;$$

$$a. 0 \leq b_1 \leq B_{\text{sat}1} ; \quad i_{pv} = -1,1 \cos \theta ;$$

$$b. B_{\text{sat}1} \leq b_1 \leq B_{\text{sat}2} ; \quad i_{pv} = -8,49 \cos \theta - 4,86 ;$$

$$c. b_1 \geq B_{\text{sat}2} ; \quad i_{pv} = -12,8 \cos \theta - 8,37.$$

• analogie, réluctance, saturation d'un amplificateur opérationnel

Points particuliers : $b_1 = B_{\text{sat}1}$; $\varphi_1 = 5,3 \text{ mWb}$; $\theta_1 = \arccos \frac{\varphi_1}{\Phi_M}$;

AN : $\theta_1 = 36^\circ$; $\theta_1 = 0,63 \text{ rad}$.

$b_1 = B_{\text{sat}2}$; $\varphi_2 = 6,5 \text{ mWb}$; $\theta_2 = \arccos \frac{\varphi_2}{\Phi_M}$;

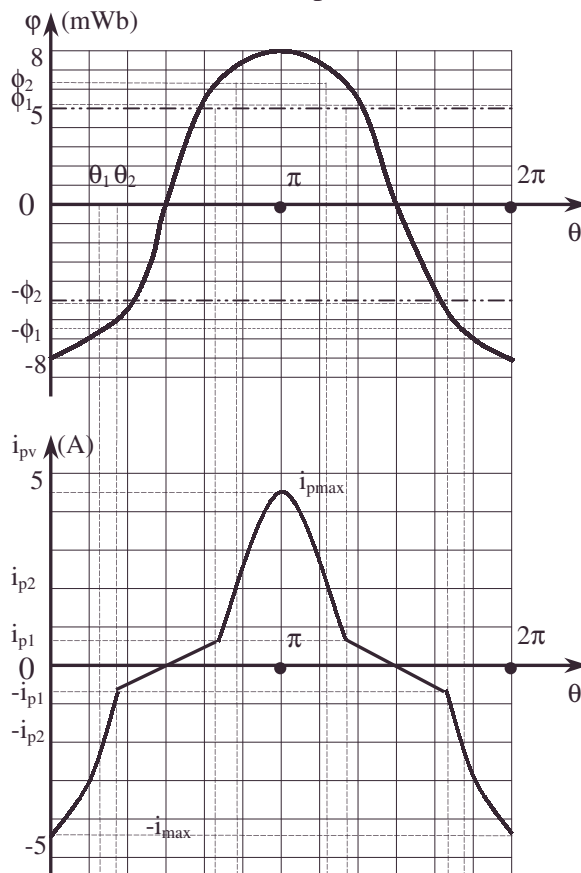
AN : $\theta_2 = 49^\circ$; $\theta_2 = 0,86 \text{ rad}$.

d'où le document-réponse 1 .

$$5. \quad i_p = \frac{\varepsilon_1 [\varphi(\theta)]}{N_p} + \frac{N_s}{N_p} i_s = i_{pv} + \frac{N_s}{N_p} i_s. \quad \text{On procède à l'addition modulée de 2}$$

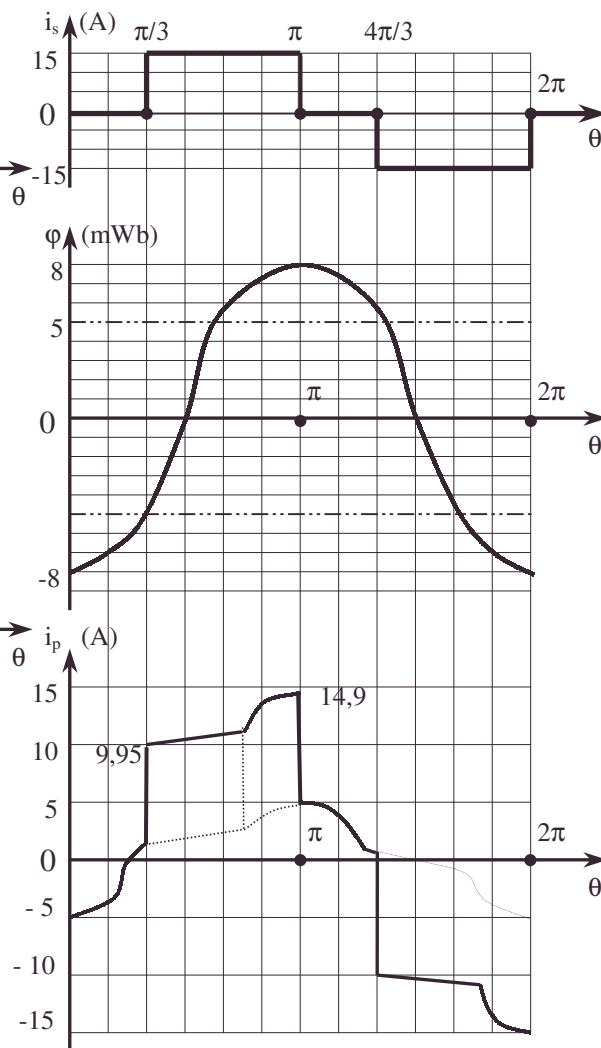
courbes, d'où le document-réponse 2, laissant apparaître les valeurs particulières.

Document réponse 1



On a des portions de sinusôides
De pente très différentes.

Document réponse 2



2.1.1. La loi d'Ohm permet d'écrire : $v_p = r_p i_p + N_p \frac{d\varphi}{dt}$;

vu les expressions de v_p et φ : $\langle v_p \rangle = 0$; $\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = 0 \Rightarrow I_{p \text{ moy}} = 0$.

$$2. \varepsilon = N_p i_p - N_s i_s \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = -N_s \langle i_s \rangle : \varepsilon_{\text{moy}} = -N_s I_{s \text{ moy}}.$$

$$3.a. v_p = N_p \frac{d\phi}{dt} \text{ s'écrit } V_p \sqrt{2} \sin \omega t = N_p \phi_M \omega \sin \omega t \Rightarrow \phi_M = \frac{V_p \sqrt{2}}{N_p \omega};$$

$$\text{AN : } \phi_M = 5,51 \text{ mWb.}$$

$$b. \cos \theta_1 = \frac{1}{2}; \varphi \left(\frac{\pi}{3\omega} \right) = -\phi_{\text{sat}} = -\frac{\phi_M}{2} + \phi_{\text{moy}} \Rightarrow \phi_{\text{moy}} = -\left(\phi_{\text{sat}} - \frac{\phi_M}{2} \right).$$

$$\text{AN : } \phi_{\text{moy}} = -2,48 \text{ mWb.}$$

$$\text{REM.: } \phi_{\text{max}} = \phi_M + \phi_{\text{moy}} = \frac{3}{2} \phi_M - \phi_{\text{sat}}; \text{ AN : } \phi_{\text{max}} = 3 \text{ mWb} < \phi_{\text{sat}}.$$

$$4.a. 0 \leq \theta \leq \theta_1; \varphi \leq -\phi_{\text{sat}} \text{ car } \varphi \text{ est une fonction croissante pour } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

$$\text{On a l'état "saturé" : } \varepsilon = c(-\phi_M \cos \omega t + \phi_{\text{moy}}) + d.$$

$$b. \text{ Vu } \cos \theta_1 = \cos(2\pi - \theta_1), 2\pi - \theta_1 < \theta < 2\pi : \varphi \leq -\phi_{\text{sat}} \text{ car } \varphi \text{ est une fonction décroissante. On a l'état "saturé" : pour } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \varepsilon = c(-\phi_M \cos \omega t + \phi_{\text{moy}}) + d.$$

$$c. \theta_1 < \theta < 2\pi - \theta_1; \varphi \geq -\phi_{\text{sat}} \text{ or } \varphi < \phi_{\text{max}} < \phi_{\text{sat}}; \varepsilon = a(-\phi_M \cos \omega t + \phi_{\text{moy}}).$$

$$5.a. \varepsilon_{\text{moy}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) d\theta \text{ or } \cos \theta = \cos(2\pi - \theta).$$

$$\text{On peut réduire la période à } \pi : \varepsilon_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varepsilon(\theta) d\theta.$$

$$\varepsilon_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\theta_1} (-c\phi_M \cos \theta + c\phi_{\text{moy}} + d) d\theta + \int_{\theta_1}^{\pi} (-a\phi_M \cos \theta + a\phi_{\text{moy}}) d\theta \right].$$

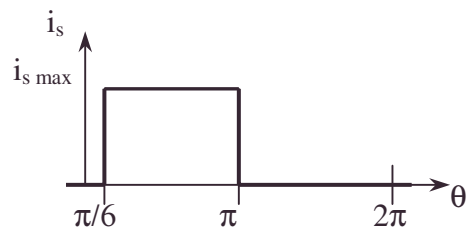
$$\varepsilon_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi} \left[(a-c)\phi_M \sin \theta_1 + \theta_1 ((c-a)\phi_{\text{moy}} + d) - \pi a\phi_{\text{moy}} \right]; \text{ AN : } \varepsilon_{\text{moy}} = -1465 \text{ A.}$$

$$b. I_{s \text{ moy}} = -\frac{\varepsilon_{\text{moy}}}{N_s}; \text{ AN : } I_{s \text{ moy}} = 15,3 \text{ A.}$$

$$c. I_{s \text{ max}} \text{ du créneau est telle que la quantité d'électricité qui passe par période :}$$

$$I_{s \text{ max}} \cdot \frac{\left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)}{\omega} = I_{s \text{ moy}} \cdot \frac{2\pi}{\omega}.$$

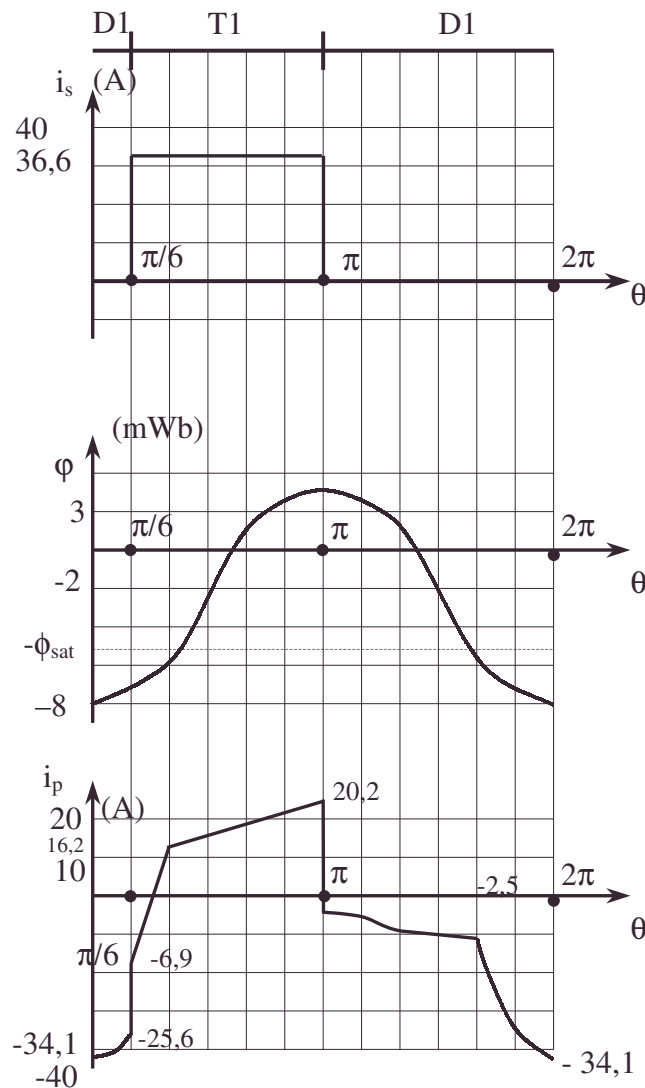
$$I_{s \text{ max}} = \frac{2\pi}{\pi - \frac{\pi}{6}} I_{s \text{ moy}}; \text{ AN : } I_{s \text{ max}} = 36,6 \text{ A.}$$



$$6. i_p = \frac{\varepsilon}{N_p} + \frac{N_s}{N_p} i_s, \text{ d'où la courbe et les points particuliers obtenus en utilisant}$$

a,c,d.

Document-réponse 3



On reconnaît i_{pv}
décalée vers le bas,
modifiée par i_s

3.1.1. Dans chaque branche, la loi d'Ohm s'écrit : $V_{pi} = N_p \frac{d\phi_i}{dt}$; $V_{si} = N_s \frac{d\phi_i}{dt}$.

2. Etudions les 3 mailles à indexation a, b, c sur la figure 5 mettant en jeu d'abord la branche a fermée par la branche h, de même en échangeant a en b, puis en c.

L'analogie de la loi d'Ohm pour chacune de ces mailles s'écrit :

- ① $\varepsilon_a - \mathcal{R} \phi_a = \mathcal{R}_h \phi_h$.
- ② $\varepsilon_b - \mathcal{R} \phi_b = \mathcal{R}_h \phi_h$.
- ③ $\varepsilon_c - \mathcal{R} \phi_c = \mathcal{R}_h \phi_h$. (cf. théorème d'Ampère).

L'analogie de la loi aux nœuds s'écrit : $\phi_a + \phi_b + \phi_c = \phi_h$ qui exprime la conservation du flux du champ magnétique.

On a aussi par analogie avec **I.1.** :

$$④ \quad \varepsilon_i = N_p i_{pi} - N_s i_{si} .$$

2.1. La loi d'Ohm du **3.1.1.** s'écrit : $v_a = N_p \frac{d\phi_a}{dt}$; $v_b = N_p \frac{d\phi_b}{dt}$; $v_c = N_p \frac{d\phi_c}{dt}$.

Or, en notation complexe, il est évident que $v_a + v_b + v_c = 0$,

$$\Rightarrow \phi_a + \phi_b + \phi_c = \text{cste} , = \phi_h = \phi_{h\text{moy}} ;$$

• Ampère [théorème d'], analogie, conservation du flux magnétique, loi aux nœuds, Ohm[loi d']

en utilisant la même évidence, $\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = (3\mathcal{R}_h + \mathcal{R})\phi_h$, soit :

$$N_p(i_{pa} + i_{pb} + i_{pc}) - N_s(i_{sa} + i_{sb} + i_{sc}) = (3\mathcal{R}_h + \mathcal{R})\phi_h, \text{ et appliquant la loi des nœuds, } N_p i_{pn} - N_s i_{sn} = (\mathcal{R} + 3\mathcal{R}_h)\phi_h \text{ et } N_p I_{pn \text{ moy}} - N_s I_{sn \text{ moy}} = (\mathcal{R} + 3\mathcal{R}_h)\phi_{h \text{ moy}}.$$

$$\text{or, } I_{pn \text{ moy}} = I_{pa \text{ moy}} + I_{pb \text{ moy}} + I_{pc \text{ moy}} = 0 + 0 + 0 \text{ vu 2. ; } \phi_{h \text{ moy}} = -\frac{N_s}{3\mathcal{R}_h + \mathcal{R}} I_{sn \text{ moy}}.$$

$$\mathbf{2.1. } i_{sn} = 0 \Rightarrow I_{sn \text{ moy}} = 0 \Rightarrow \phi_{h \text{ moy}} = 0 = \phi_h.$$

$$\mathbf{2.a.} \text{ En notation complexe, } v_a = N_p \frac{d\phi_a}{dt} \text{ donne : } \underline{\phi}_{av} = \frac{V_a}{jN_p\omega}.$$

$$\text{AN : } |\underline{\phi}_{av}| = 2,81.10^{-3} \text{ Wb ; } \arg \underline{\phi}_{av} = -\frac{\pi}{2}.$$

b. L'équation ① de **3.1.2.** s'écrit $\varepsilon_a = \mathcal{R}\phi_a$; l'équation ④ s'écrit $\varepsilon_a = N_p i_{pav}$.

$$\underline{i}_{pav} = \frac{\mathcal{R}\underline{\phi}_{av}}{N_p} = \frac{\mathcal{R}V_a}{jN_p^2\omega} ; \underline{i}_{pnv} = \frac{\mathcal{R}}{jN_p^2\omega}(V_a + V_b + V_c) = 0.$$

$$\text{AN : } |\underline{i}_{pav}| = 0,41 \text{ A ; } \arg \underline{i}_{pav} = -\frac{\pi}{2} ..$$

$$\mathbf{3.1. } v_a = N_p \frac{d\phi_a}{dt} \Rightarrow \phi_a = \int \frac{V_a}{N_p} dt = \frac{V\sqrt{2}}{N_p\omega} \cos \omega t + cste ; \phi_a = \phi_{av} + \phi_{a \text{ moy}}.$$

Attachons nous aux grandeurs moyennes : $\phi_{a \text{ moy}} = \phi_{b \text{ moy}} = \phi_{c \text{ moy}}.$

$$\text{Or, } \phi_a + \phi_b + \phi_c = \phi_h \Rightarrow \phi_{a \text{ moy}} = \frac{\phi_{h \text{ moy}}}{3} \Rightarrow \phi_a = \phi_{av} + \frac{\phi_{h \text{ moy}}}{3}.$$

2. $\varepsilon_a = N_p i_{pa} - N_s i_{sa} = \mathcal{R}_h \phi_h + \mathcal{R} \phi_a$ d'après les équations ④ et ① de **3.1.2.**

$$i_{pa} = \frac{N_s}{N_p} i_{sa} + \frac{(\mathcal{R}_h \phi_h + \mathcal{R} \phi_a)}{N_p} = \frac{N_s}{N_p} i_{sa} + \frac{\mathcal{R} \phi_{av}}{N_p} + \frac{\mathcal{R}_h \phi_{h \text{ moy}}}{N_p} + \frac{\mathcal{R} \phi_{\text{moy}}}{N_p}.$$

$$i_{pa} = \frac{N_p}{N_p} i_{sa} + i_{pav} + \frac{\phi_{h \text{ moy}}}{3N_p} (3\mathcal{R}_h + \mathcal{R}) = \frac{N_s}{N_p} i_{sa} + i_{pav} - \frac{N_s}{N_p} \frac{I_{sn \text{ moy}}}{3}.$$

$$\mathbf{3. } i_{pn} = i_{pa} + i_{pb} + i_{pc} = \frac{N_s}{N_p} \left(i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} - \frac{3I_{sn}}{3} \right) + (i_{pav} + i_{pbv} + i_{pcv}).$$

$$i_{pn} = \frac{N_s}{N_p} (i_{sn} - I_{sn \text{ moy}}) + i_{pnv}.$$

$$i_{pn} = \frac{N_s}{N_p} (i_{sn} - I_{sn \text{ moy}}) + 0 \text{ (cf. développement en série de Fourier : pour chaque } \omega,$$

$$i_{pnv} = i_{pav} + i_{pbv} + i_{pcv} = 0).$$

$$\mathbf{4. } \phi_h = \frac{N_p i_{pn} - N_s i_{sn}}{\mathcal{R} + 3\mathcal{R}_h} = \phi_{h \text{ moy}} = -N_s I_{sn \text{ moyen}} \text{ avec } I_{sn \text{ moyen}} = 15 \text{ A}$$

$$\phi_h = -0,715 \text{ mWb, .}$$

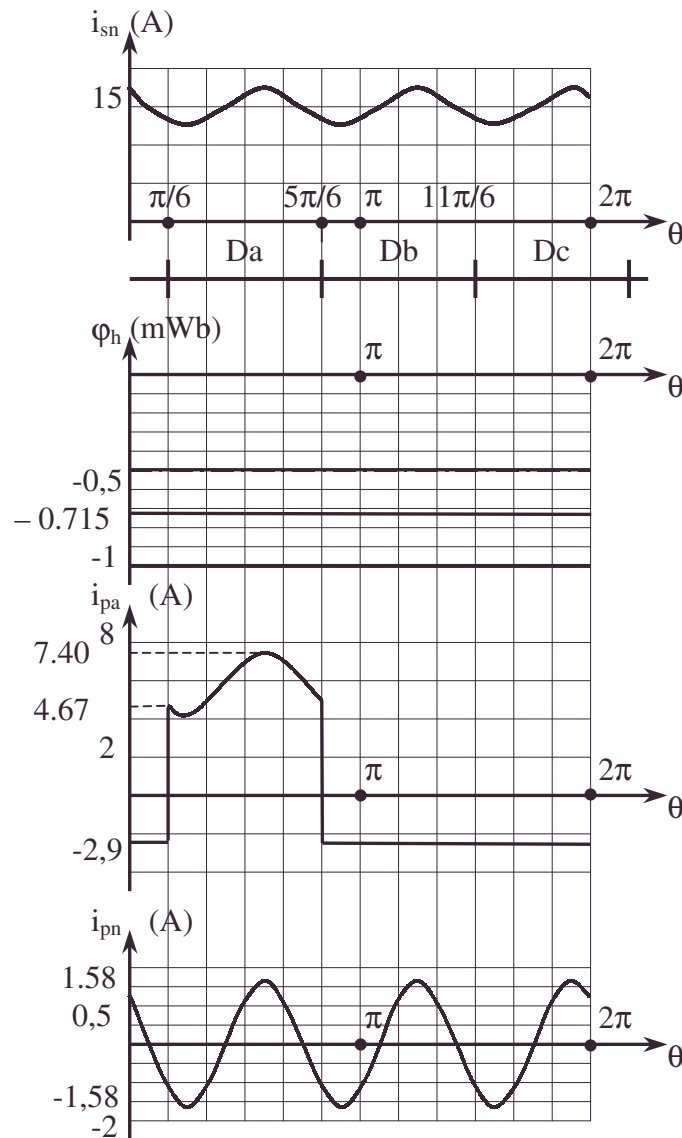
$$\text{En négligeant } i_{pav}, i_{pa} = \frac{N_s}{N_p} i_{sa} - \frac{N_p}{3N_p} I_{sn \text{ moy}} ;$$

$$i_{sa} = 0 \text{ si } D_A \text{ non conducteur AN : } i_{pa} = -2,9 \text{ A.}$$

• loi aux nœuds

$i_{sa} = i_{sn}$ si D_a conducteur ; $I_{pn \max} = 1,58 \text{ A}$.

Document-réponse 4



Rappelons : $i_{pn} = i_{pa} + i_{pb} + i_{pc}$.

i_{sn} et i_{pn} sont liés malgré les fractionnements.

6.2.1.3. Modulateur de lumière

Voir page 1212.

6.2.1.4. Résonateur d'un émetteur hyperfréquence

Voir page 1176.

6.2.2. Moteurs à courant continu

Appartient explicitement au programme de PSI

6.2.2.1. Moteur et dynamo

Une spire rectangulaire, de grand axe $z'z$, est enroulée sur un cylindre de même axe, de rayon a et de hauteur b (figures 1 et 2). Cet ensemble (appelé rotor) se déplace dans l'entrefer d'un aimant. Le champ magnétique créé par cet aimant a une composante radiale \vec{B}_r au niveau de l'entrefer dont la variation en fonction de la position dans l'entrefer est donnée par la figure 3 (il s'agit en fait d'une modélisation simplificatrice), sa composante verticale \vec{B}_z étant nulle.

La spire a une résistance R et est connectée vers l'extérieur par l'intermédiaire de deux points A et C par un système balai-collecteur de manière à ce que le brin de spire situé à droite soit toujours en relation électrique avec A et celui situé à gauche soit en relation avec C quelle que soit la position de la spire dans l'entrefer (figure 2). On notera J le moment d'inertie, par rapport à l'axe zz' , du rotor, et $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ son vecteur rotation (\vec{u}_z étant le vecteur unitaire orientant l'axe de rotation).

On négligera les phénomènes d'auto-induction dans la spire. On notera i le courant traversant la spire orientée de A vers C (voir figures).

Lors de la rotation, la spire est soumise à un couple de frottement fluide dont le moment est du type $\vec{C}_f = -\beta \Omega$, où β est une constante positive.

A. Etude générale

1. Montrer que la force électromotrice e induite par le mouvement du rotor dans le champ magnétique peut s'écrire : $e = -2\Omega ab B_0$.

2. Montrer que le moment \vec{C}_e des forces électromagnétiques s'exerçant sur le rotor peut s'écrire : $\vec{C}_e = 2iab B_0 \vec{u}_z$.

B. Principe d'une dynamo

1. On connecte entre A et C une résistance R' et on entraîne la spire par un moteur tournant à une vitesse angulaire Ω supposée constante. Déterminer le courant i . Ce courant est-il continu ou variable ?

2. Quel couple doit délivrer le moteur pour maintenir la vitesse de rotation constante ?

C. Principe d'un moteur à courant continu

On enlève maintenant la résistance R' et on impose entre A et C par l'intermédiaire d'un générateur une tension constante $V_A - V_C = E > 0$. Un couple résistant $\vec{C}_r = -C_0 \vec{u}_z$ est appliqué à la spire ($C_0 > 0$) en plus du couple de frottement.

1. En appliquant les lois de la mécanique, établir l'équation différentielle reliant β , Ω , i , J , b , a , B_0 et C_0 .

2. Etablir l'équation électrique du système liant E , i , R , Ω , a , b et B_0 .

3. En déduire l'évolution de Ω au cours du temps en supposant qu'à l'instant $t = 0$ la spire est immobile. Tracer la courbe donnant Ω en fonction du temps.

On pourra poser pour simplifier : $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{J} \left(\beta + \frac{4a^2 b^2 B_0^2}{R} \right)$ et $\frac{\Omega_0}{\tau} = \frac{1}{J} \left(\frac{2ab B_0 E}{R} - C_0 \right)$ que

l'on supposera positif.

• brin, constante de temps, dynamo, entrefer, équation électrique d'un système électromécanique, équation mécanique d'un système électromécanique, graphe, machine à champ radial, moment des forces électromagnétiques, moment d'inertie, moteur à courant continu, rotor

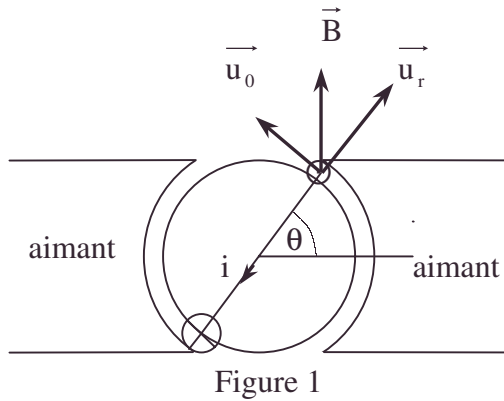


Figure 1

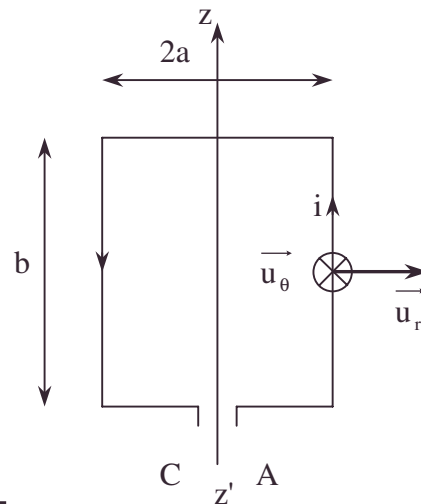


Figure 2

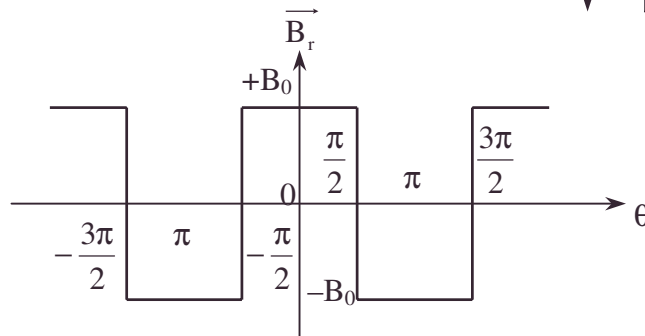


Figure 3

Concours ATS ; Durée : 0h30.

Corrigé

A.1. Utilisons le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{V}_\theta \wedge \vec{B}$ avec $V_\theta = \alpha\Omega$.

$e = \oint (\vec{V}_m \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$; \vec{B} et $d\vec{\ell}$ sont colinéaires pour les fils horizontaux $\Rightarrow (\vec{V}_m \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0$

Sur un fil vertical, la contribution vaut : $-abB_0\Omega$ et au total $e = -2abB_0\Omega$.

2. On a : puissance électrique $e i$; puissance mécanique $C_z \Omega$
la conversion donne : $0 = e i - \Omega C \Rightarrow C_z = 2i abB_0$

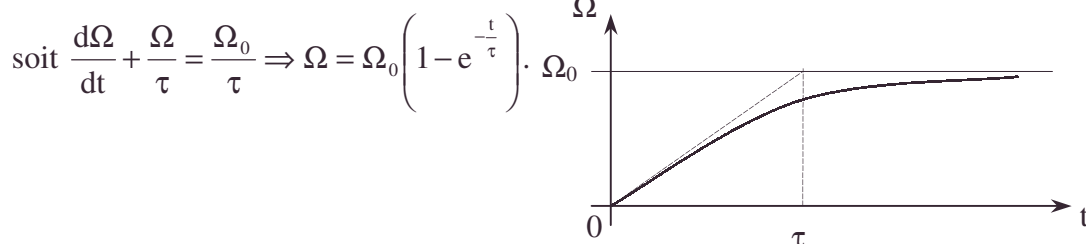
B.1. $e = (R + R') i \Rightarrow i = -\frac{2\Omega abB_0}{R + R'}$ i est continu si Ω est constant.

2. $I \frac{d\Omega}{dt} = (2i abB_0 - \beta\Omega + C_m) = 0$; or $i = -\frac{2abB_0\Omega}{R + R'} \Rightarrow C_m = \Omega \left[\beta + \frac{4a^2 b^2 B_0^2}{(R + R')^2} \right]$.

C.1. Le théorème du moment cinétique s'écrit : $J \frac{d\Omega}{dt} = -\beta\Omega - C_0 + 2i abB_0$.

2. L'équation électrique nouvelle est : $E - 2ab\Omega B_0 = R i$.

3. En remplaçant i dans **C.1.** : $\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \left[\frac{\beta}{J} + \frac{(2abB_0)^2}{JR} \right] = 2ab \frac{B_0 E}{JR} - \frac{C_0}{J}$,

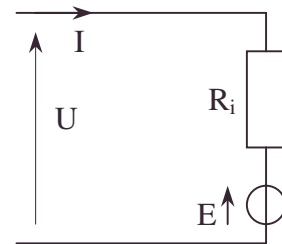


6.2.2.2. Etude expérimentale d'un moteur

On considère un moteur à courant continu, bipolaire, à excitation indépendante, parfaitement compensé, ce moteur pouvant être relié ou non à un dispositif type frein à poudre (ou un frein de Prony).

La plaque signalétique du moteur indique :

Puissance nominale :	0,80 kW ;
Vitesse nominale :	1500 tr/min ;
Tension nominale d'alimentation :	220 V ;
Intensité nominale d'induit :	4,6 A ;
Intensité nominale dans l'inducteur :	0,35 A.



1. L'induit du moteur en rotation peut être modélisé par le dipôle ci-contre, E est la force contre-électromotrice (f.c.é.m.). Justifier rapidement la relation $E = \phi \Omega$ où Ω est la vitesse de rotation en rad/s ; que représente ϕ ?

2. Détermination des résistances des circuits inducteurs R_e et induit R_i .

a. Une mesure rapide, avec un ohmmètre, de la résistance de l'inducteur donne une valeur affichée de 512Ω avec une précision de 0,5% (de la valeur lue) ± 1 digit. Donner l'intervalle où se situe la valeur de R_e .

b. On veut maintenant mesurer la résistance R_i du circuit induit. Pour les conditions expérimentales, répondre aux questions ou choisir, en justifiant ce choix, parmi les propositions suivantes :

La mesure s'effectue rotor bloqué ou tournant à vitesse réduite ?

Pourquoi laisse-t-on tourner le moteur à sa vitesse nominale avant la mesure ?

Peut-on utiliser un ohmmètre ?

La mesure a été effectuée par la méthode voltampèremétrique, on a relevé les valeurs suivantes pour lesquelles U est la tension mesurée par un voltmètre numérique d'impédance d'entrée élevée ($10 \text{ M}\Omega$) et I l'intensité de courant dans l'induit :

U (V)	2,31	4,61	6,90	9,20	11,5	13,8
I (A)	0,50	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0

Déterminer la valeur de la résistance R_i .

Représenter le schéma du montage expérimental pour ces mesures en justifiant les positions du voltmètre et de l'ampèremètre.

3. On prendra pour R_i la valeur $4,6 \Omega$. On mesure grâce à une génératrice tachymétrique placée en bout d'arbre, la fréquence de rotation n du moteur en tour/minute.

a. On détermine pour deux valeurs du courant d'excitation I_e dans l'inducteur les valeurs de E et n .

$I_e = 0,35 \text{ A}$.

E (V)	240	220	200	150	120	75	20	0
n (tr/min)	1670	1510	1380	1035	820	510	110	0

$I_e = 0,20 \text{ A}$.

E (V)	186	150	120	90	60	30	0
n (tr/min)	1800	1450	1150	850	560	260	0

1. Indiquer un mode opératoire permettant de déterminer E .

2. Tracer sur le même graphe E en fonction de n pour les deux valeurs de I_e .

3. Justifier brièvement l'allure des courbes obtenues.

4.a. Montrer que le flux Φ n'est pas proportionnel à l'intensité I_e du courant dans l'inducteur.

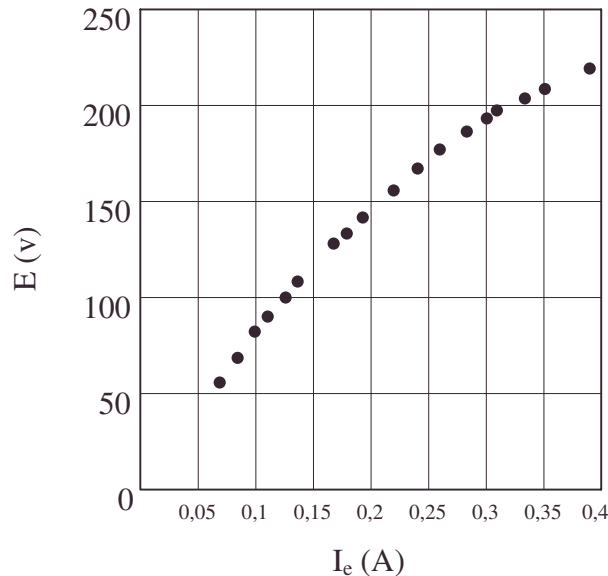
• confrontation expérimentale, détermination des résistances des circuits d'un moteur, digit [numérisation], frein à poudre, frein de Prony, méthode voltampèrométrique, ohmmètre, tableau numérique, voltmètre numérique

b. On relève les valeurs de E et de l'intensité I_e du courant dans l'inducteur pour une fréquence de rotation maintenue constante, $n = 1500$ tr/min.

E (V)	219	210	204	198	194	188	179	168	158
I_e (A)	0,39	0,35	0,33	0,31	0,30	0,28	0,26	0,24	0,22

E (V)	147	137	130	107	100	87	78	65	56
I_e (A)	0,20	0,18	0,17	0,14	0,13	0,11	0,10	0,08	0,07

La courbe $E(I_e)$ est donnée. Justifier en quelques lignes l'allure de cette courbe.



4. On note :

- P_a : la puissance électrique absorbée totale (induit et inducteur).
- P_{tr} : la puissance électrique transmise au rotor.
- P_u : la puissance mécanique disponible sur l'arbre.
- P_{Je}, P_{Ji} : les pertes par effet Joule respectivement dans l'inducteur et dans l'induit.
- P_c : les pertes autres que par effet Joule.

a. Avec les notations ci-dessus, représenter le bilan de puissance du moteur à courant continu à excitation indépendante.

b. Le terme P_c regroupe les pertes mécaniques P_m et les pertes fer P_F : expliciter brièvement ces termes ; de quels paramètres dépendent-ils ?

c. Un modèle équivalent de l'induit a été donné au **1.**, proposer un modèle de l'inducteur quand le moteur est en régime établi et en déduire les expressions de P_a , P_{Je} et P_{Ji} .

5. Essai à vide à vitesse constante $n = 1500$ tr/min.

a. Pour les conditions expérimentales, répondre aux questions suivantes, en justifiant votre réponse :

α. On met sous tension l'inducteur avant l'induit, ou l'inverse ?

β. On commence avec $U = 0$ et on augmente progressivement ou bien on démarre sous U nominale ?

γ. Lors de l'essai, comment obtient-on une vitesse constante égale à la vitesse nominale alors que U varie et reste inférieure à U nominale ?

b. Montrer que l'on peut obtenir, pour chaque valeur de I_e dans l'inducteur, grâce au bilan de puissance, la valeur de P_c en mesurant la tension U aux bornes de l'induit et l'intensité I_i du courant dans l'induit.

c. On relève les valeurs suivantes :

- confrontation expérimentale, effet Joule, essai à vide d'un moteur à vitesse constante, graphe, tableau numérique

U (V)	222	213	198	176	151	120	85
I _i (A)	0,43	0,44	0,45	0,48	0,56	0,66	0,92
I _e (A)	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10

Tracer P_c en fonction de I_e .

Déduire de la courbe précédente la valeur des pertes mécaniques P_m à 1500 tr/min.

6. Le moteur est maintenant utilisé pour entraîner un frein à poudre qui exerce sur l'arbre un couple résistant dont le moment M_r est réglable.

a. Le point de fonctionnement est :

$n_0 = 1500$ tr/min.

tension aux bornes de l'induit : $U_0 = 212$ V.

intensité du courant dans l'induit : $I_{i0} = 3,0$ A.

1. Calculer la f.c.é.m. E dans l'induit et en déduire la valeur de I_{e0} intensité du courant dans l'inducteur.

2. Calculer la puissance disponible sur l'arbre (puissance utile) P_u .

3. Calculer la valeur du couple résistant M_r .

b. On maintient I_e constant et égal à 0,31 A. On modifie la valeur de la tension U aux bornes de l'induit et on ajuste M_r pour que l'intensité du courant dans l'induit reste constante et égale à I_{i0} .

1. Montrer que le moment M_e du couple électromagnétique est constant.

Calculer sa valeur.

2. Exprimer la fréquence de rotation n en tr/min en fonction de U sous la forme $n = aU + b$. Donner les expressions de a et b .

3. On relève les valeurs suivantes :

U (V)	200	100	40
n (tr/min)	1416	666	200

Tracer U en fonction de n .

Pour quelle valeur de U a-t-on $n = 0$?

Comparer à la valeur prévue par la relation du **6.b.2.**

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1. L'équivalence énergétique s'écrit :

$E_i = \Gamma \Omega$ avec le couple électromagnétique $\Gamma = \phi i$; ϕ un flux magnétique formel dépendant des caractéristiques géométriques, électriques et magnétiques du moteur,

$\Rightarrow E = \phi \Omega$.

2.a. Incertitude sur R_e : $\Delta R_1 = \frac{0,5}{100} \cdot 512 = 2,6 \Omega$ due à la précision.

$\Delta R_2 = 1 \Omega$, hasard de l'affichage.

$\Delta R_e = \Delta R_1 + \Delta R_2$; A.N. : ΔR_e avec # 4Ω .

$508 \Omega \leq R_e \leq 516 \Omega$.

b.α. Pour éviter l'intervention dans la mesure de d.d.p. de la f.é.m. due au rotor, on bloque le rotor.

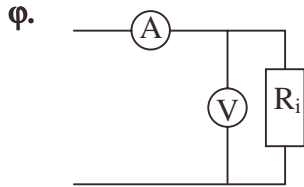
β. Il faut atteindre la température de fonctionnement car la résistance en dépend, $R_i(T)$.

γ. On n'utilise pas un ohmmètre actif pour mesurer une résistance d'un dipôle actif parcouru par un courant.

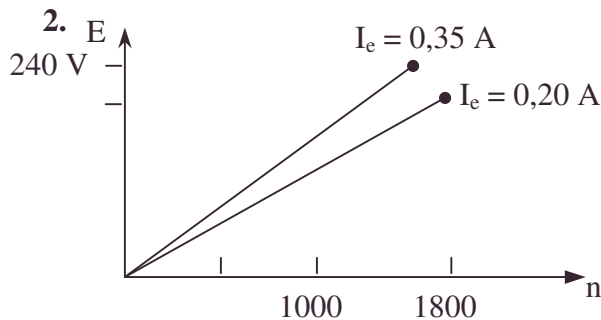
δ. $R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 4,6 \Omega$ stable pour toutes les mesures. Il suffit de tracer $U = U(I)$ et

de constater une pente constante indépendante de I

ε. On utilise le montage courte dérivation car la résistance de l'ampèremètre en série directement avec R_i constituerait une erreur systématique importante vu la valeur de R_i .



3.a.1. $U = E + R_i I \Rightarrow E = U - R_i I$ on mesure U et I comme précédemment.



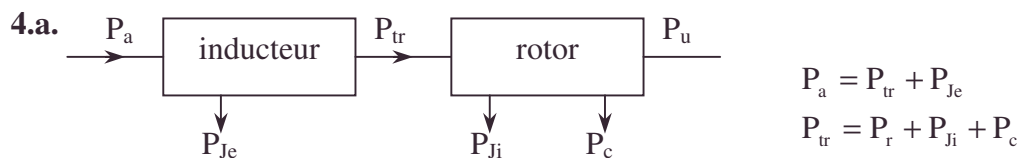
3. $\phi = \phi(I_e)$ et $E = \phi \frac{2\pi n}{60}$ vu 1., on a bien des droites passant par l'origine.

4. Si $\phi = K I_e$ $\frac{\phi(I_{e1})}{\phi(I_{e2})} = \frac{I_{e1}}{I_{e2}} = \frac{\left(\frac{\Delta E}{\Delta n}\right)_1}{\left(\frac{\Delta E}{\Delta n}\right)_2} = 1,4$ alors que $\frac{I_{e1}}{I_{e2}} = 1,75$.

L'hypothèse n'est pas vérifiée.

b. Pourtant l'hypothèse $E = \frac{2\pi}{60} K I_e n$ est une bonne approximation pour $I_e < 0,2$ A

en interprétant la courbe ; la non linéarité due au matériau magnétique se révèle entre 0,2 et 0,4 A car ϕ dépend de B qui dépend alors non linéairement de H qui dépend de I ; on peut penser à une saturation pour $I > 0,4$ A mais $I_{e \text{ nominale}} = 0,35$ A limite la réalisation des mesures.



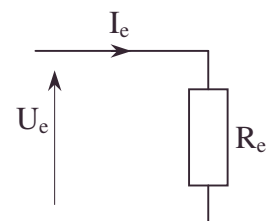
b.α. P_m due au frottement visqueux dépend de Ω .

β. P_F due aux pertes par hystérésis (dépend donc de I_e et de E) et par courant de Foucault (dépend donc de Ω).

c. Modèle de l'induit en courant continu constant.

$$P_{Je} = R_e I_e^2 = U_e I_e ; P_{ji} = R_i I_i^2$$

$$P_{tr} = UI \Rightarrow P_a = U_e I_e + UI$$



5.a.α. On met sous tension l'inducteur avant l'induit car en absence de courant I_i le rotor ne démarre pas (ce qu'il ferait dans le cas contraire et la variation de vitesse serait peut-être trop rapide).

β. Dans le même souci de progressivité, on commence par $U = 0$ et on augmente progressivement.

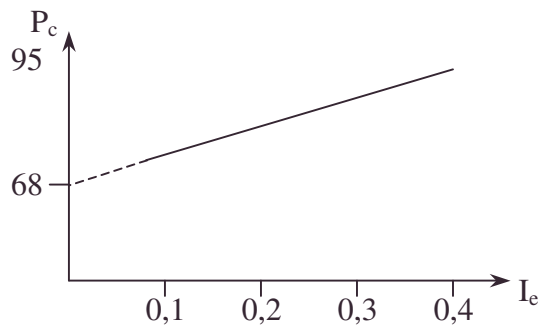
γ. On agit sur le paramètre I_e qui éventuellement dépasse $I_{e \text{ nominal}}$.

b. Pour un essai à vide, $P_u = 0$.

$$P_a = P_c + P_{je} + P_{ji} = P_c + R_i I_i^2 + U_e I_e = U_e I_e + U I_i \Rightarrow P_c = U I_i - R_i I_i^2$$

c.

I_e en A	0,4	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
P_c en W	94,6	92,8	88,2	83,4	83,1	77,2	74,3



d. On prolonge la droite pour $I_e = 0$ il n'y a plus de pertes électriques dans

$$P_c : P_c = P_m.$$

En moyenne on diminue de 6,3 W pour une diminution de 0,10 A.

On a donc pour $I_e = 0$; $P_m = 74,3 - 6,3 = 68$ W.

6.a.1.α. (cf. **3.a.1.**) : $E_0 = U_0 - R_i I_{i0}$ A.N. : $E_0 = 198,2$ V.

β. La figure du **A.3.** nous permet la lecture de I_{e0} ; $I_{e0} = 0,31$ A. (ou sinon voir énoncé **6.b.**).

$$2. P_a = P_u + P_{je} + P_{ji} + P_c \Rightarrow P_u = U_0 I_{i0} + U_e I_e - R_i I_{i0}^2 - U_e I_e - P_c(I_{e0}).$$

A.N. : $P_c(I_{e0}) = 89$ W vu **5.c.** servant de référence ; or $R_i = 4,6 \Omega$.

$$P_u = 506 \text{ W.}$$

$$3. P_u = M_r \Omega \text{ en régime établi} \Rightarrow M_r = \frac{P_u}{\Omega} \text{ A.N. : } M_r = 3,2 \text{ N.m.}$$

$$\text{b.1.}\alpha. P_{tr} = M_e \Omega = E I_i \Rightarrow M_e = E \frac{I_i}{\Omega} \text{ constant ici.}$$

$$\beta. M_e = \frac{E I_i}{\Omega} = \frac{E(I_e) I_{i0}}{\frac{2\pi n}{60}} ; \text{ A.N. : } I_e = 0,31 \text{ A ; } E = 198,2 \text{ V ; } I_{i0} = 3,0 \text{ A ; } n = 1500 \text{ tr/min ; } M_e = 3,8 \text{ N.m.}$$

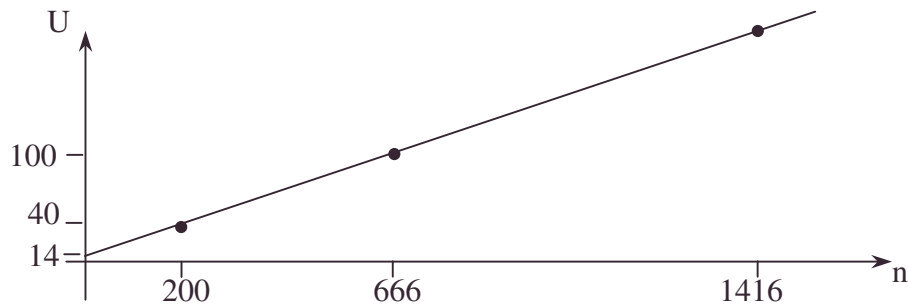
$$2. E = U - R_i I_i = \phi \Omega = \phi \frac{2\pi n}{60} \text{ or } E_0 = \phi \frac{2\pi n_0}{60} \Rightarrow E = E_0 \frac{n}{n_0}.$$

Divisons par $\frac{n_0}{E_0}$ la première relation.

$$n = U \frac{n_0}{E_0} - R_i I_{i0} \frac{n_0}{E_0} ; a = \frac{n_0}{E_0} ; b = -R_i I_{i0} \frac{n_0}{E_0}.$$

A.N. : $n_0 = 1500 \text{ tr.min}^{-1}$; $E_0 = 198,2 \text{ V}$; $I_{i_0} = 3 \text{ A}$
 $a = 7,568 \text{ tr/V.min}$; $b = -104,4 \text{ tr/min}$.

b.3.



On lit $U_1 = 14 \text{ V}$ pour $n = 0$; or en **b.2.** : $U_1 = -\frac{b}{a}$; $U_1 = 13,8 \text{ V}$.

La théorie et l'expérience sont en accord.

6.2.2.3. Pompe à métal fondu d'échangeur de centrale nucléaire Montages parallèle et série de l'inducteur

Un liquide non compressible, conducteur et non électrolysable (métal fondu par exemple) est contenu dans un tube dont les parois sont isolantes. La section du tube est un carré dont les côtés de longueur a sont parallèles aux axes de référence Ox , Oy (figure 1).

La masse volumique du liquide est ρ . On appelle g l'accélération de la pesanteur. Dans l'une des branches verticales du tube, deux électrodes planes rectangulaires (largeur a , hauteur b) permettent de faire passer un courant électrique à travers le liquide. Dans le volume parallélépipédique ayant pour bases les deux électrodes, appelé dans la suite "volume actif", la densité de courant \vec{j} est uniforme et parallèle à l'axe Oy . En dehors du volume actif, la densité de courant est négligeable. Dans tout ce qui suit, le volume actif sera toujours totalement immergé. Au moyen d'un électro-aimant, on soumet le volume actif à une induction magnétique \vec{B} uniforme, parallèle à l'axe Ox .

Les effets éventuels dus aux parois isolantes du tube sont supposés négligeables.

Le tube est fermé sur lui-même et le liquide le remplit complètement (figure 2). Le système étudié fait circuler le liquide.

Entre deux instants très proches de dates t et $t + \delta t$, le travail des forces de frottement s'exerçant sur l'ensemble du liquide s'écrit : $\delta W_f = -Kv^2 \delta t$, où K est une constante positive.

1. Calculer v en régime permanent en courant continu.

Application numérique : lorsque $j = 60 \text{ A.cm}^{-2}$ et $B = 0,2 \text{ T}$, on obtient $v = 0,5 \text{ cm.s}^{-1}$.
 $\rho = 13,6 \text{ g.cm}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; $a = 2 \text{ cm}$; $b = 2a$; évaluer K .

2. Pour produire l'induction magnétique et le courant traversant le liquide, on dispose d'un générateur alternatif dont la f.e.m. est, à un instant de date t : $u(t) = U_0 \cos \omega t$, où U_0 et ω sont des constantes positives. L'impédance interne du générateur se réduit à une résistance r . Le bobinage de l'électro-aimant a une inductance propre L et une résistance égale à celle du générateur. L'électro-aimant crée, dans tout le volume actif, une

- électro-aimant, graphe, montage parallèle de l'inducteur, montage série de l'inducteur, volume actif

induction magnétique uniforme : $\vec{B} = k.i\vec{u}_x$, où k est une constante, i est l'intensité parcourant le bobinage et \vec{u}_x est le vecteur unitaire sur l'axe Ox . Le liquide a une conductivité γ ; on désignera par R la résistance du volume actif. La valeur de ω est assez élevée pour que seule la moyenne temporelle des forces magnétiques ait un effet sur le mouvement d'ensemble du liquide. On supposera que $L\omega \gg r$.

1. On adopte le schéma représenté sur la figure 3 : R est mise en parallèle avec le bobinage auquel on adjoint, en série, une capacité C . Justifier la présence de cette capacité. Quelle valeur de C faut-il choisir pour obtenir le débit volumique de liquide le plus grand possible en régime permanent ?

2. La capacité étant fixée à cette valeur optimale, donner l'allure de la variation du débit volumique D en régime permanent, en fonction du paramètre $\lambda = \frac{r}{R}$ (R étant considérée comme fixe), dans l'intervalle $0,1 \leq \lambda \leq 2$.

3. On connecte maintenant en série le volume actif (R), le bobinage de l'électro-aimant et la capacité C . Quelle est la valeur optimale de C ? Prenant cette valeur de C , comparer les débits $D(\lambda)$ obtenus avec ce montage avec les précédents. Lequel des deux montages vous paraît être le plus avantageux ?

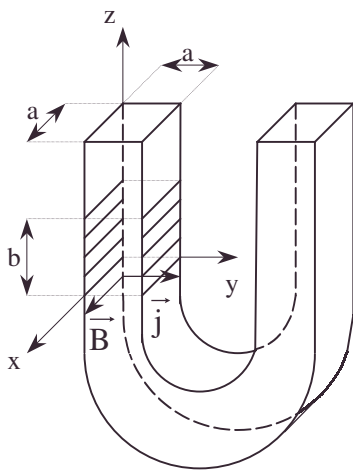


figure 1

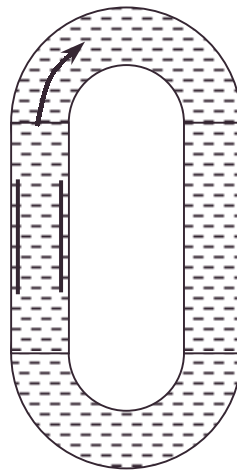


figure 2

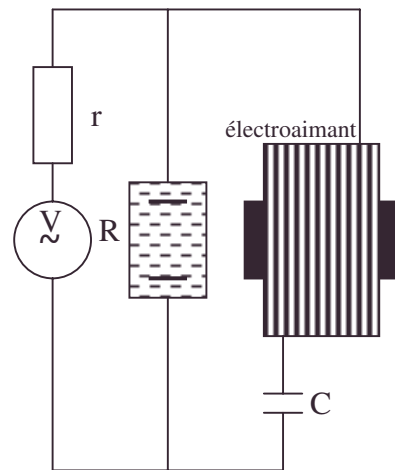


figure 3

Autre concours ; Durée : 1h30.

Corrigé

1. • En régime permanent, la masse de liquide qui arrive par unité de temps sur la section d'entrée d'une tranche d'abscisse s est $D_m = \rho a^2 v$, est égale à la masse de liquide qui traverse par unité de temps la section de sortie de la même branche d'abscisse s' soit : $D_m = \rho a^2 v' \Rightarrow v = v'$ et v est indépendant de la section ; il n'y a aucune variation d'énergie cinétique d'une particule fluide de masse dm et d'énergie cinétique $dE_c = \frac{1}{2} v^2 dm$.

• Pour l'ensemble du circuit vertical plein, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle de pesanteur.

• Bilan énergétique : le travail de la force de Laplace dans le volume actif compense le travail des forces de frottement.

$$\vec{df} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B} ; dW_L = \vec{df} \cdot \vec{v} dt \Rightarrow dW_L = (\vec{j} \wedge \vec{B}) \vec{v} dt ba^2.$$

• bobinage [self], bobine [self], électro-aimant, moyenne temporelle, optimisation, volume actif

$$dW_L = jBvba^2 dt = Kv^2 dt \Rightarrow v = \frac{jBba^2}{K} ; \text{A.N. : } K = \frac{jBba^2}{v} ; K = 384 \text{ kg.s}^{-1}.$$

Tout se passe comme si la force de Laplace relative au volume actif compensait une force de frottement Kv ; $jBba^2 = Kv$.

2.1.a.α. La moyenne temporelle de cette égalité s'écrit : $ba^2 < v > = K < v >$.

$$\beta. D = a^2 < v > = \frac{a^4 b}{K} < jB >.$$

$$j = \frac{I_1}{ab}.$$

$$B = kI_2.$$

$$D = \frac{a^4 bk}{K ab} < I_1 I_2 > = \frac{a^3 k}{K} < I_1 I_2 >.$$

$$\gamma. RI_1 = \left(r + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) I_2 = \underline{U}_1.$$

$$Vu \langle u_i \rangle = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi,$$

$$< I_1 I_2 > = \frac{1}{2} I_{1m} I_{2m} \cos(\arg I_2 - \arg I_1).$$

δ. Conclusion : D est maximum quand $\cos(\arg I_2 - \arg I_1) = 1$.

Ce qui a lieu pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$.

Il n'y a alors plus de déphasage entre \underline{I}_1 et \underline{I}_2 .

C permet le réglage par $C = \frac{1}{L\omega^2}$.

$$\text{b. Alors, } D_{\max} = \frac{1}{2} a^3 \frac{k}{K} I_{1m} I_{2m} ;$$

$$\text{Alors } \underline{u}_1 = \frac{\frac{Rr}{R+r}}{r + \frac{Rr}{R+r}} \underline{u} \text{ vu le pont diviseur de tension ;}$$

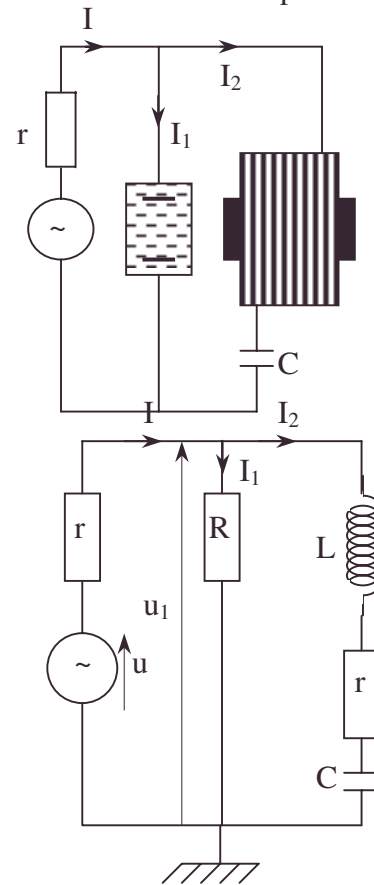
$$\underline{u}_1 = \frac{R}{(2R+r)} \underline{u}.$$

$$D_{\max} = \frac{1}{2} a^3 \frac{k}{K} \frac{R^2}{(2R+r)^2} \frac{U_0^2}{Rr} = \frac{1}{2} \frac{a^3 k U_0^2 R}{K (2R+r)^2 r}$$

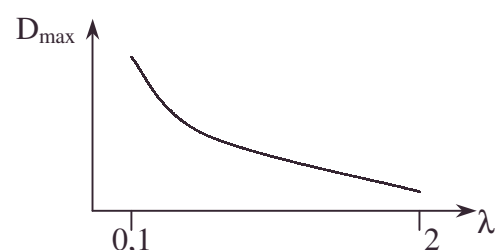
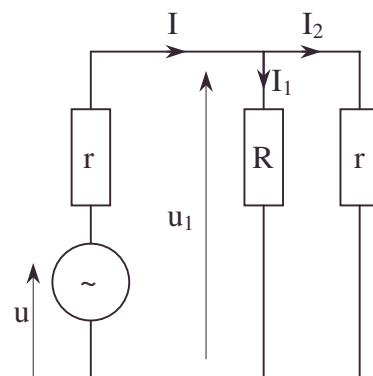
$$\text{2. Introduisons } \lambda = \frac{r}{R} ;$$

en remplaçant $r = \lambda R$:

$$D_{\max} = \frac{1}{2} a^3 \frac{k}{K} \frac{U_0^2}{R^2 \lambda (\lambda + 2)^2}.$$



$$RI_1 = rI_2 = \underline{U}_1$$



• équivalence de formulation [tout se passe comme si], maximum, moyenne temporelle, pont diviseur de tension, résonance

3. $D' = \frac{a^4 b}{K} \langle jB \rangle$ avec $j = \frac{I'}{ab}$, $B = k I'$.

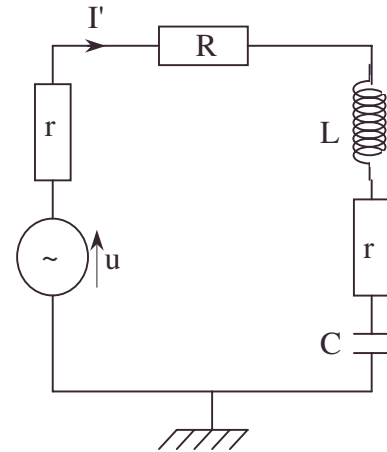
$$D' = \frac{a^4 b}{K k a b} \langle I'^2 \rangle \text{ avec } \underline{I'} \left(2r + R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) = \underline{U}$$

$$D' = \frac{1}{2} \frac{a^3 b}{k K} I_m'^2 \text{ avec } I_m' = \frac{U_0}{\sqrt{(2r + R)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

D' est maximum pour un dénominateur de I_m' minimum, soit pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2}$.

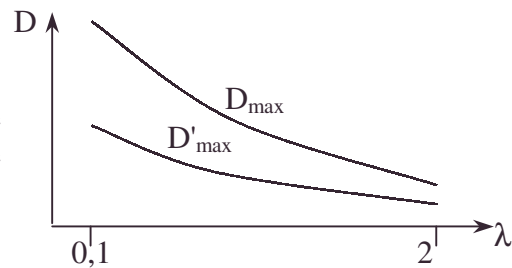
C'est-à-dire la même condition qu'en **a**.

$$D'_{\max} = \frac{1}{2} \frac{a^3 b}{k K} \frac{U_0^2}{(2r + R)^2} = \frac{1}{2} \frac{a^3 b}{k K} \frac{U_0^2}{R^2} \frac{1}{(1 + 2\lambda)^2}.$$



Comparons graphiquement D_{\max} et D'_{\max} .

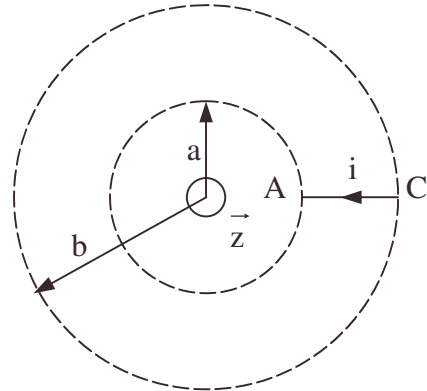
Pour augmenter le débit de la pompe, à U_0 , L , C , ω et λ donnés, le montage parallèle étudié en **2.2**. est plus favorable que le montage série étudié en **2.3**.



6.2.2.4. Traceur de courbes à courroie

I. Moteur à champ axial

Sur un rotor tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz (de vecteur unitaire \vec{z}) sont fixés, en disposition radiale, des conducteurs rectilignes, tels que AC par exemple, parcourus de C vers A par le courant d'intensité i . En tout point M de la couronne comprise entre les deux cercles de rayons a et b , existe un champ d'induction $\vec{B}_M = (\beta + \alpha r)\vec{z}$, β et α sont des constantes positives et r étant la distance du point M à l'axe Oz.



1. Déterminer pour ce conducteur CA :

a. Le moment Γ_z par rapport à l'axe Oz, des forces électromagnétiques ;

b. La force électromotrice d'induction e qui y prend naissance lors de sa rotation autour de Oz.

2. Un dispositif réunit (au même potentiel) toutes les extrémités A des conducteurs tels que AC. De même sont réunies (au même potentiel) toutes les extrémités C. L'ensemble des conducteurs AC en parallèle absorbe I . Que deviennent Γ_z et e ?

II. L'induit d'un moteur électrique à courant continu est un ensemble de bobines fixées sur un rotor tournant autour de son axe de symétrie à la vitesse angulaire ω .

– Electriquement, c'est un récepteur de résistance r , siège d'une f.e.m. d'induction $|e| = k_e \cdot |\omega|$ et traversé par l'intensité i . On négligera l'inductance L du bobinage.

– Mécaniquement, le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est J et le moment par rapport à ce même axe, des force électromagnétiques est $\Gamma_z = k_c i$.

L'induit est alimenté par un amplificateur qui, lorsqu'il est soumis à la tension de commande u_1 , est équivalent à un générateur de f.e.m. Au_1 et de résistance interne ρ . Dans ce problème, A , ρ , k_c et k_e sont des constantes positives.

1. Exprimer Γ sous la forme $\Gamma = \lambda u_1 - \mu \omega$.

2. Lorsque le moteur tourne, il y a un frottement visqueux qui se traduit par un couple résistant dont le module du moment par rapport à l'axe est $|\Gamma_f| = f \cdot |\omega|$, f constante positive.

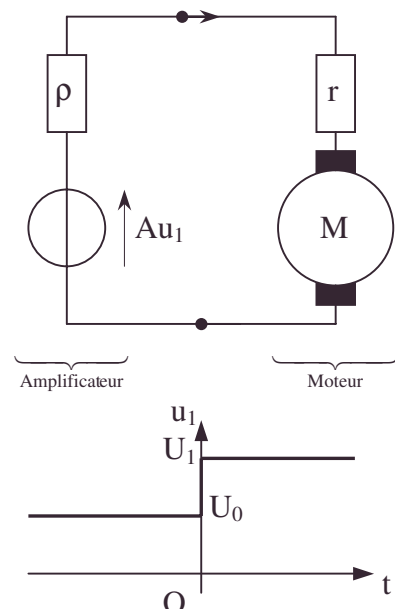
Le moteur tournant en régime permanent à ω_0 lorsqu'il est soumis à $u_1 = U_0$, on applique brusquement à $t = 0$ une tension $u_1 = U_1$ constante.

Quelle est l'expression $\omega(t)$ du régime transitoire d'établissement du nouveau régime permanent ?

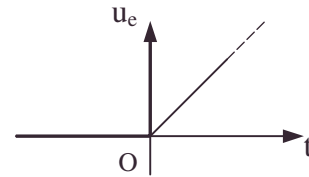
Application numérique : $k_e = 0,28 \text{ V.s.rd}^{-1}$; $k_c = 0,2 \text{ mN.A}^{-1}$; constante de temps : $\tau = 80 \text{ ms}$; $r = 18 \Omega$; $\rho = 22 \Omega$; $A = 250$.

Lorsque $u_1 = 50 \text{ mV}$, la vitesse de rotation est 4 tours par seconde.

Déterminer f et J .



1. Quelle est l'équation différentielle reliant x à une tension $u_e > 0$ appliquée par un utilisateur entre A et B ?
2. Lorsque la tension u_e est constante et que le chariot s'immobilise, quelle relation existe entre x et u_e ?
3. Quelle est la condition d'un amortissement critique ?
4. Le chariot étant au repos, avec $u_e = 0$ et $x = 0$, on applique à la date $t = 0$ la tension $u_e = k.t$ (k constante).
Lorsqu'un régime permanent du mouvement s'établit, comparer $u_e(t)$ et $x(t)$.



Autres concours ; Durée : 2h.

Corrigé

I.1.a. $\vec{d\Gamma}_0 = \vec{OP} \wedge i(\vec{d\ell} \wedge \vec{B}) = i d\vec{r} \vec{z} (\beta r + \alpha r^2).$

$$\vec{\Gamma}_0 = i \vec{z} \left[\frac{\beta}{2}(b^2 - a^2) + \frac{\alpha}{3}(b^3 - a^3) \right]; \Gamma_z = i(b-a) \left[\frac{\beta}{2}(a+b) + \frac{\alpha}{3}(a^2 + ab + b^2) \right].$$

b. On écrit : $e = -\frac{d\phi_{\text{coupé}}}{dt}$; et $\Gamma_z = \frac{i d\phi_{\text{coupé}}}{d\theta}$ ou plus habituellement le transfert des

puissances : $ei = -\Gamma_z \dot{\theta}$.

$$e = -\frac{\Gamma_z}{i} \frac{d\theta}{dt} \text{ soit } e = -(b-a) \left[\frac{\beta}{2}(a+b) + \frac{\alpha}{3}(a^2 + ab + b^2) \right] \omega.$$

2.a. $\Gamma'_z = \sum_j \Gamma_{z_j} = \left(\sum_j i_j \right) (b-a) \left(\frac{\beta}{2}(b-a) + \frac{\alpha}{3}(a^2 + ab + b^2) \right)$
 $= I(b-a) \left(\frac{\beta}{2}(b-a) + \frac{\alpha}{3}(a^2 + ab + b^2) \right)$ (cf. montage en parallèle).

b. $e' = e = -(b-a) \left(\frac{\beta}{2}(a+b) + \frac{\alpha}{3}(a^2 + ab + b^2) \right) \omega$ (cf montage en parallèle).

II.1. Schéma électrique équivalent.

a. Equation électrique : $Au_1 + e = (\rho + r)i$.

avec $e = -k_e \omega$ (cf. I.) $k_e > 0 \Rightarrow i = \frac{Au_1 - k_e \omega}{\rho + r}$.

b. $\Gamma_z = k_c i = \frac{Ak_c u_1}{\rho + r} - \frac{k_c k_e \omega}{\rho + r}$, de la forme

demandée, avec $\lambda = \frac{Ak_c}{\rho + r}$; $\mu = \frac{k_c k_e}{\rho + r}$;

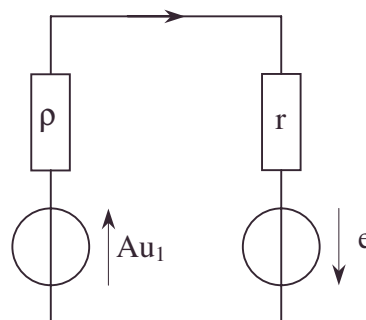
AN : $\lambda = 1,25 \text{ N.m.V}^{-1}$ $\mu = 1,4.10^{-3} \text{ N.m.s.}$

Ne pas confondre le newton mètre "N.m" avec le millinewton "mN".

2.a. Equation mécanique : $J \dot{\omega} = \Gamma + \Gamma_f = \lambda u_1 - \mu \omega - f \omega$;

$$J \dot{\omega} + (\mu + f) \omega = \lambda u_1.$$

α. ESSM $J \dot{\omega} + (\mu + f) \omega = 0$; $\omega = W e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{J}{\mu + f}$.



β. EASM $\omega_1 = \frac{\lambda U_1}{\mu + f}$; rappelons que c'est la vitesse angulaire limite.

On aura donc aussi : $\omega_0 = \frac{\lambda U_0}{\mu + f}$ comme vitesse angulaire à $t = +0$.

γ. Solution générale :

$$\omega(t) = \frac{\lambda}{\mu + f} \left[U_1 + (U_0 - U_1) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \text{ qui vérifie les conditions initiale et finale.}$$

$$\text{Soit } \omega = \frac{A k_c}{f(\rho + r) + k_c k_e} \left[U_1 + (U_0 - U_1) e^{-\frac{t}{J(\mu + f)}} \right].$$

b. $\omega_{\text{limite}} = \frac{\lambda u_1}{\mu + f} = \frac{A k_c u_1}{f(\rho + r) + k_c k_e} \Rightarrow f = \lambda \frac{u_1}{\omega_1} - \mu$ avec $\omega_1 = 2\pi n_1$.

$$f = \left[A \frac{u_1}{\omega_1} - k_e \right] \cdot \frac{k_e}{\rho + r} ; \text{AN : } f = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$J = \tau(\mu + f) = \tau \frac{\lambda u_1}{\omega_{\text{lim}}} = \frac{\tau A k_c u_1}{\rho + r \omega_1} ; \text{AN : } J = 1,99 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2.$$

III.1. Les galets poulies de masse négligeable, donc de moment dynamique négligeable, assurent l'égalité des tensions présentes sur les galets situés à gauche (de même à droite) de (S).

a. Première équation mécanique :

$$M \ddot{x} = T' - T, \text{ } T \text{ et } T' \text{ étant des modules.}$$

b. Deuxième équation mécanique :

$$J \ddot{\theta} = (T - T')d + \Gamma_z.$$

c. Le non-glissement de la courroie sur le moteur en

$$K \text{ s'écrit : } \dot{x} = \dot{\theta} d \text{ (soit } \ddot{x} = \ddot{\theta} d \text{).}$$

d. On en déduit par élimination de $T - T'$ l'équation en x : $(J + Md^2) \ddot{x} = \Gamma_z d$.

2.a. Equation angulaire complète : $J \ddot{\theta} = (T - T')d + \Gamma_z + \Gamma_{f_z}$.

b. Equations maintenues : $M \ddot{x} = T' - T$ et $\ddot{x} = \ddot{\theta} d$.

c. Equation en x : on élimine θ , $T' - T$ et on remplace $\Gamma_{f_z} = -b - c \dot{\theta}$, on trouve :

$$\left(\frac{J + Md^2}{d} \right) \ddot{x} + \frac{c}{d} \dot{x} + b = \Gamma_z.$$

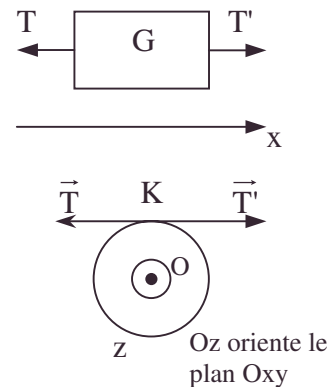
d. Au démarrage : $\dot{\theta}_0 = 0$; $\ddot{x}_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 0$; Γ_{f_z} n'est jamais moteur, et comme Γ_z doit annuler l'effet de Γ_{f_z} ($\Gamma_z + \Gamma_{f_z} > 0$; $\Gamma_z > b$; AN : $b = 0,6 \text{ N.m}$).

e. cf. 1. : $\ddot{x} = \frac{\Gamma_z d}{J + Md^2}$; $\ddot{x}_{\text{max}} = \frac{\Gamma_{z\text{max}} d}{J + Md^2}$; AN : $\ddot{x}_{\text{max}} = 110,3 \text{ ms}^{-2}$, ce qui est très

important.

IV.1. Pour un montage potentiométrique qui ne débite pas : $u' = \frac{x}{\ell} E$.

• accélération de chariot, courroie, démarrage de moteur, égalité des tensions s'exerçant sur une poulie ou galet de masse négligeable, P.F.D., théorème du moment cinétique



Or, $u_e = u' + u_1 \Rightarrow u_1 = u_e - \frac{x E}{\ell}$.

• $\Gamma_z = \lambda u_1 - \mu \dot{\theta}$, or $\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{d}$ cf. non glissement. $\Gamma_z = \lambda u_e - \lambda \frac{x E}{\ell} - \mu \frac{\dot{x}}{d}$.

• Reportons dans **III.2.c.** : $\frac{J + M d^2}{d} \ddot{x} + \dot{x} \left(\frac{c}{d} + \frac{\mu}{d} \right) + \lambda x \frac{E}{\ell} = \lambda u_e - b$.

$\frac{J + M d^2}{d} \ddot{x} + \dot{x} \left(\frac{c}{d} + \frac{k_c k_e}{d(\rho + r)} \right) + \frac{A k_c}{\rho + r} \frac{E}{\rho} x = \frac{A k_c}{\rho + r} u_e - b$.

2. A l'équilibre $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$: $x_e = u_e \frac{\ell}{E} - \frac{b \ell}{E} \frac{(\rho + r)}{A k_c}$.

3. $\Delta = \frac{(c + \mu)^2}{d^2} - \frac{4 \lambda E (M d^2 + J)}{\ell d} = 0$ est la condition d'amortissement critique de l'équation sans second membre en x .

$\left(c + \frac{k_c k_e}{\rho + r} \right)^2 = 4 d \frac{A k_c}{\rho + r} \frac{E}{\ell} (M d^2 + J)$.

4. Etude d'une rampe : cf. électronique (ou automatique) et transformation de Laplace pour l'étude d'un retard.

$\frac{J + M d^2}{d} \ddot{x} + \dot{x} \frac{(c + \mu)}{d} + \lambda x \frac{E}{\ell} = \lambda k t - b$.

α. EASM $x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ avec $\frac{J + M d^2}{d} r^2 + \frac{c + \mu}{d} r + \frac{\lambda E}{\ell} = 0$;

$r_1 r_2 = \frac{\lambda E}{\ell (J + M d^2)}$; $r_1 + r_2 = -\frac{c + \mu}{J + M d^2} \Rightarrow r_1 < 0$, $r_2 < 0$.

Cette partie de solution s'atténue au cours du temps (de même si régime critique).

β. EASM recherche d'une solution particulière sous la forme de la fonction du second membre.

Recherchons $x = A_1 t + B_1$; $\dot{x} = A_1$; $\ddot{x} = 0$; en reportant et en identifiant, on a :

$\frac{A_1}{d} (c + \mu) + \frac{\lambda}{\ell} E B_1 = -b$ et $\lambda A_1 \frac{E}{\ell} = \lambda k$, soit $A_1 = \frac{k \ell}{E}$ et $B_1 = -\left[\frac{k \ell (c + \mu)}{d E} + b \right] \frac{\ell}{\lambda E}$.

$x = \frac{k \ell}{E} t - \frac{\ell}{\lambda E} \left[b + \frac{k \ell (c + \mu)}{d E} \right] = \frac{\ell}{E} u_e - \frac{\ell}{\lambda E} \left(b + \frac{k \ell}{d E} (c + \mu) \right)$.

On a une fonction affine soit un lien de proportionnalité entre u_e et $x - B_1$.

$x = \frac{\ell}{E} u_e - \frac{\ell (\rho + r)}{A k_e E} \left(b + \frac{k \ell}{d E} \left(c + \frac{k_c k_e}{\rho + r} \right) \right)$.

On peut aussi dire que le mouvement $x = \frac{\ell}{E} k t'$ avec $t' = t - t_0$ est obtenu avec un retard

$t_0 = \frac{-B_1}{A_1}$ sur l'excitation $u_e = k_e t$.

6.2.3. Hacheurs

Appartient explicitement au programme de PSI

6.2.3.1. Electronique du hacheur

On souhaite réaliser à partir d'une source de tension continue de f.e.m. constante E ($E > 0$), une source de tension continue de f.e.m. réglable αE (avec $0 < \alpha < 1$). Cette source de tension alimente une résistance de charge R .

Première partie : Première méthode :

Utilisation d'un montage potentiométrique

$E = 24 \text{ V}$; $R = 80 \Omega$.

On pose $r_1 + r_2 = R'$ et $R' = 1 \text{ k}\Omega$.

I.1. On réalise le montage de la figure 1.

Déterminer la f.e.m. αE et la résistance interne r_i du dipôle AA'. Exprimer α et r_i en fonction de r_1 et r_2 .

2. En déduire la puissance P_2 dissipée dans la résistance de charge R en fonction de E , α , R' et R .

3. Calculer la puissance P_1 fournie par la source de tension E en fonction de E , α , R' et R .

4. En déduire le rendement en puissance du circuit $\eta = \frac{P_2}{P_1}$ en fonction de α , R' et R .

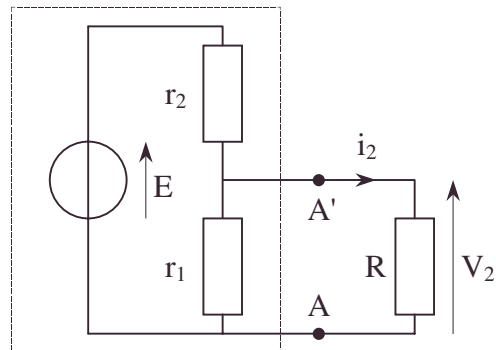


Figure 1

Application numérique : calculer le rendement η pour $\alpha = 3/4$.

Que pensez-vous de la valeur obtenue ?

Deuxième partie : Second montage :

Utilisation d'une alimentation à découpage

Nous nous proposons d'étudier le principe d'une alimentation à découpage (figure 2). Pour cela, nous supposons tous les composants idéaux (bobine, diodes, transistor, amplificateur opérationnel).

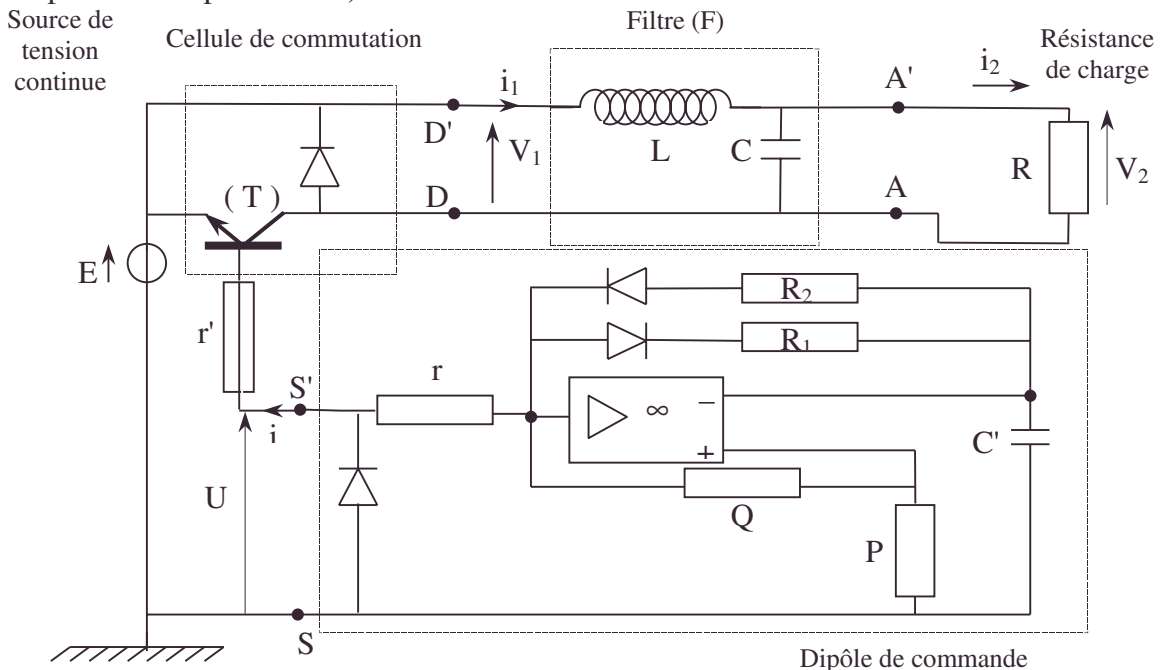


Figure 2

- alimentation à découpage, amplificateur opérationnel, bobinage [self], bobine [self], cellule de commutation, charge électrotechnique, diode, dipôle de commande [de moteur], hacheur, montage potentiométrique, transistor

Valeurs numériques : $E = 24 \text{ V}$; $L = 200 \text{ mH}$; $C = 10 \mu\text{F}$; $R = 80 \Omega$;
 $P = Q = 10 \text{ k}\Omega$; $C' = 10 \text{ nF}$.

II.A. Etude du filtre (F)

Ce filtre et la résistance de charge R sont représentés figure 3. On pose $LC\omega_0^2 = 1$.

1. On établit à l'entrée une tension sinusoïdale de la forme $V_1 = V_0 \cos \omega t$. La différence de potentiel en sortie est alors de forme $V_2 = V_{02} \cos(\omega t + \varphi)$. On suppose évidemment V_0 et V_{02} positifs.

a. On adopte la notation complexe.

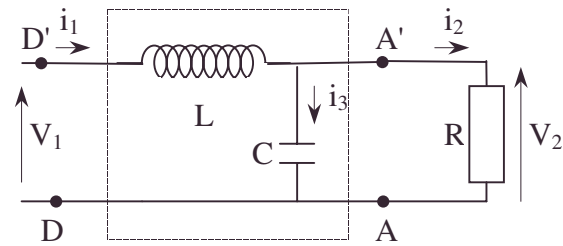


Figure 3

Déterminer la fonction de transfert de ce montage : $\underline{H} = \frac{V_{02} e^{j(\omega t + \varphi)}}{V_0 e^{j\omega t}}$ [1].

b. On pose $\underline{H} = G e^{j\varphi}$ (G réel positif).

1. Etudier les variations de G et de φ en fonction de la pulsation ω .

2. Représenter l'allure des courbes $G(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$.

3. L et R étant imposés, montrer que, lorsque C est inférieur à une certaine valeur C_0 , G est une fonction décroissante de ω . Calculer C_0 en fonction de L et de R ; vérifier qu'avec les valeurs numériques imposées ci-dessus, on a bien $C < C_0$.

2. Le filtre (F) est maintenant alimenté par la tension rectangulaire, périodique, de fréquence $f = 1/T = 1000 \text{ Hz}$, représentée figure 4. On appelle $\alpha = \frac{T_f}{T}$ le rapport cyclique de cette tension V_1 .

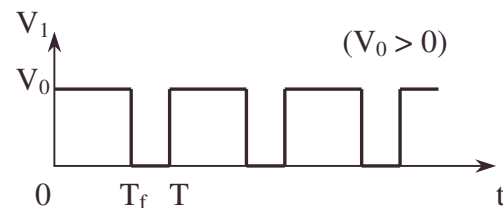


Figure 4

a. On décompose $V_1(t)$ en série de Fourier sous la forme :

$$V_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t) \text{ [2], avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Déterminer les coefficients A_0 , A_n et B_n en fonction de V_0 et de α .

b. On écrit la série de Fourier sous la forme $V_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \psi_n)$. [3]

avec $C_n \geq 0$. Déterminer les coefficients C_n en fonction de V_0 et de α .

c. Nous nous proposons de déterminer la tension de sortie $V_2(t)$ du filtre en tenant compte des valeurs numériques indiquées ci-dessus pour C , L , R et f .

1. Expliquer pourquoi la tension de sortie V_2 est sensiblement constante dans le temps. Déterminer la valeur V_{2m} de cette constante en fonction de V_0 et de α .

2. Vérifier que, pour obtenir un ordre de grandeur convenable de l'ondulation résiduelle de la tension de sortie V_2 , il suffit de ne considérer dans le calcul que le premier harmonique de la série de Fourier.

3. Déterminer alors, dans le cadre de l'approximation ci-dessus, l'ondulation

$\Delta V_2 = V_{2\max} - V_{2\min}$ de la tension de sortie ainsi que le taux d'ondulation $\frac{\Delta V_2}{2V_{2m}}$; pour

exprimer l'ondulation et le taux d'ondulation, on utilisera les valeurs numériques de L , C , R , f et on exprimera les résultats en fonction de α et (éventuellement) de V_0 .

Calculer la valeur numérique du taux d'ondulation pour $\alpha = 3/4$. Conclusion.

3. Le filtre étant toujours alimenté par la tension rectangulaire définie à la question **II.A.2.**, nous nous proposons de retrouver une valeur approchée de la tension de sortie $V_2(t)$ en utilisant une autre méthode de résolution ; en aucun cas, il ne faut utiliser des résultats obtenus aux questions **II.A.1.** et **II.A.2.**

Nous nous plaçons en régime permanent, toutes les tensions et tous les courants présents dans le circuit sont donc périodiques de période T ; ils peuvent s'écrire sous la forme d'une somme d'une composante continue (correspondant à la valeur moyenne V_m ou i_m) et d'une composante ondulatoire de valeur moyenne nulle (V_{alt} ou i_{alt}) :

$$V(t) = V_m + V_{alt}(t) ; i(t) = i_m + i_{alt}(t).$$

a. Montrer que :

1. La tension moyenne aux bornes de l'inductance L est nulle.

2. Le courant moyen dans le condensateur C est nul.

b. Expliquer brièvement et sans calcul la nature du filtre (F).

c. Nous supposons, en première approximation, la tension de sortie V_2 suffisamment filtrée pour être considérée comme continue : $V_2 \approx V_{2m}$.

1. Calculer V_{2m} .

2. Calculer la valeur moyenne i_{1m} du courant $i_1(t)$ qui traverse l'inductance L .

3. Représenter la ddp $V_L(t)$ aux bornes de l'inductance L en fonction du temps.

4. En déduire le courant $i_1(t)$; déterminer en particulier les valeurs extrêmes i_{1min} et i_{1max} et l'amplitude de l'ondulation $\Delta i_1 = i_{1max} - i_{1min}$ en fonction de V_0 , α , L , R et de la fréquence $f = 1/T$ de la tension d'entrée V_1 .

Représenter l'allure de la courbe $i_1(t)$.

Application numérique : le courant $i_1(t)$ reste-t-il toujours positif avec les valeurs numériques imposées ?

d. En étudiant le courant $i_3(t)$ qui traverse le condensateur C (figure 3), en déduire une seconde valeur approchée $\Delta V'_2 = V'_{2max} - V'_{2min}$ de l'ondulation de la tension de sortie $V_2(t)$. Exprimer le taux d'ondulation $\frac{\Delta V'_2}{2V_{2m}}$ en fonction de α , L , C et f .

Application numérique : calculer $\frac{\Delta V'_2}{2V_{2m}}$ pour $\alpha = 3/4$; comparer les valeurs numériques

de $\frac{\Delta V'_2}{2V_{2m}}$ et de $\frac{\Delta V_2}{2V_{2m}}$ (cf. question **c.** du **II.A.2.**) ; conclusion.

B. Etude du dipôle de commande de la cellule de commutation

1. Ce circuit est représenté figure 5. L'amplificateur opérationnel, supposé idéal, fonctionne normalement à saturation ; on appelle U_{sat} le module de la tension de saturation en sortie, et i_{sat} la valeur maximale du module du courant de sortie de cet amplificateur.

a. L'interrupteur K est ouvert.

Déterminer les tensions U_1 et U_2 en fonction du temps et représenter les graphes correspondants ;

On pourra supposer qu'à $t = 0$, $U_2 = U_{sat}$ et $U_1 = -\left[\frac{P}{P+Q} U_{sat}\right]$.

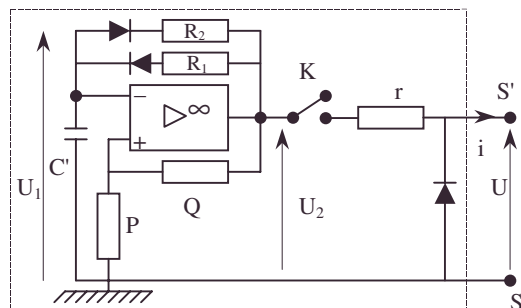


Figure 5

$$U_{sat} = 15 \text{ V} ; i_{sat} = 30 \text{ mA}$$

• amplitude de l'ondulation de courant, cellule de commutation, conditions initiales, dipôle de commande [de moteur], graphe, interrupteur, linéarisation, taux d'ondulation, valeur approchée, valeurs extrêmes du courant

Calculer en particulier la période τ des tensions U_1 et U_2 , la durée τ_1 sur une période pendant laquelle $U_2 = U_{\text{sat}}$ et la durée τ_2 sur une période pendant laquelle $U_2 = -U_{\text{sat}}$.

Application numérique : on souhaite que la période τ et le rapport cyclique τ_1/τ soient respectivement égaux à ceux $T = 1/f$ et $T_f = \alpha T$ du signal rectangulaire de la question II.A.2. : $f = 1000 \text{ Hz}$ et $\alpha = 3/4$. Quelles valeurs faut-il donner à R_1 et R_2 ? On conservera ces valeurs dans toute la suite du problème.

b. L'interrupteur K est fermé, le dipôle SS' est en sortie ouverte ($i = 0$).

Montrer que, si la résistance r est supérieure à une certaine valeur r_0 dont on donnera un ordre de grandeur, on peut utiliser les résultats de la question précédente. Déterminer et représenter, dans ce cas, la tension de sortie $U(t)$.

c. On souhaite que la résistance de charge R du montage complet soit parcourue par un courant dont la valeur moyenne soit de l'ordre de quelques centaines de mA ; expliquer pourquoi il est inutile d'essayer d'alimenter le filtre (F) par le dipôle SS'. D'

2. Etude de la cellule de commutation

Elle est constituée d'un transistor (T) et d'une diode (Figure 6). On admettra que, dans les conditions de fonctionnement du montage :

- lorsque le courant i alimentant la base B du transistor (T) est positif, le transistor (T) est saturé :

- Les tensions $V_{BE} = V_B - V_E$ et $V_{CE} = V_C - V_E$ sont négligeables.

- Les courants i_C et i_E sont aussi positifs (avec les conventions de la figure 7).

- lorsque le courant i alimentant la base B du transistor (T) est nul, le transistor (T) est bloqué.

- Les courants i_C et i_E sont alors négligeables.

La tension $V_{BE} = V_B - V_E$ est négative ou nulle, la tension $V_{CE} = V_C - V_E$ est positive.

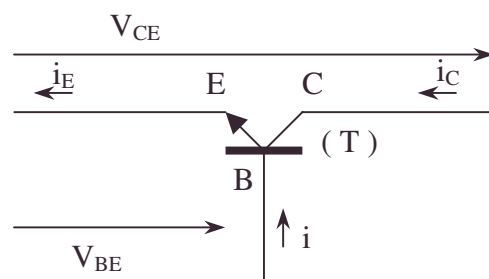
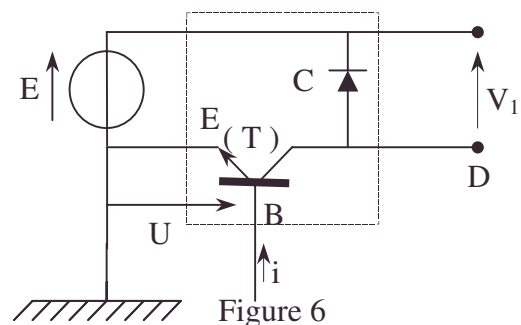


Figure 7

a. Le transistor (T) étant alimenté par la tension $U(t)$ délivrée par le dipôle de commande II.B.1., la cellule de commutation alimente le filtre (F). Montrer que la tension V_1 (de sortie de la cellule de commutation et d'entrée du filtre (F)) est une tension rectangulaire analogue à celle définie à la question II.A.2. Calculer l'amplitude V_0 de cette tension en fonction de E .

b. Le courant i entrant dans la base B du transistor ne doit pas dépasser 100 mA (pour ne pas risquer la destruction du transistor). En choisissant pour la résistance r une valeur supérieure à la valeur r_0 calculée dans la question II.B.1.b., s'affranchit-on de ce problème ?

Application numérique : calculer le courant moyen i_{2m} qui traverse la résistance de charge R pour $\alpha = 3/4$.

III. Bilan en puissance de l'alimentation à découpage

a. Calculer la puissance moyenne P'_{2m} dissipée dans la résistance de charge R en fonction de E , α et R .

b. Calculer la puissance moyenne P'_{1m} fournie par la source de tension E à l'entrée du circuit en fonction de E , α et R .

c. En ne tenant pas compte de la puissance fournie par l'alimentation de l'amplificateur opérationnel du dipôle de commande, on peut définir le rendement en puissance de l'alimentation à découpage par le rapport $\eta' = \frac{P'_{2m}}{P'_{1m}}$. Déterminer la valeur

de ce rapport et comparer la valeur de ce rendement à celle trouvée lors de l'utilisation du montage potentiométrique de la partie I. Conclusion.

En fait, le rendement de cette alimentation à découpage est toujours légèrement inférieur à celui que l'on vient de calculer. Pourquoi ?

Centrale ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. Le théorème de Thévenin appliqué au dipôle AA' donne :

a. La ddp_{circuit ouvert} : $V_{AA'} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} E \Rightarrow \alpha = \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{r_1}{R'}$.

b. La résistance entre A'A (en annulant E devenant une résistance nulle) :

$$r_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \alpha r_2. \text{ Cf. montage parallèle.}$$

2. On a le montage équivalent ci-contre :

La puissance dissipée dans R : $P_2 = V_2 i_2 = R i_2^2$

Or, $\alpha E = (R + r_1) i_2$; éliminons r_1, r_2 , vu les paramètres d'expression :

$$r_1 = \alpha R' ; r_2 = R' - r_1 = R'(1 - \alpha)$$

$$i_2 = \frac{\alpha E}{R + \alpha R'(1 - \alpha)} \Rightarrow P_2 = \frac{R \alpha^2 E^2}{[R + \alpha R'(1 - \alpha)]^2}$$

3. $P_1 = E i$ avec le montage ci-contre et la loi d'Ohm

$$E = R_T i \text{ où } R_T = R'(1 - \alpha) + \frac{\alpha R' R}{R + \alpha R'} ;$$

$$R_T = \frac{R'(R + \alpha R'(1 - \alpha))}{R + \alpha R'} \Rightarrow P_1 = \frac{E^2}{R_T} = \frac{E^2 (\alpha R' + R)}{R' [R + \alpha (1 - \alpha) R']}$$

$$\text{4. } \eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{théorique disponible}}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\alpha^2 R R'}{(R + R' \alpha) (\alpha (1 - \alpha) R' + R)}.$$

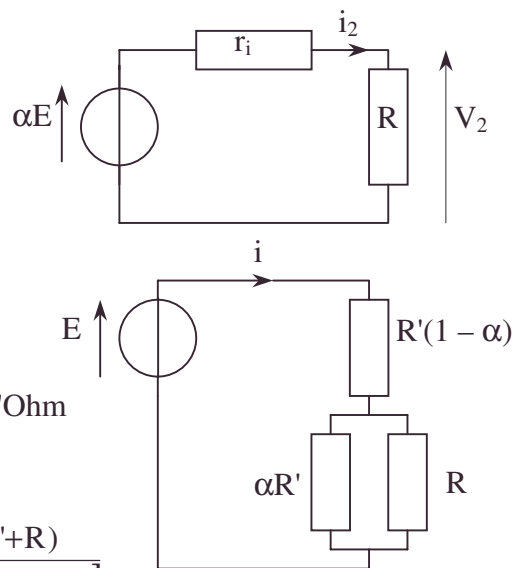
AN : $\eta = 0,203$: rendement faible en électricité.

Le potentiomètre consomme alors 80% de la puissance théoriquement disponible ; néanmoins il permet de modifier (α, r_1) et P_2 . Il faudra un radiateur d'évacuation de la chaleur.

II.A.1.a. D'après I. en notation complexe, le théorème de Thévenin permet d'écrire :

$$\frac{V_{A'A}}{\text{circuit ouvert}} = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_L} \underline{V}_1 ; \text{ l'impédance interne vaut } \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_c \underline{Z}_L}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_L} \text{ et le montage équivalent}$$

à I.2. est représenté ci-après.



$$\underline{V}_2 = R \underline{i}_2 = \frac{R \underline{Z}_c}{(\underline{Z}_c + \underline{Z}_L)} \cdot \left(\frac{\underline{V}_1}{R + \frac{\underline{Z}_c \underline{Z}_L}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_L}} \right).$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{R}{jC\omega \left(R \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) + \frac{L}{C} \right)}.$$

$$\underline{H} = \frac{1}{j \frac{L\omega}{R} - LC\omega^2 + 1} = \frac{(1 - LC\omega^2) - j \frac{L\omega}{R}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}}} = G e^{j\varphi}.$$

$$\text{b.1. } G = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}}}.$$

$$\bullet \text{ Etudions } \frac{dG}{d\omega} = \frac{4(1 - LC\omega^2)LC\omega - 2 \frac{L^2}{R^2} \omega}{2 \left((1 - LC\omega^2)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dG}{d\omega} = 0 : \quad \bullet \text{ pour } \omega = 0, \text{ et}$$

$$\bullet \text{ pour } \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{2R^2C^2}}.$$

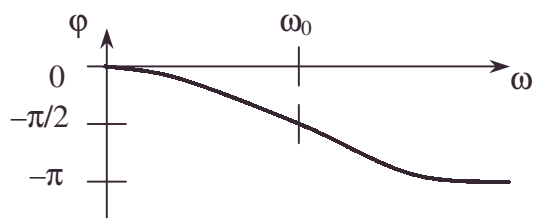
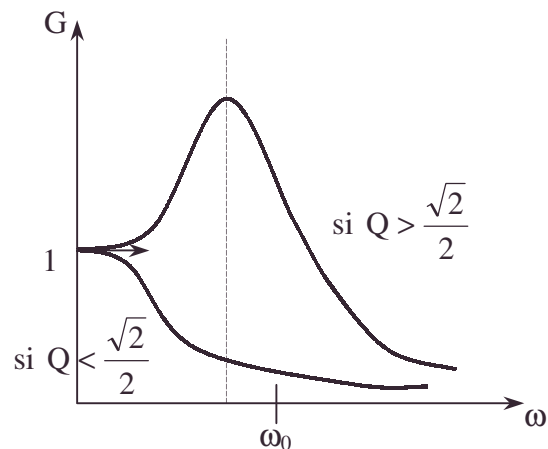
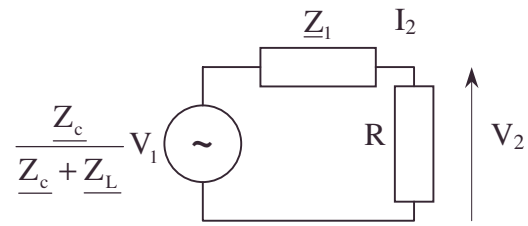
ω_1 existe si $\frac{1}{2R^2C^2} < \frac{1}{LC}$, soit si $\frac{R^2C^2}{LC} > \frac{1}{2}$, cf. coefficient de qualité.

• Posons $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = RC\omega_0$; il y a maximum autre que $\omega = 0$ pour $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$G = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

$$2. \tan \varphi = - \frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan \frac{- \frac{L\omega}{R}}{1 - LC\omega^2} = - \arctan \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$



A.N. : $\omega_0 = 707 \text{ rad.s}^{-1}$; $Q = 0,56$.

3. Vu l'étude faite, la fonction G est décroissante si $\frac{R^2C}{L} < \frac{1}{2}$ (soit quand ω_1 n'existe pas), soit $C < \frac{L}{2R^2}$, de la forme $C < C_0$ avec $C_0 = \frac{L}{2R^2}$. AN : $C_0 = 15,6 \mu\text{F}$.

• coefficient de qualité, graphe, résonance, transmittance

Or, $C = 10 \mu\text{F}$. On a bien $C < C_0$; G décroissant.

2.a. On sait : $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T V_1(t) dt = V_0 \frac{T_f}{T} = \alpha V_0$.

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T V_1(t) \cos 2\pi n \frac{t}{T} dt = \frac{2V_0}{T} \int_0^{T_f} \cos 2\pi n \frac{t}{T} dt = \frac{2V_0}{T \cdot 2\pi n} \cdot T \sin 2\pi n \alpha = \frac{V_0}{\pi n} \sin 2\pi n \alpha.$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T V_1(t) \sin 2\pi n \frac{t}{T} dt = \frac{2V_0}{T} \int_0^{T_f} \sin 2\pi n \frac{t}{T} dt = \frac{2V_0}{T \cdot 2\pi n} \cdot T [1 - \cos 2\pi n \alpha]$$

$$B_n = \frac{V_0}{\pi n} (1 - \cos 2\pi n \alpha).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b.} C_n \cos(n\omega t + \psi_n) &= C_n \cos n\omega t \cos \psi_n - C_n \sin n\omega t \sin \psi_n \\ &= A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t. \end{aligned}$$

$$C_n \cos \psi_n = A_n = \frac{V_0}{\pi n} \sin 2\pi n \alpha = \frac{2V_0}{\pi n} \cos \pi n \alpha \sin \pi n \alpha ;$$

$$-C_n \sin \psi_n = B_n = \frac{V_0}{\pi n} (1 - \cos 2\pi n \alpha) = \frac{2V_0}{\pi n} \sin^2 \pi n \alpha ;$$

éliminons ψ_n grâce à $\cos^2 \psi_n + \sin^2 \psi_n = 1$: $C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$, et si $C_n \geq 0$,

$$C_n = \frac{V_0}{\pi n} \sqrt{2(1 - \cos 2\pi n \alpha)} = \frac{2V_0}{\pi n} \sqrt{\sin^2 \pi n \alpha} = \frac{2V_0}{\pi n} |\sin \pi n \alpha| = 2\alpha V_0 |\text{sinc } \pi n \alpha|.$$

$\tan \Psi_n = \tan \pi n \alpha$; $\Psi_n = \pi n \alpha$ quand $\sin \pi n \alpha > 0$; $\Psi_n = \pi n \alpha + \pi$ quand $\sin \pi n \alpha < 0$.

c.1. $V_2(t) = G(0)A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega)C_n \cos[n\omega t + \Psi_n + \varphi(n\omega)].$

AN : $G(0)A_0 = \alpha V_0$; $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi \cdot 1000}{2\pi \cdot 112} = 8,9$ pour visualiser sur la courbe :

$$G(\omega) = 1,25 \cdot 10^{-2} ; G(2\omega) = 3,15 \cdot 10^{-3}.$$

G étant décroissant, les divers termes de la série ne vont pas intervenir de façon visible à l'oscilloscope ; seul le terme constant intervient notablement.

$V_{2m} = \alpha V_0$, cf. rôle de lissage de la self.

2. Tenir compte du premier harmonique à titre de terme correctif est envisageable : en ne raisonnant que sur les amplitudes il suffit de négliger $G(2\omega)C_2$ devant $G(\omega)C_1$.

AN : $\alpha = 0,75$; $C_1 = 2\alpha V_0 \text{sinc } \pi \alpha$; $C_2 = 2\alpha V_0 \text{sinc } 2\pi \alpha$;

A.N. : $C_1 = 2,6 \cdot 10^{-2} V_0$; $C_2 = 2,6 \cdot 10^{-2} V_0$;

$$G(\omega)C_1 = V_0 \cdot 3,3 \cdot 10^{-4} ; G(2\omega)C_2 = V_0 \cdot 8,2 \cdot 10^{-5} ; G(0)A_0 = V_0 \cdot 7,5 \cdot 10^{-1} ;$$

Il s'agit de négliger 1 devant 4 ce qui est limite; la décroissance de G et C_n avec n ne permettant pas la visibilité à l'oscilloscope des multiples termes d'amplitude de plus en plus faibles, surtout pour une synchronisation définie par ω , terme variable principal.

3. $\Delta V_2 = (\alpha V_0 + C_1 G(\omega)) - (\alpha V_0 - C_1 G(\omega)) = 2C_1 G(\omega).$

AN : $\Delta V_2 = 3,75 \cdot 10^{-2} V_0 |\text{sinc } \alpha \pi|$; $\frac{\Delta V_2}{2V_{2m}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{sinc } \alpha \pi$; A.N. : $\frac{\Delta V_2}{2V_{2m}} = 4,4 \cdot 10^{-4}$

Il est modeste : on accepte de ne prendre que le terme correctif principal choisi (en ω).

3.a.1. $\left\langle L \frac{di_L}{dt} \right\rangle = \left\langle L \frac{di_{Lalt}}{dt} \right\rangle = \frac{L}{T} \int_0^T di_{Lalt} = \frac{L}{T} [i_{Lalt}(T) - i_{Lalt}(0)] = 0$ car i_{Lalt} est

périodique.

• synchronisation d'oscilloscope, taux d'ondulation, terme correctif principal

$$2. \quad i_c = \frac{dq_c}{dt} = C \frac{dV_c}{dt} \Rightarrow \langle i_c \rangle = C \left\langle \frac{dV_{calt}}{dt} \right\rangle = \frac{C}{T} \int_0^T dV_{calt} = \frac{C}{T} [V_{calt}(T) - V_{calt}(0)] = 0$$

car V_{calt} est périodique.

b. Vu **a.**, le courant moyen à travers R est celui de L puisque la capacité a un courant moyen nul, mais L s'oppose à la transmission des variation de courant ; la tension moyenne aux bornes de R est celle de C, qui recueille la totalité de la valeur moyenne de V_1 , car la tension moyenne aux bornes de L est nulle ; la capacité court-circuite ("ramène à la masse" par une impédance nulle) les tensions variables. F est un filtre passe-bas adapté à laisser passer les tensions constantes vu l'analyse.

$$c.1. \quad V_{2m} = \langle V_2 \rangle = \langle V_c \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{T_f} V_0 dt = \frac{V_0 \alpha T}{T} = \alpha V_0.$$

$$2. \quad i_{1m} = i_{2m} = \frac{V_{2m}}{R} = \alpha \frac{V_0}{R}.$$

$$3. \quad V_L + V_2 = V_1 \Rightarrow V_L = V_1 - V_2.$$

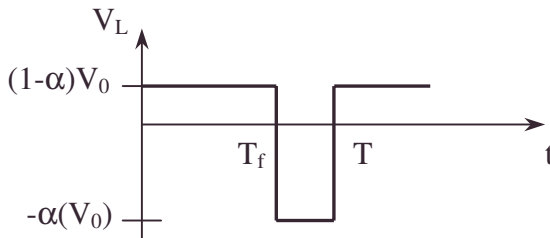
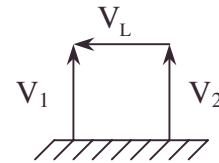


Figure c.3.

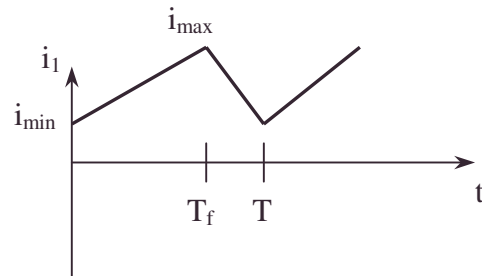


Figure c.4.

$$4. \quad L \frac{di_1}{dt} = V_L \Rightarrow i_1 = \frac{V_L t}{T} + \text{cste}, \text{ soit } i_1 = (1-\alpha) \frac{V_0 t}{L} + C_1 \text{ pour } 0 < t < T_f,$$

et $i_1 = -\alpha \frac{V_0 t}{L} + C_2$ pour $T_f < t < T$, mais il y a continuité de i_1 dans L et périodicité.

La continuité en $t = T_f$ s'écrit $i_{1\max} = (1-\alpha) \frac{V_0}{L} T_f + C_1 = -\alpha \frac{V_0}{L} T_f + C_2$.

La périodicité en $t = T$ s'écrit : $i_{1\min} = C_1 = -\alpha \frac{V_0}{L} T + C_2$.

En soustrayant les deux relations, on a :

$$\Delta i = i_{1\max} - i_{1\min} = (1-\alpha) \frac{V_0}{L} T_f = (1-\alpha) \frac{V_0 \alpha}{L} T = (1-\alpha) \frac{V_0}{L} \frac{\alpha}{f};$$

or, $i_{1m} = \alpha \frac{V_0}{R} = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{2}$ vu le graphique, pour chaque segment.

$$\Rightarrow i_{\max} = i_m + \frac{\Delta i}{2} = \alpha \frac{V_0}{R} + \frac{1}{2} (1-\alpha) \frac{V_0 \alpha}{L f} = \frac{\alpha V_0}{R} \left(1 + \frac{(1-\alpha)}{2Lf} R \right);$$

$$\Rightarrow i_{\min} = i_m - \frac{\Delta i}{2} = \frac{\alpha V_0}{R} - \frac{1}{2} (1-\alpha) \frac{V_0 \alpha}{L f} = \frac{\alpha V_0}{R} \left(1 - \frac{(1-\alpha)}{2Lf} R \right). \text{ On en déduit } C_1 \text{ et } C_2.$$

$$\text{Pour } 0 < t < T_f \text{ (à } T \text{ près), } i_1 = (1-\alpha) \frac{V_0 t}{L} + \frac{\alpha V_0}{R} \left(1 - \frac{(1-\alpha)}{2Lf} R \right);$$

Pour $T_f < t < T$ (à T près), $i_1 = \alpha \frac{V_0}{L} (t - T_f) + \alpha \frac{V_0}{R} \left(1 + \frac{(1-\alpha)}{2Lf} R \right)$.

AN : i_1 positif $\forall t$ si $i_{\min} \geq 0$ c'est-à-dire si $f > \frac{(1-\alpha)}{2L} R$.

$\frac{(1-\alpha)}{2L} R = f_{\lim} = 50 \text{ Hz}$,

ce qui est réalisé ici.

d.α. La loi des nœuds en A' donne :

$i_3 = i_1 - i_2 = i_1 - \frac{\alpha V_0}{R}$ vu **II.A.3.a.b.**

(en première approximation).

$\langle i_3 \rangle = \langle i_1 \rangle - \frac{\alpha V_0}{R} = 0$.

On a : $i_3 = \frac{dq_c}{dt} = C \frac{dV_2}{dt}$.

Pour $0 < t < T_f$ à T près ; $C \frac{dV_2}{dt} = (1-\alpha) \frac{V_0}{L} t - \alpha V_0 \frac{(1-\alpha)t}{2L}$.

Pour $T_f < t < T$ à T près ; $C \frac{dV_2}{dt} = -\alpha \frac{V_0}{L} (t - T_f) + \frac{\alpha V_0 (1-\alpha)T}{2L}$.

β.

t	0	$\frac{\alpha T}{2}$	αT	$\frac{(1+\alpha)T}{2}$	T	$T\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$
$\frac{dV_2}{dt}$		- 0	+	+	0	- 0
V_2	T	$V_{2\min}$	P	$V_{2\max}$	T	$V_{2\min}$

Intégrons :

• Pour $0 < t < \alpha T$, de 0 à t : $V_2(t) = V_2(0) + \frac{(1-\alpha)V_0}{2LC} t^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)V_0}{2LC} t T$.

On aura $V_{2 \min}$ pour $t = \frac{\alpha T}{2}$.

• Pour $\alpha T < t < T$; de αT à t : $V_2(t) = V_2(\alpha T) - \frac{\alpha V_0}{2LC} (t - \alpha T)^2 + \frac{\alpha V_0}{2LC} (1-\alpha)(t - \alpha T)$.

On aura $V_{2 \max}$ pour $t = \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) T$ soit $t - \alpha T = \frac{1-\alpha}{2} T$.

$$\Delta V_2 = V_{2 \max} - V_{2 \min} = V_2(\alpha T) - \frac{\alpha}{2LC} V_0 \frac{(1-\alpha)^2}{4} T^2 + \frac{\alpha(1-\alpha)^2}{4LC} V_0 T^2 - V_2(0) \dots$$

$$- \frac{(1-\alpha)}{2LC} V_0 \frac{\alpha^2 T^2}{4} + \frac{\alpha^2 (1-\alpha) V_0 T^2}{4LC}$$

Or, la continuité de la charge en $t = \alpha T$ existe et se reporte sur la continuité de V_2 en $t = \alpha T$, d'où :

$V_2(0) + \frac{(1-\alpha)V_0}{2LC} \alpha^2 T^2 - \frac{\alpha^2 (1-\alpha)V_0 T^2}{2LC} = V_2(\alpha T) + 0 \Rightarrow V_2(0) = V_2(\alpha T)$.

• continuité de la charge d'un condensateur, continuité de la ddp aux bornes d'un condensateur, graphe, loi aux nœuds, taux d'ondulation

$$\Delta V_2 = \frac{T^2 V_0}{2LC} (1-\alpha) \left[-\frac{(1-\alpha)\alpha}{4} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{2} \right] = \frac{\alpha V_0 T^2 (1-\alpha)}{8LC}.$$

$$\frac{\Delta V_2}{2\langle V_2 \rangle} = \frac{1-\alpha}{16LCf^2} ; \text{ AN : } \frac{\Delta V_2}{2\langle V_2 \rangle} = 7,8 \cdot 10^{-3}, \text{ résultat différent pour des termes correctifs}$$

estimés de manières différentes ; négliger $G(2\omega)C_2$ devant $G(\omega)C_1$ était osé en **II.A.2.c**.

B.1.a. A l'instant $t = 0$, vu l'énoncé, on a $V_+ = \frac{P}{P+Q} U_{\text{sat}} ; V_- = -\frac{P}{P+Q} U_{\text{sat}}.$

Ainsi, $\varepsilon = V_+ - V_- = \frac{2P}{P+Q} U_{\text{sat}} > 0$; bien sûr, $U_2 = U_{\text{sat}}$ dans cette phase.

• On remarque $U_1 < U_2$: le courant ne passera pas dans R_2 et la diode en série ; un courant va passer dans R_1 et la diode en série pour charger C' ; or, $Q_c(0) = C'U_1 (< 0)$.

L'équation de la charge s'obtient par la loi aux nœuds en V_- :

$$C' \frac{dU_1}{dt} = \frac{U_2 - U_1}{R_1} \Rightarrow R_1 C' \frac{dU_1}{dt} + U_1 = U_{\text{sat}} \text{ pour la 1}^{\text{ère}} \text{ phase.}$$

On a : $U_1 = U_{\text{sat}} + A e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = R_1 C'$.

Or, à $t = 0$, $U_1 = -\frac{P}{P+Q} U_{\text{sat}} = U_{\text{sat}} + A \Rightarrow A = -\frac{Q+2P}{P+Q} U_{\text{sat}}.$

Finalement, $U_1 = U_{\text{sat}} \left(1 - \frac{Q+2P}{P+Q} e^{-\frac{t}{R_1 C'}} \right).$

L'instant de basculement τ'_1 correspond à $\varepsilon = 0$, soit $U_1 = \frac{P}{P+Q} U_{\text{sat}}$, d'où par

remplacement, $\tau'_1 = R_1 C' \ln \left(1 + \frac{2P}{Q} \right).$

Pour $t > \tau'_1$, $U_2 = -U_{\text{sat}}$, $U_1 = \frac{P}{P+Q} U_{\text{sat}} > U_2.$

R_1 et sa diode en série ne sont traversés par aucun courant ;

R_2 et sa diode en série sont traversés par le courant $\frac{U_2 - U_1}{R_2}$, vu la situation

précédemment étudiée. L'équation de charge est donc : $R_2 C' \frac{dV_1}{dt} + U_1 = -U_{\text{sat}}$, de

solution (avec $t' = t - \tau'$) vu la continuité de U_1 (cf. conservation de l'énergie) :

$$U_1 = -U_{\text{sat}} \left[1 - \frac{Q+2P}{P+Q} e^{-\frac{t'}{R_2 C'}} \right].$$

L'instant de basculement τ'_2 correspond à $\varepsilon = 0$, soit $U_1 = \frac{-P}{P+Q} U_{\text{sat}}$ et à l'obtention de

$U_2 = U_{\text{sat}}$: on retrouve les conditions initiales de tension et de charge.

On obtient par analogie : $\tau'_2 = R_2 C' \ln \left(1 + \frac{2P}{Q} \right).$

Le phénomène se reproduit :

• *analogie, conditions initiales, conservation de l'énergie, continuité de la ddp aux bornes d'un condensateur, loi aux nœuds*

on a donc $\tau_1 = \tau_1'$; $\tau_2 = \tau_2'$ et $\tau = \tau_1 + \tau_2 = (R_1 + R_2)C' \ln \left(1 + \frac{2P}{Q} \right)$.

$$\tau_1 = R_1 C' \ln \left(1 + \frac{2P}{Q} \right) ; \tau_2 = R_2 C' \ln \left(1 + \frac{2P}{Q} \right) ; f = \frac{1}{\tau} ; \alpha = \frac{\tau_1}{\tau} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} ;$$

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{f C' \ln \left(1 + \frac{2P}{Q} \right)} ;$$

$$\text{A.N. : } \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 3 ; \text{ or } f = 1000 \text{ Hz, } C' = 10 \mu\text{F} ; P = Q = 10 \text{ k}\Omega ;$$

$$R_1 + R_2 = 4R_2 = \frac{4}{3}R_1 = 91 \text{ k}\Omega \Rightarrow R_1 = 68,3 \text{ k}\Omega \text{ et } R_2 = 22,7 \text{ k}\Omega.$$

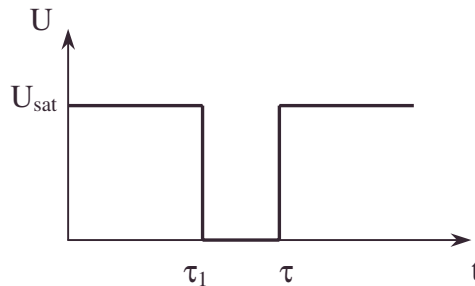
b.α. Si $U \geq 0$ la diode SS' est bloquée, or la sortie est ouverte ; l'intensité dans K est nulle (cf. K ouvert). cf. cas étudié : $U = U_2 = +U_{\text{sat}}$.

β. Si $U \leq 0$ la diode SS' est passante $U = 0$; le courant i_r dans r vaut $\frac{U_2}{r} < 0$ soit $i_r = -\frac{U_{\text{sat}}}{r}$ car $U_2 = -U_{\text{sat}}$ est la seule possibilité de ce cas.

La sécurité impose $\frac{U_{\text{sat}}}{r} < i_{\text{sat}}$ soit $r > \frac{U_{\text{sat}}}{i_{\text{sat}}}$, de la forme $r > r_0$.

$$r_0 = \frac{U_{\text{sat}}}{i_{\text{sat}}} ; \text{AN: } r_0 = 500 \Omega.$$

γ. Représentation :



c. L'alimentation de l'A.O. ne permet en sortie qu'un maximum $P_{\text{max}} = U_{\text{max}} \cdot i_{\text{max}}$, AN: $P_{\text{max}} = 0,45 \text{ W}$. La puissance à consommer par la résistance R du filtre F alimentée sous $V_1 = U = U_{\text{sat}}$ avec $i_2 = 0,1 \text{ A}$ vaut $P_R = 1,5 \text{ W}$: l'A.O. ne peut assurer ce transfert.

2.a.α. $0 < t < \tau_1$; $U = +U_{\text{sat}}$; on a $i > 0$ car E à la masse : le transistor ne peut être bloqué, il est donc saturé.

Grâce à $i_{\text{émetteur}}$, le courant disponible sort de la borne + du générateur de tension, ne traverse pas la diode et peut être disponible pour (F) et R ; $V_1 = +E = V_0$.

β. $\tau_1 < t < \tau$; $U = 0$: la diode de la figure 5 court-circuite tout courant : $i_{\text{base}} = 0$; le transistor est bloqué. On a bien $V_B - V_E = 0$, mais $V_C - V_E = V_C > 0$; l'alimentation du transistor entraîne un courant dans la diode supposée fonctionner spontanément, d'où $V_1 = 0$ et $V_C = E$: le générateur ne débite pas et l'ensemble de ce modèle limite est acceptable(cf. figure 4).

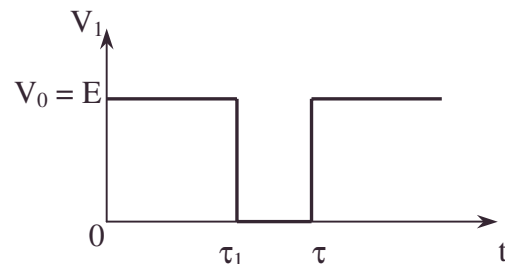


Figure 4.

b. Le montage avec $r > r_0$ limite le courant à 30 mA. L'introduction du transistor passant ne gêne pas car $V_B - V_E \neq 0$; l'intensité dans la base ne dépassera pas ni 30 mA ni 100 mA.

$$\text{A.N. : } i_{2m} = \alpha \frac{V_0}{R} = \frac{\alpha E}{R} ; \text{A.N. : } i_{2m} = 225 \text{ mA} .$$

$$\text{III.a. } P'_{2m} = \frac{V_{2m}^2}{R} = \alpha^2 \frac{E^2}{R} \text{ en raisonnant sur une période.}$$

b. E débite i , pour $0 < t < \tau_1$ quand le transistor est saturé.

$$\text{Or } \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} i_1 dt = \frac{i_{\max} + i_{\min}}{2} \text{ (vu la variation affine).}$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} i_1 dt = \frac{\alpha V_0}{R} = \frac{\alpha E}{R} \text{ d'après II.A.c.4. et II.B.2.a.}$$

$$\text{La puissance moyenne débitée par E : } P'_{1m} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau_1} E i_1 dt = \frac{E \tau_1}{\tau} \cdot \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} i_1 dt = \frac{(\alpha E)^2}{R} .$$

$$\text{c.}\alpha. \eta = \frac{P'_{2m}}{P'_{1m}} = 1 ;$$

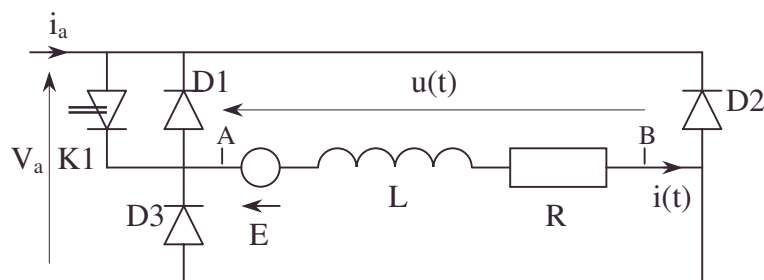
le rendement est largement meilleur que le rendement de la partie I.

β. Conclusion : on utilisera cette alimentation à découpage appelée aussi "hacheur", au bon rendement ainsi mis en évidence.

γ. Les jonctions à semi-conducteur possèdent des tensions de seuil au rôle comparable à des forces contre-électromotrices. On n'a pas à tenir compte des effets Joule, des durées de montée et de décroissance des créneaux où les interrupteurs consomment de la puissance non comptabilisée ici. On n'oubliera pas les alimentations des composants.

6.2.3.2. Hacheur série à 3 diodes

On alimente l'induit d'un moteur à excitation séparée en le plaçant entre les points A et B dans le montage ci-dessous. Pour que le courant continu soit ininterrompu dans le moteur, on ajoute en série une inductance suffisante. On appelle L l'inductance totale du modèle électrique entre A et B et R la résistance totale (moteur et inductances).



- V_a tension d'alimentation supposée constante, $V_a > 0$.
- i_a intensité instantanée du courant fourni par l'alimentation.
- D1, D2 et D3 diodes idéales : tension aux bornes nulle quand elles sont passantes et intensité du courant nulle quand elles sont bloquées.
- K1 interrupteur unidirectionnel idéal commandé.

La commande de K1 est périodique de période T, on choisit l'origine des temps $t = 0$ telle que, pour la première période étudiée :

$t \in]0, \alpha T[$: K1 est fermé.

$t \in]\alpha T, T[$: K1 est ouvert.

α rapport cyclique est compris entre 0 et 1.

1. Etude de $u(t)$

a. En justifiant brièvement le fonctionnement, préciser les séquences de conduction des diodes.

b. Tracer $u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$, puis exprimer U, valeur moyenne de $u(t)$, en fonction de V_a et α .

2. Etude de $i(t)$

a. Ecrire l'équation différentielle liant $u(t)$ et $i(t)$ en supposant que la f.c.é.m. E est constante.

b. On donne : $V_a = 230 \text{ V}$; $n = 1500 \text{ tr/min}$; $R = 5,0 \Omega$; intensité du courant d'excitation de 0,3 A, soit $E = 194 \text{ V}$.

1. Exprimer I, valeur moyenne de $i(t)$, en fonction de α , V_a , E et R.

2. Calculer α pour $I = 0,45 \text{ A}$.

c. Etude de l'ondulation $i'(t) = i(t) - I$.

1. Ecrire l'équation différentielle liant $u(t)$ et $i'(t)$.

2. Exprimer $i'(t)$ sur les intervalles $[0, \alpha T]$ et $[\alpha T, T]$, on posera $\tau = \frac{L}{R}$.

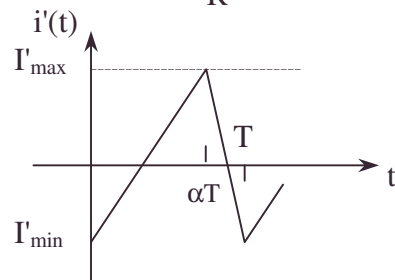
3. Montrer que si $\frac{T}{\tau} \ll 1$, l'allure de $i'(t)$ est

la suivante :

4. Exprimer la valeur moyenne de $i'(t)$ en fonction de I'_{\max} et I'_{\min} ;

en déduire que $I'_{\max} = -I'_{\min}$ et exprimer I'_{\max} en

fonction de V_a , R, α et $\frac{T}{\tau}$.



5. Calculer l'ondulation $\Delta I' = I'_{\max} - I'_{\min}$ en fonction de α , V_a , T et L.

Pour quelle valeur de α , $\Delta I'$ est-elle maximale ?

6. On donne $V_a = 230 \text{ V}$; $R = 5,0 \Omega$; $T = 3,0 \text{ ms}$ et $I = 0,45 \text{ A}$.

Exprimer L_{\min} , valeur minimale de L, en fonction de V_a , T et I pour que la conduction soit effectivement ininterrompue en régime établi. Calculer L_{\min} .

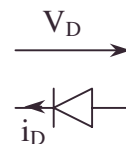
En déduire la constante de temps τ_{\min} et vérifier l'approximation faite au 2.c.3.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

E représente la f.c.é.m. du moteur récepteur avec la convention $i > 0$;

On supposera $V_a > E > 0$ pour avoir la capacité d'alimenter le moteur en puissance. On rappelle la convention de figure ci-contre :



1.a.α. $0 < t < \alpha T$ modulo T K1 fermé : l'interrupteur idéal court-circuite la diode D1 qui ne laisse passer aucun courant : $u = V_a$ (cf. $V_B = 0$).

$V_a = -V_{D3} = -V_{D2} \Rightarrow D2$ et $D3$ diodes bloquées.

Le courant i passe par V_a , K1, E, R et la masse.


β. $\alpha T < t < T$ modulo T K1 ouvert : $V_a = -V_{D2}$; D2 diode bloquée.

Si i ne passait pas par D3 on aurait $i = 0$ ce qui est impossible vu la continuité de i imposée par L (et l'interrupteur idéal) car précédemment $i > 0$, l'énoncé dit clairement que le courant ne doit pas être interrompu.

i passe par la diode D3 de roue libre, passante $V_{D3} = 0$ et $u = 0$; $V_{D1} = -V_a$.

D1 est bloquée.

En résumé : D1, D2 sont toujours bloquées et D3 est bloqué en α puis passante en β .

b.α.  **β.** $U = \langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \alpha V_a$.

T est la période.

2.a. $u = E + Ri + L \frac{di}{dt}$ dans tous les cas.

b.1. $\langle u \rangle = \langle E \rangle + R \langle i \rangle + L \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle$; or $\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{di}{dt} dt = \frac{1}{T} [i(T) - i(0)] = 0$.

$\alpha V_a = E + RI$; $I = \frac{\alpha V_a - E}{R}$.

2. $\alpha = \frac{E + RI}{V_a}$; A.N. : $\alpha = 0,85$.

c.1. $i = i' + I$; $\frac{di}{dt} = \frac{di'}{dt} \Rightarrow u - E = Ri' + L \frac{di'}{dt} + RI$; or $RI = E + \alpha V_a$.

$L \frac{di'}{dt} + Ri' = u(t) - \alpha V_a$.

2.α. $0 < t < \alpha T$ modulo T : $\frac{di'}{dt} + \frac{i'}{\tau} = \frac{V_a}{L} (1 - \alpha) \Rightarrow i' = \frac{V_a}{R} (1 - \alpha) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

Comme c'est la phase de charge, d'alimentation du moteur ; $i(0) = I_{\min}$

$\Rightarrow i'(0) = I'_{\min} \Rightarrow i' = I'_{\min} e^{-\frac{t}{\tau}} + (1 - \alpha) \frac{V_a}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

à $t = \alpha T$; $i(\alpha T) = I_{\max} \Rightarrow i'(\alpha T) = I'_{\max} = I'_{\min} e^{-\frac{\alpha T}{\tau}} + (1 - \alpha) \frac{V_a}{R} \left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{\tau}} \right)$

β. $\alpha T < t < T$ modulo T ; $\frac{di'}{dt} + \frac{i'}{\tau} = \frac{-\alpha V_a}{L}$.

$\Rightarrow i' = -\frac{\alpha V_a}{R} + Be^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}}$; $t = \alpha T$; $i' = I'_{\max} \Rightarrow i' = I'_{\max} e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}} - \frac{\alpha V_a}{R} \left(1 - e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}} \right)$

3. Vu $\tau \ll T$, pour $0 < t < T$: $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau}$; $e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}} = 1 - \frac{t-\alpha T}{\tau}$.

$0 < t < \alpha T$; $i' = I'_{\min} + \left[(1 - \alpha) \frac{V_a}{R} - I'_{\min} \right] \frac{t}{\tau}$.

$\alpha T < t < T$: $i' = I'_{\max} - \left(I'_{\max} + \frac{\alpha V_a}{R} \right) \frac{t - \alpha T}{\tau} \Rightarrow$ l'allure donnée.

4.α. Vu le graphe constitué de segments de droite, la valeur moyenne est $\frac{I'_{\min} + I'_{\max}}{2}$ sur l'intervalle $[0, \alpha T]$.

De même, la valeur moyenne est $\frac{I'_{\min} + I'_{\max}}{2}$ sur l'intervalle $[\alpha T, T]$.

La valeur moyenne est donc $\langle i' \rangle = \frac{I'_{\min} + I'_{\max}}{2}$ sur $[0, T]$

β. or, $\langle i' \rangle = \langle i \rangle - \langle I \rangle = I - I = 0 \Rightarrow I_{\max} = -I_{\min}$.

γ. or, $I'_{\max} = i'(\alpha T) = I'_{\min} + \left[(1 - \alpha) \frac{V_a}{R} - I'_{\min} \right] \frac{\alpha T}{\tau}$; or, $I'_{\min} = -I'_{\max}$.

$$\Rightarrow I'_{\max} = \frac{V_a \frac{T}{\tau} \alpha (1 - \alpha)}{R \left(2 - \frac{\alpha T}{\tau} \right)} ; \frac{T}{\tau} \ll 1 \quad I'_{\max} = \frac{\alpha (1 - \alpha)}{2} \frac{V_a T}{R \tau}. \text{ On rappelle } t = \frac{L}{R}.$$

5. $\Delta I' = 2I'_{\max} = \frac{V_a T}{R \tau} \alpha (1 - \alpha)$; en prenant le logarithme népérien et en

différentiant : $\frac{d\Delta I'}{I'} = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{d\alpha}{1 - \alpha} = \frac{d\alpha(1 - 2\alpha)}{\alpha(1 - \alpha)}$; $\Delta I'$ est maximum pour $\alpha = 0,5$.

6.α. Préoccupons-nous de $i = 0 = I + i'$ qui doit être évité dans la plus mauvaise situation : $i' = I'_{\min}$ avec $\alpha = 0,5$, soit $I = I'_{\max \alpha=0,5} = \frac{V_a T}{8L} \Rightarrow L_{\min} = \frac{V_a T}{8I}$.

A.N. : $L_{\min} = 0,19 \text{ H}$.

β. $\tau_{\min} = \frac{L_{\min}}{R}$; A.N. : $\tau_{\min} = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

γ. $\frac{T}{\tau} = 8 \cdot 10^{-2}$, approximation acceptable en électrotechnique : $\frac{T}{\tau} \ll 1$.

6.2.3.3. Hacheur (série ou réversible) et moteur

I. Etude d'un hacheur série alimentant un moteur à courant continu

Voir schéma figure 1.

L : bobine de lissage d'inductance L (résistance négligeable) ; L intègre l'inductance du bobinage de l'induit du moteur.

E : f.e.m. du moteur.

r : résistance équivalente à l'induit.

L'interrupteur électronique H est commandé par un signal carré de rapport cyclique α et de fréquence $f = 1 / T$ (T est la période). Cet interrupteur est supposé parfait ; il est fermé pour $0 \leq t \leq \alpha T$ et ouvert pour $\alpha T \leq t \leq T$.

La diode D est idéale.

Notations : $i(t)$: intensité instantanée du courant dans le moteur ;

I_{moy} : valeur moyenne de $i(t)$;

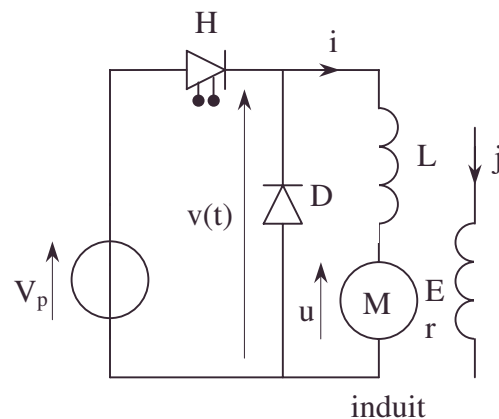


Figure 1

- bobine [self], courant nul dans un moteur, rapport cyclique, valeurs extrêmes du courant

- $u(t)$: tension instantanée aux bornes de l'induit du moteur ;
 U_{moy} : valeur moyenne de $u(t)$;
 I_1 : valeur minimale de $i(t)$ sur une période ;
 I_2 : valeur maximale de $i(t)$ sur une période.

On donne $E = k\phi\Omega$ (avec Ω vitesse angulaire de rotation) ; A.N. : $k\phi = 1,35\text{V.s}$ pour un courant d'excitation indépendante maintenu constant dans l'inducteur et d'intensité $j = 5\text{A}$. $V_p = 220\text{V}$; $L = 100\text{mH}$; $r = 0,16\Omega$; $f = 5\text{kHz}$.

On négligera $r i$ devant les autres tensions dans la question **I.1.** ; on supposera également que la valeur moyenne I_{moy} de l'intensité du courant est suffisamment grande pour que la conduction soit ininterrompue.

1.1. A quelle condition cette hypothèse est-elle valable ? Cette condition est-elle vérifiée dans le cas présent ?

2. Que peut-on dire des variations de la f.e.m. E pendant une période de fonctionnement du hacheur ?

3. Etablissez la loi $i(t)$ d'évolution de l'intensité du courant dans le moteur sur une période de fonctionnement du hacheur en utilisant les notations I_1 , I_2 , E , V_p , α , L , T .

4. En déduire une relation entre E (f.e.m. du moteur) et V_p .

5. Exprimer l'ondulation $\delta I = I_2 - I_1$ en fonction de α , V_p , L et T .

Donner l'expression numérique de $\frac{T V_p}{L}$.

6. Quelle est la valeur maximale de l'ondulation ?

7. Exprimer I_{moy} en fonction de I_1 , I_2 .

8. Exprimer I_{moy} en fonction de I_1 et δI d'une part, en fonction de I_2 et δI d'autre part. Tracer $i = i(t)$ ainsi que $\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}(t)$.

2. Le moteur défini par E , r , L , j , alimenté par ce hacheur entraîne une charge qui lui oppose un couple résistant constant de moment $T_R = 57,30\text{ N.m}$. On supposera que le moment du couple résistant dû au frottement $T_p = f'\Omega$ avec $f' = 0,065$ unité SI.

1. Exprimer U_{moy} en fonction de α et V_p .

2. Donner l'expression littérale et numérique de I_{moy} en fonction de Ω , T_R , $k\phi$ et f' , la valeur moyenne Ω pouvant varier.

3. Donner l'expression littérale et numérique de la vitesse angulaire de rotation du moteur en fonction de α , V_p , $k\phi$, r et I_{moy} , α pouvant varier.

4. En déduire l'expression numérique de I_{moy} en fonction de α .

5. En négligeant l'ondulation, exprimer numériquement la puissance absorbée par le moteur en fonction de α .

6. En déduire l'expression numérique du rendement de l'induit (c'est-à-dire en mettant à part la puissance absorbée par l'inducteur) en fonction de α .

7. On donne $\alpha = 0,5$.

1. Calculer numériquement Ω , I_{moy} , ainsi que le rendement η .

2. Calculer les pertes par effet Joule dans l'induit du moteur.

3. En déduire la valeur efficace de l'intensité du courant $i(t)$, commenter l'écart avec I_{moy} .

II. Utilisation d'un hacheur réversible en courant

Les applications numériques seront calculées avec trois chiffres significatifs.

- charge du moteur, effet Joule, rendement, réversibilité électrotechnique

L'ensemble moteur + charge est, dans certaines phases de son fonctionnement, réversible : le moteur peut fonctionner en génératrice. Afin de récupérer la puissance délivrée par cette machine lors d'un tel fonctionnement, on l'alimente par le hacheur réversible en courant de la figure 2.

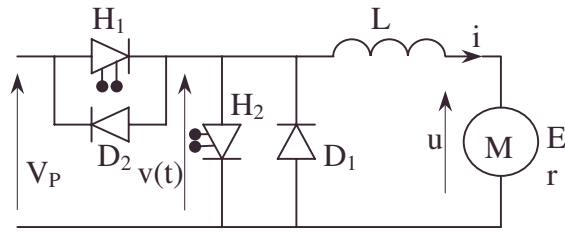


Figure 2

Les interrupteurs H_1 et H_2 sont parfaits, ils sont commandés par des signaux rectangulaires de période T et de rapport cyclique respectivement α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$. Les diodes D_1 et D_2 sont idéales.

H_1 est fermé pour $0 \leq t \leq \alpha_1 T$ et ouvert pour $\alpha_1 T \leq t \leq T$.

H_2 est ouvert pour $0 \leq t \leq (1 - \alpha_2)T$ et fermé pour $(1 - \alpha_2)T \leq t \leq T$.

On donne $L = 100 \text{ mH}$; $r = 0,16 \Omega$; $V_P = 220 \text{ V}$; $f = 5 \text{ kHz}$.

La charge du moteur oppose un couple de moment $T_R = g\Omega$ avec $g = 0,43 \text{ Nm.s}$.

La machine à courant continu est toujours à excitation indépendante avec un courant d'excitation maintenu constant d'intensité $j = 5 \text{ A}$.

La valeur nominale du moment du couple électromagnétique du moteur est $67,50 \text{ N.m}$ pour le courant nominal $I_N = 50 \text{ A}$. Il n'y a pas de frottement mécanique.

Le moment d'inertie des pièces tournantes est $J = 1,14 \text{ kg.m}^2$.

1. On peut obtenir les 3 allures de courant de la figure 3.

Dans chacun des cas (1) et (3) précisez :

1. Le mode de fonctionnement de la machine à courant continu.
2. Les éléments qui assurent la conduction du courant pour chaque segment de droite.
3. En déduire la relation qui doit exister entre α_1 et α_2 pour que le cas (2) de la figure 3 puisse se produire.

2. La relation $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ est vérifiée dans toute la suite du problème.

On fait passer très rapidement α_1 de la valeur 1 à la valeur α .

Les constantes de temps qui vont intervenir sont très supérieures à T , période du hacheur ; on pourra donc considérer que les variations significatives du courant d'intensité $i(t)$ faisant suite à cet échelon de tension, ne se produisent qu'au bout d'un nombre très important de périodes T ; on raisonnera donc sur la variation de la valeur moyenne I de l'intensité du courant dans la machine à courant continu.

1. Lorsque α_1 passe de 1 correspondant à l'état normal à la valeur notée α ($\alpha < 1$), écrire les équations différentielles de :

1. $I(t)$.
2. $\Omega(t)$, vitesse angulaire du groupe tournant.

2. Donner les expressions numériques de $I(t)$ et $\Omega(t)$ en fonction de α . On précisera soigneusement les conditions initiales littérales et déterminantes.

3. Montrer que l'intensité I du courant passe par un minimum pour une valeur de t_M que l'on calculera.

4. Donner l'expression numérique I_{\min} de ce minimum en fonction de α .

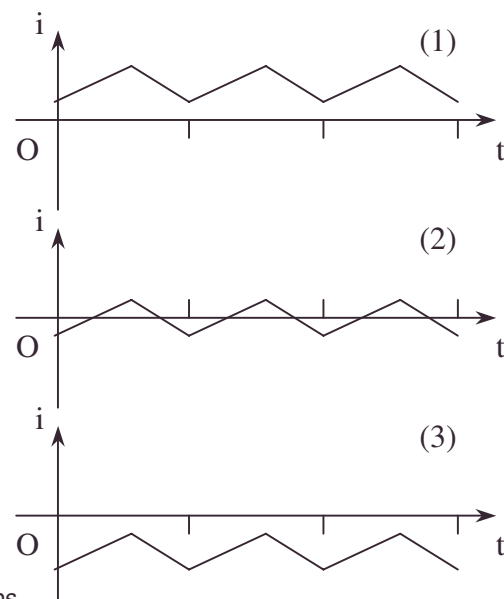


Figure 3

• charge du moteur, conditions initiales, constante de temps, échelon de Heaviside, échelon de tension, freinage avec récupération, graphe, minimum, minimum d'intensité, moment d'inertie, moment nominal du couple électromagnétique du moteur, rapport cyclique.

5. En déduire une condition sur α pour que le courant d'intensité I_{\min} s'inverse.
6. En déduire une autre condition sur α pour que $I_{\min} < -50$ A.
3. Le groupe tournant à sa vitesse nominale $\Omega_N = 25 \text{ tours.s}^{-1}$, on veut l'arrêter en utilisant un freinage avec récupération ; pour cela on fait passer rapidement α_1 de 1 à 0. Calculer :
 1. L'instant t_0 où le courant d'intensité I s'inverse ;
 2. L'instant t_1 où l'intensité du courant vaut -50 A.
 3. La vitesse de rotation du groupe à l'instant t_1 .
 Comment caractérisez-vous cette valeur en fonction de Ω_N ?
4. A partir de l'instant t_1 , on désire fonctionner à couple constant.
 1. En déduire la relation littérale et numérique qu'il doit y avoir entre α_1 et Ω .
 2. Quelle est la valeur de la vitesse quand $\alpha_1 = 0$?
 3. Donner la loi $\Omega(t)$ durant cette phase et calculez la durée t_2 de cette phase.
 4. Compte tenu des approximations faites, on supposera que l'arrêt est atteint quand $\Omega = 0$. Quelle est la durée totale nécessaire pour obtenir l'arrêt du groupe ?
 5. Dans un plan I, Ω représentez le parcours du point de fonctionnement du groupe lors de ce freinage en précisant les instants correspondant aux points particuliers.
 5. Calculer l'énergie fournie au réseau d'alimentation V_P , pendant la phase de freinage à couple constant.
 6. Comparer cette énergie à l'énergie cinétique emmagasinée au début de cette phase.

Agregation de physique appliquée ; Durée : 3h

Corrigé

I.1.1. On n'aura jamais $i = 0$ (L assurant la continuité de i) si la constante de temps L / r du régime transitoire est grande devant la durée T (majorant de αT) (caractérisant la "perturbation" de H) ; $L / r = 0,625$ s. est en fait grand devant $T = 2.10^{-4}$ s.

2. Si i varie peu, Ω et donc E varient peu pendant une période de fonctionnement du hacheur.

3.a. $0 \leq t \leq \alpha T$: H conduit, $v = V_P > 0$, D est bloquée.

On vérifie $V_P = L \frac{di}{dt} + E$ (car $r i$ est négligeable) $\Rightarrow i(t) = I_1 + \frac{V_P - E}{L} t$;

Le fonctionnement suppose $V_P - E > 0$, I_1 se place donc en $t = 0$.

b. $\alpha T \leq t \leq T$; $0 = L \frac{di}{dt} + E$ car D conduit le courant de la self et $v = 0$.

$\Rightarrow i(t) = -\frac{E}{L}(t - \alpha T) + I_2$, I_2 étant le maximum atteint en $t = \alpha T$.

4. La continuité de I s'écrit :

a. en $t = \alpha T$: $I_2 = I_1 + \frac{V_P - E}{L} \alpha T$.

b. en $t = T$: $I_1 = I_2 - \frac{E}{L} T(1 - \alpha)$.

Par substitution de I_1 dans la 1^{ère} ligne on a $E = \alpha V_P$.

5. $\delta I = I_2 - I_1 = \frac{ET}{L}(1 - \alpha) = \frac{\alpha V_P}{L} T(1 - \alpha)$; A.N. : $\frac{V_P T}{L} = 4,4.10^{-1}$ A.

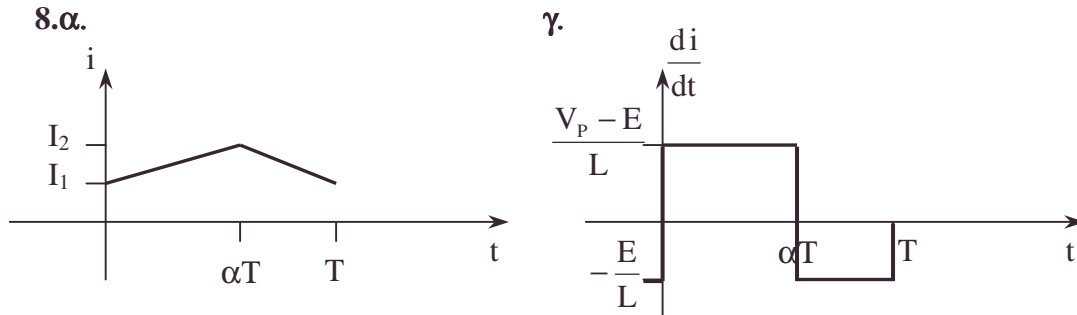
- constante de temps, continuité de l'intensité d'une bobine, durée totale nécessaire pour obtenir l'arrêt du groupe, énergie fournie au réseau d'alimentation pendant le freinage [à couple constant] d'un moteur à courant continu, fonctionner à couple constant, parcours du point de fonctionnement lors du freinage

6. $\frac{d\delta I}{d\alpha} = 1 - 2\alpha$, l'ondulation est maximum pour $\alpha = 0,5$.

$\delta I_{\max} = \frac{V_P T}{4L}$; A.N. : $\delta I_{\max} = 0,11 \text{ A}$, valeur faible habituellement devant I_{moy} .

7. $I_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\alpha T} \left(I_1 + \frac{V_P - E}{L} t \right) dt + \int_{\alpha T}^T \left(I_2 - \frac{E}{L} (t - \alpha T) \right) dt \right]$.

$I_{\text{moy}} = \frac{I_1 + I_2}{2}$; on peut le voir comme une évidence géométrique sur la figure ci-dessous.



β. On remarque géométriquement $I_{\text{moy}} = I_1 + \frac{\delta I}{2} = I_2 - \frac{\delta I}{2}$.

2.1. On a : $v = u + \frac{L di}{dt}$. En utilisant le graphe de $\frac{di}{dt}$,

$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \left[\frac{V_P (1 - \alpha)}{L} \alpha T + -\alpha \frac{V_P}{L} (1 - \alpha) T \right] = 0 \Rightarrow U_{\text{moyen}} = \langle V \rangle$.

$\langle V \rangle = \frac{1}{T} (V_P \alpha T + 0(1 - \alpha) T) = \alpha V_P \Rightarrow U_{\text{moy}} = \alpha V_P$.

2. Le théorème du moment cinétique s'écrit pour le rotor : $J \frac{d\Omega}{dt} = k\phi i - T_R - f' \Omega$.

Comme les grandeurs mécaniques varient peu pendant la période du hacheur électrique :

$\langle \Omega \rangle = \Omega$; $\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = 0$; $J \left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = k\phi I_{\text{moy}} - \langle T_R \rangle - f' \langle \Omega \rangle$; $\langle T_R \rangle = T_R \Rightarrow$

$I_{\text{moy}} = \frac{T_R + f' \Omega}{k\phi}$; A.N. : $I_{\text{moy}} = 42,4 + 4,81 \cdot 10^{-2} \Omega$.

3. On a : $u = r i + E$; $\langle u \rangle = r I_{\text{moy}} + k\phi \langle \Omega \rangle = \alpha V_P$.

$\Omega = \frac{\alpha V_P - r I_{\text{moy}}}{k\phi}$; A.N. : $\Omega = 163 \alpha - 5$.

4. Remplaçons Ω dans I.2.2. : $I_{\text{moy}} = \frac{k\phi T_R}{f' r + (k\phi)^2} + \frac{\alpha f' V_P}{f' r + (k\phi)^2}$;

A.N. : $I_{\text{moy}} = 7,83 \alpha + 42,2$.

5. $P = U_{\text{moy}} I_{\text{moy}}$ en négligeant l'ondulation ; A.N. : $P = 10^3 \alpha (9,28 + 1,72 \alpha)$.

6. $\eta = \frac{P_{\text{charge}}}{P}$ ($P_{\text{inducteur}}$ non comptabilisée) ; $\eta = \frac{T_R \Omega}{U_{\text{moy}} I_{\text{moy}}} = \frac{9,34 \alpha - 0,286}{\alpha (1,72 \alpha + 9,28)}$.

7.1. $\Omega = 76,5 \text{ rad.s}^{-1}$; $I_{\text{moy}} = 46,1 \text{ A}$; $\eta = 0,86$.

• *graphe, rendement, théorème du moment cinétique*

2. Vu la question **I.2.7.3.**, il est exclus d'utiliser $P_J = r I^2$.

Le bilan de puissance s'écrit : $P = P_{\text{charge}} + P_{\text{frottement}} + P_J$.

$$P_J = U_{\text{moy}} I_{\text{moy}} - f' \Omega^2 - T_R \Omega ; \text{A.N. : pour } \alpha = 0,5 ; P_J = 5070 - 380 - 4384 = 306 \text{ W}.$$

$$3. P_J = r I_{\text{eff}}^2 \Rightarrow I_{\text{eff}} = 43,7 \text{ A}.$$

On a utilisé différentes approximations pour obtenir I_{moy} et I_{eff} .

Ces résultats approchés sont voisins, ce qui est cohérent.

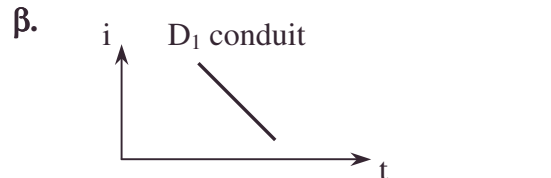
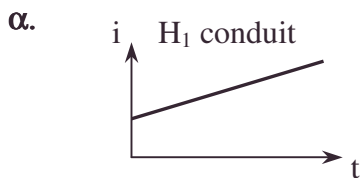
II.1.1. (1) $i > 0$ fonctionnement moteur.

(2) fonctionnement alternativement moteur et générateur.

(3) $i < 0$ fonctionnement générateur.

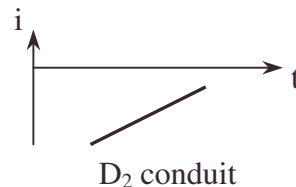
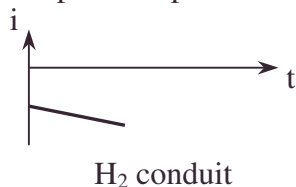
2. Rappelons que le hacheur réversible permet le passage du courant dans les deux sens.

Cas (1) : La puissance du moteur provient de V_P pendant la conduction de H_1 , qui permet une augmentation de puissance pendant cette phase.



Ensuite le système conserve son fonctionnement de moteur alors qu'il n'est plus "alimenté en puissance" par V_P (et que son intensité décroît par la conduction de D_1).

Cas (3) : La génératrice transfère sa puissance par D_2 mais sa réserve énergétique mécanique décroît ; quand H_2 conduit, le transfert ne se fait plus vers l'extérieur et le système récupère des possibilités pour la phase suivante.



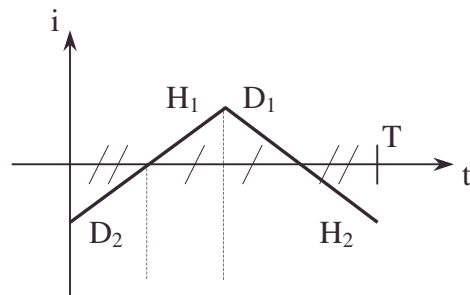
3. Vu **II.1.2.** et les associations H_1, D_i , la continuité des situations entre $i \geq 0$ et $i \leq 0$.

est possible par la conduction des composants dans l'ordre suivant indiqué sur la figure ci-contre.

La symétrie des situations de conduction implique $\alpha_1 T = (1 - \alpha_2) T \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

2.1.a. L'équation mécanique s'écrit :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = k\phi I - T_R = k\phi I - g\Omega \Rightarrow I = \frac{1}{k\phi} \left(J \frac{d\Omega}{dt} + g\Omega \right)$$



b. L'équation électrique s'écrit : $V = L \frac{dI}{dt} + rI + k\phi\Omega$.

Vu les constantes de temps $V(t) = \alpha V_p$ (effet moyen) $\Rightarrow \Omega = \frac{1}{k\phi} \left(\alpha V_p - L \frac{dI}{dt} - rI \right)$.

1. Reportons Ω dans **a.** :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{g}{J} \right) \frac{dI}{dt} + \frac{(k\phi)^2 + rg}{JL} I = \frac{\alpha g V_p}{JL}.$$

2. Reportons I dans **b.** :

$$\frac{d^2 \Omega}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{g}{J} \right) \frac{d\Omega}{dt} + \frac{(k\phi)^2 + rg}{JL} \Omega = \frac{\alpha k\phi V_p}{JL}.$$

2.a. Conditions initiales

α . La conservation de l'énergie de la self et de l'énergie cinétique du rotor assure la continuité de I et de Ω .

$$I(+0) = I_N ; \Omega(+0) = \Omega(-0) = \frac{T_{R_N}}{g} = \frac{k\phi}{g} I_N = \Omega_N.$$

$$A.N. : k\phi I_N = 67,50 \text{ N.m} ; \Omega_N = 157 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\textbf{\beta. } V(+0) = \alpha V_p \text{ mais } V(-0) = V_p \text{ et } \frac{dI}{dt}(-0) = 0.$$

1.b. donne pour $t = +\infty$:

$$\alpha V_p = L \frac{dI}{dt}(+0) + rI_N + k\phi\Omega_N \text{ et pour } t = -0 : V_p = 0 + rI_N + k\phi\Omega_N,$$

$$\text{soit : } \frac{dI}{dt}(+0) = \frac{\alpha V_p - V_p}{L} = (\alpha - 1) \frac{V_p}{L} ; A.N. : \frac{dI}{dt}(+0) = -2200(1 - \alpha).$$

$$\textbf{\gamma. a. } \text{ donne : } J \frac{d\Omega}{dt}(-0) = k\phi I_N - g\Omega_N = 0 \text{ cf. } \alpha.$$

$$J \frac{d\Omega}{dt}(+0) = k\phi I_N - g\Omega_N = 0.$$

On remarque la continuité de $\frac{d\Omega}{dt}$ (Ω grandeur mécanique à variations lente).

la discontinuité de $\frac{dI}{dt}$ associée à la discontinuité de V_p (par α).

b. L'équation différentielle en I s'écrit numériquement :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 1,98 \frac{dI}{dt} + 16,6 I = 830 \alpha ; I(0) = 50 \text{ A} ; \frac{dI}{dt} = -2200(1 - \alpha).$$

$$\Rightarrow I(t) = e^{-0,989t} (50(1 - \alpha) \cos 3,95t - 544(1 - \alpha) \sin 3,95t).$$

c. L'équation différentielle en Ω s'écrit numériquement :

$$\frac{d^2 \Omega}{dt^2} + 1,98 \frac{d\Omega}{dt} + 16,6 \Omega = 2605 \alpha ; \Omega(0) = 157 \text{ rad.s}^{-1} ; \frac{d\Omega(0)}{dt} = 0 ;$$

$$\Rightarrow \Omega(t) = e^{-0,989t} (157(1 - \alpha) \cos 3,95t - 39,3(1 - \alpha) \sin 3,95t) + 157 \alpha.$$

$$\begin{aligned} \textbf{3. } \frac{dI}{dt} = e^{-0,989t} [& -197,5(1 - \alpha) \sin 3,95t_M - 2149(1 - \alpha) \cos 3,95t_M \dots \\ & \dots - 49,5(1 - \alpha) \cos 3,95t_M + 538(1 - \alpha) \sin 3,95t_M] = 0 \end{aligned}$$

• conditions initiales, conservation de l'énergie, continuité de l'intensité d'une bobine, continuité de la vitesse de rotation d'un moteur, inversion de courant

$$\tan(3,95 t_M) = \frac{2195,5}{340,5} = 6,45 \Rightarrow t_M = 359 \text{ ms.}$$

La détermination témoigne de l'existence de ce minimum, vu la décroissance de V_p .

4. En remplaçant t par t_M , on obtient : $I_{\min} = -372 + 422 \alpha$.

5. $I_{\min} = 0$ est la limite de l'inversion de courant. Elle a lieu pour $\alpha = 0,88$.

Pour $\alpha < 0,88$, le courant s'inverse.

6. $I_{\min} < -50 \Rightarrow \alpha < 0,76$.

3. $\alpha = 0 \Rightarrow I_{\min} = -372 \text{ A}$.

1. **II.b.** et $I = 0$ avec $\alpha = 0$

$$\Rightarrow \tan 3,95 t_0 = 0,092 ; t_0 = 23 \text{ ms.}$$

2. Vu la linéarité vérifiée graphiquement
et $I(0) = 50 \text{ A}$: $t_1 = 46 \text{ ms}$.

3. vu **II.2.c.** $\Omega = 165 \text{ rad.s}^{-1} \neq \Omega_N$; évidence vu $I = -I_N$.

4. $k\phi I = \text{cste} \Rightarrow I = -50 \text{ A}$; $j = 5 \text{ A}$ et $k\phi = 1,35 \text{ V.s}$.

1. $V = k\phi\Omega + r I$ s'écrit $\alpha_1 V_p = k\phi\Omega + r I$, soit $\Omega = 163 \alpha_1 + 5,92$.

2. $\alpha_1 = 0 \Rightarrow \Omega = 5,92 \text{ rad.s}^{-1}$.

$$3.a. J \frac{d\Omega}{dt} = -k\phi I_N - g\Omega ; \Omega = 2\Omega_N e^{\frac{-g}{J}(t-t_1)} - \Omega_N.$$

$$b. \Omega = 0 \text{ pour } t_2' = t_2 - t_1 = \frac{J}{g} \ln 2 \text{ A.N. : } t_2 = 1,83 \text{ s.}$$

4. $t_1 + t_2 = 1,88 \text{ s}$.

5.

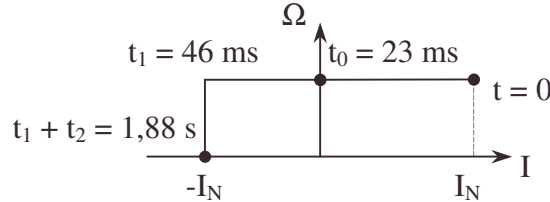
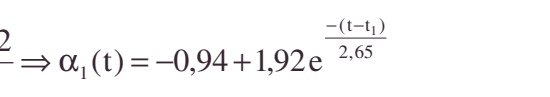


Figure 3.2.



$$5. \alpha_1 = \frac{\Omega - 5,92}{163} \Rightarrow \alpha_1(t) = -0,94 + 1,92 e^{\frac{-(t-t_1)}{2,65}}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_1+t_2} V I_N dt = I_N V_p \int_{t_1}^{t_1+t_2} \alpha_1(t) dt ; \text{ A.N. : } W = -8,1 \text{ kJ.}$$

$$6. E_c = \frac{1}{2} J \Omega_N^2 ; \text{ A.N. : } E_c = 14 \text{ kJ} ; \text{ on récupère } 58\%.$$

6.2.4. Courants triphasés

Extension des chapitres courant alternatif et effet de mutuelle

6.2.4.1. Principe du moteur synchrone triphasé

Les parties **I**, **II_A** et **II_B** sont indépendantes entre elles.

Partie I : montage triangle - triangle

Dans le réseau maillé de la figure 1, les 3 forces électromotrices, en abrégé f.é.m., e_1 , e_2 et e_3 , sont alternatives sinusoïdales de même pulsation ω , de même amplitude E_M mais elles ne sont pas en phase, le déphasage de l'une d'elles à la suivante étant $2\pi / 3$ dans l'ordre croissant des indices, à savoir ;

$$e_1 = E_M \cos(\omega t - \eta), e_2 = E_M \cos\left(\omega t - \eta - \frac{2\pi}{3}\right), e_3 = E_M \cos\left(\omega t - \eta - \frac{4\pi}{3}\right).$$

L'angle η est quelconque et permet de laisser libre le choix de l'origine du temps dans la période. Elles sont respectivement parcourues par les courants j_1 , j_2 et j_3 .

Ces f.é.m. ont même impédance interne z et elles alimentent trois impédances de charge identiques Z formant une maille fermée triangulaire.

Entre les nœuds R, S et T, ou U, V et W, ces f.é.m. alimentent ces impédances sous les différences de potentiel (d.d.p.) u_1 , u_2 et u_3 . Elles sont parcourues par les courants i_1 , i_2 et i_3 .

Les fils entre les bornes R et U, S et V, et T et W sont sans résistance ni inductance.

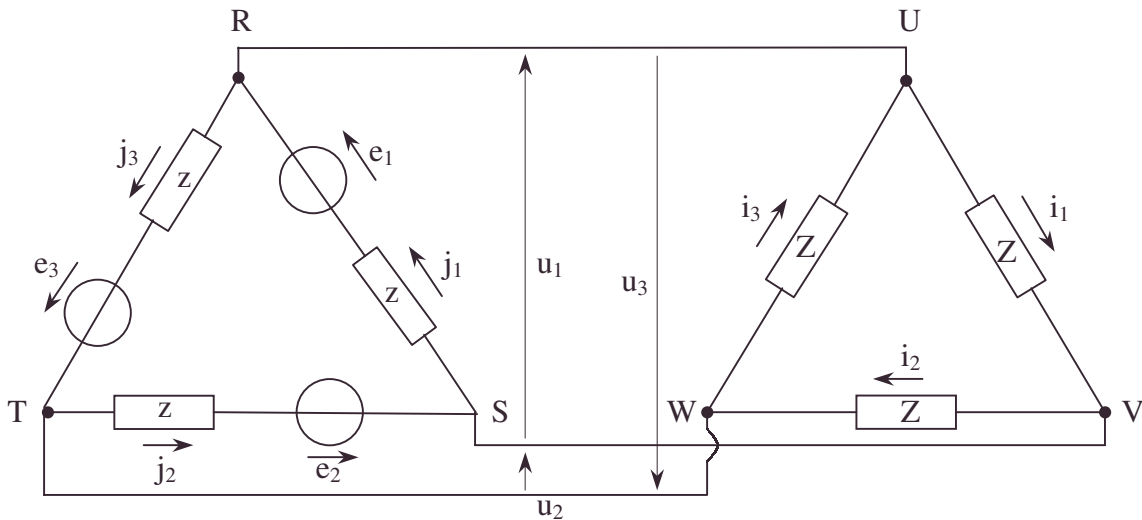


Figure 1

1. Montrer que toute somme de fonctions sinusoïdales telles que celles représentées sur la figure 1 est nulle quel que soit le temps t .

2. Pour étudier ce réseau, l'emploi de la représentation complexe est conseillé, avec les notations $\overline{E}_1, \dots, \overline{U}_1, \dots, \overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3$ et $\overline{J}_1, \overline{J}_2$ et \overline{J}_3 .

a. Dans un premier temps, seule la f.é.m. \overline{E}_1 est introduite, les autres étant nulles mais en conservant leur impédance interne z dans la branche correspondante.

Donner les expressions des courants $\overline{I}_1, \overline{I}_2$ et \overline{I}_3 dans les impédances Z en fonction de z, Z et \overline{E}_1 compte tenu du sens choisi pour ces courants.

- b. Que devient le courant \bar{I}_1 lorsque seule la f.é.m. \bar{E}_2 est introduite à sa place dans les mêmes conditions ?
- c. Même question pour le courant \bar{I}_1 lorsque seule \bar{E}_3 est introduite à sa place.
- d. Quelle est l'expression du courant \bar{I}_1 lorsque les trois f.é.m. sont introduites simultanément ?
- e. Que peut-on en conclure pour les deux autres courants \bar{I}_2 et \bar{I}_3 ?
- f. Indiquer une méthode simple pour étudier ce type de réseau.
- g. Comment s'expriment en fonction du temps les courants i_1, i_2 et i_3 sachant que la somme des impédances $z + Z$ a pour module Z_t et pour argument l'angle ψ ?

3. Application numérique : $E_M = 220\sqrt{2}$ volt ; $z = 1,6 + j1,8$; $Z = 8 + j11$ (en ohms). Déterminer l'amplitude I_M des courants i_1, i_2 et i_3 et leur déphasage par rapport à la f.é.m. de même indice. Comment est la somme $i_1 + i_2 + i_3$? Comment s'expriment les d.d.p. u_1, u_2 et u_3 ?

Partie II

Note préliminaire

En valeur instantanée et pour un régime quelconque, il est possible d'étendre les propriétés de deux circuits filiformes couplés magnétiquement à un nombre quelconque n de circuits filiformes couplés magnétiquement en écrivant le flux magnétique total dans le circuit k : ② $\Phi_k = M_{k1}i_1 + M_{k2}i_2 + \dots + L_k i_k + \dots + M_{k\ell}i_\ell + \dots + M_{kn}i_n$, et en exprimant l'énergie magnétique totale des n circuits par :

$$\textcircled{3} \quad W_{\text{magn}} = \frac{1}{2}i_1\Phi_1 + \dots + \frac{1}{2}i_k\Phi_k + \dots + \frac{1}{2}i_n\Phi_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}i_k\Phi_k.$$

A noter que $M_{ki} = M_{ik}$ (relation de Neumann).

A. Mutuelle

Le réseau utilisateur est constitué comme l'indique la figure 2 par trois circuits filiformes identiques de résistance R , d'inductance propre L et couplés magnétiquement deux à deux par l'inductance mutuelle M .

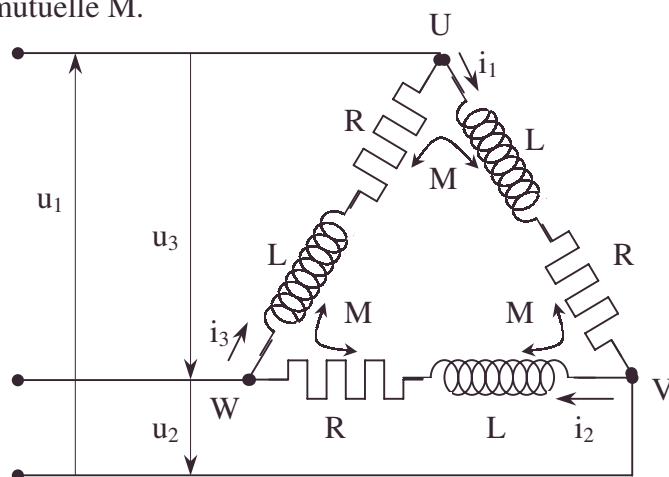


Figure 2

1. Quelle propriété peut-on établir pour la somme des valeurs instantanées des d.d.p. d'alimentation $u_1 + u_2 + u_3$?

• *convertisseur réversible, forme réelle du circuit magnétique, formes géométriques des matériaux et répartition des spires, inducteur, induit à trois bobines, Neumann, relation de Neumann sur la symétrie des mutuelles, répartition des spires des bobines, symétrie des mutuelles [formule de Neumann sur la]*

2. En régime permanent sinusoïdal, relier les courants $\overline{I_1}, \overline{I_2}$ et $\overline{I_3}$ aux d.d.p. $\overline{U_1}, \overline{U_2}$ et $\overline{U_3}$ et indiquer quelle est la propriété de la somme $\overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3}$?

3. Montrer, par exemple, que le courant $\overline{I_1}$ peut s'exprimer en fonction de la seule d.d.p. $\overline{U_1}$ en posant $\mathcal{L} = L - M$.

4. La méthode simple énoncée en 1.2.f. peut-elle encore s'appliquer ?
Quelle expression donner aux courants $\overline{I_2}$ et $\overline{I_3}$?

5. Application numérique

$$E_M = 220\sqrt{2} \text{ volt}; \quad z = 1,6 + j1,8 (\text{en ohm}).$$

$$\text{et avec } R = 8 \Omega; \quad L - M = 35 \text{ mH}; \quad \omega = 314 \text{ rad/sec.}$$

Quelle est l'intensité I_M des courants ?

Quelle est la puissance moyenne absorbée par le réseau utilisateur ?

Quelle est l'amplitude U_M des d.d.p. u_1, u_2 et u_3 ?

B. Moteur synchrone

Le réseau utilisateur est maintenant un système comprenant deux ensembles de circuits filiformes (Figure 3).

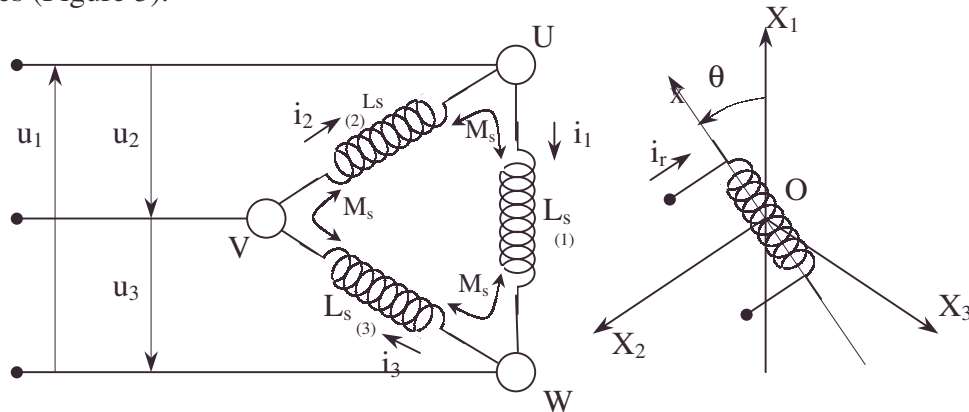


Figure 3

Le premier, appelé stator, caractérisé par l'indice s, comprend trois circuits identiques couplés magnétiquement. De résistance négligeable, ces trois circuits ont chacun une inductance propre L_s et sont couplés entre eux par une inductance mutuelle M_s .

Le second ensemble, appelé rotor, caractérisé par l'indice r, est constitué par un seul circuit filiforme d'axe Ox mobile en rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure. Sa position est repérée par l'angle θ entre son axe et celui, OX_1 , du circuit (1) du stator. Il est parcouru par un courant i_r . Sa résistance est négligeable et son inductance propre est notée L_r .

Entre les selfs (1), (2) et (3) du stator et celui du rotor, les couplages magnétiques sont caractérisés par les mutuelles inductances respectives :

$$\textcircled{4} \quad M_1 = M_0 \cos \theta; \quad M_2 = M_0 \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right); \quad M_3 = M_0 \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right).$$

1. Pour un régime quelconque, pendant l'intervalle de temps dt la variation dW_e de l'énergie électrique fournie au système est égale à la somme du travail du moment C_e des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit filiforme du rotor dans la rotation $d\theta$ et de la variation dW_{magn} de l'énergie magnétique emmagasinée dans le système.

Avec les expressions ② et ③ des flux totaux et de l'énergie magnétique, montrer que, d'une manière générale, le moment C_e ou couple électromagnétique peut s'obtenir

directement en dérivant partiellement l'énergie magnétique par rapport à l'angle θ , les courants conservant leur valeur instantanée, soit ⑤ $C_e = \frac{\partial W_{\text{magn}}}{\partial \theta}$.

2.a. Exprimer l'énergie W_{magn} du système de la figure 3 en fonction des courants i_1, i_2, i_3, i_r , des inductances L_s, M_s, M_0, L_r et de l'angle θ .

b. Comment s'exprime alors le couple C_e en fonction de ces mêmes grandeurs ?

3. Les d.d.p. u_1, u_2 et u_3 sont alternatives sinusoïdales de même amplitude U_M et de même pulsation ω . Elles forment un système identique à celui des f.é.m. données en (1.) Les courants i_1, i_2 et i_3 sont également alternatifs sinusoïdaux de même pulsation ω et de même amplitude I_M et ils sont donnés par :

$$i_1 = I_M \cos \omega t ; i_2 = I_M \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) ; i_3 = I_M \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Le courant dans le rotor est continu, $i_r = J$, et il est fourni par une source de courant.

a. Comment s'exprime alors le couple C_e en fonction de M_0, I_M, J, θ et du temps.

b. Le rotor tournant à la vitesse angulaire Ω telle que sa position est donnée par $\theta = \Omega t + \delta$, indiquer à quelle condition sur cette vitesse le couple C_e est indépendant du temps et ainsi devient uniforme ?

4. Que deviennent dans ces conditions les équations de chaque circuit du stator reliant la tension u_i et le courant i_i correspondant ?

Peut-on appliquer la méthode d'étude déjà utilisée plus haut ?

5. En posant $\bar{J} = J e^{j\delta}$ un nombre complexe représentant l'influence du courant du rotor, montrer que pour un circuit du stator, par exemple le (1), on peut écrire l'équation complexe $\bar{U}_1 = j\omega \mathcal{L}_s \bar{I}_1 + j\omega M_0 \bar{J}$, avec \bar{U}_1, \bar{I}_1 les représentations complexes de u_1 et i_1 . Quelle représentation vectorielle peut-on faire de cette équation ?

6. Application numérique

a. Avec $I_M = 10 \text{ A} ; J = 5 \text{ A} ; \mathcal{L}_s = 0,04 \text{ H} ; M_0 = 0,3 \text{ H} ; \omega = 314 \text{ rad/sec}$, quel est le couple électromagnétique pour $\delta = 45^\circ$?

b. Avec les mêmes données, quelle doit être la tension U_M et sa valeur efficace ? Quel est l'argument φ de cette tension ?

CCP ; Durée : 3h

Corrigé

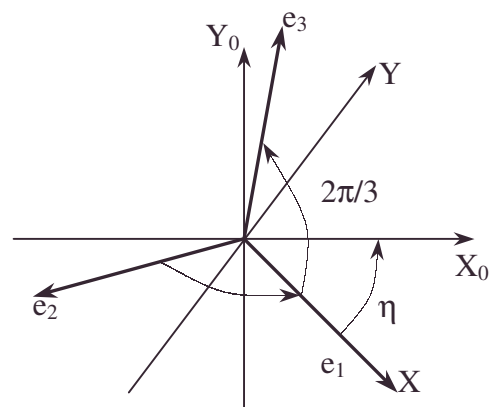
I.1. Représentons $e_1 + e_2 + e_3$ dans un diagramme de Fresnel.

On voit $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$ dans le repère OXY.
De même pour ses projections sur tout axe fixe ou tournant $\Rightarrow e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Une méthode complexe isomorphe est possible.

De même, pour $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ (cf. rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et modules égaux),

$j_{12} + j_2 + j_3 = 0 ; i_1 + i_2 + i_3 = 0$ qui de plus représente la conservation de l'électricité par unité de temps dans (RST) ou (U,V,W).



2.a. Restructurons la figure 1.

Il est clair que :

$V_T - V_W = 0$: on peut déconnecter T de W sans perturber le réseau puisque le courant entre T et W est nul $\Rightarrow j_3 = j_2$; $i_3 = i_2$.

(Si un doute subsistait relativement à $V_T - V_W$, en connectant à nouveau les points T et W séparés et de même potentiel $\frac{V_R + V_S}{2}$ le courant entre T et W est bien nul).

Utilisons de plus l'équivalence Thévenin Norton pour obtenir les nouveaux schémas :

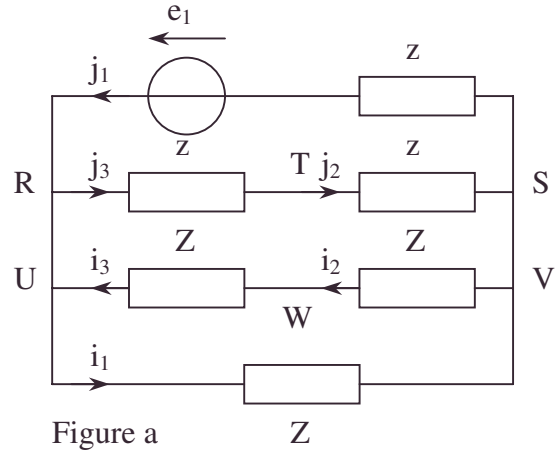


Figure a

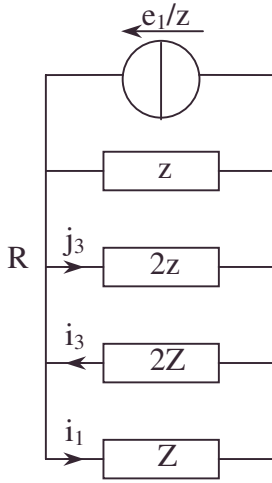


Figure b

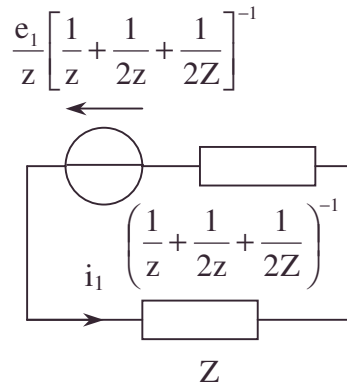


Figure c

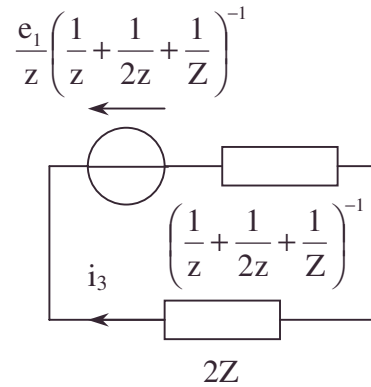


Figure d

$$\text{fig. c} \Rightarrow \left(Z + \frac{2zZ}{3Z+z} \right) \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{z} \frac{2zZ}{(3Z+z)} \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{2}{3} \frac{\bar{E}_1 Z (3Z+z)}{(3Z+z)Z(3+Z)} ; \bar{I}_{1a} = \frac{2}{3} \frac{\bar{E}_1}{z+Z}.$$

$$\text{fig. d} \Rightarrow - \left(2Z + \frac{2zZ}{3Z+2z} \right) \bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_1}{z} \frac{2zZ}{(3Z+2z)} \Rightarrow \bar{I}_2 = \frac{-2\bar{E}_1 Z (3Z+2z)}{6(3Z+2z)Z(Z+z)} ;$$

$$\bar{I}_{2a} = \bar{I}_{3a} = - \frac{1}{3} \frac{\bar{E}_1}{z+Z}.$$

b. Par permutation circulaire : $\bar{I}_{1b} = - \frac{1}{3} \frac{\bar{E}_2}{z+Z}.$

c. De même : $\bar{I}_{1c} = - \frac{1}{3} \frac{\bar{E}_3}{z+Z}.$

d. Par le théorème de superposition : $\bar{I}_1 = \bar{I}_{1a} + \bar{I}_{1b} + \bar{I}_{1c} = \frac{2\bar{E}_1 - \bar{E}_2 - \bar{E}_3}{3(z+Z)}.$

$$\bar{I}_1 = \frac{3\bar{E}_1 - (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3)}{3(z+Z)} ; \text{ or } \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{3\bar{E}_1 - 0}{3(z+Z)} = \frac{\bar{E}_1}{z+Z}.$$

e. Par permutation : $\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{z+Z} ; \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{z+Z}.$

f. Tout se passe comme si on pouvait séparer les "phases", aussi bien en ce qui concerne le générateur \bar{E}_j, z_j que la charge correspondante Z_j .

$$\bar{I}_j = \frac{\bar{E}_j}{z + Z}.$$

g. $z + Z = Z_t e^{j\psi}$.

$$\bar{I}_\ell = \frac{\bar{E}_\ell}{Z_t} e^{-j\psi} = \frac{E_M}{Z_t} e^{-j\left(\eta + (\ell-1)\frac{2\pi}{3} + \psi\right)}, \text{ d'où en notation réelle :}$$

$$i_1 = \frac{E_M}{Z_t} \cos(\omega t - \eta - \psi); i_2 = \frac{E_M}{Z_t} \cos\left(\omega t - \eta - \psi - \frac{2\pi}{3}\right); i_3 = \frac{E_M}{Z_t} \cos\left(\omega t - \eta - \psi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

3.a. $I_M = \frac{E_M}{Z_t}; z + Z = 9,6 + j12,8 \Rightarrow Z_t = 16\Omega \Rightarrow I_M = 19,4 \text{ A}; I_e = 13,8 \text{ A}.$

$$\text{b. } \frac{(z + Z)}{Z_t} = \cos \psi + j \sin \psi \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos \psi = \frac{9,6}{16} = 0,6 \\ \sin \psi = \frac{12,8}{16} = 0,8 \end{array} \right\} \psi = 53,1^\circ = 0,93 \text{ rad.}$$

c. Soit $\eta' = \eta + \psi$.

$$i_1 + i_2 + i_3 = \frac{E_M}{Z_t} \left(\cos(\omega t - \eta') + \cos\left(\omega t - \eta' - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \eta' - \frac{4\pi}{3}\right) \right).$$

Vu I.1. et l'analogie formelle entre η et η' : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

d. $\bar{U}_1 = Z \bar{I}_1; \bar{U}_2 = Z \bar{I}_2; \bar{U}_3 = Z \bar{I}_3;$

soit $\varphi = \arg Z; \bar{U}_\ell = |Z| \frac{E_M e^{-j(\arg \bar{E}_\ell + \psi - \arg Z)}}{Z_t};$ On remarquera que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

A.N. : $|Z| = 13,6\Omega; \cos \arg Z = \frac{8}{13,6}; \sin \arg Z = \frac{11}{13,6} \Rightarrow \arg Z = 54,0^\circ = 0,94 \text{ rad}.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg \bar{U}_\ell = \arg \bar{E}_\ell + \frac{0,9\pi}{180} \text{ en radian} \\ \text{On remarque la très faible avance de phase de } \bar{U}_\ell \text{ sur } \bar{E}_\ell. \\ (\text{\AA} \text{ peine } 1^\circ) \end{array} \right.$$

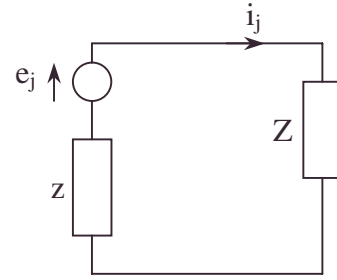
vu $Z_t = 16\Omega$ calculé en 3.a. : $|\bar{U}_\ell| = 264 \text{ V}; U_e = 187 \text{ V}.$

II.1.2.a. Comme dans le cas général du I., Vu le raisonnement sur $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

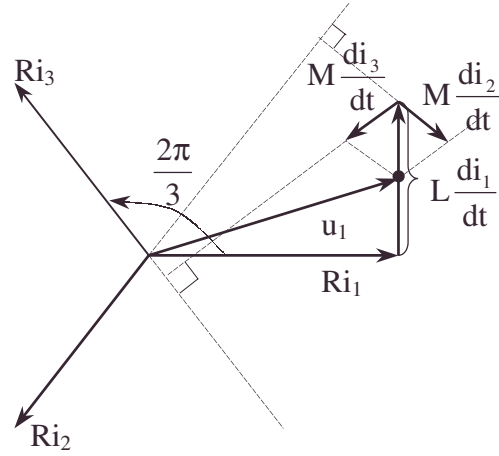
$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{array} \right.$$

α. $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ représente la conservation de la charge dans le système

intérieur à (U, V, W) en ARQS ; la "symétrie" des Z_{ij} impose le déphasage de $\frac{2\pi}{3}$ entre les intensités.



β. L'effet de mutuelle respecte l'invariance du système dans les rotations de $\frac{2\pi}{3}$; le déphasage de $\frac{2\pi}{3}$ des intensités se répercute par un déphasage de $\frac{2\pi}{3}$ sur les tensions $u_1 = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt}$ se représente dans le diagramme de Fresnel à partir de i_1, i_2, i_3 , de même pour u_2 et $u_3 \Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0$.



Relevons l'évidence géométrique de la figure 2 : $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0$ isomorphe dans \mathbb{C} .

b. Méthode complexe :

α. l'équation différentielle s'écrit :

$$\overline{U}_1 = R\overline{I}_1 + j\omega(L\overline{I}_1 + M\overline{I}_2 + M\overline{I}_3) ; \text{ de même par permutation :}$$

$$\overline{U}_2 = R\overline{I}_2 + j\omega(M\overline{I}_1 + L\overline{I}_2 + M\overline{I}_3) ;$$

$$\overline{U}_3 = R\overline{I}_3 + j\omega(M\overline{I}_1 + M\overline{I}_2 + L\overline{I}_3) .$$

$$\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 = (R + j\omega(L + 2M))(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3) \text{ par addition.}$$

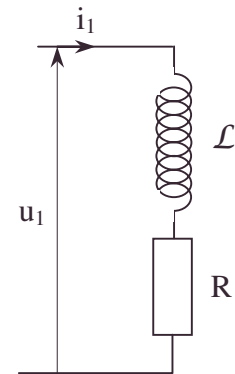
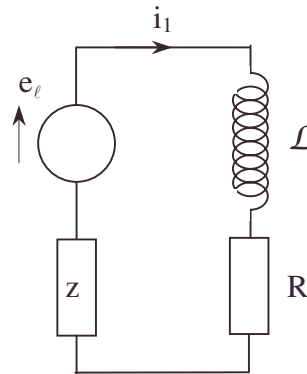
β. Les 2 annulations sont liées : $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$ et $\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 = 0$.

$$3. \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = -\overline{I}_1 \Rightarrow \overline{U}_1 = [R + j\omega(L - M)]\overline{I}_1 \Rightarrow \overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_1}{R + j\omega\mathcal{L}}$$

4. Tout se passe comme si on pouvait séparer les "phases", sur la charge Z constituée de \mathcal{L} et R par exemple pour u_ℓ .

On reprend **I.2.f.** pour le générateur e_ℓ et sa charge $Z = (R + j\mathcal{L}\omega)$ correspondante. On peut séparer formellement les phases.

$$\overline{I}_\ell = \frac{\overline{E}_\ell}{z + Z} = \frac{\overline{E}_\ell}{z + R + j\mathcal{L}\omega} \quad \forall \ell .$$



$$5.a. I_M = \frac{E_M}{|z + R + j\mathcal{L}\omega|} ;$$

$$z + R + j\mathcal{L}\omega = 9,6 + j 12,8 ; |z + R + j\mathcal{L}\omega| = 16\Omega \Rightarrow I_M = 19,4A ; I_e = 13,8A .$$

• diagramme de Fresnel

b. Pour chaque branche :

$$P_\ell = RI_e^2 \text{ et au total } P = 3RI_e^2 \quad \text{A.N.: } P = 4,6 \text{ kW}.$$

$$\text{c. } \overline{U}_\ell = (R + j\mathcal{L}\omega)\overline{I}_\ell = \frac{(R + j\mathcal{L}\omega)\overline{E}_\ell}{z + R + j\mathcal{L}\omega} ; U_M = \frac{|R + j\mathcal{L}\omega|E_M}{|z + R + j\mathcal{L}\omega|} \text{ pour tout } \ell.$$

$$\text{A.N. : } U_M = \frac{13,6.220.\sqrt{2}}{16} = 264 \text{ V} ; U_e = 187 \text{ V}.$$

$$\text{B.1. } dW_e = -C_e d\theta + dW' = 0.$$

$$\text{or, } W_{\text{mag}} = \sum \frac{1}{2} \phi_\ell i_\ell \text{ dans l'approximation ARQS ; } dW_{\text{mag}} = \sum \frac{1}{2} \phi_\ell di_\ell + \frac{1}{2} i_e d\phi_\ell.$$

dW_e permet de traduire la compensation des dépenses mécaniques et des dépenses énergétiques équivalentes des d.d.p. dues aux forces électromotrices $e_\ell = -\frac{d\phi_\ell}{dt}$.

$$dW' = -\sum e_\ell i_\ell dt = +\sum i_\ell d\phi_\ell ; dW_{\text{mag}} = dW' + \sum i_\ell d\phi_\ell.$$

En procédant à ϕ_ℓ constant ce qui est usuel pour la dérivation partielle (et non à courants constants).

$$C_e d\theta = dW' = dW_{\text{mag}} = \sum \frac{1}{2} \phi_\ell di_\ell \Rightarrow C_\theta = \left(\frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_{\phi_\ell}.$$

2.a.

$$W_{\text{mag}} = \sum \frac{1}{2} \phi_\ell i_\ell = \frac{1}{2} i_1 (L_s i_1 + M_s i_2 + M_s i_3 + M_l i_r) + \frac{1}{2} i_2 (L_s i_2 + M_s i_1 + M_s i_3 + M_2 i_r) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} i_3 (L_s i_3 + M_s i_1 + M_s i_2 + M_3 i_r) + \frac{1}{2} i_r (L_r i_r + M_l i_1 + M_2 i_2 + M_3 i_3).$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_s (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2) + M_s (i_1 i_2 + i_2 i_3 + i_3 i_1) + \frac{1}{2} L_r i_r^2 + M_l i_r i_1 + M_2 i_r i_2 + M_3 i_r i_3.$$

b. $C_e = i_r i_1 \frac{\partial M_l}{\partial \theta} + i_r i_2 \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + i_r i_3 \frac{\partial M_3}{\partial \theta}$ car les autres grandeurs ne dépendent pas explicitement de θ .

$$C_e = -i_r M_0 \left(i_1 \sin \theta + i_2 \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_3 \sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right).$$

3.a.

$$C_e = -JM_0 I_M \left(\sin \theta \cos \omega t + \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right).$$

b. Transformons les produits en somme :

$$\sin \theta \cos \omega t = \frac{1}{2} (\sin (\theta + \omega t) + \sin (\theta - \omega t)) \text{ etc... avec } \theta = \Omega t + \delta.$$

$$C_e = -\frac{JM_0 I_M}{2} \left[\sin ((\Omega + \omega)t + \delta) + \sin \left[(\Omega + \omega)t + \delta - \frac{2\pi}{3} \right] + \sin \left[(\Omega + \omega)t + \delta - \frac{4\pi}{3} \right] \right] + \dots$$

$$\dots + [\sin [(\Omega - \omega)t + \delta] + \sin [(\Omega - \omega)t + \delta] + \sin [(\Omega - \omega)t + \delta]].$$

On se souvient que $e^{j\alpha} \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) = 0$ (avec $\alpha = (\Omega + \omega)t + \delta$); donc sa partie imaginaire est nulle aussi.

$$\sin((\Omega + \omega)t + \delta) + \sin\left((\Omega + \omega)t + \delta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left((\Omega + \omega)t + \delta - \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

$$C_e = -\frac{3J M_0 I_M}{2} \sin((\Omega - \omega)t + \delta).$$

Si $\Omega \neq \omega$, $\langle C_e \rangle = 0$; $\langle C_e \rangle \neq 0 \Rightarrow \Omega = \omega$ alors $C_e = -\frac{3J}{2} M_0 I_M \sin \delta$ constant.

4. cf. II.A.2. Désormais $\Omega = \omega$.

$$u_1 = R i_1 - \left(-\frac{d}{dt} (L_s i_1 + M_s i_2 + M_s i_3 + M_1 i_r) \right); \text{ or } M_1 = M_0 \cos(\omega t + \delta) \text{ et } i_r = \bar{J}.$$

On adopte la notation complexe avec $\bar{M}_1 = M_0 e^{j\delta}$:

$$\bar{U}_1 = j\omega (L_s \bar{I}_1 + M_s (\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + M_0 e^{j\delta} \bar{J}).$$

$$\text{Or } \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = -\bar{I}_1 \Rightarrow \bar{U}_1 = j\omega (L_s - M_s) \bar{I}_1 + j\omega J M_1.$$

La méthode déjà étudiée de division du circuit triphasé en trois parties formellement isolées est encore applicable, mais il faut tenir compte aussi de l'interaction stator – rotor particulière vu $\Omega = \omega$.

5.a. Méthode complexe

On a bien l'équation demandée :

$$\bar{U}_1 = j\omega \mathcal{L}_s \bar{I}_1 + j\omega M_0 \bar{J}.$$

b. Méthode de Fresnel

$$\mathcal{L}_s = L_s - M_s;$$

la représentation de Fresnel est analogue au calcul ; on sépare formellement les phases :

$$\text{On remarquera que } \arg j\omega M_0 \bar{J} = \delta + \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{6.a. } C_0 = -15,9 \text{ mN}.$$

$$\mathbf{b. } \bar{U}_1 = U_M e^{j\varphi_1}.$$

Projetons sur les axes la somme vectorielle :

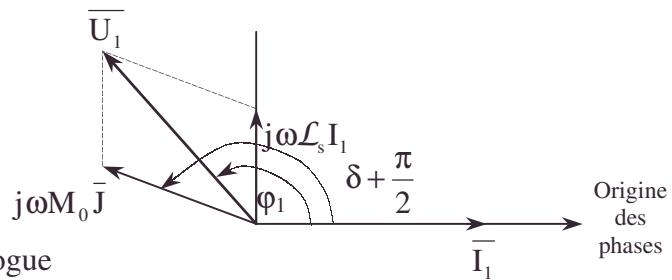
$$U_M \cos \varphi_1 = 0 - \omega M_0 J \sin \delta.$$

$$U_M \sin \varphi_1 = \omega \mathcal{L}_s I_M + \omega M_0 J \cos \delta. \text{ Eliminons } \varphi_1 \text{ par } \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1.$$

$$\Rightarrow U_M^2 = \omega^2 M_0^2 J^2 + \omega^2 \mathcal{L}_s^2 I_M^2 + 2 \mathcal{L}_s \omega^2 M_0 \cos \delta; \tan \varphi_1 = -\cotan \delta - \frac{\mathcal{L}_s}{M_0} \frac{I_M}{J \sin \delta}.$$

$$\mathbf{A.N. : } U_M = 489 \text{ V.}; \varphi_1 = 126^\circ.$$

On peut également faire le tracé à l'échelle et faire les mesures.



6.2.4.2. Convertisseur réversible

Aucune connaissance en ferromagnétisme n'est nécessaire.

L'étude porte sur un convertisseur électromécanique à quatre bobinages, tel qu'indiqué en figure 1. La partie mobile, également appelée induit, comporte trois bobine A, B et C montées en étoile, reliées aux trois bornes repérées respectivement A, B et C. Toutes les grandeurs relatives à ces trois circuits auront les indices respectifs a, b, c. La partie fixe, également appelée inducteur, comporte une bobine F, reliée aux bornes F_1 et F_2 . toutes les grandeurs relatives à ce circuit auront les indices f.

Les tensions aux bornes de chaque bobine, ainsi que les courants les traversant, sont représentés figure 1.

On respectera les notations indiquées sur cette figure.

Le bobinage F est réparti sur toute la circonférence intérieure de l'inducteur. Les bobinage A, B et C sont répartis sur l'ensemble de la circonférence de l'induit, et leurs axes sont décalés dans l'espace de 120° . La répartition exacte des spires des bobines n'est pas étudiée. L'axe du bobinage A est repéré par rapport à l'axe du bobinage F par l'angle θ . La position de l'induit par rapport à l'inducteur, ainsi que la configuration géométrique du système sont représentés figure 2.

La forme réelle du circuit magnétique, formé par l'inducteur, l'induit et l'air, n'est pas représentée. Les formes géométriques des matériaux et la répartition des spires sont telles que les inductances propres et mutuelles entre les bobinages ne sont pas constantes, à l'exception de l'inductance propre du bobinage F, qui elle, est supposée constante.

On admettra la réciprocité des coefficients de mutuelles inductances $M_{ab} = M_{ba}$, etc....

On note :

- inductance propre du bobinage A : $L_a = L_0 + L_2 \cos 2\theta + L_4 \cos 4\theta$.
- inductance propre du bobinage B :

$$L_b = L_0 + L_2 \cos 2\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right) + L_4 \cos 4\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right)$$

- inductance propre du bobinage C : l'expression de L_c n'est pas précisée dans l'énoncé ;

• bobinage (self), montage en étoile

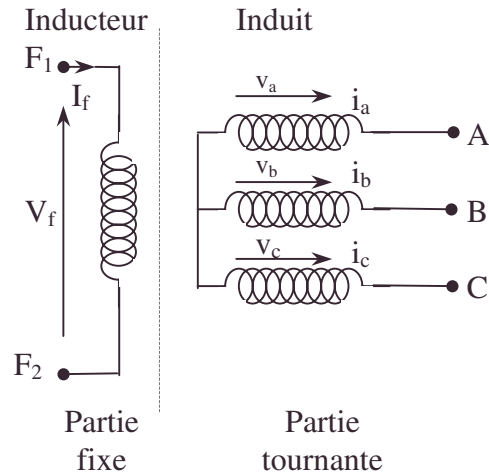
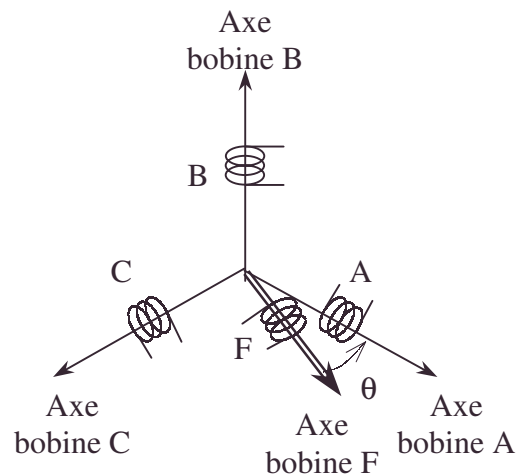


Figure 1 : Schéma de principe du convertisseur électromécanique. Ce schéma ne tient pas compte de la position géométrique des bobines.



→ Enroulements et repère tournant

⇒ Enroulements et repère fixe

Figure 2 : Positions relatives des axes des bobines (enroulements).

– inductances mutuelles entre les bobinages A et B puis entre A et C :

$$M_{ba} = M_0 + M_2 \cos 2\left(\theta - 4\frac{\pi}{3}\right) + M_4 \cos 4\left(\theta - 4\frac{\pi}{3}\right).$$

$$M_{ca} = M_0 + M_2 \cos 2\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right) + M_4 \cos 4\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right).$$

– l'expression de la mutuelle inductance entre les bobinages B et C n'est pas précisée. Elle sera notée dans la suite M_{cb} ;

– l'inductance propre du bobinage F est supposée constante, et sera notée L_f ;

– les mutuelles inductances entre les bobinages F et A, F et B, F et C sont notées respectivement :

$$M_{af} = M_{f1} \cos(\theta) + M_{f3} \cos(3\theta) + M_{f5} \cos(5\theta).$$

$$M_{bf} = M_{f1} \cos\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right) + M_{f3} \cos 3\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right) + M_{f5} \cos 5\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right).$$

$$M_{cf} = M_{f1} \cos\left(\theta - 4\frac{\pi}{3}\right) + M_{f3} \cos 3\left(\theta - 4\frac{\pi}{3}\right) + M_{f5} \cos 5\left(\theta - 4\frac{\pi}{3}\right).$$

La résistance du bobinage F est notée R_f .

Les bobinages A, B et C ont des résistances identiques notées R_i .

Les valeurs numériques sont :

$$L_0 = 1,87 \text{ mH} ; \quad L_2 = 0,450 \text{ mH} ; \quad L_4 = -0,210 \text{ mH} ;$$

$$M_0 = -0,950 \text{ mH} ; \quad M_2 = -0,380 \text{ mH} ; \quad M_4 = 0,230 \text{ mH} ;$$

$$M_{f1} = 33,0 \text{ mH} ; \quad M_{f3} = 3,00 \text{ mH} ; \quad M_{f5} = -2,50 \text{ mH} .$$

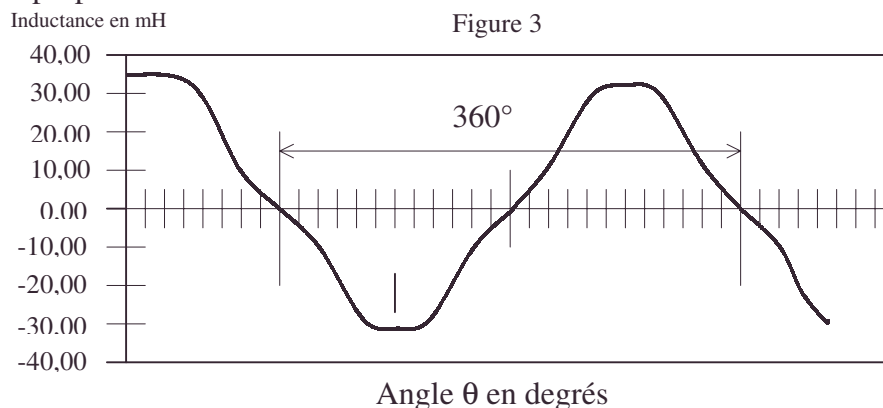
$$R_i = 0,550 \Omega .$$

Les valeurs numériques de R_f et L_f ne sont pas données dans l'énoncé.

Première partie : Etude des paramètres électriques du convertisseur

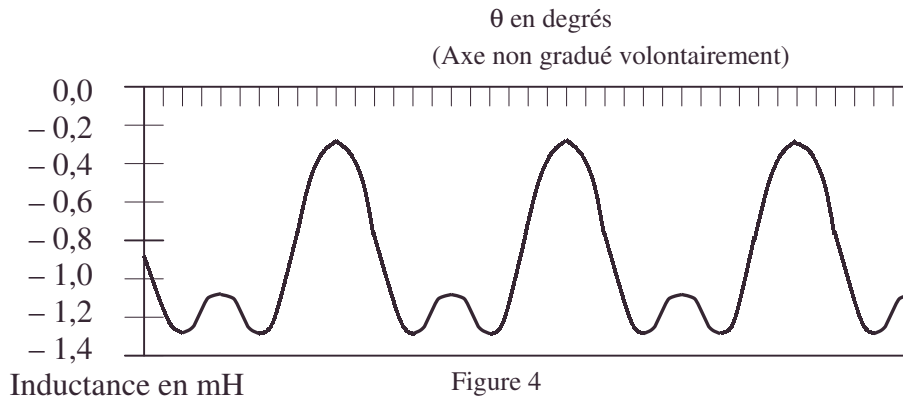
Le convertisseur est à l'arrêt, mais la position de l'induit peut varier entre 0 et 360°.

I.1. La figure 3 représente un relevé expérimental effectué afin d'évaluer une des inductances propres ou mutuelles.



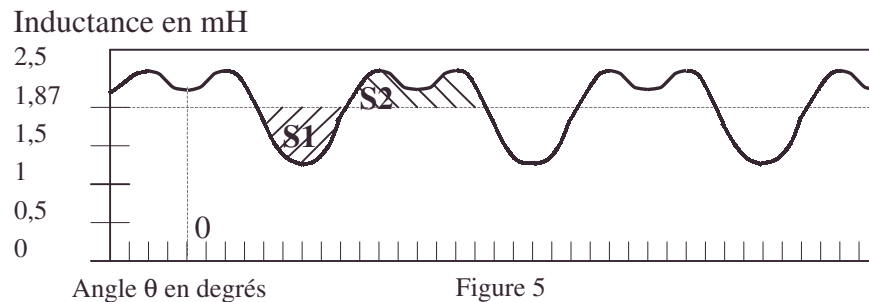
Quelle est l'inductance propre ou mutuelle relevée figure 3 ? Justifier le résultat sans effectuer de calcul.

2. La figure 4 représente le relevé d'une des inductances mutuelles entre deux phases de l'induit. Pour quelle raison cette mutuelle inductance est-elle négative ?



3. La figure 5 présente un relevé effectué afin d'évaluer une des trois inductances propres des bobines de l'induit.

- Quelle est l'inductance propre relevée figure 5 ? Justifier le résultat.
- Pour quelle raison les surfaces S1 et S2 sont-elles égales ?
- Repérer la graduation 360° sur l'axe des abscisses.



On étudie maintenant un système composé de trois inductances L_1 , L_2 et L_3 , tel que :

$$L_1 = \sum_{n=1}^5 \cos(n.\theta) ; L_2 = \sum_{n=1}^5 \cos n \left(\theta - 2 \frac{\pi}{3} \right) ; L_3 = \sum_{n=1}^5 \cos n \left(\theta - 4 \frac{\pi}{3} \right).$$

4. Déterminer l'expression simplifiée au maximum de la somme suivante, pour $n = 1$:

$$S = \cos(n.\theta) + \cos n \left(\theta - 2 \frac{\pi}{3} \right) + \cos n \left(\theta - 4 \frac{\pi}{3} \right).$$

5. Pour $n = 2 ; 4 ; 5$, la somme S précédente vaut $S = 0$.

Pour $n = 3$, la somme S précédente vaut : $S = 3\cos(3\theta)$.

Déterminer la somme : $L_t = \sum_{n=1}^5 \left\{ \cos(n\theta) + \cos n \left(\theta - 2 \frac{\pi}{3} \right) + \cos n \left(\theta - 4 \frac{\pi}{3} \right) \right\}$.

6. Quelle est la particularité de l'harmonique trois dans l'expression de L_t par rapport aux autres harmoniques ?

7. Sachant que la somme des trois inductances propres des bobines de l'induit vaut : $L = L_a + L_b + L_c = 3L_0$, déterminer l'expression littérale de L_c , en vous aidant des propriétés présentées dans les questions I.4. à I.6.

8. Sachant que la somme $M = M_{ab} + M_{bc} + M_{ac} = 3M_0$, déterminer l'expression littérale de M_{bc} en vous aidant des propriétés présentées dans les questions I.4. à I.6.

9. Montrer, en vous servant du résultat des questions I.4. à I.6., que la somme $M_{af} + M_{bf} + M_{cf}$ vaut $M_3 \cos(3\theta)$, M_3 étant un coefficient à déterminer littéralement.

10. Afin de déterminer L_f et R_f , on alimente la bobine F par une tension alternative sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $V_f = 24$ V. La valeur efficace du courant est alors $I_f = 800$ mA et le déphasage, en valeur absolue, est égal à $|\varphi| = 85^\circ$. Les trois bobines de l'induit sont déconnectées de toute source ou charge, donc ne débitent aucun courant.

a. Déterminer les expressions littérales de L_f et R_f en fonction de V_f , I_f , f et $|\varphi|$.

On mettra les résultats sous la forme :

$$R_f = \left(\frac{V_f}{I_f} \right) (1 + k_1)^{-\frac{1}{2}} \text{ et } L_f = \left\{ \frac{V_f}{(k_2 \cdot I_f)} \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{k_1} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont deux coefficients,}$$

dépendants de f et φ , à déterminer.

b. Représenter un schéma de montage permettant de relever V_f , I_f et φ .

c. Préciser de quelle manière φ est déterminé à partir du montage proposé.

11. Déterminer les valeurs numériques de R_f et L_f .

12. Tracer sur un même graphe l'allure de la tension $v_f(t)$ et du courant $i_f(t)$, où t représente le temps et i_f et v_f les grandeurs précisées à la question **I.10**.

13.a. Déterminer les valeurs limites (expressions littérales) obtenues pour R_f et L_f lorsque k_1 tend vers l'infini.

b. Déterminer les valeurs numériques de R_f et L_f lorsque k_1 tend vers l'infini.

c. A quel cas particulier correspondent ces valeurs limites ?

14. Calculer la valeur numérique des pertes par effet Joule dans le bobinage F pour le cas de la question **I.10**.

15. Calculer la valeur numérique de la puissance apparente $S_a = V_f \cdot I_f$ absorbée par le bobinage F pour le cas de la question **I.10**.

16. Peut-on assimiler la bobine L_f à une inductance pure ? Justifier la réponse à partir des résultats obtenus aux questions **I.14.** et **I.15**.

Deuxième partie : Etude du convertisseur à l'arrêt

On suppose le convertisseur à l'arrêt, la position θ pouvant prendre des valeurs comprises entre 0 et 360° . On alimente l'inducteur avec un courant $i_f = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$.

La pulsation vaut $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence du réseau d'alimentation.

Dans un premier temps, on étudie le système dans les conditions suivantes :

- les trois bobines de l'induit ne débitent aucun courant,
- les expressions simplifiées ci-dessous seront utilisées pour les inductances et les mutuelles :

$$\begin{aligned} L_a &= L_0 + L_2 \cos(2\theta), & L_b &= L_0 + L_2 \cos\left(2\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ L_c &= L_0 + L_2 \cos\left(2\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ M_{ba} &= M_0 + M_2 \cos\left(2\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right)\right) & M_{ca} &= M_0 + M_2 \cos\left(2\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ M_{cb} &= M_0 + M_2 \cos(2\theta). \\ M_{af} &= M_{f1} \cos\theta, & M_{bf} &= M_{f1} \cos\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right) & M_{cf} &= M_{f1} \cos\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Les valeurs numériques sont celles précisées dans l'énoncé, et on prendra en plus :

$$I = 0,7 \text{ A} ; f = 50 \text{ Hz.}$$

• confrontation expérimentale, convertisseur à l'arrêt, dessouder [jeu sur les potentiels dans les circuits], dipôle de Thévenin-Norton en alternatif, effet Joule, étude à vide, graphe, théorème de superposition des régimes quasi permanents

II.1. Exprimer le flux créé dans le bobinage A par le courant i_f traversant la bobine F. On notera ce flux ψ_{af} . Le résultat sera présenté de manière à faire apparaître les variables θ et ωt .

2. Par déduction et sans effectuer de calcul, exprimer de même :

a. l'expression du flux ψ_{bf} .

b. l'expression du flux ψ_{cf} .

3. Pour la position $\theta = 0$:

a. Donner les relations numériques donnant l'évolution des flux ψ_{af} , ψ_{bf} et ψ_{cf} en fonction du temps.

b. Tracer sur un même graphe les trois courbes déterminées en a.

4. Pour la position $\theta = 120^\circ$:

a. Donner les relations numériques donnant l'évolution des flux ψ_{af} , ψ_{bf} et ψ_{cf} en fonction du temps.

b. Quel est l'effet de la position θ sur les trois flux ?

5. Déterminer l'expression analytique de la valeur efficace du flux ψ_{af} en fonction de la position θ . On notera ce flux ψ_{af-eff} .

6. Existe-t-il une position θ pour laquelle les trois flux ψ_{af} , ψ_{bf} et ψ_{cf} ont la même valeur efficace ? Si la réponse est oui, déterminer cette position. Si la réponse est non, justifiez la.

7.a. Déterminer l'expression analytique de la force électromotrice aux bornes du bobinage A, cette force électromotrice étant créée par le courant i_f circulant dans le bobinage F. le résultat sera présenté de manière à faire apparaître les variables θ et ωt . On notera cette force électromotrice e_a .

b. En déduire de même e_b .

c. En déduire de même e_c .

8.a. Déterminer l'expression analytique de la valeur efficace E_a de la force électromotrice e_a , en fonction de θ .

b. Déterminer les expressions analytiques des valeurs efficaces E_a , E_b et E_c en fonction respectivement de ψ_{af-eff} , ψ_{bf-eff} et ψ_{cf-eff} .

9.a. Comment est obtenue la variation de flux ?

b. Qu'entraîne cette variation de flux ?

Pour la suite, on note les trois flux créés dans les bobinages A, B et C par le courant i_f circulant dans l'inducteur :

$$\psi_{af} = \psi \sin(\omega t) ; \psi_{bf} = -\frac{\psi}{2} \sin\left(\omega t - 2\frac{\pi}{3}\right) ; \psi_{cf} = -\frac{\psi}{2} \sin\left(\omega t - 4\frac{\pi}{3}\right).$$

La position du rotor est fixe et est telle que $\psi = 30 \text{ mWb}$ ($\theta = 0$).

On néglige la résistance des bobines, soit $R_i = 0$.

D'autre part, les bornes A, B, C sont connectées à une charge, et les trois bobines débitent respectivement les courants i_a , i_b et i_c . Les conventions sont présentées figure 1.

N.B. : Pour les questions **II.10.** à **II.14.**, les résultats seront exprimés de manière à ne contenir que des termes appartenant à la liste suivante :

$I', \omega, t, \phi', \psi, L_0, L_2, M_0, M_2, M_{f_1}$, tous les nombres réels.

10. Le bobinage A débite un courant $i_a = I' \sin(\omega t + \phi')$, où ϕ' représente le déphasage entre i_a et e_a . Déterminer l'expression analytique du flux propre dans le bobinage A. On notera ce flux ψ_{aa} .

11. Les bobinages B et C débitent respectivement les courants $i_b = -\frac{I'}{2}\sin(\omega t + \varphi')$ et $i_c = -\frac{I'}{2}\sin(\omega t + \varphi')$ où φ' représente les déphasages respectifs entre i_b et e_b , i_c et e_c . La valeur de φ' est identique à celle de la question **II.10**.

a. Déterminer l'expression analytique du flux mutuel créé par le courant i_b dans le bobinage A. On notera ce flux ψ_{ab} .

b. Même question pour le flux mutuel ψ_{ac} créé par le courant i_c dans le bobinage A.

12. On appelle ψ_a le flux total dans le bobinage A par l'ensemble de tous les bobinages du convertisseur.

a. Déterminer l'expression littérale de ψ_a .

b. On prend la valeur $I' = 9,74 \text{ A}$. Déterminer l'expression numérique de ψ_a en fonction de ω , t et φ' .

13. A partir de **II.12.**, et dans le cas particulier où $I' = 9,74 \text{ A}$, montrer que la force électromotrice totale induite dans le bobinage A diffère peu de l'expression suivante :

$$e_{ta} = k \cos\left(\omega t + \frac{\varphi'}{2}\right), \text{ où } k \text{ est un coefficient à déterminer.}$$

Le coefficient k dépend de φ' .

14. Pour quelle valeur numérique de φ' la valeur efficace de la tension aux bornes du bobinage A est-elle nulle ?

15. Expliquer l'origine de l'annulation de tension, tel qu'indiqué à la question **II.14**.

Troisième partie : Etude du couple

On alimente l'inducteur avec une tension V_f constante. Le courant correspondant est constant et est noté I_f . On alimente l'induit par des tensions et des courants de pulsation $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence du réseau d'alimentation. Le déphasage entre tension et courant est le même pour les trois bobines, et est noté φ . Les expressions sont :

$$\begin{aligned} V_a(t) &= V\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi); & i_a(t) &= I\sqrt{2} \cos(\omega t); \\ V_v(t) &= V\sqrt{2} \cos\left(\omega t - 2\frac{\pi}{3} + \varphi\right); & i_b(t) &= I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - 2\frac{\pi}{3}\right); \\ V_c(t) &= V\sqrt{2} \cos\left(\omega t + 2\frac{\pi}{3} + \varphi\right); & i_c(t) &= I\sqrt{2} \cos\left(\omega t + 2\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Les conventions sont précisées figure 1.

L'arbre du convertisseur électromécanique est accouplé à une machine d'entraînement.

La machine d'entraînement fournit un couple noté C au convertisseur.

On prendra les expressions simplifiées suivantes pour les inductances et mutuelles :

$$\begin{aligned} L_a &= L_0 + L_2 \cos(2\theta); & L_b &= L_0 + L_2 \cos 2\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right); \\ L_c &= L_0 + L_2 \cos 2\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right); \\ M_{ba} &= M_0 + M_2 \cos 2\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right); & M_{ca} &= M_0 + M_2 \cos 2\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right); \\ M_{cb} &= M_0 + M_2 \cos(2\theta); \\ M_{af} &= M_{f1} \cos(\theta); & M_{bf} &= M_{f1} \cos\left(\theta - 2\frac{\pi}{3}\right); & M_{cf} &= M_{f1} \cos\left(\theta + 2\frac{\pi}{3}\right); & L_f &= \text{cste.} \end{aligned}$$

La résistance R_f de l'inducteur n'est pas négligée.

• charge de circuit, diagramme de Fresnel, impédance de charge, machine d'entraînement, tout se passe comme si [équivalence de formulation]

L'induit est en rotation, et tourne à la vitesse constante $N = 3000$ tr/min. La vitesse de rotation angulaire correspondante est notée Ω (rad.s⁻¹).

Les valeurs numériques sont celles précisées dans l'énoncé, et on prendra en plus :

$$I_f = 0,800 \text{ A} ; f = 50 \text{ Hz} ; L_f = 90,0 \text{ mH} ; R_f = 2,50 \Omega ; V = 50 \text{ V}.$$

On néglige toutes les pertes autres que les pertes par effet Joule dans l'inducteur.

On étudie le système composé des quatre enroulements (A, B, C et F) et des parties fixes et tournantes du convertisseur. La machine accouplée au convertisseur ne fait pas partie du système étudié.

III.1.a. Quelles sont les pertes négligées ?

b. Quelle convention est utilisée pour l'induit ? (Générateur ou récepteur).

c. Quelle convention est utilisée pour l'inducteur ? (Générateur ou récepteur).

d. Comment est obtenue la variation de flux qui est à l'origine des forces électromotrices induites par l'inducteur dans les enroulements de l'induit ?

Pour la suite du problème, on prendra $R_i = 0$.

2.a. Quelle est la puissance instantanée $p(t)$ absorbée par l'induit ? On donnera le résultat en fonction des grandeurs électriques instantanées.

b. L'expression de $p(t)$ peut également se mettre sous la forme :

$$p(t) = P = -3VI \cos(\theta). \text{ Interpréter ce résultat.}$$

3. Déterminer l'expression de la puissance électrique totale fournie au convertisseur, en fonction de P et des autres grandeurs électriques appliquées au système électromécanique. On notera cette puissance $p_t(t)$.

4. Déterminer l'expression des pertes totales dans le convertisseur, en tenant compte des hypothèses. On notera ces pertes $p_f(t)$.

5. Déterminer la relation littérale liant C à I , V , φ et Ω .

6. Déterminer la relation numérique liant C à I , pour $\varphi = 0$.

7. Pour $I = 10 \text{ A}$:

a. Déterminer l'expression numérique de C en fonction de φ .

b. Pour quelles valeurs de φ , comprises entre 0 et 360° , le convertisseur fonctionne-t-il en moteur ?

c. Pour quelles valeurs de φ , comprises entre 0 et 360° , le convertisseur fonctionne-t-il en générateur ?

8. On suppose que le convertisseur fonctionne en moteur. Pour un rapport V/Ω donné, comment peut-on régler le couple C ?

Le convertisseur est maintenant entraîné par un moteur à pistons.

Le moteur d'entraînement fournit un couple $C(t) = C_0 + C_v \sin(2\Omega_0 t)$, où C_0 et C_v sont deux termes constants et où Ω_0 représente la valeur moyenne de la vitesse de rotation. J représente le moment d'inertie total des parties tournantes, $\Omega(t)$ est la vitesse de rotation instantanée et C_r est le couple résistant développé par le convertisseur, C_r étant supposé constant. On néglige les frottements mécaniques. On étudie l'ensemble convertisseur électromécanique – moteur à pistons uniquement en régime permanent.

On prendra les valeurs numériques suivantes :

$$C_0 = 30 \text{ N.m} ; C_v = 60 \text{ N.m} ; \Omega_0 = 150 \text{ tr/min} ; J = 1 \text{ kg.m}^2.$$

9.a. Quelle est l'influence de la vitesse de rotation moyenne sur le couple moteur ?

b. Illustrer cette influence à l'aide d'un graphique. On prendra deux valeurs de vitesses moyennes dans un rapport de un à deux.

10.a. Appliquer le principe fondamental de la dynamique afin de déterminer la relation liant les grandeurs C_0 , C_v , C_r , Ω_0 , t , J et $\Omega(t)$.

b. Que peut-on dire des valeurs relatives des couples moyens du moteur d'entraînement et du convertisseur ?

• convertisseur entraîné par un moteur à pistons, énergie magnétique, ensemble convertisseur électromécanique+moteur à pistons en régime permanent, graphe, moment des forces électromagnétiques

c. Le couple résistant C_r est constant alors que le couple moteur $C(t)$ varie dans le temps. Quelle en est la conséquence ?

d. Déterminer l'expression littérale de $\Omega(t)$ en fonction de C_v , Ω_0 , t et J .

On suppose qu'à $t = 0$, on a $\Omega(t) = -\frac{C_v \sin(2\Omega_0 t)}{2J\Omega_0} + \Omega_0$.

e. Tracer $\Omega(t)$ pour $\Omega_0 = 150$ tr/min.

f. Comment évolue la vitesse instantanée lorsque Ω_0 tend vers zéro ?

11.a. Comment évolue la vitesse de rotation $\Omega(t)$ dans le temps à Ω_0 donné ?

b. Quelle est l'influence du moment d'inertie sur la vitesse de rotation $\Omega(t)$?

c. Quelle est l'influence de Ω_0 sur $\Omega(t)$?

d. Quelle est l'influence de la vitesse de rotation $\Omega(t)$ sur les forces électromotrices du convertisseur électromécanique ?

N.B. : On demande des réponses qualitatives aux questions III.11.

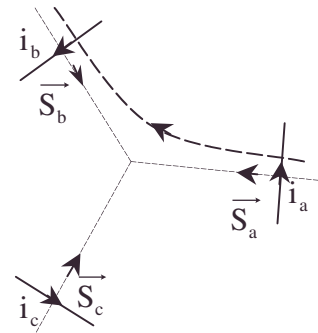
Banque PT ; Durée : 4h

Corrigé

I.1. Le signe change quand l'angle varie : il s'agit d'une mutuelle. L'origine n'étant pas précisée pour l'angle θ , il peut s'agir de M_{af} ou M_{bf} ou M_{cf} ; la valeur numérique du maximum pour $\theta = 0 \left(\frac{2\pi}{3} \right)$ confirme : $M_{f1} + M_{f3} + M_{f5} = 33,5$ mH.

2. Représentons formellement chaque bobine par une spire munie d'une orientation et du vecteur surface \vec{S} associé. vu la symétrie ternaire du système et le tracé d'une ligne du champ créé par i_a passant à travers le circuit b, le flux envoyé par 1 à travers 2 est négatif pour i_1 positif ; $\phi_{ab} = M_{ab}i_a \Rightarrow M_{ab} < 0$.

Ce qui se généralise en multipliant le nombre de spires mais en conservant la symétrie ternaire.



3.a. L'origine de la graduation est indiquée sur l'axe des abscisses sur la figure 5 et correspond à un extremum ; sa valeur 2,1 mH correspond à L_a pour $\theta = 0$; on vérifie que $\frac{dL_a}{d\theta} = -2L_2 \sin 2\theta - 4L_4 \sin 4\theta$ vaut 0 pour $\theta = 0$. On vérifie aussi l'allure

graphique générale de cette courbe : on a bien $L_a = L_a(\theta)$.

b. Le créneau $[\theta_1, \theta_3]$ (cf. figure suivante) correspondant aux surfaces $S_1 + S_2$ est une période de L_a . On note $L_0 = 1,87$ mH, la valeur moyenne.

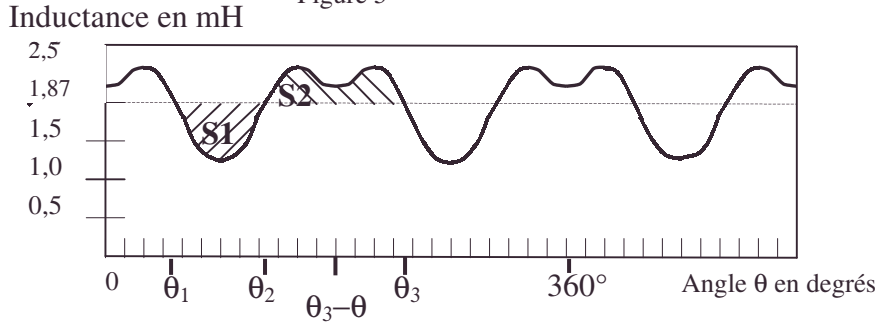
Soit $\frac{1}{T} \int_{\theta_1}^{\theta_3} L_a(\theta) d\theta = L_0 \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} (L_a - L_0) d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_3} (L_a - L_0) d\theta = 0$.

On a bien $(-S_1) + S_2 = 0$ vu l'interprétation d'une intégrale par une aire algébrique.

c. $L_a = L_0 + L_2 \cos 2\theta + L_4 \cos 4\theta$ a comme période en θ : $\frac{2\pi}{2} = \pi$ rad soit 180° .

On en déduit $\theta_3 - \theta_1 = 180^\circ$. En décalant de θ_1 vers la gauche : $\theta_3 - \theta_1 = 180^\circ$ et $360^\circ = 2(\theta_3 - \theta_1)$ correspond à la 24^{ème} graduation à partir de 0.

Figure 5

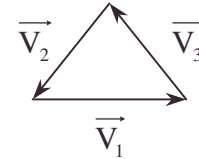


$$4. S_1 = \cos \theta + \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) = 0.$$

Interprétation géométrique :

Soient $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ 3 vecteurs unitaires décalés de $\frac{2\pi}{3}$.

Vu la figure, $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$; de même, la projection S_1 sur l'axe des abscisses X : $S_1 = 0$.



On a bien un triangle équilatéral fermé.

$$5.6. S_2 = \cos 2\theta + \cos \left(2\theta - \frac{4\pi}{3} \right) + \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) = 0 ;$$

De même, en changeant θ en 2θ ;

$$S_4 = \cos 4\theta + \cos \left(4\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(4\theta - \frac{4\pi}{3} \right) = 0 ;$$

De même, en changeant θ en 4θ ;

$$S_5 = \cos 5\theta + \cos \left(5\theta - \frac{4\pi}{3} \right) + \cos \left(5\theta - \frac{2\pi}{3} \right) = 0, \text{ de même ;}$$

$$S_3 = \cos 3\theta + \cos 3\theta + \cos 3\theta = 3 \cos 3\theta.$$

$$L_t = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = S_3 = 3 \cos 3\theta.$$

Seule l'harmonique 3 a une contribution à L_t .

7.

$$L_c = 3L_0 - L_a - L_b = L_0 - L_2 \left[\cos 2\theta + \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] - L_4 \left[\cos 4\theta + \cos 4 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] ;$$

$$L_c = L_0 - L_2 \left[S_2 - \cos 2 \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right] - L_4 \left[S_4 - \cos 4 \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right] ;$$

$$L_c = L_0 + L_2 \cos 2 \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) + L_4 \cos 4 \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right).$$

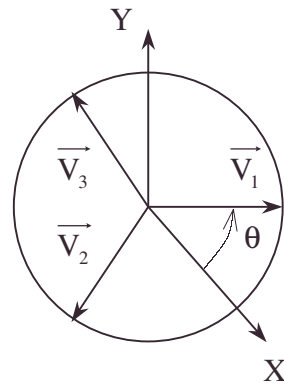
8. On procède d'une manière analogue : $M_c = 3M_0 - M_{ab} - M_{ac}$;

$$M_c = M_0 - M_2 \left[\cos 2 \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) + \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] - M_4 \left[\cos 4 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos 4 \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \right] ;$$

$$M_c = M_0 - M_2 [S_2 - \cos 2\theta] - M_4 [S_4 - \cos 4\theta] = M_0 + M_2 \cos 2\theta + M_4 \cos 4\theta.$$

$$9. M_{af} + M_{bf} + M_{cf} = M_{f_1} S_1 + M_{f_3} S_3 + M_{f_5} S_5 = 3M_{f_3} \cos 3\theta ; \text{ aussi } M_3 = 3M_{f_3}.$$

$$10. \underline{V}_f = (R_f + jL_f \omega) \underline{I}_f : \text{ l'argument de } V_f \text{ sera pris nul car sert de référence ;}$$



$$\varphi = \arg \underline{I_f} = -\arg \underline{Z_f} ; R_f + jL_f \omega = \frac{V_f}{I_f} e^{-j\varphi} = \frac{V_f}{I_f} (\cos \varphi - j \sin \varphi) ; \omega = 2\pi f .$$

Identifications :

$$\left. \begin{aligned} \text{a. } R_f &= \frac{V_f}{I_f} \cos \varphi = \frac{V_f}{I_f} \frac{\pm 1}{(1 + \tan^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} ; \\ L_f &= -\frac{V_f}{2\pi f I_f} \sin \varphi = \mp \frac{V_f}{I_f k_2} \frac{1}{(1 + \cotan^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} ; \end{aligned} \right\}$$

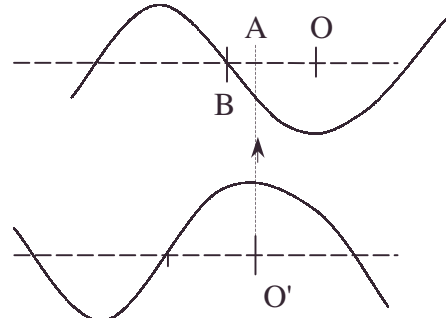
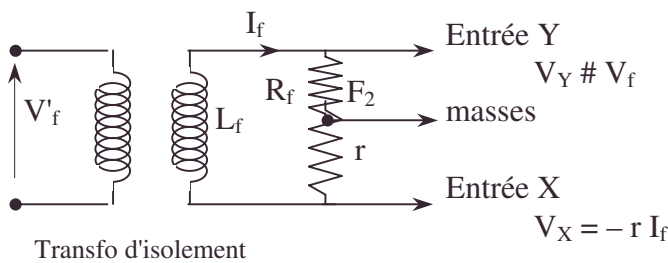
On a la forme donnée avec $k_1 = \tan^2 \varphi$.

On est obligé de choisir le signe + à chaque fois car $R_g > 0$ et $L_g > 0$.

On a la forme donnée avec $k_2 = 2\pi f$.

b.c. On peut utiliser un oscilloscope bicourbe.

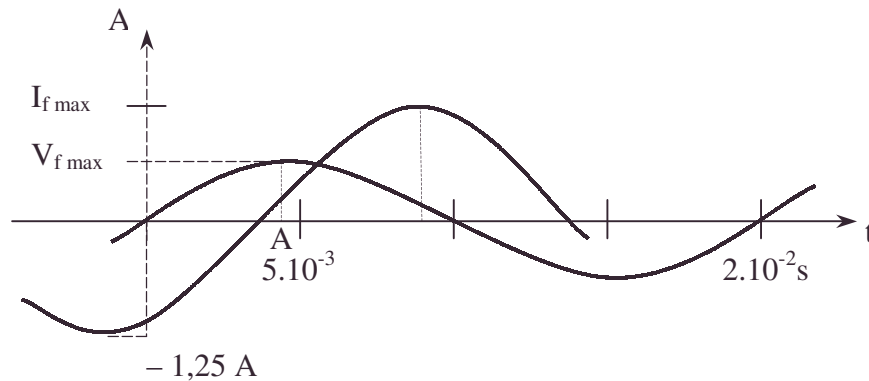
On introduit une résistance r (faible devant R_f , supportant 1A) en série avec l'inducteur .
On utilisera un transfo d'isolement entre le réseau d'alimentation et l'oscilloscope pour éviter tout problème de masse.



On obtient la mesure de V_f , I_f , φ ; $\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{OA}{OB}$.

11. Vu 10.a. A.N. : $R_f = 2,61 \Omega$; $L_f = 95,13 \text{ mH}$.

12. 85° est proche de 90° ; $I_{f \max} = 1,245 \text{ A}$; $V_{f \max} = 33,94 \text{ V}$.



13.a. $k_1 \rightarrow \infty$; $R_f \rightarrow 0$, $L_f \rightarrow \frac{V_f}{2\pi f I_f}$.

b. A.N. : $R_f = 0$, $L_f = 95,5 \text{ mH}$.

c. On a alors une inductance (self) pure.

14. $P_j = R_f I_f^2$; A.N.: $P_j = 1,67 \text{ W}$.

15. $S_a = V_f I_f$; A.N.: $S_a = 19,2 \text{ V.A.}$ (pour marquer une différence formelle avec le watt W).

16. $\frac{P_j}{S_a} = \frac{8,7}{100}$; pour une self pure $\frac{P_j}{S_a} = 0$.

Négliger 8,7 devant 100 se fait souvent en électronique ; sur la base énergétique on peut assimiler la bobine à une inductance pure.

• confrontation expérimentale, masse électronique, transformateur d'isolement

II.1. $\psi_{af} = M_{af} i_f = M_{f_1} \cos \theta I \sqrt{2} \cos \omega t$.

2.a. θ est remplacé par $\theta - \frac{2\pi}{3}$ pour $\psi_{bf} = M_{f_1} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) I \sqrt{2} \cos \omega t$.

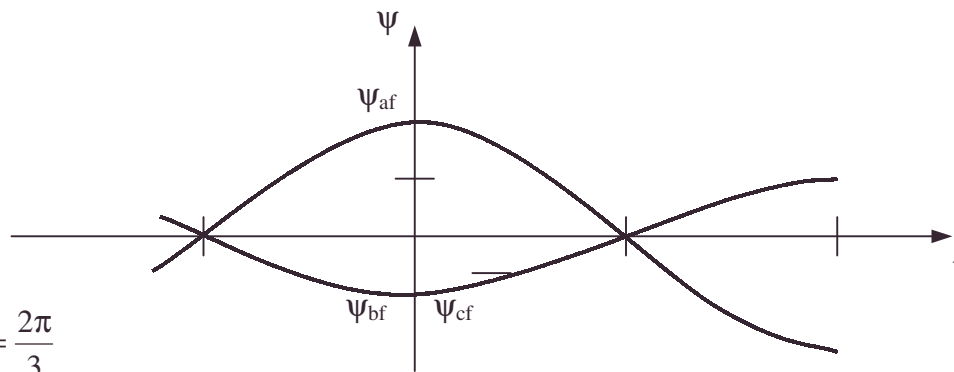
b. θ est remplacé par $\theta - \frac{4\pi}{3}$ pour $\psi_{cf} = M_{f_1} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) I \sqrt{2} \cos \omega t$.

3.a. $\theta = 0$; $\psi_{af} = M_{f_1} I_f \sqrt{2} \cos \omega t$; AN : $M_{f_1} I_f \sqrt{2} = 32,66 \text{ mWb}$;
 $\psi_{af} = 32,66 \cos 314t$ en mWb,

$$\psi_{bf} = \psi_{cf} = -\frac{1}{2} M_{f_1} I \sqrt{2} \cos \omega t ;$$

AN : $\frac{1}{2} M_{f_1} I \sqrt{2} = 16,33 \text{ mWb}$; $\psi_b = \psi_{cf} = 16,33 \cos 314t$ en mWb.

b.



4. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

a. $\psi_{af} = -\frac{M_{f_1}}{2} I \sqrt{2} \cos \omega t = \psi_{cf}$; AN ; $\psi_{af} = \psi_{cf} = -16,33 \cos 314t$ en mWb.

$M_{bf} = M_{f_1} I \sqrt{2} \cos \omega t$; AN : $\psi_{bf} = 32,66 \cos 314t$ en mWb.

b. On a : $\forall \theta \quad \psi_{af} + \psi_{bf} + \psi_{cf} = 0$.

$\cos\left(\theta - (p-1)\frac{2\pi}{3}\right)$ est un facteur multiplicatif qui module l'amplitude des flux

dans ce cadre.

5. $\psi_{af-eff} = |M_{f_1} I \cos \theta|$

6. $\forall \theta \quad \cos \theta \neq \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \neq \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \Rightarrow \psi_{af-eff} \neq \psi_{bf-eff} \neq \psi_{cf-eff}$.

7.a. $e_a = -\frac{d\psi_{af}}{dt} = M_{f_1} I \omega \sqrt{2} \cos \theta \sin \omega t$.

b. $e_b = M_{f_1} I \omega \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \sin \omega t$ en changeant θ en $\theta - \frac{2\pi}{3}$.

c. $e_c = M_{f_1} I \omega \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \sin \omega t$ en changeant θ en $\theta - \frac{4\pi}{3}$.

8.a. $E_a = |M_f I \omega \cos \theta|$.

b. $E_a = \omega \psi_{af-eff}$, de même $E_b = \omega \psi_{bf-eff}$; $E_c = \omega \psi_{cf-eff}$.

9.a. La variation de i_f est la cause des variations de champ \vec{B} , donc des flux qui traversent les bobinages.

b. La variation temporelle des flux est la cause des f.e.m. (induites par mutuelle inductance).

$$10. \psi_{aa} = L_a i_a = (L_0 + L_2 \cos 2\theta) I' \sin(\omega t + \varphi') = (L_0 + L_2) I' \sin(\omega t + \varphi') \text{ vu } \theta = 0.$$

$$11.a. \psi_{ab} = M_{ba} i_b.$$

$$\psi_{ab} = - \left(M_0 + M_2 \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \frac{I'}{2} \sin(\omega t + \varphi') = - \left(M_0 - \frac{M_2}{2} \right) \frac{I'}{2} \sin(\omega t + \varphi').$$

$$b. \psi_{ac} = M_{ca} i_c = - \left(M_0 + M_2 \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \frac{I'}{2} \sin(\omega t + \varphi');$$

$$\psi_{ac} = - \left(M_0 - \frac{M_2}{2} \right) \frac{I'}{2} \sin(\omega t + \varphi') = \psi_{ab}.$$

$$12.a. \psi_a = \psi_{af} + \psi_{ab} + \psi_{ac} + \psi_{aa} = \left(L_0 + L_2 - M_0 + \frac{M_2}{2} \right) I' \sin(\omega t + \varphi') + \psi \sin \omega t.$$

$$b. \psi_a = 30 \sin(\omega t + \varphi') + 30 \sin \omega t \text{ (en mWb)}.$$

$$\psi_a = 60 \sin \left(\omega t + \frac{\varphi'}{2} \right) \cos \frac{\varphi'}{2} \text{ soit littéralement } \psi_a = 2\psi \cos \frac{\varphi'}{2} \sin \left(\omega t + \frac{\varphi'}{2} \right).$$

$$13. e_{ta} = - \frac{d\psi_a}{dt} = 60 \omega \cos \frac{\varphi'}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\varphi'}{2} \right) \text{ avec } k = 2\psi \cos \frac{\varphi'}{2} \text{ A.N. : } k = 60 \omega \cos \frac{\varphi'}{2}$$

en mV.

$$14. \cos \frac{\varphi'}{2} = 0 \text{ pour } \frac{\varphi'}{2} = (2p+1) \frac{\pi}{2}; \varphi' = (2p+1) \pi \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$15. - \frac{d\psi_a}{dt} = - \frac{d\psi_{af}}{dt} - \frac{d}{dt} (\psi_{ab} + \psi_{ac} + \psi_{aa}) = 0 \text{ pour } \varphi' = (2p+1) \pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ est}$$

associé à $\psi_{af} = -\psi \sin \omega t = -(\psi_{ab} + \psi_{ac} + \psi_{aa})$ pour $\varphi' = (2p+1) \pi$.

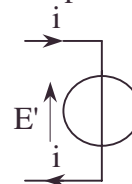
Le flux inducteur est compensé par les flux induits, avec $p \in \mathbb{Z}$.

III.1.a. On néglige les pertes énergétiques dues aux courants de Foucault et au phénomène d'hystérésis ferromagnétiques. On néglige l'effet Joule dans l'induit ($R_i = 0$), les pertes énergétiques dues au frottement mécanique solide et visqueux.

b.c. Pour un générateur (en continu)



Pour un récepteur (en continu)



On en déduit que :

la convention courant tension de la figure 1 :

pour l'induit est celle d'un générateur.

pour l'inducteur est celle d'un récepteur.

d. La rotation de l'induit dans le champ de l'inducteur est la cause des tensions dans l'induit, du fait des variations de flux magnétique au cours du temps.

$$2.a. p(t) = - \underset{\text{fournie formellement}}{p'} = -(v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c).$$

b. $p(t) =$

$$-VI \left[\left(\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi) \right) + \left(\cos \varphi + \cos \left(2\omega t + \varphi - \frac{4\pi}{3} \right) \right) + \left(\cos \varphi + \cos \left(2\omega t + \varphi + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \right]$$

$$= -3VI \cos \varphi - VI \underbrace{\left(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \left(2\omega t + \varphi - \frac{4\pi}{3} \right) + \cos \left(2\omega t + \varphi + \frac{4\pi}{3} \right) \right)}_0$$

$P = p(t) = -3VI \cos \varphi$; pour ce montage étoile on a un régime parfaitement constant énergétiquement (au cours du temps).

3. $P_t(t) = P_{\text{induit}} + P_{\text{inducteur}} = P + V_f I_f$

4. $p_J(t) = R_f I_f^2$ seule perte retenue par l'énoncé : par effet Joule dans l'inducteur.

5. Vu l'absence de couple de frottement, en régime permanent la puissance absorbée est cédée à la machine d'entraînement ;
elle cède elle-même à l'arbre du convertisseur $C\Omega$;

vu le principe d'action réaction, on a donc : $P = -C\Omega \Rightarrow C = \frac{3VI}{\Omega} \cos \varphi$.

6. $C = 0,477.I$, vu $\Omega = \frac{2\pi N}{60} = 314 \text{ rad.s}^{-1}$.

7.a. $C = 4,77 \cos \varphi$.

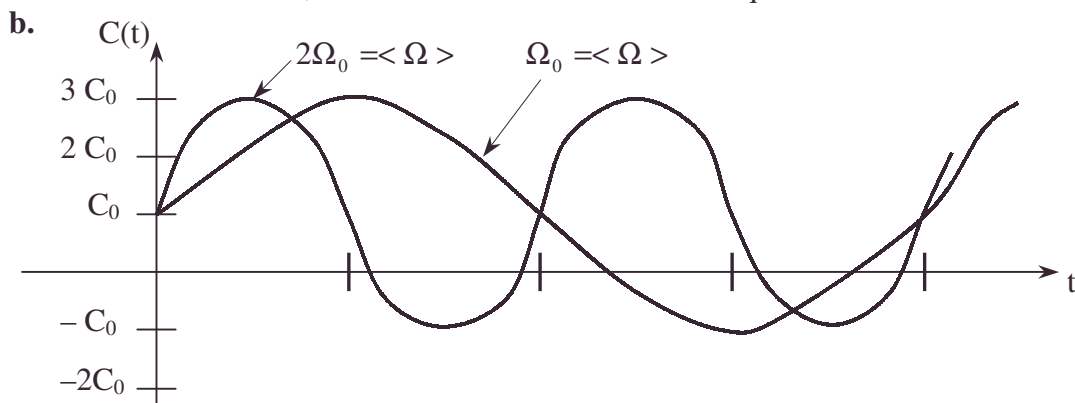
b. Si $C < 0$ le convertisseur entraîne la machine d'entraînement (qui le freine) ;
le convertisseur sert de moteur électrique. $\cos \varphi < 0$ pour $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

c. Si $C > 0$, le convertisseur est entraîné par la machine d'entraînement, le convertisseur fonctionne en récepteur mécanique et donc en générateur électrique :

$\cos \varphi > 0 \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$.

8. On fait varier φ en respectant $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

9.a. On avait C et Ω constants ; la nouvelle donne considère C perturbé par l'harmonique 2 du phénomène mécanique de rotation moyen :
c'est un terme d'ondulation, d'étude courante en électrotechnique.



N.B.: quand la pulsation est doublée, la période est divisée par 2.

10.a. $J \frac{d\Omega}{dt} = C + C_r = C_0 + C_r + C_v \sin 2\Omega_0 t$ avec $C_r < 0$.

b. L'ondulation périodique de Ω permet d'écrire $\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = 0$ cf. c.

$0 + C_0 + C_r = 0$; les couples moyens sont opposés.

c. On a : $\Omega = A + B \sin(2\Omega_0 t + \varphi_1)$ cf. oscillations forcées, solutions particulières de l' E.A.S.M.

d. On vérifie la solution : $\Omega = \Omega_0 - \frac{C_v}{2J\Omega_0} \cos 2\Omega_0 t$, de $J \frac{d\Omega}{dt} = C_v \sin 2\Omega_0 t$.

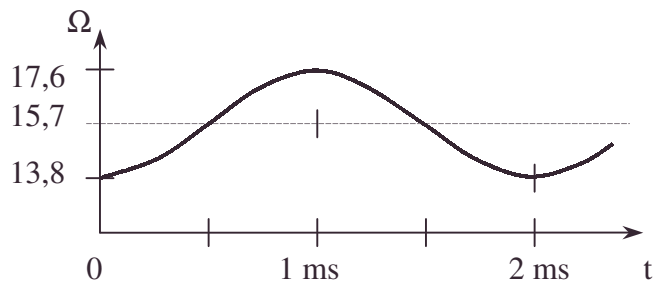
N.B.: $\langle \Omega \rangle = \Omega_0 = A$; $B = -\frac{C_v}{2J\Omega_0}$.

e. A.N. : $\Omega_0 = 15,7 \text{ rad.s}^{-1}$.

$2\Omega_0 = 31,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

$\frac{C_v}{2J\Omega_0} = 1,91 \text{ rad.s}^{-1}$.

$T = \frac{2\pi}{2\Omega_0} = 2 \text{ ms}$.



f. La méthode d'étude n'est pas valable pour $\Omega_0 = 0 : \frac{C_v}{2J\Omega_0} \rightarrow \infty$;

on veut dire seulement que l'ondulation de période infinie ne se voit plus :

la vitesse de rotation moyenne est constante, voire nulle si $\Omega_0 = 0$ strictement.

11.a. Ω a une ondulation autour de Ω_0 , quand t varie.

b. J fait diminuer l'amplitude de l'ondulation.

c. Ω_0 intervient sur la valeur moyenne de Ω ,
sur l'amplitude de l'oscillation,
sur la pulsation de l'ondulation.

d. Si les flux sont des fonctions en $\sin(\Omega t + \varphi_i)$, les f.e.m. seront en :

$$\Omega \cos(\Omega t + \varphi_i) + \dot{\Omega} \sin(\Omega t + \varphi_i).$$

Le spectre de Ω et de $\dot{\Omega}$ donnera pour les f.e.m. (vu les 2 termes) un spectre plus étendu éventuellement gênant.

6.2.4.3. Montage triangle étoile triphasé

Voir page 727.

6.2.4.4. Transport d'électricité en triphasé

Voir page 732.

6.2.4.5. Transformateur à carcasse magnétique saturable.

Voir page 1053.

6.3. Automatique

Appartient explicitement au programme de PSI
et à celui des sciences de l'ingénieur en MPSI, MP, PSI, PT

6.3.1. Asservissement de position d'un moteur avec correcteur

Les résolutions des parties I d'une part, des parties II et III d'autre part, sont indépendantes. Cependant, certains résultats de la partie I sont nécessaires pour résoudre la suite du problème.

Tout commentaire sur les résultats sera apprécié.

I. Etude électromécanique d'un moteur

Dans un laboratoire lié à un référentiel galiléen, un cylindre solide, isolant, est en rotation à la vitesse angulaire Ω positive autour de son axe \vec{u}_z . Ce solide constitue le rotor d'une machine.

Sur ce rotor sont enroulées N spires identiques rectangulaires de longueur L et de largeur $2b$. La position d'une spire est repérée par l'angle θ que fait son plan avec une direction fixe appelée ligne neutre.

D'autre part, et comme indiqué sur la figure, le champ magnétique créé par un électro-aimant est radial ;

à la périphérie du rotor ($r = b$) son amplitude est B . Soit Φ le flux sous un pôle et i le courant absorbé par le moteur ; on suppose qu'il n'y a qu'une paire de pôles et une seule voie d'enroulement par spire. On rappelle que dans ces conditions, la force électromotrice induite e et le couple Γ s'expriment respectivement par :

$$e = q\Omega\Phi \text{ et } \Gamma_z = q\Phi i \text{ où } q \text{ est une constante.}$$

1. Justifier brièvement et commenter les deux expressions ci-dessus ; en particulier, donner la dimension de la constante q .

2. Justifier d'une part la nécessité du redressement de la force électromotrice induite, d'autre part celle de l'inversion du courant circulant dans une spire chaque fois que cette dernière traverse la ligne neutre, autrement dit chaque fois que pour cette spire $\theta = n\pi$ avec n entier relatif.

3. L'induit d'un moteur électrique à courant continu est constitué par un ensemble de bobines solidaires d'un rotor en mouvement de rotation à la vitesse Ω autour de son axe de symétrie Oz ; le comportement électromécanique des bobines est analogue à celui des spires décrites à la question I. ; le courant total alimentant cet induit est i .

- Electriquement, ce système se comporte comme un récepteur de force contre-électromotrice $E = -e = k\Omega$, de résistance ρ , parcouru par le courant i . On néglige l'inductance propre du bobinage.

- Mécaniquement, c'est un solide en rotation autour de Oz ; l'ensemble du moteur et des éléments extérieurs qu'il entraîne dans son mouvement possède un moment d'inertie J par rapport à l'axe. le couple des forces électromagnétiques est $\Gamma_z = ki$.

• automatique, correcteur, électro-aimant, ligne neutre dans un moteur électrique, moment d'inertie, moteur à une paire de pôles, moteur à une voie d'enroulement par spire, redressement de la force électromotrice induite, rotor

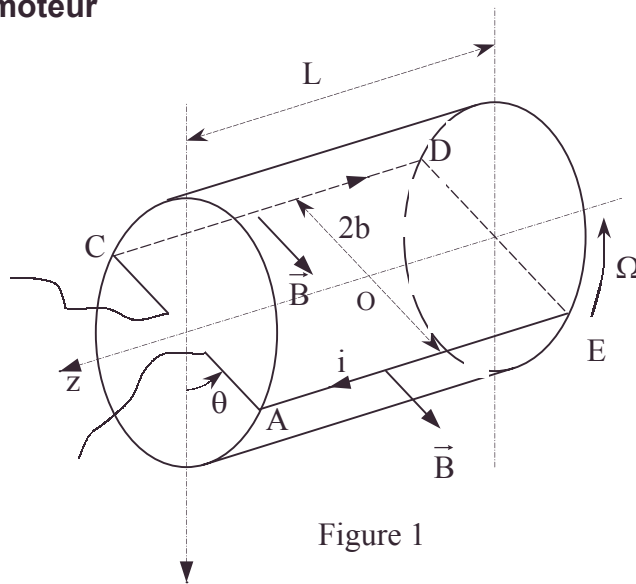


Figure 1

L'induit est alimenté par un amplificateur de tension, commandé par une tension u . Son coefficient d'amplification en tension est A et sa résistance de sortie est R_s . Les constantes k et A sont positives.

a. Faire un schéma électrique équivalent à l'ensemble moteur – amplificateur.

b. Montrer que Γ_z s'exprime sous la forme : $\Gamma_z = \gamma u - \delta \Omega$ et donner les expressions de γ et δ en fonction de k , A , R_s et ρ .

c. En déduire l'équation différentielle liant Ω et u , en négligeant tout frottement.

En réalité, lors de la rotation du moteur, il apparaît un frottement visqueux modélisable en terme d'un frottement supplémentaire $-f\Omega$, avec $f > 0$.

Le moteur étant initialement alimenté sous une tension $u = U_0$, et tournant en régime permanent Ω_0 , on le soumet brutalement, à $t = 0$, à un échelon de tension U_1 (figure 2).

d. Exprimer la fonction $\Omega(t)$ et la représenter.

e. Application numérique :

$k = 0,2 \text{ V.s.rd}^{-1}$; $\rho = 25 \Omega$;
 $R_s = 5 \Omega$; $A = 10^2$;
 $\Omega_0 = 8 \pi \text{ rad.s}^{-1}$ (correspondant à $N_0 = 4$ tours par seconde) lorsque $U_0 = 60 \text{ mV}$.

La constante de temps du régime transitoire étant de 125 ms, en déduire J et f .

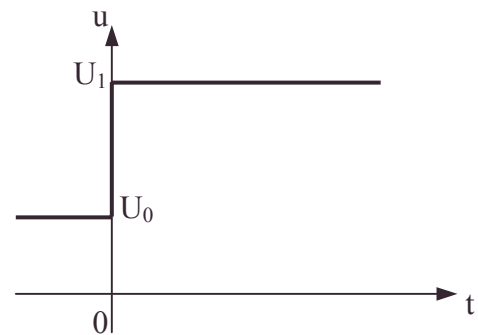


Figure 2

II. Etude d'une chaîne d'asservissement de position

Deux potentiomètres identiques P_1 et P_2 sont alimentés sous une différence de potentiel (d.d.p.) totale de 6 V par un générateur dont une des bornes est choisie comme masse. Leurs curseurs sont mobiles autour d'axes fixes. La d.d.p. v mesurée entre un curseur et la masse est proportionnelle à l'angle de rotation θ de ce curseur (figure 3).

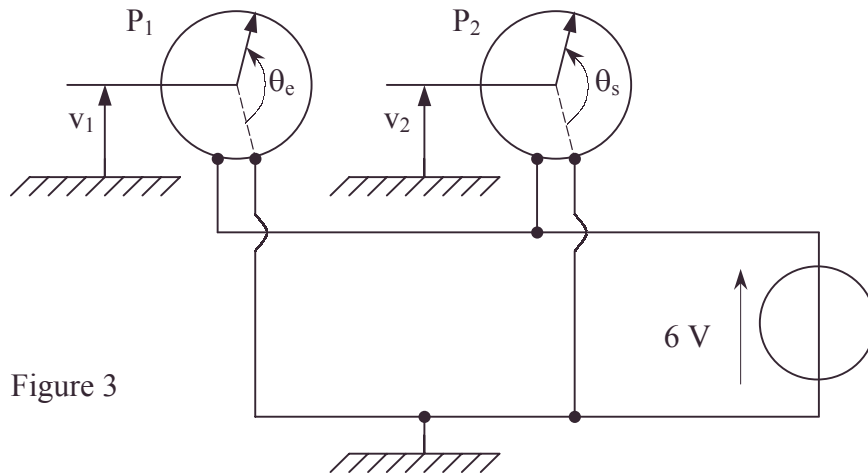


Figure 3

Soit : $\frac{v_1}{\theta_e} = \frac{v_2}{\theta_s} = \lambda = 1 \text{ V.rad}^{-1}$

A l'aide du système électromécanique décrit ci-dessous, on désire asservir la valeur de θ_s (grandeur de sortie) à celle de θ_e (grandeur d'entrée).

θ_e étant imposé par des paramètres extérieurs, θ_s devra, le plus rapidement possible, se fixer à une valeur égale à θ_e .

II.1. Description du système d'asservissement

Il est représenté à la figure 4.

a. Amplificateur de tension

La d.d.p. $u = v_2 - v_1$ est appliquée à l'entrée d'un quadripôle contenant un amplificateur opérationnel (A.O.) idéal de gain infini (résistances d'entrée infinies, résistance de sortie nulle) fonctionnant en régime linéaire : A_1 .

Cet A.O. est suivi d'un quadripôle amplificateur de puissance, A_2 (nécessaire pour que le courant de sortie, i , soit assez intense pour alimenter un moteur).

Le coefficient d'amplification en tension de A_2 fonctionnant à vide est égal à 1 ; sa résistance de sortie sera notée R_s . Soit v_s la tension de sortie de A_2 (figure 4).

Déterminer la fonction de transfert $H_1 = \frac{v_3}{u}$ du montage amplificateur de tension fonctionnant à vide, en fonction de R_1 et R_2 .

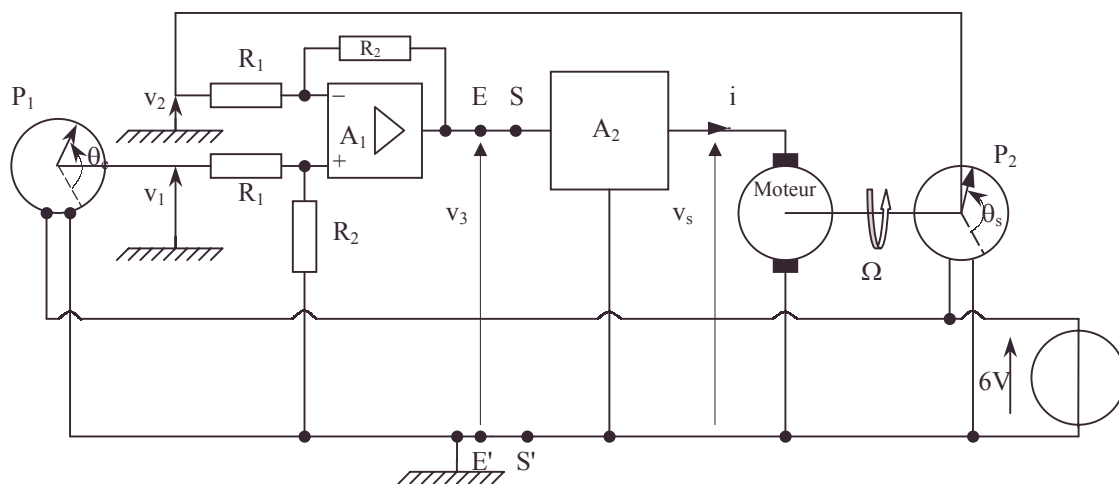


Figure 4

b. Moteur

La d.d.p. v_s alimente un moteur identique à celui du I.3., tournant à la vitesse angulaire $\Omega(t)$, et entraînant dans sa rotation le curseur du potentiomètre P_2 . Tous les frottements seront dorénavant négligés.

Utiliser les résultats du I.3. pour déterminer la fonction de transfert $\underline{H}_2 = \frac{\underline{\Omega}}{\underline{U}}$ de l'ensemble amplificateur – moteur fonctionnant en régime sinusoïdal à la pulsation ω . (On note \underline{S} l'amplitude complexe de la grandeur s).

Mettre \underline{H}_2 sous la forme $\underline{H}_2 = \frac{G_0}{1 + j\omega\tau}$ et exprimer G_0 et τ en fonction de J , R_s , ρ , k ,

R_1 et R_2 .

Calculer les valeurs numériques de G_0 et de τ pour $\frac{R_2}{R_1} = 100$, les autres paramètres ayant les valeurs indiquées plus haut.

2.a. Les grandeurs utiles d'entrée et de sortie étant respectivement θ_e et θ_s , représenter par un ensemble de schémas blocs la chaîne des opérateurs permettant de réaliser l'opération d'asservissement en indiquant, pour chacun d'eux, leur fonction de transfert. Montrer que l'opérateur global est bouclé.

Faire apparaître clairement la chaîne directe, la chaîne de retour, le soustracteur, ainsi que leurs grandeurs respectives d'entrée et de sortie.

- chaîne de retour de rétroaction, chaîne directe [munie d'une chaîne de retour], fonction de transfert, fonctionnement à vide en triphasé, potentiomètre, quadripôle, régime linéaire, soustracteur [rétroaction]

b. Montrer que l'expression de la fonction de transfert de la chaîne directe, \underline{H} , peut s'écrire : $\underline{H} = \frac{1}{j\omega\tau_1(1+j\omega\tau)}$. Exprimer τ_1 en fonction de λ (défini au début du II.) et de G_0 ; calculer la valeur numérique de τ_1 .

c. Déterminer la fonction de transfert de l'opérateur bouclé \underline{H}_B en fonction de Ω , τ , et τ_1 . Quel est l'ordre de cet opérateur ?

d. Quelle est l'équation différentielle liant θ_s à θ_e en régime quelconque ?

Le système étant initialement dans un état de repos pour lequel $\theta_e = \theta_s = 0$, on lui applique à

$t = 0$ un échelon de position $\theta_e = \frac{\pi}{2}$ (figure 5).

Quelle est dans ces conditions l'expression de la réponse $\theta_s = f(t)$?

Les données numériques sont celles du I.

On prendra $J = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$.

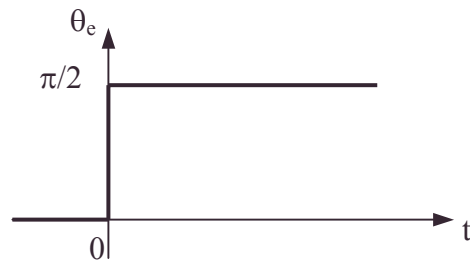


Figure 5

L'asservissement souhaité est-il réalisé ?

Quel inconvénient la nature de la réponse θ_s présente-t-elle ?

III. Amélioration de l'asservissement : correcteur électronique

On insère maintenant entre A_1 et A_2 le quadripôle décrit figure 6, dont les bornes d'entrée et de sortie sont respectivement repérées sur la figure 4 par EE' et SS' .

Les deux amplificateurs opérationnels A_3 et A_4 figurant dans ce quadripôle sont analogues à A_1 décrit en II., et fonctionnent en régime linéaire.

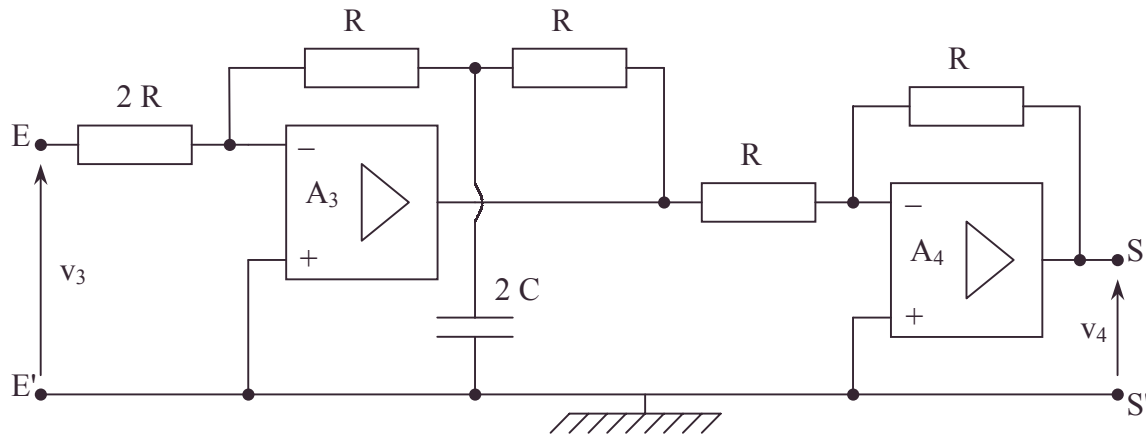


Figure 6

1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}_3 = \frac{V_4}{V_3}$. Quel est le rôle joué par l'A.O. A_4 ?

Déduire de l'expression de \underline{H}_3 celle de la nouvelle fonction de transfert de la chaîne directe : \underline{H}' .

2.a. Quelle valeur doit-on donner à la capacité C , si l'on choisit $R = 39 \text{ k}\Omega$, pour que \underline{H}' se mette sous la forme : $\underline{H}' = \frac{1}{j\omega\tau'}$? Déterminer τ' .

Quelle est alors l'opération réalisée par la chaîne directe ?

b. Cette condition étant vérifiée, quelle est l'expression de la nouvelle fonction de transfert du système bouclé \underline{H}_B' ? Quel est l'ordre de cet opérateur ?

c. Tracer le diagramme de Bode correspondant à \underline{H}_B' .

d. Quelle est maintenant la réponse du système à l'échelon de position décrit au II.2.d. ? Quel avantage cette réponse présente-t-elle par rapport à la précédente ? Déterminer le temps de réponse du système, t_p , valeur de t pour laquelle θ_s approche sa valeur permanente à 5 % près ?

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

$$\text{I.1. } e = -\frac{d\varphi_{\text{coupé}}}{dt} ; \Gamma_z = i \frac{d\varphi_{\text{coupé}}}{d\alpha} ;$$

(cf. $d\mathcal{C} = i d\varphi_{\text{coupé}} = +\Gamma_z d\alpha$; Γ_z couple des forces magnétiques).

Dans le cas d'un rotor à champ radial :

$$d\varphi_{\text{coupé}} = \varepsilon 2NLbB d\alpha$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, +1 si courant vers le bas, -1 dans le cas contraire.

$$\text{cf. } \vec{dS}_{\text{coupé}} = \vec{dOP}_{\text{déplacement}} \wedge \vec{d\ell}.$$

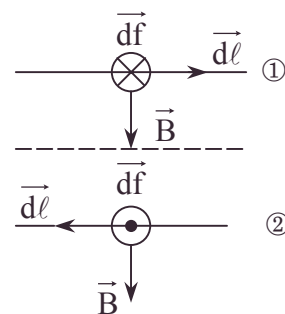
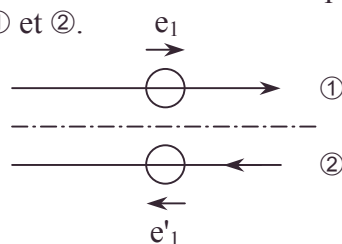
$$e = -2NLbB \frac{d\alpha}{dt} ; \Gamma_z = i.2NLbB.$$

$$\text{On posera } \phi = 2NLbB ; \frac{d\alpha}{dt} = \Omega.$$

$$e = -\phi\Omega ; \Gamma_z = \phi i \text{ soit } q = +1 \text{ sans dimension, cf. } k = q ; \phi = \phi \text{ en I.3.}$$

2. Pour que les f.e.m. ne s'annulent pas, il faut des $d\varphi_{\text{coupé}}$ de même signe constamment sur chaque brin.

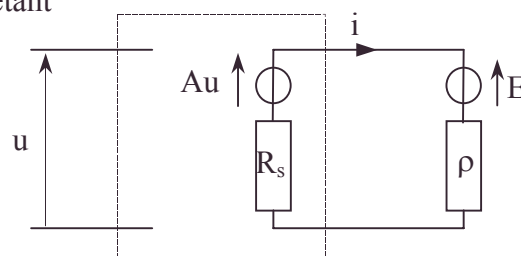
Il faut l'additivité, de même pour les couples exercés ou subis ; il faut donc "l'inversion" du courant par un "collecteur" entre les situations ① et ②.



Cette additivité sur Γ_z' se répercute sur e :

on a, comme il se doit, pour deux brins symétriques :

3.a. Ainsi le moteur est récepteur, Au étant générateur, d'où le positionnement de E.



b. La loi d'Ohm donne : $(Au - E) = (R_s + \rho) i$;

$$\Gamma_z = k i = k \frac{(Au - E)}{R_s + \rho} = \frac{A k u}{R_s + \rho} - \frac{k^2 \Omega}{R_s + \rho} \Rightarrow \gamma = \frac{A k}{R_s + \rho} ; \delta = \frac{k^2}{R_s + \rho} .$$

c. Le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe avec liaison parfaite s'écrit : $J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_z$ soit $J \frac{d\Omega}{dt} + \delta \Omega = \gamma u$.

d. En ajoutant le frottement visqueux :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -f \Omega + \Gamma_z \text{ soit } J \frac{d\Omega}{dt} + (\delta + f) \Omega = \gamma u .$$

$$\text{La résolution pour } u \text{ donnée donne : } \Omega = \frac{\gamma}{\delta + f} \left[U_1 + (U_0 - U_1) e^{-\frac{(\delta+f)t}{J}} \right] ,$$

soit $\Omega = \Omega_1 + (\Omega_0 - \Omega_1) e^{-\frac{t}{\tau}}$ qui vérifie $\Omega_1 = \frac{\gamma U_1}{\delta + f}$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $\Omega_0 = \frac{\gamma U_0}{\delta + f}$ pour le régime permanent précédemment établi.

$$\text{e. } \tau = \frac{J}{\delta + f} ; \gamma = \frac{A k}{R_s + \rho} ; \Omega_0 = \frac{A k U_0}{(\delta + f)(R_s + \rho)}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\tau \gamma U_0}{\Omega_0} = \frac{\tau A k}{R_s + \rho} \frac{U_0}{\Omega_0} ; \delta = \frac{k^2}{R_s + \rho} ;$$

$$f = \frac{\gamma U_0}{\Omega_0} - \delta = \frac{A k U_0}{\Omega_0 (R_s + \rho)} - \frac{k^2}{R_s + \rho} ;$$

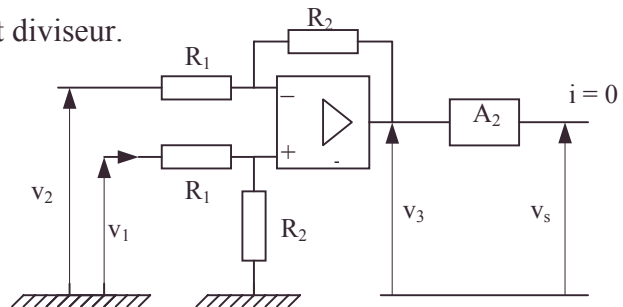
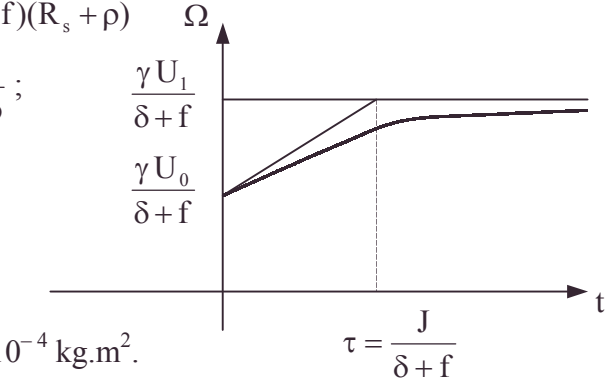
$$f = \frac{k}{R_s + \rho} \left(\frac{A u_0}{\Omega_0} - k \right) ;$$

$$\text{AN : } f = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2 \cdot \text{s}^{-1} ; J = 1,99 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2 .$$

II.1.a. $V_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1$ car on a un pont diviseur.

Le théorème de Millman donne :

$$V_- = \frac{\frac{v_2}{R_1} + \frac{v_3}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} ;$$

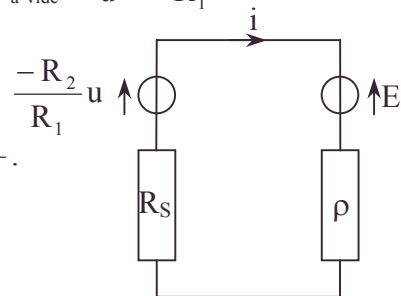


$$V_+ = V_- \Rightarrow v_3 = \frac{-R_2}{R_1} (v_2 - v_1) = \frac{-R_2}{R_1} u ; \text{ à vide, } v_3 \Rightarrow H_1 = \frac{v_3}{u} = \frac{-R_2}{R_1} .$$

• Equation électrique : $(\rho + R_s) i = -\frac{R_2}{R_1} u - k \Omega$.

• Equation mécanique : $J \frac{d\Omega}{dt} = k i = \frac{-k^2 \Omega}{\rho + R_s} - \frac{k R_2 u}{(\rho + R_s) R_1}$.

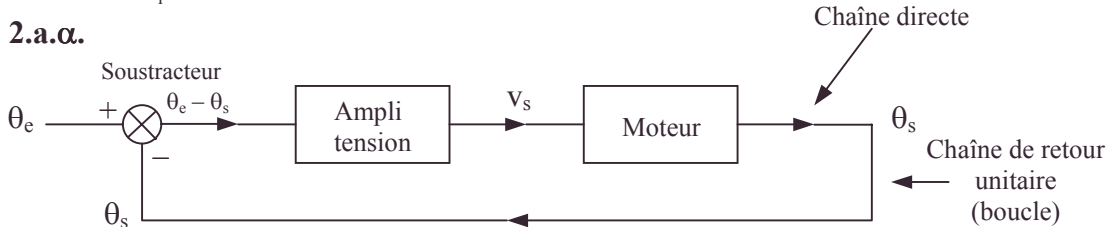
En notation complexe : $\Omega = \underline{\Omega} e^{j\omega t} ; u = \underline{U} e^{j\omega t}$.



$$\underline{\Omega} \left(j\omega J + \frac{k^2}{\rho + R_s} \right) = \frac{-R_2 k U}{R_1 (\rho + R_s)} \Rightarrow \underline{H}_2 = \frac{-\frac{R_2 k}{R_1 (\rho + R_s)}}{\frac{k^2}{\rho + R_s} \left(1 + j \frac{\omega J (\rho + R_s)}{k^2} \right)}$$

Soit $G_0 = \frac{-R_2}{R_1 k}$; $\tau = \frac{J(\rho + R_s)}{k^2}$; AN : $G_0 = -500 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $\tau = 0,149 \text{ s}$.

2.a.α.



β. Ampli de tension :

$$\frac{\underline{v}_s}{\underline{\theta}_e - \underline{\theta}_s} = \frac{\underline{H}_1 \underline{u}}{-(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)} = -\underline{H}_1 \lambda \text{ avec } \underline{u} = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \text{ et } \underline{H}_1 = -\frac{R_2}{R_1}.$$

γ. Moteur : $\frac{\underline{\theta}_s}{\underline{v}_s}$;

or, $\frac{d\theta_s}{dt} = \Omega$; vu  figurant à la figure 4, soit rotation dans le sens

trigonométrique.

$$\underline{\theta}_s = \frac{\underline{\Omega}}{j\omega} \Rightarrow \frac{\underline{\theta}_s}{\underline{v}_s} = \frac{\underline{\Omega}}{j\omega \underline{v}_s} = \frac{\underline{\Omega}}{\underline{u}} \cdot \frac{\underline{u}}{\underline{v}_s} \cdot \frac{1}{j\omega} = \frac{\underline{H}_2}{j\omega \underline{H}_1} = \frac{-R_1}{jR_2 \omega} \frac{G_0}{1 + j\omega \tau} ;$$

$$\frac{\underline{\theta}_s}{\underline{v}_s} = \frac{1}{j\omega k} \frac{1}{1 + j\omega \tau} \text{ car } G_0 = -\frac{R_2}{R_1 k}.$$

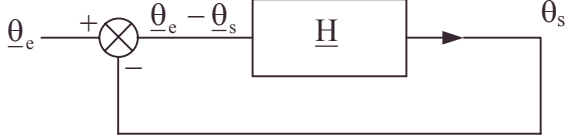
δ. La chaîne de retour bouclant la chaîne directe (ampli + moteur) a une fonction de transfert $\frac{\underline{\theta}_s}{\underline{\theta}_e} = +1$.

b. La chaîne directe fonctionne en tant que telle si on coupe la chaîne de retour :

$$\underline{H} = \frac{\underline{\theta}_s}{\underline{\theta}_e} = \frac{\underline{\theta}_s}{\underline{v}_s} \cdot \frac{\underline{v}_s}{\underline{\theta}_e} = \frac{-R_1}{jR_2 \omega} \frac{G_0}{1 + j\omega \tau} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \lambda = \frac{-\lambda G_0}{j\omega (1 + j\omega \tau)}, \text{ soit } \tau_1 = \frac{-1}{\lambda G_0} = \frac{R_1 k}{\lambda R_2}.$$

AN : $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

c. Avec la chaîne de retour :

$$\underline{H}_B = \frac{\underline{\theta}_s}{\underline{\theta}_e} = \frac{\underline{H}}{\underline{\theta}_e} (\underline{\theta}_e - \underline{\theta}_s) = \underline{H} (1 - \underline{H}_B) ;$$


$$\Rightarrow \underline{H}_B = \frac{\underline{H}}{1 + \underline{H}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{H}}}$$

$$\underline{H}_B = \frac{1}{(1 - \omega^2 \tau \tau_1) + j\omega \tau_1} ; \text{ opérateur d'ordre 2 :}$$

(cf. équation différentielle d'ordre 2 – cf. **2.d.**)

d.α. On sait que $j\omega$ est associé à la dérivation simple et que $-\omega^2$ est associé à la dérivation double : $\theta_s(t) + \tau\tau_1 \frac{d^2\theta_s}{dt^2} + \tau_1 \frac{d\theta_s}{dt} = \theta_e$, soit $\ddot{\theta}_s + \frac{1}{\tau}\dot{\theta}_s + \frac{\theta_s}{\tau\tau_1} = \frac{\theta_e}{\tau\tau_1}$.

β. Equation caractéristique :

$r^2 + \frac{r}{\tau} + \frac{1}{\tau\tau_1} = 0$ a pour discriminant :

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{\tau\tau_1} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{4}{\tau_1} \right) ; \text{AN : } \Delta = -13378 \text{ rad}^2\text{s}^{-2} < 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{2\tau} \pm j\sqrt{-\Delta}.$$

$$\theta_s = A e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + \varphi\right) + \theta_e ;$$

$$\dot{\theta}_s = \frac{-\sqrt{-\Delta}}{2} A e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + \varphi\right) - \frac{A e^{-\frac{t}{2\tau}}}{2\tau} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + \varphi\right).$$

Or, par manque d'apport rapide d'énergie (par continuité) à $t = 0 : \dot{\theta}_{s_0} = 0 \Rightarrow$

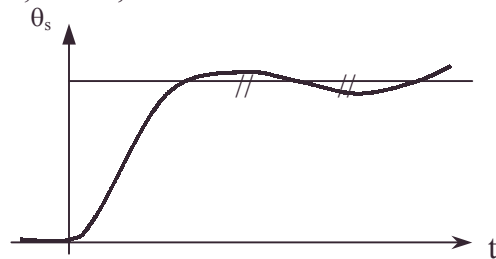
$$\tan \varphi = \frac{-1}{\tau\sqrt{-\Delta}} \text{ soit } \varphi = 0,058 ; \text{ or, } \theta_{s_0} = 0 ; \cos \varphi = 0,998 \neq 1 ; \theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A + \frac{\pi}{2} = 0 ;$$

$$\Rightarrow \theta_s = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{e^{-\frac{t}{2\tau}}}{\cos \varphi} \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{4}{\tau\tau_1} - \frac{1}{\tau^2}} t}{2} + \varphi\right) \right).$$

Approximation numérique : $\tau = 0,149\text{s} ; \tau_1 = 2 \cdot 10^{-3} ; 2\tau = 0,3\text{s}.$

$$\frac{\sqrt{\frac{4}{\tau\tau_1} - \frac{1}{\tau^2}}}{2} \neq \frac{1}{\sqrt{\tau\tau_1}} ; \theta_s = \frac{\pi}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \frac{t}{\sqrt{\tau\tau_1}} \right)$$

L'asservissement va se réaliser, mais le régime n'étant pas le régime critique, il mettra davantage de temps à s'établir par exemple 10τ . A.N. : 3 s.



III.1.

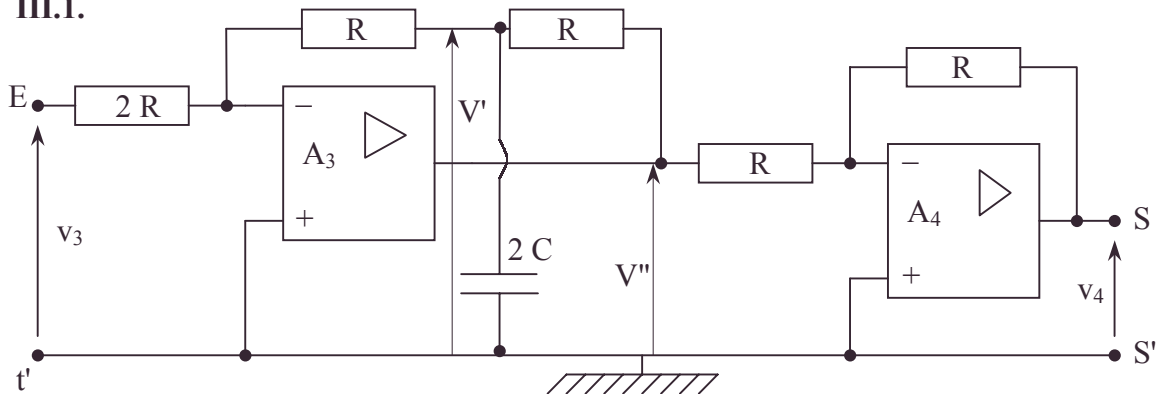


Figure 6

a. Le théorème de Millman donne :

$$V_{A_3}^- = \frac{\frac{V_3}{2R} + \frac{V'}{R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{V_3}{2} + \frac{V'}{2}}{\frac{3}{2}} ; \text{ or, } V_{A_3}^- = V_{A_3}^+ = 0 \Rightarrow \underline{V'} = \frac{-V_3}{2}.$$

$$\text{b. } \underline{V'} = \frac{\frac{0}{R} + 0.j2C\omega + \frac{V''}{R}}{\frac{1}{R} + j2C\omega + \frac{1}{R}} = \frac{\underline{V''}}{2 + j2RC\omega}.$$

$$\text{c. } \underline{V_{A_4}^-} = \frac{\frac{V''}{R} + \frac{V_4}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\underline{V''} + \underline{V_4}}{2} ; \text{ or, } \underline{V_{A_4}^-} = \underline{V_{A_4}^+} = 0 \Rightarrow \underline{V''} = -\underline{V_4}.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{-V_3}{2} = \frac{-V_4}{2 + j2RC\omega} \Rightarrow \underline{H_3} = \frac{V_4}{V_3} = 1 + jCR\omega.$$

d. A_4 joue un rôle d'inverseur de signe car $\frac{V_4}{V''} = -1$.

e. On insère $\underline{H_3}$; \underline{H} devient $\underline{H'} = \underline{H}\underline{H_3} = \frac{1 + jRC\omega}{j\omega\tau_1(1 + j\omega\tau)}$.

2.a.α. Il faut $\tau = RC \Rightarrow C = \frac{\tau}{R}$; A.N. : $C = \frac{0,149}{39.10^3} = 3,82\mu F$.

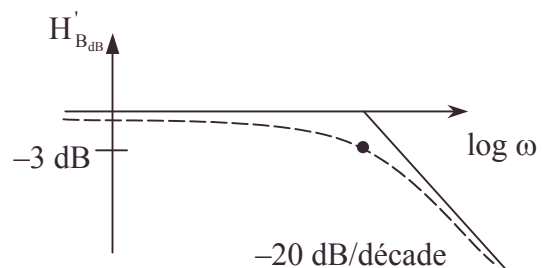
β. $\tau' = \tau_1$; AN : $\tau' = 2.10^{-3}$ s.

γ. La chaîne directe assure la fonction intégration.

b. On a toujours $\underline{H'_B} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{H'}}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_1}$; opérateur d'ordre 1.

c.α. $|\underline{H'_B}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}}$; $H'_{B_{dB}} = 20\log_{10}|\underline{H'_B}| = -10\log_{10}(1 + \omega^2\tau_1^2)$.

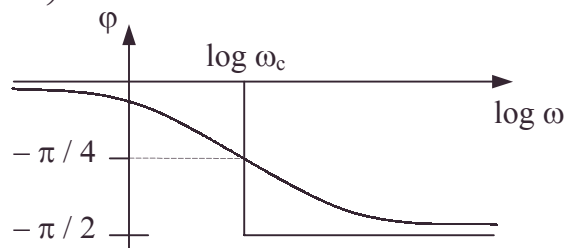
$\omega_c = \frac{1}{\tau_1}$; AN : $\omega_c = 500 \text{ rad.s}^{-1}$.



$$\text{β. } \underline{H'_B} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}} - \frac{j\omega\tau_1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}} \right) ;$$

$$\sin \arg \underline{H'_B} = \frac{-\omega\tau_1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}} ;$$

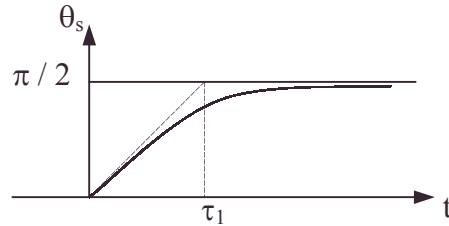
$$\cos \arg \underline{H'_B} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}}.$$



d.α. $\overline{\theta_s}(1 + j\omega\tau_1) = \overline{\theta_e}$ se transcrit en $\theta_s(t) + \tau_1 \frac{d\theta_s}{dt} = \theta_e$ et vu **II.2.d.** on a la solution :

$$\theta_s = \frac{\pi}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

β. On atteint θ_e sans oscillation :



γ. On veut $\theta_s = 0,95 \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_p = -\tau_1 \ln(1 - 0,95)$; $t_p = 3\tau_1$. A.N. : $\tau_p = 6.10^{-3} \text{ s}$.

On améliore la durée d'obtention ; on passe de 3s à 6.10^{-3} s ;

On voit l'intérêt du correcteur introduit.

6.3.2. Réducteur, asservissement d'une gouverne d'avion

Une grandeur $f(t)$ sinusoïdale de pulsation s'écrit ω en notation complexe : $f(t) = F(p)e^{pt}$ avec $j\omega = p$. On appelle $F(p)$ l'amplitude complexe de f ; cette procédure est un succédané de la transformation de Laplace.

1. Mise en équation d'un moteur à courant continu commandé par l'induit (Fonctionnement à vide).

Soit un moteur à courant continu commandé par l'induit, dont l'inducteur est un enroulement alimenté par une d.d.p. constante. On notera :

- γ_m le couple (dû aux forces électriques) subi par l'arbre moteur tel que $\gamma_m = k_m i$ (k_m est une constante).
- θ_m sa position angulaire.
- e_m la force contre-électromotrice telle que $e_m = k_E \frac{d\theta_m}{dt}$ (k_E est une constante).

On rappelle le schéma équivalent : (figure 1).

1.1. Montrer par un raisonnement énergétique que $k_E = k_m$.

Préciser les conditions de l'approximation.

On notera k la valeur commune de k_m et k_E .

2. Exprimer le couple γ_m disponible sur l'arbre en fonction de

v et de $\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$ en régime

permanent.

3. Donner l'allure des courbes $\gamma_m = \gamma_m(\omega_m)$ pour deux valeurs données v_1 et v_2 de v ($v_2 > v_1 > 0$).

2. Le rotor du moteur a un moment d'inertie J_m ; du fait du palier, il subit de plus un couple de type visqueux : $-f_m \omega_m$.

1. Ecrire l'équation différentielle mécanique et l'équation différentielle électrique descriptives du moteur en régime non permanent.

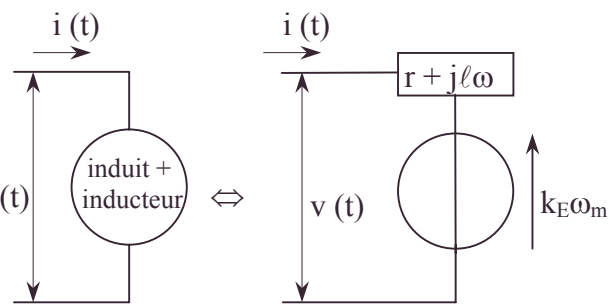


Figure 1

On utilisera les grandeurs v, i, γ_m, θ_m ; soient $V(p), I(p), \Gamma_m(p), \Theta_m(p)$ les amplitudes complexes associées formellement cf T.L.

2. Traduire les deux équations différentielles à l'aide des amplitudes complexes.

3. Reproduire le schéma fonctionnel donné ci-après en indiquant sur chaque bloc la transmittance qui le caractérise. Voir figure 2.

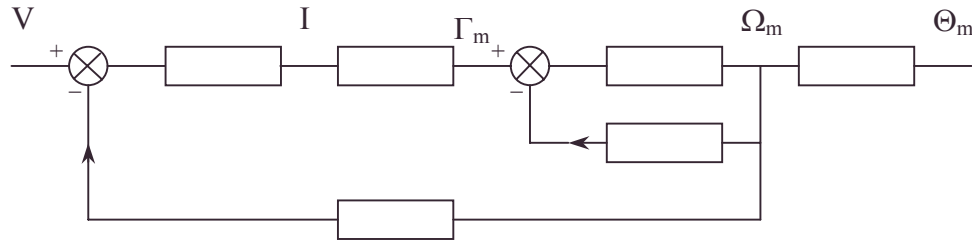


Figure 2

4. Soit $\tau_m = \frac{J_m r}{k^2}$ et $\tau_E = \frac{\ell}{r}$ les constantes de temps du moteur fonctionnant à vide.

a. Exprimer $\frac{\Theta_m(p)}{V(p)}$ à l'aide de τ_m, k, p dans le cas $k^2 \gg r f_m$; $\ell f_m \ll r J_m$

b. Que devient l'ordre si de plus : $\ell J_m \ll k^2$.

2. Mise en équation d'un système mécanique comportant un réducteur

Le réducteur est un ensemble de deux disques de rayon r_m et r_c roulant sans glisser.

On notera $n = \frac{r_c}{r_m}$. Il sera supposé sans perte de puissance.

L'arbre A_1 caractérisé par J_m, f_m, θ_m , entraîne à travers le réducteur une charge d'arbre A_2 caractérisé, de manière analogue, par J_c, f_c, θ_c .

On remarquera que les sens d'orientation positive de θ_m et θ_c sont opposés.

Soit C_1 et C_2 les amplitudes complexes des couples exercés par le réducteur sur les arbres A_1 et A_2 en projection cohérente avec chacun des deux sens d'orientation choisis? Voir figure 3.

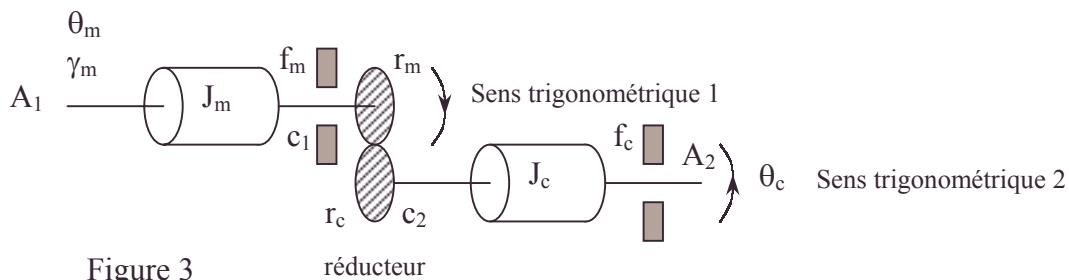


Figure 3

1.1. Ecrire les deux équations mécaniques relatives à A_1 et A_2 utilisant les amplitudes complexes précédemment définies.

2. Exprimer C_1 en fonction de C_2 .

3. Reproduire le schéma fonctionnel donné ci-après en indiquant sur chaque bloc la transmittance qui le caractérise (figure 4).

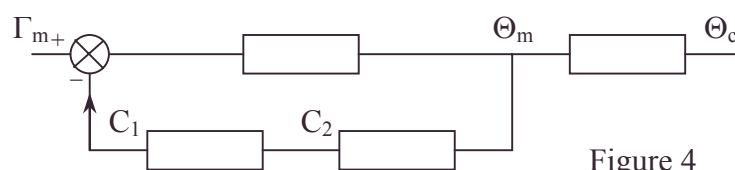


Figure 4

4. En déduire $T(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\Gamma_m(p)}$.

2. Commenter l'intérêt de n , caractéristique du réducteur.

3.1. On applique un échelon de Heaviside pour le couple $\gamma_m = \gamma_0 H(t)$ au système ;

$H(t)$ fonction de Heaviside : $H(t) = 0$ si $t < 0$, $H(t) = 1$ si $t \geq 0$. Déterminer $\omega_c(t)$.

2. Déterminer la valeur optimale de n telle que l'accélération angulaire de la charge $\theta_c = (t)$ soit maximale à l'instant $t = 0$.

3. Quel est l'intérêt de l'amplitude complexe pour l'étude des régimes transitoires ?

3. Moteur commandé par l'induit entraînant une charge à travers un réducteur

On considère le moteur défini en 1. pour entraîner l'arbre A_1 .

On négligera l et on aura $k^2 \gg r \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right)$.

1. Reproduire le schéma fonctionnel donné ci-après en indiquant dans chaque bloc la transmittance qui le caractérise (figure 5).

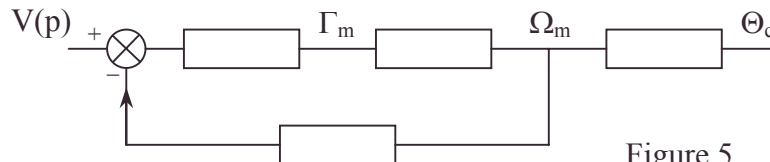


Figure 5

2. Un couple perturbateur γ' (projection en accord avec les orientations), d'amplitude complexe formelle $\Gamma'(p)$ se produit sur l'arbre de sortie A_2 . L'introduire simplement dans le schéma fonctionnel.

3. Calculer $\Theta_c(p)$ en fonction de $V(p)$ et $\Gamma'(p)$.

4. Exprimer la nouvelle constante de temps τ'_m du moteur muni de la charge et du réducteur.

5. Trouver les coefficients A_1 et B_1 tels que :

$$\Theta_c(p) = (A_1 V(p) + B_1 \Gamma'(p)) \cdot \frac{1}{nkp(1 + \tau'_m p)}.$$

6. Application numérique : $k = 0,1 \text{ rad.V}^{-1}$; $r = 2\Omega$; $f_c = f_m = 0$; $J_c = 1,28 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$; $J_m = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$; calculer n optimal cf. 2.3.

Calculer τ'_m . Le comparer à τ_m du même arbre fonctionnant à vide.

7. On cale sur l'arbre moteur A_2 , une génératrice tachymétrique qui donne une tension $v_T(t) = k_T \omega_c(t)$, sachant que $k_T = 0,2 \text{ V.s.rad}^{-1}$.

Exprimer $v_T(t)$ si on applique au moteur une tension de commande en échelon $v(t) = 10 H(t)$ (en volt), $H(t)$ étant la fonction échelon de Heaviside.

Tracer l'allure de $V_T(t)$.

4. Commande d'une gouverne d'avion en position

On rappelle qu'une gouverne est classiquement un solide dont l'angle de rotation θ_G peut varier (exemple : partie d'aile) ; l'ordre reçu par le servomoteur de gouverne est donné sous forme d'une tension v_c élaborée par le pilote automatique. Soit v_A correspondant à la position actuelle de la gouverne, mesurée par un détecteur potentiométrique proportionnel positivement à θ_G ; ce potentiomètre pouvant tourner de 2π radians et étant alimenté par $+\frac{U_0}{2}$ et $-\frac{U_0}{2}$.

• charge électrotechnique, consigne, constante de temps, détecteur potentiométrique proportionnel [cf rétroaction], échelon de Heaviside, échelon de tension, fonctionnement à vide en triphasé, gouverne d'avion, graphe, optimisation, pilote automatique, potentiomètre, réducteur, réponse indicielle, servomoteur, transmittance

La tension d'erreur $\varepsilon = v_c - v_A$ alimente, après un amplificateur de coefficient A , l'induit du moteur défini en 3.6. couplé à la gouverne par le réducteur précédent. Sur la gouverne s'exerce de plus le couple aérodynamique γ_A .

On notera $E(p)$ l'amplitude complexe de $\varepsilon(t)$.

1. Reproduire le schéma fonctionnel de la figure 6 donnée ci-après, en indiquant sur chaque bloc la transmittance qui le caractérise. On néglige toujours ℓ mais il n'y a plus la simplification due à k .

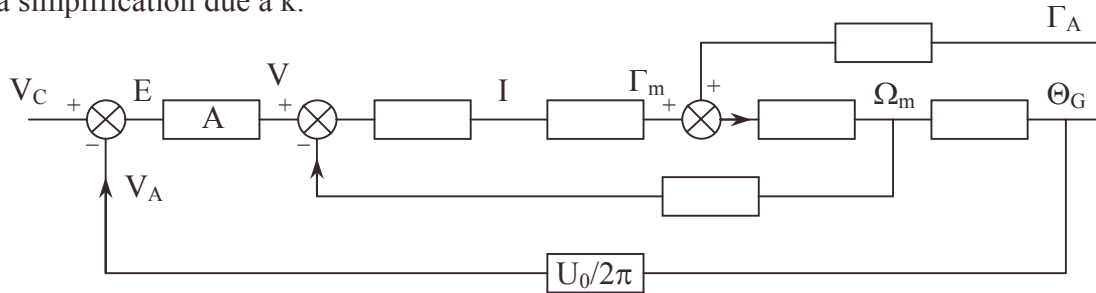


Figure 6

2. Calculer :
- $H_1(p) = \frac{\Theta_G(p)}{V_C(p)}$ quand $\Gamma_A = 0$.
 - $H_2(p) = \frac{\Theta_G(p)}{\Gamma_A(p)}$ quand $V_C = 0$.
 - $\frac{H_2(p)}{H_1(p)}$.

On utilisera la notation simplificatrice $K_v = \frac{k}{\left(r \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right) + k^2 \right)}$.

3. Calculer les coefficients A_2 et B_2 tels que : $E(p) = A_2(p)V_C(p) + B_2(p)\Gamma_A(p)$.
4. Si $v_c = v_0 H(t)$ et $\gamma_A = \gamma_0 H(t)$, calculer $\varepsilon(\infty)$ et $V(\infty)$.
5. Commenter le résultat. Est-ce toujours ainsi ?

Autres concours ; Durée : 3h

Corrigé

1.1.1. La conversion de puissance s'écrit : $P_m = P_E$.

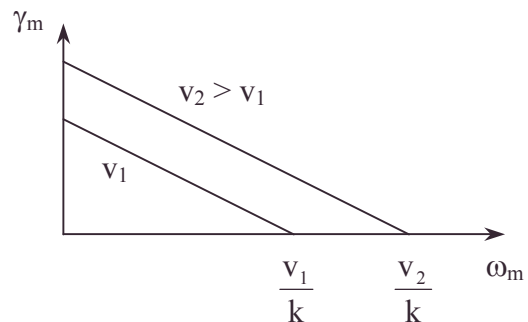
$$P_m = \gamma_m \omega_m = k_m i \omega_m ; P_E = e_m i = k_E \omega_m i \Rightarrow k_E = k_m .$$

Pour obtenir ce résultat, on a considéré $\left| r i^2 + \ell i \frac{di}{dt} \right| \ll |e_m i|$.

$$\gamma_m = k i \text{ or } v = r i + \ell \frac{di}{dt} + k \omega_m .$$

$$\text{En régime permanent : } \frac{di}{dt} = 0 ; i = \frac{v}{r} - \frac{k}{r} \omega_m$$

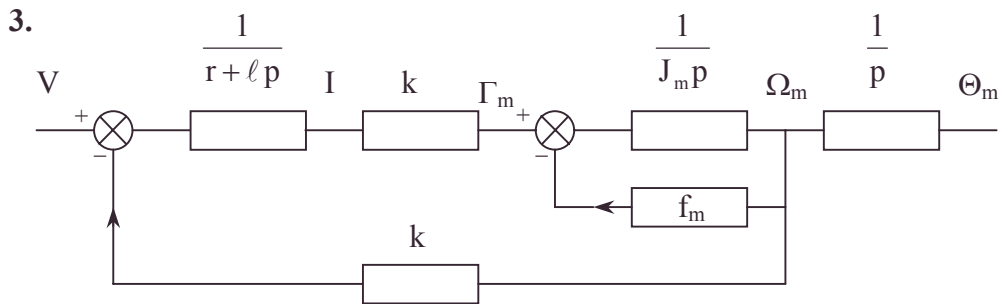
$$\Rightarrow \gamma_m = -\frac{k^2}{r} \omega_m + \frac{k}{r} v .$$



- droite de charge [cf dipôle de Thévenin-Norton], Ohm [loi d'], réducteur, théorème de la valeur finale, transmittance

$$2.1. J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = \gamma_m - f_m \frac{d\theta_m}{dt}; v = ri + \ell \frac{di}{dt} + k \frac{d\theta_m}{dt}.$$

$$2. J_m p^2 \Theta_m = \Gamma_m - f_m p \Theta_m; V = rI + \ell pI + kp \Theta_m.$$



Le schéma permet de vérifier :

$$a. \Gamma_m = k \left(\frac{V}{r + \ell p} - k \Omega_m \right) :$$

$$b. \Theta_m = \frac{\Gamma_m - f_m \Omega_m}{J_m p^2}; \Omega_m = \frac{\Gamma_m - f_m \Omega_m}{J_m p} \text{ soit } \Omega_m \left(1 + \frac{f_m}{J_m p} \right) = \frac{\Gamma_m}{J_m p}; \Omega_m = \frac{\Gamma_m}{f_m + J_m p}.$$

La chaîne directe est donc caractérisée par $\mu = \frac{k}{(r + \ell p)(f_m + J_m p)}$.

La formule de Black, (avec $\beta = k$) donne :

$$\frac{\Omega_m}{V} = \frac{\frac{k}{(r + \ell p)(f_m + J_m p)}}{1 + \frac{k^2}{(r + \ell p)(f_m + J_m p)}} = \frac{k}{\ell J_m p^2 + (\ell f_m + r J_m)p + r f_m + k^2}.$$

$$\frac{\Theta_m}{V} = \frac{\frac{k}{r f_m + k^2}}{p \left(\frac{\ell J_m}{r f_m + k^2} p^2 + \frac{\ell f_m + r J_m}{r f_m + k^2} p + 1 \right)}.$$

$$4.a. \text{ Tenant compte de } k^2 \gg r f_m, r J_m, \ll \ell f_m, \tau_m = \frac{J_m r}{k^2}; \tau_E = \frac{\ell}{r}.$$

$$\frac{\Theta_m}{V} = \frac{1}{k p (\tau_E \tau_m p^2 + \tau_m p + 1)} \text{ d'ordre 3.}$$

$$b. \frac{\Theta_m}{V} = \frac{1}{k p (1 + \tau_m p)}. \text{ L'ordre descend à 2 car } \tau_E \tau_m = \frac{\ell J_m}{k^2} \ll 1.$$

$$2.1.1. J_m p^2 \Theta_m = \Gamma_m - f_m p \Theta_m + C_1.$$

$$J_c p^2 \Theta_c = -f_c p \Theta_c + C_2.$$

2. La condition de roulement sans glissement s'écrit ici :

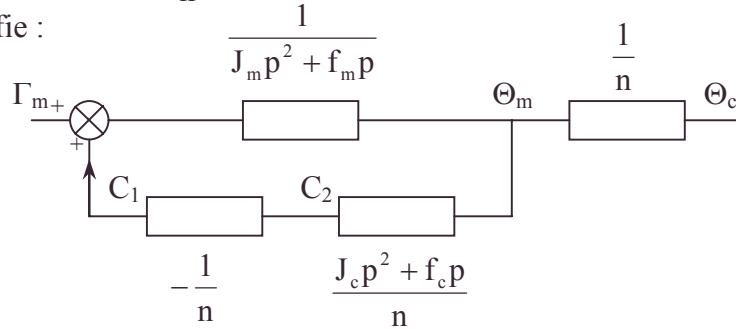
$$r_m \dot{\theta}_m = r_c \dot{\theta}_c \Rightarrow r_m \Theta_m = r_c \Theta_c \text{ vu la convention historique adoptée.}$$

La puissance moyenne de l'ensemble est nulle $C_1 \dot{\theta}_m + C_2 \dot{\theta}_m = 0$;

la transmission de puissance mécanique par le réducteur s'écrit, en notation complexe, pour la puissance moyenne, $-\frac{1}{2}C_1(p\Theta_m)^* = \frac{1}{2}C_2(p\Theta_c)^*$;

or, $r_n \Theta_m^* = r_c \Theta_c^* \Rightarrow C_1 = -\frac{C_2}{n}$.

3. On vérifie :



4. La chaîne directe entre Θ_m et Γ_m est caractérisée par $\mu = \frac{1}{J_m p^2 + f_m p}$;

la chaîne de retour par $\beta = -\frac{J_c p^2 + f_c p}{n^2}$.

Vu l'additionneur, et non pas le soustracteur, la formule de Black donne :

$$\frac{\Theta_m}{\Gamma_m} \frac{\mu}{1 - \beta\mu} = \frac{1}{(J_m p^2 + f_m p) \left(1 + \frac{J_c p^2 + f_c p}{n^2 (J_m p^2 + f_m p)} \right)}.$$

$$\frac{\Theta_m}{\Gamma_m} = \frac{1}{\left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) p^2 + \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right) p}.$$

2. La prise en compte de la charge (J_c, f_c) est "réduite" par le paramètre n , divisant J_c, f_c par n^2 .

3.1. L'amplitude complexe de la vitesse angulaire de la charge :

$$\Omega_c = p \Theta_c = p \frac{\Theta_m}{n} = \frac{\Gamma_m}{n \left[\left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) p + \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right) \right]}, \text{ d'où l'équation différentielle :}$$

$$n \left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) \frac{d\omega_c}{dt} + n \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right) \omega_c = \gamma_m.$$

Posons $\tau'_m = \frac{J_m + \frac{J_c}{n^2}}{f_m + \frac{f_c}{n^2}}$; $\omega_c = \frac{\gamma_0}{n \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'_m}} \right).$

2. $\dot{\omega}_c(t) = \frac{\gamma_0}{n \left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right)} e^{-\frac{t}{\tau'_m}} ;$

$$\dot{\omega}(0) = \frac{\gamma_0}{n J_m + \frac{J_c}{n}}, \text{ optimisation } \frac{d\dot{\omega}_0}{dn} = -\frac{\gamma_0}{\left(n J_m + \frac{J_c}{n} \right)^2} \left(J_m - \frac{J_c}{n^2} \right) = 0 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{J_c}{J_m}}.$$

• additionneur, Black[formule de], chaîne de retour de rétroaction, chaîne directe [munie d'une chaîne de retour], charge mécanique, optimisation, transformation de Laplace

3. C'est un moyen de transformer une équation différentielle en une équation algébrique, au traitement plus simple.

3.1. et 2. $V = rI + k\Omega_m$ peut s'écrire $V = r\frac{\Gamma_m}{k} + k\Omega_m$, soit encore $\Gamma_m = \frac{k}{r}(V - k\Omega_m)$ ce

qui fournit 2 transmittances $\frac{k}{r}$ et k du schéma fonctionnel qui suit.

$$\bullet \Gamma_m + C_1 = (J_m p^2 + f_m p) \Theta_m \quad [1].$$

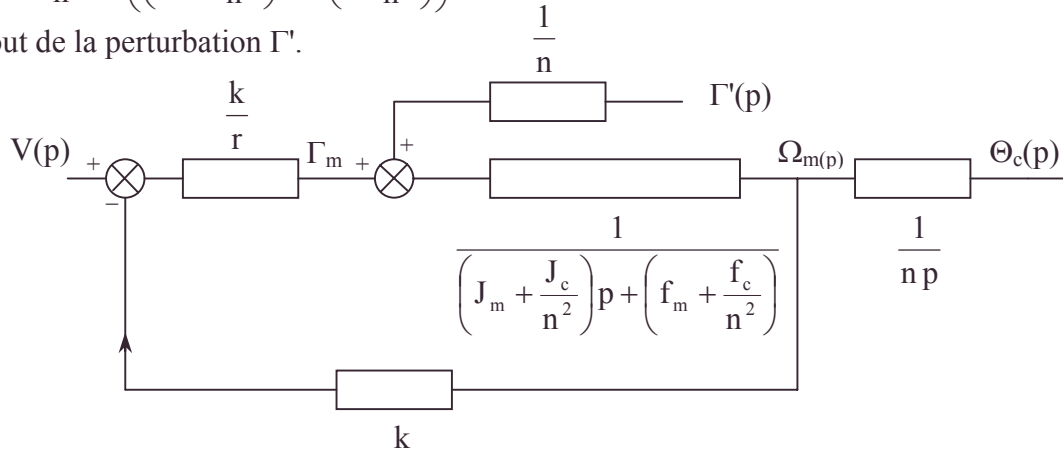
$$\bullet \Gamma' + C_2 = (J_c p^2 + f_c p) \Theta_c \quad [2], \text{ avec } C_2 = -nC_1 \text{ et } \Theta_c = \frac{\Theta_m}{n}.$$

Eliminons C_1 , C_2 et Θ_c : $n[1] + [2]$ s'écrit :

$$n\Gamma_m + \Gamma' = \Theta_m \left[p^2 \left(nJ_m + \frac{J_c}{n} \right) + p \left(nf_m + \frac{f_c}{n} \right) \right]; \text{ n'oublions pas } \Omega_m = p\Theta_m.$$

$$\Gamma_m = -\frac{\Gamma'}{n} + p \left(\left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) p + \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right) \right) \Theta_m, \text{ d'où les valeurs de transmittance restante et}$$

l'ajout de la perturbation Γ' .



3. Remplaçant $\Gamma_m = \frac{k}{r}(V - knp\Theta_c)$, il reste :

$$\frac{kV}{r} + \frac{\Gamma'}{n} = np \left[\left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) p + \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} + \frac{k^2}{r} \right) \right] \Theta_c;$$

$$\Theta_c = \frac{\frac{kV}{r} + \frac{\Gamma'}{n}}{np \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} + \frac{k^2}{r} \right) \left(1 + \frac{J_m + \frac{J_c}{n^2}}{f_m + \frac{f_c}{n^2} + \frac{k^2}{r}} p \right)}, \text{ et vu } k^2 \gg r \left(f_m + \frac{f_c}{n^2} \right),$$

$$\Theta_c = \frac{kV + \frac{\Gamma'}{n}r}{npk^2 \left(1 + \frac{r}{k^2} \left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right) p \right)}.$$

On a un système d'ordre 2 pour θ_c mais d'ordre 1 en ω_c dont le dénominateur est en $1 + \tau'_m p$.

$$4. \tau'_m = \frac{r}{k^2} \left(J_m + \frac{J_c}{n^2} \right).$$

• transmittance

6.

$$H_1(p) = \frac{2\pi AK_v}{2\pi np(1 + \tau_m''p) + AK_v U_0} = \frac{\frac{2\pi}{U_0}}{1 + \frac{2\pi n}{AU_0 K_v}p + \frac{2\pi n \tau_m'' p^2}{AU_0 K_v}}.$$

$$H_2(p) = \frac{2\pi r K_v}{nk(2\pi np(1 + \tau_m''p) + AK_v U_0)} = \frac{2\pi r}{nk AU_0 \left(1 + \frac{2\pi n}{AU_0 K_v}p + \frac{2\pi n \tau_m'' p^2}{AU_0 K_v}\right)}.$$

$$\frac{H_2(p)}{H_1(p)} = \frac{r}{nkA}.$$

$$3. E = V_c - V_A = V_c - \frac{U_0}{2\pi} \Theta_G \text{ or } \Theta_G = H_1 V_c + H_2 \Gamma_A.$$

$$E(p) = V_c \left(1 - \frac{U_0}{2\pi} H_1\right) - \frac{U_0}{2\pi} H_2 \Gamma_A \Rightarrow A_2(p) = 1 - \frac{U_0}{2\pi} H_1; B_2(p) = -\frac{U_0}{2\pi} H_2.$$

$$A_2(p) = \frac{2\pi n}{AU_0 K_v} \frac{p(1 + \tau_m''p)}{1 + \frac{2\pi np}{AU_0 K_v} + \frac{2\pi n \tau_m'' p^2}{AU_0 K_v}}; B_2(p) = \frac{-r}{nkA \left(1 + \frac{2\pi np}{AU_0 K_v} + \frac{2\pi n \tau_m'' p^2}{AU_0 K_v}\right)}.$$

4. Passons à l'équation différentielle associée :

$$\frac{2\pi n \tau_m''}{AU_0 K_v} \varepsilon'' + \frac{2\pi n}{AU_0 K_v} \varepsilon' + \varepsilon = \frac{2\pi n}{AU_0 K_v} \left(\frac{dV_c}{dt} + \tau_m'' \frac{d^2 V_c}{dt^2} \right) - \frac{r}{nkA} \gamma_A.$$

Quand $t \rightarrow \infty$, le régime transitoire tend vers $\varepsilon = \frac{-r}{nkA} \gamma_0$;

$$\text{or } V = A\varepsilon \Rightarrow v(\infty) = -\frac{r\gamma_0}{nk}.$$

Variante : le théorème de la valeur finale donne : $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p)$ avec $\Gamma_A = \frac{\gamma_0}{p}$,

$$V_c = \frac{v_0}{p}; \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 - \frac{U_0}{2\pi} H_1\right) = 0; \lim_{p \rightarrow 0} \frac{U_0}{2\pi} H_2 = \frac{r}{nRA} \text{ donne } \varepsilon(\infty) = -\frac{r\gamma_0}{nkA} \forall v_0.$$

5. ε ne dépend pas de v_0 et est proportionnel à γ_0 .

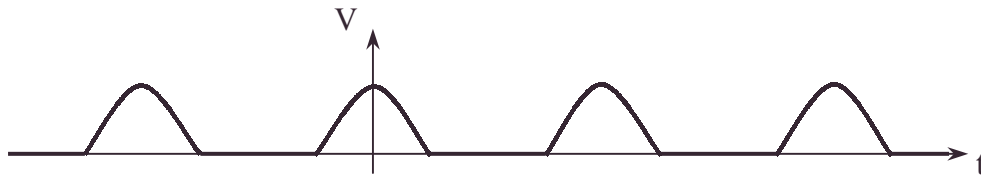
Ce n'est ainsi que parce que $\frac{dV_c}{dt}$ et $\frac{d^2 V_c}{dt^2}$ sont indépendants de v_0 et de γ_0 ; ici ils sont nuls.

6.3.3. Principe d'un radioaltimètre

Rappels : la fréquence du signal $A \cos \theta(t)$, où $A = \text{cste}$ et $\theta(t)$ toujours positif, est

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}.$$

La valeur moyenne de la tension obtenue par redressement monoalternance d'une tension sinusoïdale d'amplitude V_m est $\frac{V_m}{\pi}$ (ou $-\frac{V_m}{\pi}$ selon le branchement de la diode parfaite utilisée).



La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est $F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$.

I. Principe d'un radioaltimètre

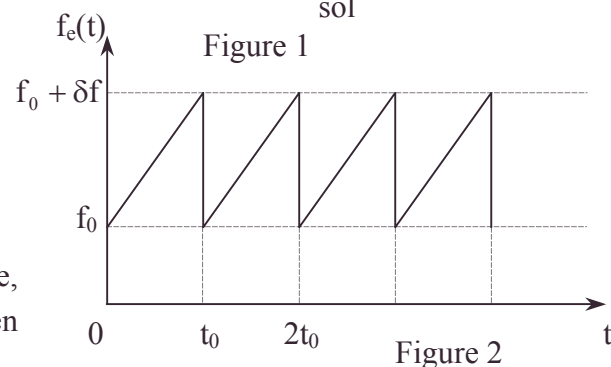
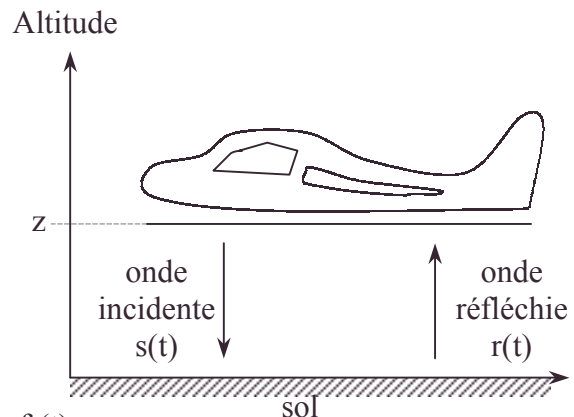
Un oscillateur embarqué dans un avion émet un signal sinusoïdal $s(t)$ modulé en fréquence (figures 1 et 2).

Ce signal se propage verticalement à la vitesse $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Au contact du sol, il donne naissance à une onde réfléchie : on ne tient compte ni du changement de phase dû à la réflexion, ni de l'effet Doppler.

Une antenne solidaire de l'avion capte l'onde réfléchie $r(t)$ et permet à un radioaltimètre de mesurer l'altitude z de celui-ci à partir du temps τ nécessaire à l'onde radioélectrique pour effectuer l'aller-retour entre l'avion et le sol.

1. La fréquence $f_c(t)$ du signal $s(t)$ émis par l'oscillateur embarqué, varie périodiquement au cours du temps selon le graphe de la figure 2 : entre les instants $t = 0$ et $t = t_0$, $f_c(t)$ croît de f_0 à $f_0 + \delta f$. On a une wobulation.

Pour $0 < t < t_0$, établir, à partir du graphe, la loi de variation de la fréquence $f_c(t)$ en fonction de t , f_0 , δf et t_0 .



2. On pose : $s(t) = A \cos \theta(t)$ et $f_c(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$; de plus, $s(t) = A$ à l'instant $t = 0$.

Etablir pour $0 < t < t_0$, l'expression mathématique de $s(t)$ en fonction de A , f_0 , δf , t_0 et t .

3. Le signal capté par l'antenne réceptrice s'écrit : $r(t) = a s(t - \tau)$.

Etablir l'expression mathématique de $r(t)$ en fonction de a , A , f_0 , δf , t_0 et t .

Donner la signification physique des paramètres a et τ .

En déduire l'expression de τ en fonction de l'altitude z et de la vitesse de propagation c .

Quelle est la valeur de τ si l'altitude de l'avion est $z = 300$ m ?

4. Les signaux $s(t)$ et $r(t)$ sont multipliés par un multiplieur (figure 3) et le signal résultant $n(t) = k r(t) s(t)$ est traité par un filtre passe-bas. D'une manière générale, $\delta f \ll f_0$ et $\tau \ll t_0$.

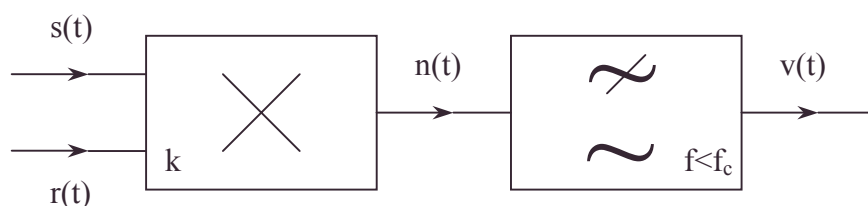


Figure 3

a. Montrer que $n(t)$ est composé de deux signaux sinusoïdaux dont l'un, de basse fréquence f_2 , a une fréquence ne dépendant pas explicitement de t , tandis que la fréquence f_1 de l'autre varie avec t . Calculer ces deux fréquences en fonction de f_0 , δf , t_0 , τ et t .

b. Application numérique : $f = 4240 \text{ MHz}$; $\delta f = 123 \text{ MHz}$;

$$t_0 = 9,67 \text{ ms} ; \quad \tau = 2,0 \text{ } \mu\text{s}.$$

Calculer les fréquences des deux composantes de $n(t)$ aux dates $t = 0$ et $t = t_0$.

c. Le filtre passe-bas (figure 3) possède une fréquence de coupure f_c . Ce filtre ne transmet, sans amplification ni atténuation, que les signaux sinusoïdaux dont la fréquence est inférieure à f_c . Donner l'expression de son signal de sortie $v(t)$.

d. On note f_b la fréquence du signal $v(t)$.

Montrer que f_b est une fonction de l'altitude z .

5. Montrer que l'équation [1] trouvée à la question 1.4.d. équivaut à : $f_b = \tau \frac{df_e(t)}{dt}$.

6. Sachant que la fréquence $f_e(t)$ dépend d'une tension de commande $m(t)$ selon la relation : $f_e(t) = f_0 + \alpha m(t)$, avec $\alpha = 30.10^6 \text{ Hz/V}$ et $f = f_0 = 4240 \text{ MHz}$, à $t = 0$.

Déterminer la transmittance de Laplace du bloc dont la grandeur d'entrée est $M(p) = \mathcal{L}[m(t)]$ et dont la grandeur de sortie est $F_b(p) = \mathcal{L}[f_b(t)]$.

7. En pratique, la fréquence f_0 et l'excursion en fréquence δf sont constantes ; en revanche, un asservissement régule la fréquence f_b et ajuste pour cela la durée t_0 de façon qu'en régime permanent, l'équation [1] soit vérifiée.

Montrer que, dans ces conditions, si f_b est fixé, la durée t_0 est une fonction de l'altitude z . Conclure physiquement.

II. Modélisation de la boucle d'asservissement de la fréquence f

Le schéma synoptique de cette boucle est donné à la figure 4.

Le récepteur et l'oscillateur contrôlé en tension qui délivre le signal $s(t)$ de fréquence $f_e(t)$ ont été étudiés dans la première partie. Le discriminateur est étudié plus loin.

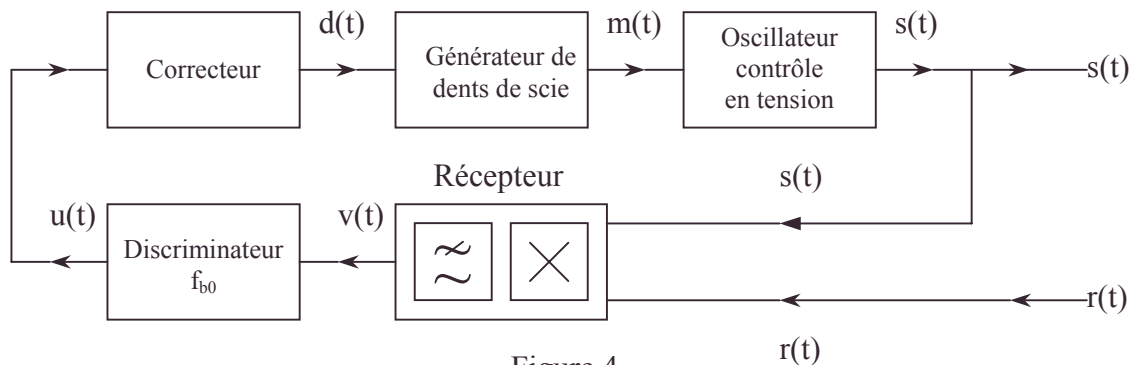


Figure 4

1. Etude du correcteur et du générateur de dents de scie

Le correcteur et le générateur de dents de scie sont tous deux construits selon le schéma de principe de la figure 5.

L'amplificateur opérationnel de chacun de ces deux dispositifs est supposé parfait (les imperfections dues aux courants et tensions de décalage étant limitées par le bouclage du système).

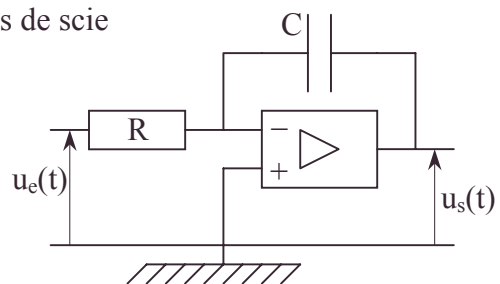


Figure 5

a. Etablir l'expression de la transmittance

de Laplace $H(p) = \frac{U_s(p)}{U_e(p)}$.

b. Pour le correcteur, on prend : $R = 100\text{k}\Omega$; $C = 2,2\mu\text{F}$.

Calculer numériquement la transmittance $I(p) = \frac{D(p)}{U(p)}$ de ce correcteur dont la grandeur d'entrée est $u(t)$ et dont la grandeur de sortie est $d(t)$. Ce correcteur est de quel type ?

c. Pour le générateur de dents de scie, on prend $R = 10\text{k}\Omega$; $C = 10\text{nF}$.

Calculer numériquement sa transmittance de Laplace $G(p) = \frac{M(p)}{D(p)}$.

2. Etude du discriminateur

Le schéma du discriminateur est donné à la figure 7.

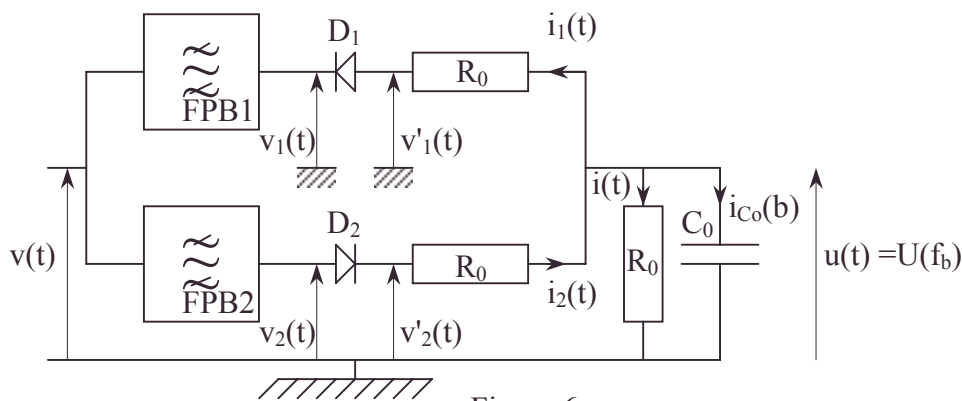


Figure 6

Les diodes sont supposées parfaites et la constante de temps R_0C_0 est suffisamment grande par rapport à la fréquence de $v(t)$ pour que la tension $u(t)$ reste constante et égale à $U(f_b)$ lorsque la fréquence de $v(t)$ reste constante et égale à f_b .

a. Le schéma commun des filtres passe-bande PFB1 et PFB2 est donné à la figure 7. Dans ce schéma, l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

Etablir, en régime harmonique, la transmittance complexe $\frac{V_s}{V_e}$ et la mettre sous la

forme : $\frac{V_s}{V_e} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

b. Toutes les capacités sont égales à $1,00\text{nF}$.

Pour le filtre FPB1, on a : $R_1 = 39,2\text{ k}\Omega$, $R_2 = 698\text{ }\Omega$, $R_3 = 53,6\text{ k}\Omega$.

Pour le filtre FPB2, on a : $R_0 = 44,2\text{ k}\Omega$, $R_2 = 6549\text{ }\Omega$, $R_3 = 88,7\text{ k}\Omega$.

Calculer les valeurs numériques des paramètres A_{01} , Q_{01} , ω_{01} du filtre FPB et les valeurs numériques A_{02} , Q_{02} , ω_{02} du filtre FPB2.

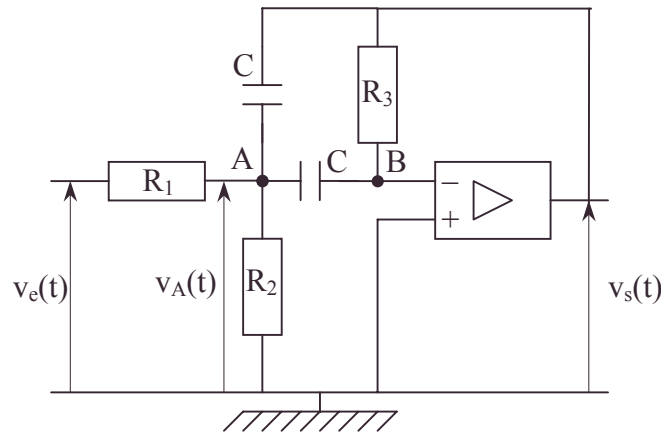


Figure 7

c. L'amplitude de la tension sinusoïdale $v(t) = V_m \cos(2\pi f_b t)$ de la figure 6 est constante : $V_m = 10 \text{ V}$; sa fréquence f_b est variable.

Pour la valeur particulière $f_b = f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi}$ définie à la question II.2.b., calculer l'amplitude $V_{1m}(\omega_{01})$ de la tension $v_1(t)$ et l'amplitude $V_{2m}(\omega_{01})$ de la tension $v_2(t)$. Calculer de même les amplitudes respectives $V_{1m}(\omega_{02})$ et $V_{2m}(\omega_{02})$ des tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ pour la fréquence $f_b = f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi}$.

d. On se place à la fréquence $f_b = f_{01}$ et on fait l'hypothèse que les tensions $v'_1(t)$ et $v'_2(t)$ de la figure 6 sont des tensions redressées "monoalternance". Compte tenu des sens différents des diodes D_1 et D_2 , dessiner l'allure de ces tensions $v'_1(t)$ et $v'_2(t)$ et calculer les valeurs moyennes respectives $V'_{1moy}(\omega_{01})$ et $V'_{2moy}(\omega_{01})$ de ces tensions.

Etablir et justifier la relation entre les valeurs moyennes respectives $I_{1moy}(\omega_{01})$, $I_{2moy}(\omega_{01})$ et $I_{moy}(\omega_{01})$ des intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$ représentées sur la figure 6.

En supposant que la tension $u(t)$ reste constante et égale à $U(\omega_{01})$, calculer $U(\omega_{01})$.

Vérifier que $|U(\omega_{01})| \ll V_{1m}(\omega_{01})$ et $|U(\omega_{01})| \ll V_{2m}(\omega_{01})$.

Et conclure quant à l'hypothèse portant sur la nature des tensions $v'_1(t)$ et $v'_2(t)$.

e. On se place à la fréquence $f_b = f_{02}$.

Calculer, comme dans la question précédente, la valeur $U(f_{02})$ de la tension $u(t)$. Conclure.

f. On suppose que, lorsque la fréquence f_b de $v(t)$ varie entre f_{01} et f_{02} , la variation de tension de la tension de sortie U en fonction de f_b est linéaire.

En déduire que le modèle retenu pour la fonction $U(f_b)$ est de la forme $U = \beta(f_{b0} - f_b)$ et calculer les valeurs numériques de β et de f_{b0} .

Pour la suite du problème, on prendra $\beta = 0,24 \text{ mV/Hz}$ et $f_{b0} = 25 \text{ kHz}$.

g. Montrer que, compte tenu de la modélisation précédente, le discriminateur peut être décrit par le schéma-bloc de la figure 8.

Calculer la valeur numérique de la transmittance K de ce schéma-bloc

h. En utilisant les résultats des questions I.6., II.1.b., II.1.c. et II.2.g., montrer que la

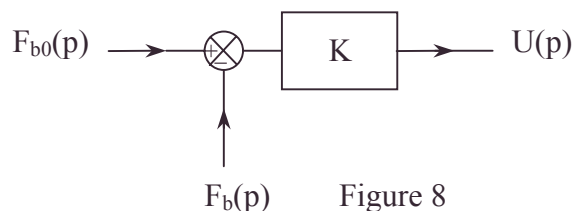
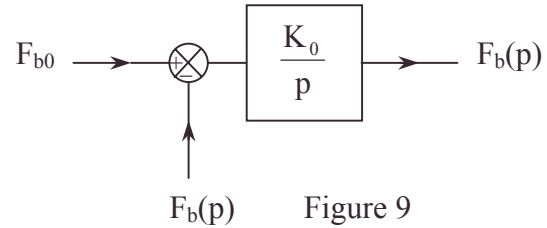


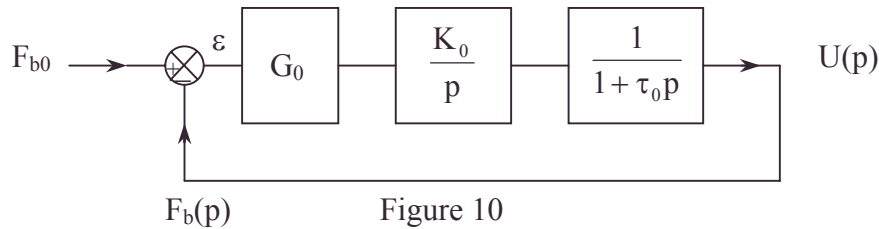
Figure 8

boucle de régulation peut être décrite par le schéma-bloc de la figure 9. Calculer la valeur numérique de la constante K de la figure 9 avec les valeurs numériques des parties I. et II.



III. Fonctionnement de la boucle d'asservissement de la fréquence F_b .

Dans cette partie, on considérera que la boucle d'asservissement de la fréquence peut être décrite par le schéma-bloc de la figure 10, avec $K_0 = 650 \text{ rad/s}$ et $\tau_0 = 0,50 \text{ ms}$.



Ce schéma est obtenu à partir de celui de la figure 9 en lui adjoignant :

- un amplificateur dont le coefficient d'amplification est G_0 ;
- un bloc de transmittance $\frac{1}{1 + \tau_0 p}$, pour tenir compte des éléments R_0 et C_0 de la

figure 6.

1. Etude de l'asservissement

- a. Calculer la transmittance $T(p) = \frac{F_b(p)}{\varepsilon(p)}$ de la chaîne directe.

En déduire l'expression de la transmittance $\frac{\varepsilon(p)}{F_{b0}(p)}$ en fonction de G_0 , K_0 , τ_0 et p .

b. Déduire de cette dernière expression l'équation différentielle qui lie la grandeur $\varepsilon(\tau)$, originale de $\varepsilon(p)$, à la fréquence de consigne $f_{b0}(t)$, originale de $F_{b0}(p)$.

c. Sachant que f_{b0} est constante, calculer l'erreur statique ε_0 définie par : $\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)]$. En déduire la valeur de l'erreur statique de la mesure de l'altitude z lorsque z reste constante.

Quel est, sur la figure 4, l'élément responsable de ce résultat ?

2. Etude de la stabilité

- a. Calculer la transmittance complexe $T(j\omega) = \frac{F_b}{\varepsilon}$ valable en régime harmonique,

en fonction de G_0 , K_0 , τ_0 et ω .

b. En supposant que $G_0 K_0 \tau_0 = 1$, tracer les courbes asymptotiques des diagrammes de Bode : $20 \log T(j\omega)$ et $\arg T(j\omega)$.

Esquisser les courbes non asymptotiques.

- c. Pour quelle pulsation l'argument de $T(j\omega)$ est-il égal à -135° ?

En déduire la valeur limite du coefficient G_0 assurant une marge de phase supérieure à 45° .

Sachant que la constante K_0 dépend de l'altitude z de l'avion selon la loi $K_0 = bz$, quel est l'inconvénient du dispositif ?

Pour y remédier, le constructeur utilise un amplificateur non linéaire dont il fait varier le point de repos en fonction de z . Pouvez-vous justifier ce procédé et le préciser ?

BTS ; Durée : 3h.

Correction

1.1. Pour $0 < t < t_0$ modulo t_0 , la fonction affine s'écrit : $f_e(t) = f_0 + \delta f \frac{t}{t_0}$.

2. Si $\frac{d\theta}{dt} > 0$, $f_e = f_0 + \delta f \frac{t}{t_0} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = 2\pi \left(f_0 t + \frac{1}{2} \delta f \frac{t^2}{t_0} \right)$.

Si $\frac{d\theta}{dt} < 0$, $\theta(t) = -2\pi \left(f_0 t + \frac{1}{2} \delta f \frac{t^2}{t_0} \right)$; or pour $t > 0$, $\theta(t) < 0$.

Ce cas est à écarter.

$$s = A \cos 2\pi \left(f_0 t + \frac{1}{2} \delta f \frac{t^2}{t_0} \right).$$

3.a. $r(t) = aA \cos 2\pi \left(f_0(t - \tau) + \frac{1}{2} \delta f \frac{(t - \tau)^2}{t_0} \right)$.

b.α. a est le coefficient de réflexion de $s(t)$ sur le sol.

β. $\tau = \frac{2z}{c}$, durée nécessaire à la propagation du signal électromagnétique à l'aller

et au retour.

c. A.N. : $\tau = 2.10^{-6} \text{ s}$.

4.a. $n(t) = kaA^2 \cos \left(2\pi f_0 t + \frac{1}{2} \delta f \frac{t^2}{t_0} \right) \cos 2\pi \left(f_0(t - \tau) + \frac{1}{2} \delta f \frac{(t - \tau)^2}{t_0} \right)$.

$$n(t) = \frac{1}{2} kaA^2 \left(\cos 2\pi \left(f_0(2t - \tau) + \frac{1}{2} \delta f \frac{t^2 + (t - \tau)^2}{t_0} \right) + \cos 2\pi \left(f_0 \tau + \frac{1}{2} \delta f \frac{\tau(2t - \tau)}{t_0} \right) \right)$$

car $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$.

on a 2 signaux sinusoïdaux de fréquences :

$$f_1 = 2f_0 + \delta f \frac{(2t - \tau)}{t_0}; f_2 = \delta f \frac{\tau}{t_0} \text{ telles que } f_1 + f_2 = 2 \left(f_0 + \delta f \frac{t}{t_0} \right);$$

f_2 est la basse fréquence car indépendante de t d'après l'énoncé.

b. A.N. : $t = 0$, $f_{10} = 8480 \text{ MHz}$; $f_2 = 25,5 \text{ kHz}$.

$t = t_0$, $f_{1t_0} = 8726 \text{ MHz}$; $f_2 = 25,5 \text{ kHz}$.

c. Le filtre passe-bas élimine f_1 car $f_c \ll f_1 \forall t$.

$$v(t) = \frac{1}{2} kaA^2 \cos 2\pi \left(f_0 \tau + \delta f \frac{(2t - \tau)}{t_0} \right).$$

d. [1] : $f_b = f_2 = 2\delta f \frac{z}{ct_0}$ est proportionnelle à l'altitude.

5. $\frac{df_e}{dt} = \frac{\delta f}{t_0}$; on a bien $f_2 = f_b = \tau \frac{df_e}{dt} = \frac{2z}{c} \frac{df_e}{dt} = \frac{2z}{ct_0} \delta f$.

6. $\frac{df_e}{dt} = \alpha \frac{dm}{dt}$; les calculs faits avec $\alpha \frac{dm}{dt} = \frac{\delta f}{t_0}$ se reprennent et donnent le même

résultat car il s'agit de trouver un terme correctif proportionnel à τ supposé petit devant t_0 .

$f_b = \tau \frac{df_e}{dt}$ devient $f_b = \alpha \tau \frac{dm}{dt}$, d'où en intégrant par parties :

$$F_b(p) = \alpha \tau \int_0^{+\infty} \frac{dm}{dt} e^{-pt} dt = \alpha \tau \left(\left(m e^{-pt} \right)_0^{\infty} - p \int_0^t m(t) e^{-pt} dt \right).$$

$F_b(p) = \alpha \tau p M(p)$ car $m = 0$ pour $t = 0$.

$$\frac{M(p)}{\boxed{T(p)}} = \frac{F_b(p)}{\quad} \quad \text{s'écrit avec } T(p) = \alpha \tau p.$$

7. Le maintien de $f_b = \frac{2z}{c} \frac{df_e}{dt}$;

si f_b est constante, $\frac{df_e}{dt}$ aussi : $\frac{df_e}{dt} = \frac{\delta f}{t_0}$ d'où $t_0 = \frac{2\delta f}{c f_b} z$.

L'asservissement permet de passer de l'altitude z à la période t_0 et inversement déduire z de t_0 .

II.1.a. On a un montage intégrateur.

Le théorème de Millman appliqué à la borne inverseuse s'écrit :

$$0 = \frac{\underline{u}_e}{R} + \underline{u}_s jC\omega \text{ d'où } \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = -\frac{1}{jRC\omega} \text{ en notation complexe.}$$

En notation de Laplace où $p = j\omega$, $H(p) = \frac{U_s(p)}{U_e(p)} = -\frac{1}{RCp}$.

b. A.N. : $R = 10^5 \Omega$; $C = 2,2 \mu F$; $I(p) = -\frac{4,55}{p}$; on a un correcteur intégrateur.

c. A.N. : $R = 10^4 \Omega$; $C = 10 nF$; $G(p) = -\frac{10^4}{p}$ opérateur de même type.

2. Appliquons le théorème de Millman en A (figure 7) :

$$\underline{V}_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega \right) = \frac{\underline{V}_e}{R_1} + jC\omega \underline{V}_s.$$

Appliquons le théorème de Millman en B :

$$\frac{\underline{V}_s}{R_3} + jC\omega \underline{V}_A = 0 ; \text{ on en tire } \frac{\underline{V}_s}{R_3} = -\frac{jC\omega \left(\frac{\underline{V}_e}{R_1} + jC\omega \underline{V}_s \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega},$$

$$\text{ou encore : } \underline{V}_s \left(\frac{1}{jC\omega R_3} + \frac{jC\omega}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega} \right) = -\frac{\underline{V}_e}{R_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2j\omega \right)}.$$

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{1}{R_1} \frac{1}{jC\omega + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega \right) \frac{1}{jC\omega R_3}};$$

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{1}{R_1} \frac{1}{\frac{2}{R_3} + j \left(C\omega + \frac{R_1 + R_2}{jR_1 R_2 R_3 C\omega} \right)} = -\frac{R_3}{2R_1} \frac{1}{1 + j \left(\frac{R_3}{2} C\omega - \frac{(R_1 + R_2)}{2C\omega R_1 R_2} \right)}$$

de la forme demandée avec $A_0 = -\frac{R_3}{2R_1}$.

$$\frac{Q_0}{\omega_0} = \frac{R_3 C}{2} \text{ et } Q_0 \omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{2C R_1 R_2} \text{ soit } Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 R_2}}; \omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3}}.$$

$$\text{b. A.N. : } A_{0_1} = -0,684; Q_{0_1} = 4,42; \omega_{0_1} = 1,65 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1};$$

$$A_{0_2} = -1,00; Q_{0_2} = 6,39; \omega_{0_2} = 1,44 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{c. } \underline{V}_1 = \frac{A_{0_1} \underline{V}}{1 + jQ_{0_1} \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)}; \underline{V}_2 = \frac{A_{0_2} \underline{V}}{1 + jQ_{0_2} \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)};$$

$$V_{1m}(\omega) = \frac{|A_{0_1}| V_m}{\sqrt{1 + Q_{0_1}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega} \right)^2}}; V_{2m}(\omega) = \frac{|A_{0_2}| V_m}{\sqrt{1 + Q_{0_2}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega} \right)^2}}.$$

$$\bullet \text{ pour } \omega = \omega_{0_1}, V_{1m}(\omega_{0_1}) = |A_{0_1}| V_m; \text{ A.N. : } V_{1m}(\omega_{0_1}) = 6,84 \text{ V}.$$

$$V_{2m}(\omega_{0_1}) = \frac{|A_{0_2}| V_m}{\sqrt{1 + Q_{0_2}^2 \left(\frac{\omega_{0_1}}{\omega_{0_2}} - \frac{\omega_{0_2}}{\omega_{0_1}} \right)^2}}; \text{ A.N. : } V_{2m}(\omega_{0_1}) = 5,02 \text{ V}.$$

$$\bullet \text{ pour } \omega = \omega_{0_2}; V_{1m}(\omega_{0_2}) = \frac{|A_{0_1}| V_m}{\sqrt{1 + Q_{0_1}^2 \left(\frac{\omega_{0_2}}{\omega_{0_1}} - \frac{\omega_{0_1}}{\omega_{0_2}} \right)^2}}; \text{ A.N. : } V_{1m}(\omega_{0_2}) = 4,40 \text{ V}.$$

$$V_{2m}(\omega_{0_2}) = |A_{0_2}| V_m; \text{ A.N. : } V_{2m}(\omega_{0_2}) = 10 \text{ V}.$$

d.α. Pour avoir $i_1 > 0$ soit la diode D_1 passante et V_1' une tension redressée monoalternance, celle-ci ne peut être positive, on a donc :

$$V_{1\text{moy}}'(\omega_{0_1}) = -\frac{V_{1m}}{\pi}(\omega_{0_1}); \text{ A.N. : } V_{1\text{moy}}'(\omega_{0_1}) = -2,18 \text{ V}.$$

β. Pour avoir $i_2 > 0$ soit la diode D_2 passante et V_2' une tension redressée monoalternance, celle-ci ne peut être que positive, on a donc :

$$V_{2\text{moy}}^2(\omega_{0_1}) = \frac{V_{2m}(\omega_{0_1})}{\pi}; \text{ A.N. : } V_{2\text{moy}}^2(\omega_{0_1}) = 1,60 \text{ V}.$$

γ. La loi des nœuds au point commun des 3 résistances R_0 s'écrit :

• *tension redressée monoalternance*

Automatique

$$i(t) = i_2(t) - i_1(t) - i_{co}(t) ;$$

$$\text{or } I_{co\text{ moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T C_0 \frac{du}{dt} dt = 0 \Rightarrow I_{\text{moy}} = I_{2\text{ moy}} - I_{1\text{ moy}} .$$

$$\delta. u = R_0 i \Rightarrow u = R_0 (i_2 - i_1 - i_{co}) ;$$

$$\text{or } i_1 = \frac{u - v_1'}{R_0} ; i_2 = \frac{v_2' - u}{R_0} \Rightarrow u = R_0 \left(\frac{v_2'}{R_0} - \frac{u}{R_0} - \frac{u}{R_0} + \frac{v_1'}{R_0} - i_{co} \right) ;$$

$$3u = v_2' + v_1' - R_0 i_{co} \text{ et en moyenne } 3U(\omega_{0_1}) = V_{2\text{ moy}}'(\omega_{0_1}) + V_{1\text{ moy}}'(\omega_{0_1}) .$$

$$\text{A.N. : } U(\omega_{0_1}) = -0,19 \text{ V} .$$

$$\epsilon. \text{ On vérifie : } U(\omega_{0_1}) \ll V_{1m}(\omega_{0_1}) \text{ car } 0,19 \ll 6,84 ;$$

$$U(\omega_{0_1}) \ll V_{2m}(\omega_{0_1}) \text{ car } 0,19 \ll 5,02 .$$

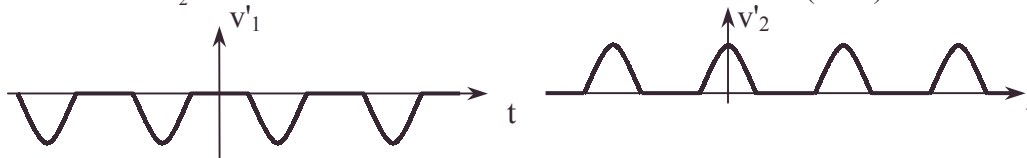
On peut donc considérer pour la conduction des diodes $u \neq 0$.

Donc D_1 passante pour $v_1 < 0$ et bloquée pour $v_1 > 0$;

v_1' est bien une tension redressée monoalternance (> 0) ;

de même, D_2 passante pour $v_2 > 0$ et bloquée pour $v_2 < 0$;

v_2' est bien une tension redressée monoalternance (> 0).



$$\text{e. On remplace } \omega_{0_1} \text{ par } \omega_{0_2} : 3U(\omega_{0_2}) = V_{2\text{ moy}}'(\omega_{0_2}) + V_{1\text{ moy}}'(\omega_{0_2}) .$$

A.N.: $U(\omega_{0_2}) = 0,59 \text{ V}$; on vérifie $0,59 \ll 6,84$ et $0,59 \ll 5,02$; on arrive aux mêmes conclusions avec une moindre précision.

$$\text{f. On vérifie : } U(f_b) = U(f_{0_2}) + \frac{f_{0_2} - f_b}{f_{0_1} - f_{0_2}} (U(f_{0_2}) - U(f_{0_1})) ; \text{ on a une droite.}$$

$$\text{A.N. : } U(f_b) = 6,01 - 0,236 \cdot 10^{-3} f_b . \text{ La pente est } \beta = 0,236 \cdot 10^{-3} .$$

$$U(f_b) = 0 = 6,01 - 0,236 \cdot 10^{-3} f_{b_0} \Rightarrow \text{A.N. : } f_{b_0} = 25,5 \text{ kHz} .$$

$$\text{En soustrayant } U(f_b) = \beta(f_{b_0} - f_b) .$$

g. En passant à la notation de Laplace ; le soustracteur donne :

$$U(p) = K(F_{b_0}(p) - F_b(p)) \text{ or } U(p) = \beta(F_{b_0}(p) - F_b(p)) \Rightarrow K = \beta ;$$

$$\text{A.N. : } K = 0,24 \text{ mV/Hz} .$$

$$\text{h. On sait que } F_b(p) = \alpha \tau p M(p) \text{ avec } M(p) = D(p) G(p) = I(p) G(p) U(p)$$

$$\text{soit } F_p(p) = \alpha \cdot \tau \cdot p \left(-\frac{4,55}{p} \right) \left(-\frac{10^4}{p} \right) \cdot 0,24 \cdot 10^{-3} (F_{b_0}(p) - F_b(p)) .$$

$$\text{Or d'après le soustracteur de la figure 9 : } F_b(p) = \frac{K_0}{p} (F_{b_0}(p) - F_{b_0}(p)) .$$

L'identification est possible ; le modèle est acceptable.

$$K_0 = \alpha \tau I(p) G(p) K ; \text{ A.N. : } K_0 = 655 \text{ rad.s}^{-1} .$$

$$\text{III.1.a.}\alpha. T(p) = G_0 \frac{K_0}{p(1 + \tau_0 p)} .$$

$$\beta. \varepsilon(p) = F_{b_0}(p) - F_b(p) = F_{b_0}(p) - T(p) \varepsilon(p) \Rightarrow \varepsilon(p)(1 + T(p)) = F_{b_0}(p) .$$

• tension redressée monoalternance

$$\frac{\varepsilon(p)}{F_{b_0}(p)} = \frac{1}{1+T(p)} = \frac{p(1+\tau_0 p)}{G_0 K_0 + p(1+\tau_0 p)} \Rightarrow \varepsilon(p)(G_0 K_0 + p + \tau_0 p^2) = F_{b_0}(p)(p + \tau_0 p^2)$$

b. p correspond à une dérivation quand p est en produit, d'où l'équation différentielle temporelle :

$$\tau_0 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} + G_0 K_0 \varepsilon = \tau_0 \frac{d^2 f_{b_0}}{dt^2} + \frac{df_{b_0}}{dt}.$$

$$\text{c.}\alpha. f_{b_0} = \text{cste} \Rightarrow \frac{df_{b_0}}{dt} = \frac{d^2 f_{b_0}}{dt^2} = 0,$$

l'amortissement de ε solution de $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{\tau_0} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{G_0 K_0}{\tau_0} \varepsilon = 0$ donne $\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$.

$$\beta. f_b = \frac{2z}{c} \frac{df_e}{dt} \text{ avec } \frac{df_e}{dt} = \frac{\delta f}{t_0} \text{ constant ;}$$

$$\varepsilon_0 = f_{b_0} - f_b = 0 = \frac{2}{c}(z_0 - z) \frac{df_e}{dt} \Rightarrow z_0 - z = 0, \text{ soit une erreur statique nulle sur } z.$$

γ . Le correcteur joue son rôle mais le générateur de dents de scie ayant même transmittance joue un rôle analogue et de valeur numérique plus de 1000 fois plus forte. C'est donc lui l'élément capital ; de fait, il y a 2 correcteurs.

$$\text{2.a. On remplace } p = j\omega ; T(j\omega) = \frac{G_0 K_0}{j\omega(1+j\omega\tau_0)} = \frac{G_0 K_0 \tau_0}{j\omega\tau_0(1+j\omega\tau_0)}.$$

$$\text{b.}\alpha. G_0 K_0 \tau_0 = 1 ; T(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_0(1+j\omega\tau_0)} ;$$

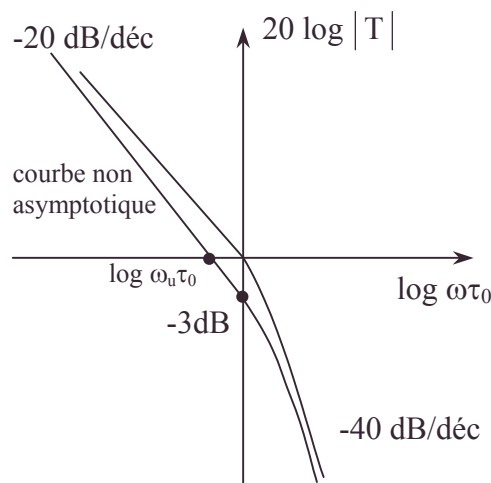
$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\omega\tau_0 \sqrt{1+\omega^2\tau_0^2}} ;$$

$$20 \log |T(j\omega)| = -20 \log \omega\tau_0 - 10 \log(1+(\omega\tau_0)^2) ; \arg T(j\omega) = -\arg j\omega\tau_0 - \arg(1+j\omega\tau_0).$$

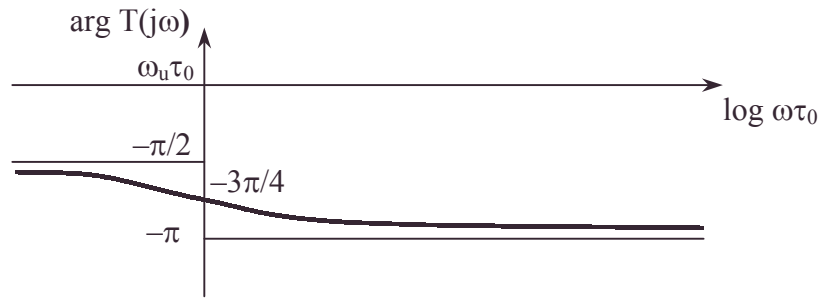
$$\omega \rightarrow 0 \quad 20 \log |T(j\omega)| \sim -20 \log \omega\tau_0.$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad 20 \log |T(j\omega)| \sim -40 \log \omega\tau_0.$$

soit ω_u tel que $|T(j\omega_u)| = 1$, sur le diagramme de Bode réel.



$$\beta. \arg T(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \omega\tau_0 ; \omega\tau_0 = 1, \arg T = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} = -135^\circ.$$



c. $\arg T(j\omega) = -135^\circ = -\frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$ pour $\omega = \frac{1}{\tau_0}$. (cf. $\log \omega\tau_0 = 0$).

Soit pour ω_u tel que $|T(j\omega)| = 1 = \frac{G_0 K_0 \tau_0}{\omega_u \tau_0 \sqrt{1 + \omega_u^2 \tau_0^2}}$.

La marge de phase M_φ est définie par $M_\varphi = \arg T(j\omega_u) - (-\pi)$.

D'après la figure précédente : $M_\varphi \geq 45^\circ$ soit pour $\arg T(j\omega) \geq -\frac{3\pi}{4}$ quand $\omega_u \tau_0 \leq 1$.

Le cas limite $G_{0 \text{ limite}}$ est pour $\omega_u = \frac{1}{\tau_0}$,

soit $\frac{|G_{0 \text{ lim}} K_0 \tau_0|}{1 \cdot \sqrt{2}} = 1$ avec $M_{\varphi \text{ lim}} = 45^\circ$; $G_{0 \text{ lim}} = \frac{\sqrt{2}}{K_0 \tau_0}$, A.N. : $G_{0 \text{ lim}} = 4,35$.

Ainsi $M_\varphi > 45^\circ$ pour $\omega < \frac{1}{\tau_0}$ pour $G_0 > 4,35$ vu les variations étudiées en b.

si $K_0 = bz$: $G_0 > \frac{\sqrt{2}}{bz\tau_0}$ est assuré si $z > \frac{\sqrt{2}}{G_0 b \tau_0}$.

Il faut augmenter G_0 quand z diminue.

Le constructeur peut donc utiliser un amplificateur non linéaire dont il fait varier le point de repos en fonction de z afin de choisir G_0 adapté (cf. classe B).

6.3.4. Suspension pneumatique à correcteur analogique ou numérique

Transformation en Z

Introduction

Le problème porte sur l'analyse d'un système ressort-amortisseur, équipant chaque roue d'une automobile expérimentale et assurant sa suspension.

La liaison élastique entre une roue et la caisse (fonction ressort) est obtenue par compression d'air dans un module de volume variable. C'est une électrovanne, commandée par un système électronique analogique ou numérique, qui injecte plus ou moins d'air dans ce module et en fait alors varier le volume ainsi que la hauteur de la caisse au niveau de la roue. Cette hauteur peut donc être asservie à une consigne.

On se limite à l'étude de la suspension d'une seule roue, supportant une masse fictive égale à une fraction de la masse totale du véhicule.

Les parties du problème sont largement indépendantes.

Les étudiants trouveront dans le texte du problème les notions de mathématiques spécifiques nécessaires à sa résolution.

- classe B, marge de phase, suspension pneumatique

1. Modélisation d'un ressort (figure 1)

Un piston de section S comprime de l'air dans un cylindre. On note H la hauteur variable du volume d'air. Cet air est assimilé à un gaz parfait. Sa pression P , son volume V et sa masse \mathcal{M} satisfont, pour une température T que l'on supposera constante, à l'équation $PV = b_0 \mathcal{M}$. Dans cette expression, b_0 est un coefficient numérique de valeur $b_0 = 84$ lorsque \mathcal{M} est exprimée en grammes et les autres grandeurs en unités du Système International.

1. Exprimer en fonction de H et de \mathcal{M} l'intensité de la force F exercée par l'air comprimé sur la face inférieure du piston.

2. Afin de rendre les équations linéaires, on ne considérera, dans tout le problème, que de petites variations des variables \mathcal{M} et H autour de leurs valeurs moyennes \mathcal{M}_0 et H_0 . On pose à cet effet $H = H_0 + x$, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m$.

Sachant qu'une fonction $F(\mathcal{M}, H)$ admet comme développement limité au premier ordre l'expression :

$$F(\mathcal{M}, H) = F(\mathcal{M}_0, H_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{M}} \right)_0 (\mathcal{M} - \mathcal{M}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_0 (H - H_0)$$

où $\frac{\partial F}{\partial \mathcal{M}}$ et $\frac{\partial F}{\partial H}$ sont des dérivées partielles de F par rapport, respectivement, à \mathcal{M} et à

H , montrer que l'on peut écrire : $F = F_0 + b_1 m - b_2 x$.

Calculer les valeurs numériques de F_0 , b_1 et b_2 pour $\mathcal{M}_0 = 14,3$ g et $H_0 = 0,25$ m.

Ces valeurs numériques sont conservées pour toute la suite du problème.

2. Etude dynamique du système : masse du véhicule-ressort-amortisseur (Figure 2).

M_V représente la fraction de la masse du véhicule rapportée à une roue. La masse du piston et celle de l'amortisseur sont négligeables devant M_V .

L'amortisseur introduit une force \vec{f} de frottement visqueux dont la projection sur Ox a pour mesure algébrique : $f = -7,0 \cdot 10^3 \dot{x}$, expression dans laquelle \dot{x} représente la dérivée par rapport au temps de la variable x . Comme H_0 est une constante, \dot{x} est donc la vitesse du piston ; \vec{f} est opposée au mouvement.

On note P_a la pression atmosphérique qui exerce une force \vec{F}_1 sur la partie supérieure du piston. On admettra que l'aire de la surface utile de la partie supérieure du piston est égale à S .

1. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique :

$M_V \ddot{x} =$ somme des projections sur Ox des forces appliquées à la partie mobile, écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de cette partie mobile.

2. $M_V = 200$ kg ; $P_a = 10^5$ N.m⁻² ;

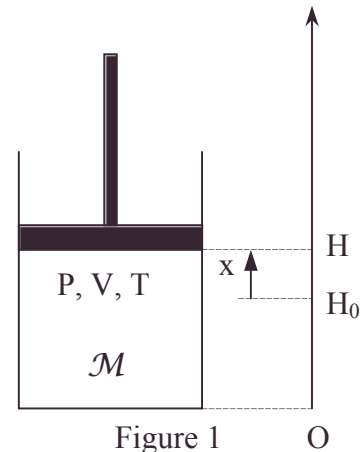


Figure 1

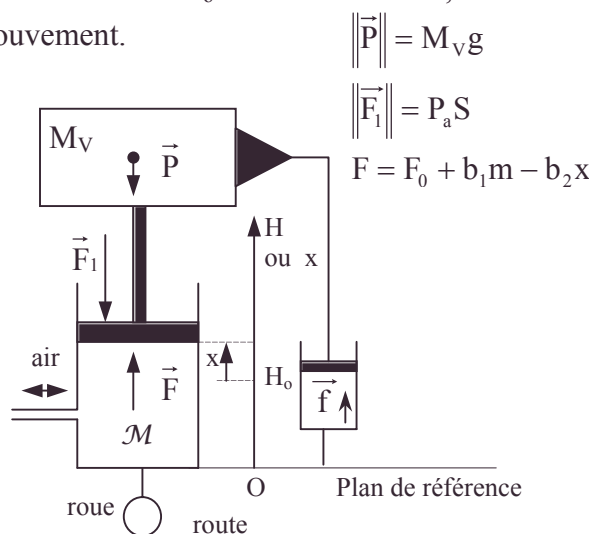


Figure 2

• amortisseur, analogique, consigne, développement au premier ordre ou plus, force de frottement visqueux, masse du véhicule rapportée à une roue, perturbation [méthodes des]

Automatique

$$g = 10 \text{ m.s}^{-2} ; S = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2.$$

Montrer que $H = H_0$ correspond bien à la position de repos de la caisse pour $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$.

3. Montrer que l'équation différentielle reliant $x(t)$ et $m(t)$ s'écrit :

$$\ddot{x} + 35 \dot{x} + 96x = 1,68m.$$

3. Etude de l'asservissement analogique de la position de la caisse à une consigne

La masse \mathcal{M} de gaz enfermé dans le cylindre peut varier autour de \mathcal{M}_0 grâce à une électrovanne qui peut soit introduire de l'air, soit en retirer.

Un capteur fournissant à chaque instant la valeur de la position $x(t)$, celle-ci est comparée à une consigne $c(t)$. L'électrovanne ajuste alors la masse m de façon à ce que, même en présence de perturbations, x diffère le moins possible de c .

1. Transmittance du système de la figure 2

La grandeur d'entrée est la variable $m = \mathcal{M} - \mathcal{M}_0$; la grandeur de sortie est $x = H - H_0$. Ces deux grandeurs sont liées par l'équation de la question 2.3.

Etablir, en notation de Laplace, l'expression de la transmittance $T_1(p) = \frac{X(p)}{M(p)}$ dans laquelle $X(p)$ et $M(p)$ sont les transformées de Laplace respectives de $x(t)$ et $m(t)$.

Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $T_1 = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(1 - \frac{p}{p_2}\right)}$.

Donner les valeurs de λ , p_1 et p_2 .

2. Comportement en fréquence du système de la figure 2

Donner l'allure et les valeurs remarquables du diagramme de Bode pour le module de $T_1(j\omega)$.

Le domaine de fréquences que l'asservissement doit traiter ($f < 5 \text{ Hz}$) ainsi que l'étude de la stabilité du montage, montrent que l'on peut prendre pour $T_1(p)$ une expression approchée qui est celle d'un système de premier ordre.

Montrer que l'on a alors $T_1(p) = \frac{5,25 \cdot 10^{-2}}{p + 3}$. Cette expression sera utilisée dans toute la

suite du problème.

3. Système asservi à commande proportionnelle

Le système asservi comportant dans sa chaîne directe l'électrovanne et le système précédent peut être décrit par le schéma fonctionnel de la figure 3.

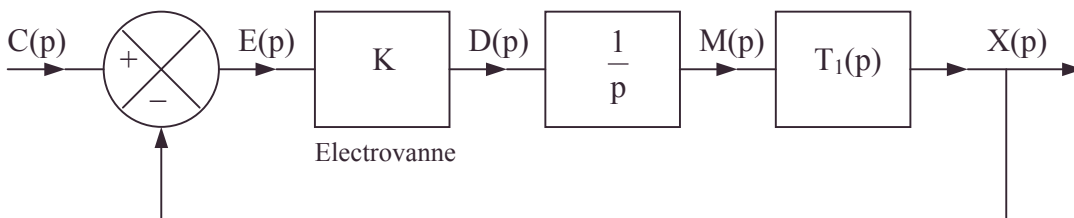


Figure 3

Dans ce schéma fonctionnel, le débit massique d'air de l'électrovanne, $d(t)$, est proportionnel au signal d'erreur $e(t)$: $d(t) = Ke(t)$, soit, en notation de Laplace, $D(p) = KE(p)$.

1. La masse d'air $m(t)$ et le débit $d(t)$ sont reliés par la relation $d(t) = \frac{dm}{dt}$:

la fonction $d(t)$ est la dérivée par rapport à t de la fonction $m(t)$. Justifier la présence du bloc fonctionnel de transmittance $\frac{1}{p}$ dans le schéma de la figure 3.

Quelle est la nature du correcteur utilisé dans la chaîne directe ?

2. Donner l'expression de la transmittance de la chaîne directe : $T_2(p) = \frac{X(p)}{E(p)}$.

3. Mettre la transmittance de la boucle fermée, $T_2'(p) = \frac{X(p)}{C(p)}$, sous la forme

$$T_2'(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\alpha}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

Calculer ω_0 et le coefficient K , relatif à l'électrovanne pour que le coefficient d'amortissement α soit égal à 0,5. Ces valeurs sont conservées dans la suite du problème.

4. Tracer l'allure du diagramme de Nyquist de la transmittance de boucle $T_2(j\omega)$ (ensemble des points N du plan complexe d'affixe $T_2(j\omega)$) pour $\alpha = 0,5$.

Pour cela on déterminera :

- La partie réelle de $T_2(j\omega)$ lorsque $\omega \rightarrow 0$;
- Le module de $T_2(j\omega)$ pour $\omega = 2,36$ rad/s ;
- $T_2(j\omega)$ pour $\omega = \omega_0$;
- $T_2(j\omega)$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

Comparer la marge de phase du système de la figure 3 à la valeur 45° .

4. Précision du système de la figure 3

On rappelle que l'erreur de position ε_p d'un système asservi à retour unitaire est égale à la valeur limite de l'erreur $e(t)$, pour t tendant vers l'infini, lorsque la consigne $c(t)$ est une fonction échelon : $c(t) = c_0 u(t)$. (Transformée de Laplace : $C(p) = \frac{c_0}{p}$).

$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$; de même l'erreur de traînage ε_T est égale à la valeur limite de $e(t)$,
 $c(t) = c_0 \cdot u(t)$

pour t tendant vers l'infini, lorsque la consigne est une rampe :

$c(t) = \dot{c}_0 t u(t)$. (Transformée de Laplace : $C(p) = \frac{\dot{c}_0}{p^2}$).

1. Montrer que l'erreur de position ε_p du système précédent est nulle.

On pourra pour cela, soit raisonner sur l'équation différentielle reliant $x(t)$ et $c(t)$ qui correspond à la transmittance $T_2(p)$; soit, après avoir calculé, en notation de Laplace, le rapport $\frac{E(p)}{C(p)}$, utiliser le théorème dit de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)$.

2. Calculer l'erreur de traînage du système précédent. On exprimera ε_T soit en fonction de \dot{c}_0 , α et ω_0 , soit en fonction de \dot{c}_0 et d'un coefficient numérique correspondant aux applications numériques précédentes.

4. Etude de l'asservissement échantillonné réglant la position de la caisse

On désire améliorer la précision de l'asservissement en obtenant une erreur de traînage nulle. Pour cela, on introduit un correcteur dans la chaîne directe et, compte tenu de la bande passante considérée, correspondant à de faibles fréquences, on choisit un correcteur numérique K .

• bloc fonctionnel, coefficient d'amortissement, correcteur, diagramme de Nyquist, erreur de traînage, erreur statique, intégrateur électronique, marge de phase, transmittance

Notations : à une fonction $f(t)$, l'opération d'échantillonnage fait correspondre la fonction $f^*(t)$. On note $F^*(p)$ la transformée de Laplace de $f^*(t)$.

On considérera que le système fonctionne de la manière suivante, qui est équivalente au fonctionnement réel :

La consigne est une fonction du temps échantillonnée $c^*(t)$, dont la période d'échantillonnage est θ .

La position $x(t)$, après échantillonnage aux mêmes instants, donne $x^*(t)$.

On obtient par différence une erreur échantillonnée $e_1^*(t)$ qui constitue l'entrée du correcteur K (figure 4).

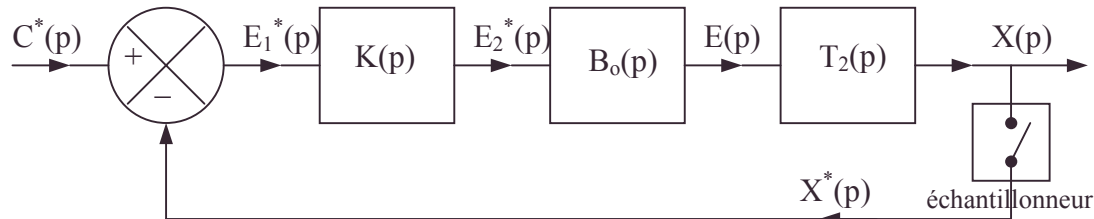


Figure 4.

Le correcteur K , de transmittance $K(p)$, élabore $e_2^*(t)$ à partir de l'entrée $e_1^*(t)$, et un bloqueur d'ordre zéro, de fonction de transfert $B_o(p) = \frac{1 - e^{-\theta p}}{p}$, donne l'erreur corrigée $e(t)$. Cette erreur $e(t)$ constitue l'entrée de l'électrovanne et donc du système dont la transmittance de la chaîne directe, $T_2(p)$, a été étudiée à la question 3.3.2.

1.1. On met le schéma fonctionnel de la fig. 4 sous la forme du schéma de la figure 5:

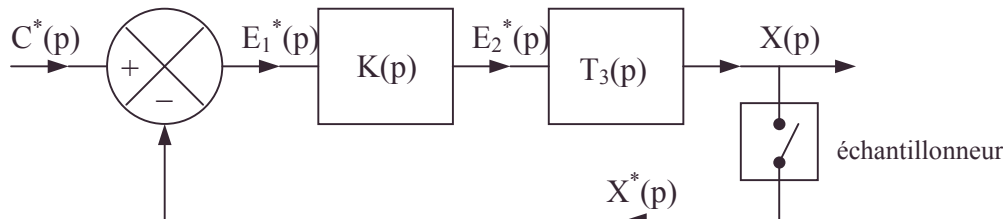


Figure 5

Etablir l'expression de la transmittance $T_3(p) = \frac{X(p)}{E_2^*(p)}$.

2. En réalité, les grandeurs échantillonnées $c^*(t)$, $e_1^*(t)$, $e_2^*(t)$ et $x^*(t)$ sont traitées numériquement et l'on note $C(z)$, $E_1(z)$, $E_2(z)$ et $X(z)$ les transformées en z des séquences correspondantes respectives. A l'aide du tableau de correspondance entre transformées de Laplace et transformées en z , établir l'expression de la transmittance en z : $T_3(z) = \frac{X(z)}{E_2(z)}$ (figure 6), que l'on mettra sous la forme $T_3(z) = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-e^{-3\theta}}$.

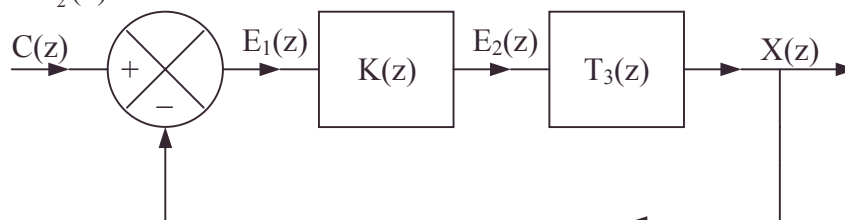


Figure 6

2. On admet que l'échantillonnage n'a pas modifié la stabilité du système, ni sa précision (avec $K(z) = 1$, on a toujours une erreur de position ϵ_p nulle et une erreur de traînage ϵ_T non nulle).

• bande passante, bloqueur d'ordre zéro, diode passante, échantillonnage [numérisation], fonction de transfert, période d'échantillonnage, théorème de la valeur finale, transmittance

On utilisera les propriétés suivantes :

Un asservissement échantillonné dont la transmittance de la chaîne directe est $T(z)$, et dont la période d'échantillonnage est θ présente les erreurs de position ε_p et de traînage ε_T données par les expressions :

$$\varepsilon_p = c_0 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + T(z)} \text{ pour une entrée en échelon d'amplitude } c_0.$$

$$\varepsilon_T = \dot{c}_0 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\theta}{(z-1)T(z)} \text{ pour une entrée en rampe de pente } \dot{c}_0.$$

Montrer qu'un correcteur de transmittance $K(z) = \frac{z-a}{z-1}$, où a est un nombre réel positif (avec $0 < a < 1$), permet d'obtenir $\varepsilon_p = 0$ et $\varepsilon_T = 0$.

3. Préciser l'algorithme qui permet au calculateur de réaliser le correcteur numérique de transmittance $K(z) = \frac{z-a}{z-1}$. Pour cela, $e_{1,n}$ et $e_{2,n}$ représentant les échantillons des

grandeurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$ à l'instant $n\theta$: $e_{1,n} = e_1(n\theta)$, $e_{2,n} = e_2(n\theta)$, exprimer $e_{2,n}$ en fonction de $e_{2,n-1}$, $e_{1,n}$, $e_{1,n-1}$, ...

$$4. \frac{z-a}{z-1} = a + (1-a) \frac{z}{z-1}. \text{ (On prend } a = 0,74).$$

En vous aidant du tableau de correspondance entre transformées, dites à quel type de correcteur analogique le correcteur K correspond.

5. Compte tenu du domaine de fréquence considéré ($f_{\max} < 5$ Hz), proposer une valeur pour la période d'échantillonnage θ .

Annexe

$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ est appelée transformée de Laplace de $f(t)$.

En C.P.G.E., on a souvent $p = j\omega$.

On rappelle que :

$$TL\left(\frac{df}{dt}\right) = pTL(f) \text{ si } f(0) = 0 \text{ et } f(\infty) \text{ finie. Conditions usuelles en physique.}$$

$$\text{Théorème de la valeur finale : } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot TL(f)].$$

Correspondance entre la transformée de Laplace d'un système, $F(p)$, et sa transformée en z : $F(z)$.

1. La correspondance est linéaire si : $F_1(p) \Leftrightarrow F_1(z)$;

$$F_2(p) \Leftrightarrow F_2(z) ;$$

alors : $\lambda F_1(p) + \mu F_2(p) \Leftrightarrow \lambda F_1(z) + \mu F_2(z)$.

2. La période d'échantillonnage étant θ , si $F(p) \Leftrightarrow F(z)$, alors:

$$e^{-\theta p} F(p) \Leftrightarrow \frac{F(z)}{z} ; \quad e^{-K\theta p} \Leftrightarrow z^{-K} ;$$

$$1 \Leftrightarrow 1 \quad \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{1}{p^2} \Leftrightarrow \frac{\theta z}{(z-1)^2} \quad \frac{1}{p+a} \Leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-a\theta}}$$

$$\frac{1}{(p+a)^2} \Leftrightarrow \frac{\theta z e^{-a\theta}}{(z-e^{-a\theta})^2} \quad \frac{a}{p(p+a)} \Leftrightarrow \frac{(1-e^{-a\theta})z}{(z-1)(z-e^{-a\theta})}$$

- analogie, correspondance entre transformées de Laplace et transformées en z , échantillonnage [numérisation], période d'échantillonnage, stabilité, théorème de la valeur finale, transformation de Laplace, transformation en z , transmittance

$$\frac{a}{p^2(p+a)} \Leftrightarrow \frac{\theta z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-a\theta})z}{a(z-1)(z-e^{-a\theta})}.$$

BTS ; Durée 4h

Corrigé

1. Modélisation d'un ressort

$$1. F = PS = \frac{b_0}{V} \mathcal{M} S ; \text{ or } H = \frac{V}{S} \Rightarrow F = b_0 \frac{\mathcal{M}}{H}.$$

$$2. H = H_0 + x ; \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m ; \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{M}} \right)_0 = \frac{b_0}{H_0} ; \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_0 = -\frac{b_0 \mathcal{M}_0}{H_0^2} ;$$

$$\text{d'où } F = F_0 + b_1 m - b_2 x \text{ avec } F_0 = b_0 \frac{\mathcal{M}_0}{H_0} ; b_1 = \frac{b_0}{H_0} ; b_2 = \frac{b_0 \mathcal{M}_0}{H_0^2}.$$

- On donnera les grandeurs dans le Système International.

$$\text{A.N. : } \mathcal{M}_0 = 1,43 \cdot 10^{-2} \text{ kg} ; H_0 = 0,25 \text{ m} ; b_0 = 84 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1} ; F_0 = 4805 \text{ N} ;$$

$$b_1 = 336 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-2} ; b_2 = 19219 \text{ N/m}.$$

2. Etude dynamique du système

$$1. M_v \ddot{x} = F - F_1 - P + f \text{ soit } M_v \ddot{x} = F_0 + b_1 m - b_2 x - P_a S - M_v g - h \dot{x},$$

$$\text{avec } h = 7 \cdot 10^3 \text{ N.s.m}^{-1} \text{ d'où : } M_v \ddot{x} + h \dot{x} + b_2 x = F_0 + b_1 m - P_a S - M_v g.$$

$$2. H = H_0 ; \text{ or à l'équilibre } F_0 - P_a S - M_v g = 0,$$

$$\text{et } x \equiv 0, \ddot{x} \equiv 0, \dot{x} \equiv 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_0.$$

$$3. \ddot{x} + \frac{h}{M_v} \dot{x} + \frac{b_2}{M_v} x = \frac{b_1 m}{M_v} ; \text{ AN : or } \ddot{x} + 35 \dot{x} + 96 x = 1,68 m ; \text{ d'où par identification :}$$

$$\frac{h}{M_v} = 35 \text{ s}^{-1} ; \frac{b_2}{M_v} = 96 \text{ s}^{-2} ; \frac{b_1}{M_v} = 1,68 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} = 1,68 \text{ m.s}^{-2} \cdot \text{g}^{-1}.$$

3. Etude de l'asservissement analogique

$x(t)$ est comparé à $c(t)$.

Intégrons par parties : $TL(f) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ définit la transformée de Laplace de f .

$$TL\left(\frac{df}{dt}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-pt} dt = \left[f e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f e^{-pt} dt.$$

Avec des conditions initiales $f(0) = 0$ et une régularité de fonction physique telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f e^{-pt} = 0, \text{ on trouve } TL\left(\frac{df}{dt}\right) = p TL(f).$$

1.a. Appliquons l'opérateur TL à 2.3.

$$TL\left(\ddot{x} + \frac{h}{M_v} \dot{x} + \frac{b_2}{M_v} x = \frac{b_1 m}{M_v}\right) : \left[p^2 + \frac{h}{M_v} p + \frac{b_2}{M_v} \right] X(p) = \frac{b_1}{M_v} M(p) ;$$

$$T_1 = \frac{X(p)}{M(p)} = \frac{\frac{b_1}{M_v}}{p^2 + \frac{h}{M_v} p + \frac{b_2}{M_v}}.$$

- P.F.D., période d'échantillonnage, système international d'unités, TL (dérivée)

b. $p^2 + \frac{h}{M_V} p + \frac{b_2}{M_V} = (p - p_1)(p - p_2)$ avec :

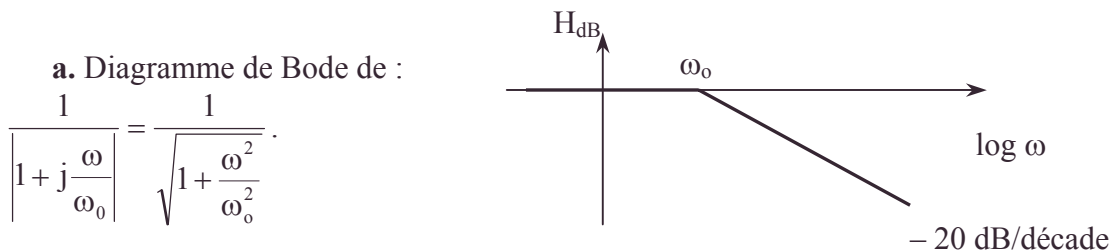
$$p_{1,2} = \frac{-h}{2M_V} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4M_V^2} - \frac{b_2}{M_V}} ; \text{AN : } \Delta = \frac{h^2}{4M_V^2} - \frac{b_2}{M_V} = 841 ; p_1 = -32 ; p_2 = -3.$$

On a 2 pôles réels négatifs.

$$T_1 = \frac{\frac{b_1}{M_V}}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{\frac{b_1}{M_V p_1 p_2}}{\left(\frac{p}{p_1} - 1\right)\left(\frac{p}{p_2} - 1\right)} = \frac{\frac{b_1}{b_2}}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(1 - \frac{p}{p_2}\right)} \text{ avec } \lambda = \frac{b_1}{b_2} ;$$

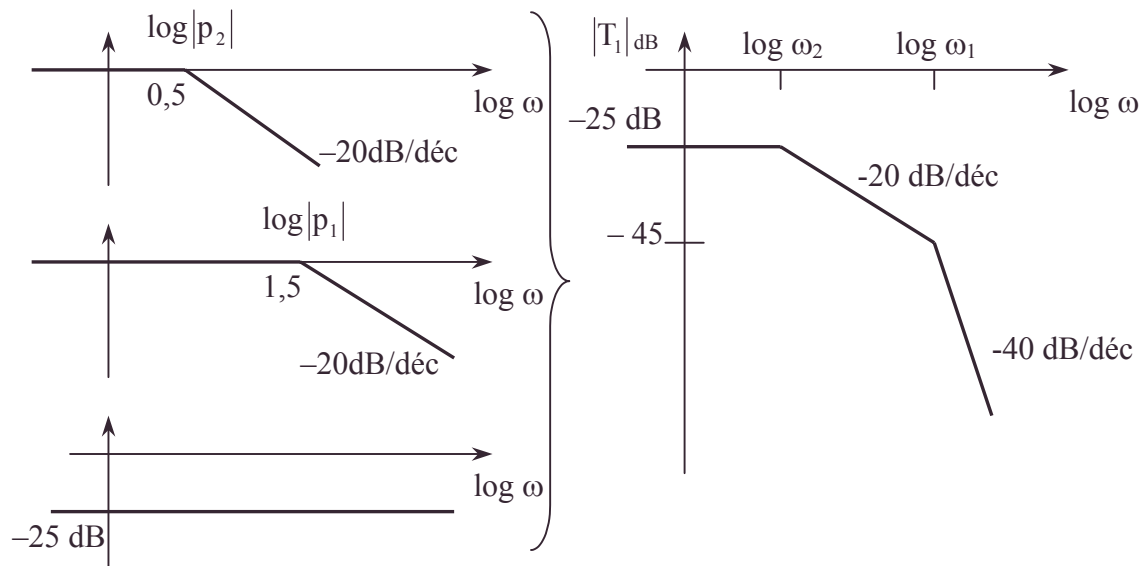
AN : $\lambda = 17,5 \text{ m.kg}^{-1}$.

2. On a : $20 \log |T_1| = 20 \log \lambda + 20 \log \frac{1}{\left|1 - \frac{j\omega}{p_1}\right|} + 20 \log \frac{1}{\left|1 - \frac{j\omega}{p_2}\right|}$



On assimilerà la courbe aux asymptotes en première approximation.

b. On fait la somme des diagrammes pour obtenir :



AN : $\omega_1 = 32 \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega_2 = 3 \text{ rad.s}^{-1}$ ou $f_1 = 5 \text{ Hz}$ et $f_2 = 0,5 \text{ Hz}$.

c. Tant que $\omega < \omega_1$, on a un système du premier ordre qualitativement car

$$20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}} \neq 0 \text{ (cf. graphique).}$$

d. La nouvelle expression en est :

$$T_1(p) = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{p}{p_2}\right)} = \frac{-\lambda p_2}{p - p_2} ; \text{AN : } p_2 = -3 ; -\lambda p_2 = 52,5 \text{ m.kg}^{-1}. \text{ On vérifie bien :}$$

$$T_1 = \frac{5,25 \cdot 10^{-2}}{p+3} \text{ si l'unité est m.g}^{-1} \text{ pour } \lambda p_2 \text{ (soit le gramme pour } \mathcal{M} \text{ et m.)}$$

3.1. $d(t) = \frac{dm}{dt}$. Appliquons TL : $D(p) = p M(p)$ d'où le coefficient multiplicateur $\frac{1}{p}$

dans le schéma fonctionnel.

Le correcteur est formellement de type intégrateur, pondéré.

$$2. T_2(p) = \frac{X(p)}{M(p)} \cdot \frac{M(p)}{D(p)} \cdot \frac{D(p)}{E(p)} = T_1(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot K = \frac{-\lambda p_2 K}{p(p - p_2)} ; \text{AN : } T_2(p) = \frac{5,25 \cdot 10^{-2} K}{p(p+3)}.$$

3. On a une chaîne de retour de $\beta = 1$ et la formule de Black telle que

$$T_2'(p) = \frac{T_2(p)}{1 + \beta T_2(p)} \text{ devient } T_2'(p) = \frac{T_2(p)}{1 + T_2(p)} = \frac{-\lambda K p_2}{p^2 - p p_2 - \lambda K p_2} ;$$

$$\text{AN : } T_2'(p) = \frac{5,25 \cdot 10^{-2} K}{p^2 + 3p + 5,25 \cdot 10^{-2} K} ;$$

$$\text{on peut le mettre sous la forme } T_2'(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\alpha}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = -\lambda p_2 K = 5,25 \cdot 10^{-2} K \text{ et } \frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{\lambda K} = \frac{3}{5,25 \cdot 10^{-2} K} ; \text{ en éliminant } \omega_0 \text{ entre les}$$

$$\text{deux relations, on trouve : } \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-p_2}{\lambda K}} \Rightarrow K = \frac{-p_2}{4\lambda\alpha^2} ; \omega_0 = \frac{-p_2}{2\alpha} ;$$

$$\text{A.N. : } K = 0,1714 \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1} \text{ ou encore } K = 171,4 \text{ g.s}^{-1}.\text{m}^{-1} ; \omega_0 = 3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$4. T_2(p) = \frac{9}{p(p+3)}$$

$$\Rightarrow T_2(j\omega) = \frac{9}{j\omega(j\omega+3)} = \frac{9(-j\omega)(3-j\omega)}{\omega^2(\omega^2+9)} = \frac{-1}{1+\frac{\omega^2}{9}} + \frac{-3j}{\omega\left(1+\frac{\omega^2}{9}\right)} = X(\omega) + jY(\omega) = |T_2|e^{j\varphi}.$$

Le diagramme de Nyquist est l'ensemble des points N de coordonnées $X(\omega)$, $Y(\omega)$.

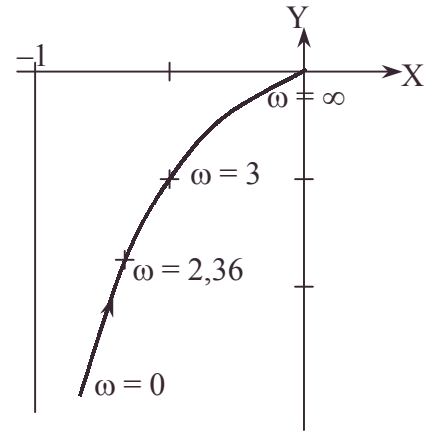
$$X(\omega) = \frac{-1}{1+\frac{\omega^2}{9}} < 0 ; \quad Y(\omega) = \frac{-3}{\omega\left(1+\frac{\omega^2}{9}\right)} < 0 ; \quad \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{9}{\omega\sqrt{9+\omega^2}} ;$$

$$\varphi = \arg \tan\left(-\frac{3}{\omega}\right).$$

ω en rad.s^{-1}	+ 0	2,36	$\omega_0 = 3$	∞
Résultats demandés	$X = -1$ $Y = -\infty$	$X = -0,62$ $Y = -0,79$ $ T_2 = 1$	$X = -0,5$ $Y = -0,5$ $ T_2 = 1/\sqrt{2}$	$T_2 = 0$
φ	-90°	-128°	-135°	-180°

L'instabilité correspond à la possibilité de sortie sans signal d'entrée (cf. oscillateur) ; quand $T_2(p) = -1$ c'est possible : pour $\omega = 2,36$, $|T_2| = +1$ mais l'écart en phase (la marge) par rapport à $e^{-j\pi}$ vaut :
 $\varphi(2,36) - \varphi(\infty) = -128 + 180 = +52^\circ > 45^\circ$.
 écart de phase assurant la stabilité.

Le critère de Nyquist l'affirme plus simplement vu l'éloignement systématique du point critique $(-1,0)$, laissé à gauche quand on parcourt la courbe de $\omega = 0$ à $\omega = \infty$

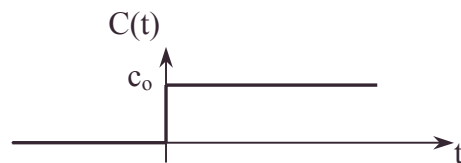


4. Précision du système.

1. Rappel : $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ quand $c(t) = c_0 u(t)$.

Or la théorie de la transformation de Laplace donne le théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p).$$



– D'après le schéma fonctionnel n° 3 : $E(p) = C(p) - X(p) = C(p) - T_2'(p)C(p)$ et

$$\text{finalement } E(p) = \frac{C(p)}{1 + T_2(p)} \text{ or } C(p) = \frac{c_0}{p}; \text{ donc } E(p) = \frac{c_0}{p(1 + T_2(p))};$$

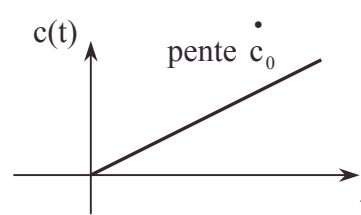
or $T_2 = \frac{KT_1}{p} = \frac{-\lambda K p_2}{p(p - p_2)}$ et $\lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \frac{c_0}{T_2(0) + 1} = 0$ (raisonnement sur le module de l'écart à l'asymptote) ;

$$\varepsilon_p = 0.$$

2. Rappel : $\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)$ quand $c(t) = \dot{c}_0 t u(t)$

Le théorème de la valeur finale sera utilisé : on a

$$\text{toujours : } E(p) = \frac{C(p)}{1 + T_2(p)}.$$



$$\text{mais } C(p) = \frac{\dot{c}_0}{p^2} \Rightarrow pE(p) = \frac{\dot{c}_0}{p(1 + T_2(p))} = \frac{\dot{c}_0(p - p_2)}{p^2 - pp_2 - \lambda K p_2};$$

$$\varepsilon_T = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = \frac{\dot{c}_0}{\lambda K} = \frac{2\alpha}{\omega_0} \dot{c}_0; \text{ AN : } \varepsilon_T = 0,33 \dot{c}_0.$$

4. Etude de l'asservissement échantillonné (cf. numérique)

$$1.1. T_3 = \frac{X(p)}{E_2^*(p)} = \frac{X(p)}{E(p)} \cdot \frac{E(p)}{E_2^*(p)} = T_2(p) \cdot B_0(p) \text{ (cf. énoncé 4.)};$$

$$T_3(p) = \frac{-\lambda p_2 K}{p^2(p-p_2)}(1-e^{-\theta p}) ;$$

$$AN : -\lambda K p_2 = 9 ; \lambda K = 3 \text{ si } -p_2 = 3 ; T_3(p) = \frac{9(1-e^{-\theta p})}{p^2(p+3)} ; (\text{cf. } \alpha = 0,5).$$

2. Utilisation de la transformée en Z.

Pour utiliser le tableau de correspondance, il faut faire apparaître les fonctions citées.

$$T_3(p) = \frac{-\lambda p_2 K}{p^2(p-p_2)} + \lambda p_2 K \frac{e^{-\theta p}}{p^2(p-p_2)} ; \text{cf. } a = -p_2 \text{ et } F(p) = \frac{-\lambda p_2 K}{p^2(p-p_2)} ;$$

$$T_3(z) = \lambda K \left[\frac{\theta z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{p_2\theta})z}{-p_2(z-1)(z-e^{p_2\theta})} \right] - \frac{\lambda K}{z} \left[\frac{\theta z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{p_2\theta})z}{-p_2(z-1)(z-e^{p_2\theta})} \right] ;$$

$$T_3(z) = \lambda K \left(1 - \frac{1}{z} \right) \left(\frac{\theta z}{(z-1)^2} + \frac{(1-e^{p_2\theta})z}{p_2(z-1)(z-e^{p_2\theta})} \right) ;$$

$$T_3(z) = \lambda K \left(\frac{\theta}{z-1} + \frac{(1-e^{p_2\theta})}{p_2(z-e^{p_2\theta})} \right) \text{ après } A_1 = \lambda K \theta ; A_2 = e^{p_2\theta} - 1 .$$

$$A.N. : T_3(z) = \frac{3\theta}{z-1} - \frac{(1-e^{p_2\theta})}{z-e^{p_2\theta}} \Rightarrow AN : A_1 = 3\theta ; A_2 = e^{-3\theta} - 1 \text{ vu } \mathbf{1} . ;$$

2. On donne les résultats de la théorie de la transformée en Z :

$$\varepsilon_p = c_o \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+T(z)} ; \varepsilon_T = \dot{c}_o \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\theta}{(z-1)T(z)} .$$

Le schéma fonctionnel n° 6 donne $T(z) = K(z) T_3(z)$.

$$\text{L'énoncé donne } K(z) = \frac{z-a}{z-1} .$$

$$\mathbf{a.} \quad \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{c_o}{1 + \frac{z-a}{z-1} \left(\frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-e^{p_2\theta}} \right)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\dot{c}_o (z-1)^2}{(z-1)^2 + (z-a)A_1 + A_2 \frac{(z-1)}{z-e^{p_2\theta}}}$$

qui vaut 0 car $a \neq 1$ et $\theta \neq 0$ (cf. $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$).

$$\mathbf{b.} \quad \varepsilon_T = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\dot{c}_o \theta}{(z-1) \frac{z-a}{z-1} \left(\frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-e^{p_2\theta}} \right)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\dot{c}_o \theta (z-1)}{(z-a) \left(A_1 + \frac{A_2(z-1)}{z-e^{p_2\theta}} \right)} .$$

qui vaut 0 car $a \neq 1$ et $\theta \neq 0$ (cf. $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$).

3. On veut $\frac{E_2(z)}{E_1(z)} = K = \frac{z-a}{z-1}$ soit $E_2(z)(z-1) = E_1(z)(z-a)$, et en divisant par z,

$$E_2(z) - \frac{E_2(z)}{z} = E_1(z) - E_1(z) \frac{a}{z} .$$

Soit en passant aux TL : $E_2(p) - E_2(p)e^{-\theta p} = E_1(p) - aE_1(p)e^{-\theta p}$.

Rappelons que si $e(t)$ correspond à $TL(e) = E(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e(t) dt$, alors à $e'(t) = e(t-\theta)$

correspond à $TL(e') = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e(t-\theta) dt$, cf. fonction retard.

$$\text{soit } TL(e') = \int_{-\theta}^{+\infty} e^{-pt'} e^{-p\theta} e(t') dt' = e^{-p\theta} \int_0^{+\infty} e^{-p(t')\theta} e(t') dt' = e^{-p\theta} TL(e) .$$

• correspondance entre transformées en z et transformées de Laplace, multiplieur, radioaltimètre, transformation en z

En inversant TL : $e_2(t) - e_2(t-\theta) = e_1(t) - ae_1(t-\theta)$, ce qui s'écrit algorithmiquement

$$e_{2,n} - e_{2,n-1} = e_{1,n} - ae_{1,n-1} \text{ soit } e_{2,n} = e_{2,n-1} + e_{1,n} - ae_{1,n-1}.$$

On voit la nécessité d'un processeur calculateur.

$$4. \text{ Si } K = \frac{z-a}{z-1} = a + (1-a)\frac{z}{z-1}, \quad K(p) = a + (1-a)\frac{1}{p}; \quad \text{AN : } K(j\omega) = 0,74 + \frac{0,26}{j\omega}.$$

Il s'agit d'un correcteur analogique P.I. (cf. 3.1.) faisant intervenir une constante de proportionnalité et une intégration pondérée.

5. $f = \frac{1}{T}$ avec $f < 5 \text{ Hz} \Rightarrow T > 0,2 \text{ s}$; si on considère $T = 10 \theta$ comme une limite acceptable; $\theta = 20 \text{ ms}$ convient.

6.3.5. Correcteur de laser

Afin d'améliorer les performances d'un laser, la tension de commande $\Delta v(t)$ de la fréquence d'émission $f(t)$ du laser sera modifiée en introduisant un système appelé correcteur. Avant d'étudier ce contrôle, quelques résultats généraux sur les fonctions de transfert vont être établis.

1. Fonction de transfert

On considère un système physique (S) dont la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ est une équation différentielle de la forme $\sum_{d=0}^D a_d s^{(d)}(t) = \sum_{n=0}^N b_n e^{(n)}(t)$, $y^{(i)}(t)$ étant la dérivée $i^{\text{ème}}$ de $y(t)$ et a_d ($0 \leq d \leq D$) et b_n ($0 \leq n \leq N$) étant des coefficients constants.

1. Expliciter la fonction de transfert $H(j\omega)$ du système (S).

2. On considère une entrée harmonique : $e(t) = E \sin(\omega t)$.

En régime permanent, la sortie est un signal sinusoïdal de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude et phase à l'origine différentes : $s(t) = S \sin(\omega t + \varphi)$.

Expliciter S et φ en fonction de E et $H(j\omega)$.

3. On considère deux systèmes (S_1) et (S_2) de fonction de transfert $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$. Ces deux systèmes sont mis en cascade (la sortie de (S_1) est alors l'entrée de (S_2)).

(S) est le système ainsi réalisé. Expliciter la fonction de transfert de (S), noté $H(j\omega)$, en fonction de $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$. Indiquer comment obtenir le diagramme de Bode de (S) (module et phase) à partir des diagrammes de Bode de (S_1) et (S_2)).

2. Contrôle de la fréquence

Une cavité laser, dont l'entrée est $\Delta v(t)$ et la sortie $\Delta f(t) = f(t) - f_0$, peut être assimilée à un système du premier ordre de fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{A}{1 + j\omega\tau}$ avec

$A = 90 \text{ MHz} \cdot \text{V}^{-1}$ et $\tau = 0,1 \text{ ms}$. $\Delta v(t)$ est la tension de commande de la longueur de la cavité correspondant à cet écart $\Delta f(t)$.

Un filtre optique, dont l'entrée est $\Delta f(t)$ et la sortie $e_r(t) = K\Delta f(t)$ avec $K = 5 \cdot 10^{-9} \text{ V} \cdot \text{Hz}^{-1}$, donne une mesure de la fréquence d'émission du laser par rapport à la fréquence f_0 grâce à $\Delta f = f - f_0$. On note $e_c(t)$ la tension d'entrée du système complet qui permet de contrôler la sortie $\Delta f(t)$. On pose $\varepsilon(t) = e_c(t) - e_r(t)$.

Devant la cavité laser, on ajoute un système appelé correcteur de fonction de transfert $C(j\omega)$ dont l'entrée est $\varepsilon(t)$ et la sortie $\Delta v(t)$.

1. Fonctions de transfert : expliciter $H_{BO}(j\omega)$, fonction de transfert entre $\varepsilon(t)$ (entrée) et $e_r(t)$ (sortie), et $H_{BF}(j\omega)$, fonction de transfert entre $e_c(t)$ (entrée) et $\Delta f(t)$ (sortie), en fonction de $H(j\omega)$, $C(j\omega)$ et K .

2. Correction proportionnelle

Dans toute cette partie, $C(j\omega) = C_0$.

1. En vous aidant de la figure 1 qui représente le diagramme de Bode de $H(j\omega)$ et en précisant la démarche suivie, déterminer la valeur de C_0 qui conduit à un gain de $H_{BO}(j\omega)$ égal à 0 dB pour une pulsation égale à 10^5 rad.s^{-1} .

2. Expliciter $H_{BF}(j\omega)$ en fonction de τ , A , K et C_0 .

Dans toute la suite du 2.2. l'entrée $e_c(t)$ est constante et égale à E_c pour $t \geq 0$; les conditions initiales étant nulles.

3. Expliciter la sortie $\Delta f(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction de τ , A , K et C_0 .

4. On appelle temps de réponse à 5 % l'instant à partir duquel la réponse précédente s'éloigne de moins de 5 % de la valeur finale. Donner l'expression de ce temps de réponse en fonction de τ , A , K et C_0 . Faire l'application numérique.

5. Expliciter la valeur du signal d'erreur $\varepsilon(t)$ en régime permanent pour $E_c = 1 \text{ V}$. Cette grandeur est encore appelée erreur statique. Donner sa valeur numérique. Commenter la correction proportionnelle.

3. Correction intégrale

Dans toute cette partie $C(j\omega) = \frac{C_0}{j\omega}$.

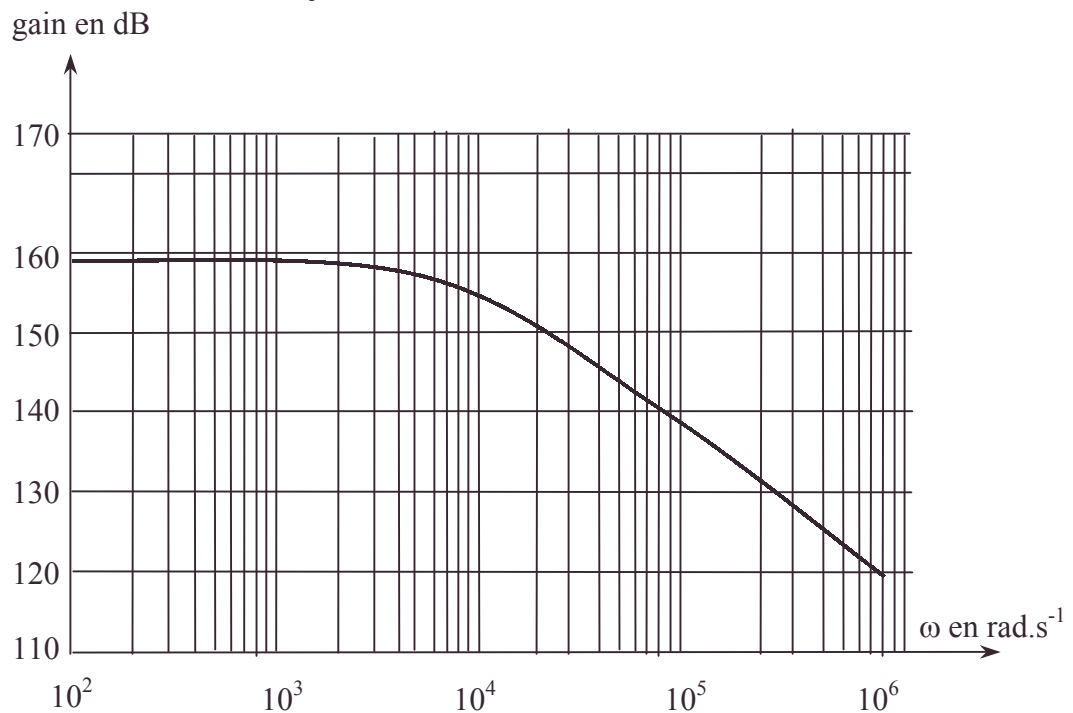


Figure 1

Diagramme de Bode

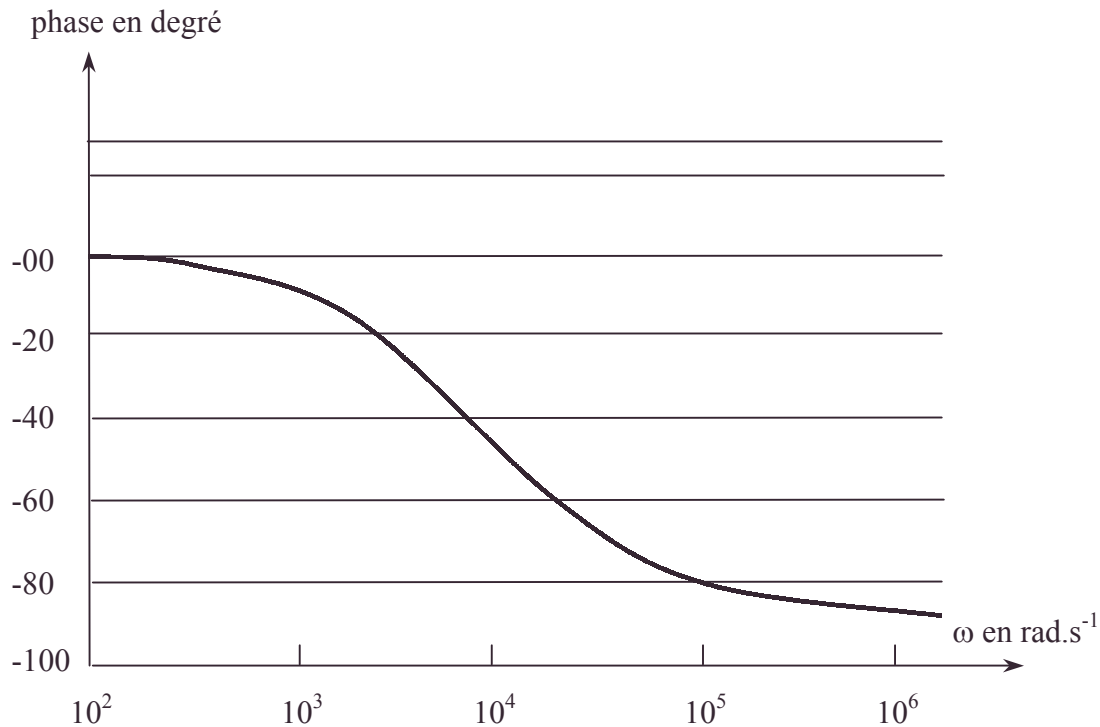


Figure 1 (suite)

Diagramme de Bode

1. Quelle est la réponse de ce correcteur à un signal constant ? Quel nom proposez-vous pour la fonction ainsi réalisée ?

2. A partir de la figure 1 et en précisant la démarche suivie, déterminer la valeur de C_0 qui permet d'obtenir une phase de $H_{BO}(j\omega)$ égal à -135° lorsque le gain de $H_{BO}(j\omega)$ vaut 0 dB.

3. Donner l'équation différentielle liant $e_c(t)$ et $\Delta f(t)$. Préciser les paramètres caractéristiques de ce système ainsi que leur valeur numérique. L'entrée $e_c(t)$ est constante et égale à E_c pour $t \geq 0$; les conditions initiales étant nulles.

4. Tracer l'allure de la réponse du système.

5. Pour un système du second ordre, il n'existe pas de relation simple pour expliciter le temps de réponse à 5 %. Par contre il existe un abaque (figure 2) qui permet d'obtenir ce temps de réponse de la pulsation propre ω_0 et du coefficient d'amortissement m . En déduire la valeur numérique du temps de réponse à 5 %

6. Préciser la valeur de l'erreur statique.

Comparer corrections intégrale et proportionnelle.

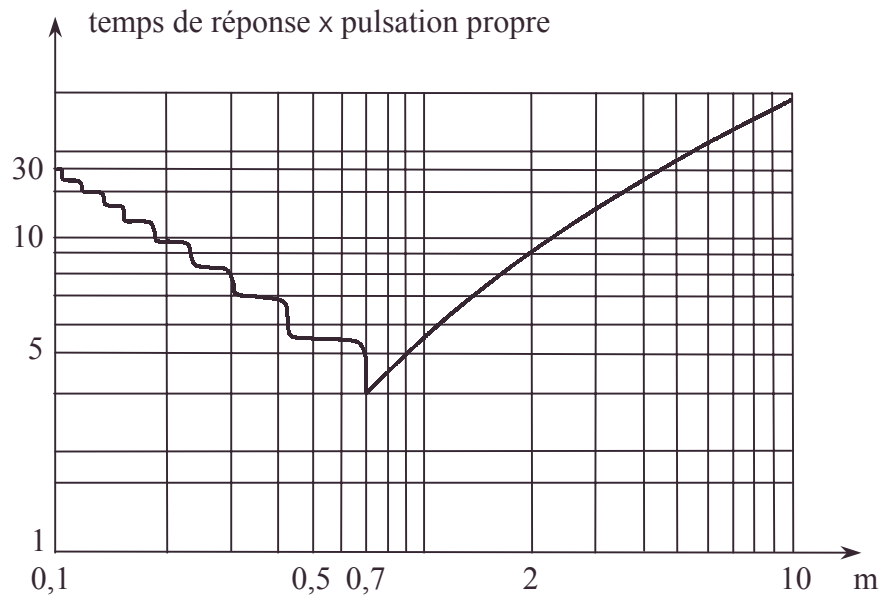


Figure 2

4. Correction proportionnelle et intégrale

La fonction de transfert du correcteur est $C(j\omega) = C_0 \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega}$.

1. Pour $C_0 = 1$ unité S.I. tracer le diagramme de Bode de $H_{BO}(j\omega)$.
 2. Déterminer la valeur de C_0 qui conduit à un gain $H_{BO}(j\omega)$ égal à 0 dB pour une pulsation égale à 10^5 rad.s^{-1} .
 3. Déterminer le temps de réponse à 5 % ainsi que l'erreur statique.
- Comparer les correcteurs.

3. Perturbation

Le signal de sortie du système complet $\Delta f(t)$ est perturbé par un signal $\tilde{f}(t)$ et se met maintenant sous la forme $\Delta f(t) = \Delta(t) + \tilde{f}(t)$ où $\Delta(t)$ est le signal de sortie de la cavité laser. $\Delta f(t)$ est toujours l'entrée du filtre optique. Dans toute la suite de cette question, on suppose que la commande $e_c(t)$ est nulle.

Le signal perturbateur contient une composante continue ainsi qu'une composante sinusoïdale : $\tilde{f}(t) = 5 \cdot 10^8 + 10^7 \cos(500t)$.

Estimer l'effet sur la sortie $\Delta f(t)$ d'un tel signal perturbateur avec les trois correcteurs.

4. Comparaison

Discuter et comparer les performances des trois correcteurs envisagés ci-dessus (réponse à un signal constant et comportement vis-à-vis de la perturbation).

5. Réalisation

Les amplificateurs opérationnels étant supposés parfaits, déterminer l'impédance Z pour que le montage représenté sur la figure suivante permette de réaliser les trois correcteurs envisagés.

A.N. : $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$.

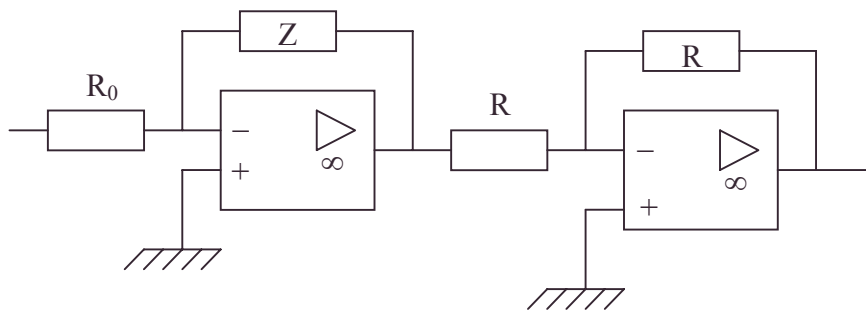


Figure 3 Montage correcteur

Banque PT ; Durée : 3h**Corrigé**

1.1. Si $y = \underline{y}e^{j\omega t}$ $y^{(i)}(t) = (j\omega)^i \underline{y}e^{j\omega t}$ (dérivée i^{ème})

d'où $\underline{e} = \underline{e}e^{j\omega t}$ $\underline{e}^{(n)}(t) = (j\omega)^n \underline{e}e^{j\omega t}$

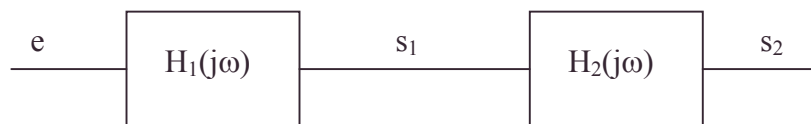
et $\underline{s} = \underline{s}e^{j\omega t}$ $\underline{s}^{(d)}(t) = (j\omega)^d \underline{s}e^{j\omega t}$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\left(\sum_{d=0}^D a_d (j\omega)^d \right) \underline{s} = \left(\sum_{n=0}^N b_n (j\omega)^n \right) \underline{e} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\sum_{n=0}^N b_n (j\omega)^n}{\sum_{d=0}^D a_d (j\omega)^d}.$$

2. $\underline{s} = H(j\omega) \underline{e} \Rightarrow S e^{j\varphi} = |H| e^{j\arg H} E \Rightarrow S = |H| E ; \varphi = \arg H.$

3. Si on a vraiment :



$$\underline{s}_2 = H_2(j\omega) \underline{s}_1 = H_2(j\omega) H_1(j\omega) \underline{e} ; H(j\omega) = \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}} = H_2(j\omega) H_1(j\omega).$$

$$|H| e^{j\arg H} = |H_2| e^{j\arg H_2} |H_1| e^{j\arg H_1} \text{ soit :}$$

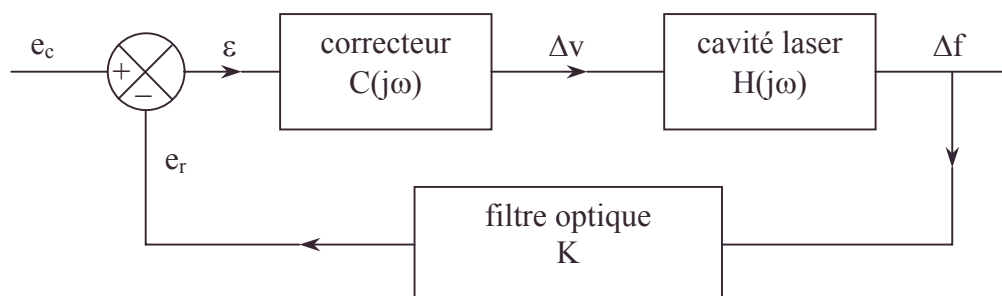
$$|H| = |H_2| |H_1| \text{ et } \arg H = \varphi = \arg H_2 + \arg H_1 = \varphi_1 + \varphi_2.$$

$$\text{ainsi } 20 \log |H| = 20 \log |H_1| + 20 \log |H_2|$$

- à ω donné (log ω en vérité), on additionne pour obtenir les 2 graphes :
 - les valeurs des gains exprimés en dB ;
 - les valeurs des phases.

On obtient ainsi le diagramme de Bode de H à partir de ceux de H_1 et H_2 .

2. On traduit l'énoncé par l'ensemble fonctionnel :



- diagramme de Bode, rétroaction, soustracteur [rétroaction]

1.a. En boucle ouverte (déconnexion théorique du soustracteur) :



$$e_r = K \Delta f = K H \Delta v = K H C \varepsilon ; \frac{e_r}{\varepsilon} = H_{BO}(j\omega) = K H(j\omega) C(j\omega).$$

b. En boucle fermée (soustracteur connecté), on retrouve la formule de Black :

$$\frac{\Delta f}{e_c} = H_{BF} ; \varepsilon = e_c - e_r = e_c - K H C \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{e_c}{1 + K H C}.$$

$$\Delta f = H C \varepsilon = \frac{H C e_c}{1 + K H C} \Rightarrow H_{BF} = \frac{H C}{1 + K H C}.$$

2. $C = C_0$.

1. On lit pour $\omega = 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ $H = 139 \text{ dB}$.

$$20 \log H_{BO} = 20 \log K + 20 \log H + 20 \log C_0$$

$$\Rightarrow 20 \log C_0 = -20 \log K - 20 \log H \text{ car vu l'énoncé, } 20 \log H_{BO} = 0 ;$$

$$\text{A.N. : } C_0 = 22,4 \text{ vu les unités de } \Delta v \text{ et } e_c.$$

$$2. H_{BF} = \frac{C_0 A}{1 + j\omega\tau} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K A C_0}{1 + j\omega\tau}} = \frac{C_0 A}{(1 + K A C_0) + j\omega\tau} = \frac{\frac{C_0 A}{1 + K A C_0}}{1 + j\omega \frac{\tau}{1 + K A C_0}} = \frac{A'}{1 + j\omega\tau'}$$

$$\text{avec } A' = \frac{C_0 A}{1 + K A C_0} \text{ et } \tau' = \frac{\tau}{1 + K A C_0}.$$

H_{BF} est de même nature que H mais ses paramètres sont modifiés par la rétroaction.

3. $A' e_c = (1 + j\omega\tau') \Delta f$ permet d'écrire l'équation différentielle :

$$\Delta f + \frac{\tau}{1 + K A C_0} \frac{d}{dt} \Delta f = \frac{C_0 A}{1 + K A C_0} e_c ; \text{ on en déduit la solution :}$$

$$\Delta f(t) = \frac{C_0 A}{1 + K A C_0} E_c \left(1 - e^{-\frac{(1 + K A C_0)}{\tau} t} \right).$$

$$4. \text{ Valeur finale de } \Delta f : \frac{C_0 A}{1 + K A C_0} E_c.$$

$$\text{Valeur de } \Delta f \text{ à "5 \%"} : 0,95 \frac{C_0 A}{1 + K A C_0} E_c \text{ d'où } t_{5\%} = -\frac{\tau}{1 + K A C_0} \log 0,05 = 3 \tau'.$$

$$\text{A.N. : } \tau = 10^{-4} \text{ s ; } \tau' = 10^{-5} \text{ s ; } t_{5\%} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

5. En régime permanent :

$$e_c = E_c ; e_r = \frac{K C_0 A}{1 + K A C_0} E_c \Rightarrow \varepsilon_\infty = e_c - e_r = \frac{E_c}{1 + K A C_0} ;$$

$$\text{A.N. : } \varepsilon_\infty = 0,1 \text{ V.}$$

La correction proportionnelle accroît la rapidité $\tau' < \tau$ mais introduit une erreur statique.

$$3. C = \frac{C_0}{j\omega} ; C_0 \text{ a la même unité ici que } \omega.$$

1. $\underline{\Delta v} = \frac{C_0}{j\omega} \underline{\varepsilon}$ s'écrit $\Delta v(t) = C_0 \int_0^t \varepsilon(t) dt = C_0 \varepsilon_0 t$.

La réponse à un signal constant est une "rampe", signal temporel affine.
La fonction réalisée est celle d'un intégrateur.

2. $H_{B0} = K H C$.

a. $\Rightarrow \varphi_{H_{B0}} = \varphi_K + \varphi_H + \varphi_C = \varphi_H + \varphi_C \Rightarrow \varphi_H = \varphi_{H_{B0}} - \varphi_C$

A.N. : $\varphi_H = -135 - (-90) = -45^\circ$.

On lit sur le diagramme de Bode donné : $\omega = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ et $20 \log H = -155 \text{ dB}$.

b. $20 \log \frac{C_0}{\omega} = 20 \log H_{B0} - 20 \log K - 20 \log H$.

A.N. : $20 \log \frac{C_0}{10^4} = 0 + 166 - 155 = 11 \Rightarrow C_0 = 3,55 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$.

3. $H_{BF} = \frac{C_0 A}{j\omega(1+j\omega\tau)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K A C_0}{j\omega(1+j\omega\tau)}} = \frac{C_0 A}{K A C_0 + j\omega(1+j\omega\tau)} = \frac{C_0 A}{K A C_0 + j\omega + \tau(j\omega)^2}$.

$\underline{\Delta f}(K A C_0 + j\omega + \tau(j\omega)^2) = C_0 A \underline{e}_c$ donne l'équation différentielle :

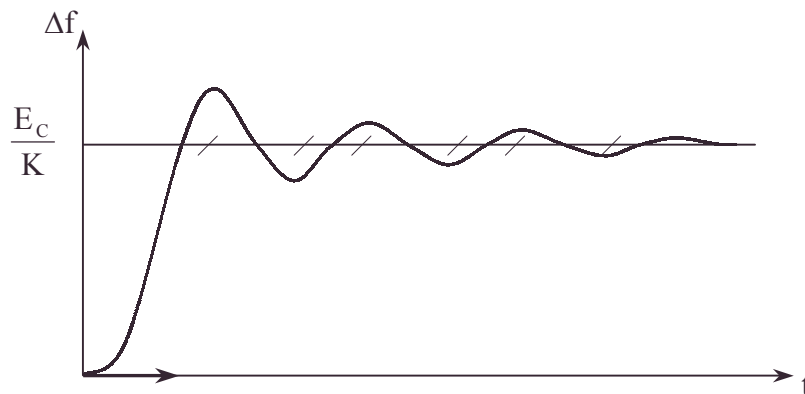
$\tau \frac{d^2 \Delta f}{dt^2} + \frac{d \Delta f}{dt} + K A C_0 \Delta f = C_0 A e_c$, soit encore $\frac{d^2 \Delta f}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d \Delta f}{dt} + \omega_0^2 \Delta f = \frac{C_0 A}{\tau} e_c$.

$\tau = 10^{-4} \text{ s}$; $\omega_0 = \left(\frac{K A C_0}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}$; A.N. : $\omega_0 = 1,3 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$, $KAG = 1,7 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$.

4. Equation caractéristique : $r^2 + \frac{r}{\tau} + \omega_0^2 = 0$; $\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = 10^8 - 6,676 \cdot 10^8 < 0$.

On a un régime oscillant amorti.

$\Delta f_{\text{final}} = \frac{E_c}{K}$.



La courbe est tangente à l'axe des t car l'énoncé précise que les conditions initiales (position et vitesse) sont nulles.

5. Le coefficient d'amortissement m, dans le cadre de l'automatique, est tel que :

$\frac{d^2 \Delta f}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{d \Delta f}{dt} + \omega_0^2 \Delta f = \frac{A C_0}{\tau} E_c$.

$\Rightarrow m = \frac{1}{2\tau\omega_0} = \frac{1}{2\tau \left(\frac{A K C_0}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{A K C_0}}$; A.N. : $m = 0,4$.

On lit : $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 7 \Rightarrow t_{5\%} = \frac{7}{1,3 \cdot 10^4} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

6. En régime permanent vu l'énoncé et **4.** :

$$e_r = K \Delta f_\infty = E_C ; \varepsilon_\infty = E_C - E_C = 0 \text{ volt}.$$

La correction intégrale accroît la rapidité mais moins que la correction proportionnelle ; il n'y a pas d'erreur statique alors qu'il y en a une dans la correction proportionnelle.

4. $C = \frac{C_0(1+j\omega\tau)}{j\omega} = \frac{C_0}{j\omega} + C_0\tau$: correction intégrale et proportionnelle. L'unité de C_0

est celle de ω .

1. $H_{BO} = C_0 \frac{1+j\omega\tau}{j\omega} \cdot \frac{A}{1+j\omega\tau} \cdot K = \frac{AKC_0}{j\omega}$.

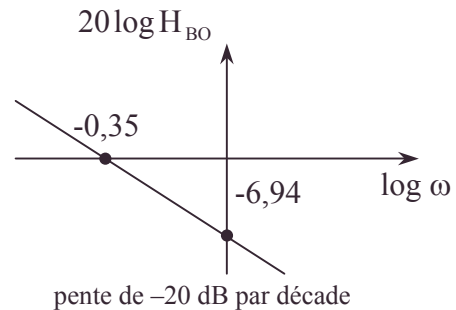
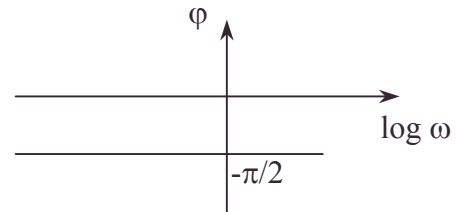
On a une fonction d'intégrateur : $\varphi_{H_{BO}} = -\frac{\pi}{2}, \forall \omega$.

$$20 \log H_{BO} = 20 \log AKC_0 - 20 \log \omega.$$

A.N. : $C_0 = 1 \cdot \text{s}^{-1}$;

a. $20 \log AKC_0 = 20 \log 0,45 = -6,94$.

b. $\log \omega = -0,35 \Leftrightarrow \omega = 0,45 \text{ rad.s}^{-1}$.



2. $0 = 20 \log A + 20 \log K + 20 \log C_0 - 100 ; 20 \log C_0 = 100 - 20 \log AK$.

A.N. : $C_0 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$.

3.a. $H_{BF} = \frac{C_0 \frac{(1+j\omega\tau)}{j\omega} \cdot \frac{A}{1+j\omega\tau}}{1 + KC_0 \frac{(1+j\omega\tau)}{j\omega} \cdot \frac{A}{1+j\omega\tau}} = \frac{AC_0}{C_0AK + j\omega} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{j\omega}{AC_0K}}$

de constante de temps $\tau'' = \frac{1}{AC_0K}$.

On en déduit l'équation différentielle :

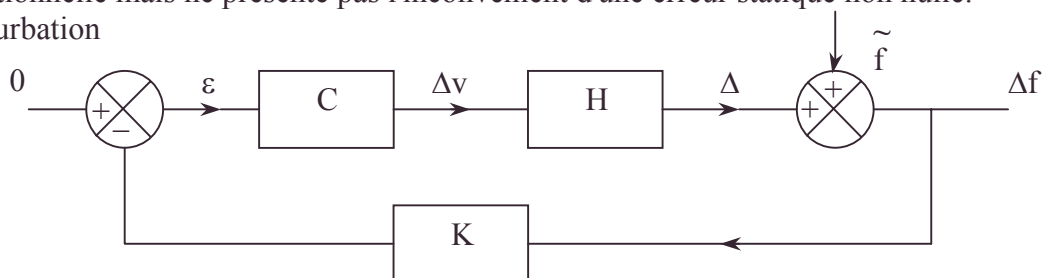
$$\tau'' \frac{d}{dt} \Delta f + \Delta f = \frac{E_C}{K} \text{ de solution } \Delta f = \frac{E_C}{K} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau''}} \right).$$

Comme dans la question **2.2.4.** : $t_{5\%} = 3\tau''$; A.N. : $t_{5\%} = 3,03 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

b. $\Delta f_\infty = \frac{E_C}{K} \Rightarrow e_{r_\infty} = E_C \Rightarrow \varepsilon = E_C - E_C = 0$.

La correction proportionnelle et intégrale améliore la rapidité comme la correction proportionnelle mais ne présente pas l'inconvénient d'une erreur statique non nulle.

3. Perturbation



• rapidité d'un système automatisé, soustracteur [rétroaction], temps de réponse

$$\text{Vu } e_c = 0, \Delta = -HCK\Delta f \Rightarrow \Delta f = \Delta + \tilde{f} = -HCK\Delta f + \tilde{f} \text{ soit } \Delta f = \frac{\tilde{f}}{1 + KHC}.$$

A.N. : $\tilde{f} = f_0 + f_\omega \cos \omega t$ qu'on sépare en deux :

$$f_0 = 5.10^8 \text{ Hz dite continue,}$$

et $\tilde{f}_\omega = 10^7 \text{ Hz}$ pour $\omega = 500 \text{ rad.s}^{-1}$ assurant une modulation de fréquence.

$$\text{a. } C = C_0 ; \Delta f = \frac{\tilde{f}}{1 + \frac{KC_0A}{1 + j\omega\tau}} ; \text{ on a } KC_0A = 10 \text{ vu } C_0 = 22,4.$$

$$\alpha. \text{ Pour la composante continue } \omega = 0, \Delta f_0 = \frac{\tilde{f}_0}{1 + KC_0A} ; \text{ A.N. : } \Delta f_0 = 9.10^6 \text{ Hz.}$$

$\beta.$ Pour la composante alternative, $\omega = 500 \text{ rad.s}^{-1}$.

$$\Delta f_\omega = \frac{\tilde{f}_\omega(1 + j\omega\tau)}{1 + KC_0A + j\omega\tau} \Rightarrow |\Delta f_\omega| = |\tilde{f}_\omega| \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau^2}{(1 + KC_0A)^2 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\text{Vu l'A.N. : } |\Delta f_\omega| = \frac{|\tilde{f}_\omega|}{1 + KC_0A} \quad \text{A.N. : } |\Delta f_\omega| = 9.10^5 \text{ Hz.}$$

$$\text{b. } C = \frac{C_0}{j\omega} ; \Delta f = \frac{\tilde{f} j\omega(1 + j\omega\tau)}{KC_0A + j\omega + \tau(j\omega)^2} = \frac{\tilde{f}(-\omega^2\tau + j\omega)}{KC_0A - \tau\omega^2 + j\omega}.$$

$\alpha.$ Pour la composante continue $\omega = 0 : \Delta f_0 = 0$.

$\beta.$ Pour la composante alternative : $\omega = 500 \text{ rad.s}^{-1}$.

$$|\Delta f| = |\tilde{f}_\omega| \sqrt{\frac{(\omega^4\tau^2 + \omega^2)}{(KAC_0 - \tau\omega^2)^2 + \omega^2}} \text{ et vu les A.N. } \omega^2\tau \ll \omega \ll KAC_0 : |\Delta f| = |\tilde{f}_\omega| \frac{\omega}{KAC_0} ;$$

$$\text{A.N. : } |\Delta f| = 3,1810.10^5 \text{ Hz.}$$

$$\text{c. } C = \frac{C_0(1 + j\omega\tau)}{j\omega} ; \Delta f = \tilde{f} \frac{j\omega}{KAC_0 + j\omega} ; \text{ A.N. : } KC_0A = 99000 \text{ s}^{-1}.$$

$\alpha.$ Pour la composante continue $\omega = 0 : \Delta f_0 = 0$.

$$\beta. \text{ Pour la composante alternative : } |\Delta f| = \frac{|\tilde{f}_\omega|\omega}{\sqrt{(KAC_0)^2 + \omega^2}} ;$$

$$\text{vu les A.N. } \omega \ll KAC_0 : |\Delta f| = |\tilde{f}_\omega| \frac{\omega}{KAC_0} ; \text{ A.N. : } |\Delta f| = 5.10^4 \text{ Hz}$$

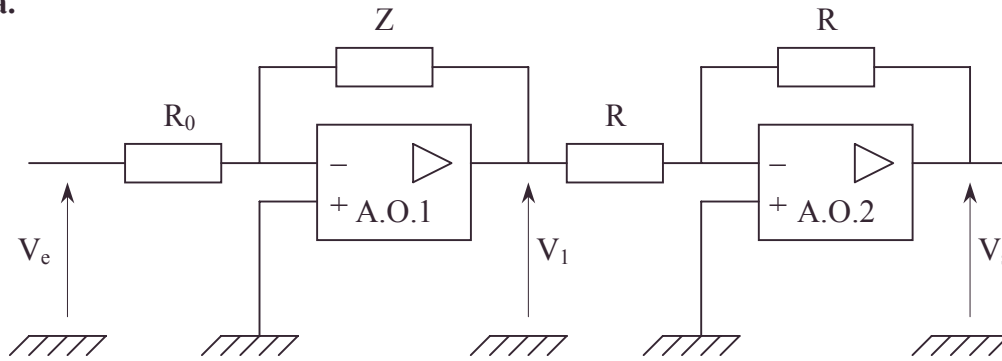
4. Vu les conclusions exprimées en 2.3., en 2.4.3. et en 3., le correcteur P.I. proportionnel intégral est le plus performant :

a. Rapidité : meilleur $t_{5\%}$.

b. Erreur statique nulle.

c. Sensibilité minimale aux perturbations.

5.a.



En appliquant le théorème de Millman à l'entrée de l'A.O.1 :

$$0 = \frac{V_e}{R_0} + \frac{V_1}{Z} \Rightarrow V_1 = -\frac{Z}{R_0} V_e.$$

En faisant de même à l'entrée de l'A.O.2 on obtient :

$$V_s = -V_1 = \frac{Z}{R_0} V_e \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = C(j\omega) = \frac{Z}{R_0}.$$

α. Correcteur proportionnel : on peut le réaliser avec $Z = R_1$: une résistance pure.

$$C_0 = \frac{R_1}{R_0} \Rightarrow R_1 = C_0 R_0 \text{ A.N. : } C_{02} = 22,4 ; R_0 = 1\text{k}\Omega \Rightarrow R_1 = 22,4\text{k}\Omega.$$

β. Correcteur intégral : on peut le réaliser avec $Z = \frac{1}{jC_1\omega}$: un condensateur pur.

$$\frac{C_0}{j\omega} = \frac{1}{jC_1\omega R_0} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{C_0 R_0} : \text{A.N. : } C_{03.2} = 3.55 \cdot 10^4 \text{s}^{-1} \Rightarrow C_1 = 28\text{nF}.$$

γ. Correcteur proportionnel intégral : on peut le réaliser par $Z = R'_1 + \frac{1}{jC'_1\omega}$: une résistance en série avec un condensateur.

$$C = C_0 \frac{(1 + j\omega\tau)}{j\omega} = \frac{R'_1}{R_0} + \frac{1}{jR_0 C'_1 \omega}.$$

$$\text{En identifiant parties réelle et imaginaire : } \tau C_0 = \frac{R'_1}{R_0} \Rightarrow R'_1 = \tau R_0 C_0$$

$$\text{et } C_0 = \frac{1}{R_0 C'_1} \Rightarrow C'_1 = \frac{1}{C_0 R_0} ;$$

$$\text{A.N. } C_0 = 2,2 \cdot 10^5 \text{s}^{-1} ; \tau = 10^{-4} \text{s} ; R_0 = 10^3 \Omega ; R'_1 = 22\text{k}\Omega ; C'_1 = 4,5\text{nF}.$$

6.3.6. Régulation de fréquence d'un émetteur hyperfréquence

On se propose de concevoir le dispositif de régulation de la fréquence d'un émetteur d'ondes électromagnétiques se propageant dans une ligne ou un guide d'onde dans le domaine des hyperfréquences. La référence utilisée est la fréquence f_0 d'un résonateur de grand facteur de qualité (cavité résonante).

La structure synoptique du dispositif est présentée figure 1.

- cavité résonante, émetteur hyperfréquence

Comme dans tout problème visant à l'étude d'une régulation, il convient de procéder à l'identification des divers éléments de la chaîne avant de procéder à la détermination des performances de la boucle fermée.

Aussi le problème est-il découpé de la façon suivante :

La modélisation et l'étude expérimentale du résonateur font l'objet de la première partie. L'oscillateur à désamortissement, étudié dans la seconde partie, délivre une onde électromagnétique de fréquence f dont une fraction est prélevée à l'aide d'un coupleur et permet l'élaboration d'un signal électrique proportionnel à la différence de fréquence $(f - f_0)$ (partie III). Enfin, la régulation et l'influence des perturbations sur le comportement de l'ensemble du système font l'objet de la quatrième partie du problème. N.B. : Du fait de la valeur élevée des fréquences f et f_0 , l'approximation des régimes quasi stationnaires ne peut être utilisée dans toute la zone délimitée par des pointillés sur la figure 1. En revanche, on appliquera les lois de l'électrocinétique aux autres éléments du système.

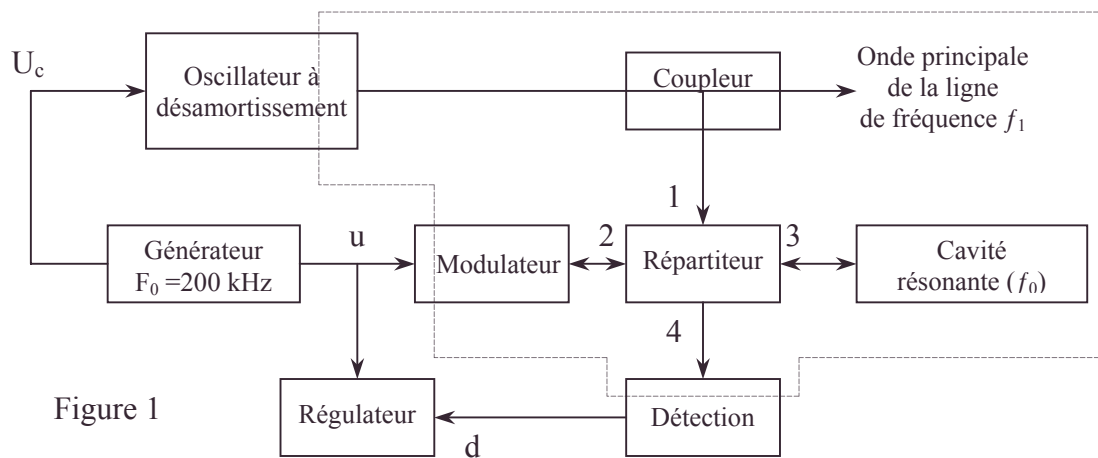


Figure 1

Première partie : étude du résonateur.

On propose d'effectuer une modélisation du résonateur (questions A.1. à A.4.) et d'étudier la réflexion d'une onde sur le plan de couplage avec la ligne (questions B.1. à B.4.). Pour ce faire, on utilise le modèle de la figure 2. Dans toute cette partie, on ne considère que des régimes établis sinusoïdaux de pulsation ω .

A. Impédance du résonateur

L'utilisation du modèle à constantes localisées est effectuée dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires. Le résonateur est représenté par le circuit R,L,C, le couplage étant modélisé par un transformateur idéal de rapport de

$$\text{transformation } m = \frac{n_2}{n_1}.$$

1. Exprimer Z_{PQ} en fonction de R, L, C, ω et m. Définir la pulsation de résonance en courant (notée ω_0), le facteur de qualité Q_0 .

La fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ est égale à 10 GHz.

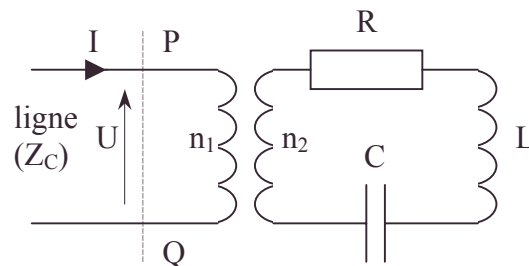


Figure 2

- ARQS, confrontation expérimentale, coupleur électromagnétique, facteur de qualité, identification, impédance du schéma équivalent de résonateur hyperfréquence, rapport de transformation, régulation, soustracteur de fréquence

2. Préciser les valeurs $\Delta\omega'$ et $\Delta\omega''$ de $\delta\omega = \omega - \omega_0$ pour lesquelles l'argument de \underline{Z}_{PQ} vaut $\pm \frac{\pi}{4}$. Que peut-on dire alors du module de l'impédance ?

3. Montrer que pour une pulsation ω voisine de ω_0 , \underline{Z}_{PQ} peut s'écrire :

$$\underline{Z}_{PQ} \approx \frac{R}{m^2} (1 + 2jQ_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0}).$$

4. Mettre alors l'expression de la puissance moyenne absorbée par le dipôle PQ, lorsqu'il est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace U , sous la forme :

$$P = \frac{P_A}{1 + 4Q_0^2 \left(\frac{\delta\omega}{\omega_0} \right)^2} \text{ et expliciter } P_A.$$

N.B. : Dans toute la suite, on utilisera l'expression approchée de la question A.3.

B. Influence du couplage

Sur la ligne en amont du résonateur se propagent des ondes incidentes (indicée +) et réfléchie (indicée -), dont les amplitudes complexes peuvent s'écrire, dans le plan du

$$\text{couplage : } \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_+ + \underline{U}_- & \underline{U}_+ &= Z_c \underline{I}_+ \\ \underline{I} &= \underline{I}_+ - \underline{I}_- & \underline{U}_- &= Z_c \underline{I}_- \end{aligned}$$

où Z_c est l'impédance caractéristique réelle de la ligne.

1. On définit le coefficient de réflexion $\underline{\rho} = \frac{\underline{U}_-}{\underline{U}_+}$, exprimer $\underline{\rho}$ en fonction de \underline{Z}_{PQ} et Z_c .

2. On pose $r_0 = \frac{R}{Z_c m^2}$ et $\Delta = 2Q_0 \frac{\delta\omega}{\omega_0}$; vérifier $\underline{\rho} = \frac{[r_0(1 + j\Delta) - 1]}{[r_0(1 + j\Delta) + 1]}$.

3. Etude de la puissance absorbée par la cavité

En vue de la détermination des caractéristiques de la cavité, on procède à la mesure de la puissance P qu'elle absorbe lorsqu'une onde incidente de puissance connue P_0 est envoyée sur la ligne.

a. Justifier que la puissance absorbée par la cavité s'écrit : $P = P_0(1 - |\rho|^2)$.

b. Pour quelle pulsation le rapport $\frac{P}{P_0}$ est-il maximal ? Soit T_A la valeur obtenue.

c. Montrer qu'on peut définir le facteur positif Q_C (coefficient de qualité en charge) tel que $\frac{P}{P_0} = \frac{T_A}{1 + 4Q_C^2 \left(\frac{\delta\omega}{\omega_0} \right)^2}$ avec $T_A = \frac{4r_0}{(1 + r_0)^2}$ et $Q_C = \frac{r_0 Q_0}{(1 + r_0)}$.

On donne : $r_0 = 0,25$; $Q_0 = 10^4$.

Par ailleurs, on a pu déterminer que le coefficient de réflexion ρ était réel négatif à la pulsation ω_0 .

4. Déphasage introduit par le résonateur

Soit $\theta = \arg(\underline{\rho})$, exprimer θ en fonction de $\delta\omega = \omega - \omega_0$ au premier ordre en $\delta\omega$ si $0 < r_0 < 1$.

La ligne présente une certaine longueur, justifier que le déphasage entre ondes incidente et réfléchie en amont du tronçon de ligne s'écrit : $\theta = \theta_0 + k_c \delta f$ avec $\delta f = \frac{\delta \omega}{2\pi}$.

Numériquement k_c exprimé en radian par hertz vaut $k_c = -1,07 \cdot 10^{-6}$.

Deuxième partie : étude de l'oscillateur

L'oscillateur générant l'onde principale est constitué d'un composant actif non linéaire polarisé de telle sorte qu'il présente une résistance équivalente négative $-R$; il est couplé à une cavité si bien que le schéma équivalent de l'ensemble se présente comme indiqué figure 3.

On appliquera ici les lois de l'électrocinétique des régimes quasi stationnaires.

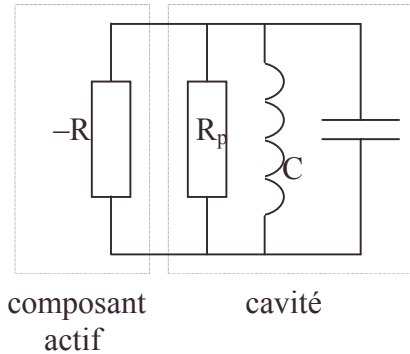


Figure 3

1. Justifier la nécessité de fournir de l'énergie à l'aide d'une alimentation externe pour obtenir un tel dispositif.

Que traduit la résistance R_p du schéma équivalent ?

2. Etablir à quelles conditions une oscillation peut apparaître dans le dispositif de la figure 3.

3. Puissance émise

Pour traduire l'existence d'un régime établi, on doit prendre en compte une variation des paramètres du schéma avec la puissance émise. On a relevé la courbe de la figure 4 donnant l'évolution du rapport $\frac{R_p}{R}$ avec P_e puissance émise par la cavité.

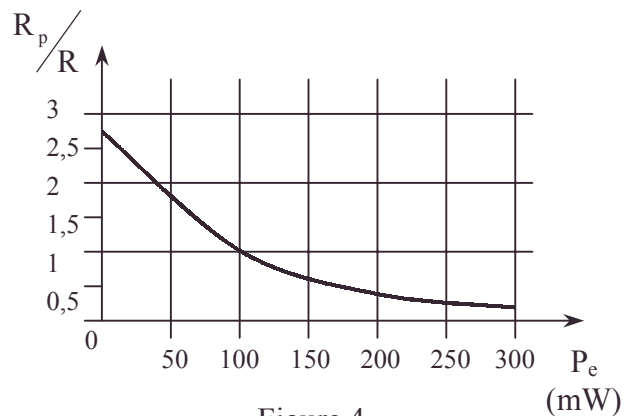


Figure 4

a. La condition obtenue à la question 2. pour le démarrage des oscillations à $P_e = 0$ est-elle satisfaite ?

b. Quelle sera, en régime permanent, la puissance P_e émise ?

4. Fréquence d'oscillation

a. Exprimer, en régime permanent, la fréquence f des oscillations.

On souhaite pouvoir commander la fréquence de l'oscillateur par une tension U_c , on place alors dans la cavité un élément capacitif dont la valeur dépend de la tension U_c . On admettra que l'effet obtenu peut être décrit en supposant que la capacité C du schéma équivalent de la figure 3 dépend de U_c . Soit C_0 la valeur de C pour une tension de commande nulle et $C = C_0 + \delta C$ l'expression de C pour une valeur quelconque de U_c .

b. Par un développement limité au premier ordre en δC , exprimer f sous la forme :

$f = f_0 + \delta f$ où δf est proportionnel à δC .

La loi de dépendance de f avec U_c est quasiment linéaire dans la plage de fonctionnement envisagée dans la suite et on a mesuré $f_0 = 10$ GHz pour une tension égale à $U_c = 0$.

c. Sachant que l'application d'une tension $U_c = 5$ V correspond à une diminution relative de la capacité de 1%, calculer la valeur de K_0 telle qu'on puisse écrire :

$f = f_0 + K_0 U_c$.

Troisième partie : élaboration de la grandeur d'erreur

On s'intéresse ici à l'ensemble délimité par des pointillés sur la figure 1. On se placera dans toute cette partie dans le cadre de l'approximation scalaire des ondes électromagnétiques ; on représentera donc en tout point une de ces ondes (incidente ou réfléchie) par une fonction scalaire du temps $a(t) = A_m \cos(\omega t)$ associée à un signal complexe $\underline{a}(t) = A_m \exp(j\omega t)$. Enfin, tous les tronçons de ligne seront supposés sans perte, la puissance moyenne véhiculée par l'onde $a(t)$ s'exprime $\frac{1}{2} \underline{a} \cdot \underline{a}^*$, où $*$ désigne la conjugaison des complexes.

L'onde principale $a(t)$ de fréquence f_1 émise par l'oscillateur, traverse un coupleur destiné à prélever une fraction $\beta \cdot a(t)$ (où β est réel) qui est envoyée sur l'accès n° 1 d'un répartiteur. Celui-ci est un composant linéaire à 4 accès numérotés de 1 à 4, pour lesquels on note a_i et b_i respectivement les ondes incidente et réfléchie sur l'accès i .

En régime sinusoïdal forcé, le répartiteur est défini par sa matrice de répartition, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \\ \underline{b}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \\ \underline{a}_4 \end{pmatrix} \quad \text{matrice de répartition.}$$

Les composants suivants sont placés sur les autres accès :

- Accès 2 : un modulateur défini par son coefficient de réflexion $\frac{\underline{a}_2}{\underline{b}_2} = K_2 \exp(j\theta_2)$.
- Accès 3 : le résonateur étudié en première partie et défini par son coefficient de réflexion $\frac{\underline{a}_3}{\underline{b}_3} = K_3 \cdot \exp(j\theta_3)$ où $K_3 = 0,6$ et $\theta_3 = \theta_0 - k_c \delta f$ si l'on pose $\delta f = f - f_0$.
- Accès 4 : détecteur quadratique délivrant un signal $d(t)$ exprimable par $d = K_4 \underline{b}_4 \underline{b}_4^*$ avec les hypothèses faites ci-dessus. En outre, le détecteur est adapté, ce qui permet d'écrire $a_4 = 0$.

1. Exprimer d en fonction de β , A_m , θ_3 , θ_2 et des coefficients K_i . Ordonner l'expression comme un polynôme en K_2

2. On admet que le résultat précédent est encore utilisable lorsque K_2 est variable dans le temps avec une fréquence F_0 très faible devant f .

On module le coefficient K_2 à l'aide d'un signal $u(t)$ généré à part, dont l'expression temporelle est $u(t) = U_m \cos(\Omega_0 \cdot t)$ avec $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = 200 \text{ kHz}$ et $U_m = 0,5 \text{ V}$. La loi

réglissant les variations de K_2 est $K_2 = R(1 + \alpha \cdot u(t))$ avec $R = 0,4$ et $\alpha = 0,25 \text{ V}^{-1}$.

Etablir : $d(t) = D_0 + D_1 \cos(\Omega_0 t) + D_2 \cos(2\Omega_0 t)$.

3. Déterminer à quelle condition sur θ_0 le terme D_1 est nul lorsque $\delta f = 0$. On supposera cette condition remplie dans la suite avec en outre $\sin(\theta_2 - \theta_0) < 0$.

4. Effectuer un développement au premier ordre en δf conduisant à une loi $D_1 = k_D \delta f$ et déterminer numériquement k_D sachant que $\beta = 0,1$ et $K_4 = 400 \text{ volt par watt}$.

5. Montrer que le dispositif de la figure 5, composé d'un multiplieur analogique délivrant un signal $p_t = k \cdot H_0 \cdot u(t) \cdot d(t)$ et d'un filtre passe-bas du premier ordre de

fréquence de coupure $F_c = \frac{1}{2\pi\tau}$ avec $\tau = 2.10^{-3}$ s, permet de délivrer un signal v_{er} proportionnel à : $f_0 - f$: $v_{er} = K_D (f_0 - f)$.

6. Numériquement $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$, $H_0 = 20$ et le gain à fréquence nulle du filtre est égal à $T_0 = 10$. Calculer v_{er} pour $\delta f = 100 \text{ kHz}$.

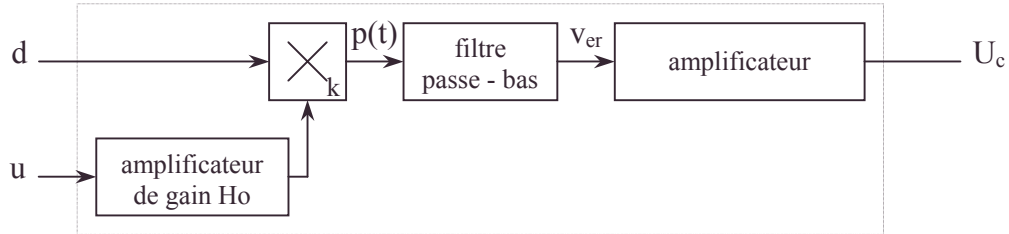


Figure 5 : détail du régulateur

Quatrième partie : étude de la régulation

Le régulateur indiqué figure 1 est constitué comme le montre la figure 5 ; le signal v_{er} élaboré précédemment et amplifié par un facteur λ réel est le signal de commande U_c de l'oscillateur de la partie II.

1. Justifier, à partir des études précédentes, le schéma fonctionnel de la figure 6.

Calculer numériquement λ pour que $S_0 = 1 + K_D \lambda K_0$ soit égal à 10^3 . On rappelle en outre que $\tau = 2.10^{-3}$ s.

2. Précision de la régulation

a. Si la fréquence centrale de l'oscillateur étudié à la partie II. est $f_C = f_0$, que vaut la fréquence f émise à l'équilibre du système ?

b. En pratique, un tel réglage n'est pas parfait : on ne parvient qu'à obtenir $f_C = f_0 + \Delta f_C$. Exprimer alors f et commenter le résultat.

Application numérique : $\Delta f_C = 1 \text{ GHz}$.

3. Sensibilité aux perturbations

On rend compte des perturbations électromagnétiques subies par le dispositif en ajoutant un terme f_P à f_C supposée, quant à elle, égale à f_0 dorénavant.

a. Lorsque f_P est un échelon de valeur $F_P = 1 \text{ GHz}$, étudier l'évolution temporelle de $\delta f(t) = f(t) - f_0$. Interpréter les valeurs observées en 0^+ et au bout d'un temps très long.

b. f_P est maintenant une perturbation sinusoïdale du temps de pulsation Ω très inférieure à ω_0 : $f_P(t) = F_P \cos \Omega t$.

Exprimer $\delta f(t) = f(t) - f_0$ en régime permanent et tracer, en échelles logarithmiques, le diagramme asymptotique de l'évolution du rapport des amplitudes $\delta f(t) / f_P$ en fonction de Ω . Commenter.

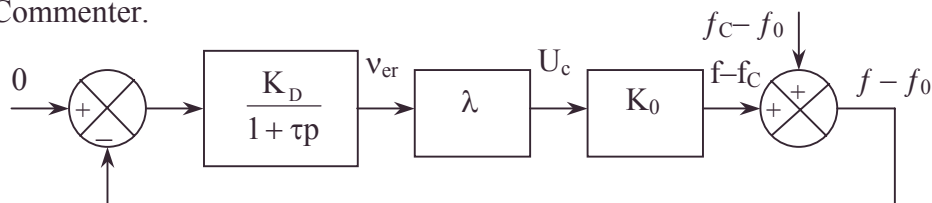


Figure 6

Autres concours ; Durée : 3h

Corrigé

I.A.1. Dans le secondaire $Z_s = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$ (cf. filtre passe-bande) \Rightarrow l'impédance

ramenée dans le primaire $Z_{PQ} = \frac{Z_s}{m^2} = \frac{R}{m^2} \left(1 + j \left(L \frac{\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right) \right)$, de la forme :

$$Z_{PQ} = \frac{R}{m^2} \left(1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \text{ avec } \frac{Q_0}{\omega_0} = \frac{L}{R}; Q_0 \omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow \omega_0^2 LC = 1;$$

$$Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}; Q_0 \text{ est le facteur de qualité.}$$

ω_0 est la pulsation de résonance en courant car $|\underline{I}| = \frac{|\underline{U}|}{Z_{PQ}}$ est maximum pour le

minimum de $|Z_{PQ}|$ que l'on aura pour $\omega = \omega_0$.

$$2. \arg Z_{PQ} = \arctan Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right); \tan \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) = \pm 1 \Leftrightarrow Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1.$$

$$\omega^2 \mp \frac{\omega \omega_0}{Q_0} - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm \frac{\omega_0}{2Q_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q_0} \right)^2 + \omega_0^2}.$$

$$\text{On ne retient que les } \omega > 0 : \omega' = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} - \frac{\omega_0}{2Q_0}; \omega'' = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} + \frac{\omega_0}{2Q_0}.$$

$$Q \text{ étant grand } \omega' = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q_0} + \frac{\omega_0}{8Q_0^2}; \omega'' = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q_0} + \frac{\omega_0}{8Q_0^2} \Rightarrow \Delta\omega' = -\frac{\omega_0}{2Q_0};$$

$$\Delta\omega'' = \frac{\omega_0}{2Q_0} \text{ en négligeant les termes d'ordre 2 en } \frac{1}{Q_0}.$$

$$|Z_{PQ}| = \frac{R}{m^2} \left(1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |Z_{PQ}|_{\omega' \text{ ou } \omega''} = \frac{R}{m^2} \sqrt{2} \text{ vu } Q_0 \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] = \pm 1 \text{ pour}$$

$\omega = \omega'$ et $\omega = \omega''$.

$$3. \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} = \frac{2\omega_0}{\omega_0^2} (\omega - \omega_0) \text{ pour } \omega \text{ voisin de } \omega_0.$$

$$\Rightarrow Z_{PQ} \approx \frac{R}{m^2} \left(1 + 2j Q_0 \frac{\delta \omega}{\omega_0} \right).$$

$$4. \underline{I} = \frac{\underline{U}}{Z_{PQ}}, P = \frac{R}{m^2} |\underline{I}_e|^2 = \frac{R U^2}{m^2 |Z_{PQ}|^2} = \frac{m^2}{R} U^2 \cdot \frac{1}{1 + 4Q_0^2 \left(\frac{\delta \omega}{\omega_0} \right)^2} \Rightarrow P_A = \frac{m^2 U^2}{R}.$$

$$B.1. \underline{\rho} = \frac{\underline{U}_-}{\underline{U}_+} = \frac{\underline{I}_-}{\underline{I}_+} \Rightarrow \underline{U} = \underline{U}_+ (1 + \underline{\rho}); \underline{I} = \underline{I}_+ (1 - \underline{\rho}).$$

$$\text{Or } Z_C = \frac{\underline{U}_+}{\underline{I}_+} \text{ et } Z_{PQ} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z_C \frac{(1 + \underline{\rho})}{1 - \underline{\rho}} \Rightarrow \underline{\rho} = \frac{Z_{PQ} - Z_C}{Z_{PQ} + Z_C}.$$

$$2. \forall u \text{ A.3. } \frac{Z_{PQ}}{Z_C} = r_0 (1 + j\Delta) \Rightarrow \underline{\rho} = \frac{r_0 (1 + j\Delta) - 1}{r_0 (1 + j\Delta) + 1}.$$

$$3.a. P_+ = P_0 = \frac{1}{2} \underline{U}_+ \underline{I}_+^*; P_r = P_- = \frac{1}{2} \underline{U}_- \underline{I}_-^* = \rho \rho^* P_0 = |\rho|^2 P_0.$$

• développement au premier ordre ou plus, facteur de qualité [ou de surtension], impédance ramenée dans le primaire par un transformateur, linéarisation, maximum, secondaire

Ce qui reste est absorbé : $P = P_+ - P_- = P_0(1 - |\rho|^2)$.

$$\text{b. } |\rho|^2 = \frac{(r_0 - 1)^2 + r_0^2 \Delta^2}{(r_0 + 1)^2 + r_0^2 \Delta^2} ; 1 - |\rho|^2 = \frac{4r_0}{(r_0 + 1)^2 + r_0^2 \Delta^2} = \frac{P}{P_0}.$$

On a un maximum de $\frac{P}{P_0}$ pour $\Delta = 0$; $\omega = \omega_0$ (résonance) ; $T_A = \frac{P_{\max}}{P_0} = \frac{4r_0}{(1 + r_0)^2}$.

$$\text{c. } \frac{P}{P_0} = \frac{T_A}{1 + \frac{r_0^2 \Delta^2}{(1 + r_0)^2}} = \frac{T_A}{1 + \frac{4r_0^2 Q_0^2 \left(\frac{\delta \omega}{\omega_0}\right)^2}{(1 + r_0)^2}} = \frac{T_A}{1 + 4Q_C^2 \left(\frac{\delta \omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow Q_C = \frac{r_0}{1 + r_0} Q_0.$$

A.N. : $T_A = 0,64$; $Q_C = 32000$.

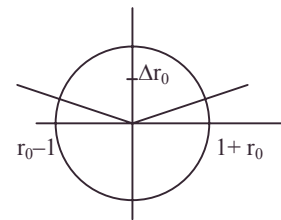
4. $\arg \rho = \arg[r_0 - 1 + j\Delta r_0] - \arg[r_0 + 1 + j\Delta r_0]$, avec $0 < r_0 < 1$, on a la représentation sur \mathbb{C} sur la figure ci-après, précisant les arguments.

$$\arg \rho = \left(\pi - \arctan \frac{r_0 \Delta}{1 - r_0} \right) - \arctan \frac{\Delta r_0}{1 + r_0} ;$$

Or au 1^{er} ordre, $\arctan x = x$.

$$\arg \rho = \pi - \frac{r_0 \Delta}{1 - r_0} - \frac{r_0 \Delta}{1 + r_0} = \pi - \frac{4r_0 Q_0}{1 - r_0^2} \frac{\delta \omega}{\omega_0} = \pi - \frac{4r_0 Q_0}{1 - r_0^2} \frac{\delta f}{f_0}.$$

$$\theta = \theta_0 + k_c \delta f \text{ avec } \theta_0 = \pi \text{ et } k_c = \frac{-4r_0 Q_0}{(1 - r_0^2) f_0}.$$



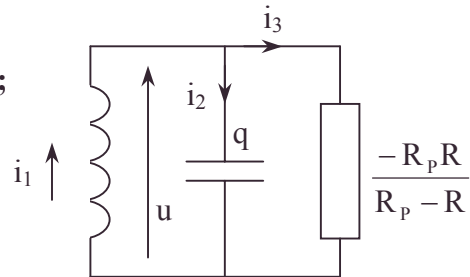
II.1.a. Une résistance positive consomme de la puissance (effet Joule) ; une résistance négative permet par le biais des alimentations non représentées d'apporter une puissance disponible pour compenser les autres consommations ; une alimentation externe est indispensable car l'oscillateur représenté n'a évidemment pas de générateurs.

b. R_p traduit la consommation d'énergie ; effet Joule dans les parois de la cavité, énergie prélevée pour le coupleur.

$$2. u = \frac{q}{C} = \frac{R R_p}{R - R_p} i_3 = -L \frac{di_1}{dt} ; i_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{C du}{dt} ;$$

$$\text{or } i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{-u}{L} = \frac{C d^2 u}{dt^2} + \frac{R - R_p}{R_p R} \frac{du}{dt}.$$



$C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R - R_p}{R R_p} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0$; la naissance d'oscillations à partir d'une cause minime amplifiée suppose un "amortissement négatif" soit $R - R_p < 0$.

3.a. Pour $P_e = 0$: $\frac{R_p}{R} = 2,7 \Rightarrow R < R_p$: il y a démarrage.

b. L'absence d'amplification ou d'atténuation sur une durée d'observation grande $\Rightarrow R = R_p$ soit $P_e \approx 100 \text{ mW}$.

$$4.a. f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ (cf 2. quand } R - R_p = 0 \text{)}.$$

$$\text{b. } f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_0 + \delta C)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}\left(1 + \frac{\delta C}{C_0}\right)^{\frac{1}{2}}} = f_0 - \frac{f_0}{2} \frac{\delta C}{C_0}.$$

$$\text{avec } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \text{ et } \delta f = -\frac{f_0}{2} \frac{\delta C}{C_0}.$$

$$\text{c. } \frac{\delta C_1}{C_0} = -0,01 \rightarrow U_{c_1} = 5 \text{ V or } \delta f = K_0 U_c = -\frac{f_0}{2} \frac{\delta C_1}{C_0} \Rightarrow K_0 = -\frac{f_0}{2U_{c_1}} \frac{\delta C_1}{C_0};$$

$$\text{AN : } K_0 = 10 \text{ MHz.V}^{-1}.$$

$$\text{III.1. } \underline{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{a}_2 - \underline{a}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_2 e^{j\theta_2} \underline{b}_2 - K_3 e^{j\theta_3} \underline{b}_3)$$

$$\text{or vu la matrice et } \underline{a}_4 = 0 : \underline{b}_2 = \frac{\underline{a}_1}{\sqrt{2}}; \underline{b}_3 = \frac{\underline{a}_1}{\sqrt{2}};$$

$$\underline{b}_4 = \frac{1}{2} \underline{a}_1 (K_2 e^{j\theta_2} - K_3 e^{j\theta_3}); \underline{b}_4^* = \frac{1}{2} \underline{a}_1^* (K_2^* e^{-j\theta_2} - K_3^* e^{-j\theta_3}) \text{ car } K_3 \in \mathbb{R};$$

$$d = K_4 \frac{|\underline{a}_1|^2}{4} \left(|K_2|^2 + K_3^2 - K_2 K_3 (e^{j(\theta_2 - \theta_3)} + e^{-j(\theta_2 - \theta_3)}) \right);$$

$$d = K_4 \beta^2 \frac{A_m^2}{4} \left((|K_2|^2 - 2K_2 K_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)) + K_3^2 \right);$$

$$2. K_2 = R(1 + \alpha u) \Rightarrow |K_2|^2 = R^2(1 + 2\alpha u + \alpha^2 u^2);$$

$$\text{ou encore } |K_2|^2 = R^2 \left(1 + 2\alpha U_m \cos \Omega_0 t + \frac{\alpha^2}{2} U_m^2 + \frac{\alpha^2}{2} U_m^2 \cos 2\Omega_0 t \right);$$

$$\Rightarrow d = D_0 + D_1 \cos \Omega_0 t + D_2 \cos 2\Omega_0 t \text{ avec :}$$

$$D_0 = K_4 \beta^2 \frac{A_m^2}{4} \left(R^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} U_m^2 \right) - 2R K_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + K_3^2 \right);$$

$$D_1 = K_4 \beta^2 \frac{A_m^2}{4} (-2\alpha U_m R K_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + 2R^2 \alpha U_m);$$

$$D_2 = K_4 \beta^2 \frac{A_m^2}{8} \alpha^2 U_m^2.$$

$$\theta_3 = \theta_0 - k_c \delta f.$$

$$D_1 = K_4 \beta^2 \frac{A_m^2}{4} [2R^2 \alpha U_m - 2\alpha U_m R K_3 \cos(\theta_2 - \theta_0 + k_c \delta f)];$$

$$\text{or } \cos(\theta_2 - \theta_0 + k_c \delta f) = \cos(\theta_2 - \theta_0) \cos k_c \delta f - \sin(\theta_2 - \theta_0) \sin k_c \delta f;$$

$$\cos k_c \delta f = 1 \text{ et } \sin k_c \delta f = k_c \delta f;$$

$$D_1 = K_4 \beta^2 \frac{A_m^2}{2} R \alpha U_m [(R - K_3 \cos(\theta_2 - \theta_0)) + k_c \delta f K_3 \sin(\theta_2 - \theta_0)];$$

$$D_1 = 0 \text{ pour } \delta f = 0 \Rightarrow 0 = R - K_3 \cos(\theta_2 - \theta_0)$$

$$4. \text{ Il reste : } D_1 = K_4 \frac{\beta^2}{2} A_m^2 R \alpha U_m k_c K_3 \sin(\theta_2 - \theta_0) \delta f;$$

$$k_D = \frac{1}{2} K_A \beta^2 A_m^2 R \alpha U_m k_C K_3 \sin(\theta_2 - \theta_0) ; \text{ or } \sin(\theta_2 - \theta_0) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_2 - \theta_0)} .$$

$$\text{On dit que } \sin(\theta_2 - \theta_0) < 0 \text{ dans l'énoncé et } D_1 = 0 \Rightarrow \cos(\theta_2 - \theta_0) = \frac{R}{K_3}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta_2 - \theta_0) = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{K_3^2}} .$$

$$k_D = -\frac{1}{2} K_A \beta^2 A_m^2 R \alpha U_m k_C K_3 \sqrt{1 - \frac{R^2}{K_3^2}} ;$$

$$\text{Or } P_e = \frac{1}{2} A_m^2 = 100 \text{ mW} \Rightarrow k_D = -9,6 \cdot 10^{-2} \text{ V.Hz}^{-1} .$$

$$\begin{aligned} 5. \quad p(t) &= U_m k H_0 D_0 \cos \Omega_0 t + k H_0 U_m D_1 \cos^2 \Omega_0 t + k H_0 U_m D_2 \cos 2 \Omega_0 t \cdot \cos \Omega_0 t ; \\ p(t) &= P_0 + P_1 \cos \Omega_0 t + P_2 \cos 2 \Omega_0 t + P_3 \cos 3 \Omega_0 t . \end{aligned}$$

$$P_0 = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} k H_0 U_m D_1 ;$$

$$F_C = 80 \text{ Hz} \ll F_0 = 200 \text{ kHz} ; \text{ le filtre passe bas ne laisse passer que } P_0 = \frac{1}{2} k H_0 U_m D_1 ;$$

$$P_0 = \frac{1}{2} k H_0 U_m k_D \delta f \text{ en le multipliant par } T_0, \Rightarrow K_D = -\frac{1}{2} k H_0 U_m k_D T_0 \text{ car } \delta f = -(f_0 - f) ; \text{ AN : } K_D = 4,8 \cdot 10^{-8} \text{ V.Hz}^{-1} .$$

$$6. \quad v_{er} = K_D \delta f \text{ AN : } \delta f = 10^5 \text{ Hz} ; v_{er} = 4,8 \text{ mV} .$$

IV.1.a. Le bloc $\frac{K_d}{1 + \tau p}$ représente l'action du multiplieur et du filtre passe bas de caractéristique $\tau = \frac{1}{\omega_C} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. K_D a été déterminé à $\omega = 0$. De fait, pour les

fréquences $f < F_C$, tout se passe comme si $\tau p = 0$.

b. Le bloc λ représente l'amplificateur de tension.

c. Le bloc K_0 représente l'oscillateur qui donne $f = f_C + K_0 U_C$.

d. $f_C - f_0$ est la reproduction de la grandeur de sortie de l'oscillateur quand $U_C = 0$ et sert de consigne à l'additionneur.

$$e. \quad \lambda = \frac{S_0 - 1}{K_D K_0} ; \text{ A.N. : } \lambda = 2080 .$$

$$\text{N.B. : pour } f < F_C : \frac{K_D}{1 + \tau p} \lambda K_0 \# K_D \lambda K_0 \# S_0 - 1 .$$

$$2.a. \text{ Avant l'additionneur : } f - f_C = (S_0 - 1)(f_0 - f) \Rightarrow f = \frac{f_C + (S_0 - 1)f_0}{S_0} .$$

$$b. \text{ On a : } f_C = f_0 + \Delta f_C \Rightarrow f = f_0 + \frac{\Delta f_C}{S_0} \text{ soit } \Delta f = \frac{\Delta f_C}{S_0} .$$

On voit l'intérêt de la régulation qui divise l'incertitude par 1000 ; AN : $\Delta f = 10 \text{ MHz}$.

$$3. \quad f_C = f_0 + f_p ; \text{ désignons par } F_p = \text{TL}[f_p] \text{ et par } \Delta F = \text{TL}[\delta f] .$$

Le schéma fonctionnel s'écrit $\Delta F = F_p + \frac{K_D \lambda K_0}{1 + \tau p} [-\Delta F]$. Le signe $-$ provient du soustracteur.

$$\Delta F \frac{[1 + \tau p + K_D \lambda K_0]}{1 + \tau p} = F_p \text{ ou encore } S_0 \Delta F \frac{[1 + \tau' p]}{[1 + \tau p]} = F_p \text{ avec } \tau' = \frac{\tau}{S_0}.$$

a. On peut résoudre par l'équation différentielle $\delta f + \tau' \frac{d}{dt} \delta f = \frac{f_p}{S_0} + \frac{\tau}{S_0} \frac{df_p}{dt}$:

$$\delta f = \frac{F_p}{S_0} \left[1 + \frac{\tau - \tau'}{\tau'} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] : \text{aussi on a : } t = +0 \quad \delta f = F_p ; t \rightarrow \infty \quad \delta f = \frac{F_p}{S_0}.$$

On voit l'intérêt de la régulation qui s'établit.

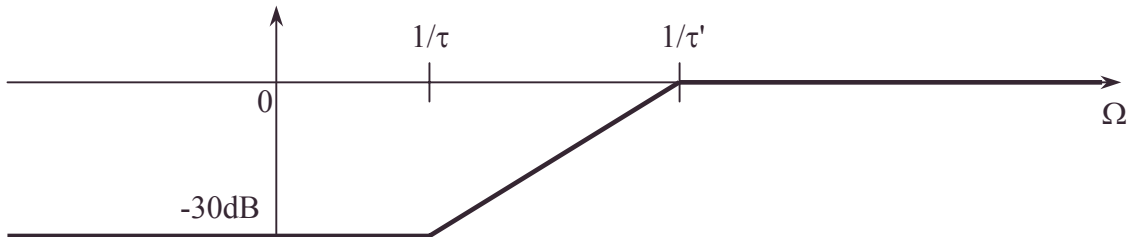
Le théorème de la valeur finale et de la valeur initiale de la transformation de Laplace pourraient être utilisés.

b. $\delta f = A \cos(\Omega t + \varphi)$, et avec la notation complexe où $p = j\omega$, $\frac{\delta f}{S_0} = \frac{F_p}{S_0} \frac{1 + j\Omega\tau}{1 + j\Omega\tau'}$.

En régime permanent : avec $\delta f = \frac{F_p}{S_0} \sqrt{\frac{1 + (\Omega\tau)^2}{1 + (\Omega\tau')^2}}$; $\varphi = \arctan \Omega\tau - \arctan \Omega\tau'$.

On remarquera que f est proportionnelle à une énergie ; on s'intéressera à :

$$10 \log \left(\frac{\delta f}{F_p} \right) = -10 \log S_0 + 5 \log (1 + (\Omega\tau)^2) - 5 \log (1 + (\Omega\tau')^2).$$



à F_p donné, δf est plus faible à $\Omega < \frac{1}{\tau}$ à ce qui se passe ensuite ;

$$\Omega \ll \frac{1}{\tau} \quad \left| \frac{\delta f}{F_p} \right| = \frac{1}{S_0} \quad \text{la rétroaction joue un bon rôle.}$$

$$\Omega \gg \frac{1}{\tau'} \quad \left| \frac{\delta f}{F_p} \right| = 1 \quad \text{la rétroaction n'agit pas.}$$

6.3.7. Diode laser et mesure de distance interférométrique

Voir page 1418.

6.3.8. Fonction retard

Voir page 1008.

6.3.9. Traceur de courbe par courroie

Voir page 1077.

6.3.10. Vaisseaux sanguins

Voir page 481.

7. Physique ondulatoire

7.1. Ondes électromagnétiques

Appartient aux programmes de MP, PSI, PC, PT, TSI1, TPC

7.1.1. Modèle de l'onde électromagnétique plane

L'objet de ce problème est la recherche de certaines propriétés de l'onde électromagnétique plane dans un milieu illimité sans qu'il soit nécessaire de procéder à l'intégration de l'équation de propagation. Le milieu considéré est caractérisé par les constantes ϵ_0 et μ_0 du vide : la conductivité électrique et la densité spatiale de charge électrique sont nulles. Dans ces conditions, les champs \vec{E} et \vec{B} obéissent aux équations :

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \textcircled{2} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \textcircled{3} \quad \text{div} \vec{E} = 0 \quad \textcircled{4} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

Le milieu étudié est rapporté à un repère orthonormé (O, x, y, z) et l'on suppose qu'en tout point d'un plan P perpendiculaire à Oz les champs ne dépendent ni de x ni de y (onde plane). Autrement dit, on posera : $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$; $\vec{B} = \vec{B}(z, t)$.

1. Donner les 6 expressions résultant de la projection sur les axes des équations $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$. Montrer qu'il n'existe sur Oz aucune composante des champs dépendant à la fois de z et de t .

2. On veut montrer que chacune des composantes transversales B_x et B_y du champ \vec{B} s'exprime par une relation linéaire à partir des composantes transversales E_x et E_y du champ \vec{E} .

On posera : $\textcircled{5} \quad B_x = \alpha E_x + \beta E_y$; $\textcircled{6} \quad B_y = \gamma E_x + \delta E_y$, α, β, γ et δ étant des coefficients réels.

Trouver une relation entre α et δ en considérant le fait que le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{B}$ est indépendant du choix des axes Ox et Oy .

De même en considérant le fait que le produit vectoriel $\vec{E} \wedge \vec{B}$ est également indépendant du choix de ces mêmes axes on trouvera une relation entre β et γ .

3. Calculer α , β , γ et δ en fonction de ϵ_0 et μ_0 .

4. Montrer que les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires.

5. On considérera ici le cas où : $B_x = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_y$ et $B_y = -\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_x$.

Par ailleurs, on pose : $E_x = E_0 e^{i(Kz - \omega t)}$. Calculer K en fonction de ϵ_0 , μ_0 et ω .

Calculer la vitesse de propagation de l'onde.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

$$\begin{aligned} \text{1.a.} \quad & -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} & -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ & \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial B_x}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned} \quad (*)$$

$$0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$0 = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\text{b. } \operatorname{div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Conclusion : soit aucune composante sur Oz dépendant explicitement de z et de t (on met ainsi à part du problème certaines ondes stationnaires).

2.a. $\vec{E} \cdot \vec{B} = \alpha E_x^2 + (\beta + \gamma) E_x E_y + \delta E_y^2 + B_z E_z$ est un invariant des axes.

Permutons le rôle des variables x et y en changeant simultanément z en -z pour garder le trièdre direct : on voit $\alpha = \delta$.

b.

$$\vec{E} \wedge \vec{B} \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \gamma E_x^2 + \underbrace{\delta E_y E_x - \alpha E_y E_x - \beta E_y^2}_0 \end{vmatrix}.$$

Permutons le rôle des variables x et y : on voit $\gamma = -\beta$.

3. Remplaçons B_x et B_y :

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial E_x}{\partial t} - \beta \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = \beta \frac{\partial E_x}{\partial t} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \beta \frac{\partial E_x}{\partial z} - \alpha \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial E_x}{\partial z} + \beta \frac{\partial E_y}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

En reportant les dérivées spatiales, on obtient un système linéaire homogène :

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = (\beta^2 - \alpha^2) \frac{\partial E_x}{\partial t} + (-2\alpha\beta) \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad \forall \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = 2\alpha\beta \frac{\partial E_x}{\partial t} + (\beta^2 - \alpha^2) \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad \forall \frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

$$\Rightarrow \beta^2 - \alpha^2 = \varepsilon_0 \mu_0; \quad \alpha\beta = 0 \text{ soit } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0.$$

La compatibilité évidente exige : $\alpha = 0$ et $\beta = \pm\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. On le vérifiera si on doute de l'évidence. Conclusion : $\alpha = \delta = 0$; $\beta = -\gamma = \pm\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

$$\text{4. } B_x = \frac{E_y}{c}; \quad B_y = -\frac{E_x}{c} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = E_z B_z.$$

$$\text{Or } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}(z, t) \Rightarrow B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0.$$

5. (*) de **1.a.** donne $i K E_z = +\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} (-i\omega) E_x \Rightarrow K = -\omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ car on a choisi le signe de γ .

La phase reste constante quand $Kz - \omega t = \varphi_1$.

Soit $z = \frac{\varphi_1}{K} + \frac{\omega t}{K}$ soit pour un déplacement de vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{K} = -\left(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\right)^{-1} = -C.$$

7.1.2. Pression de radiation

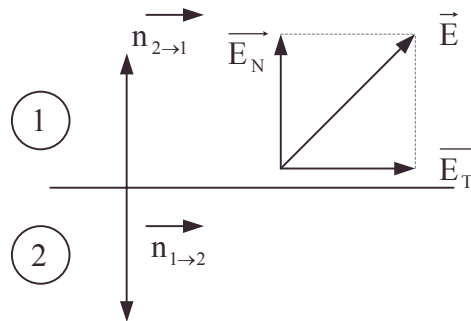
Existence et calcul de la pression de radiation

Dans toute cette partie, l'espace est rapporté à un système d'axes (Ox, y, z) associés à la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On rappelle les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{div} \vec{D} = \rho ; \text{div} \vec{B} = 0 ; \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{ainsi que les relations de}$$

continuité pour les champs à la traversée de la surface de séparation de deux milieux :

$$\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2} ; \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{2 \rightarrow 1} + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \sigma ; \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{2 \rightarrow 1} + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 ; \vec{H}_{2T} - \vec{H}_{1T} = \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} .$$

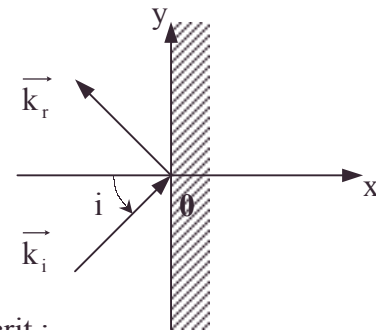


A. Aspect ondulatoire : réflexion sous incidence oblique sur un plan métallique parfait

Soit une onde électromagnétique plane, monochromatique, de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$,

polarisée rectilignement, de vecteur d'onde $\vec{k}_i = k \cos i \vec{e}_x + k \sin i \vec{e}_y$, se propageant dans le demi-espace $x < 0$, caractérisée par son vecteur champ électrique (écrit en notation complexe) $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{e}_z$, et son champ magnétique \vec{B}_i .

Cette onde, dite incidente, rencontre sous l'angle d'incidence i un miroir métallique parfait dont la surface plane est en $x = 0$, et donne naissance à une onde réfléchie, caractérisée par son vecteur d'onde \vec{k}_r et les champs \vec{E}_r et \vec{B}_r .



1. Acheter la description de l'onde incidente en donnant l'expression de k en fonction de ω et l'expression complète du champ magnétique \vec{B}_i .

2. Montrer que le vecteur d'onde de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\vec{k}_r = -k \cos i \vec{e}_x + k \sin i \vec{e}_y .$$

3. En utilisant les relations de continuité en $x = 0$, et les propriétés des métaux parfaits, déterminer les champs \vec{E}_r et \vec{B}_r de l'onde réfléchie.

4. Montrer que la surface du miroir est le siège de courants superficiels, dont on déterminera le vecteur densité surfacique de courants \vec{j}_S .

5. Décrire avec soin l'onde obtenue dans le demi-espace $x < 0$ par superposition des ondes incidente et réfléchie.

6. Montrer que le champ magnétique de cette onde exerce sur les courants une force normale au miroir. Un élément de surface dS du miroir est soumis à la force $d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{j}_S \wedge \vec{B} dS$; justifier cette expression et en particulier la présence du facteur $\frac{1}{2}$.

Montrer que la valeur moyenne sur le temps de $\frac{dF}{dS}$ est $\bar{\omega} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 i$ ($\bar{\omega}$ est appelée "pression de radiation").

7. Soit l'onde plane progressive décrite en 1. ; déterminer son vecteur de Poynting, et la densité volumique moyenne d'énergie. Montrer que la puissance moyenne traversant un élément de surface dS normal à Ox , vaut $\bar{dP} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} dS \cos i$.

Application numérique : calculer le champ électrique E_0 de l'onde d'un faisceau laser dont la section a $15 \mu\text{m}$ de diamètre et qui transporte une puissance de 10 mW.

B. Aspect corpusculaire

A l'onde plane monochromatique incidente décrite en A, on peut associer un faisceau de photons de fréquence ν , se propageant à la vitesse c dans la direction de \vec{k}_i .

1. Quelle est l'énergie \mathcal{E} d'un photon et sa quantité de mouvement \vec{p} ? Exprimer la densité de photons dans le faisceau (nombre par unité de volume) en fonction de E_0 .

2. Le faisceau rencontre une surface S inclinée de l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$ sur la direction de propagation des photons, et les photons subissent sur cette surface un choc élastique. Après avoir évalué la variation de quantité de mouvement d'un photon au cours du choc et le nombre de photons frappant S pendant l'intervalle de temps dt , montrer que S est soumise à une force normale de module $F = \bar{\omega} S$ ($\bar{\omega}$ calculée au A.6.).

3. Dans le cas d'une surface parfaitement absorbante, justifier le résultat : $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 i$.

C. Exemple d'application au laboratoire

Soit une bille sphérique de rayon R , parfaitement réfléchissante, placée dans une région où se propage une onde électromagnétique plane dont l'amplitude du champ électrique est E_0 . Calculer la force à laquelle est soumise la bille.

Application numérique : calculer la force exercée par un faisceau laser d'une puissance de 10 mW, de $15 \mu\text{m}$ de diamètre, sur une bille de $1 \mu\text{m}$ de diamètre. Comparer au poids de la bille en la supposant de masse volumique 10^3 kg/m^3 (plastique métallisé). Quelle devrait être la puissance du laser à utiliser pour réaliser une expérience de lévitation de la bille dans le vide ?

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

$$\text{I.A.1. } \vec{E}_i = E_0 \vec{e}_z e^{i(\omega t - k_i x \cos i - k_i y \sin i)} ; \vec{k}_i = \begin{pmatrix} k \cos i \\ k \sin i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i = \frac{k E_0}{\omega} (\sin i \vec{e}_x - \cos i \vec{e}_y) e^{i(\omega t - k_i r)}$$

2. La loi de Descartes à la réflexion donne : \vec{k}_r symétrique de \vec{k}_i par rapport au miroir.

$$\vec{k}_r = -k \cos i \vec{e}_x + k \sin i \vec{e}_y \text{ avec } k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2.$$

- choc élastique de photons, densité volumique de l'énergie électromagnétique, énergie d'un photon, faisceau de photons d'un laser [pression de radiation], quantité de mouvement d'un photon, surface parfaitement absorbante, surface parfaitement réfléchissante, vecteur de Poynting

3.a. Ecrivons la continuité de \vec{E}_{tangiel} en $x = 0$:

En $x = +0$; $\vec{E} = 0$ cf. métal parfait.

En $x = -0$; $\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{i \ x=0} + \vec{E}_{r \ x=0}$ avec $\vec{E}_r = E_{r_0} \vec{e}_z e^{i(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})}$.

Onde de même type que l'onde incidente. (Les symétries des causes se retrouvent dans les conséquences).

En $y = 0$; $\vec{E}_{\text{tangiel}_{x=0}} = E_0 \vec{e}_z e^{i\omega t} + E_{r_0} \vec{e}_z e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{r_0} = -E_0 \vec{e}_z$.

$\vec{E}_r = -E_0 \vec{e}_z e^{i(\omega t + xk \cos i - yk \sin i)}$.

$$\text{b. } \vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \vec{E}_r = -\frac{k E_0}{\omega} (\sin i \vec{e}_x + \cos i \vec{e}_y) e^{i(\omega t + xk \cos i - yk \sin i)}.$$

4. Utilisons la relation de discontinuité : $\vec{H}_{2 \text{ tang}} - \vec{H}_{1 \text{ tang}} = \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ avec $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_x$.

a. $x = +0$; $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}$ vecteur constant nul vu l'absence de donnée. $\vec{H}_{2 \text{ tang}} = \vec{0}$.

b. $x = -0$; $\vec{B}_{\text{total}_{x=0}} = \vec{B}_{i \ x=0} + \vec{B}_r = \frac{-2k E_0}{\omega} \cos i e^{i(\omega t - ky \sin i)} \vec{e}_y$;

\vec{B}_{total} est tangiel.

c. $\vec{j}_S \wedge \vec{e}_x = \frac{2k}{\mu_0 \omega} \cos i e^{i(\omega t - ky \sin i)} \vec{e}_y \Rightarrow \vec{e}_x \wedge (\vec{j}_S \wedge \vec{e}_x) = \vec{e}_x^2 \vec{j}_S - \underbrace{(\vec{e}_x \vec{j}_S)}_{=0} \vec{e}_x$.

$$\Rightarrow \vec{j}_S = \frac{2k E_0}{\mu_0 \omega} \cos i e^{i(\omega t - ky \sin i)} \vec{e}_z.$$

5.a. $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{e}_z (E_0 e^{i(\omega t - kx \cos i - ky \sin i)} - E_0 e^{i(\omega t + kx \cos i - ky \sin i)})$;

$\vec{E} = \vec{e}_z E_0 e^{i(\omega t - ky \sin i)} (e^{-i kx \cos i} - e^{i kx \cos i}) = -2i \vec{e}_z E_0 e^{i(\omega t - ky \sin i)} \sin(kx \cos i)$.

b. $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{k}{\omega} e^{i(\omega t - ky \sin i)} E_0 \left[\sin i (e^{-i k \cos i x} - e^{i k \cos i x}) \vec{e}_x - \cos i \vec{e}_y (e^{-i k \cos i x} + e^{i k \cos i x}) \right]$

$$\vec{B} = \frac{-2k E_0}{\omega} e^{i(\omega t - ky \sin i)} \left[i \sin i \sin(kx \cos i) \vec{e}_x + \cos i \cos(kx \cos i) \vec{e}_y \right].$$

Attention à l'ambiguïté entre i angle d'incidence et i complexe tel que ($i^2 = -1$).

Commentaire descriptif

a. Onde progressive monochromatique (associée à des ondes stationnaires).

α. Pour E_z , on a une onde se propageant selon Oy à la vitesse $v_\phi = \frac{\omega}{k \sin i}$, avec une

longueur d'onde $\frac{2\pi}{k \sin i}$.

β. Pour \vec{B} , on a une onde se propageant selon Oy à la vitesse $v_\phi = \frac{\omega}{k \sin i}$ avec une

longueur d'onde $\frac{2\pi}{k \sin i}$.

b. Ondes stationnaires

α. Selon Ox, on a une onde stationnaire B_x en phase avec E_z de longueur d'onde identique $\frac{2\pi}{k \cos i}$).

β. Selon Oy, on a une onde stationnaire B_y en quadrature avec E_z (de longueur d'onde identique $\frac{2\pi}{k \cos i}$).

6.a. La formule de Laplace en un point N est (pour un courant surfacique) :

$$\vec{dF} = \vec{j}_s(N, t) dS \wedge \vec{B}(N, t) \text{ orthogonale au miroir qui contient } \vec{j}_s.$$

La valeur de continuité (adoptée en électrostatique et prolongeable en électromagnétisme) est : pour \vec{E} , $\vec{E}(N, t) = \frac{\vec{E}(M, t)}{2}$, M étant un point extérieur au métal infiniment voisin. De même pour \vec{B} couplé en électromagnétisme avec \vec{E} , $\vec{B}(N, t) = \frac{\vec{B}(M, t)}{2}$.

Ainsi $\vec{dF} = \frac{\vec{j}_s}{2}(N, t) \wedge \vec{B}(M, t) dS$, M infiniment voisin de N mais extérieur au métal.

b. Seulement B_y contribue à la force normale.

$$\vec{j}_s \wedge \vec{B}_y = \frac{-4k^2 E_0^2}{\omega^2 \mu_0} \cos^2(\omega t - k y \sin i + \varphi) \cos^2 i \vec{e}_x.$$

$$\frac{\vec{dF}}{dS} = \frac{1}{2} \frac{4k^2 E_0^2}{\omega^2 \mu_0} \cos^2 i \vec{e}_x \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - k y \sin i + \varphi) dt}_{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\vec{dF}}{dS} = \vec{\omega e}_x \text{ avec } \vec{\omega} = \frac{k^2 E_0^2 \cos^2 i}{\omega^2 \mu_0} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 i \text{ car } k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2.$$

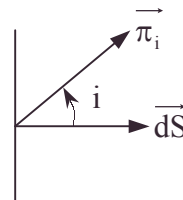
$$7.a. \vec{\pi}_i = \vec{E}_i \wedge \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} = \vec{E}_i \wedge \left(\frac{\vec{k}_i}{\mu_0 \omega} \wedge \vec{E}_i \right) = \frac{E^2 \vec{k}_i}{\mu_0 \omega}.$$

$$b. \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_i^2 + \frac{1}{2} \frac{B_i^2}{\mu_0} \text{ or } \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i \Rightarrow \frac{k^2 E_i^2}{\omega^2} = B_i^2;$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_i^2 \left(1 + \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} \right) = \epsilon_0 E_i^2; \quad \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2.$$

$$c. dP = \vec{\pi}_i \cdot d\vec{S} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega} k \cos i dS.$$

$$\overline{dP} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 k}{\mu_0 \omega} \cos i dS = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos i dS$$



$$d. \frac{\overline{dP}}{dS} = \frac{\overline{P}}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{8 \mu_0 c \overline{P}}{\pi d^2}}; \text{ AN : } E_0 = 2.10^5 \text{ V/m.}$$

B.1.a. $\mathcal{E} = h\nu$

b. Vu l'invariant relativiste $m^2 c^4 + p^2 c^2 = \mathcal{E}^2$ et $m = 0$:

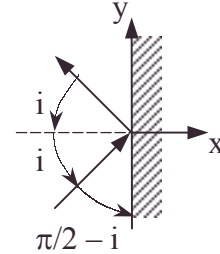
$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u}_i ; \vec{u}_i \text{ vecteur unitaire} ; \vec{u}_i = \frac{\vec{k}_i}{k} ; \vec{p} = \frac{h\nu \vec{k}_i}{kc}.$$

$$\text{c. } \frac{dW}{d\tau} = nh\nu = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \Rightarrow n = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{h\nu}.$$

$$\text{2.a. } \Delta p_x = \frac{h\nu}{kc} (\vec{k}_r \cdot \vec{e}_x - \vec{k}_i \cdot \vec{e}_x) = \frac{-2h\nu}{kc} \cos i ;$$

$$\Delta p_x = \frac{-2h\nu}{c} \cos i.$$

$$\Delta p_y = \frac{h\nu}{kc} (\vec{k}_r \cdot \vec{e}_y - \vec{k}_i \cdot \vec{e}_y) = 0.$$



b. Nombre de photons frappant S pendant dt : dn' ;

$$\overline{dP} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos i dS \Rightarrow \overline{P} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos i S \Rightarrow h\nu dn' = \overline{P} dt ; dn' = \frac{\epsilon_0 c S \cos i E_0^2}{2h\nu} dt.$$

c. Si les photons connaissent une variation de quantité de mouvement moyenne Δp_x , ils subissent chacun une force moyenne $\frac{\Delta p_x}{\Delta t}$ et la paroi subit l'action opposée, pour

$$\text{l'ensemble} : F_x = \frac{-\Delta p_x}{\Delta t} \Delta n' = \frac{2h\nu}{c} \cos i \cdot \frac{\epsilon_0 c S \cos i}{2h\nu} E_0^2 = \epsilon_0 S \cos^2 i E_0^2 = S \overline{\omega} \quad \text{avec} \\ \overline{\omega} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 i.$$

3. Si la paroi est parfaitement absorbante : $\Delta' p_x = 0 - \frac{h\nu}{kc} \vec{k}_i \cdot \vec{e}_x = -\frac{h\nu}{c} \cos i.$

$$F'_x = \frac{-\Delta' p_x}{\Delta t} \Delta n' = \frac{h\nu}{c} \cos i \cdot \frac{\epsilon_0 c S \cos i}{2h\nu} E_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 S \cos^2 i E_0^2 = S \overline{\omega'},$$

$$\text{avec } \omega' = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 i.$$

$$\text{C.a. } d\vec{F} = -\overline{\omega} d\vec{S} \Rightarrow dF_x = \overline{\omega} dS \cos i,$$

$$\text{avec } dS = 2\pi R^2 \sin i di.$$

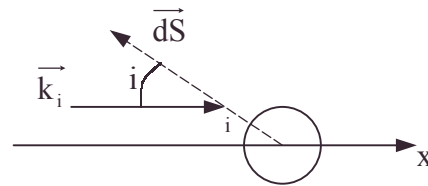
$$F_x = \int dF_x = 2\pi \epsilon_0 E_0^2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 i \sin i di ;$$

$$F_x = \frac{8\mu_0 c P}{\pi d^2} R^2 \left[\frac{-\cos^4 i}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \epsilon_0.$$

$$F_x = \pi \epsilon_0 E_0^2 \frac{R^2}{2} = \frac{4R^2}{d^2} \frac{\overline{P}}{c} ; \text{AN : } F_x = 1,48 \cdot 10^{-13} \text{ N.}$$

$$\text{b. } mg = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g ; \text{AN : } mg = 5,14 \cdot 10^{-15} \text{ N} ; \frac{F_x}{mg} = 29.$$

$$\text{c. La lévitation est obtenue pour l'équilibre : } 0 = F'_x - mg, \text{ avec } F'_x = \frac{4R^2}{d^2} \frac{\overline{P'}}{c} = mg,$$



$$\Rightarrow \overline{P'} = mg \frac{d^2 c}{4R^2} ;$$

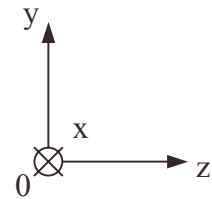
AN : $\overline{P'} = 0,29 \text{ mW}$; $\overline{P'} = 29 \overline{P}$ en conservant le diamètre du faisceau laser.

7.1.3. Ondes évanescentes Réflexion totale

Ce problème étudie les propagations de diverses ondes électromagnétiques dans des milieux diélectriques parfaits, homogènes et isotropes. Ces milieux sont supposés électriquement neutres et ils ne sont le siège d'aucun courant électrique ; leur perméabilité magnétique est égale à celle du vide, μ_0 .

Un milieu d'indice n a une permittivité diélectrique ε liée à celle du vide, ε_0 , par la relation $\varepsilon = n^2 \varepsilon_0$.

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct Oxyz dont les vecteurs unitaires sont notés $\vec{U}_x, \vec{U}_y, \vec{U}_z$.



\vec{j} désigne le nombre complexe défini par $j^2 = -1$.

Première partie : rappel des lois fondamentales

I.1. Ecrire les équations de Maxwell que doivent vérifier respectivement le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} dans un milieu d'indice n , en fonction de n .

En déduire l'équation de propagation que doit vérifier le champ électrique \vec{E} .

2. Sans démonstration, écrire les conditions aux limites auxquelles doivent satisfaire respectivement les composantes tangentielles $E_{1t}, E_{2t}, B_{1t}, B_{2t}$, et normales $E_{1n}, E_{2n}, B_{1n}, B_{2n}$ des champs \vec{E} et \vec{B} de part et d'autre d'une surface de séparation entre deux milieux (1) et (2), en fonction de leurs indices respectifs n_1 et n_2 .

On rappelle l'absence de toute distribution surfacique de charges.

Deuxième partie : ondes électromagnétiques dans l'air

II. Plaçons-nous dans l'air dont nous supposons l'indice égal à l'unité.

1. Considérons une onde plane, monochromatique de pulsation ω , polarisée rectilignement, progressive, de vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{U}_z$. Elle possède un vecteur champ électrique représenté en notation complexe, par l'expression $\vec{E} = E_0 e^{j(kz - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$, où E_0 et k sont des constantes réelles et positives.

Calculer k en fonction de ω et c , et déterminer le champ magnétique \vec{B} .

2. Considérons maintenant une autre onde, non plane, monochromatique de pulsation ω dont le vecteur d'onde est par définition $\vec{k}' = k_1 \vec{U}_z + jk_2 \vec{U}_y$ tandis que son vecteur champ électrique, polarisé rectilignement, s'écrit en notation complexe :

$\vec{E}' = E'_0 e^{-k_2 y} \cdot e^{j(k_1 z - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$ où k_1 et k_2 sont des constantes réelles positives et E'_0 est une constante éventuellement complexe.

a. Ecrire la relation entre k_1, k_2, ω et c .

b. Montrer que l'onde se propage suivant l'axe Oz et calculer sa vitesse de phase v_ϕ le long de cet axe en fonction de k_1 et ω .

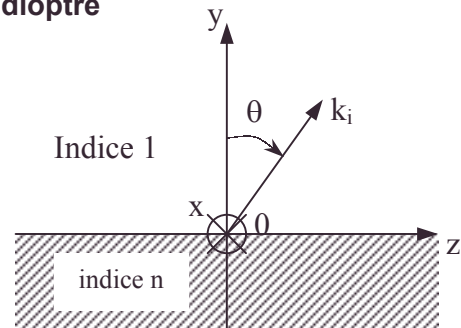
- milieu de perméabilité magnétique égale à celle du vide, milieu d'indice variable, réflexion totale

c. Montrer que l'amplitude de cette onde décroît suivant l'axe Oy et calculer en fonction de k_2 la distance d au bout de laquelle l'amplitude de cette onde a diminué de moitié.

d. Déterminer le champ magnétique \vec{B}' de cette onde ; indiquer sa direction de propagation, la variation de son amplitude et sa polarisation.

Troisième partie : ondes de part et d'autre d'un dioptre

III. Un milieu diélectrique d'indice $n > 1$ occupe le demi-espace $y \leq 0$ tandis que l'air d'indice unité occupe le demi-espace $y \geq 0$. Une onde plane monochromatique incidente de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k}_i et se propageant dans le milieu d'indice n tombe sur la surface de séparation $y = 0$ avec un angle d'incidence $(\vec{U}_y, \vec{k}_i) = \theta$.



1. Sans démonstration, rappeler les lois de Descartes.

Quelle est la valeur limite θ_L de l'angle θ au-delà de laquelle il y a "réflexion totale" ?

Dans toute la suite du problème, nous supposons $\theta_L < \theta < \pi/2$.

2. Un point M quelconque de l'espace, de coordonnées x, y, z , est caractérisé par le vecteur $\vec{OM} = \vec{r}$ et le champ électrique de l'onde incidente s'écrit, en M, avec la notation complexe : $\vec{E}_i = E_0 e^{j(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$ où E_0 est une constante réelle.

a. Ecrire les composantes du vecteur d'onde \vec{k}_i en fonction des paramètres α et β définis par : $\alpha = \frac{n\omega}{c} \cos \theta$; $\beta = \frac{n\omega}{c} \sin \theta$.

b. Calculer les composantes du champ magnétique \vec{B}_i de l'onde incidente en fonction de $E_0, \omega, \alpha, \beta, y, z, t$.

3. Les lois de Descartes donnent la direction du vecteur d'onde réfléchi \vec{k}_r .

a. Exprimer les composantes de \vec{k}_r en fonction de α et β .

b. Nous admettons que le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit, en notation complexe, : $\vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$, où E_{0r} est une composante éventuellement complexe.

Calculer les composantes du champ magnétique \vec{B}_r de l'onde réfléchie en fonction de $E_{0r}, \omega, \alpha, \beta, y, z, t$.

c. Admettons que, étant dans les conditions de la réflexion totale, l'onde incidente donne uniquement naissance à l'onde réfléchie ci-dessus en III.3.b.

Montrer que les conditions aux limites rappelées en I.2. ne peuvent pas être satisfaites sur la surface $y = 0$.

4. En plus de l'onde réfléchie (\vec{E}_r, \vec{B}_r) , l'onde incidente (\vec{E}_i, \vec{B}_i) donne naissance à une onde transmise (\vec{E}', \vec{B}') dont nous admettons qu'elle est convenablement caractérisée par l'expression de \vec{E}' donnée en II.2. soit $\vec{E}' = E'_0 e^{-k_2 y} \cdot e^{j(k_{1z} z - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$.

a. En utilisant les conditions aux limites de la surface $y = 0$, trouver une relation entre k_1 et β , puis une relation entre k_2, β, ω et c .

b. Calculer E_{0r} et E'_0 en fonction de E_0, α et k_2 .

• lois de Descartes, réflexion totale, valeur limite de l'angle d'incidence

5. Etude de l'onde réfléchie

a. Comparer les modules de E_{0r} et de E_0 . Conclure quant au transfert d'énergie.

b. Posons $E_{0r} = E_0 e^{j\varphi}$. Calculer $\tan \frac{\varphi}{2}$ en fonction de α et de k_2 , puis en fonction de n et de θ .

c. Donner l'allure du graphe montrant l'évolution de φ en fonction de θ pour $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Cette condition sera valable dans toute la suite du problème.

6. Etude de l'onde transmise

a. Calculer la distance d définie en **II.2.c.**, qui caractérise la profondeur de pénétration de l'onde transmise dans l'air, en fonction de n , θ , et de λ , longueur d'onde dans le vide de la lumière incidente.

b. Application numérique : $n = 1,5$; $\theta = 60^\circ$; $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$. Calculer d en μm .

c. Posons $E'_0 = E_0 \tau e^{j\psi}$, où τ et ψ sont des constantes réelles.

Exprimer τ en fonction de α et de k_2 , et ψ en fonction de φ .

7. Etude de l'onde dans le diélectrique, résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

a. Calculer le champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ de cette onde résultante. Ecrire la partie réelle $\vec{\mathcal{E}}_R$ de $\vec{\mathcal{E}}$ sous forme d'un produit de deux cosinus. Décrire cette onde en précisant sa direction de propagation, sa polarisation et les variations de son amplitude.

b. Calculer sous forme d'un produit de cosinus ou de sinus les parties réelles des composantes du champ magnétique $\vec{\mathcal{B}}$ de l'onde résultante. Quelles sont les polarisations de ce champ ?

c. Exprimer la vitesse de phase de cette onde en fonction de β et de ω , puis en fonction de c , n et θ . Donner l'allure de la variation de v_ϕ lorsque θ varie.

Quatrième partie : ondes dans une lame diélectrique et dans l'air de part et d'autre de la lame

IV. En fait, le diélectrique constitue une lame d'épaisseur a comprise entre les plans d'abscisses $y = 0$ et $y = -a$, plongée dans l'air d'indice unité.

– Dans le diélectrique d'indice n , se propage l'onde $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ définie en **III.7**.

– Dans l'air pour $y \geq 0$, se propage l'onde (\vec{E}'', \vec{B}'') définie en **III.4**.

Ainsi les conditions aux limites pour les champs électrique et magnétique sont vérifiées sur le plan $y = 0$.

– Dans l'air pour $y \leq -a$ nous admettons qu'une onde (\vec{E}'', \vec{B}'') se propage, dont le champ électrique s'écrit, en notation complexe, :

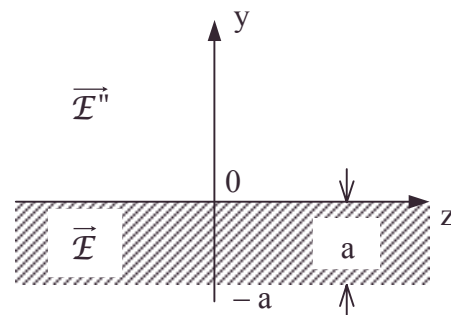
$$\vec{E}'' = E_0'' e^{+k_2''(y+a)} \cdot e^{j(k_1''z - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$$

et dont la structure est analogue à celle de l'onde (\vec{E}', \vec{B}') .

E_0'' est une constante éventuellement complexe, k_1'' et k_2'' sont des constantes réelles positives.

1. Etude de l'onde (\vec{E}'', \vec{B}'')

• lame diélectrique, profondeur de pénétration de l'onde transmise [épaisseur de peau]



a. Justifier le signe + devant l'exposant de l'exponentielle $e^{+k_2''(y+a)}$.

b. Calculer k_1'' et k_2'' en fonction de k_1 et k_2 .

c. Calculer le champ magnétique \vec{B}'' .

2. Suite de l'étude de l'onde (\vec{E}'', \vec{B}'')

a. Montrer que les trois ondes définies en IV. ne sont solution du problème que s'il existe une relation entre α , k_2 , a et φ que l'on écrira.

b. Dans ces conditions, calculer E_0'' en fonction de $E_0, \alpha, k_2, \varphi$ puis en fonction de E_0' .

3. En utilisant les relations en φ trouvées au III.5.b. et au IV.2.a. d'une part, et les conditions aux limites du champ électrique, d'autre part, montrer que φ est nécessairement de la forme $\varphi = 2\pi \left(m - \frac{a n \cos \theta}{\lambda} \right)$ où m désigne un nombre entier.

Cinquième partie : propagation de l'énergie dans la lame et dans l'air de part et d'autre de la lame

V. Intéressons-nous maintenant à la propagation de l'énergie électromagnétique dans la lame étudiée dans la quatrième partie, et dans l'air qui l'entoure. Nous adopterons une notation réelle des grandeurs sinusoïdales pour calculer les grandeurs énergétiques. Ainsi le vecteur de Poynting est défini à partir des valeurs réelles \vec{E}_R et \vec{B}_R des champs électriques et magnétiques par la relation : $\vec{P} = \frac{\vec{E}_R \wedge \vec{B}_R}{\mu_0}$.

1. Les vecteurs de Poynting en présence

a. Déterminer les composantes des vecteurs de Poynting $\vec{P}', \vec{P}, \vec{P}''$ correspondant aux trois ondes qui se propagent respectivement dans l'air pour $y \geq 0$, dans la lame diélectrique pour $-a \leq y \leq 0$, et dans l'air pour $y \leq -a$.

On exprimera les composantes :

de \vec{P}' en fonction de : $E_0, \tau, \mu_0, \omega, k_1, k_2, \varphi, y, z, t$.

de \vec{P} en fonction de : $E_0, \mu_0, \omega, \alpha, \beta, \varphi, y, z, t$.

de \vec{P}'' en fonction de : $E_0, \tau, \mu_0, \omega, k_1, k_2, \varphi, a, y, z, t$.

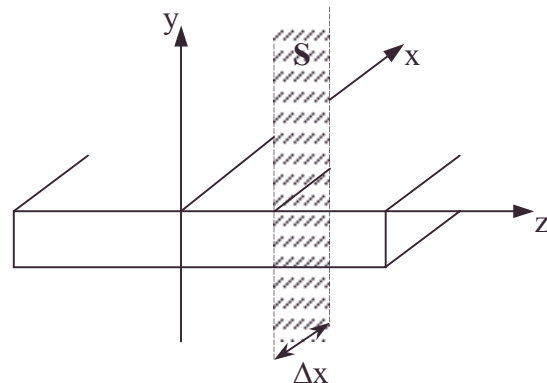
b. Calculer les valeurs moyennes dans le temps des composantes des trois vecteurs de Poynting \vec{P}', \vec{P} et \vec{P}'' .

2. Les puissances transportées

Considérons dans un plan $z = \text{cste}$, une surface (S) délimitée par deux droites parallèles à l'axe Oy et distantes de $\Delta x = 1\text{m}$.

a. Exprimer la puissance moyenne $\phi_{\text{diél}}$ transportée par l'onde dans la lame diélectrique à travers la surface (S) en fonction de $E_0, \mu_0, \omega, a, \alpha, \beta, \varphi$ puis, après élimination de φ , en fonction de $E_0, \mu_0, \omega, a, \alpha, \beta$.

b. Exprimer la puissance totale $|Q_{\text{air}}|$ transportée par les ondes dans l'air (pour $y \geq 0$) et pour ($y \leq -a$) à travers la surface



• vecteur de Poynting

(S) en fonction de $E_0, \mu_0, \omega, k_1, k_2, \tau$ puis
en fonction de $E_0, \mu_0, \omega, a, \alpha, \beta$.

c. Calculer le rapport $q = \left| \frac{\phi_{\text{air}}}{\phi_{\text{diél}}} \right|$ en fonction de αa .

d. Application numérique : calculer q pour $\alpha a = 0,73$ radian et conclure.

Centrale ; Option PC ; 4h

Corrigé

Première partie

$$1.a. \vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \text{ et } n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} ; \text{div } \vec{D} = 0 ; \text{rot } \vec{H} = + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ;$$

$$\Rightarrow \text{div}(n^2 \vec{E}) = 0 ; \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial (n^2 \vec{E})}{\partial t}.$$

$$b. \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{div } \vec{B} = 0.$$

c. En éliminant \vec{B} entre les équations de Maxwell Ampère et Maxwell Faraday, nous trouvons : $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (n^2 \vec{E})}{\partial t^2} = \vec{0}$. Si n indépendant de t (ou varie lentement avec t),

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

2.a. Les relations de continuité sont : $E_{1t} = E_{2t} ; B_{1n} = B_{2n}$.

b. Les relations de discontinuité dans des milieux sans charge ni courant deviennent des relations de continuité : • $D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow n_1^2 E_{1n} = n_2^2 E_{2n}$.

• $H_{1t} = H_{2t}$, soit pour des milieux non ferromagnétiques,
 $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_0, B_{1t} = B_{2t}$.

Deuxième partie

$$1. \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ avec } \vec{E} = E_0 e^{j(kz - \omega t)} \cdot \vec{U}_x \Rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 ;$$

par vérification ou en rappelant $\vec{\nabla} \equiv j\vec{k}$.

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{j(kz - \omega t)} \cdot \vec{U}_y.$$

2.a. $\vec{\Delta} \vec{E}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} = \vec{0}$ avec $\vec{E}' = E'_0 e^{-k_2 y} e^{j(k_1 z - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$ donne $k_2^2 - k_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ de la même manière qu'en 1.

b. $\phi = k_1 z - \omega t$ montre la propagation suivant l'axe Oz : $\phi = \phi_0$ si $z = \frac{\omega}{k_1} t + \frac{\phi_0}{k_1}$, soit

un déplacement selon Oz avec une vitesse maintenant la phase constante : $v_\phi = \frac{\omega}{k_1}$.

• relations de passage des champs, vitesse de phase

c.α. $\vec{E}' = E_0(y) e^{j(k_1 z - \omega t)} \vec{U}_x$ avec $E_0(y) = E'_0 e^{-k_2 y}$, amplitude accompagnant le phénomène de propagation, décroît quand y croît.

β. $E_0(y) = \frac{E'_0}{2}$ pour $y = d = \frac{\ln 2}{k_2}$.

d.α. $\vec{E}' = E'_0 e^{j(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{U}_x \Rightarrow \vec{B}' = \frac{\vec{k}'}{\omega} \wedge \vec{E}'$ sur \mathbb{C}^3 .

$$\vec{B}' = \vec{E}'_0 e^{-k_2 y} e^{j(k_1 z - \omega t)} \left[\frac{k_1}{\omega} \vec{U}_y - j \frac{k_2}{\omega} \vec{U}_z \right].$$

β. $\phi = k_1 z - \omega t$ montre la propagation de \vec{B} selon Oz.

γ. Son amplitude $\|\vec{B}'\| = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \frac{E'_0}{\omega} e^{-k_2 y}$ décroît quand y croît.

δ. La notation réelle de \vec{B}' est (cf. opérateur Re) :

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{\omega} E'_0 e^{-k_2 y} \cos(k_1 z - \omega t) \\ \frac{k_2}{\omega} E'_0 e^{-k_2 y} \cos(k_1 z - \omega t - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

En posant $\overline{MN} = \vec{B}'$ en un point M (x,y,z) donné, N décrit une ellipse : la polarisation de \vec{B} est elliptique.

Troisième partie

1.a. Loïs de Descartes :

α. à la réflexion : $\theta_r = -\theta$.

β. à la réfraction : $n \sin \theta = \sin \theta_t$.

b. Il y a réflexion totale si $n \sin \theta \geq 1$, soit pour $\theta > \theta_L$ avec $\theta_L = \arcsin \frac{1}{n}$.

On remarquera que $\theta = (\vec{U}_y, \vec{k}_i)$ est positif sur la figure car dans le sens de la rotation amenant Oy sur Oz.

2.a. $k_i = n \frac{\omega}{c} \Rightarrow k_i = n \frac{\omega}{c} \cos \theta \vec{U}_y + n \frac{\omega}{c} \sin \theta \vec{U}_z \Rightarrow \vec{k}_i = \alpha \vec{U}_y + \beta \vec{U}_z$.

b.

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i \text{ soit : } \vec{B}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\omega} \beta e^{j(\alpha y + \beta z - \omega t)} \\ -\frac{E_0}{\omega} \alpha e^{j(\alpha y + \beta z - \omega t)} \end{pmatrix}$$

3.a. On passe de \vec{k}_i à \vec{k}_r en changeant θ en $-\theta$ et le sens d'orientation.

On change donc θ en $-\theta + \pi$; en bref : $\vec{k}_r = -\alpha \vec{u}_y + \beta \vec{u}_z$.

b.

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \vec{E}_r ; \vec{B}_r \left| \begin{array}{l} 0 \\ \beta \frac{E_{0r}}{\omega} e^{j(-\alpha y + \beta z - \omega t)} \\ \alpha \frac{E_{0r}}{\omega} e^{j(-\alpha y + \beta z - \omega t)} \end{array} \right.$$

c. Les relations de continuité de \vec{E} et de \vec{B} donnent :

$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$ en $y = 0$ et $\vec{B}_r + \vec{B}_i = \vec{B}_t$ en $y = 0$, si l'on suppose aucune onde transmise.
Soit en projection : $E_{0r} + E_0 = 0$ et $-\alpha E_{0r} + \alpha E_0 = 0$, qui n'a pas d'autres solutions que $E_{0r} = E_0 = 0$; ce qui est incompatible avec $E_0 \neq 0$.

4.a. Ecrivons la continuité de \vec{E}_t (en supposant l'existence d'une onde transmise du type \vec{E}') : $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}'$.

En $y = 0$, $E_0 e^{j(k_1 z - \omega t)} = (E_0 + E_{0r}) e^{j(\beta z - \omega t)} \quad \forall z$;

On identifie amplitude : $E_0 = E_0 + E_{0r}$ et argument : $\beta = k_1$.

Vu $k_2^2 - k_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$; en substituant k_1 , on trouve : $k_2^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$.

b. Ecrivons la continuité de \vec{B}_t (en supposant l'existence d'une onde transmise $\vec{E}', \vec{B}' = \frac{\vec{k}'}{\omega} \wedge \vec{E}'$), selon \vec{U}_z , en $y = 0$; $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}'$.

$$-j \frac{k_2}{\omega} E_0 e^{j(k_1 z - \omega t)} = \left(-\frac{E_0 \alpha}{\omega} + \frac{\alpha E_{0r}}{\omega} \right) e^{j(\beta z - \omega t)} ;$$

on a donc $\beta = k_1$ et $j k_2 E_0 = (E_0 - E_{0r}) \alpha$, or la continuité de E_t donne $E_0 = E_0 + E_{0r}$; on en tire :

$$E_0 = \frac{2 \alpha E_0}{\alpha + j k_2} \text{ et } E_{0r} = \frac{\alpha - j k_2}{\alpha + j k_2} E_0.$$

5.a. On calcule : $|E_{0r}| = |E_0|$; on en déduit que les modules des vecteurs de Poynting associés sont égaux : la puissance incidente égale la puissance réfléchie.

b.a. En reportant $E_{0r} = E_0 e^{j\varphi}$ dans $E_{0r} = E_0 \frac{\alpha - j k_2}{\alpha + j k_2}$.

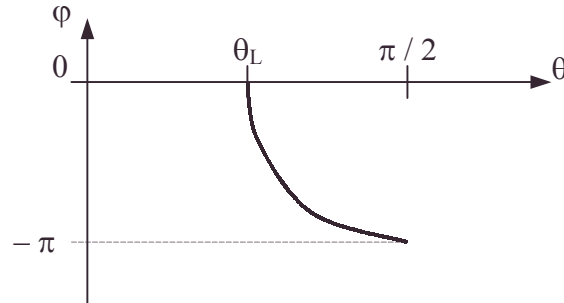
$$\cos \varphi + j \sin \varphi = \frac{\alpha - j k_2}{\alpha + j k_2} = \frac{\alpha^2 - k_2^2}{\alpha^2 + k_2^2} - \frac{2 j \alpha k_2}{\alpha^2 + \beta^2}, \text{ soit } \tan \varphi = \frac{-2 \frac{k_2}{\alpha}}{1 - \left(\frac{k_2}{\alpha} \right)^2} = \frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{-k_2}{\alpha}$; φ phase de E_r par rapport à E_i , est physiquement négatif.

$$\beta. \alpha = n \frac{\omega}{c} \cos \theta ; \beta = n \frac{\omega}{c} \sin \theta ; k_2 = \sqrt{\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{-\frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{c \frac{\omega}{c} \cos \theta} = -\frac{1}{n} \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{\cos \theta} = -\frac{1}{n} \sqrt{(n^2 - 1) \tan^2 \theta - 1}$$

c. $\frac{\pi}{2} > \theta > \theta_L$.



6.a. $d = \frac{\ln 2}{k_2} = \frac{\ln 2}{\frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}} = \frac{\lambda \ln 2}{2\pi \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}$.

b. AN : $d = 6,65 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}$.

c. $E'_0 = E_0 \tau e^{j\psi} = \frac{2\alpha E_0}{\alpha + jk_2} \Rightarrow \tau(\cos \psi + j\sin \psi) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + k_2^2}} \frac{(\alpha - jk_2)}{\sqrt{\alpha^2 + k_2^2}}$.

L'identification du module et de l'argument :

$$\tau = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + k_2^2}} ; \tan \psi = \frac{-k_2}{\alpha} = \tan \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \psi = \frac{\varphi}{2} \pmod{\pi}, \text{ cf. signe de } \tau.$$

Notons : $\tau = \frac{2}{\sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2 \cos \frac{\varphi}{2}$.

7.a. $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 (e^{j\alpha y} + e^{j(-\alpha y + \varphi)}) e^{j(\beta z - \omega t)} \cdot \vec{U}_x$; symétrisons l'écriture pour introduire ce qui est demandé.

$$\vec{\mathcal{E}} = E_0 \left(e^{j\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right)} + e^{-j\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right)} \right) e^{j\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \vec{U}_x.$$

Or, $\cos\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \left(e^{j\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right)} + e^{-j\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right)} \right) \Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = 2 E_0 \cos\left(-\alpha y + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \vec{U}_x$.

β . $\vec{\mathcal{E}}_R = \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}) = 2 E_0 \cos\left(-\alpha y + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \vec{U}_x$.

γ . Onde se propageant selon \vec{Oz} , polarisée rectilignement, d'amplitude variable en $2 E_0 \left| \cos\left(-\alpha y + \frac{\varphi}{2}\right) \right|$.

b. $\vec{\mathcal{B}} = \frac{E_0}{\omega} \left[e^{j(\alpha y + \beta z - \omega t)} (\beta \vec{U}_y - \alpha \vec{U}_z) + e^{-j(\alpha y + \beta z - \omega t + \varphi)} (\beta \vec{U}_y + \alpha \vec{U}_z) \right]$;

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{E_0}{\omega} \left(2\beta \cos\left(-\alpha y + \frac{\varphi}{2}\right) \vec{U}_y - 2\alpha \sin\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) \vec{U}_z \right) e^{j\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)} \Rightarrow \vec{\mathcal{B}}_R = \text{Re}(\vec{\mathcal{B}}).$$

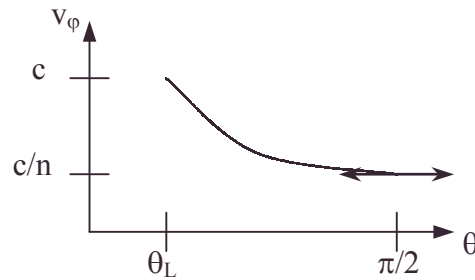
$$\vec{\mathcal{B}}_R = \frac{2E_0}{\omega} \left(\beta \cos\left(-\alpha y + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \vec{U}_y + \alpha \sin\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \vec{U}_z \right)$$

L'onde se propage selon Oz et la polarisation est elliptique en général en un point M donné.

c.α. $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$.

β. $v_\varphi = \frac{c}{n \sin \theta}$ vu **5.b.** Domaine de validité $\theta_L < \theta < \frac{\pi}{2}$.

γ.



Quatrième partie : $\vec{k}'' = k_1'' \vec{u}_z - j k_2'' \vec{u}_y$.

1.a. $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^{k_2''(y+a)} \rightarrow 0$ avec $k_2'' > 0$ (cf. k_2') ; le signe inverse est impossible, vu une densité volumique énergétique infinie à l'infini.

b.α. Etudions la continuité de \vec{E}_{\tan} en $y = -a$.

$$E_0'' e^{j(k_1' z - \omega t)} = 2 E_0 \cos\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)} \quad \forall z, t.$$

L'identification des arguments donne : $k_1'' = \beta$.

β. $\vec{\Delta} \vec{E}'' - \frac{\partial^2 \vec{E}''}{c^2 \partial t^2} = \vec{0}$ s'écrit $k_2''^2 - k_1''^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ or $k_2^2 - k_1^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ et $k_1 = \beta = k_1''$;

on en déduit : $k_2'' = k_2$. L'autre solution $k'' = -k_2$ est exclue énergétiquement à l'infini.

c.

$$\vec{B}'' = \frac{\vec{k}''}{\omega} \wedge \vec{E}'' \quad ; \quad \vec{B}'' = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{k_1 E_0''}{\omega} e^{k_2(y+a)} e^{j(k_1 z - \omega t)} \\ j k_2 \frac{E_0''}{\omega} e^{k_2(y+a)} e^{j(k_1 z - \omega t)} \end{vmatrix}$$

2.a. Le remplacement de $k_1'' = \beta$ dans la continuité de \vec{E}_{\tan} de **IV.1.b.** donne :

$$E_0'' = 2 E_0 \cos\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\frac{\varphi}{2}}.$$

Ecrivons la continuité de \vec{B}_t selon \vec{U}_z (celle selon \vec{U}_y redonne la précédente) en $y = -a$ (cf. **III.7.b.**).

$$j k_2 \frac{E_0''}{\omega} e^{j(k_1 z - \omega t)} = -2 j \alpha \sin\left(\alpha(-a) - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{E_0}{\omega} e^{j(k z - \omega t)} e^{j\frac{\varphi}{2}},$$

soit $k_2 E_0'' = 2\alpha E_0 \sin\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\frac{\varphi}{2}}$.

Les relations de continuité sont vérifiées si :

$$E_0'' = 2 E_0 \cos\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\alpha}{k_2} E_0 \sin\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\frac{\varphi}{2}}$$

soit si : $\frac{\alpha}{k_2} \tan\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) = 1$. Soit $\tan\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{k_2}{\alpha}$.

b.α. $E_0'' = 2 E_0 \cos\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) e^{j\frac{\varphi}{2}}$ or $\tan\left(\alpha a + \frac{\varphi}{2}\right) = -\tan\frac{\varphi}{2}$ (cf. III.5.b.)

soit $\alpha a + \frac{\varphi}{2} = -\frac{\varphi}{2} + p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$; ainsi, $\varphi = -\alpha a + p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

$$E_0'' = 2 E_0 (-1)^p \cos\frac{\varphi}{2} e^{j\frac{\varphi}{2}}, p \in \mathbb{Z}.$$

β. Or, $E_0' = E_0 + E_{0r} = E_0 (1 + e^{j\varphi}) = E_0 e^{j\frac{\varphi}{2}} \left(e^{-j\frac{\varphi}{2}} + e^{j\frac{\varphi}{2}} \right) = 2 E_0 e^{j\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}$.

$$E_0'' = (-1)^p E_0'.$$

3. En IV.2.a. $\varphi = -\alpha a + p\pi$ or $\alpha = \frac{\omega}{c} n \cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda} n \cos\theta$.

Les relations étant valables quel que soit a , faisons tendre a vers 0 ;

$$E_0'' = E_0' \Rightarrow (-1)^p = +1 \text{ et } p = 2m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $\varphi = 2\pi m - \frac{2\pi a}{\lambda} n \cos\theta$, soit $\varphi = 2\pi \left(m - \frac{an}{\lambda} \cos\theta \right)$ où m désigne un nombre entier.

Cinquième partie

On calculera \vec{P} en notation réelle (cf. énoncé).

1.a.α. On rappelle :

$$\vec{\mathcal{E}}_R' = \begin{pmatrix} E_0 \tau e^{-k_2 y} \cos\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{B}}_R' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k'}{\omega} \tau E_0 e^{-k_2 y} \cos\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \frac{k_2}{\omega} \tau E_0 e^{-k_2 y} \sin\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 \frac{E_0^2 \tau^2}{\mu_0 \omega} e^{-2k_2 y} \cos\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ k_1 \frac{E_0^2 \tau^2}{\mu_0 \omega} e^{-2k_2 y} \cos^2\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

β. On rappelle :

$$\begin{array}{c} \vec{\mathcal{E}}_R \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 E_0 \cos\left(-\alpha y + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ 2 \frac{E_0 \beta}{\omega} \cos\left(-\alpha y + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ 2 \frac{E_0 \alpha}{\omega} \sin\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{array}$$

d'où :

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vec{P} \frac{-4\alpha E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \frac{4\beta E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) \cos^2\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{array}$$

γ. On rappelle :

$$\begin{array}{c} \vec{E}'' \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} E_0 \tau e^{k_2(y+a)} \cos\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \frac{k_1}{\omega} \tau E_0 e^{k_2(y+a)} \cos\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ -\frac{k_2}{\omega} \tau E_0 e^{k_2(y+a)} \sin\left(k_1 z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{array}$$

d'où :

$$\begin{array}{c} 0 \\ \vec{P}'' k_2 \frac{E_0^2 \tau^2}{\mu_0 \omega} e^{2k_2(y+a)} \cos\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \\ k_1 \frac{E_0^2 \tau^2}{\mu_0 \omega} e^{2k_2(y+a)} \cos^2\left(\beta z - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{array}$$

b.α. Rappelons : $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi) dt = \frac{\cos \varphi}{2}$ d'où les valeurs moyennes temporelles.

$$\begin{array}{c} \vec{P}' = \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \frac{k_1 E_0^2}{\mu_0 \omega} \tau^2 e^{-2k_2 y} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta. \\ \overline{\overline{\mathbf{P}}} = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{2\beta E_0^2}{\mu_0 \omega} \cos^2\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \gamma. \\ \overline{\overline{\mathbf{P}}}'' = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0^2 \tau^2 k_1}{2\mu_0 \omega} e^{2k_2(y+a)} \end{array} \end{array}$$

2. Vu la non dépendance des $\overline{\mathbf{P}}_i$ de x prenons $d\vec{S} = \Delta x dy \vec{u}_z$;

$$\mathbf{a.} \quad \phi_{\text{diél}} = \int_{-a}^0 \overline{\overline{\mathbf{P}}} \vec{u}_z dy \Delta x = \frac{2E_0^2 \beta}{\mu_0 \omega} \Delta x \int_{-a}^0 \cos^2\left(\alpha y - \frac{\varphi}{2}\right) dy$$

$$\phi_{\text{diél}} = \frac{E_0^2 \beta}{\mu_0 \omega} \left[a + \frac{1}{2\alpha} (\sin(2\alpha a + \varphi) - \sin \varphi) \right]; \text{ or } \varphi = -\alpha a + 2\pi m :$$

$$\phi_{\text{diél}} = \frac{E_0^2 \beta}{\mu_0 \omega \alpha} (\alpha a + \sin \alpha a) \Delta x, \text{ avec } \Delta x = 1 \text{ m.}$$

$$\mathbf{b.} \quad \phi_{\text{air}} = \int_0^{+\infty} \overline{\overline{\mathbf{P}}}'' \vec{u}_z dy \Delta x + \int_{-\infty}^{-a} \overline{\overline{\mathbf{P}}}'' \vec{u}_z dy \Delta x = \frac{E_0^2 \tau^2 k_1 \Delta x}{2\mu_0 \omega k_2} \text{ avec } \Delta x = 1 \text{ m.}$$

$$\tau = 2 \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \left(\frac{\alpha a}{2} + m\pi \right), \quad k_2 = -\alpha \tan \frac{\varphi}{2} = \alpha \tan \left(\frac{\alpha a}{2} + m\pi \right) \text{ et } k_1 = \beta.$$

$$\text{Soit } |\phi_{\text{air}}| = \left| \Delta x \frac{2E_0^2 \beta}{\mu_0 \omega \alpha} \frac{\cos^3 \frac{\alpha a}{2}}{\sin \frac{\alpha a}{2}} \right|.$$

$$\mathbf{c.} \quad q = \left| \frac{2}{\alpha a + \sin \alpha a} \frac{\cos^3 \frac{\alpha a}{2}}{\sin \frac{\alpha a}{2}} \right|.$$

d. AN : $q = 3,2695$.

Le transport de l'énergie dans la faible zone diélectrique est important comparé à la zone infinie environnante.

Néanmoins, la lame diélectrique ne concentre pas tout le transport d'énergie.

7.1.4. Formules de Fresnel sous incidence oblique

1. Propagation d'une onde électromagnétique plane dans un milieu isotrope sans charge ni courant de constantes ϵ, μ .

a. Trouver l'équation de propagation de \vec{E} .

b. Quelles équations de Maxwell caractérisent le caractère transversal de l'onde électromagnétique plane, progressive, harmonique ?

2. Réflexion et réfraction sur une surface de séparation plane entre deux milieux isotropes sans charge ni courant tels que $\mu_1 \neq \mu_2$.

Soient ϕ_i le flux incident surfacique dans le milieu 1, ϕ_r le flux réfléchi surfacique, ϕ_t le flux surfacique transmis dans le milieu 2.

On définit les coefficients de réflexion et de réfraction des flux par $R = \frac{\phi_r}{\phi_i}; T = \frac{\phi_t}{\phi_i}$.

a. En utilisant la continuité des composantes de \vec{E} et \vec{B} , parallèles à la surface de séparation, trouver R et T en fonction des angles i d'incidence et θ de réfraction et des indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux considérés, pour une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

α . quand le champ \vec{E} est parallèle à la surface de séparation,

β . quand le champ \vec{B} est parallèle à la surface de séparation.

b. Pour quelle incidence la réflexion permet-elle d'obtenir une onde polarisée rectilignement à partir d'une onde polarisée elliptiquement ?

A.N. : $n_1 = 1$; $n_2 = 1,5$.

c. Retrouver les valeurs classiques de R et T quand l'incidence est normale à la surface de séparation.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1. Les équations de Maxwell : $\textcircled{1} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{div} \vec{B} = 0 \quad \textcircled{2}$

$\textcircled{3} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \text{div} \vec{E} = 0 \quad \textcircled{4}$

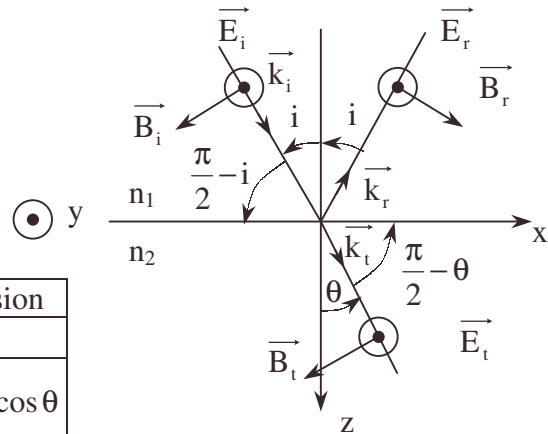
a. On élimine \vec{B} entre $\textcircled{1}$ et $\textcircled{3}$ en utilisant $\vec{\text{rot}} \textcircled{1}$ et $\textcircled{3}$

Connaissant $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$, on obtient $\Delta \vec{E} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

b. Le caractère transversal de l'onde électromagnétique plane progressive harmonique telle que $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases}$ vient de $\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$ soit $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ soit $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

• champ électrique parallèle à la surface de séparation, champ magnétique parallèle à la surface de séparation, formules de Fresnel sous incidence oblique, incidence oblique

2.a.α. On sait que $\frac{B_m}{E_m} = \frac{n}{c} = \frac{1}{v}$.



Les composantes tangentielle sont :

	à l'incidence	réflexion	transmission
E_y	E_m	$r E_m$	$t E_m$
B_x	$-\frac{E_m n}{c} \cos i$	$\frac{E_m n_1}{c} r \cos i$	$-E_m \frac{n_2 t}{c} \cos \theta$

avec $\mu_1 \neq \mu_2$; après division par E_m , on obtient les équations de passage exprimant la continuité tangentielle de $\bullet E$: $1 + r = t$

$$\bullet B : (r-1)n_1 \cos i = -t n_2 \cos \theta$$

$$\text{soit } r = -\frac{\sin(i-\theta)}{\sin(i+\theta)} ; t = \frac{2 \cos i \sin \theta}{\sin(i+\theta)}.$$

$$\text{or } \phi_i = \epsilon_i E_m^2 v_i \cos i = \epsilon_0 n_1^2 E_m^2 \frac{c}{n_1} \cos i = c \epsilon_0 n_1 E_m^2 \cos i,$$

$$\phi_r = \epsilon_0 c n_1 E_m^2 r^2 \cos i = r^2 \phi_i \text{ d'où } R = r^2 = \frac{\sin^2(i-\theta)}{\sin^2(i+\theta)}.$$

La conservation de l'énergie ou des flux donne $1 = R + T$, d'où T .
Le raisonnement direct sur T peut être fait.

$$\phi_t = \epsilon_0 c n_2 E_m^2 t^2 \cos \theta \Rightarrow T = \frac{n_2 \cos \theta}{n_1 \cos i} t^2 ; T = \frac{4 n_2}{n_1} \cos \theta \frac{\cos i \sin^2 \theta}{\sin^2(i+\theta)}.$$

β. Les composantes tangentielle sont :

	incidence	réflexion	transmission
E_x	$E_m \cos i$	$r' E_m \cos i$	$t' E_m \cos \theta$
B_y	$\frac{n_1 E_m}{c}$	$-E_m \frac{n_2}{c} r'$	$n_2 \frac{E_m}{c} t'$

avec $\mu_1 \neq \mu_2$

Les équations de passage de continuité tangentielle sont obtenues comme en **α**.

$$\bullet E \quad (1 + r') \cos i = t' \cos \theta$$

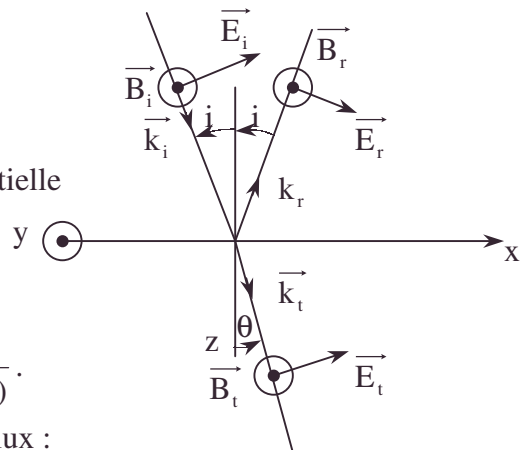
$$\bullet B \quad (1 - r') n_1 = n_2 t'.$$

$$\text{d'où : } r' = -\frac{\tan(i-\theta)}{\tan(i+\theta)} ; t' = \frac{2 \cos i \sin \theta}{\sin(i+\theta) \cos(i-\theta)}.$$

D'après **2.α.** par identité des expressions des flux :

$$R' = r'^2 = \frac{\tan^2(i-\theta)}{\tan^2(i+\theta)} ; T' = \frac{n_2 \cos \theta}{n_1 \cos i} t'^2 = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \theta \cos i \sin^2 \theta}{\sin^2(i+\theta) \cos^2(i-\theta)}.$$

b. La seule possibilité d'annuler une des deux composantes d'une onde polarisée elliptiquement passe par l'annulation de r ou r' ; elle se fait sur $r' = -\frac{\tan(i-\theta)}{\tan(i+\theta)} = 0$,



soit $i + \theta = \frac{\pi}{2}$; or $n_1 \sin i = n_2 \sin \theta$ donne $\tan i = \frac{n_2}{n_1}$ (incidence de Brewster).

A.N. : $\tan i = 1,5$; $i = 56^\circ 19$.

$$\text{c. } i = 0 ; \theta = 0 \text{ d'où } R = r^2 = r'^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 ; T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

7.1.5. Propagation d'onde dans un milieu anisotrope. Biréfringence

1. Propagation d'une onde électromagnétique plane dans un milieu anisotrope sans charge ni courant de perméabilité μ_0

On rappelle $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Montrer que si l'on admet qu'il existe trois directions orthogonales Ox_1, Ox_2, Ox_3 telles que pour \vec{E} parallèle à Ox_i , on a : $\vec{P} = \chi_i \epsilon_0 \vec{E}$, on peut alors obtenir ① $\vec{D} = (\epsilon_{ij}) \vec{E}$ avec (ϵ_{ij}) la matrice diélectrique du cristal anisotrope.

Montrer la symétrie de cette matrice. Les valeurs propres de cette matrice analogues à $\epsilon_0 \epsilon_r$ pour un milieu isotrope permettent de définir $\epsilon_i = \epsilon_0 n_i^2$ avec $n_i = \frac{c}{v_i}$, v_i caractérisant la célérité dans la direction propre associée.

2. Les équations de Maxwell dans la matière sont :

$$\text{div } \vec{D} = \rho ; \text{div } \vec{B} = 0 ; \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Considérons l'onde électromagnétique plane progressive harmonique dont tous les champs sont de la forme en $\vec{A}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ (\vec{k} étant le vecteur d'onde).

a. Est-elle transversale pour $\vec{D}, \vec{B}, \vec{E}$?

b. Trouver les relations entre $\vec{H}, \vec{E}, \vec{k}$, et $\vec{H}, \vec{D}, \vec{k}$

Que dire de la transversalité de \vec{H} ?

c. En déduire une relation ② entre \vec{E}, \vec{D} et \vec{k} .

On introduit les cosinus directeurs de $\vec{k} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, de $\vec{D} = D \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, de $\vec{E} = E \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$.

3. Les relations précédentes permettent de calculer pour chaque direction du vecteur \vec{k} le module correspondant et donc l'indice n correspondant puisque $k = nk_0$.

a. Trouver l'équation d'une surface des indices, ensemble des points extrémités du vecteur \vec{k} / k_0 quand on envisage toutes les directions de propagation.

b. Montrer que pour chaque direction il existe deux valeurs de n , en général différentes lorsqu'on donne à ω une valeur déterminée. Interpréter physiquement.

4.a. Etudier la polarisation en \vec{D} associée à chacune des deux valeurs $\|\vec{k}\|$ du 3.

b. Une onde électromagnétique définie par \vec{D} peut-elle être polarisée elliptiquement ? Conclure.

5.a. Pour certaines variétés cristallines, dites uniaxes, une valeur propre de la matrice diélectrique est valeur propre double $\epsilon_1 = \epsilon_2$, sans être égale à ϵ_3 . Montrer que la surface des indices se décompose en une sphère et un ellipsoïde de révolution. Préciser les éléments de symétrie.

b. Le rayon lumineux (soit la propagation de l'énergie) est défini par le vecteur de Poynting $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$. Soit un plan séparant le vide d'un milieu anisotrope.

α. Comment les lois de Descartes s'appliquent-elles quand l'axe optique de révolution du cristal est dans le plan d'incidence ?

β. Faire une construction des normales aux surfaces d'onde issues d'un rayon incident extérieur.

γ.δ. Préciser la construction des rayons et des polarisations correspondant à n_1 et n_3 ?

c. Cas d'un cristal ayant les symétries du cube

α. Montrer que les valeurs propres de la matrice diélectrique ont une même valeur, soit ϵ' .

β. Quelles sont les propriétés optiques d'un tel cristal ?

6. Biréfringence : pour le spath d'Islande, on donne :

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_o \cdot (1,658)^2 ; \epsilon_3 = \epsilon_o \cdot (1,486)^2.$$

Soit une lame de spath à faces parallèles telle que l'axe de révolution de la surface des vecteurs d'onde fasse un angle θ de $45^\circ 22'$ avec chaque face dans le plan de section qui nous intéresse.

a. Etudier l'écart angulaire entre les rayons obtenus dans le cristal à partir d'un rayon incident normal à la face d'entrée.

b. Calculer le décalage latéral entre les deux rayons à la sortie de la lame si son épaisseur vaut 5 cm.

c. Comment peut-on ainsi obtenir une lumière polarisée rectilignement ? Comparer avec d'autres moyens.

Autres concours : Durée : 3h

Corrigé

$$1. \text{ Selon } O x_i \text{ on a : } \vec{D}_i = \epsilon_o \vec{E} + \chi_i \epsilon_o \vec{E} = \epsilon_o (1 + \chi_i) \vec{E}_i.$$

alors $\vec{D} = \sum_i \vec{D}_i = \sum_i \epsilon_o (1 + \chi_i) \vec{E}_i$, ce qui peut s'écrire avec une matrice diagonale,

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} (1 + \chi_1) \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \chi_2) \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \chi_3) \epsilon_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{pmatrix} \text{ soit de la forme } \vec{D} = (\mathbb{D}) \vec{E}.$$

Dans un changement de base de matrice (\mathbb{M}) orthogonale telle que ${}^t(\mathbb{M}) = (\mathbb{M})^{-1}$

$$\vec{D} = {}^t(\mathbb{M}) (\mathbb{D}) (\mathbb{M}) \vec{E} \text{ avec } (\epsilon_{ij}) = {}^t(\mathbb{M}) (\mathbb{D}) (\mathbb{M}).$$

$$(\epsilon_{ij}) \text{ est symétrique car } {}^t(\epsilon_{ij}) = {}^t(\mathbb{M}) {}^t(\mathbb{D}) (\mathbb{M}) = (\epsilon_{ij}). \text{ car } {}^t(\mathbb{D}) = (\mathbb{D}).$$

2.a. $\text{div } \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{D} = 0$; $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ donnent la transversalité pour \vec{D} et \vec{B} mais $\vec{E} = (\epsilon_{ij})^{-1} \vec{D} \Rightarrow \text{div } \vec{E} \neq 0$ en général soit \vec{E} non transversal.

• axe optique du cristal [biréfringence], construction des normales aux surfaces d'onde dans un milieu biréfringent, cristal ayant les symétries du cube effectivement isotrope, cristal uniaxe anisotrope, lame biréfringente à faces parallèles [décalage latéral entre les deux rayons polarisés orthogonalement à la sortie de la], lame de spath à faces parallèles [biréfringence], obtenir une lumière polarisée rectilignement, plan d'incidence, spath d'Islande [biréfringence], transversalité des champs électromagnétiques

b. On sait que $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E}$; $\text{div} \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}$.

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{H} = j\omega \vec{D} \Rightarrow \vec{D} = -\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{H}.$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} ; \vec{H} = \frac{\vec{k}}{\omega\mu_0} \wedge \vec{E}. \vec{H} \text{ est transversal.}$$

$$\text{c. } \vec{D} = -\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega\mu_0} \wedge \vec{E} \right) = \frac{\vec{k}^2}{\omega^2\mu_0} \vec{E} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{E}}{\omega^2\mu_0} \vec{k}. \quad (2)$$

3.a.α. Dans une base propre de (ϵ_{ij}) , $D_i = \epsilon_0 n_i^2 E_i$,

$$\text{soit } (1)' \quad \frac{\epsilon_0 E}{D} = \frac{p}{n_1^2 p_1} = \frac{q}{n_2^2 q_1} = \frac{r}{n_3^2 r_1}.$$

Appliquons la combinaison linéaire des numérateurs et des dénominateurs afin d'obtenir un nouveau numérateur $p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ vu $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$.

$$\frac{\epsilon_0 E}{D} = \frac{p\alpha}{n_1^2 p_1 \alpha} = \frac{q\beta}{n_2^2 q_1 \beta} = \frac{r\gamma}{n_3^2 r_1 \gamma} = \frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{n_1^2 p_1 \alpha + n_2^2 q_1 \beta + n_3^2 r_1 \gamma}.$$

$$\frac{\epsilon_0 E}{D} \text{ fini et } \alpha p + \beta q + r\gamma = 0 \Rightarrow n_1^2 p_1 \alpha + n_2^2 q_1 \beta + n_3^2 r_1 \gamma = 0 \quad (1)''$$

β. (2) s'écrit après simplification par $\epsilon_0 E$ vu $\frac{k_0^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} = 1$ et $k = nk_0$.

$$n_1^2 p_1 = n^2 p_1 - n^2 \alpha (p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma)$$

$$n_2^2 q_1 = n^2 q_1 - n^2 \beta (p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma)$$

$$n_3^2 r_1 = n^2 r_1 - n^2 \gamma (p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$p_1 = \frac{n^2 \alpha (p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma)}{n^2 - n_1^2}$$

$$q_1 = \frac{n^2 \beta (p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma)}{n^2 - n_2^2}$$

$$r_1 = \frac{n^2 \gamma (p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma)}{n^2 - n_3^2}$$

et en reportant dans (1)'', il reste :

$$\left(\frac{n_1^2 \alpha^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{n_2^2 \beta^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 \gamma^2}{n^2 - n_3^2} \right) n^2 (p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma) = 0$$

or $\vec{E} \cdot \vec{k} \neq 0 \Rightarrow p_1 \alpha + q_1 \beta + r_1 \gamma \neq 0 ; n \neq 0$.

Il reste la surface des indices du 4^{ème} degré en n pour α, β, γ donnés. (Coordonnées de l'extrémité du vecteur $\frac{\vec{k}}{k_0}$).

$$n_1^2 \alpha^2 (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2) + n_2^2 \beta^2 (n^2 - n_3^2)(n^2 - n_1^2) + n_3^2 \gamma^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) = 0.$$

b. L'équation en n est de fait bicarrée et donne deux racines positives en n^2 (et donc en n) car la somme est positive ainsi que le produit, soit :

$$n^4 (n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2) n^2 (n_1^2 \alpha^2 (n_2^2 + n_3^2) + n_2^2 \beta^2 (n_3^2 + n_1^2) + n_3^2 \gamma^2 (n_1^2 + n_2^2)) \dots \\ \dots + n_1^2 n_2^2 n_3^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

Si on se donne une direction, on voit qu'on obtient une équation quadratique en n^2 , donc deux valeurs absolues distinctes du vecteur d'onde. On rappelle $n_i^2(\omega) = \epsilon_{r_i}(\omega)$.

Interprétation : à chaque direction correspondent donc 2 célérités de propagation différentes en général, soit 2 sortes d'ondes.

4.a. $\vec{D} = (\epsilon_{ij}) \vec{E}$ égalant le résultat de **2.c.**

La composante i s'écrit $\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j = - \sum_{\lambda=1}^3 \frac{k_\lambda E_\lambda}{\omega^2 \mu_0} k_i + \frac{k^2}{\omega^2 \mu} E_i$, ce qui peut s'écrire

$$\text{matriciellement : } \left(\frac{k^2}{\omega^2 \mu_0} \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\omega^2 \mu_0} - \epsilon_{ij} \right) (E_j) = 0 \text{ avec } \begin{cases} \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

La polarisation étant définie par rapport à \vec{k} , choisissons un repère de directions comportant \vec{k} comme axe des z : $\Rightarrow k_i k_j = 0 \forall i$ et $D_3 = 0$.

La condition de compatibilité de **3.a.** en \vec{D} s'exprimera ici :

$$\left(\frac{k^2}{\omega^2 \mu} \delta_{ij} - 0 - \epsilon_{ij} \right) (\epsilon_{ij})^{-1} (\vec{D}) = 0. \text{ Notons } (J) = (\delta_{ij}) \text{ matrice unitaire.}$$

$$\text{L'écriture est alors de la forme } \frac{k^2}{\omega^2 \mu} (J) (\epsilon_{ij})^{-1} (\vec{D}) - (J) (\vec{D}) = 0, \text{ soit } (\epsilon_{ij}) (\vec{D}) = \frac{k^2}{\omega^2 \mu} (\vec{D}).$$

A chaque valeur propre de cette équation correspond une valeur de k et un vecteur propre \vec{D} .

Les 2 vecteurs propres \vec{D} correspondant à 2 valeurs distinctes de k (ou de n) sont perpendiculaires, vu la méthode d'orthogonalisation de Schmidt..

b. Une onde plane polarisée elliptiquement est de k donné dans un milieu isotrope, il n'y a donc pas d'équivalent dans un milieu anisotrope dans le cas général où à k donné, la direction de \vec{D} est fixée (polarisation rectiligne). A la sortie ces polarisations rectilignes se recomposent mais avec des retards différents dus à des célérités différentes.

5.a.α. $n_1 = n_2$.

La surface des indices s'écrit :

$$(n^2 - n_1^2) (n_1^2 (\alpha^2 + \beta^2) (n^2 - n_3^2) + n_3^2 \gamma^2 (n^2 - n_1^2)) = 0.$$

Elle se décompose en :

- $n^2 = n_1^2$ sphère S_0 des indices. On appellera $n_1 = n_0$ l'indice ordinaire ayant les propriétés communes des milieux isotropes.

- $n^2 (n_1^2 (\alpha^2 + \beta^2) + n_3^2 \gamma^2) = n_1^2 n_3^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$;

or $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, norme d'un vecteur unitaire au carré ;

d'où $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{n_3^2} + \frac{\gamma^2}{n_1^2} = \frac{1}{n^2}$, soit une surface des indices ellipsoïdale S_e en fonction des

variables α, β, γ . (Coordonnées de l'extrémité du vecteur $\frac{\vec{k}}{k_0}$).

γ. $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow n = n_1$ pour $\gamma = \pm 1$.

b. Dans un milieu isotrope, $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ est parallèle à \vec{k} .

$$k_0 \sin i = k_0 \sin \theta_r = n_2 k_0 \sin \theta_t.$$

β. Construction des normales aux surfaces d'ondes dans le cas $n_0 > n_e$.

$$OJ = \sin i = n_0 \sin \theta_{r_0} = n_e \sin \theta_{r_e}$$

- *construction des normales aux surfaces d'onde dans un milieu biréfringent, loi de descartes, surface des indices [milieux anisotropes transparents], surface équichemin optique*

γ. Le rayon ordinaire R_0 se confond à la normale à l'onde ordinaire caractérisée par $n_0 = n_1$. On trace OL pour obtenir R_0 .

• Le rayon extraordinaire est orthogonal à la surface d'onde électromagnétique plane (cf. vecteur de Poynting) définie ici par le plan de \vec{E} et \vec{H} surfaces d'ondes qui sont d'ailleurs constamment parallèles entre elles. Ce rayon est une droite venant de O. Or une surface plane d'onde électromagnétique physique passe par K et est tangente à la surface des indices (cf. surface équichemin optique dans cette direction). Il suffit pour avoir le rayon extraordinaire passant par O d'abaisser la perpendiculaire sur le plan tangent en K (cf. R_e sur la figure ci-dessus).

δ. Les polarisations des deux rayons sont rectilignes orthogonales l'une par rapport à l'autre. Comme le plan de la figure est plan d'incidence et contient l'axe optique du cristal, on peut prendre $\alpha = 0$ et si $n \neq n_1 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow p = 0$

vu **3.a.α.β.** \vec{E}_e et \vec{D}_e appartiennent au plan de la figure $n \neq n_1$. La polarisation est donc orthogonale au plan de la figure pour le rayon ordinaire.

c.α. Par le choix à partir du centre du cube de directions propres orthogonales aux faces, équivalentes physiquement, toutes les valeurs propres sont identiques.

β. Nous avons identité avec un milieu isotrope car $\vec{D} = (\epsilon_{ij})\vec{E} = \epsilon(J)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$.

6.a. Comme précédemment la direction incidente nous donne les normales aux surfaces d'onde : R_0 identique au rayon incident ($i = 0$) ;

on trouve comme précédemment le rayon extraordinaire en traçant la tangente en M à la surface des indices.

Sur la figure ci-dessus l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes principaux Ix (différent

de l'axe Ox précédent), Iy est : $\frac{x^2}{n_e^2} + \frac{y^2}{n_0^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{xdx}{n_e^2} + \frac{ydy}{n_0^2} = 0$.

Le rayon extraordinaire est perpendiculaire à la tangente en M à l'ellipse ; si β est l'angle

qu'il fait avec Ox, on a : $\tan \beta = \tan(\theta - \varphi) = -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \frac{n_e^2}{n_0^2} = \tan \theta \frac{n_e^2}{n_0^2} = \frac{\tan \theta - \tan \varphi}{1 + \tan \theta \tan \varphi}$;

d'où : $\tan \varphi = \frac{\tan \theta (n_0^2 - n_e^2)}{n_0^2 + n_e^2 \tan^2 \theta}$;

A.N. : on nous donne en fait des indices de réfraction :

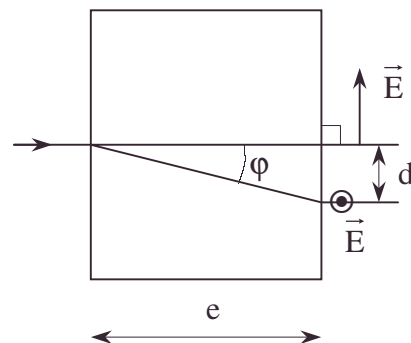
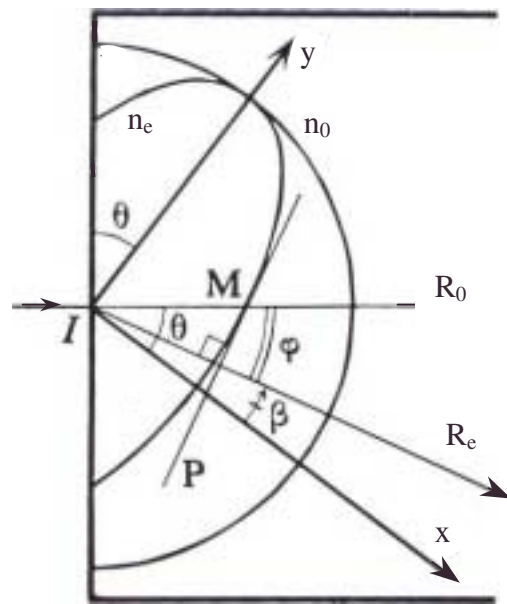
$n_3 = n_e = 1,486$; $n_1 = n_0 = 1,658$; $n_e < n_0$;

$\tan \theta = 1,013$; $\varphi = 6^\circ 14'$

b. Le rayon extraordinaire subit la transformation inverse en arrivant sur l'autre face (cf. inversion du temps) et ressort normalement à la face.

Le décalage latéral :

$d = e \tan \varphi$; A.N. : $d = 0,546$ cm .



• *effet électro-optique, faisceau gaussien d'ondes électromagnétiques, polarisation du diélectrique [champ macroscopique volumique dû aux moments dipolaires orientés par le champ électrique] du diélectrique*

c. Avec un cache on peut occulter l'un des deux faisceaux qui sont polarisés rectilignement. C'est un moyen plus simple que la polarisation vitreuse obtenue par annulation d'un coefficient de réflexion cf. incidence de Brewster. (voir page 1207). Il faut tenir compte du prix de ce gros cristal qui permet un décalage important donc un important faisceau émergent polarisé rectilignement.

7.1.6. Modulateur de lumière Effet électro - optique Faisceau Gaussien

Dans ce problème, on étudie un dispositif permettant de commander l'intensité d'un faisceau lumineux au moyen d'une tension électrique. L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct d'axes Ox, Oy et Oz. On rappelle l'expression des équations de Maxwell dans un milieu diélectrique homogène :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ (M1)} ; \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (M2)} ; \operatorname{div} \vec{D} = 0 \text{ (M3)} ; \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ (M4) [1].}$$

où le champ électrique \vec{E} , l'excitation électrique \vec{D} et le champ magnétique \vec{B} sont des fonctions du temps t et de la position dans l'espace repérée par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

La vitesse de la lumière dans le vide est notée c et les permittivité et perméabilité du vide respectivement ϵ_0 et μ_0 .

$$\epsilon_0 = 8,854.10^{-12} \text{ C.V}^{-1}.\text{m}^{-1} ; \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1} ; c = 2,998.10^8 \text{ m.s}^{-1} \text{ avec } \epsilon_0\mu_0c^2 = 1.$$

\vec{D} et \vec{E} sont liés par une relation qui fait intervenir la polarisation $\vec{P}(\vec{r}, t)$ du diélectrique : $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)$ [2].

On rappelle la formule d'analyse vectorielle : $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{X}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{X}) - \nabla^2(\vec{X})$ [3] où

$$\nabla^2 \text{ désigne l'opérateur laplacien défini par } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

I. Questions préliminaires

On se place en régime sinusoïdal de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$, dans un diélectrique homogène. En

utilisant la notation complexe, les fonctions \vec{D} , \vec{E} , \vec{B} et \vec{P} de \vec{r} et t sont respectivement les parties réelles de $\vec{D}(\vec{r})e^{j\omega t}$, $\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}$, $\vec{B}(\vec{r})e^{j\omega t}$ et $\vec{P}(\vec{r})e^{j\omega t}$ où $\vec{D}(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ et $\vec{P}(\vec{r})$ sont des amplitudes complexes. $\vec{D}(\vec{r})$ et $\vec{E}(\vec{r})$ sont liés par une relation linéaire : $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\vec{r})$ avec $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ [4] dans laquelle $\epsilon_r(\omega)$ et $n(\omega)$ sont respectivement la permittivité relative (supposée réelle et supérieure à 1) et l'indice de réfraction du diélectrique.

1. Ecrire les équations de Maxwell en régime sinusoïdal.

2. Montrer que l'équation de propagation du champ électrique s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ [5].}$$

3. On s'intéresse aux ondes planes électromagnétiques harmoniques de vecteur d'onde \vec{k} dont le champ électrique est polarisé rectilignement et qui sont solutions des

• Brewster (incidence de), variation de l'indice de réfraction du diélectrique quand celui-ci est soumis à un champ électrostatique [effet électro-optique]

équations de Maxwell. Donner leurs caractéristiques. Montrer en particulier que leur vitesse de phase est égale à $\frac{c}{n(\omega)}$.

$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ désigne la longueur d'onde dans le vide de cette onde électromagnétique.

Dans la suite du problème, ϵ_r , sans précision de la fréquence, désigne la valeur statique de la permittivité relative, c'est-à-dire à fréquence nulle, alors que n sans précision de la fréquence désigne la valeur de l'indice de réfraction à une pulsation ω fixée dans le domaine optique.

II. Etude des caractéristiques électriques du modulateur

L'effet électro-optique (EO) consiste en une variation de l'indice de réfraction du diélectrique, appelé alors matériau EO, quand celui-ci est soumis à un champ électrostatique.

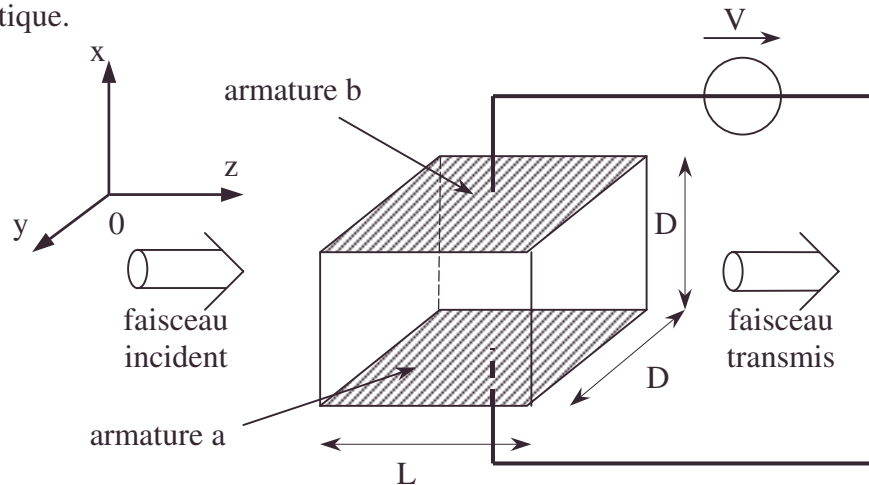


Figure 1

On considère le schéma de la figure 1.

Le matériau EO est un parallélépipède rectangle de côtés D , D et L , respectivement orientés suivant les axes Ox , Oy et Oz . Un faisceau lumineux se propage dans la direction et le sens de l'axe Oz . Il est assimilé dans cette partie à une onde plane électromagnétique.

Le champ électrique de l'onde plane est parallèle à l'axe Ox et son amplitude complexe en un point donné sera appelée amplitude de l'onde en ce point. L'intensité de l'onde est le carré du module de son amplitude. A_e désigne l'amplitude de l'onde à l'entrée du matériau EO et A_s à la sortie.

Un champ électrostatique de seule composante non nulle, E_{st} , suivant Ox , est appliqué grâce à deux armatures planes, appelées a et b , parfaitement conductrices, de surface DL , distantes de D et portées à une différence de potentiel $V = V_a - V_b$ (voir figure 1). Dans tout le problème on négligera les effets de bord du condensateur ainsi constitué. Sa capacité vaut $C = \epsilon_0 \epsilon_r L$.

L'effet EO obéit à la loi : $\frac{1}{n_{st}^2} - \frac{1}{n^2} = p E_{st} \ll 1$ [6] dans laquelle n et n_{st} sont

respectivement les indices de réfraction en l'absence et en présence de champ électrostatique, et p est le coefficient EO. La variation relative de l'indice de réfraction sera supposée petite devant l'unité. En conséquence, chaque fois que cela sera possible, on utilisera un développement limité au premier ordre de la variation d'indice.

- intensité de l'onde électromagnétique [carré du module de son amplitude], négliger les effets de bord du condensateur, niobate de lithium [effet électrooptique], vitesse de phase

Dans les applications numériques de la suite du problème, on prendra $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ et les paramètres du niobate de lithium (LiNbO_3) :

$$\epsilon_r = 28 ; n = 2,203 ; p = 30,3 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}.$$

A. Principe du modulateur

1. Montrer que l'amplitude de l'onde à la sortie s'écrit :

$$A_s = A_e e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} n L + j \varphi} \text{ avec } \varphi = \frac{\pi n^3 p}{\lambda} L \frac{V}{D} \text{ [7].}$$

2. La tension "demi-onde" V_π est celle qui conduit à un déphasage $\varphi = \pi$. Calculer numériquement V_π pour $D = 2 \text{ mm}$ et $L = 2 \text{ cm}$.

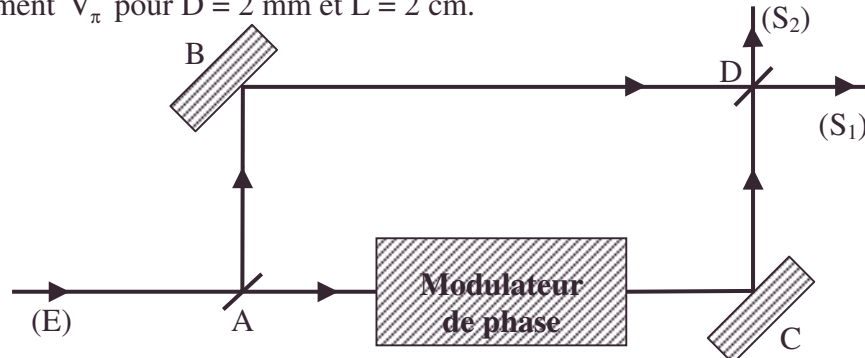


Figure 2

On place le système de la figure 1, appelé modulateur de phase, dans un interféromètre de Mach-Zehnder à deux ondes schématisé sur la figure 2. Deux lames partiellement réfléchissantes, placées en A et D, ont des coefficients de réflexion et de transmission pour les amplitudes respectivement égaux à $\frac{j}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Deux miroirs parfaitement réfléchissants sont placés en B et C. Un faisceau incident (E) donne naissance à deux faisceaux transmis (S_1) et (S_2). Le modulateur de phase est sur la voie ACD et les chemins optiques des deux voies ACD et ABD sont égaux en l'absence de tension appliquée.

3. On suppose dans cette question que $V = 0$. Exprimer les intensités des faisceaux transmis (S_1) et (S_2) en fonction de l'intensité I_0 du faisceau incident (E).

4. En présence d'une tension appliquée V , la transmission $T_m(V)$ est définie par le rapport des intensités des faisceaux transmis (S_1) et incident (E). Exprimer $T_m(V)$ en fonction de V et de V_π . Tracer l'allure de la fonction $T_m(V)$.

Quel est le rôle de l'interféromètre ?

B. Calcul de la puissance de commande

On remplace le générateur de tension continue par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation Ω et on se propose d'évaluer la puissance que doit fournir ce générateur pour moduler la lumière.

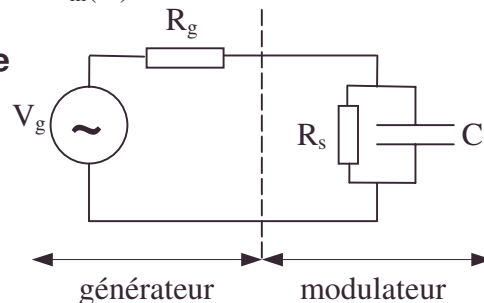


Figure 3

Ω est suffisamment petit pour que l'approximation des régimes quasi-permanents et les résultats obtenus au II.A. s'appliquent.

Du point de vue électrique, le modulateur est assimilé au condensateur de capacité C en parallèle avec une résistance R_s . Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale constitué d'une source de tension idéale de force électromotrice V_g , en série avec une résistance R_g . Le schéma électrique de l'ensemble est celui de la figure 3.

- circuit équivalent du modulateur de lumière, interféromètre de Mach-Zehnder, maximum

En grandeurs complexes, la tension aux bornes du condensateur est notée $V_c e^{j\Omega t}$.

1. Exprimer le rapport $T_v(\Omega) = \left| \frac{V_c}{V_g} \right|$ en fonction de R_g , R_s , C et Ω . Pour quelle

valeur de Ω le rapport $T_v(\Omega)$ est-il maximal ? Quelle est la valeur de ce maximum ?

2. On appelle P_t la puissance fournie par la source de tension, et P_c celle dissipée dans le modulateur. Exprimer le rapport $T_p(\Omega) = \frac{P_c}{P_t}$ en fonction de R_g , R_s , C et Ω .

Tracer la courbe $T_p(\Omega)$.

3. Nous allons voir qu'il est intéressant d'insérer un transformateur de tension, schématisé par le quadripôle de la figure 4, entre le générateur et le modulateur. Ce transformateur sera considéré comme idéal, c'est-à-dire que les amplitudes complexes des courants et des tensions vérifient $\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = \rho$ où la grandeur réelle ρ est le rapport du transformateur.

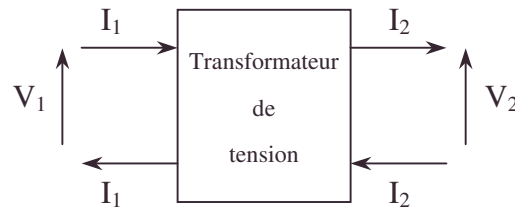


Figure 4

Le rapport $\left| \frac{V_c}{V_g} \right| = T_v(\Omega, \rho)$ dépend maintenant de ρ . Exprimer $T_v(\Omega, \rho)$ en fonction de

R_g , R_s , C , Ω et ρ . La limite de $T_v(\Omega, \rho)$ quand Ω tend vers 0 est notée $T_v(0, \rho)$. Pour quelle valeur ρ_0 de ρ le rapport $T_v(0, \rho)$ est-il maximal ? Montrer que $T_v(0, \rho_0) \geq T_v(0, 1)$. Interpréter ce résultat.

4. La bande passante $\Delta\Omega$ du modulateur est définie par $T_v(\Delta\Omega, \rho_0) = \frac{T_v(0, \rho_0)}{\sqrt{2}}$.

Exprimer $\Delta\Omega$ en fonction de R_s et C .

5. Exprimer la puissance fournie par la source de tension pour $\rho = \rho_0$, notée $P_t(\Omega, \rho_0)$, en fonction de R_s , C , Ω et V_c .

On appelle P_{t0} la limite de $P_t(\Omega, \rho_0)$ quand Ω tend vers 0. Montrer que P_{t0} s'écrit :

$P_{t0} = C_p \frac{D^2}{L} \phi^2 \Delta\Omega$ [8] où ϕ est donné par [7] avec $V = |V_c|$. On donnera l'expression du coefficient C_p en fonction de λ , ϵ_r , n et p . Analyser et justifier physiquement les influences de R_g et R_s sur $\Delta\Omega$ et P_{t0} .

6. Calculer numériquement C_p .

Que vaut la bande passante $\Delta\Omega$ pour $\phi = \pi$, $P_{t0} = 1 \text{ W}$, $D = 2 \text{ mm}$ et $L = 2 \text{ cm}$?

L'objectif est d'obtenir un modulateur aussi performant que possible. Pour cela, il faut qu'à amplitude de modulation ϕ et à puissance délivrée par la source de tension P_{t0} données, la bande passante soit la plus élevée possible.

Les facteurs C_p et $\frac{D^2}{L}$ doivent donc être les plus petits possible.

7. Définir un paramètre Q_m caractérisant la qualité d'un matériau pour la modulation EO à une longueur d'onde donnée. Calculer numériquement Q_m .

• bande passante du modulateur de lumière, faisceau gaussien d'ondes électromagnétiques

III. Etude de la propagation du faisceau lumineux

Le faisceau lumineux qui traverse le modulateur de la figure 1 ne peut pas être rigoureusement une onde plane puisque son extension spatiale est limitée à la section d'entrée de surface D^2 du modulateur. L'objet de cette partie est de tenir compte de cette réalité. Pour cela nous sommes amenés à étudier la propagation de faisceaux lumineux d'extension transversale limitée. On étudie les propriétés générales de tels faisceaux dans la partie **III.A.**, et leur utilisation dans le modulateur dans la partie **III.B.**

A. Etude des faisceaux gaussiens

Les "faisceaux gaussiens" sont des ondes électromagnétiques, solutions particulières des équations de Maxwell en régime sinusoïdal de pulsation ω , dans un milieu diélectrique homogène d'indice de réfraction n . Comme dans le cas de l'onde plane, les champs électrique et magnétique sont polarisés rectilignement, et $E(x,y,z)$ et $B(x,y,z)$ désignent leurs amplitudes complexes respectives. Soit un faisceau gaussien dont le champ électrique est parallèle à Ox et qui se propage dans la direction et le sens de l'axe Oz .

On pose alors : $E(x,y,z) = \psi(x,y,z)e^{-jk_n z}$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ [9], où ψ est une fonction lentement variable de x , y et z à l'échelle de la longueur d'onde, c'est-à-dire en

particulier que : $\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \ll k |\psi|$ et $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|$ [10].

1. Montrer que l'équation de propagation [5] se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2jk_n \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad [11].$$

2. On cherche des solutions de [11] de la forme :

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{a(z)} \exp\left(-j \frac{r^2}{2b(z)}\right) \text{ avec } r^2 = x^2 + y^2 \quad [12], \text{ où } a(z) \text{ et } b(z) \text{ sont deux}$$

fonctions complexes de z .

Obtenir un système de deux équations différentielles du premier ordre portant sur les fonctions $a(z)$ et $b(z)$. Montrer que $\frac{a(z)}{b(z)} = \text{constante}$.

3. On admet que dans le plan $z = 0$: $\psi(x,y,0) = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$ [13] où A_0 et w_0

sont des paramètres réels.

Utiliser cette condition aux limites pour résoudre les équations obtenues à la question précédente, et montrer que :

$$a(z) = -j \frac{z + jq_0}{q_0 A_0} \text{ et } b(z) = \frac{z + jq_0}{kn}, \text{ avec } q_0 = \frac{\pi(w_0)^2 n}{\lambda} \quad [14].$$

4. Montrer que la fonction $|\psi(x,y,z)|^2$ se met sous la forme :

$$|\psi(x,y,z)|^2 = (A(z))^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{(w(z))^2}\right) \quad [15].$$

On exprimera $w(z)$ et $A(z)$ en fonction de w_0, A_0, q_0 et z .

5. On se place dans le cadre général des ondes électromagnétique en régime sinusoïdal. montrer que la moyenne au cours du temps du vecteur de Poynting en un point donné s'écrit :

$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}(\vec{r}) \wedge \vec{B}(\vec{r})^*)$ [16] où $\vec{E}(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$ sont les amplitudes complexes définies au I. Le complexe conjugué de $\vec{B}(\vec{r})$ est ici noté $\vec{B}(\vec{r})^*$.

6. Calculer $\vec{\Pi}(\vec{r})$ pour un faisceau gaussien en fonction de ω , n , $\psi(x,y,z)$ et ses dérivées.

En utilisant l'approximation [10], montrer que le flux d'énergie électromagnétique qui traverse une surface élémentaire dS perpendiculaire à l'axe Oz est :

$$d\phi = \frac{\epsilon_0 c n}{2} |\psi(x,y,z)|^2 dS \quad [17].$$

7. En déduire le flux d'énergie électromagnétique, noté $F(r,z)$, qui traverse un disque de rayon r , d'axe Oz et situé dans le plan de cote z . On exprimera $F(r,z)$ en fonction de n , $w(z)$, $A(z)$ et r .

8. Tracer, pour z donné, $F(r,z)$ en fonction de r . On rappelle $F_t(z)$ la limite de $F(r,z)$ quand r tend vers l'infini. Donner l'expression de $F_t(z)$ en fonction de n , $w(z)$ et $A(z)$. Exprimer, en fonction de $w(z)$, le diamètre $D(z)$ du faisceau défini par :

$$1 - \frac{F\left(\frac{D(z)}{2}, z\right)}{F_t(z)} = \frac{1}{e} \quad [18].$$

9. Tracer la fonction $w(z)$. Quel est le comportement asymptotique de $w(z)$ aux grandes valeurs de z ? Obtenir une relation entre l'angle de divergence asymptotique du faisceau et son diamètre minimal.

Comparer à la figure de diffraction à l'infini d'une fente rectiligne.

10. Comment la fonction $F_t(z)$ dépend-elle de z ? Commenter.

L'amplitude du champ électrique du faisceau lumineux a une dépendance transversale gaussienne. C'est pour cela qu'on l'appelle un faisceau gaussien. On dit que la gorge du faisceau se situe en $z = 0$.

B. Propagation dans le matériau EO

Le faisceau gaussien étudié au III.A. arrive sur la face d'entrée du milieu EO de la figure 1 dont on assimile maintenant la forme à un cylindre (C_1), d'axe parallèle à Oz, de diamètre D et de longueur L . La gorge du faisceau gaussien est placée au centre de (C_1). En admettant que le milieu extérieur est opaque, on définit le coefficient de transmission de (C_1) par le rapport du flux d'énergie électromagnétique sortant au flux

incident total, soit $T_r = \frac{F\left(\frac{D}{2}, \frac{L}{2}\right)}{F_t\left(-\frac{L}{2}\right)}$.

1. On appelle R le rapport $\frac{D}{w\left(\frac{L}{2}\right)}$. Donner l'expression de R en fonction de T_r .

Calculer R pour $T_r = 0,99$. Dans la suite, on prendra $R = 5$.

2. Montrer que pour L donné, le rapport $\frac{D^2}{L}$ est minimal pour une valeur de w_0 dite optimale et notée w_{opt} .

Exprimer w_{opt} en fonction de L , n et λ . Montrer que dans ce cas : $\frac{D^2}{L} = R^2 \frac{\lambda}{\pi n}$ [19].

Indiquer, en justifiant votre réponse, le phénomène physique responsable de la limitation du rapport $\frac{D^2}{L}$.

3. Exprimer, pour $w_0 = w_{\text{opt}}$, la puissance P_{t0} obtenue au **II.B.5.** en fonction de ϵ_r , n , p , λ , R , φ et $\Delta\Omega$.

En déduire une nouvelle expression du paramètre Q_m introduit au **II.B.7.** Donner, toujours pour $w_0 = w_{\text{opt}}$, les expressions de D et V_π en fonction de λ , L , n , p et R .

4. Calculer numériquement D et V_π pour $L = 2$ cm.

Que vaut $\Delta\Omega$ pour $\varphi = \pi$ et $P_{t0} = 1$ W ? Comparer à la valeur obtenue au **II.B.6.**

5. Discuter l'influence de la longueur L sur les différents paramètres, et analyser brièvement les conséquences pratiques de cette étude pour la réalisation d'un modulateur électro-optique.

CCP ; Durée : 4 h

Corrigé

I.1. $\vec{\text{div}} \vec{B}(\vec{r}) = 0$; $\vec{\text{div}} \vec{E}(\vec{r}) = 0$; $\vec{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r})$; $\vec{\text{rot}} \vec{B}(\vec{r}) = j\frac{\omega\epsilon_r}{c^2} \vec{E}$.

μ_0 est supposé caractériser ce diélectrique cf. **M4.**

2. $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}} \vec{\text{div}} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -j\omega \vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E}$.

d'où $\Delta \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ car $\Delta = \nabla^2$ [5].

3.a. $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$; $\vec{\text{div}} \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = 0$. \vec{E} est transversal.

b. $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -j\omega \vec{B}$; $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$; \vec{k} , \vec{E}_0 , \vec{B}_0 forment un trièdre direct. \vec{B} est transversal car \vec{B} orthogonal à \vec{k} .

c. Reportons \vec{B} dans **M4** : $-j\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) = j\omega \frac{\epsilon_r}{c^2} \vec{E}$ donne :

$-\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{\omega} \vec{E} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{E}}{\omega} \vec{k} \right) = j\omega \frac{\epsilon_r}{c^2} \vec{E} \Rightarrow k^2 = \omega^2 \frac{\epsilon_r}{c^2}$ (relation de dispersion).

d'où $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\epsilon_r^{1/2}}$; or, $n^2 = \epsilon_r \Rightarrow v_\varphi = \frac{c}{n}$.

N.B.: $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ dans le vide, $k = \frac{2\pi}{\lambda} n$ dans le diélectrique cf. relation de dispersion.

II.A.1. $E_x = E_0 e^{j(\omega t - k z)}$; $A_e = E_0$; $A_s = E_0 e^{-jkL}$; $A_s = A_e e^{-\frac{2\pi}{\lambda} j n_{st} L}$, n_{st} étant l'indice au passage de l'onde en présence de $E_{st_x} = \frac{V}{D}$.

Posons $n_{st} = n + \Delta n$; [6] s'écrit $F(n + \Delta n) - F(n) = \frac{dF}{dn} \Delta n = p E_{st}$ avec $F(n) = \frac{1}{n^2}$.

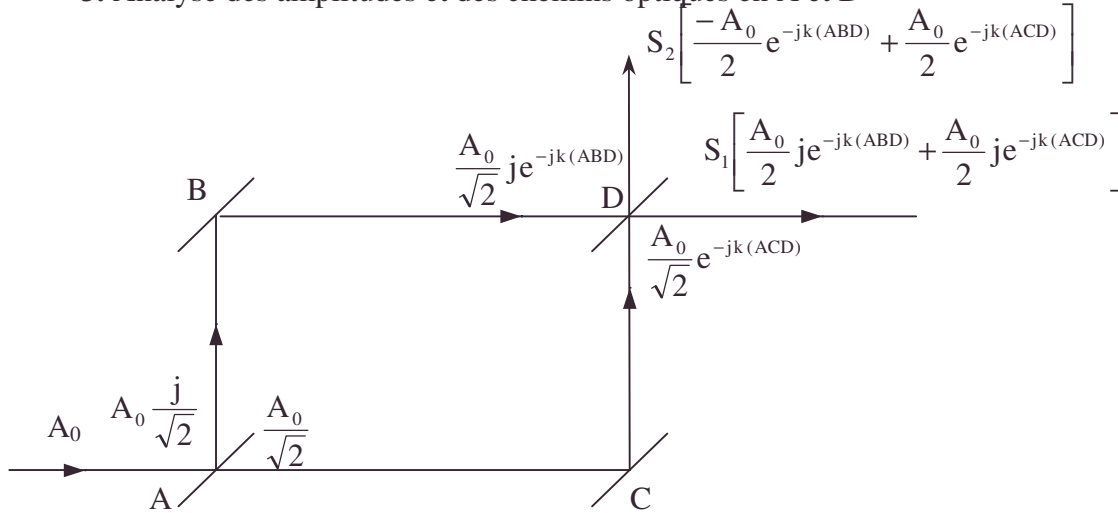
Soit $\frac{-2\Delta n}{n^3} = p \frac{V}{D} \Rightarrow n_{st} = n - \frac{pn^3 V}{2D}$ et $-j\frac{2\pi}{\lambda} n_{st} L = -j\frac{2\pi n L}{\lambda} + j\varphi$ avec $\varphi = \frac{\pi n^3}{\lambda} p L \frac{V}{D}$.

• vitesse de phase

A_s est bien de la forme demandée.

2. $\pi = \pi \frac{np^3 LV_\pi}{\lambda D} \Rightarrow V_\pi = \frac{\lambda D}{n^3 p L}$; on peut écrire $\varphi = \pi \frac{V}{V_\pi}$. AN : $V_\pi = 195,34 \text{ V}$.

3. Analyse des amplitudes et des chemins optiques en A et D



avec $(ABD) = (ACD)$ quand $V = 0$ et $I = A \cdot A^*$, on a :

Intensité transmise par S_1 : $I(S_1) = A_0 j e^{-jk(ABD)} \cdot (-A_0 j) e^{jk(ABD)} = A_0^2 = I_0$.

Intensité transmise par S_2 : $I(S_2) = 0.0 = 0$.

4.a. $k(ACD) = k(ABD) - \varphi$ (cf. A.1.) ;

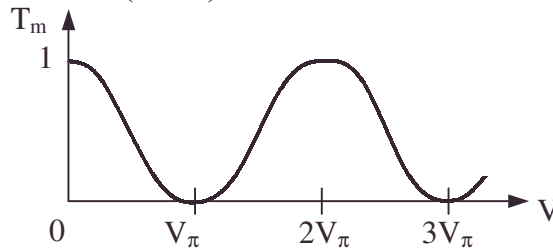
amplitude transmise par S_1 : $\frac{A_0}{2} j e^{-jk(ABD)} (1 + e^{j\varphi})$;

Intensité transmise par S_1 : $I_{S_1} = \frac{A_0^2}{4} j e^{-jk(ABD)} (1 + e^{j\varphi}) \left(-\frac{A_0}{2} j e^{jk(ABD)} \right) (1 + e^{-j\varphi})$.

$I_{S_1} = \frac{A_0^2}{4} (2 + e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = \frac{2A_0^2}{4} (1 + \cos \varphi) = \frac{4A_0^2}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{2}$.

$T_m = \frac{I_{S_1}}{I_0} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{V}{V_\pi} \right) = \frac{1 + \cos 2\pi \frac{V}{2V_\pi}}{2}$.

b.



c. L'interféromètre permet d'obtenir une modulation d'intensité en agissant sur V , grandeur caractéristique du modulateur de phase.

B.1.a. Soit Z_m l'impédance du modulateur : $Z_m = \frac{R_s}{1 + jR_s C \Omega}$;

R_g et Z_m sont les deux impédances d'un pont diviseur de tension :

$V_c = \frac{Z_m}{R_g + Z_m} V_g \Rightarrow T_v = \left| \frac{V_c}{V_g} \right| = \left| \frac{Z_m}{R_g + Z_m} \right| = \frac{R_s}{\sqrt{(R_g + R_s)^2 + (R_g R_s C \Omega)^2}}$.

b. $T_V(\Omega)$ est maximal quand le dénominateur est minimal, soit pour $\Omega = 0$.

c. $T_{V_{\max}} = \frac{R_s}{R_g + R_s}.$

2.a. Dans un dipôle $P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\arg U - \arg I) = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(Z)$ (cf. $\bar{U} = \overline{ZI}$).

$$T_p = \frac{P_c}{P_t} = \frac{\frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(Z_m)}{\frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(R_g + Z_m)} = \frac{\frac{R_s}{1 + (R_s C \Omega)^2}}{R_g + \frac{R_s}{1 + (R_s C \Omega)^2}} = \frac{R_s}{R_g + R_s + R_g R_s^2 C^2 \Omega^2}.$$

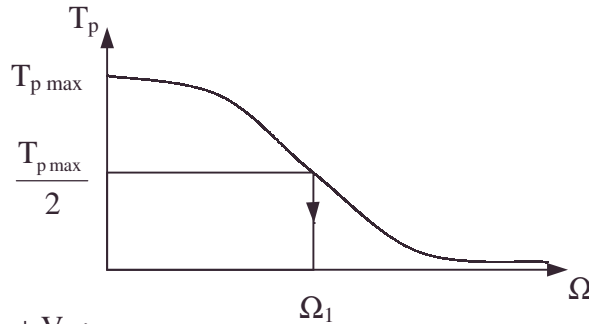
b. De même qu'en 1., $T_{p \max} = \frac{R_s}{R_g + R_s}.$

c. Bande passante :

$$T_p = \frac{T_{p \max}}{2} = \frac{R_s}{2(R_g + R_s)} = \frac{R_s}{(R_g + R_s) \left(1 + \frac{R_g R_s^2 C^2 \Omega^2}{R_s + R_g} \right)};$$

\Rightarrow la bande passante $\Omega_1 = \frac{1}{R_s C} \sqrt{\frac{R_s + R_g}{R_g}}.$

d.



3.a. $V_g = R_g I_1 + V_1;$

$V_C = V_2 = Z_m I_2 = Z_m \frac{I_1}{\rho};$

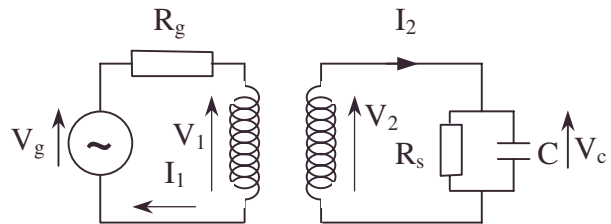
or, $V_1 = \frac{V_2}{\rho} \Rightarrow V_g = \frac{R_g \rho V_C}{Z_m} + \frac{V_C}{\rho}$

$$\Rightarrow T_V = \left| \frac{V_C}{V_g} \right| = \left| \frac{Z_m \rho}{Z_m + R_g \rho^2} \right| = \frac{R_s}{\sqrt{\left(R_g \rho + \frac{R_s}{\rho} \right)^2 + (\rho R_s R_g C \Omega)^2}}.$$

à ρ donné, T_V est maximum pour $\Omega = 0$.

b. $\lim_{\Omega \rightarrow 0} T_V = T_V(0, \rho) = \frac{R_s}{R_g \rho + \frac{R_s}{\rho}};$ le maximum de $T_V(0, \rho)$ correspond au

minimum de $R_g \rho + \frac{R_s}{\rho} :$



somme de deux termes de produit constant $R_g R_s$, minimale pour $R_g \rho = \frac{R_s}{\rho}$, soit pour

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{R_s}{R_g}} ; T_V(0, \rho_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_s}{R_g}} .$$

c. Exprimons que $T_V(0, \rho_0)$ est un maximum $T_V(0, \rho_0) \geq T_V(0, 1)$.

d. $T_V(0, 1)$ est la valeur du cas **II.B.1.** sans transformateur : $V_1 = V_2$ ($\rho = 1$) ; la tension appliquée est plus grande quand on utilise le transformateur pour $\rho = \rho_0 \neq 1$.

$$4. \text{ On a : } \frac{R_s^2}{\left(R_g \rho_0 + \frac{R_s}{\rho_0}\right)^2 + (\rho R_s R_g C \Delta \Omega)^2} = \frac{R_s}{4 R_g \cdot 2} \Rightarrow \Delta \Omega = \frac{2}{R_s C} .$$

5.a.

$$P_t = P_c + R_g \frac{I_{m_1}^2}{2} = \frac{1}{2} I_{m_2}^2 \frac{R_s}{1 + R_s^2 C^2 \Omega^2} + \frac{1}{2} R_g \rho^2 I_{m_2}^2 = \frac{1}{2} I_{m_2}^2 \left(\rho^2 R_g + \frac{R_s}{1 + (R_s C \Omega)^2} \right) ;$$

$$\text{et } V_C = Z_m I_2 \Rightarrow I_{m_2}^2 = \frac{|V_C|^2}{R_s^2} (1 + (R_s C \Omega)^2) .$$

$$\text{or } \rho_0 = \sqrt{\frac{R_s}{R_g}} \Rightarrow P_t(\Omega, \rho_0) = \frac{2 + (R_s C \Omega)^2}{2 R_s} |V_C|^2 .$$

$$b. P_{t_0} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} P_t = \frac{|V_C|^2}{R_s} = \frac{|V|^2}{R_s} = \frac{\lambda^2}{\pi^2 n^6 p^2} \frac{D^2}{L^2} \frac{\varphi^2}{R_s} \text{ cf. [7].}$$

$$\text{Or, } \Delta \Omega = \frac{2}{R_s C} = \frac{2}{R_s \epsilon_0 \epsilon_r L} \Rightarrow P_{t_0} = \frac{\lambda^2 \epsilon_0 \epsilon_r D^2}{2 \pi^2 n^6 p^2 L} \varphi^2 \Delta \Omega .$$

$$c. \text{ Soit } C_P = \frac{\lambda^2 \epsilon_0 \epsilon_r}{2 \pi^2 n^6 p^2} .$$

d.α. R_g est sans influence sur $\Delta \Omega$ et P_{t_0} ; l'utilisation du transformateur fait que le dipôle appliqué au modulateur est de caractéristique différente indépendante de R_g pour $\rho_0 = \sqrt{\frac{R_s}{R_g}}$, sinon R_g imperfection du générateur intervient cf. **II.A.2.**

β. L'optimisation du transfert de puissance en basse fréquence donne un rôle primordial à R_s car $\Delta \Omega = \frac{2}{R_s C}$; $P_C(0) = \frac{1}{2} \frac{V_C^2}{R_s}$.

6. Vu les données numériques de **II.** :

$$C_P = 4,792 \cdot 10^{-5} \text{ J.m}^{-1} \cdot \text{rad}^{-3} ; \Delta \Omega = \frac{P_{t_0} L}{C_P D^2 \varphi^2} ; \text{A.N. : } \Delta \Omega = 1,057 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1} .$$

7. Le facteur de qualité d'un circuit RLC est tel que $\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = \frac{1}{Q_m}$.

$$\text{Ici, } \Delta \Omega = \frac{P_{t_0} L}{C_P D^2 \varphi^2} = \frac{2 \pi^2 n^6 p^2 P_{t_0} L}{\lambda^2 \epsilon_0 \epsilon_r D^2 \varphi^2} ; \Omega = \frac{2 \pi}{T} = \frac{2 \pi c}{c T} = \frac{2 \pi c}{\lambda} .$$

$$Q_m = \frac{\Omega}{\Delta\Omega} = \frac{2\pi c}{\lambda \Delta\Omega} = \frac{2\pi c \lambda^2 \epsilon_0 \epsilon_r D^2 \varphi^2}{\lambda \cdot 2\pi^2 n^6 p^2 P_{t_0} L} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r D^2 \varphi^2 \lambda c}{n^6 p^2 P_{t_0} \pi L}; \text{ A.N.: } Q_m = 2,816 \cdot 10^8,$$

coefficient de qualité de valeur très élevée, comme souvent en optique.

III.A.1. Tenons compte de [9] pour écrire [5] avec $\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r = k^2$ cf. **I.2.c.** .

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - j k n \Psi \right) e^{-j k n z}; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - 2 j k n \frac{\partial \Psi}{\partial z} - k^2 n^2 \Psi \right) e^{-j k n z}.$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} e^{-j k n z}; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} e^{-j k n z}; \Rightarrow \Delta \Psi - 2 j k n \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

$$\text{Or, } \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right| \ll k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2 j k n \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad [11].$$

$$\text{2.a. } \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \left(-\frac{1}{a^2} \frac{da}{dz} + j \frac{db}{dz} \left(\frac{x^2 + y^2}{2ab^2} \right) \right) e^{-j \frac{x^2 + y^2}{2b}};$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{-jx}{ab} e^{-j \frac{(x^2 + y^2)}{2b}}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{-j}{ab} - \frac{x^2}{ab^2} \right) e^{-j \frac{(x^2 + y^2)}{2b}}, \text{ et par analogie :}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \left(-\frac{j}{ab} - \frac{y^2}{ab^2} \right) e^{-j \frac{(x^2 + y^2)}{2b}}.$$

$$[11] \text{ s'écrit : } 2j \frac{kn}{a^2} \left(\frac{da}{dz} - \frac{a}{knb} \right) + \frac{kn}{ab^2} (x^2 + y^2) \left(\frac{db}{dz} - \frac{1}{kn} \right) = 0.$$

Pour que cette équation soit une identité en x,y,z, il faut et il suffit que :

$$\frac{da}{dz} = \frac{a}{knb} \text{ et } \frac{db}{dz} = \frac{1}{kn}.$$

$$\text{b. Formons } \frac{d}{dz} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{1}{b^2} \left(b \frac{da}{dz} - a \frac{db}{dz} \right) = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{kn} - \frac{a}{kn} \right) = 0;$$

$$\Rightarrow \frac{a(z)}{b(z)} \text{ est une constante K.}$$

$$\text{3. } \frac{db}{dz} = \frac{1}{kn} \Rightarrow b(z) = b_0 + \frac{z}{kn} \Rightarrow a = Kb = Kb_0 + \frac{Kz}{kn};$$

$$\text{en } z = 0, b = b_0 = j \frac{w_0^2}{2}; a_0 = Kb_0 = \frac{1}{A_0}; K = \frac{2}{j w_0^2 A_0}.$$

$$a(z) = \frac{1}{A_0} - j \frac{2}{w_0^2 A_0} \frac{z}{kn} = -\frac{j}{A_0} \left(\frac{z}{q_0} + j \right) = -\frac{j}{A_0} \left(\frac{z + jq_0}{q_0} \right) \Rightarrow$$

$$b(z) = \frac{-j}{A_0 \cdot 2} j w_0^2 A_0 \left(\frac{z + jq_0}{q_0} \right) = \frac{z + jq_0}{kn} \text{ vu } q_0 = \frac{\pi w_0^2 n}{2\pi} = \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda}.$$

$$\text{4. } \frac{1}{b} = \frac{kn}{z + jq_0} = \frac{kn}{z^2 + q_0^2} (z - jq_0). \quad b \in X.$$

$$|\psi|^2 = \frac{1}{|a|^2} \left| e^{-j \frac{x^2+y^2}{2b}} \right|^2 = \frac{q_0^2 A_0^2}{z^2 + q_0^2} \left| e^{-\frac{q_0 k n (x^2+y^2)}{z^2 + q_0^2}} \right|^2 \cdot \left| e^{-\frac{j z}{z^2 + q_0^2} \frac{k n (x^2+y^2)}{2}} \right|^2 ; \text{ or } |e^{j\theta}| = 1 ;$$

$$|\psi|^2 = \frac{q_0^2 A_0^2}{z^2 + q_0^2} e^{-\frac{q_0 k n (x^2+y^2)}{z^2 + q_0^2}} \Rightarrow A(z) = \pm \frac{q_0 A_0}{\sqrt{z^2 + q_0^2}} .$$

$$w(z) = \pm \sqrt{\frac{2(z^2 + q_0^2)}{q_0 k n}} = \pm \frac{w_0}{q_0} \sqrt{z^2 + q_0^2} .$$

$$5. \vec{\Pi}(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \text{Re} \left[\vec{E}(r, t) \right] \wedge \text{Re} \left[\vec{B}(r, t) \right] \text{ or, } \text{Re}(a + jb) = \frac{(a + jb) + (a + jb)^*}{2}$$

$$\vec{\pi}(r, t) = \frac{1}{4\mu_0} \left[\vec{E} + \vec{E}^* \right] \wedge \left[\vec{B} + \vec{B}^* \right] = \frac{1}{4\mu_0} \left[\vec{E} \wedge \vec{B} e^{2j\omega t} + \vec{E}^* \wedge \vec{B}^* e^{-2j\omega t} + \vec{E} \wedge \vec{B}^* + \vec{E}^* \wedge \vec{B} \right]$$

$$\langle \vec{\pi}(r, t) \rangle = 0 + 0 + \frac{1}{4\mu_0} \left[\vec{E} \wedge \vec{B}^* + \vec{E}^* \wedge \vec{B} \right] = \frac{1}{2\mu_0} \left[\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right] \text{ car } \left(\vec{E}^* \wedge \vec{B} \right)^* = \left(\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) \text{ que l'on}$$

peut déduire de l'évidence sur X : $(Z_1 Z_2^*)^* = Z_1^* Z_2$.

$$6.a. \vec{B} = \frac{j}{\omega} \text{rot} \vec{E}, \text{ or : } \vec{E} = \begin{vmatrix} \psi e^{-jk n z} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \frac{j}{\omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} e^{-jk n z} - j k n \psi e^{-jk n z} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-jk n z} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B}^* = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{j}{\omega} \frac{\partial \psi^*}{\partial z} e^{+jk n z} + k n \psi^* e^{+jk n z} \\ +\frac{j}{\omega} \frac{\partial \psi^*}{\partial y} e^{+jk n z} \end{vmatrix}$$

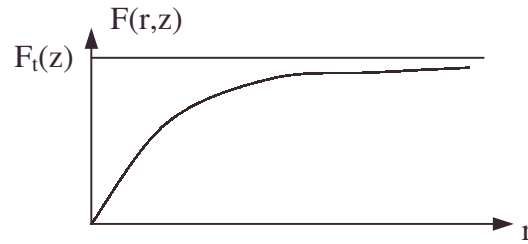
$$\vec{\Pi}(r) = \frac{1}{2\omega\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ \text{Re} \left(j\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) \\ \text{Re} \left(-j\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) + k n |\psi|^2 \end{vmatrix} \quad \# \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ k n |\psi|^2 \text{ vu} \end{vmatrix} \quad [10]$$

$$b. \text{ En moyenne temporelle, } d\phi = \vec{\pi} d\vec{S} = \frac{k n}{2\omega\mu_0} |\psi|^2 dS, \text{ soit } d\phi = \epsilon_0 \frac{c n}{2} |\psi|^2 dS .$$

$$7. F(r, z) = \int_D d\phi \text{ avec } dS = 2\pi \rho d\rho ; F = \frac{\epsilon_0 \epsilon n}{2} . 2\pi \int_0^r A^2(z) e^{-\frac{2\rho^2}{w(z)^2}} . \rho d\rho ;$$

$$F(r, z) = \frac{\pi \epsilon_0 c n}{4} w^2(z) A^2(z) \left[1 - \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \right].$$

8.a.

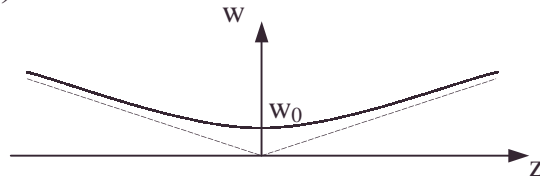


b. $F_t(z) = \frac{\pi \epsilon_0 c n}{4} w^2(z) A^2(z) = \frac{\pi \epsilon_0}{4} c n w_0^2 A_0^2.$

c. $1 - \frac{F\left(\frac{D}{2}, z\right)}{F_t(z)} = \frac{1}{e} = 1 - \left(1 - \exp\left(\frac{-D^2}{2w^2}\right)\right) \Rightarrow D(z) = \sqrt{2} w(z).$

9.a. $w(z) = \pm \frac{w_0}{q_0} \sqrt{z^2 + q_0^2};$

asymptotes : $w = \pm \frac{w_0}{q_0} z.$

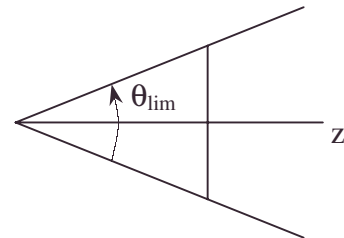


b. $z \rightarrow \infty \quad w_{\text{lim}}(z) = \pm \frac{w_0}{q_0} z.$

c. $D = \sqrt{2} w \Rightarrow D_{\text{lim}} = \sqrt{2} \frac{w_0}{q_0} z$ et $D_{\text{minimal}} = D(0) = w_0 \sqrt{2}.$

$\tan \theta_{\text{lim}} = \frac{D_{\text{lim}}}{z}$ et l'angle θ_{lim} étant petit

$$\theta_{\text{lim}} = \sqrt{2} \frac{w_0}{q_0} = \frac{\sqrt{2} w_0 \lambda}{w_0^2 \pi n} = \frac{2\lambda}{\pi D_0 n},$$



vu [14] et 9.c.

d. Rappelons que l'angle entre les 1^{er} minimums de la diffraction d'une fente fine de largeur a est : $\theta = \frac{2\lambda}{a}.$

On a une analogie à condition de prendre $a = \pi D_0 n$, soit a de l'ordre de D_0 . (cf. fonction de Bessel et tache d'Airy).

10. $F_t(z) = \frac{\pi \epsilon_0 c n}{4} w_0^2 A_0^2$; c'est une constante ; la puissance qui traverse chaque plan se conserve dès que z est grand.

B.1. $T_r = \frac{F\left(\frac{D}{2}, \frac{L}{2}\right)}{F_t\left(-\frac{L}{2}\right)} = 1 - \exp\left[-\frac{D^2}{2w^2\left(\frac{L}{2}\right)}\right] \Rightarrow R = \frac{D}{w\left(\frac{L}{2}\right)} = \sqrt{-2 \ln(1 - T_r)} ;$

AN : $R = 3,03.$

2.a. On rappelle que $w(z)$ est calculé pour $z = \frac{L}{2} ;$

$$\frac{D^2}{L} = \frac{R^2 w^2}{L} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{R^2}{L} \left(w_0^2 + \frac{L^2 w_0^2}{4 q_0^2} \right) = \frac{R^2}{L} \left(w_0^2 + \frac{L^2 \lambda^2}{4 \pi^2 n^2 w_0^2} \right) \text{ vu III.A.3.4.}$$

La somme de deux termes de produit constant est minimale pour l'égalité des termes

d'où : $w_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{L \lambda}{2 \pi n}}$.

b. $\frac{D_{\text{opt}}^2}{L} = R^2 \frac{\lambda}{\pi n}$ par remplacement de w_{opt}^2 .

c. La diffraction intervient ; on ne peut diminuer D (donc w_0) indéfiniment car T_r diminue avec D comme en diffraction.

3.a. vu II.B.5. $P_{t_0} = \frac{R^2 \lambda^2 \epsilon_0 \epsilon_r}{2 \pi^3 n^7 p^2} \varphi^2 \Delta \Omega$ par remplacement de $\frac{D^2}{L}$ pour $w_0 = w_{\text{opt}}$.

b. $Q_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r R^2 \varphi^2 c \lambda^2}{\pi^2 n^7 p^2 P_{t_0}}$.

c. $D = R \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi n}}$.

d. $V_\pi = \frac{\lambda}{n^3 p} \frac{D}{L} = R \sqrt{\frac{\lambda^3}{n^7 p^2 \pi L}}$.

e. $\Delta \Omega = \frac{P_{t_0} L}{C_p D^2 \varphi^2}$ vu [8].

4. A.N. : $D = 214 \mu\text{m}$; $V_\pi = 20,88 \text{ V}$; $\Delta \Omega = 923.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$.

$\Delta \Omega$ a augmenté d'un facteur 90 (optimisation sur D).

5. L intervient dans R, φ , $\Delta \Omega$, D, V_π .

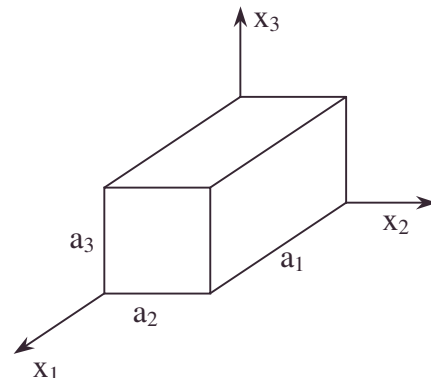
La diffraction impose une valeur minimale à $\frac{D^2}{L}$ donc aux performances de ce modulateur de lumière. On préférera l'utilisation d'ondes guidées optiques où la réflexion est le moyen d'endiguer la divergence due à la diffraction.

7.1.7. Cavity résonnante parallélépipédique

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un repère \mathcal{R} muni d'une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Un champ électromagnétique, monochromatique de pulsation ω , sera représenté par l'ensemble des vecteurs \vec{E} et \vec{B} , de composantes respectives \vec{E}_i et \vec{B}_i ($i = 1, 2$ ou 3) avec, par exemple, $E_i(M, t) = \text{Re}[E_i(M, t)]$. Les cavités sont supposées être vides de charge.

On considère une cavité parallélépipédique limitée par des plans infiniment conducteurs ; les longueurs des arêtes sont a_1 , a_2 et a_3 dans les directions orthogonales respectives Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 .

1. Donner l'équation de propagation du champ électromagnétique monochromatique



• cavité résonnante

de pulsation ω et préciser les conditions aux limites relatives aux champs \vec{E} et \vec{B} .

2. La résolution de l'équation de propagation, compte tenu des conditions aux limites, conduit à considérer trois – et trois seulement – familles de solutions, dépendant de trois nombres entiers naturels m_1 , m_2 et m_3 . On pose $j^2 = -1$. Vérifier que le champ représenté par les trois relations ci-après constitue une solution du problème de propagation.

$$\underline{E}_1(x_1, x_2, x_3; t) = \underline{E}_1^0 \cos\left(m_1 \pi \frac{x_1}{a_1}\right) \sin\left(m_2 \pi \frac{x_2}{a_2}\right) \sin\left(m_3 \pi \frac{x_3}{a_3}\right) \exp(j\omega t).$$

$$\underline{E}_2(x_1, x_2, x_3; t) = \underline{E}_2^0 \sin\left(m_1 \pi \frac{x_1}{a_1}\right) \cos\left(m_2 \pi \frac{x_2}{a_2}\right) \sin\left(m_3 \pi \frac{x_3}{a_3}\right) \exp(j\omega t).$$

$$\underline{E}_3(x_1, x_2, x_3; t) = \underline{E}_3^0 \sin\left(m_1 \pi \frac{x_1}{a_1}\right) \sin\left(m_2 \pi \frac{x_2}{a_2}\right) \cos\left(m_3 \pi \frac{x_3}{a_3}\right) \exp(j\omega t).$$

Etablir aussi la relation : $\omega(m_1, m_2, m_3) = c \sqrt{\left(\frac{m_1 \pi}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{m_3 \pi}{a_3}\right)^2}$, où c est la célérité de la lumière.

3. Exprimer la relation qui, en l'absence de charge dans la cavité, lie $\underline{E}_1^0, \underline{E}_2^0, \underline{E}_3^0$, m_1 , m_2 et m_3 et l'interpréter géométriquement, en faisant intervenir au besoin le vecteur \vec{K} dont les composantes dans \mathcal{R} sont $\frac{m_1}{a_1}, \frac{m_2}{a_2}$ et $\frac{m_3}{a_3}$. Déduire de l'étude qui précède que

la solution la plus générale du problème de propagation correspondant à une pulsation ω donnée peut être considérée comme la combinaison linéaire de deux solutions indépendantes, appelées modes, l'une d'entre elles correspondant par exemple à $\underline{E}_3^0 = 0$.

4. On considère, dans cette question seulement, une cavité constituée par deux miroirs plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan (\vec{e}_2, \vec{e}_3) et situés respectivement en $x_1 = 0$ et $x_1 = a_1$.

Décrire les modes dans cette cavité (polarisations, pulsations possibles). Indiquer une analogie mécanique simple de cette configuration.

5. La relation $U_\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W_\omega(t') dt'$, où $W_\omega(t)$ est l'énergie électromagnétique instantanée au temps t dans la cavité parallélépipédique fermée, définit l'énergie électromagnétique moyenne, U_ω , dans cette cavité. Exprimer U_ω sous la forme d'une intégrale sur le volume V de la cavité, faisant intervenir la représentation complexe du champ : $(\underline{E}_\omega, \underline{B}_\omega)$ et celle de son complexe conjugué $(\underline{E}_\omega^*, \underline{B}_\omega^*)$.

6. Montrer, à partir des équations de Maxwell, des conditions aux limites et de l'identité vectorielle $\text{div}(\vec{E} \wedge \text{rot} \vec{E}^*) = \text{rot} \vec{E}^* \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot}(\text{rot} \vec{E}^*)$, que :

$$\iiint_V \vec{E}_\omega \cdot \vec{E}_\omega^* d\tau = c^2 \iiint_V \vec{B}_\omega \cdot \vec{B}_\omega^* d\tau, \text{ où } d\tau = dx_1 dx_2 dx_3.$$

En déduire que la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique, $u_\omega = \frac{U_\omega}{V}$,

$$\text{s'écrit : } u_\omega = \frac{\epsilon_0}{16} \left(|\underline{E}_1^0|^2 + |\underline{E}_2^0|^2 + |\underline{E}_3^0|^2 \right).$$

7. Un calcul, non demandé ici, établit qu'une estimation du nombre M de modes dans le domaine de pulsations $[\omega, \omega + \Delta\omega]$ suffisamment étendu pour que M soit grand devant 1, est $M \approx \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \Delta\omega$. Montrer par un calcul d'ordre de grandeur qu'une cavité parallélépipédique fermée du type précédent n'est absolument pas appropriée pour sélectionner un petit nombre de modes (une centaine, par exemple) dans le domaine de pulsations limitant le rayonnement visible.

Mines ; Durée : 1h30

Corrigé

1.a. $\vec{\Delta E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ et $\vec{\Delta B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

si le champ est de pulsation ω ,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E} ; \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} .$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \vec{B} ; \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{B} .$$

d'où : $\vec{\Delta E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} = \vec{0} ; \vec{\Delta B} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B} = \vec{0} .$

b. Conditions limites :

α . $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ la continuité de $E_{\text{tangential}}$ or $\vec{E}_{\text{métal}} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{tangential, vide}} = \vec{0} .$

β . $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow$ continuité de $\vec{B}_{\text{normal}} ; \vec{B}_{\text{métal}} = \vec{0}$ de fait $\Rightarrow \vec{B}_{\text{normal, vide}} = \vec{0} .$

γ . Soit sur les 6 faces $x_1 = 0, x_1 = a_1 ; x_2 = 0, x_2 = a_2 ; x_3 = 0, x_3 = a_3 .$

2. On vérifie que $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$ satisfait à ces conditions en $E_{\text{tangential}}$ car $\sin m_i \pi = 0$.

• $\vec{B} = -\frac{\vec{\text{rot}} \vec{E}}{j\omega} .$

$$\bullet \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\omega} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \left(\begin{aligned} &E_3^0 \frac{m_2}{a_2} \sin m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} \cos m_2 \pi \frac{x_2}{a_2} \cos m_3 \pi \frac{x_3}{a_3} \dots \\ &\dots - E_2^0 \frac{m_3}{a_3} \sin m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} \cos m_2 \pi \frac{x_2}{a_2} \cos m_3 \pi \frac{x_3}{a_3} \end{aligned} \right) \\ \frac{\pi}{\omega} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \left(\begin{aligned} &E_1^0 \frac{m_3}{a_3} \cos m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} \sin m_2 \pi \frac{x_2}{a_2} \cos m_3 \pi \frac{x_3}{a_3} \dots \\ &\dots - E_3^0 \frac{m_1}{a_1} \cos m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} \sin m_2 \pi \frac{x_2}{a_2} \cos m_3 \pi \frac{x_3}{a_3} \end{aligned} \right) \\ \frac{\pi}{\omega} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \left(\begin{aligned} &E_2^0 \frac{m_1}{a_1} \cos m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} \cos m_2 \pi \frac{x_2}{a_2} \sin m_3 \pi \frac{x_3}{a_3} \dots \\ &\dots - E_1^0 \frac{m_2}{a_2} \cos m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} \cos m_2 \pi \frac{x_2}{a_2} \sin m_3 \pi \frac{x_3}{a_3} \end{aligned} \right) \end{pmatrix}$$

• nombre de modes, relations de continuité des champs

satisfait aux conditions sur \vec{B} normal car $\sin m_1 \pi = 0$.

Le champ proposé constitue une solution du problème de propagation.

- En reportant \vec{E} (ou \vec{B}) dans l'équation de propagation on trouve :

$$\omega^2 - c^2 \left[\left(\frac{m_1 \pi}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{m_2 \pi}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{m_3 \pi}{a_3} \right)^2 \right] = 0.$$

3.a. Reportons \vec{E} dans $\text{div } \vec{E} = 0$; on trouve $\frac{m_1}{a_1} \underline{E}_1^0 + \frac{m_2}{a_2} \underline{E}_2^0 + \frac{m_3}{a_3} \underline{E}_3^0 = 0$.

Si on introduit $\vec{E}^0 = \begin{pmatrix} \underline{E}_1^0 \\ \underline{E}_2^0 \\ \underline{E}_3^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{K} \cdot \vec{E}^0 = 0$: orthogonalité de \vec{K} et \vec{E}^0 .

• Les 3 composantes de \vec{E}^0 sont reliées par une relation. On a 2 amplitudes de fonctions indépendantes (orthogonales) arbitraires. On peut en prendre une nulle.

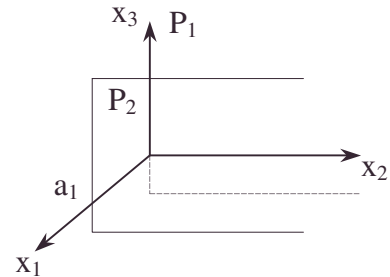
4. Les variables x_2, x_3 n'interviendront pas (cf. invariance du système dans toute translation orthogonale à \vec{Ox}_1).

Il n'interviendra pas $\frac{m_2}{a_2}$ et $\frac{m_3}{a_3}$. On a seulement

le mode m_1 soit $\omega = \frac{c\pi m_1}{a}$

$$\vec{E}^0 \cdot \vec{K} = \frac{m_1}{a_1} \underline{E}_1^0 = 0 \Rightarrow \underline{E}_1^0 = 0.$$

$$\text{Il reste : } \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_2^0 \sin m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} e^{j\omega t} \\ \underline{E}_3^0 \sin m_1 \pi \frac{x_1}{a_1} e^{j\omega t} \end{pmatrix} ;$$



La polarisation est elliptique car \underline{E}_2^0 et \underline{E}_3^0 n'ont pas le même argument.

Analogie mécanique : mode d'une corde vibrante fixée à ses 2 extrémités.

(m_1 peut prendre plusieurs valeurs).

$$\mathbf{5.} \quad W_\omega = \iiint \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) d\tau.$$

$$\text{or } U_\omega = \langle W_\omega \rangle = \iiint \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{\langle B^2 \rangle}{\mu_0} \right) d\tau.$$

or $\langle E^2 \rangle = \langle \text{Re}(E_1)^2 \rangle + \langle \text{Re}(E_2)^2 \rangle + \langle \text{Re}(E_3)^2 \rangle$ et vu $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$,

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_\omega \vec{E}_\omega^* ; \text{ de même } \langle B^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{B}_\omega \vec{B}_\omega^*. \quad U_\omega = \frac{1}{4} \iiint_{\text{cavité}} \left(\epsilon_0 \vec{E}_\omega \vec{E}_\omega^* + \frac{\vec{B}_\omega \vec{B}_\omega^*}{\mu_0} \right) d\tau.$$

- relation de dispersion

6. • Recherchons la possibilité de mettre en œuvre la formule donnée :

$$\bullet \quad \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_\omega = -j\omega \vec{B}_\omega \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_\omega^* = j\omega \vec{B}_\omega^* \quad (\text{cf. } (e^{j\omega t})^* = e^{-j\omega t}).$$

$$\vec{B}_\omega \vec{B}_\omega^* = \frac{1}{\omega^2} \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^*.$$

$$\omega^2 \iiint_{\text{cavité}} \vec{B}_\omega \vec{B}_\omega^* d\tau = \iiint_{\text{cavité}} \left[\text{div} \left(\vec{E}_\omega \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^* \right) + \vec{E}_\omega \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^* \right) \right] d\tau.$$

Remarquons :

$$\vec{\text{rot}} \left[\vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^* \right] = j\omega \vec{\text{rot}} \vec{B}_\omega^* = +\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega^* ; \quad \vec{E}_\omega \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^* \right) = +\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega \vec{E}_\omega^*.$$

Remarquons ensuite grâce au théorème d'Ostrogradsky :

$$\iiint_{\text{cavité}} \text{div} \left(\vec{E}_\omega \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^* \right) d\tau = \oiint_{\Sigma_{\text{cavité}}} \left(\vec{E}_\omega \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^* \right) d\vec{S} = \oiint_{\Sigma_{\text{cavité}}} \left(\vec{E}_{n\omega} \wedge j\omega \vec{B}_{\omega \tan}^* \right) d\vec{S},$$

car $\vec{E}_{\tan} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{\text{normal}} = \vec{0}$.

$$\text{mais } \vec{E}_{n\omega} \wedge \vec{B}_{\tan\omega} \perp d\vec{S} \Rightarrow \iiint_{\text{cavité}} \text{div} \left(\vec{E}_\omega \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E}_\omega^* \right) d\tau = 0.$$

$$\text{On obtient : } \iiint_{\text{cavité}} \vec{B}_\omega \vec{B}_\omega^* d\tau = \iiint_{\text{cavité}} \frac{\vec{E}_\omega \vec{E}_\omega^*}{c^2} d\tau.$$

$$\bullet \quad U_\omega = \frac{1}{4} \iiint_{\text{cavité}} \vec{E}_\omega \vec{E}_\omega^* \left(\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{cavité}} \vec{E}_\omega \vec{E}_\omega^* d\tau$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \left[\underline{E}_{1\omega} \underline{E}_{1\omega}^* + \underline{E}_{2\omega} \underline{E}_{2\omega}^* + \underline{E}_{3\omega} \underline{E}_{3\omega}^* \right] dx_1 dx_2 dx_3.$$

$$\iiint \underline{E}_{1\omega} \underline{E}_{1\omega}^* dx_1 dx_2 dx_3 = \underline{E}_1^0 \underline{E}_1^{0*} \int_0^{a_1} \cos^2 m_1 \pi \frac{a_1}{a_1} dx_1 \int_0^{a_2} \sin^2 m_2 \pi \frac{x_2}{a_2} dx_2 \int_0^{a_3} \sin^2 m_3 \pi \frac{x_3}{a_3} dx_3$$

$$= \iiint \underline{E}_{1\omega} \underline{E}_{1\omega}^* dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{8} |E_1^0|^2, \text{ de même pour les composantes en 2 et 3.}$$

$$\text{et } u_\omega = \frac{U_\omega}{V} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\left(\frac{1}{8} V \left(|E_1^0|^2 + |E_2^0|^2 + |E_3^0|^2 \right) \right)}{V} = \frac{\epsilon_0}{16} \left(|E_1^0|^2 + |E_2^0|^2 + |E_3^0|^2 \right).$$

$$7. \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

On sait que le rayonnement visible est tel que $0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8\mu\text{m}$,

soit $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ avec $\omega_1 = 2,4 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega_2 = 4,7 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$.

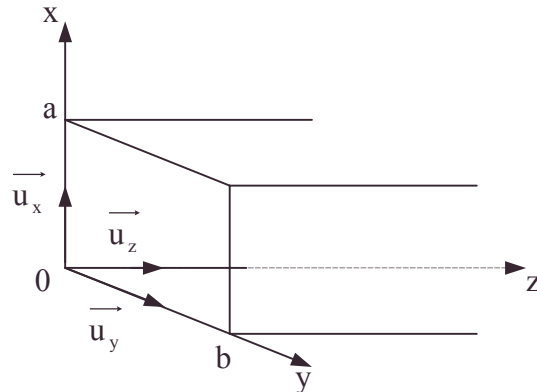
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2,3 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1} ; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 3,5 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\bar{V} = \frac{\pi^2 c^3 M}{\omega \Delta\omega} = 9,2 \cdot 10^{-19} \text{ m}^3 \text{ pour } M = 10^2, \text{ soit } \bar{a} = 10^{-6} \text{ m de l'ordre de la longueur}$$

d'onde moyenne ; la cavité est impossible à réaliser avec la précision optique ; si \bar{V} est plus grand par exemple $9,2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3$, M est proportionnel à \bar{V} et M devient énorme : $M = 10^8$. Cette cavité résonnante (oscillateur) n'est pas adaptée aux radiations visibles alors qu'elle l'est pour les micro-ondes.

7.1.8. Guide d'onde rectangulaire

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs (sur la figure ci-contre $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$) délimitent un "guide d'ondes" de longueur infinie suivant Oz, de section droite rectangulaire et dans lequel règne le vide (permittivité ϵ_0 , perméabilité μ_0). On se propose d'étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = F(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$.



Dans cette expression, $F(y)$ désigne une fonction réelle de la variable y ; k_g est une constante positive. $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ désignent les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz.

On posera $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ (λ_g est "la longueur d'onde guidée") et on notera $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$.

1. Structure de l'onde

1. Déterminer l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $F(y)$.
2. En utilisant les conditions que doit vérifier le champ \vec{E} sur les plans conducteurs limitant le guide d'ondes, expliciter la fonction $F(y)$. Montrer qu'intervient un nombre entier n non nul. (On pourra supposer n positif). A chaque valeur de n correspond un "mode" de propagation.
- 3.a. Ecrire les composantes du champ magnétique \vec{B} .
- b. \vec{E} et \vec{B} sont-ils en phase ?
- c. Vérifier que \vec{B} satisfait également aux conditions aux limites sur les parois métalliques du guide d'onde.
4. Exprimer k_g en fonction de ω , c , n , b . En déduire λ_g en fonction de λ_0 , b et n .
5. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus de propagation.

AN : sachant que la fréquence de coupure est $f_c = 2,5$ GHz, calculer b .

6. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ de l'onde en fonction de c , n , et du rapport $\frac{f}{f_c}$ (f étant la fréquence de l'onde).

AN : calculer v_ϕ pour $f = 2 f_c$, $n = 1$.

2. Transmission de l'énergie

1. Donner l'expression du vecteur de Poynting \vec{R} .
Quelle est la valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$ dans le temps de ce vecteur ?
En déduire la puissance moyenne transmise par une section droite du guide d'onde.
2. Calculer la valeur moyenne, dans le temps, de la densité volumique de l'énergie électromagnétique $\langle u \rangle$.
3. A l'aide des résultats précédents, déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie.
Quelle relation simple peut-on constater entre v_e et v_ϕ ?

• densité volumique de l'énergie électromagnétique, fréquence de coupure, guide d'onde, longueur d'onde guidée, vecteur de Poynting, vitesse de phase

4. Si les parois du guide ont une conductivité finie, quelle en est la conséquence la plus importante ?

3. Réflexions internes

On se propose de retrouver certains résultats démontrés ci-dessus en considérant que, dans le guide d'onde, une onde électromagnétique, monochromatique, plane, à polarisation rectiligne (\vec{E} parallèle à Ox) se réfléchit tour à tour sur les parois métalliques parallèles au plan (Oxz).

Dans ces conditions, l'onde définie dans la question 1. résulte de la superposition d'une onde incidente dont le champ électrique s'écrit $\vec{E}_i = E_{0i} \sin(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \vec{u}_x$, et d'une onde réfléchi dont le champ électrique s'écrit $\vec{E}_r = E_{0r} \sin(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{u}_x$.

On appelle α l'angle d'incidence (cf. Figure 2).

1.a. Ecrire les composantes des vecteurs d'onde incident \vec{k}_i et réfléchi \vec{k}_r en fonction de k_0 et α .

b. Déterminer l'amplitude E_{0r} en fonction de E_{0i} .

c. Ecrire le champ électrique \vec{E} de l'onde résultant de la superposition des ondes incidente et réfléchi. En identifiant l'expression obtenue et celle donnée en début d'énoncé, exprimer k_g en fonction de k_0 et α , puis λ_g en fonction de λ_0 et α .

Sur la figure 2, MIC représente un rayon incident, CJN un rayon réfléchi. AIB et CD sont les intersections de deux plans d'onde de l'onde incidente et du plan (yOz). De même, BC et DJE sont les intersections de deux plans d'onde de l'onde réfléchi et du plan (yOz).

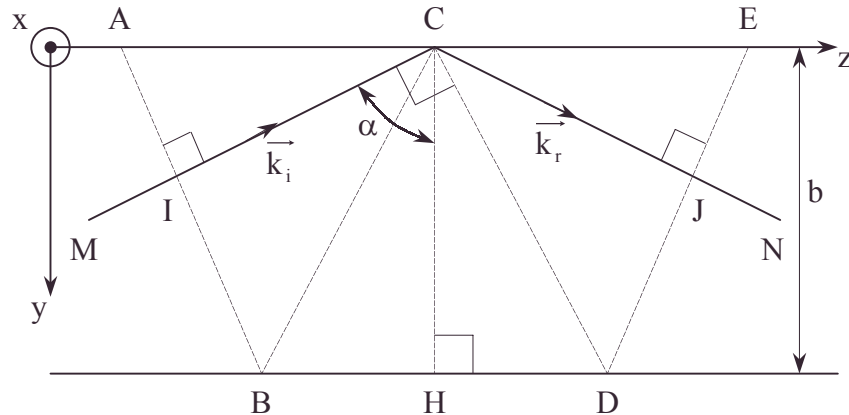


Figure 2

2.a. Déterminer (simplement) les distance CI et CJ en fonction de λ_0 .

b. En déduire géométriquement $\cos \alpha$ en fonction de λ_0 et b . Retrouver alors la relation liant les paramètres λ_g, λ_0, b et n . Que représente la distance AC ?

c. Exprimer en fonction de $\sin \alpha$ les vitesses v_ϕ et v_e .
Retrouver la relation entre v_ϕ et v_e .

Centrale ; Durée : 1h

Corrigé

1.1. $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; en éliminant \vec{B} : $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

or, $\vec{E} = F(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x \Rightarrow \vec{u}_x \left[F''(y) - k_g^2 F(y) + \frac{\omega^2}{c^2} F(y) \right] \cos(\omega t - k_g z) = 0$

$F''(y) + (k_0^2 - k_g^2) F(y) = 0$.

2. Ecrivons la continuité de \vec{E}_{tan} en $y = 0$ et $y = b$.

Dans le métal, $\vec{E} = \vec{0}$; \vec{u}_x est tangent aux plans ; d'où : $F(0) = 0$; $F(b) = 0$.

a. $k_0^2 < k_g^2$; posons $\alpha^2 = k_g^2 - k_0^2$; $0 = F''(y) - \alpha^2 F(y)$.

$F(y) = A_1 e^{-\alpha y} + A_2 e^{\alpha y}$.

$F(0) = 0 = A_1 + A_2$; $F(b) = 0 = A_1 e^{-\alpha b} + A_2 e^{+\alpha b}$.

Système de Cramer en A_1, A_2 de déterminant $e^{\alpha b} - e^{-\alpha b} \neq 0$ (sauf si $\alpha = 0$ ou $b = 0$).

$A_1 = A_2 = 0$; aucune solution ne convient autre que $F(y) = 0$.

b. $k_0^2 = k_g^2$; $F''(y) = 0 \Rightarrow F(y) = c_1 y + c_2$.

$F(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$; $F(b) = 0 \Rightarrow c_1 b = 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

Aucune solution autre que $F(y) = 0$ ne convient.

c. $k_0^2 > k_g^2$; $F''(y) + \left(\sqrt{k_0^2 - k_g^2} \right)^2 F(y) = 0$

$\Rightarrow F(y) = B_1 \cos \sqrt{k_0^2 - k_g^2} y + B_2 \sin \sqrt{k_0^2 - k_g^2} y$.

$F(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$; $F(y) = B_2 \sin \sqrt{k_0^2 - k_g^2} y$; $F(b) = 0 \Rightarrow B_2 \sin \left(\sqrt{k_0^2 - k_g^2} b \right) = 0$.

$B_2 = 0$ est solution (physiquement sans intérêt). L'ultime solution est donc :

$\sqrt{k_0^2 - k_g^2} b = n \pi \quad n \in \mathbb{Z}^+$.

On obtient la relation de dispersion : $k_0^2 = k_g^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$.

$F(y) = E_0 \sin \left(n \pi \frac{y}{b} \right) \quad n \in \mathbb{Z}^+$.

3.a. Intégrons $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E}$;

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} -E_0 k_g \sin n \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - k_g z) \\ E_0 n \frac{\pi}{b} \cos n \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \end{array} \Rightarrow$$

$\vec{B} \left| \begin{array}{l} 0 \text{ (au point de vue onde signal)} \\ \frac{k_g}{\omega} E_0 \sin n \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \\ \frac{E_0 n \pi}{\omega b} \cos n \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \end{array} \right.$

b. B_y est en phase avec E_x , mais B_z est en quadrature avec E_x .

\vec{B} n'est pas en phase avec \vec{E} .

c. \vec{B} normal est continu.

On vérifie : en $y = 0$; $B_n = B_y = 0$; $B_n = B_y = 0$ en $y = b$.
 en $x = 0$; $B_n = B_x = 0$; $B_n = B_x = 0$ en $x = a$.

\vec{B}_n (normal) est bien continu , vu $\vec{B} = 0$ dans le métal en absence de champ constant imposé.

4. La relation de dispersion obtenue, donne pour une propagation dans le sens des z croissants :

$$k_g = \sqrt{k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \text{ or, } k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} ; k_g = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \text{ or, } k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \text{ et } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} ;$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\sqrt{k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2 n^2}{4b^2}}} .$$

5.a. Pour qu'il existe k_g , il faut qu'il existe n tel que : $k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} > 0$.

Les plus petites valeurs de k_0^2 sont donc telles que $k_0^2 > \frac{\pi^2}{b^2}$ (pour $n = 1$), soit $\omega > \frac{c\pi}{b}$

ou $f > \frac{c}{2b}$; on posera $f_c = \frac{c}{2b}$, c célérité de la lumière dans le vide. $f > f_c$.

b. $b = \frac{c}{2f_c}$; AN : $b = 6.10^{-2} \text{ m}$;

c'est l'ordre de grandeur des dimensions des guides d'onde.

6. $v_\phi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{b^2 \omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2 \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$; AN : $v_\phi = 1,155 c = 3,46.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

2.1.a. $\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$.

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E_0^2 n \pi}{\mu_0 b \omega} \sin n \frac{\pi y}{b} \cos n \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \cos(\omega t - k_g z) \\ \frac{E_0^2 k_g}{\mu_0 \omega} \sin^2 n \frac{\pi y}{b} \cos^2(\omega t - k_g z) \end{pmatrix}$$

b.

$$\langle \vec{R} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \frac{E_0^2 k_g}{\mu_0 \omega} \sin^2 n \frac{\pi y}{b} \end{pmatrix}$$

c. $\langle \mathcal{P} \rangle = \iint \langle \vec{R} \rangle d\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 k_g}{\mu_0 \omega} \int_0^b \sin^2 n \frac{\pi y}{b} dy . a = \frac{1}{4} \frac{E_0^2 k_g}{\mu_0 \omega} ab$.

$$2. u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}.$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \left(n \pi \frac{y}{b} \right) \cos^2 (\omega t - k_g z) + \frac{1}{2 \mu_0} E_0^2 \frac{k_g^2}{\omega^2} \sin^2 n \pi \frac{y}{b} \cos^2 (\omega t - k_g z) \\ + \frac{1}{2 \mu_0} E_0^2 \frac{n^2 \pi^2}{\omega^2 b^2} \cos^2 \frac{n \pi y}{b} \sin^2 (\omega t - k_g z) \\ \langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E^2}{4} \left[\left(2 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{b^2 \omega^2} \right) \sin^2 \frac{n \pi y}{b} + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{b^2 \omega^2} \cos^2 n \pi \frac{y}{b} \right] \text{ car } k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}.$$

3.a. Par analogie avec $\vec{j} = \rho \vec{v}$ et $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$, $\langle \langle \vec{R} \rangle \rangle = \langle \langle \vec{u} \rangle \rangle \vec{v}_e$; $\langle \langle \mathcal{P} \rangle \rangle = \int \langle \langle \vec{R} \rangle \rangle d\vec{s}$, car pour obtenir \vec{v}_e indépendant de t et de M , il faut opérer une moyenne temporelle et spatiale symbolisée par $\langle \langle \rangle \rangle$. Remarquons ici $\langle \langle \mathcal{P} \rangle \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle$.

$$\langle \langle u \rangle \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b \langle u \rangle dy = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}. \\ \vec{v}_e = \frac{\langle \langle \vec{R} \rangle \rangle}{\langle \langle u \rangle \rangle} = \frac{\langle \langle \mathcal{P} \rangle \rangle}{ab} \cdot \frac{\vec{u}_z}{\langle \langle u \rangle \rangle} = \frac{1}{4} \frac{E_0^2 k_g}{\mu_0 \omega} \frac{\vec{u}_z}{\epsilon_0 \frac{E_0^2}{4}} = c^2 \frac{\vec{k}_g}{\omega}.$$

$$b. v_e v_\phi = c^2.$$

$$4. \text{ Si } \gamma \neq \infty, \vec{E} \neq \vec{0} \text{ il y a une consommation d'énergie dans les parois : } \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

dans la zone où le champ pénètre le métal (Effet de peau).

3.1.a.

$$\vec{k}_i \begin{vmatrix} 0 \\ -k_0 \cos \alpha \\ k_0 \sin \alpha \end{vmatrix} \quad \vec{k}_r \begin{vmatrix} 0 \\ k_0 \cos \alpha \\ k_0 \sin \alpha \end{vmatrix}$$

b. Ecrivons la continuité de \vec{E}_{tang} sachant $\vec{E}_{\text{métal}} = \vec{0}$.

$$(E_{0_i} (\sin \omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) + E_{0_r} (\sin \omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})) \vec{u}_x = \vec{0}; \text{ or, } \vec{k}_i \cdot \vec{r} = z k_0 \sin \alpha = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \text{ pour les points de } y = 0 \text{ et } \sin(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) = \sin(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \Rightarrow E_{0_r} = -E_{0_i}.$$

$$c.a. \vec{E} = E_{0_i} (\sin(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) - \sin(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})) \vec{u}_x;$$

$$\text{or, } \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2};$$

$$\vec{E} = 2 E_{0_i} \left(\cos \left(\omega t - \frac{\vec{k}_i + \vec{k}_r}{2} \cdot \vec{r} \right) \sin \frac{\vec{k}_r - \vec{k}_i}{2} \cdot \vec{r} \right) \vec{u}_x;$$

$$\vec{E} = 2 E_{0_i} \cos(\omega t - k_0 z \sin \alpha) \sin(y k_0 \cos \alpha) \vec{u}_x.$$

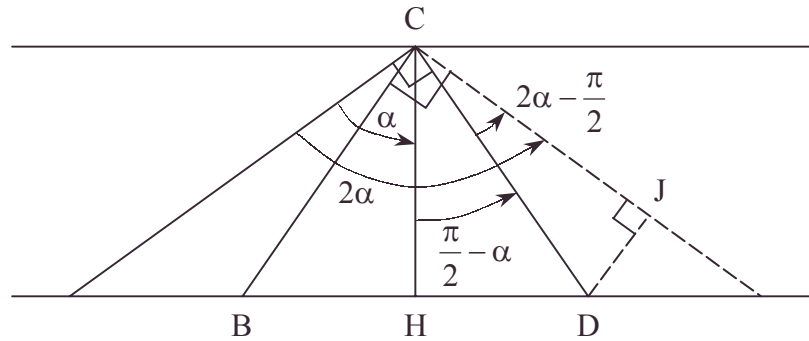
$$b. \text{ Identifions avec 1. : } E_0 = 2 E_{0_i}; k_g = k_0 \sin \alpha \text{ soit } \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}.$$

$$2.a. \varphi_{iB} = \varphi_{iL}; \varphi_{rC} = \varphi_{rB}; |\varphi_{iB} - \varphi_{iC}| = k_0 CI; \text{ or } \varphi_{rC} = \varphi_{iC} \text{ cf. 3.1.b.}$$

De même, $\varphi_{iB} = \varphi_{rB} \pmod{2\pi}$ sur l'autre face. D'où par soustraction :

$$k_0 CI = 2\pi n \Rightarrow CI = n\lambda_0 \quad n \in \mathbb{Z}^+ ; \text{ par symétrie } CJ = CI = n\lambda_0 .$$

b.α.



$$\left. \begin{aligned} CD &= \frac{CJ}{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{CJ}{\sin 2\alpha} \\ CD &= \frac{CH}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{b}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad CJ = b \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2b \cos \alpha$$

$$CJ = n\lambda_0 = 2b \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{n\lambda_0}{2b} .$$

$$\beta. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ s'écrit } \frac{\lambda_0^2}{\lambda_g^2} + \frac{n^2 \lambda_0^2}{4b^2} = 1 \Rightarrow \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda_0^2}{4b^2}}} \text{ cf. 1.4.}$$

γ. $AC = \frac{CI}{\sin \alpha} = \frac{n\lambda_0}{\sin \alpha} = n\lambda_g$; AC représente un multiple de λ_g , longueur d'onde guidée.

$$\mathbf{c.}\alpha. \quad v_\phi = \frac{\omega}{k_g} = c \frac{\lambda_g}{\lambda_0} = \frac{c}{\sin \alpha} .$$

$$\beta. \quad v_e = \frac{d\omega}{dk_g} = c \frac{d\lambda_g}{d\lambda_0} = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda_0^2}{4b^2}} = \varepsilon \frac{\lambda_0}{\lambda_g} = c \sin \alpha .$$

$$\gamma. \quad v_e \cdot v_p = c^2 .$$

7.1.9. Potentiels de Hertz Application au guide d'onde

Le but du problème est de mettre en évidence en électromagnétisme des milieux continus deux champs vectoriels appelés potentiels de Hertz.

On rappelle les équations de Maxwell :

$$(1) \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} ; (2) \operatorname{div} \vec{B} = 0 ; (3) \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} ; (4) \operatorname{div} \vec{D} = \rho ,$$

les vecteurs $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{j}$ et le scalaire ρ ayant les significations bien connues.

- longueur d'onde guidée, vitesse de phase, vitesse de propagation de l'énergie

On rappelle aussi les relations $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ et $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ que l'on considérera

comme des définitions de \vec{P} et de \vec{M} .

Si entre deux champs (vectoriels ou scalaires) X et Y on a la relation :

$\square Y \equiv \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \Delta Y = X$ (Δ = opérateur Laplacien), on convient de dire que X est la "source" de Y.

On rappelle enfin que pour tout champ vectoriel \vec{V} on a $\overrightarrow{\text{rot rot}} \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad div}} \vec{V} - \Delta \vec{V}$.

I. Potentiels de Lorenz \vec{A} et ϕ .

1. Montrer à partir des équations de Maxwell qu'il existe (au moins) un champ vectoriel \vec{A}_0 et un champ scalaire ϕ_0 tels que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_0$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi_0 - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t}$.

2. Vérifier que si \vec{A}_0 et ϕ_0 conviennent, il en est de même de $\vec{A} = \vec{A}_0 - \overrightarrow{\text{grad}} \psi$ et $\phi = \phi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

3. On suppose que l'on est dans le vide c'est-à-dire que les vecteurs \vec{P} et \vec{M} sont identiquement nuls. Ecrire les deux relations entre \vec{A} , ϕ , \vec{j} et ρ , conséquences des équations de Maxwell.

4. On admet que l'indétermination mise en évidence en I.2. permet d'imposer la relation : (5) $\text{div } \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (condition de Lorenz).

\vec{A}_0 et ϕ_0 étant donnés, à quelle équation différentielle doit satisfaire ψ ? On n'entreprendra pas de chercher si cette équation admet des solutions.

5. Que deviennent les deux relations trouvées en I.3. si la condition de Lorenz est vérifiée ? Conclusion.

II. Potentiel électrique de Hertz $\vec{\pi}$

1. On choisit $\vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t}$; $\phi = -\text{div } \vec{\pi}$ où $\vec{\pi}$ est un champ vectoriel.

Exprimer \vec{B} et \vec{E} en fonction de $\vec{\pi}$.

2. Reporter ces expressions dans les équations (1), (2) et (5).

3. En revenant au cas général (\vec{P} et \vec{M} quelconques), éliminer \vec{D} et \vec{H} dans les équations (3) et (4) puis y remplacer \vec{B} et \vec{E} par leurs expressions en $\vec{\pi}$.

4. Si \vec{j} , ρ et \vec{M} sont nuls, proposer une relation entre $\vec{\pi}$ et \vec{P} qui garantit que les relations de Maxwell sont satisfaites.

III. Potentiel magnétique de Hertz $\vec{\pi}^*$

1. Dans le cas où \vec{j} et ρ sont identiquement nuls, montrer qu'il existe un champ vectoriel \vec{A}^* et un champ scalaire ϕ^* tels que $\vec{D} = -\text{rot } \vec{A}^*$; $\vec{H} = -\frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}} \phi^*$.

2. On suppose \vec{P} nul et on pose : $\vec{A}^* = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\pi}^*}{\partial t}$; $\phi^* = -\text{div} \vec{\pi}^*$.

Porter dans (1) et (2) et proposer une relation entre $\vec{\pi}^*$ et \vec{M} pour satisfaire les équations de Maxwell.

IV. Application au guide d'onde rempli de diélectrique

Un guide d'onde est un volume de diélectrique (permittivité ϵ , perméabilité μ) limité latéralement par un milieu métallique. En vue de caractériser les types d'ondes se propageant dans les guides, nous choisirons un système de vecteurs unitaires $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, et nous admettrons que la propagation s'effectue suivant l'axe z/z du cylindre.

Il faut adopter $\vec{\pi}(M, t) = \vec{z} \phi(x, y) \exp j(\omega t - hz)$ avec $h = \pm \frac{2\pi}{\lambda}$.

A.1. Quelle équation vérifie ϕ ?

2. En considérant momentanément $\vec{\pi}^* = \vec{0}$, trouver \vec{E} et \vec{B} . On montrera que \vec{B} est transversal à la direction de propagation.

Qu'imposent les conditions limites sur le métal parfaitement conducteur ?

Considérons maintenant un guide d'onde de section rectangulaire de largeur a selon l'axe des x , de hauteur b selon l'axe des y .

B.1. Utilisant la méthode de séparation des variables, on posera $\phi = X(x).Y(y)$ et $\phi_0 = \text{Sup} \phi$.

Trouver la forme de ϕ . On fera intervenir deux suites de nombres entiers, m, n .

2. En déduire \vec{E}, \vec{B} , le vecteur de Poynting. Peut-on attribuer une vitesse à l'énergie ?

3. Pour m, n donnés, interpréter physiquement la forme de \vec{E} et \vec{B} .

Comparer avec la propagation d'une onde dans un milieu infini.

4. Donner l'expression des courants surfaciques des parois métalliques.

5. Tracer l'allure des lignes de courant et des lignes de champ pour $m = 1, n = 1$.

6. Pour quelle longueur d'onde l'amplitude de l'onde commence-t-elle à décroître ? La plus forte correspond à quel couple (m, n) ? A.N. : $a = 0,568 \text{ cm}$; $b = 0,284 \text{ cm}$.

7. Exprimer le nombre d'onde h sous forme complexe en tenant compte de la conductivité σ_ϵ du diélectrique, avec $\frac{\sigma_\epsilon}{\omega} \ll \epsilon$.

On n'omettra pas le courant de déplacement.

C. En considérant momentanément $\vec{\pi} = \vec{0}$, $\vec{\pi}^* = \vec{z} \chi(x, y) \exp j(\omega t - h'z)$, reprendre les questions précédemment résolues jusqu'aux calculs de \vec{E} et \vec{B} ; on posera $\chi_0 = \text{Sup} \chi$.

Que conclure sur la coexistence des différents types d'onde et sur la possibilité de n'avoir qu'un type d'onde ?

Centrale ; Durée : 2h30

Corrigé

I.1.a. $\text{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A}_0$ tel que $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}_0$.

$$\beta. 0 = \text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Leftrightarrow \exists \phi_0 \text{ tel que } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \phi_0.$$

• coexistence des différents types d'onde, conditions limites sur le métal parfaitement conducteur, courant de déplacement, courants surfaciques, guide d'onde [possibilité de n'avoir qu'un seul type d'onde] méthode de séparation des variables

2. Vérifions que nous avons des identités :

α. $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{rot}} (\vec{A}_0 - \vec{\text{grad}} \psi) = \vec{\text{rot}} \vec{A}_0 = \vec{B}$.

β. $-\vec{\text{grad}} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} \phi_0 - \vec{\text{grad}} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} \psi = \vec{E}$.

3.α. $\vec{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$ s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} \phi = \mu_0 \vec{j}$.

Soit $\vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\text{grad}} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}$.

$\vec{\square} \vec{A} + \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}$.

β. $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ s'écrit $-\text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{div} \vec{\text{grad}} \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;

$-\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} - \Delta \phi + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ d'où $\vec{\square} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

4. Remplaçons \vec{A} et ϕ dans (5) : $\text{div} \vec{A}_0 - \Delta \psi + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$;

$\vec{\square} \psi + \text{div} \vec{A}_0 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = 0$.

5. On obtient : $\vec{\square} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$; $\vec{\square} \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$: $\mu_0 \vec{j}$ est la source de A ; $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ est la source de ϕ .

II.1.a. $\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \pi)$.

b. $\vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{\pi} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}$.

2.a. (1) $\Rightarrow \underbrace{\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{\pi}}_0 - \underbrace{\epsilon_0 \mu_0 \vec{\text{rot}} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \frac{\partial \pi}{\partial t}}_0 = \vec{0}$.

b. (2) $\Rightarrow \epsilon_0 \mu_0 \underbrace{\text{div} \vec{\text{rot}} \frac{\partial \pi}{\partial t}}_0 = 0$

c. (5) $\Rightarrow \underbrace{\epsilon_0 \mu_0 \text{div} \frac{\partial \pi}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{\pi}}_0 = 0$.

Les trois relations constituent des identités à 0.

3.a. (3) $\Rightarrow \vec{\text{rot}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{\text{rot}} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$; en remplaçant en $\vec{\pi}$:

$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\pi}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{\pi} + \epsilon_0^2 \mu_0 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \vec{\pi} =$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{\pi} - \Delta \vec{\pi} \right] - \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{\pi} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\pi}}{\partial t^2} \Rightarrow \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\square} \vec{\pi} = \vec{j} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

(4) $\Rightarrow \text{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho - \text{div} \vec{P}$; en remplaçant en $\vec{\pi}$:

$$\varepsilon_0 \left(\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{\pi} - \varepsilon_0 \mu_0 \text{div} \frac{\partial^2 \vec{\pi}}{\partial t^2} \right) = \varepsilon_0 \text{div} \left(\Delta \vec{\pi} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\pi}}{\partial t^2} \right) ; \varepsilon_0 \text{div} \vec{\square} \vec{\pi} = \text{div} \vec{P} - \rho.$$

4. On a alors : $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\square} \vec{\pi} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ soit $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{\square} \vec{\pi} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right] = \vec{0}$, et $\varepsilon_0 \text{div} \left(\vec{\square} \vec{\pi} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = 0$.

On peut proposer d'adopter $\vec{\square} \vec{\pi} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{0}$ qui garantit que les relations de Maxwell sont satisfaites.

III.1.a. $\rho = 0 \Leftrightarrow \text{div} \vec{D} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A}^*$ tel que $\vec{D} = -\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}^*$.

b. $\vec{j} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$ s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{H} + \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} \right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \exists \phi^* \text{ tel que } \vec{H} + \frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi^* \text{ c.q.f.d.}$$

2.a. (1) $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$;

remplaçons en \vec{A}^* et ϕ^* : $-\frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}^* - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}^*}{\partial t^2} - \mu_0 \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$.

Remplaçons en $\vec{\pi}^*$:

$$-\mu_0 \left(\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \frac{\partial \vec{\pi}^*}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \vec{\pi}^*}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^3 \vec{\pi}^*}{\partial t^3} - \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \frac{\partial \vec{\pi}^*}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}, \text{ soit :}$$

$$-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\square} \vec{\pi}^* - \vec{M} \right) = \vec{0}.$$

b. (2) $\text{div} \vec{B} = 0$ s'écrit $\mu_0 \text{div} \vec{H} = -\mu_0 \text{div} \vec{M}$;

soit $-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A}^* - \mu_0 \Delta \phi^* = -\mu_0 \text{div} \vec{M}$;

$$-\mu_0 \left[\text{div} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\pi}^*}{\partial t^2} - \Delta \vec{\pi}^* \right) \right] = -\mu_0 \text{div} \vec{M} ; -\mu_0 \text{div} \left(\vec{\square} \vec{\pi}^* - \vec{M} \right) = 0.$$

On peut proposer d'adopter $\vec{\square} \vec{\pi}^* - \vec{M} = \vec{0}$ pour satisfaire les équations de Maxwell.

On relève l'analogie entre $(\vec{\pi} \text{ et } \vec{P})$ et $(\vec{\pi}^* \text{ et } \vec{M})$.

IV. Application au guide d'onde rempli de diélectrique

A.1. $\vec{j} = \vec{0}$, $\vec{\square} \vec{A} = \vec{0}$ s'intègre en $\vec{\square} \vec{\pi} = \vec{0}$; la constante vectorielle n'ayant pas de sens physique est choisie nulle pour simplifier.

Nous avons : $\Delta \vec{\pi} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\pi}}{\partial t^2} = \vec{0}$ d'où $\Delta \phi + (\omega^2 \epsilon \mu - h^2) \phi = 0$.

$$2. \text{ Posons : } \begin{cases} k^2 = \omega^2 \epsilon \mu, \\ \gamma^2 = k^2 - h^2, \\ Z = \frac{h}{\epsilon \omega}. \end{cases}$$

$$\text{vu } \vec{\pi}^* = \vec{0},$$

$$a. \vec{E} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\pi}}{\partial t^2} + \text{grad div } \vec{\pi};$$

$$\vec{E} = \epsilon \mu \omega^2 \vec{\pi} - j h \text{grad}(\phi e^{j(\omega t - h z)});$$

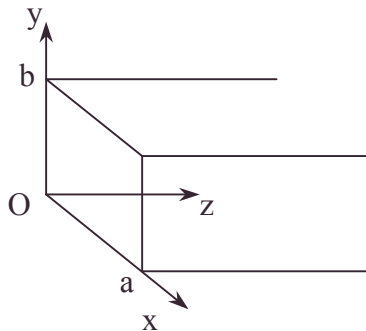
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -j h \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{j(\omega t - h z)} \\ -j h \frac{\partial \phi}{\partial y} e^{j(\omega t - h z)} \\ (\epsilon \mu \omega^2 - h^2) \phi e^{j(\omega t - h z)} \end{pmatrix}$$

$$b. \vec{B} = \epsilon \mu \text{rot} \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} = \epsilon \mu \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & j \omega \phi e^{j(\omega t - h z)} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} j \omega \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} e^{j(\omega t - h z)} \\ -j \omega \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{j(\omega t - h z)} \\ 0 \end{pmatrix};$$

c. \vec{B} est transversal à la direction de propagation Oz.

d. Condition limite : $\vec{n} \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \phi = 0$ sur les parois conductrices.

B.



$$1. \text{ A.1. donne : } Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \gamma^2 XY = 0 \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \gamma^2 = 0. \text{ La seule}$$

fonction de x égale $\forall x, y$, à une fonction de y est la fonction constante.

$$\text{Posons } \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\alpha^2; \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2; \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2.$$

$$X = A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x; Y = B_1 \cos \beta y + B_2 \sin \beta y.$$

La condition $\phi = 0$ pour : $x = 0, x = a, y = 0, y = b$.

$$\text{donne } A_1 = B_1 = 0; \alpha = \frac{m\pi}{a} \quad m \in \mathbb{N}; \beta = \frac{n\pi}{b} \quad n \in \mathbb{N};$$

• séparation des variables

On a $\gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$; $\phi = \phi_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$.

Si $-\alpha^2 > 0$ ou $-\beta^2 > 0$ la solution nulle sans intérêt s'impose pour satisfaire aux conditions limites.

2. On déduit vu **A.2.a.** :

$$\text{a. } E_x = -jh\phi_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp j(\omega t - hz).$$

$$E_y = -jh\phi_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp j(\omega t - hz).$$

$$E_z = \gamma^2 \phi_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp j(\omega t - hz).$$

$$\text{b. } B_x = -\frac{\mu}{Z} E_y ; B_y = \frac{\mu}{Z} E_x ; B_z = 0$$

c. On passe à la notation réelle :

$$\left| \begin{array}{l} E_x = -\phi_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin(\omega t - hz) \\ E_y = -\phi_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin(\omega t - hz) \\ E_z = \gamma^2 \phi_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \cos(\omega t - hz) \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} B_x = \frac{\mu}{Z} \phi_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \sin(\omega t - hz) \\ B_y = -\frac{\mu}{Z} \phi_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin(\omega t - hz) \\ B_z = 0 \end{array} \right|$$

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu}.$$

$$\vec{P} = \left| \begin{array}{l} \frac{\phi_0^2}{4Z} \gamma^2 \frac{m\pi}{a} \sin 2 \frac{m\pi}{a} x \sin 2 \frac{n\pi}{b} y \sin^2(\omega t - hz) \\ \frac{\phi_0^2}{2Z} \gamma^2 \frac{n\pi}{b} \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{2n\pi}{b} y \sin^2(\omega t - hz) \\ \frac{\phi_0^2}{Z} \left[\left(\cos^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{b} y \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\sin^2 \frac{m\pi}{a} x \cos^2 \frac{n\pi}{b} y \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \sin^2(\omega t - hz) \end{array} \right|$$

d. Comparons à la formule du cours de l'OPPH se propageant selon Oz :

$$P_z = \varepsilon(E_x^2 + E_y^2) v_g \text{ où } v_g \text{ est la vitesse de l'énergie.}$$

$$\text{Vu 2.c. On trouve : } v_g = \frac{1}{\varepsilon Z} = \frac{\omega}{h} \text{ si } h \text{ est réel.}$$

3. à z donné, on a une onde stationnaire et une onde progressive selon Oz à x et y donnés. Pour une onde sans paroi, il n'y a pas l'aspect onde stationnaire à z donné.

$$4. \quad \vec{j}_s = \frac{\vec{B} \wedge \vec{n}_s}{\mu} \quad \vec{j}_s = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{\phi_0}{Z} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t - hz) \end{cases}$$

5. Prenons une condition limite : en $x = 0$: $\vec{n}_s = \vec{x}$.

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = -\phi_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - hz) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \vec{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{\mu}{Z} \phi_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - hz) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Les lignes de champ de \vec{E} , \vec{B} , \vec{j}_s sont ici parallèles aux axes.

De même en $x = a$; $y = 0$; $y = b$.

Il y a les raccordements des lignes des champs sur les 4 faces, tout en se propageant selon Oz.

6.a. Pour qu'il 'y ait pas décroissance de ϕ (cf. équation sur ϕ), il faut satisfaire à :

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \epsilon\mu\omega^2 - h^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - h^2, \text{ sinon l'amplitude décroît.}$$

b. On recherchera la plus forte longueur d'onde par le minimum de $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$;

soit $h = 0$ et comme $a > b$, le seul choix est : $m = 1$, $n = 0 \Rightarrow \lambda_c = 2a$.

A.N. : $\lambda_c = 1,136 \text{ cm}$.

$$7. \quad \vec{j}_{\text{conduction}} = \vec{j}_c = \sigma_\epsilon \vec{E}; \quad \vec{j}_{\text{déplacement}} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -j\omega\epsilon \vec{E}.$$

La densité de courant totale : $\vec{j}_T = \vec{j}_c + \vec{j}_{\text{déplacement}} = -j\omega\bar{\epsilon} \vec{E}$ en introduisant la permittivité complexe $\bar{\epsilon} = \epsilon + \frac{j\sigma_\epsilon}{\omega}$.

On a toujours formellement $h^2 = \omega^2 \bar{\epsilon} \mu - \gamma^2$

avec $\gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, le rôle de $\bar{\epsilon}$ étant maintenant complexe.

$$\text{avec } h = \beta_\epsilon + j\alpha_\epsilon$$

$$\beta_\epsilon^2 + 2j\beta_\epsilon\alpha_\epsilon - \alpha_\epsilon^2 = k^2 - \gamma^2 + j\omega\mu\sigma_\epsilon. \text{ En identifiant, vu } \frac{\sigma_\epsilon}{\omega} \ll \epsilon, \text{ on a :}$$

$$\beta_\epsilon \# (k^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \alpha_\epsilon \# \frac{1}{2} \frac{\omega\mu\sigma_\epsilon}{(\beta_\epsilon^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}}. \text{ On aura absorption.}$$

C.1. Nous avons physiquement : $\Delta \pi^* - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial t^2} = 0$, d'où $\Delta \chi + (\omega^2 \epsilon \mu - h'^2) \chi = 0$

$$2. \text{ Posons } k^2 = \omega^2 \epsilon \mu; \quad \gamma'^2 = k^2 - h'^2; \quad Z' = \frac{h'}{\epsilon' \omega}.$$

vu $\vec{\pi} = \vec{0}$,

a. $\vec{E} = \frac{-\mu}{\varepsilon} \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t}$ comparaison avec \vec{B} de A.2.b

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} -j\omega \frac{\partial \chi}{\partial y} e^{j(\omega t - h'z)} \\ j\omega \frac{\partial \chi}{\partial x} e^{j(\omega t - h'z)} \\ 0 \end{array} \right.$$

b. $\vec{B} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\pi}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{\pi}$ comparaison avec \vec{E} de A.2.a.

$$\vec{B} \left| \begin{array}{l} -j\mu h' \frac{\partial \chi}{\partial x} e^{j(\omega t - h'z)} \\ -j\mu h' \frac{\partial \chi}{\partial y} e^{j(\omega t - h'z)} \\ (\varepsilon\mu\omega^2 - h'^2) \chi e^{j(\omega t - h'z)} \end{array} \right.$$

c. \vec{E} est transversal à la direction de propagation Oz.

2.1. La condition limite impose $\vec{E} \wedge \vec{n}_s = 0$.

La même résolution qu'en B.1. donne $\chi(x, y) = \chi_0 X_1(x).Y_1(y)$

avec $X_1 = A_1' \cos \alpha' x + A_2' \sin \alpha' x$

$Y_1 = B_1' \cos \beta' y + B_2' \sin \beta' y$.

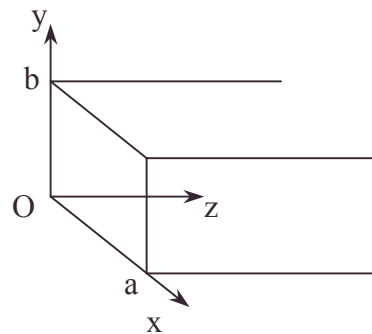
en $x = 0$ et $x = a$; $E_y = 0 \Rightarrow X_1 = A_1 \cos \frac{m\pi}{a} x$,

soit $\alpha' = \frac{m\pi}{a}$.

en $y = 0$ et $y = b$; $E_x = 0 \Rightarrow Y_1 = B_1' \cos \frac{n\pi}{b} y, \beta' = \frac{n\pi}{b}$.

$\Rightarrow \chi = \chi_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$ avec $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2 - h'^2$.

2.a. $\vec{E} \left| \begin{array}{l} j\omega \chi_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - h'z)} \\ -j\omega \chi_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right) \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - h'z)} \\ 0 \end{array} \right.$



$$\mathbf{b. \vec{B}} \left\{ \begin{array}{l} j\mu h'\chi_0 \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - h'z)} \\ j\mu h'\chi_0 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - h'z)} \\ \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \chi_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{j(\omega t - h'z)} \end{array} \right.$$

3. On peut avoir superposition des 2 types d'onde car on satisfait les conditions limites. On peut aussi n'avoir qu'un seul type (T.E. ou T.M.) d'onde, il suffit d'imposer techniquement la transversalité de \vec{E} ou de \vec{B} .

7.1.10. Un système de communication à rayonnement dipolaire

N'appartient qu'aux programmes de MP, PSI, PC

On se propose d'examiner quelques phénomènes mis en œuvre dans un système de communication, ainsi que quelques méthodes utilisées pour coder les informations. Dans tout le problème, le souligné est utilisé pour dénoter les grandeurs complexes ($\underline{Z}, \underline{A}$) où j est tel que $j^2 = -1$.

Première partie : rayonnement d'une antenne

I.A. Dans les parties I. et II., l'atmosphère terrestre est considérée comme un milieu dont les propriétés sont celles du vide : $\epsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9} \text{ Fm}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$.

Un élément de courant $i(t)dz\vec{e}_z$, placé à l'origine O des espaces, le long de l'axe (O, \vec{e}_z) , crée, en un point M repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, ϕ (figure 1), un potentiel vecteur $d\vec{A} = \mu_0 i \left(t - \frac{r}{c} \right) dz \frac{\vec{e}_z}{4\pi r}$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Le courant $i(t) = I \cos \omega t$ est sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude I .

Donner, en notation complexe, l'expression $d\vec{A}$ du potentiel vecteur en M en introduisant le nombre d'onde $k = \frac{\omega}{c}$.

2. Pourquoi, dans la zone de rayonnement ($r \gg \lambda$) (λ longueur d'onde du rayonnement), est-il pertinent, lors d'une dérivation spatiale de $d\vec{A}$, de négliger les termes résultant du facteur $\frac{1}{r}$ devant ceux résultant de l'exponentielle ?

3. Identifier parmi les deux expressions données en notation complexe ci-dessous, celle du champ magnétique $d\vec{B}$ et celle du champ électrique $d\vec{E}$ créés en un point M de la zone de rayonnement, par l'élément de courant $i(t)dz\vec{e}_z$. Justifier votre choix.

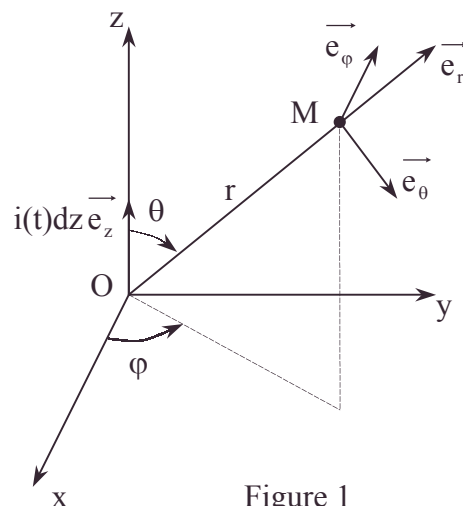


Figure 1

$$j\omega\left(\mu_0 \frac{I}{4\pi}\right)\left(\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r}\right)\sin\theta d\vec{z}e_\theta \quad ; \quad jk\left(\frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right)\left(\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r}\right)\sin\theta d\vec{z}e_\varphi.$$

On rappelle éventuellement que :

$$\vec{\text{rot}}(f\vec{a}) = f\vec{\text{rot}}(\vec{a}) + \vec{\text{grad}}(f) \wedge \vec{a} \quad \text{et} \quad \vec{\text{grad}}(f(r, \theta, \varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r}\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi.$$

4. Vérifier que le champ électromagnétique $(d\vec{E}, d\vec{B})$ possède, dans ces conditions et localement, la structure d'une onde plane progressive dans la direction \vec{e}_r .

B. Une antenne demi-onde est constituée d'un fil rectiligne de longueur $L = \frac{\lambda}{2}$ colinéaire à l'axe (O, \vec{e}_z) et de point milieu O origine des espaces (Figure 2). Alimentée par un amplificateur de puissance non représenté, elle est parcourue par un courant $i(z, t) = I_0 \cos \frac{\pi z}{L} \cos \omega t$.

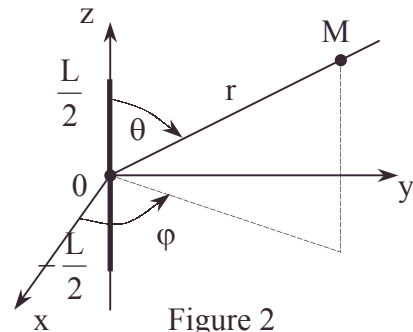


Figure 2

1. Exprimer le courant d'antenne en notation complexe $\underline{i}(z, t)$.

2. On souhaite déterminer le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en M dans la zone de rayonnement.

a. Pour ce faire, on considère un élément de courant $\underline{i}(z, t)dz\vec{e}_z$, au point N de l'antenne à la cote z. Exprimer en fonction de z et de θ , la différence de marche δ entre les ondes rayonnées en N et O dans la direction (θ, φ) .

b. Déterminer en notation complexe, l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ rayonné par l'antenne en M dans la direction (θ, φ) .

On donne : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{j a x} dx = 2 \cos \frac{\frac{a\pi}{2}}{1 - a^2}.$

c. En déduire le champ électrique cherché :

$$\vec{E}(M, t) = -c\mu_0 I_0 \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{2\pi r \sin\theta} \right] \sin(\omega t - kr) \vec{e}_\theta.$$

3. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ rayonné par l'antenne.

4. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la moyenne temporelle de sa norme $\langle \vec{\Pi} \rangle$.

5. Sachant que $\int_0^\pi \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right] d\theta = 1,22$ calculer la puissance moyenne P

rayonnée par cette antenne.

6. Par définition, la résistance de rayonnement d'une antenne demi-onde est la résistance R_r définie par $P = R_r \frac{I_0^2}{2}$, où I_0 est l'intensité au ventre d'intensité de

l'antenne. Déterminer R_r pour une antenne demi-onde et justifier la dénomination de résistance de rayonnement. Calculer numériquement R_r .

Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 , pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $P = 2100$ kW (puissance de l'émetteur Grandes Ondes de France Inter à Allouis).

Deuxième partie : propagation entre l'ionosphère et la terre

II.A. Les ondes électromagnétiques rayonnées par l'antenne rencontrent l'ionosphère qui est l'ensemble des couches atmosphériques situées entre 60 et 300 km d'altitude. Ces dernières se modélisent en un gaz ionisé (plasma) occupant un milieu transparent dont la permittivité ϵ_0 et la perméabilité μ_0 sont celles du vide.

Ce plasma, électriquement neutre, est constitué d'ions pratiquement immobiles de d'électrons de charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Bien que la structure de l'ionosphère soit complexe, nous supposons que le nombre d'électrons par unité de volume est uniforme et égal à $N = 10^{12} \text{ m}^{-3}$.

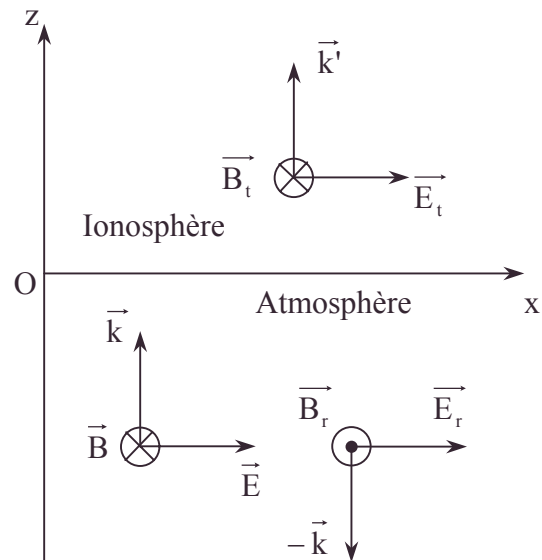


Figure 3

En outre, nous admettrons que les interactions entre particules ainsi que leur agitation thermique peuvent être négligées. Cela étant, considérons une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique et polarisée rectilignement, se propageant dans une direction Oz orthogonale à l'interface (plan $z = 0$) de l'atmosphère et de l'ionosphère (figure 3).

Sur l'interface, son champ électrique $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$ donne naissance à :

- Un champ électrique transmis $\vec{E}_t = E_{0t} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{e}_x$ ($z > 0$).
- Un champ électrique réfléchi $\vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t + k'z)} \vec{e}_x$.

1. En négligeant la force magnétique, donner l'expression, en notation complexe, de la vitesse \vec{V}_e des électrons ionosphériques dans le champ électromagnétique transmis. En déduire le vecteur densité de courant de conduction \vec{j} créé par ce champ.

2. Ecrire les équations locales vérifiées par le champ électromagnétique dans l'ionosphère et établir l'équation de propagation du champ électrique \vec{E}_t . Démontrer la

relation de dispersion $k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$ où ω_p est la pulsation plasma dont on donnera

l'expression en fonction de N , e , m et ϵ_0 . Calculer numériquement la fréquence plasma

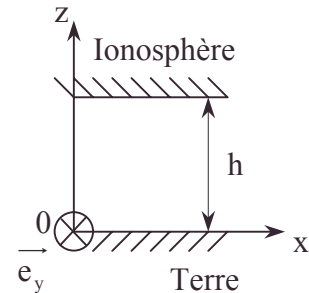
$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$. Les ondes émises par France Inter G.O., de fréquence $f = 164$ kHz, peuvent-elles se propager dans l'ionosphère ? On rappelle que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rota}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{diva}) - \Delta \vec{a}$.

3. Donner les conditions aux limites (en $z = 0$) que vérifient les champs électriques et magnétiques des trois ondes incidente, transmise et réfléchie, ainsi que les relations, d'une part entre \vec{B} et \vec{E} , d'autre part entre \vec{B}_t et \vec{E}_t et enfin entre \vec{B}_r et \vec{E}_r .

4. Etablir l'expression du coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_0}$, de l'interface atmosphère – ionosphère et en déduire celle de son facteur de réflexion en puissance $R = |\underline{r}|^2$. Exprimer \underline{r} et R en fonction du paramètre \underline{n} défini par $\underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Comment se comporte cette interface vis-à-vis des ondes

électromagnétiques de pulsation $\omega < \omega_p$? Conclure que les ondes rayonnées par l'émetteur de France Inter G.O. sont totalement réfléchies par l'ionosphère.

B. Les ondes électromagnétiques de cet émetteur sont réfléchies par l'ionosphère et aussi par la terre. On se propose d'examiner les conditions de cette propagation guidée en assimilant, dans la région étudiée, la terre et l'ionosphère à deux plans conducteurs parfaits parallèles, distants de h . Parmi les structures de ce champ pouvant se propager on ne s'intéressera qu'à la structure transverse électrique (T.E.) orthogonale à la direction Ox de propagation.



Cette structure est définie, en notation complexe, par un champ électrique de la forme $\vec{E}_g = \underline{E}_g(y, z) \exp j(\omega t - k_g x) \vec{e}_y$.

1. Ecrire l'équation de Maxwell-Gauss vérifiée par le champ électrique dans l'atmosphère entre les deux plans $z = 0$ et $z = h$ et déduire que $E_g(y, z)$ ne dépend en fait que de la seule coordonnée z .

2. Etablir l'équation de propagation du champ électrique \vec{E}_g . Démontrer, en intégrant l'équation de propagation, que le champ électrique E_g est de la forme :

$$\vec{E}_g = E_{g0} \sin \frac{n\pi z}{h} \cos(\omega t - k_g x) \vec{e}_y \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Commenter la forme de l'expression obtenue et le fait que E_{g0} soit indépendant de x .

3. En ne retenant que le mode dominant ($n = 1$), en déduire la relation de dispersion des ondes guidées $k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)$ où ω_c est une pulsation de coupure à expliciter en

fonction de c et de h . Calculer numériquement $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$.

Les ondes rayonnées par France Inter G.O. peuvent-elles se propager dans l'atmosphère entre l'ionosphère et la terre ?

Centrale ; Durée : 2h

Corrigé

I.A.1. La solution de $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ est $V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{r} d\tau$ avec $r = MP$, de même,

formellement pour \vec{A} en ARQS : $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}(P, t) \frac{d\tau}{r}$.

En tenant compte de la propagation (potentiel retardé), $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P, t-r/c)}{r} d\tau$

et si le courant est filiforme,

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i(P, t-r/c) \frac{d\vec{\ell}}{r} \Rightarrow d\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} i(P, t-r/c) d\vec{\ell},$$

et donc en notation complexe : $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} I e^{j(\omega t - kr)} dz \vec{e}_z = d\vec{A}_z \vec{e}_z$.

$$2. \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \right) = -j \frac{k}{r} e^{j(\omega t - kr)} - \frac{1}{r^2} e^{j(\omega t - kr)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{dans la zone de}$$

rayonnement où r est grand devant λ ;

$\frac{1}{r^2} \ll \frac{k}{r} = \frac{2\pi}{\lambda r}$: on peut négliger le terme résultant de la dérivation de $\frac{1}{r}$ devant celui

résultant de la dérivation de l'exponentielle.

3. Soient \vec{E}_1 la première expression, \vec{E}_2 la seconde expression.

Formellement, $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ permettra d'écrire $d\vec{B} = \text{rot} d\vec{A}$ avec :

$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} I e^{j(\omega t - kr)} dz (\vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta)$, afin d'employer la 2^{ème} formule :

$$d\vec{B} = \vec{e}_r \cdot 0 + \vec{e}_\theta \cdot 0 + \frac{\vec{e}_\phi}{r} \frac{\mu_0}{4\pi} I dz \left[-j k e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta + \frac{\sin \theta}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right]. \quad \text{On sait que } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}.$$

On néglige $\frac{1}{r}$ devant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dans la zone de rayonnement ($r \gg \lambda$).

$d\vec{B} = \vec{E}_2$: on a donc par complémentarité logique $d\vec{E} = \vec{E}_1$.

4. Le trièdre trirectangle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ est direct ; de même le trièdre $(k\vec{e}_r, d\vec{E}, d\vec{B})$.

$$\frac{\|d\vec{B}\|}{\|d\vec{E}\|} = \frac{I k}{4\pi \epsilon_0 c^2 \cdot \frac{\omega \mu_0 I}{4\pi}} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \quad (\text{rappel : } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1).$$

On a localement la relation caractéristique d'une O.P.P.H.

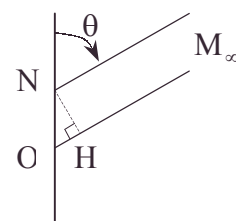
$$d\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge d\vec{E} \quad \text{avec } \vec{k} = k\vec{e}_r \quad \text{ici.}$$

B.1. $\underline{i} = I e^{j\omega t}$ précédent s'écrit maintenant avec $I = I_0 \cos \frac{\pi z}{L}$.

$$\underline{i}(z, t) = I_0 \cos \frac{\pi z}{L} e^{j\omega t}.$$

2.a. $\delta = NM - OM = -OH = -z \cos \theta$.

$$e^{j(\omega t - kNM)} = e^{j(\omega t - kOM + kz \cos \theta)}.$$



$$\mathbf{b. d\vec{E}}(M, t) = \frac{\mu_0 j \omega}{4\pi r} I \cos \frac{\pi z}{L} e^{j(\omega t - kr + kz \cos \theta)} dz \vec{e}_\theta \sin \theta.$$

Posons $x = \frac{\pi z}{L} = \frac{2\pi z}{\lambda} = k z \Rightarrow dx = k dz$.

$$\vec{dE} = \frac{j\mu_0}{4\pi r k} \omega I_0 e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta \cos x e^{jx \cos \theta} dx \vec{e}_\theta.$$

En intégrant en z de $-\frac{L}{2}$ à $+\frac{L}{2}$, soit en x de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{E}(M, t) = \frac{j I_0 \omega \mu_0}{4\pi k r} e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x e^{jx \cos \theta} dx.$$

La formule donnée s'adapte avec $a = \cos \theta$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x e^{j a x} dx = \frac{2 \cos \frac{a\pi}{2}}{1 - a^2} = \frac{2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta}.$$

$$\vec{E} = \frac{j\mu_0 c}{2\pi r} I_0 e^{j(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta}; \text{ or, } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \text{ et } \operatorname{Re}(j e^{jx}) = -\sin x.$$

\Rightarrow on a l'expression de \vec{E} associée à $I_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(I_0 e^{j\omega t})$.

$$\vec{E} = -c\mu_0 I_0 \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{2\pi r \sin \theta} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_\theta, \text{ c.q.f.d.}$$

$$3. \vec{B} = \vec{e}_r \wedge \frac{\vec{E}}{c} = \frac{\mu_0 I_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{2\pi r \sin \theta} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_\phi.$$

$$4. \vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi^2 r^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \sin^2(\omega t - kr) \vec{e}_r \Rightarrow$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \vec{e}_r.$$

5. Sur la sphère Σ de rayon r , calculons la puissance moyenne rayonnée P , avec $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

$$P = \iint_{\Sigma} \langle \vec{\pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} d\theta = 1,22 \cdot \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi}.$$

$$6.a. R_r = \frac{2P}{I_0^2} = 2,44 \cdot \frac{\mu_0 c}{4\pi}.$$

La dénomination est justifiée par analogie avec le résultat de la puissance moyenne consommée en alternatif dans une impédance de résistance R , où avec

$$I = I_0 \cos \omega t, P = \frac{R I_0^2}{2}; \text{ AN : } R_r = 73,2 \Omega.$$

$$\mathbf{b.} I_0 = \sqrt{\frac{2P}{R_r}}; \text{ AN : } I_0 = 240 \text{ A.}$$

II.A.1.a. Considérons le mouvement de l'électron moyen :

$$m \frac{d\vec{V}_e}{dt} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \text{ mais } B = \frac{E}{c} \text{ nous permet de négliger } \|\vec{V} \wedge \vec{B}\| \text{ devant } \|\vec{E}\|.$$

En notation complexe : $m j \omega \vec{V}_e = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{V}_e = \frac{j e}{m \omega} \vec{E}.$

b. $\vec{j} = \rho \vec{V}$ s'écrit $\vec{j} = -Ne \vec{V}_e = -\frac{j Ne^2}{m \omega} \vec{E}.$

2.a. $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{total}}}{\epsilon_0}$ devient [1] $\text{div} \vec{E}_t = 0$ vu l'électroneutralité.

$\text{div} \vec{B} = 0$ s'écrit [2] $\text{div} \vec{B}_t = 0.$

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ devient [3] $\vec{j} \wedge \vec{E}_t = -j \omega \vec{B}_t \Rightarrow \vec{B}_t = \frac{\vec{k'}}{\omega} \wedge \vec{E}_t.$

$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$ s'écrit [4] $\vec{\text{rot}} \vec{B}_t = \left(-\frac{j N \mu_0 e^2}{m \omega} + j \epsilon_0 \mu_0 \omega \right) \vec{E}_t.$

Soit aussi : $\vec{k'} \wedge \left(\frac{\vec{k'} \wedge \vec{E}_t}{\omega} \right) = \left(-\frac{j Ne^2 \mu_0}{m \omega} + j \epsilon_0 \mu_0 \omega \right) \vec{E}_t.$

b. Eliminons \vec{B}_t entre [3] et [4] (à défaut de développer le double produit vectoriel de [4]).

$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\vec{E}_t}{j \omega} \right) = \underbrace{\vec{\text{grad}} \text{div} \left(-\frac{\vec{E}_t}{j \omega} \right)}_{=0} + \frac{\Delta \vec{E}_t}{j \omega} = \frac{\Delta \vec{E}_t}{j \omega} = \frac{\Delta E_{tx}}{j \omega} \vec{e}_x$, d'où finalement :

$$\Delta E_{tx} = -j \omega \left(j \frac{\omega}{c^2} - j \frac{Ne^2 \mu_0}{m \omega} \right) E_{tx}.$$

$$-k'^2 E_{tx} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\mu_0 Ne^2 c^2}{m \omega^2} \right) E_{tx}, \text{ d'où la relation de dispersion :}$$

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\mu_0 Ne^2 c^2}{m \omega^2} \right) \text{ qui permet l'identification avec l'énoncé si}$$

$$\omega_p^2 = \frac{\mu_0 Ne^2 c^2}{m} = \frac{Ne^2}{m \epsilon_0}; \omega_p = 2 \pi f_p \Rightarrow f_p = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m \epsilon_0}} : \text{AN : } f_p = 8,98 \text{ MHz.}$$

c. $k'^2 < 0$ traduit de l'absorption.

L'absence d'absorption a lieu pour $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1$ soit $\omega > \omega_p$, ou encore $f > f_p$.

Or, $164 \text{ kHz} < f_p = 8,98 \text{ MHz}$. France Inter G.O. ne se propage pas dans l'ionosphère car l'absorption empêche sa détection.

3. En absence de charges et de courants surfaciques, écrivons la continuité en $z = 0, \forall t$.

a. de \vec{E} tangentiel : $\underline{E}_{0t} = \underline{E}_0 + \underline{E}_{0r}$ [1'].

b. de \vec{B} normal : $\underline{B}_{0t} = \underline{B}_0 + \underline{B}_{0r}$ [2'].

$$\text{c. } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}_\ell = \frac{\vec{k}_\ell}{\omega} \wedge \vec{E}_\ell, \ell \text{ représentant les divers cas ;}$$

$$\text{donc, } \underline{B}_0 = \frac{k}{\omega} \underline{E}_0 ; \underline{B}_{0t} = \frac{k'}{\omega} \underline{E}_{0t} \text{ et } \underline{B}_{0r} = -\frac{k}{\omega} \underline{E}_{0r} \text{ [3'] .}$$

$$\text{4.a.} \text{Ecrivons } \underline{E}_{0r} = r \underline{E}_0 \text{ et } \underline{E}_{0t} = t \underline{E}_0 .$$

$$[1'] \Rightarrow t = 1 + r ; [2'] \text{ et } [3'] \Rightarrow tk' = k - rk \text{ soit } \frac{k't}{k} = 1 - r .$$

$$\text{En remplaçant } t \text{ dans la 2}^{\text{ème}} \text{ formule, } r = \frac{1 - \frac{k'}{k}}{1 + \frac{k'}{k}} \Rightarrow R = \left| \frac{1 - \frac{k'}{k}}{1 + \frac{k'}{k}} \right|^2 .$$

$$\text{b. En introduisant } \underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} ; k' = \underline{n} \frac{\omega}{c} ; k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow r = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \text{ défini sur } \mathbb{C}$$

$$(\text{cf. } \omega < \text{ ou } > \omega_p)$$

$$\Rightarrow R = |r|^2 = \left| \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \right|^2 = \frac{(1 - \underline{n})(1 - \underline{n}^*)}{(1 + \underline{n})(1 + \underline{n}^*)} \quad (* : \text{représentation de la conjugaison dans } \mathbb{C}).$$

$$\text{c. } \omega < \omega_p ; \underline{n}^2 < 0 ; \underline{n} \text{ imaginaire pur } \underline{n} = -jn'' , \underline{n}^* = jn'' .$$

$$R = \frac{1 + \underline{n}^* \underline{n} - \underline{n} - \underline{n}^*}{1 + \underline{n} \underline{n}^* + \underline{n} + \underline{n}^*} = \frac{1 + n''^2}{1 + n''^2} = 1 .$$

Les ondes de France Inter G.O. sont totalement réfléchies par l'ionosphère et pourront être reçues plus loin par "ricochet".

B.1. L'équation de Maxwell-Gauss dans un milieu électriquement neutre s'écrit :

$$\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \text{ qui se réduit à } \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \underline{E}_g}{\partial y} e^{j(\omega t - k_g x)} .$$

\underline{E}_g ne dépend que de z .

$$\text{2. Dans le vide, on a : } \Delta \underline{E}_g - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{E}_g}{\partial t^2} = 0 ; \left[(-jk_g)^2 + \frac{d^2 \underline{E}_g}{dz^2} \right] = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_g ,$$

$$\text{soit } \frac{d^2 \underline{E}_g}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) \underline{E}_g = 0 . \text{ Posons } \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 .$$

$$\text{a. Si } \alpha^2 > 0 , \text{ cf. } \omega > k_g c : \underline{E}_g = E_{g0} \sin(\alpha z + \varphi) ;$$

or par continuité de \vec{E} tangentiel en $z = 0$ et en $z = h$:

$$\underline{E}_g(0) = 0 \text{ (vu } \vec{E} = \vec{0} \text{ dans un conducteur parfait)} \Rightarrow \varphi = 0 .$$

$$\underline{E}_g(h) = 0 \Rightarrow \alpha h = n\pi \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{h} .$$

$$\Rightarrow \vec{E}_g = E_{g0} \sin \frac{n\pi}{h} z \cos(\omega t - k_g x) \vec{e}_y \text{ en notation réelle.}$$

$$\text{b. Si } \alpha^2 < 0 , \text{ cf. } \omega < k_g c ; \underline{E}_g = E_{g0} \sinh(\alpha z + \varphi_1) ;$$

$$\alpha^2 = -\beta^2 \text{ avec } \beta > 0 ; \underline{E}_g(0) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0 .$$

$$\underline{E}_g(h) = 0 \Rightarrow E_{g0} \sinh(\alpha h) = 0 \Rightarrow E_{g0} = 0 \Rightarrow \underline{E}_g = 0 .$$

c. E_{g0} indépendant de x traduit l'absence de réflexion (et d'absorption) dans cette direction : on se limite à une onde progressive. k_g dépendant de ω , une dispersion des ondes se produit dans leur propagation.

3. Dans l'équation de **II.B.2.** calculons $\frac{d^2 E_g}{dz^2} = -\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 E_g$

(cf. $\alpha^2 = \frac{\pi^2 n^2}{h}$ et $n = 1$).

L'équation de **B.2.** donne $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 - \frac{\pi^2}{h^2} = 0 \Rightarrow k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\pi^2 c^2}{h^2 \omega^2}\right)$; l'identification

donne : $\omega_c^2 = \frac{\pi^2 c^2}{h^2}$; $\omega_c = \frac{\pi c}{h}$; $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{2h}$; AN : $f_c = 2500$ Hz.

$k_g^2 > 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_c$ ou $f > f_c$; $164000 \text{ Hz} > 2500 \text{ Hz}$.

France Inter G.O. se propage entre terre et ionosphère (sans atténuation).

7.1.11. Transformation du champ électromagnétique dans un changement de base de Lorentz

Voir page 136.

7.1.12. Ondes électriques

Voir page 1254.

7.1.13. Analogie acoustique – ondes électromagnétiques

Voir page 1269.

7.1.14. Détection de radiosource

Voir page 1435.

7.1.15. Interféromètre de Pérot-Fabry

Voir page 1444.

7.2. Ondes électriques

7.2.1. Ligne bifilaire

Une ligne de transmission de longueur D est formée de deux conducteurs $A'C'$ et $B'D'$ reliant les bornes A' et B' d'un générateur parfait de tension sinusoïdale, S , aux bornes C' et D' d'une impédance d'utilisation Z_u . Le conducteur $B'D'$ est maintenu au potentiel nul sur toute sa longueur (figure 3a).

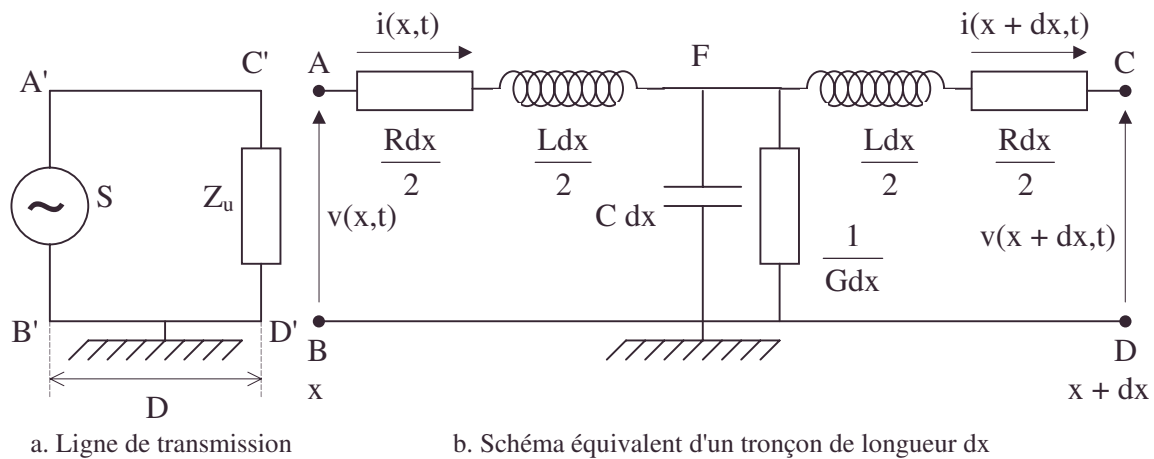


Figure 3 : ligne de transmission à constantes réparties

On désigne par L l'inductance linéique, c'est-à-dire l'inductance propre par unité de longueur de la ligne, C la capacité linéique, R la résistance linéique et enfin G' la conductance linéique d'isolement entre les deux conducteurs ; la figure 3b donne le schéma équivalent d'un tronçon de la ligne de longueur dx sous forme d'un réseau élémentaire et précise la notation et les conventions de signe pour les courants et les tensions. L'origine O de la ligne est prise à son extrémité côté générateur. Soit $Z(x)$ l'impédance de la ligne entre A et B et $Z(x+dx)$ l'impédance de la ligne entre C et D .

On pose $dZ(x) = Z(x+dx) - Z(x)$ et, en notation complexe : $v(x,t) = V(x)\exp(j\omega t)$;

$$i(x,t) = I(x)\exp(j\omega t) \quad ; \quad Z_c^2 = \frac{R + jL\omega}{G + jC\omega} \quad \text{et} \quad \gamma^2 = (R + jL\omega)(G + jC\omega), \quad \text{avec la}$$

convention que les parties réelles de Z_c et de γ sont toutes les deux positives.

1. Donner les dimensions respectives de Z_c et de γ .
2. Exprimer $dZ(x)$ au premier ordre en dx , en fonction de $Z(x)$, Z_c et γ .
3. Vérifier que la solution de l'équation différentielle obtenue en **b.2.** peut s'écrire :

$$Z(x) = Z_c \frac{A - \tanh \gamma x}{1 - A \tanh \gamma x} \quad \text{où } A \text{ est une constante pour le moment indéterminée.}$$

4. La ligne est fermée sur une impédance Z_u . On a donc $Z(D) = Z_u$. Déterminer Z' l'impédance à une distance d du générateur en fonction de Z_c , Z_u et $\tanh \gamma (D-d)$.

5. Examiner et commenter s'il y a lieu les cas particuliers suivants :

ligne extrêmement longue ($D \rightarrow \infty$), ligne adaptée ($Z_u = Z_c$), circuit ouvert ($Z_u \rightarrow \infty$) et court-circuit ($Z_u = 0$)

6. On suppose maintenant que les pertes en ligne sont faibles et plus exactement que $\frac{R}{L\omega}$ et $\frac{G}{C\omega}$ sont des infiniment petits du même ordre. Exprimer alors $\gamma = \alpha + j\beta$ et Z_c à l'ordre 1 en $\frac{R}{L\omega}$ et $\frac{G}{C\omega}$.

Quelle condition doivent satisfaire les constantes linéiques pour que Z_c soit réelle ? Comment s'expriment alors Z_c et γ ?

Dans la suite du problème, on ne considérera que des lignes sans pertes ; le tronçon de ligne de longueur dx se représentera donc par le schéma équivalent ci-contre.

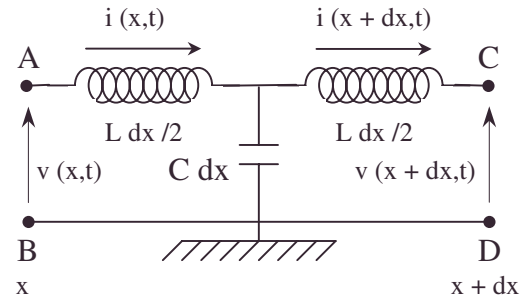


Figure 4 : Tronçon de ligne sans pertes

7. Posant, en notation complexe, $v(x,t) = V(x)\exp(j\omega t)$ et $i(x,t) = I(x)\exp(j\omega t)$, exprimer $\frac{dV}{dx}$ en fonction de ω , L et I . Exprimer ensuite $\frac{dI}{dx}$ en fonction de ω , C et V .

En déduire les équations du deuxième ordre auxquelles obéissent respectivement $V(x)$ et $I(x)$; quelle est la vitesse de propagation de $v(x,t)$ et de $i(x,t)$?

8. Montrer que la solution générale en $v(x,t)$ et $i(x,t)$ du système de la question 7. est la somme de deux fonctions : $v = v_1 + v_2$ et $i = i_1 + i_2$ décrivant respectivement un signal incident et un signal réfléchi.

Décrire, en amplitude et en phase, les rapports $\frac{V_1}{I_1}$ et $\frac{V_2}{I_2}$.

Soient $I_1(D)$ et $V_1(D)$ les amplitudes complexes à l'extrémité $x = D$ de la ligne pour l'onde incidente et $I_2(D)$ et $V_2(D)$ les mêmes grandeurs pour l'onde réfléchie. On appelle facteur de réflexion à l'extrémité de la ligne le rapport $\rho = -\frac{I_2(D)}{I_1(D)}$.

9. Exprimer ρ en fonction de Z_c et Z_u . Etudier ensuite le système d'ondes stationnaires dans les cas du court-circuit et de la ligne ouverte.

10. A quelle condition qualitative sur la fréquence l'hypothèse de la ligne sans perte a-t-elle un sens ?

Mines ; Durée : 1h30

Corrigé

1. R s'exprime en $\Omega \cdot m^{-1}$; G en $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$;

$$\Rightarrow \bullet \frac{R}{G} \text{ s'exprime en } \Omega^2 \text{ comme } Z_c^2 ; Z_c \text{ s'exprime en } \Omega.$$

$$\Rightarrow \bullet RG \text{ s'exprime en } m^{-2} \text{ comme } \gamma^2 \Rightarrow \gamma \text{ s'exprime en } m^{-1}.$$

2. La définition de $Z(x)$: $V(x,t) = Z(x) \cdot i(x,t)$ [0]

et à l'abscisse $x + dx$; $V(x + dx,t) = Z(x + dx) \cdot i(x + dx,t)$.

Il importe de ne pas mélanger le cadre de calcul équations différentielles et celui de la notation complexe de ces équations.

Ecrivons :

• La loi d'Ohm entre A et C :

$$v(x,t) - v(x + dx,t) = \frac{R dx}{2} i(x) + L \frac{dx}{2} \frac{\partial i}{\partial t} + R \frac{dx}{2} i\left(x + \frac{dx}{2}\right) + L \frac{dx}{2} \frac{\partial i}{\partial t}\left(x + \frac{dx}{2}\right).$$

• coefficient de réflexion à l'extrémité de la ligne bifilaire, ligne bifilaire, onde stationnaire

- loi des nœuds en F :

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = G dx v\left(x + \frac{dx}{2}\right) + C dx \frac{\partial v}{\partial t}\left(x + \frac{dx}{2}\right);$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur : $-\frac{\partial v}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t}$ [1]

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) + \left[G v(x, t) + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] = 0 \quad [2].$$

Soit en notation complexe, les équations donnent :

$$[0] \quad V(x) = Z(x) I(x);$$

$$[1] \quad -\frac{dZ}{dx} I - Z \frac{dI}{dx} = (R + jL\omega) I = -\frac{dV}{dx};$$

$$[2] \quad \frac{dI}{dx} + G V + jC\omega V = 0 \quad \text{soit encore} \quad \frac{dI}{dx} = -(G + jC\omega) Z I;$$

$$[1] \quad \text{devient donc} \quad -\frac{dZ}{dx} + Z^2 (G + jC\omega) = (R + jL\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dx} = Z^2 (G + jC\omega) - (R + jL\omega) = (Z^2 - Z_c^2) (G + jC\omega).$$

Remarquons $\frac{\gamma^2}{Z_c^2} = \frac{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} = (G + jC\omega)^2 \Rightarrow G + jC\omega = \pm \frac{\gamma}{Z_c},$

$$\frac{dZ}{dx} = \pm \gamma Z_c \left(\frac{Z^2}{Z_c^2} - 1 \right) \Rightarrow dZ = \pm \gamma Z_c \left(\frac{Z^2}{Z_c^2} - 1 \right) dx.$$

3. $\frac{Z}{Z_c} = \frac{A - \tanh \gamma x}{1 - A \tanh \gamma x}$; dérivons Z :

$$\frac{dZ}{dx} = Z_c \frac{-(A \tanh \gamma x)(1 - \tanh^2 \gamma x) \gamma - (A - \tanh \gamma x)(-A)(1 - \tanh^2 \gamma x) \gamma}{(1 - A \tanh \gamma x)^2} =$$

$$\frac{dZ}{dx} = \gamma Z_c \frac{(1 - \tanh^2 \gamma x)(A^2 - 1)}{(1 - A \tanh \gamma x)^2}. \quad \text{Or} \quad \frac{Z^2}{Z_c^2} - 1 = \frac{(A^2 - 1)(1 - \tanh^2 \gamma x)}{(1 - A \tanh \gamma x)^2}.$$

Ainsi, $\frac{dZ}{dx} = +\gamma Z_c \left(\frac{Z^2}{Z_c^2} - 1 \right)$ est vérifiée avec le signe +.

4. $Z(d) = Z_c \frac{A - \tanh \gamma d}{1 - A \tanh \gamma d}.$

Déterminons A par $Z(D) = Z_u = Z_c \frac{A - \tanh \gamma D}{1 - A \tanh \gamma D} \Rightarrow A = \frac{Z_u + Z_c \tanh \gamma D}{Z_c + Z_u \tanh \gamma D};$

$$\Rightarrow Z' = \frac{Z_c (Z_u + Z_c \tanh \gamma D - \tanh \gamma d (Z_c + Z_u \tanh \gamma D))}{Z_c + Z_u \tanh \gamma D - \tanh \gamma d (Z_u + Z_c \tanh \gamma D)};$$

$$Z' = Z_c \frac{Z_u (1 - \tanh \gamma d \tanh \gamma D) + Z_c (\tanh \gamma D - \tanh \gamma d)}{Z_c (1 - \tanh \gamma d \tanh \gamma D) + Z_u (\tanh \gamma D - \tanh \gamma d)}$$

Rappelons $\tanh \gamma (D - d) = \frac{\tanh \gamma D - \tanh \gamma d}{1 - \tanh \gamma D \tanh \gamma d} \Rightarrow Z' = Z_c \frac{Z_u + Z_c \tanh \gamma (D - d)}{Z_c + Z_u \tanh \gamma (D - d)}.$

5.a. $D \rightarrow +\infty$; $\tanh \gamma(D-d) \rightarrow 1$; $Z' = Z_c \quad \forall d$ (cf. impédance itérative), indifférence par rapport à Z_u à l'infini.

b. $Z_u = Z_c$; $Z' = Z_c \quad \forall d$ (cf. impédance itérative) ; la ligne n'a pas besoin d'être infinie.

c. $Z_u \rightarrow \infty$; $Z' = \frac{Z_c}{\tanh \gamma(D-d)}$; pour $D \gg d$, $Z'(d) \# Z_c$ cf. **a.**

d. $Z_u = 0$; $Z' = Z_c \tanh \gamma(D-d)$; pour $D \gg d$, $Z'(d) \# Z_c$ cf. **a.**

$$\mathbf{6.a.} \quad \gamma^2 = j\omega L \left(1 - \frac{jR}{\omega L}\right) j\omega C \left(1 - \frac{jG}{\omega C}\right) = -LC\omega^2 \left(1 - j\left(\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega}\right) - \frac{RG}{LC\omega^2}\right).$$

Appliquons sur \mathbb{C} comme sur \mathbb{R} le développement en série. On a au premier ordre :

$$\gamma = j(LC\omega^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{j}{2} \left(\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega}\right)\right) = (LC\omega^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{2L\omega} + \frac{G}{2C\omega} + j\right) ;$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(LC\omega)^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega}\right) \text{ et } \beta = (LC\omega^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mathbf{b.} \text{ De même pour } Z_c^2 = \frac{j\omega L \left(1 - j\frac{R}{L\omega}\right)}{j\omega C \left(1 - \frac{jG}{C\omega}\right)} \# \frac{L}{C} \left(1 - \frac{jR}{L\omega}\right) \left(1 + \frac{jG}{C\omega}\right) ;$$

$$Z_c^2 = \frac{L}{C} \left(1 + j\left(\frac{G}{C\omega} - \frac{R}{L\omega}\right)\right) \Rightarrow Z_c = \left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{j}{2} \left(\frac{G}{C\omega} - \frac{R}{L\omega}\right)\right).$$

La condition $Z_c \in \mathbb{R} \Rightarrow GL = RC$.

$$\mathbf{c.} \text{ Alors, } Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} ; \gamma = (\omega^2 LC)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{\omega L} + j\right).$$

7. $R = 0$; $G = 0$;

a. Les équations correspondantes sont :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} ; \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -jL\omega I \text{ et } \frac{dI}{dx} = -jC\omega V.$$

$$\mathbf{b.} \quad \frac{d^2 V}{dx^2} = -jL\omega \frac{dI}{dx} = -LC\omega^2 V ; \frac{d^2 I}{dx^2} = -jC\omega \frac{dV}{dx} = -LC\omega^2 I.$$

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0, \text{ de la forme } \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0, \text{ avec une}$$

vitesse de propagation égale pour v et i ; $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

8.a. Pour résoudre $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$, on pose $u = x - ct$; $w = x + ct$.

Le changement de variable permet d'obtenir classiquement $\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial w} = 0$, de solution générale $s = s_1(u) + s_2(w)$.

– $s_1(u)$ est constante quand $x - ct = x_0$, soit quand on se déplace selon l'axe des x avec la vitesse c : c'est le signal incident.

– $s_2(w)$ est constante quand $x + ct = x_0$, soit quand on se déplace selon l'axe des x avec la vitesse $-c$: c'est le signal réfléchi.

On fait successivement $s = v$ puis $s = i$: $v = v_1 + v_2$; $i = i_1 + i_2$.

b. Le rapport des amplitudes et des phases demandé exige la notation complexe :

$v_1 = V_1 e^{j(\omega t - kx)}$; $v_2 = V_2 e^{j(\omega t + kx)}$; $i_1 = I_1 e^{j(\omega t - kx)}$; $i_2 = I_2 e^{j(\omega t + kx)}$, avec V_1, V_2, I_1 et I_2 complexes constants.

• Pour l'onde incidente : $\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow jk V_1 = -L j\omega I_1 \Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = \frac{L\omega}{k}$.

Or, $c = v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\left| \frac{V_1}{I_1} \right| = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $\arg v_1 - \arg i_1 = 0$. Conclusion : $\frac{V_1}{I_1} = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

• Pour l'onde réfléchie : $\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow jk V_2 = -L j\omega I_2 \Rightarrow \frac{V_2}{I_2} = -\sqrt{\frac{L}{C}}$, ou

encore $\left| \frac{V_2}{I_2} \right| = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $\arg v_2 - \arg i_2 = \pi$. Conclusion : $\frac{V_2}{I_2} = -Z_c = -\sqrt{\frac{L}{C}}$.

9.a. $V(D) = Z_u I(D)$ soit $V_1 e^{j(\omega t - kD)} + V_2 e^{j(\omega t + kD)} = Z_u (I_1 e^{j(\omega t - kD)} + I_2 e^{j(\omega t + kD)})$,

soit $\sqrt{\frac{L}{C}} I_1 e^{-jkD} - \sqrt{\frac{L}{C}} e^{+jkD} I_2 = Z_u (I_1 e^{-jkD} + I_2 e^{+jkD})$;

$\underbrace{I_1 e^{-jkD}}_{I_1(D)} \left(\sqrt{\frac{L}{C}} - Z_u \right) = \underbrace{I_2 e^{+jkD}}_{I_2(D)} \left(Z_u + \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$; or, $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \rho = \frac{-I_2(D)}{I_1(D)} = \frac{Z_u - Z_c}{Z_u + Z_c}$.

b. $Z_u = 0 \Rightarrow \rho = -1$;

$I_2(D) = I_1(D)$ réalisé vu $i_1 = I_1 e^{-jkD} e^{j(\omega t - k(x-D))}$; $i_2 = I_2 e^{jkD} e^{j(\omega t + k(x-D))}$.

$i(x, t) = 2I_1 \cos k(x - D) e^{j\omega t}$; $v(x, t) = -2\sqrt{\frac{L}{C}} I_1 \sin k(x - D) e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$.

c. $Z_u \infty \Rightarrow \rho = +1$; $I_2(D) = -I_1(D)$ réalisé avec

$i(x, t) = -2I_1 \sin k(x - D) e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$; $v(x, t) = 2\sqrt{\frac{L}{C}} I_1 \cos k(x - D) e^{j\omega t}$.

On constate l'inversion de situation en v et i entre les cas **b.** et **c.**

10. Les conditions $R = 0$ et $G = 0$ sont d'après **6.a.** et **b.** approchées par $\frac{R}{L\omega} \ll 1$ et

$\frac{G}{C\omega} \ll 1$, conditions d'autant plus facilement réalisées qu'on opère en hautes fréquences.

7.2.2. Etude quadripolaire d'une ligne bifilaire

Nous allons, dans ce problème, nous intéresser à la transmission de la puissance à un réseau passif ou actif et voir dans quelles circonstances il est possible d'optimiser cette transmission. La dernière partie du problème permettra de voir comment les notions introduites peuvent être utilisées pour étudier la propagation dans une ligne, ou plus généralement toute propagation guidée.

Les questions **III(1., 2., 3., 4., 5.)** sont indépendantes du reste du problème.

I. Puissance transmise à un dipôle passif

Dans tout le problème, les sources utilisées seront sinusoïdales alternatives à la pulsation ω , et nous utiliserons les notations complexes pour représenter les différentes grandeurs que nous serons amenés à employer. A la grandeur sinusoïdale $u = U \cos(\omega t - \varphi)$ sera associée la grandeur complexe $\underline{u} = U e^{j(\omega t - \varphi)} = \underline{U} e^{j\omega t}$ \underline{U} étant l'amplitude complexe correspondante avec par conséquent $\underline{U} = U e^{-j\varphi}$ (avec $j^2 = -1$).

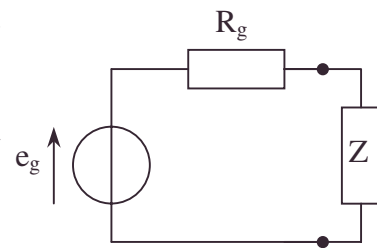


Figure 1

Soit un générateur caractérisé par une force électromotrice $e_g = E_g \cos \omega t$ et de résistance interne R_g que l'on relie à une charge définie par son impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$.

1. On suppose que l'impédance \underline{Z} est purement résistive ($X = 0$).

1. Calculer :

- La puissance P dissipée dans la résistance R ;
- La puissance active maximale P_g que peut fournir le générateur de tension.

2. Montrer que la puissance dissipée dans R peut se mettre sous la forme : $P = \frac{P_g}{4} (1 - K^2)$. Calculer le coefficient K .

3. Tracer la courbe $K^2 = K^2(R)$; pour quelle valeur de R la puissance disponible dans R est-elle maximale ?

4. On pose $P_r = K^2 P_i$ et $P_i = \frac{P_g}{4}$. On considère alors que P_i correspond à la puissance "incidente" sur le dipôle, comment peut-on alors interpréter la puissance P_r ?

2. Le dipôle est maintenant résistif et réactif, soit $\underline{Z} = R + jX$. Calculer la puissance active P dissipée par le dipôle, et montrer que l'on peut mettre P sous la forme $P = \frac{P_g}{4} (1 - K^2)$. Quelle est alors la valeur du coefficient K ?

La relation qui lie K et \underline{Z} est-elle bijective ?

3. On pose $P = P_i - P_r$, P_i étant la puissance incidente sur le dipôle $\left(P_i = \frac{P_g}{4} \right)$, et P_r la puissance réfléchie $P_r = K^2 \frac{P_g}{4}$. Le coefficient K^2 est alors le coefficient de réflexion de

la puissance sur le dipôle $K^2 = \frac{P_r}{P_i}$. On définit par $\rho = \frac{\underline{Z} - R_g}{\underline{Z} + R_g}$ le coefficient de

réflexion complexe sur la charge \underline{Z} ; cette quantité s'interprète comme le rapport de deux grandeurs complexes appelées respectivement "onde incidente" a , et "onde réfléchie" b . C'est-à-dire $\rho = \frac{b}{a}$ avec $P_i = \frac{1}{2}|a|^2$ et $P_r = \frac{1}{2}|b|^2$.

1. En remarquant que l'on peut choisir $a = \frac{e_g}{2\sqrt{R_g}}$, exprimer a et b en fonction de v , i , tension et courant dans le dipôle, et de R_g .
2. Quelles sont la puissance active P et la puissance réactive Q disponibles dans le dipôle en fonction de a et b ?
3. La correspondance entre ρ et \underline{Z} est-elle bijective ?
4. Tracer la courbe $\rho = \rho(R)$ dans le cas où $\underline{Z} = R$. Pour quelle valeur de ρ la puissance dissipée dans R est-elle maximale ?
4. On pose $z = \frac{\underline{Z}}{R} = r + jx$, r et x étant des grandeurs non dimensionnées, z est l'impédance réduite du dipôle.

Dans quelle région du plan complexe seront localisées les valeurs de ρ correspondant à des dipôles passifs ?

II. Puissance transmise par un quadripôle

Aucune connaissance particulière sur les quadripôles n'est nécessaire à la résolution des questions posées. On appelle quadripôle un réseau actif ou passif comportant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, comme l'indique la figure 2.

La tension appliquée v_1 étant sinusoïdale alternative, nous supposons que le fonctionnement du quadripôle est linéaire. Nous admettons alors que les relations entre tensions et courants sont de la forme :

$$\underline{v}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{i}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{i}_2 \quad \text{ou} \quad \underline{V}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$$

$$\underline{v}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{i}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{i}_2, \quad \underline{V}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$$

que l'on peut écrire : $\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$ avec $[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$;

$[\underline{Z}]$ est appelée matrice impédance du quadripôle. Par ailleurs, nous nous limiterons ici aux cas des quadripôles passifs pour lesquels $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$.



Figure 2

- 1.1. On referme le quadripôle sur une impédance \underline{Z} ; calculer la valeur \underline{Z}_0 qu'il faut donner à \underline{Z} pour que l'impédance d'entrée du quadripôle $\underline{Z}_e = \frac{V_1}{I_1}$ soit égale à \underline{Z}_0 . On

établira en fait l'équation permettant de calculer \underline{Z}_0 . Dans le cas d'un quadripôle symétrique ne comportant aucune résistance et ne faisant intervenir que des inductances pures et des condensateurs parfaits, que peut-on dire de \underline{Z}_0 ?

\underline{Z}_0 est appelée impédance caractéristique du quadripôle.

2. Application au cas du quadripôle Q suivant :

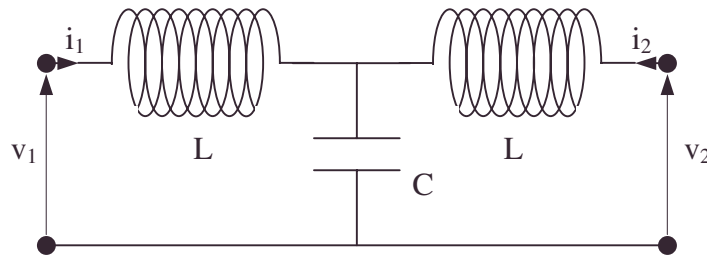


Figure 3

Calculer l'impédance caractéristique \underline{Z}_0 .

2. On définit pour un quadripôle quelconque l'onde entrante à gauche a_1 et une onde sortante à gauche b_1 , ainsi qu'une onde entrante et sortante à droite, respectivement a_2 et b_2 .

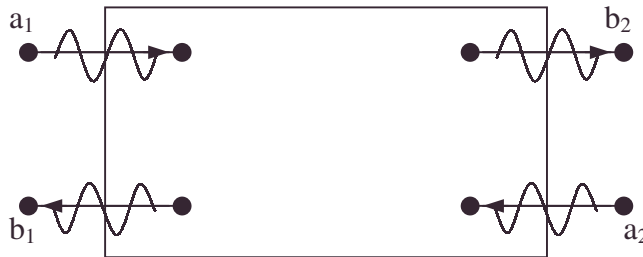


Figure 4

On choisit pour \underline{Z}_0 la racine complexe ayant une partie réelle positive et on pose par analogie avec la question I.3.1.

$$a_1 = \frac{V_1 + \underline{Z}_0 I_1}{2\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}, \quad b_1 = \frac{V_1 - \underline{Z}_0 I_1}{2\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}$$

$$a_2 = \frac{V_2 + \underline{Z}_0 I_2}{2\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}, \quad b_2 = \frac{V_2 - \underline{Z}_0 I_2}{2\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}.$$

1. Calculer \underline{v}_1 , \underline{i}_1 , \underline{v}_2 , \underline{i}_2 en fonction de a_1 , b_1 , a_2 , b_2 .

2. En déduire la puissance active fournie à l'entrée du quadripôle, ainsi que la puissance active disponible à la sortie du quadripôle en fonction de a_2 , b_2 , a_1 et b_1 .

3. Les relations entre les ondes a_1 , b_1 , a_2 et b_2 étant linéaires, on écrit :

$$\begin{cases} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{cases} \quad \text{ou encore en notation matricielle : } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

$[S]$ est une matrice de coefficients complexes dite matrice de transfert (Scattering Matrix).

1. Quelles sont les dimensions des coefficients $|S_{ij}|$?

2. Quelle interprétation peut-on donner aux coefficients S_{ij} , sachant qu'un quadripôle est dit adapté si lorsqu'on referme le quadripôle sur une impédance \underline{Z}_0 on a $a_2 = 0$?

3. On pose $[z] = \frac{1}{\underline{Z}_0} [Z]$, montrer que la matrice $[S]$ peut s'écrire :

$$[S] = ([z] - [I]) ([z] + [I])^{-1}, \quad [I] \text{ étant la matrice identité.}$$

Il est alors facile mais laborieux de calculer la matrice $[S]$; on admettra sans démonstrations que $[S]$ est de la forme $[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}$ avec $S_{12} = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}}$ et

$$S_{21} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}}.$$

Sachant que pour un quadripôle passif $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}$, quelle remarque peut-on faire sur S_{12} et S_{21} ?

4. On pose $S_{12} = e^{-\gamma}$, γ étant une grandeur complexe définie par $\gamma = \alpha + j\beta$ avec $\alpha > 0$.

1. Calculer la valeur de $\cosh \gamma$ et $\sinh \gamma$ en fonction de \underline{Z}_{11} ou \underline{Z}_0 et \underline{Z}_{12} , pour un quadripôle passif, symétrique.

2. Montrer que si $a_2 = 0$, $b_1 = 0$.

3. Calculer le facteur de transmission en puissance $T = \frac{\text{puissance de sortie}}{\text{puissance d'entrée}}$ si le

quadripôle est adapté, et exprimer le résultat en fonction de α . A quelle condition y aura-t-il transmission de la puissance sans atténuation ? En déduire une inégalité vérifiée par \underline{Z}_{11} et \underline{Z}_{12} . Montrer que cela impose une condition sur la fréquence des signaux transmis.

4. On se propose d'appliquer ces propriétés au cas du quadripôle Q de la question 1.2.

a. A quelles conditions portant sur la fréquence le signal est-il transmis sans atténuation ? On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$.

b. Quelle est la valeur de \underline{Z}_0 dans la bande passante ?

c. Calculer $\cos \beta$ dans la bande passante, en fonction de ω et ω_0 , et β en fonction de ω dans le cas où $\omega \ll \omega_0$.

5. Exprimer \underline{V}_1 et \underline{V}_2 en fonction de a_1 et b_1 , lorsque le quadripôle est adapté ; quelle relation existe-t-il entre \underline{V}_1 et \underline{V}_2 ?

Si $v_1 = V_1 \cos \omega t$, montrer que l'expression de v_2 peut s'écrire $v_2 = V_1 e^{-\alpha} \cos(\omega t - \beta)$.

Que représentent les quantités $\frac{\beta}{\omega}$ et $e^{-\alpha}$? De façon générale, y aura-t-il transmission du signal de la même manière pour toutes les fréquences ? Que peut-on dire dans l'exemple du quadripôle Q ?

6. On dispose en cascade $n - 1$ quadripôles identiques ; exprimer la tension v_n à la sortie du dernier quadripôle en fonction de v_1 , si ce quadripôle est adapté.

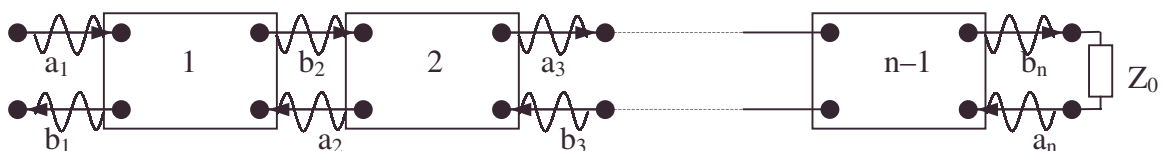


Figure 5

7. Le dernier quadripôle étant fermé sur une charge quelconque notée \underline{Z}_L , on définit

le coefficient de réflexion sur la charge par : $\rho_L = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_0} = \frac{a_n}{b_n}$.

• facteur de transmission de puissance d'une ligne, matrice, transmission du signal de la même manière pour toutes les fréquences

1. Calculer le coefficient de réflexion à l'entrée du premier quadripôle
 $\rho_e = \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_e - Z_0}{Z_e + Z_0}$. Exprimer ρ_e en fonction de ρ_L et de γ .
2. Montrer que la connaissance de ρ_e permet de calculer l'impédance d'entrée du premier quadripôle. On posera $\theta = -2(n-1)\gamma$ et on calculera Z_e en fonction de Z_L , Z_0 et θ .
3. Si on considère $n - 1$ quadripôles en cascade du type Q, quelle sera la valeur du déphasage entre la tension de sortie v_n du dernier quadripôle et la tension d'entrée v_1 , dans le cas où $\omega \ll \omega_0$?

ENS ; Durée 3h

Corrigé

I.1.1.a. $P = \frac{1}{2} R I_m^2$ or $\underline{e}_g = (R + R_g) \underline{i}$ avec $\underline{e}_g = E_g$. $P = \frac{1}{2} \frac{R E_g^2}{(R + R_g)^2}$.

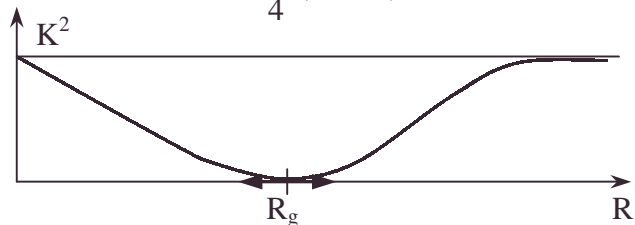
b. Puissance fournie par le générateur (e_g , R_g étant donnés) : $P' = \frac{1}{2} \frac{(R + R_g) E_g^2}{(R + R_g)^2}$;

$\Rightarrow P'_{\max} = \frac{1}{2} \frac{E_g^2}{R_g} = P_g$ obtenue pour $R = 0$.

2. Ecrivons $\frac{4P}{P_g} = 1 - K^2 \Leftrightarrow K^2 = 1 - \frac{4RR_g}{(R + R_g)^2} = \frac{(R - R_g)^2}{(R + R_g)^2}$;

la valeur $K = \pm \frac{(R - R_g)}{(R + R_g)}$ permet d'obtenir la forme $P = \frac{P_g}{4} (1 - K^2)$.

3.a. Tracé de $K^2 = \frac{(R - R_g)^2}{(R + R_g)^2} \cdot 1$



b. La puissance disponible dans R est maximale pour $K^2 = 0$ soit pour $R = R_g$.

4. $P = P_i - P_r$, P_r joue le rôle de puissance réfléchiée. (le signe $-$ est évident dans le bilan).

2.a. $P = \frac{1}{2} R I_m^2$; or $\underline{e}_g = (R + jX + R_g) \underline{i}$ avec $\underline{e}_g = E_g$; $P = \frac{1}{2} \frac{R E_g^2}{(R + R_g)^2 + X^2}$.

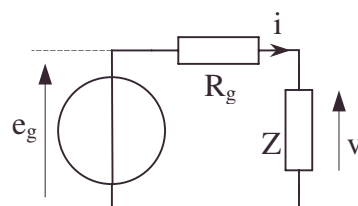
b. Ecrivons : $\frac{4P}{P_g} = 1 - K^2 \Leftrightarrow K^2 = 1 - \frac{4P}{P_g} = 1 - \frac{4RR_g}{(R + R_g)^2 + X^2} = \frac{(R - R_g)^2 + X^2}{(R + R_g)^2 + X^2}$

ainsi $K = \pm \left| \frac{Z - R_g}{Z + R_g} \right|$; l'expression précédente montre que $Z = R \pm jX$ donne le même

K^2 , la relation n'est pas bijective.

3.1.a. On a identité entre :

$P_g = \frac{1}{2} \frac{E_g^2}{R_g} = \frac{1}{2} |a|^2$ si $a = \frac{\underline{e}_g}{2\sqrt{R_g}}$



$$\underline{e}_g = \underline{v} + R_g \underline{i} \Rightarrow a = \frac{\underline{v} + R_g \underline{i}}{2\sqrt{R_g}}.$$

$$\text{b. } b = \rho a = \frac{Z - R_g}{Z + R_g} \frac{\underline{v} + R_g \underline{i}}{2\sqrt{R_g}} = \frac{\left(\frac{\underline{v}}{\underline{i}} - R_g\right) (\underline{v} + R_g \underline{i})}{\frac{\underline{v}}{\underline{i}} + R_g} \frac{1}{2\sqrt{R_g}} \text{ soit } b = \frac{\underline{v} - R_g \underline{i}}{2\sqrt{R_g}}.$$

$$\text{2.a. } P = P_i - P_r = \frac{1}{2} [a|^2 - |b|^2].$$

b. Introduisons la puissance complexe $\underline{P} = P + jQ$ avec $\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{v} \underline{i}^*$ (*estant indiquant la conjugaison) ; or $\underline{v} = (a + b)\sqrt{R_g}$; $\underline{i} = \frac{(a - b)}{\sqrt{R_g}}$ et $\underline{i}^* = \frac{a^* - b^*}{\sqrt{R_g}}$;

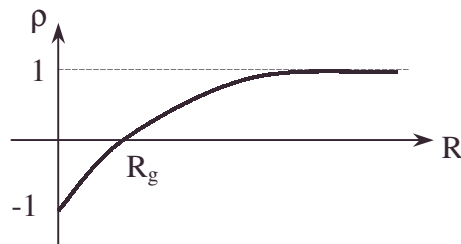
$$\Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{2} (aa^* - bb^* + ba^* - b^*a) ; \text{ or } P = \frac{1}{2} (aa^* - bb^*) \text{ car } P = P_i - P_r \Rightarrow$$

$$Q = -\frac{j}{2} (ba^* - ab^*) = \frac{j}{2} (ab^* - ba^*).$$

$$\text{3. } \rho = \frac{Z - R_g}{Z + R_g} \Leftrightarrow Z = R_g \frac{(1 + \rho)}{(1 - \rho)} ; \text{ à } \rho \text{ correspond une valeur de } Z \text{ et inversement,}$$

la correspondance est bijective.

4.a.



$$\text{b. } P = \frac{1}{2} aa^* (1 - |\rho|^2) ; P \text{ est maximale pour } \rho = 0 ; \text{ soit } R = R_g \text{ (cf. graphe).}$$

$$\text{4. } \rho = \frac{Z - \frac{R_g}{R}}{\frac{R_g}{R}} \text{ soit } \rho^2 = \frac{\left(r - \frac{R_g}{R}\right)^2 + x^2}{\left(r + \frac{R_g}{R}\right)^2 + x^2} \leq 1 ;$$

Pour un dipôle passif caractérisé par Z , ρ a une image à l'intérieur du cercle de rayon 1 centré à l'origine.

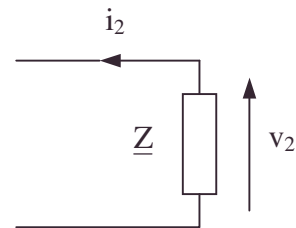
$$\text{II.1.1.a. } \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}, v_2 = \underline{V}_2 e^{j\omega t} ; i_2 = \underline{I}_2 e^{j\omega t} ; \underline{V}_2 = -\underline{Z} \underline{I}_2 ;$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{22}} \underline{I}_1 \text{ et reportons } \underline{V}_2 \text{ et } \underline{I}_2 \text{ dans les équations}$$

pour obtenir :

$$\frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{21}^2}{\underline{Z} + \underline{Z}_{22}} ; \text{ l'équation donnant } \underline{Z}_0 \text{ est :}$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{21}^2}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}}, \text{ soit } \underline{Z}_0^2 + (\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{11})\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{21}^2 - \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} = 0.$$



• maximum, notation complexe de la moyenne d'un produit

$$\underline{Z}_0 = \frac{\pm \text{racine carrée sur } \mathbb{C} [(\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{11})^2 - 4(\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22})] - (\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{11})}{2}.$$

b. Cas d'un quadripôle symétrique : l'échange des appellations 1 et 2 permet d'identifier $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$, soit : $\underline{Z}_0 = \pm \text{racine carrée sur } \mathbb{C} [\underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{21}^2]$.

Les relations électriques ne font intervenir que des impédances imaginaires. $\Rightarrow \underline{Z}_{ij}$ imaginaire pure, soit $\underline{Z}_{11}^2 < 0$ et $\underline{Z}_{21}^2 < 0$.

- \underline{Z}_0 est imaginaire si $\underline{Z}_{11}^2 < \underline{Z}_{21}^2$ et alors $\underline{Z}_0 = \pm j\sqrt{-(\underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{21}^2)}$.
- \underline{Z}_0 est réel si $\underline{Z}_{11}^2 > \underline{Z}_{21}^2$ et alors $\underline{Z}_0 = \sqrt{(\underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{21}^2)}$.

$$2. \underline{V}_1 = jL\omega \underline{I}_1 + \frac{1}{jC\omega}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \Rightarrow \underline{Z}_{11} = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right); \underline{Z}_{12} = \frac{-j}{C\omega}.$$

$$\underline{Z}_0^2 = -\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + \frac{1}{C^2\omega^2} = 2\frac{L}{C} - L^2\omega^2; \text{ posons } \omega_0^2 = \frac{2}{LC}; \underline{Z}_0^2 = L^2(\omega_0^2 - \omega^2):$$

- $\omega > \omega_0$: $\underline{Z}_0 = \pm jL\sqrt{\omega^2 - \frac{2}{LC}}$.
- $\omega < \omega_0$: $\underline{Z}_0 = L\sqrt{\frac{2}{LC} - \omega^2}$. \underline{Z}_0 est alors positive.

2.1. En admettant le changement de variables et d'indices, \underline{Z}_0 remplaçant R_g , on obtient comme en **I.3.2.b.** :

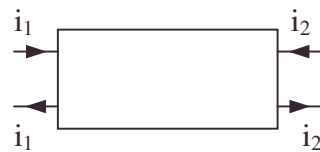
$$\underline{v}_1 = (a_1 + b_1)\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}; \quad \underline{i}_1 = \frac{(a_1 - b_1)}{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}};$$

$$\underline{v}_2 = (a_2 + b_2)\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}; \quad \underline{i}_2 = \frac{(a_2 - b_2)}{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Remarquons au nom de la conservation de la charge en régime quasi stationnaire :
– Le quadripôle est "équivalent" à un dipôle vu de l'entrée ou de la sortie.
– A l'entrée :

$$\underline{P}_e = \frac{1}{2} \underline{v}_1 \underline{i}_1^* = \frac{1}{2} (a_1 + b_1) \underline{Z}_0^{\frac{1}{2}} (a_1^* - b_1^*) \underline{Z}_0^{*\frac{1}{2}};$$

$$\underline{P}_e = \frac{1}{2} (a_1 a_1^* - b_1 b_1^*) \left(\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (b_1 a_1^* - b_1^* a_1) \left(\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} = P_e + jQ_e.$$



On peut vérifier $a_1 a_1^* - b_1 b_1^*$ réel, $b_1 a_1^* - b_1^* a_1$ imaginaire pur.

$$\bullet \left(\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{|\underline{Z}_0| e^{j \arg \underline{Z}_0}}{|\underline{Z}_0| e^{-j \arg \underline{Z}_0}}} = \sqrt{(e^{2j \arg \underline{Z}_0})} = \begin{cases} e^{j \arg \underline{Z}_0} = \cos \arg \underline{Z}_0 + j \sin \arg \underline{Z}_0 & \text{ou} \\ e^{j(\arg \underline{Z}_0 + \pi)} = -(\cos \arg \underline{Z}_0 + j \sin \arg \underline{Z}_0) \end{cases}$$

$$P_e = \text{Re}(\underline{P}_e) = \frac{1}{2} (a_1 a_1^* - b_1 b_1^*) \varepsilon \cos \arg \underline{Z}_0 - \varepsilon \sin \arg \underline{Z}_0 \cdot \frac{1}{2} (b_1 a_1^* - b_1^* a_1) \text{ avec } \varepsilon = \pm 1.$$

$$\bullet \text{ A la sortie : } \underline{P}_s = -\frac{1}{2} \underline{v}_2 \underline{i}_2^* = -\frac{1}{2} (a_2 + b_2) \underline{Z}_0^{\frac{1}{2}} (a_2^* - b_2^*) \underline{Z}_0^{*\frac{1}{2}};$$

$$\underline{P}_s = -\frac{1}{2} (a_2 a_2^* - b_2 b_2^*) \left(\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (b_2 a_2^* - b_2^* a_2) \left(\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0^*}\right)^{\frac{1}{2}} = P_s + jQ_s.$$

$$P_s = +\epsilon' \frac{1}{2} (a_2 a_2^* - b_2 b_2^*) \cos \arg Z_0 - \epsilon' \sin \arg Z_0 \cdot \frac{1}{2} (b_2 a_2^* - b_2^* a_2) \text{ avec } \epsilon' = \pm 1$$

tel que $P_s \in \mathbb{R}^+$ (afin d'être réellement disponible).

3.1. a_1 et b_1 ayant même unité, S_{ij} est sans unité.

2. Supposons l'adaptation qui supprime la réflexion sur la charge :

- S_{11} est le coefficient de réflexion à l'entrée.
- S_{21} est le coefficient de transmission vers la sortie.
- S_{22} est le coefficient de réflexion sur la sortie
- S_{12} est l'inverse du coefficient de transmission de a_2 vers l'entrée.

$$\mathbf{3.a.} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} = (Z) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (Z)^{-1} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} - \frac{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}{2} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{pmatrix} + \frac{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}{2} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}; \text{ soit matriciellement :}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}{2} [(z) - (I)] \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}{2} [(z) + (I)] \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix};$$

Comme $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, remplaçons $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$:

$$\frac{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}{2} ((z) - (I)) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (S) \frac{\underline{Z}_0^{\frac{1}{2}}}{2} ((z) + (I)) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}.$$

L'énoncé supposant l'inversibilité de (z) , on passe de $((z) - (I)) = (S) ((z) + (I))$ à $(S) = ((z) - (I)) ((z) + (I))^{-1}$, c.q.f.d.

b. $Z_{12} = Z_{21} \Leftrightarrow S_{12} = S_{21}$. La symétrie de (Z) entraîne la symétrie de (S) .

4.1. On a vu en **1.1.b.**

$$\underline{Z}_0^2 = \underline{Z}_{11}^2 - \underline{Z}_{21}^2 = \underline{Z}_{22}^2 - \underline{Z}_{12}^2 \Rightarrow \underline{Z}_0^2 - \underline{Z}_{22}^2 = -\underline{Z}_{12}^2; \text{ la forme } a^2 - b^2 \text{ donne :}$$

$$\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22} = \frac{-\underline{Z}_{12}^2}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{22}}$$

$$\mathbf{a.} \cosh \gamma = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} = \frac{1}{2} \left(S_{12} + \frac{1}{S_{12}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}} + \frac{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}} \right)$$

$$\cosh \gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12}^2} (\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_0) + \frac{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}} \right] = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}}.$$

$$\mathbf{b.} \sinh \gamma = \frac{1}{2} (e^\gamma - e^{-\gamma}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{S_{12}} - S_{12} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}} - \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}} \right),$$

$$\text{soit } \sinh \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{12}} - \frac{(\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_0)}{\underline{Z}_{01}} \right) = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_{12}}.$$

2. Vu (S) donné, $b_1 = S_{12} a_2$ d'où si $a_2 = 0$, $b_1 = 0$.

$$\mathbf{3.a.} \quad T = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_0) I_{2m}^2}{\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_0) I_{1m}^2} = \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|^2 ; \text{ or } \begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{Z}_0 \underline{I}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{V}_2 = -\underline{Z}_0 \underline{I}_2 = \underline{Z}_{12} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{11} \underline{I}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}} = \left(\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_{12}} - \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}} \right) \quad (\text{cf. } \cosh \gamma, \sinh \gamma) ;$$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \sinh \gamma - \cosh \gamma = \frac{1}{2}(e^\gamma - e^{-\gamma}) - \frac{1}{2}(e^\gamma + e^{-\gamma}) = -e^{-\gamma} = -e^{-\alpha} e^{-j\beta} \quad \text{et } T = e^{-2\alpha} .$$

$$\mathbf{b.} \quad T = 1 \Rightarrow e^{-2\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 0 .$$

$$\mathbf{c.} \quad \text{Si } \alpha = 0 \text{ alors } \cosh \gamma = \cosh(j\beta) = \cos \beta = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}} \Rightarrow -1 < \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}} < 1 .$$

d. Chaque inégalité de la forme $f(\omega) < 1$ entraîne des restrictions d'existence sur ω .

$$\mathbf{4.a.} \quad \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}} = j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) ; jC\omega = 1 - LC\omega^2 ; \text{ la double inégalité précédente entraîne}$$

$$1 - LC\omega^2 < 1 \quad \forall \omega ; -1 < 1 - LC\omega^2 \Rightarrow \omega \leq \omega_0 .$$

Il n'y a alors aucune atténuation.

$$\mathbf{b.} \quad \text{Pour } \omega \leq \omega_0 \text{ (transmission totale) : } \underline{Z}_0 = L \sqrt{\frac{2}{LC} - \omega^2} . \text{ En fait, la bande}$$

passante est définie par : $T \geq \frac{1}{2}$, de bornes $\omega_1 > \omega_0 > \omega_2$; entre $\omega_0 < \omega < \omega_1$;

$$\underline{Z}_0 = \pm jL \sqrt{\omega^2 - \frac{2}{LC}} ; \text{ entre } \omega_2 < \omega < \omega_0 \quad \underline{Z}_0 = L \sqrt{\frac{2}{LC} - \omega^2} .$$

$$\mathbf{c.} \quad \cos \beta = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{12}} = 1 - LC\omega^2 = 1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} ; \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \cos \beta \approx 1 :$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} = 1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{4\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \beta = \pm \frac{2\omega}{\omega_0} .$$

5.a. Si le quadripôle est adapté $a_2 = 0$ et aussi $b_1 = 0$.

$$\underline{V}_1 = a_1 \sqrt{\underline{Z}_0} ; \underline{I}_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\underline{Z}_0}} ; \underline{V}_2 = b_2 \sqrt{\underline{Z}_0} ; \underline{I}_2 = -\frac{b_2}{\sqrt{\underline{Z}_0}} .$$

$$\mathbf{b.} \quad \text{On en déduit : } \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{b_2}{a_1} = S_{21} = e^{-\gamma} = e^{-\alpha} e^{-j\beta} .$$

$$\mathbf{c.} \quad \text{si } v_1 = V_1 \cos \omega t, \underline{V}_1 = V_1 e^{j\omega t} ; \underline{V}_2 = V_1 e^{-\alpha} e^{j(\omega t - \beta)} \\ \text{et } v_2 = V_1 e^{-\alpha} \cos(\omega t - \beta) . \text{ c.q.f.d.}$$

$$\mathbf{d.} \quad \text{vu } v_2 = V_1 e^{-\alpha} \cos \omega \left(t - \frac{\beta}{\omega} \right) .$$

• $\frac{\beta}{\omega}$ représente le temps de retard dû à la transmission par le quadripôle de v_2 par rapport à v_1 .

• $e^{-\alpha} = \frac{V_{2\max}}{V_{1\max}}$: coefficient d'affaiblissement de la tension dû à la transmission par le quadripôle (cf. dissipation d'énergie).

• coefficient d'affaiblissement dû à la transmission, temps de retard dû à la transmission, transmission totale

• Pour qu'il n'y ait pas distorsion, il faut $e^{-\alpha} = \text{cste}$, ainsi que $\frac{\beta}{\omega} = \text{cste} \quad \forall \omega$.

C'est le cas du **.4.4.c.** où $\frac{\beta}{\omega} = \frac{2}{\omega_0}$ et $\alpha = 0$ pour $\omega < \omega_0$.

$$\mathbf{6.} \quad \underline{V}_2 = S_{12} \underline{V}_1 \Rightarrow \underline{V}_3 = S_{12} \underline{V}_2 ; \underline{V}_{n-1} = S_{12} \underline{V}_{n-2} ; \underline{V}_n = S_{12} \underline{V}_{n-1} ;$$

$$\underline{V}_n = (S_{12})^{n-1} \underline{V}_1 \quad \text{soit} \quad \underline{V}_n = \underline{V}_1 e^{-(n-1)\gamma}.$$

7.1.a. On a : $\rho_L = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_0}$, prenons le cas particulier où $\underline{Z}_L = \underline{Z}_e$ (cf. quadripôles).

$$\text{On voit alors } \rho_e = \rho_1 = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_0}.$$

$$\mathbf{b.} \quad \text{Vu l'alternance des définitions } \rho_1 = \frac{b_1}{a_2} ; \rho_2 = \frac{a_2}{b_2} ; \rho_3 = \frac{b_3}{a_3} ;$$

Cette alternance suppose la symétrie de la matrice : $S_{12} = S_{21} = e^{-\alpha}$.

On a : $b_1 = S_{12} a_2$ et $b_2 = S_{21} a_1$;

A chaque traversée, on a : $b_i = S_{12} a_{i+1}$ et $b_{i+1} = S_{21} a_i$;

$$\text{Ainsi } \frac{b_i}{a_i} = S_{12} S_{21} \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}, \text{ soit : } \rho_{n-1} = e^{-2\gamma} \rho_n ; \rho_{n-2} = e^{-2\gamma} \rho_{n-1} \dots ; \rho_1 = e^{-2\gamma} \rho_2 ;$$

En faisant les produits membre à membre :

$$\rho_1 = e^{-2(n-1)\gamma} \rho_n \text{ avec } \rho_n = \rho_L, \rho_e = \rho_1 \Rightarrow \rho_e = \rho_L e^{\theta} \text{ avec } \theta = -2(n-1)\gamma.$$

$$\mathbf{2.a.} \quad \rho_e = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_0} \Rightarrow \underline{Z}_e = \underline{Z}_0 \frac{1 + \rho_e}{1 - \rho_e}.$$

$$\mathbf{b.} \quad \underline{Z}_e = \underline{Z}_0 \frac{1 + \rho_L e^{\theta}}{1 - \rho_L e^{\theta}} = \underline{Z}_0 \frac{1 + \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_0} e^{\theta}}{1 - \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_0} e^{\theta}} = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_L (1 + e^{\theta}) + \underline{Z}_0 (1 - e^{\theta})}{\underline{Z}_L (1 - e^{\theta}) + \underline{Z}_0 (1 + e^{\theta})};$$

$$\text{Divisons numérateur et dénominateur par } e^{\frac{\theta}{2}} : \underline{Z}_e = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_L \cosh \frac{\theta}{2} - \underline{Z}_0 \sinh \frac{\theta}{2}}{\underline{Z}_L \sinh \frac{\theta}{2} - \underline{Z}_0 \cosh \frac{\theta}{2}}.$$

$$\mathbf{3.} \quad \alpha = 0, \cos \beta = 1 - LC\omega^2.$$

$$\mathbf{5.c.} \Rightarrow \arg \underline{V}_2 = \arg \underline{V}_1 - \beta ; \arg \underline{V}_3 = \arg \underline{V}_2 - \beta \text{ et par suite}$$

$$\Rightarrow \arg \underline{V}_n = \arg \underline{V}_1 - (n-1)\beta$$

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \beta = \frac{2\omega}{\omega_0} ; \Rightarrow \arg \underline{V}_n - \arg \underline{V}_1 = -2(n-1) \frac{\omega}{\omega_0}.$$

7.2.3. Fonction retard

Voir page 1008.

7.2.4. Ondes de torsion

Voir page 1307.

7.2.5. Résonateur d'un émetteur hyperfréquence

Voir page 1176.

7.3. Acoustique

Appartient aux programmes de PSI et PC

7.3.1. Analogie : acoustique, ondes électromagnétiques

Dans tout le problème, on se place dans un référentiel galiléen.

On note $(O, \vec{U}_x, \vec{U}_y, \vec{U}_z)$ un repère orthonormé direct de ce référentiel. Les valeurs moyennes dont il est question sont des valeurs moyennes temporelles : pour une grandeur f fonction du temps t , la valeur moyenne de f , notée $\langle f \rangle$, est égale à :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right).$$

Le paragraphe **I.** a pour but de faciliter la compréhension et l'utilisation de la grandeur \vec{J} introduite au paragraphe **II.**

Dans chaque partie, de nombreuses questions peuvent être abordées sans avoir résolu les précédentes questions.

On rappelle les formules suivantes relatives au champ scalaire $f(M)$ et aux champs vectoriels $\vec{a}(M), \vec{b}(M)$ où $\vec{OM} = x\vec{U}_x + y\vec{U}_y + z\vec{U}_z$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{f}\vec{a}) &= f \text{div} \vec{a} + \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{a} ; \quad \text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{b} ; \\ \vec{\text{grad}}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{b} + \vec{b} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{a} . \end{aligned}$$

I. Vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique

1.1. On considère une onde électromagnétique se propageant dans une région de l'espace vide de charges et de courants.

a. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique W en fonction des intensités des champs électrique et magnétique.

b. En utilisant les équations de Maxwell, montrer qu'on peut définir un vecteur \vec{J} tel que $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$. Que traduit cette équation ?

Soit \mathcal{D} un domaine de l'espace limité par une surface fermée (Σ) ; à l'aide de \vec{J} , exprimer l'énergie électromagnétique sortant de (Σ) par unité de temps.

2. L'onde envisagée ci-dessus est une onde plane homogène progressive monochromatique, se propageant selon Oz dans le sens de \vec{U}_z . Soit \vec{E}_0 l'amplitude du champ électrique de l'onde. On suppose $\vec{E}_0 = E_0 \vec{U}_x$.

a. Exprimer $\langle W \rangle$ en fonction de E_0 et ϵ_0 (permittivité diélectrique du vide).

b. Exprimer l'énergie électromagnétique moyenne traversant, par unité de temps, une portion de surface S d'un plan orthogonal à Oz, en fonction de E_0 , S , ϵ_0 , C (C étant la vitesse de la lumière dans le vide).

c. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie V_E .

Quelle relation y-a-t-il entre V_E , $\langle \vec{J} \rangle$, $\langle W \rangle$ et \vec{U}_z ?

II. Vecteur densité de courant d'énergie pour un fluide parfait

On considère ici un fluide parfait (c'est-à-dire non visqueux) de masse volumique $\rho(M, t)$. Soit $\vec{V}(M, t)$ le champ des vitesses. Dans toute la suite du problème, on néglige les forces de pesanteur devant les forces de pression ; on néglige aussi tout échange de

chaleur entre les parties du fluide et avec l'extérieur ; les mouvements sont supposés isentropiques.

1.a. Ecrire l'équation traduisant la conservation locale de la masse du fluide.

b. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour une "particule" de fluide (équation d'Euler).

2. Soient u , h , s respectivement l'énergie interne, l'enthalpie, l'entropie de l'unité de masse du fluide, P , T la pression et la température.

a. Quelle relation y-a-t-il entre h , u , P , ρ ?

b. Pour un fluide quelconque, écrire les différentielles du, dh , en fonction de T , ρ , ds , $d\rho$, dP .

c. Montrer que pour un écoulement isentropique $\overrightarrow{\text{grad}} h = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P$.

d. Exprimer la densité volumique d'énergie totale du fluide (tenant compte du mouvement), W , en fonction de ρ , u , \vec{V} .

e. Montrer la relation $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$ où $\vec{J} = \rho \vec{V} \left(h + \frac{V^2}{2} \right)$.

Que représente J ? En quelle unité s'exprime $\|\vec{J}\|$?

III. Propagation d'ondes sonores dans un fluide parfait

Dans la suite du problème, on étudie la propagation dans le fluide du paragraphe II. de mouvements vibratoires de "petites" amplitudes (ondes sonores). En l'absence d'ondes sonores le fluide est en équilibre et est homogène. On notera avec un indice "0" les grandeurs relatives au fluide en équilibre : soient alors P_0, T_0, ρ_0 respectivement sa pression, sa température et sa masse volumique.

En présence de l'onde, ces grandeurs sont $P = P_0 + P'$, $T = T_0 + T'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$.

Les écarts P' , T' , ρ' causés par l'onde sont supposés faibles : $P' \ll P_0$, $T' \ll T_0$, $\rho' \ll \rho_0$.

Le champ des vitesses $\vec{V}(M, t)$ est irrotationnel et tel que $\|\vec{V}\|$ est petite devant la vitesse du son dans le fluide. On note φ le potentiel des vitesses.

Ainsi on considère P' , T' , ρ' , $\|\vec{V}\|$, φ comme des quantités du premier ordre.

1.a. Réécrire les équations des II.1.a. et II.1.b. en ne conservant que les termes d'ordre un.

b. Montrer que $P' = C^2 \rho'$ avec $C = \left[\left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho_0} \right)_{s_0} \right]^{\frac{1}{2}}$. En quelle unité s'exprime C ?

c. Exprimer P' en fonction de ρ_0 et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et montrer que φ est solution de l'équation

différentielle : $\Delta \varphi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ où $\Delta \varphi$ est le laplacien de φ .

2. Soit une onde sonore progressive plane de propagation selon Oz dans le sens de \vec{U}_z .

a. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation du III.1.c. pour une telle onde ?

Montrer que \vec{V} est colinéaire à \vec{U}_z . On posera $\vec{V} = V \vec{U}_z$. Comment appelle-t-on ce type d'onde ?

b. Exprimer P' , ρ' en fonction de ρ_0, C, V . Quelle condition doit vérifier V ?

c. Soient $\alpha_0 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0}$ coefficient de dilatation isobare du fluide et c_{p_0} la

chaleur massique à pression constante.

Exprimer $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{s_0}$ en fonction de $T_0, c_{p_0}, \alpha_0, \rho_0$.

En déduire l'écart de température T' dû à l'onde sonore en fonction de $T_0, \alpha_0, c_{p_0}, C, V$.

3. Applications numériques.

Le fluide est un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. Le rapport γ de la chaleur massique à pression constante à la chaleur massique à volume constant est constant et égal à 1,40. La constante R des gaz parfaits est égale à $8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. La valeur maximale de $\|\vec{V}\|$ est : $V_{\max} = 0,07 \text{ m.s}^{-1}$.

a. Exprimer $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$ en fonction de $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T$ et γ pour un fluide quelconque.

En déduire que $C = \left(\gamma \frac{R T_0}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$.

b. Calculer numériquement C et les écarts maxima relatifs : $\frac{P'}{P_0}, \frac{T'}{T_0}, \frac{\rho'}{\rho_0}$.

IV. Quelques aspects énergétiques liés à la propagation d'ondes sonores

On se place toujours dans les hypothèses des paragraphes **II.** et **III.**

1.a. Soit ρu la densité volumique d'énergie interne du fluide. Montrer que, au troisième ordre près en ρ' , on a : $\rho u = \rho_0 u_0 + \rho' h_0 + \frac{\rho'^2 C^2}{2 \rho_0}$, (u_0 étant l'énergie interne et h_0 l'enthalpie massique du fluide en équilibre).

b. Soit \mathcal{D} un domaine de l'espace contenu dans le fluide et limité par une surface fermée (Σ). Montrer qu'on peut calculer l'énergie moyenne de \mathcal{D} , liée à la présence de l'onde sonore, par l'intégrale suivante, étendue à \mathcal{D} : $\iiint_{\mathcal{D}} \left\langle \rho_0 \frac{V^2}{2} + \frac{C^2}{2 \rho_0} \rho'^2 \right\rangle d\tau$.

Ainsi $\rho_0 \frac{V^2}{2} + \frac{C^2}{2 \rho_0} \rho'^2$ représente la densité volumique "d'énergie sonore" W .

c. A l'aide du vecteur \vec{J} introduit au **II.2.a.**, montrer que la puissance sonore moyenne traversant (Σ) est égale à l'intégrale sur la surface (Σ) : $\oint \langle \rho' \vec{V} \rangle d\vec{S}$.

$d\vec{S} = dS \vec{n}$ où \vec{n} est unitaire, orienté vers l'extérieur de (Σ).

d. Calculer la puissance sonore moyenne traversant l'unité de surface d'un plan orthogonal à Oz pour l'onde considérée au **III.2.** qu'on supposera en outre monochromatique, et avec les valeurs numériques du **III.3.**

e. Pour l'onde plane du **III.2.** exprimer la densité volumique moyenne d'énergie sonore $\langle W \rangle$ en fonction de ρ_0 et $\langle V^2 \rangle$. Exprimer $\langle \vec{J} \rangle$ en fonction de $\rho_0, C, \langle V^2 \rangle, \vec{U}_z$.

A-t-on entre $\langle \vec{J} \rangle$ et $\langle W \rangle$ une relation semblable à celle vue au **I.2.c.** ?

Quelle est alors la vitesse de propagation de l'énergie sonore ?

2. Une onde sonore progressive, plane, homogène, monochromatique se propageant selon Oz dans le sens de \vec{U}_z arrive, sous incidence normale sur la surface de séparation (π) entre deux fluides illimités. Ceux-ci constituent les milieux notés (1) et (2) ; On note C_1, C_2, ρ_1, ρ_2 les vitesses du son et masses volumiques dans les milieux (1) et (2). L'onde incidente est réfléchiée dans le milieu (1) où le mouvement du fluide résulte de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchiée et est transmise dans le milieu (2). La surface de séparation (π), plane, constitue le plan xOy.

a. Toutes les ondes ayant même pulsation Ω et même direction de propagation Oz, exprimer les vecteurs d'onde des ondes incidente \vec{k}_1 , réfléchiée \vec{k}'_1 , et transmise \vec{k}_2 en fonction de $\Omega, C_1, C_2, \vec{U}_z$.

b. On écrit le potentiel des vitesses de l'onde incidente sous la forme :

$$\varphi_1(M, t) = \text{Re}\{A_1 e^{j(\Omega t - k_1 z)}\} \quad (\text{où } j^2 = -1).$$

Ecrire de même les potentiels des ondes réfléchiées et transmises.

c. Ecrire les conditions aux limites à la surface (π), permettant d'exprimer les amplitudes A'_1, A_2 des ondes réfléchiée et transmise, en fonction de A_1 . Exprimer alors A'_1 en fonction de A_1, ρ_1, ρ_2, C_1 et C_2 .

d. On définit le facteur de réflexion R par le rapport de la puissance moyenne de l'onde réfléchiée à la puissance moyenne de l'onde incidente traversant l'unité de surface du plan (π). Exprimer R en fonction de ρ_1, ρ_2, C_1, C_2 .

Peut-on avoir transmission totale ou réflexion totale de l'énergie sonore ?

e. Soient W_1 , la densité volumique de l'énergie sonore dans l'onde incidente, W'_1, W_2 , les mêmes grandeurs pour les ondes réfléchiée et transmise. En écrivant la conservation de l'énergie sonore, écrire la relation entre $\langle W_1 \rangle, \langle W'_1 \rangle, \langle W_2 \rangle, C_1, C_2$.

f. On définit la pression P_r exercée par l'onde sonore sur la surface de séparation (π) par la force moyenne exercée par l'onde sur (π) par unité de surface. Faire le bilan des quantités de mouvements échangées pendant une durée dt par une portion S de (π) avec les ondes incidente, réfléchiée et transmise. En déduire P_r en fonction de $\langle W_1 \rangle, \langle W'_1 \rangle, \langle W_2 \rangle$ puis en fonction de $\langle W_1 \rangle, R, C_1, C_2$.

g. On suppose qu'il y a réflexion totale. Pour le fluide du **III.3.** et avec les mêmes valeurs numériques, calculer la pression P_r exercée par l'onde sur la surface (π). Comparer P_r à l'écart maximal de pression dû à l'onde incidente, calculé au **III.3.b.**

CCP ; Durée : 3h

Corrigé

$$\text{I.1.a. } W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}.$$

$$\text{b.}\alpha. \text{ On a : } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ et } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\text{Introduisons le vecteur de Poynting : } \vec{J} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} ;$$

• coefficient de dilatation isobare

$$\operatorname{div} \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{-\vec{B}}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ;$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) ; \text{ on a bien } \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 .$$

β. Cette relation traduit la conservation de l'énergie électromagnétique :
en intégrant sur un volume \mathcal{D} de surface Σ :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{J} d\tau + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial t} d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} 0 d\tau .$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{D}} W d\tau \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}} W d\tau = -\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} .$$

La variation de l'énergie $\iiint_{\mathcal{D}} W d\tau$ est due à un flux d'énergie ;

l'énergie sortant de Σ par unité de temps est : $\oint_{\Sigma_{n_s}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$.

$$\mathbf{2.a.} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{z})} = E_0 \vec{U}_x e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} .$$

$$\vec{\nabla} \equiv -j\vec{k} \quad \text{avec} \quad \vec{k} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ k \end{cases} ; \operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 .$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \Rightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} .$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{k^2}{\omega^2} E^2 ; \text{ or } \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -j\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) = j\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} .$$

$$-j\vec{k} \cdot \underbrace{\vec{E} \vec{k}}_0 + j \frac{k^2}{\omega} E = j\omega \epsilon_0 \mu_0 E \Rightarrow \frac{k^2}{\omega^2} = \epsilon_0 \mu_0 .$$

$$\text{Finalement : } W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 \frac{E^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 .$$

$$\langle W \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{z}) ;$$

$$\langle W \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{z}) dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 .$$

$$\mathbf{b.} \quad \iint_S \vec{J} d\vec{S} = \vec{J} \cdot \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) \right) \cdot \vec{S} = \left(\frac{\vec{E}^2}{\mu_0} \frac{\vec{k}}{\omega} - \frac{\overrightarrow{\vec{E} \vec{k}}}{\mu_0 \omega} \right) \cdot \vec{S} .$$

$$\left\langle \iint_S \vec{J} d\vec{S} \right\rangle = \langle \vec{S} \rangle \vec{S} = \langle E^2 \rangle \frac{\vec{k} \vec{S}}{\mu_0 \omega} = \frac{1}{2} E_0^2 \frac{k S}{\mu_0 \omega} \quad \text{or} \quad \frac{k}{\omega} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{C} ;$$

$$\left\langle \iint_S \vec{J} d\vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \frac{S}{\mu_0 C} = \frac{1}{2} \epsilon_0 C E_0^2 S \quad \text{car} \quad \epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1 .$$

c. $\left\langle \iint_S \vec{J} d\vec{S} \right\rangle = \langle W \rangle V_E S$; par analogie avec le mouvement et la conservation des charges pour lesquelles $\vec{J} = \rho \vec{V}$ et $I_s = \rho V S$; on adopte en identifiant $V_E = C$

• *facteur de réflexion de puissance acoustique, pression exercée par l'onde acoustique*

$$\langle \vec{J} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 C \vec{U}_z \Rightarrow \langle \vec{J} \rangle = \langle W \rangle v_E \vec{U}_z.$$

II.1.a. $\text{div } \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$

b. $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} \right) = -\text{grad} P + \cancel{\rho \vec{g}}.$

2.a. $H = U + P V$ s'écrit pour l'unité de masse $h = u + P v$ avec $\rho v = 1 \Rightarrow h = u + \frac{P}{\rho}.$

b.α. $dU = dQ + dW = T dS - P dV$ pour un fluide s'écrit pour l'unité de masse :

$du = T ds - P dv$, or $\rho v = 1$, s'écrit : $dv = \frac{-d\rho}{\rho^2}$; $du = T ds + P \frac{d\rho}{\rho^2}.$

β. $dh = du + \frac{dP}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} d\rho = T ds + \frac{dP}{\rho}.$

c. Pour un écoulement isentropique $ds = 0 \Rightarrow dh = \frac{dP}{\rho} ;$

$dh = \text{grad } h \cdot d\vec{OM}$; $dP = \text{grad } P \cdot d\vec{OM} \Rightarrow \text{grad } h \cdot d\vec{OM} = \frac{\text{grad } P}{\rho} \cdot d\vec{OM} \quad \forall d\vec{OM}$
 $\Rightarrow \text{grad } h = \frac{\text{grad } P}{\rho}.$

d. Considérons l'écriture de $\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}$ transposée pour l'unité de masse :

$\vec{f}_m = -\text{grad } \epsilon_{\text{pot}_m}$ or $\vec{f}_m = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P = -\text{grad } h \Rightarrow$ on peut écrire $\epsilon_{\text{pot}_m} = h ;$

Et pour l'unité de masse, transposons $E_T = E_C + E_{\text{pot}} ;$

$\epsilon_{t_m} = h + \frac{1}{2} V^2$ pour l'unité de volume, de masse ρ : $W = \rho \epsilon_{t_m} = P + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 + \rho u.$

On néglige l'énergie potentielle de pesanteur.

e. Ecrivons la conservation de l'énergie $\iiint_{v_\Sigma} W d\tau = \mathcal{W}.$

La formule de Reynolds s'écrit : $0 = \frac{D\mathcal{W}}{Dt} = \iiint_{v_\Sigma} \frac{\partial W}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} W \vec{V} d\vec{S}.$

Relation de conservation analogue formellement à la conservation de la charge pour laquelle on sait :

$I_\Sigma = \frac{dQ_\Sigma}{dt} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ avec $\vec{j} = \rho \vec{V}$; $I_\Sigma = \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$; $\frac{dQ_\Sigma}{dt} = \iiint_{v_\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$

Moyennant l'analogie entre $\vec{J} = W \vec{V}$ et $\vec{j} = \rho \vec{V}$, on déduit donc de la conservation de l'énergie, l'équation locale :

$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$ avec $\vec{J} = W \vec{V} = \rho \vec{V} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 \right) = \rho \vec{V} \left(h + \frac{1}{2} V^2 \right).$

\vec{J} représente le vecteur densité de courant d'énergie, analogue formel au vecteur densité de courant pour les charges ou au vecteur de Poynting de la question I.

Unité de $\|\vec{J}\|$: W.m^{-2} .

III.1.a.α. $\rho \vec{V} = (\rho_0 + \rho') \vec{V} \sim \rho_0 \vec{V}$; $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t}$; **II.1.a.** s'écrit : $\rho_0 \text{div} \vec{V} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$,

soit $\rho_0 \Delta \varphi + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$.

β.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} P &= \overrightarrow{\text{grad}} (P_0 + P') = \overrightarrow{\text{grad}} P' \\ \rho \frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} &= (\rho_0 + \rho') \frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} = \rho_0 \frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} \end{aligned} \right\} \rho_0 \frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} P';$$

or, $\frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2$ si $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$.

Si $\vec{V} = a \vec{U}_x \cos(\omega t - kx)$; $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\omega a \vec{U}_x \sin(\omega t - kx)$; $V^2 = a^2 \cos^2(\omega t - kx)$;

$\frac{\partial(V^2)}{\partial x} = -2ka^2 \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx)$ est du 2^{ème} ordre (négligé) : on voit qu'on

peut négliger $\overrightarrow{\text{grad}} V^2$, V^2 étant du 2^{ème} ordre comme $\overrightarrow{\text{grad}} V^2$.

$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P'$ ou $\rho_0 \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P'$.

b.α. Interprétons ρ' et P' comme des variations : $\rho' = d\rho$.

$P' = dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho ds$, en considérant P comme fonction de 2 variables

indépendantes ; $\left(\frac{\partial (P_0 + P')}{\partial (\rho_0 + \rho')} \right)_s \sim \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s_0}$.

Pendant les variations mécaniques rapides, l'hypothèse isentropique est vérifiée, et :

$P' = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s_0} \rho'$, soit de la forme $P' = C^2 \rho'$ avec $C = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s_0}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho_0} \right)_{s_0}^{\frac{1}{2}}$.

β. Unité de $C = \left(\frac{\text{unité de } P}{\text{unité de } \rho'} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\text{kg.m.s}^{-2} / \text{m}^2}{\text{kg} / \text{m}^3} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{m.s}^{-1}$.

c.α. $-\overrightarrow{\text{grad}} P' = \rho_0 \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow P' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + K$;

en absence d'onde sonore : $\vec{V} = 0 \Rightarrow P' = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow K = 0$.

$P' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow \rho' = -\frac{\rho_0}{C^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

β. Remplaçons ρ' dans $\rho_0 \Delta \varphi + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$, $\rho_0 \Delta \varphi - \frac{\rho_0}{C^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$

$$\Rightarrow \Delta \varphi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

$$\mathbf{2.a.\alpha.} \quad \varphi = \varphi\left(t - \frac{z}{C}\right), \varphi \text{ quelconque ; on pose } u = t - \frac{z}{C}.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d\varphi}{du} \left(-\frac{1}{C}\right) \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{V} = V(u) \vec{U}_z$$

$$\vec{V} = V\left(t - \frac{z}{C}\right) \vec{U}_z \text{ avec } V(u) = -\frac{1}{C} \frac{d\varphi}{du}.$$

γ . On a une onde plane progressive longitudinale : \vec{V} selon \vec{U}_z direction de propagation.

$$\mathbf{b.\alpha.} \quad V u \quad \mathbf{1.c.\alpha.} \quad P' = -\rho_0 \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 C V.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad \rho' = \frac{P'}{C^2} = \frac{\rho_0}{C} V.$$

$$\mathbf{\gamma.} \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}.$$

$$\mathbf{c.\alpha.} \quad \text{Pour un fluide : } dS = mc_p \frac{dT}{T} + k \frac{dP}{T} \text{ avec } k = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

$$\text{Pour l'unité de masse : } ds = c_p \frac{dT}{T} - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{dP}{T} \text{ or } \rho v = 1, \text{ d'où}$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dP.$$

$$\text{à } s \text{ constant, } ds = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s = -\frac{T}{c_{p_0} \rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \text{ et vu } P', T', \rho' \text{ petits:}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{s_0} = \frac{-T_0}{c_{p_0} \rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0} = \frac{T_0 \alpha_0}{c_{p_0} \rho_0}.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad dT = T' = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s dP + \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p ds;$$

cf. T fonction de 2 variables indépendantes ;

$$\text{or, } ds = 0, dP = P'; T' = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s P' \Rightarrow T' = \frac{T_0 \alpha_0}{c_{p_0} \rho_0} \rho_0 C V = \frac{T_0 \alpha_0}{c_{p_0}} C V.$$

$$\mathbf{3.a.\alpha.} \quad PV = \frac{m}{M} RT \text{ s'écrit pour un système de masse } dm : PdV = \frac{dm}{M} RT, \text{ soit :}$$

$$P = \frac{\rho RT}{M}; \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \frac{RT}{M};$$

une détente adiabatique réversible (isentropique) satisfait à $PV^\gamma = \text{cste}$, soit ici à

$$P\rho^{-\gamma} = \text{cste} \Rightarrow \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \frac{RT}{M} = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T.$$

$$\beta. C = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s_0}^{\frac{1}{2}} = \left(\gamma \frac{RT_0}{M} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

b.α. AN : $C = 347,1 \text{ ms}^{-1}$.

$$\beta. \frac{P'_{\max}}{P_0} = \frac{\rho_0}{P_0} C V_{\max} = \frac{M}{RT_0} V_{\max} \left(\frac{\gamma RT_0}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ AN : } \frac{P'_M}{P_0} = 2,8 \cdot 10^{-4}.$$

$$\gamma. \frac{T'_{\max}}{T_0} = \frac{\alpha_0}{c_{p_0}} C V_{\max} = \frac{\alpha_0}{c_{p_0}} V_{\max} \left(\frac{\gamma RT_0}{M} \right)^{\frac{1}{2}} ; \text{ or, } \rho = \frac{MP}{RT} \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = -\frac{MP}{RT^2} ;$$

$$\text{or } \alpha = \frac{-(-MP)}{\frac{MP}{RT} RT^2} = \frac{1}{T} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{T_0} ; c_p - c_v = \frac{R}{M} = c_p \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \Rightarrow c_p = \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

$$\frac{T'_{\max}}{T_0} = \frac{M(\gamma - 1)}{R\gamma T_0} V_{\max} \left(\frac{\gamma RT_0}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ AN : } \frac{T'_M}{T_0} = 8 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta. \frac{\rho'_{\max}}{\rho_0} = \frac{V_{\max}}{C} = V_{\max} \left(\frac{M}{\gamma RT_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ AN : } \frac{\rho'_{\max}}{\rho_0} = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Tous ces écarts sont très petits et valident la méthode utilisée (dite des perturbations du 1^{er} ordre).

IV.1.a. $du = T ds - P dv$ or $ds = 0$ et $\rho v = 1 \Rightarrow du = P \frac{d\rho}{\rho^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s = \frac{P}{\rho^2}.$

Posons $f(\rho, s) = \rho u$ et développons à s constant avec $\rho' = \rho - \rho_0$:

$$f(\rho, s) = f(\rho_0, s) + (\rho - \rho_0) \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, s) \right) + \frac{1}{2} (\rho - \rho_0)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho_0, s) \right) + \dots$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right)_s = u + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s = u + \frac{P}{\rho} = h \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, s) = h_0 ;$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right)_s = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \frac{C^2}{\rho} \text{ (vu II.2.b. et III.1.b.) ; } \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\rho_0, s) = \frac{C^2}{\rho_0}.$$

$$\rho u = \rho_0 u_0 + \rho' h_0 + \frac{\rho'^2}{2} \frac{C^2}{\rho_0}.$$

b.α Rappelons $W_T = \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho u + P$; on remplace chaque terme :

$$W_T = P_0 + P' + \frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \overbrace{\frac{1}{2} \rho' V^2}^{\text{à négliger car d'ordre 3}} + \rho_0 u_0 + \rho' h_0 + \frac{\rho'^2}{2} \frac{C^2}{\rho_0} + o(\rho'^3) ;$$

• Laplace (formules isentropiques de), perturbations (méthode des)

$$W_T = (P_0 + \rho_0 u_0) + \left(P' + \frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \rho' h_0 + \frac{\rho'^2 C^2}{2\rho_0} \right) + o(\rho'^3) \text{ de la forme :}$$

$$W_T = W_0 + W_1 ; W_1 \text{ lié à la présence de l'onde sonore.}$$

β. Rappelons la conservation de la masse.

$$m = \iiint_D (\rho_0 + \rho') d\tau = \iiint_D \rho_0 d\tau \Rightarrow \iiint_D \rho' d\tau = 0 \text{ or } P' = C^2 \rho' \Rightarrow \iiint_D P' d\tau = 0.$$

Cela permet la réduction à 2 intégrales de :

$$\iiint_D W_1 d\tau = \iiint_D \left(\frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \frac{\rho'^2 C^2}{2\rho_0} \right) d\tau = \iiint_D W d\tau \text{ avec } W = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \frac{\rho'^2 C^2}{2\rho_0};$$

W densité d'énergie sonore utile ; on a, en moyenne, en interchangeant l'ordre des intégrations temporelle et spatiale : $\left\langle \iiint_D W d\tau \right\rangle = \iiint_D \left\langle \frac{\rho_0}{2} V^2 + \frac{C^2}{2\rho_0} \rho'^2 \right\rangle d\tau.$

c. En prenant le formalisme du **II.2.e.**, la conservation de l'énergie associée à W s'écrit : $\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \frac{\rho'^2 C^2}{2\rho_0} \right) d\tau + \iint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$; en utilisant les formules du début de l'énoncé et les relations de la mécanique des fluides de **II.** et de l'acoustique de **III.** cf. C^2 ;

$$\text{Soit } \iiint_D \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \vec{V} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} \frac{\rho'}{\rho_0} C^2 \right) d\tau = - \iiint_D \left(\overrightarrow{\text{grad}} P' \cdot \vec{V} + \rho_0 \frac{\text{div} \vec{V}}{\rho_0} \rho' C^2 \right) d\tau.$$

$$- \iiint_D \left(\overrightarrow{\text{grad}} \rho' \cdot \vec{V} + \text{div} \vec{V} \cdot \frac{\rho'}{C^2} \right) C^2 d\tau = - \iiint_D \text{div} (\rho' \vec{V}) d\tau = - \iint_\Sigma \rho' \vec{V} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{J} = \rho' \vec{V}.$$

$$\text{Ainsi, } \left\langle \iint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{S} \right\rangle = \iint_\Sigma \left\langle \rho' \vec{V} \right\rangle \cdot d\vec{S}.$$

$$\text{d. Pour l'onde plane du III.2.: } \iint_{1m^2} \left\langle \rho' \vec{V} \right\rangle \cdot d\vec{S} = \left\langle \rho' V \right\rangle, \text{ or } \rho' = \rho_0 \frac{V}{C};$$

$$\left\langle \rho' V \right\rangle = \left\langle \rho_0 C V^2 \right\rangle = \rho_0 C^2 \left\langle V_{\max}^2 \cos^2(\omega t - k z) \right\rangle = \frac{M}{RT_0} P_0 \left(\frac{\gamma RT_0}{M} \right) \frac{V_{\max}^2}{2}$$

$$\text{A.N. : } \left\langle \rho' V \right\rangle = 0,99 \text{ W.m}^{-2}.$$

$$\text{e. } W = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \frac{1}{2} \frac{C^2 \rho'^2}{\rho_0} \text{ or } \rho' = \frac{\rho_0}{C} V \Rightarrow W = \rho_0 V^2.$$

$$\langle W \rangle = \rho_0 \langle V^2 \rangle.$$

$$\langle \vec{J} \rangle = \rho_0 C \langle V^2 \rangle \vec{U}_z \text{ vu IV.1.c et d. ; } \langle \vec{J} \rangle = C \langle W \rangle \vec{U}_z \text{ semblable à la réponse du I.2.c. ;}$$

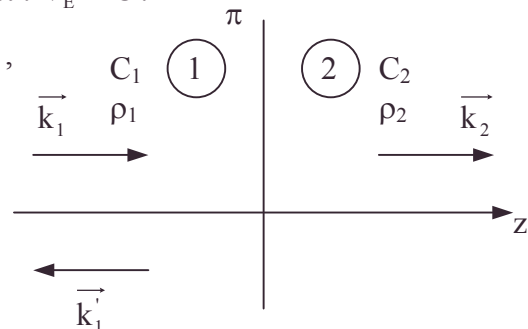
la vitesse de propagation de l'énergie sonore est : $v_E = C.$

$$\text{2.a. } \vec{k}_1 = \frac{\Omega}{C_1} \vec{U}_z ; \vec{k}'_1 = \frac{-\Omega}{C_1} \vec{U}_z ; \vec{k}_2 = \frac{\Omega}{C_2} \vec{U}_z ,$$

$$\text{avec } \vec{k}_1 = k_1 \vec{U}_z ; \vec{k}'_1 = -k_1 \vec{U}_z ; \vec{k}_2 = k_2 \vec{U}_z .$$

$$\text{b. } \varphi_1 = \text{Re} \left(A_1 e^{j(\Omega t + k_1 z)} \right) .$$

$$\varphi_2 = \text{Re} \left(A_2 e^{j(\Omega t - k_2 z)} \right) .$$



c. $\vec{V}_1 = \overrightarrow{\text{grad}} \phi_1$; $V_{1z} = -j \frac{\Omega}{C_1} A_1 e^{j(\Omega t - k_1 z)}$ en notation complexe.

$\vec{V}'_1 = \overrightarrow{\text{grad}} \phi'_1$; $V'_{1z} = j \frac{\Omega}{C_1} A'_1 e^{j(\Omega t + k'_1 z)}$.

$\vec{V}_2 = \overrightarrow{\text{grad}} \phi_2$; $V_{2z} = -j \frac{\Omega}{C_2} A_2 e^{j(\Omega t - k_2 z)}$.

Or, $\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$, pour chaque onde, $\Rightarrow j\rho\Omega V_z = -jk_z p$ soit $p = -\frac{\rho\Omega}{k_z} V = j\rho\Omega\phi$.

$p_1 = \rho_1\Omega jA_1 e^{j(\Omega t - k_1 z)}$; $p'_1 = \rho_1\Omega jA'_1 e^{j(\Omega t + k'_1 z)}$; $p_2 = \rho_2\Omega jA_2 e^{j(\Omega t - k_2 z)}$.

Vu la continuité du mouvement et des énergies volumiques associées ;

- Ecrivons la relation de continuité de p en $z = 0$: $p_1 + p'_1 = p_2$;

soit $\rho_1 A_1 + \rho_1 A'_1 = \rho_2 A_2$.

- Ecrivons la relation de continuité de V en $z = 0$: $V_{1z} + V'_{1z} = V_{2z}$.

soit : $\frac{-A_1}{C_1} + \frac{A'_1}{C_1} = \frac{-A_2}{C_2}$; on en déduit : $A'_1 = A_1 \frac{\rho_2 C_2 - \rho_1 C_1}{\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2}$.

d. $R = \frac{\langle J_1 \rangle}{\langle J_1 \rangle} = \frac{\rho_1 C_1 \langle V_{1z}^2 \rangle}{\rho_1 C_1 \langle V_{1z}^2 \rangle} = \left| \frac{A'_1}{A_1} \right|^2 = \left(\frac{\rho_2 C_2 - \rho_1 C_1}{\rho_2 C_2 + \rho_1 C_1} \right)^2$.

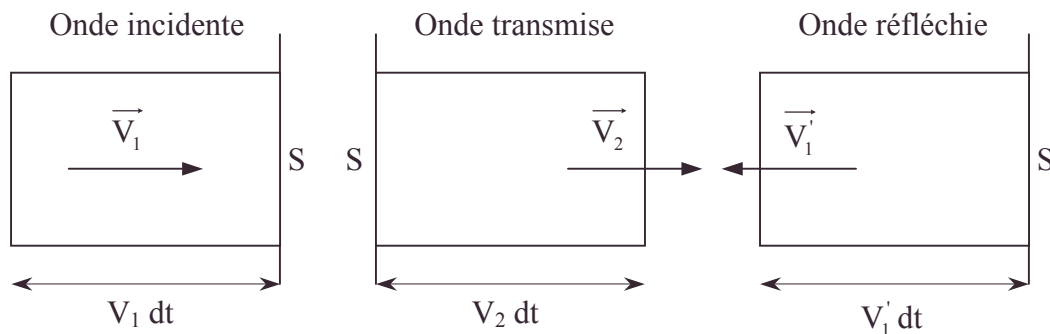
On a transmission totale pour $R = 0$, si $\rho_1 C_1 = \rho_2 C_2$.

On a réflexion totale $R = 1$ si $\rho_2 C_2 \gg \rho_1 C_1$ ou $\rho_1 C_1 \gg \rho_2 C_2$.

e. La conservation de la puissance sonore s'écrit : $|J_1| = |J_1| + |J_2|$, soit :

$C_1 \langle W_1 \rangle = C_1 \langle W'_1 \rangle + C_2 \langle W_2 \rangle \Rightarrow \langle W_2 \rangle = \frac{C_1}{C_2} (1 - R) \langle W_1 \rangle$.

f. Faisons le bilan des quantités de mouvement à travers S



Pour chaque figure : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ s'écrit ici $PS = \pm \left\langle \frac{\rho S V dt V}{dt} \right\rangle$; $P = \pm \langle W \rangle$;

en adaptant le signe à la figure

$P_r = \left\langle \underbrace{\rho_1 V_1^2}_{\text{poussée}} + \underbrace{\rho'_1 V_1'^2}_{\text{cf. réaction}} - \underbrace{\rho_2 V_2^2}_{\text{cf. réaction}} \right\rangle = \langle W_1 \rangle + \langle W'_1 \rangle - \langle W_2 \rangle = \langle W_1 \rangle (1 + R) - \frac{C_1}{C_2} (1 - R) \langle W_1 \rangle$

$P_r = \langle W_1 \rangle \left[\left(1 - \frac{C_1}{C_2} \right) + R \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \right]$.

- coefficient de réflexion de la puissance sonore, relations de continuité en acoustique

$$\mathbf{g} \cdot \langle W_2 \rangle = 0 ; \langle W_1 \rangle = \langle W_1' \rangle ;$$

$$P_r = 2 \langle W_1 \rangle = 2 \rho_1 \langle V_1^2 \rangle = \rho_1 A_1^2 = \rho_1 V_{\max}^2$$

$$\text{or } P_{\max}^i = \rho_1 V_{\max}^2 \Rightarrow P_r = P_{\max}^i .$$

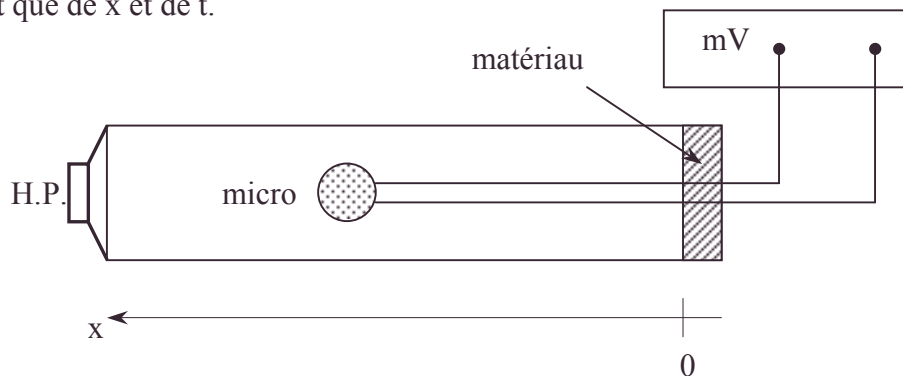
7.3.2. Onde sonore dans un tube de Kundt Mesure de l'impédance acoustique d'une mousse déphaseuse, revêtement mural

La plus grande importance sera attachée à la présentation et à la rédaction. Seuls seront corrigés les résultats encadrés répondant explicitement à la (ou les) question(s) posée(s), exprimé(s) avec les notations strictes de l'énoncé, sous leur forme la plus simple, en tenant compte de l'esprit de la question.

Ce sujet concerne la propagation d'une onde sonore dans un tuyau. Il est fondé sur une étude expérimentale qui permet la mesure de la vitesse du son dans le tuyau, le coefficient de réflexion d'un matériau et l'impédance acoustique correspondante.

Les parties **A**, **B** et **C** sont très largement indépendantes.

On considère un tuyau horizontal, cylindrique, d'axe Ox , de section S , rempli d'air assimilé à un gaz parfait de masse molaire M , de masse volumique ρ_0 dans les conditions de l'expérience, à la température $\theta = 18^\circ\text{C}$ et dans un état non perturbé. La longueur du tuyau est $L = 1,45 \text{ m}$. A l'une des extrémités ($x = L$) est placé un haut-parleur associé à un générateur basse fréquence. L'ensemble délivre un signal sinusoïdal. A l'autre extrémité ($x = 0$) on peut placer un matériau plus ou moins absorbant. Un microphone mobile, relié à un millivoltmètre, peut se déplacer à l'intérieur du tuyau et ne perturbe pas les phénomènes étudiés. Une règle graduée permet de déterminer sa position. On suppose que les grandeurs vibratoires ne dépendent que de x et de t .



A. Éléments de théorie

Dans un plan (P) d'abscisse x , la pression totale P_T peut se mettre sous la forme $P_T = P_s + p(x, t)$; P_s est la pression statique et $p(x, t)$ est la surpression acoustique,

$$\text{solution de l'équation : } \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\gamma \frac{P_s}{\rho_0}} \text{ et } \gamma = \frac{c_p}{c_v} .$$

1.a. Pourquoi dit-on que l'onde est plane ?

b. Quelles sont les conditions de validité de l'équation précédente ?

2.a. Que représente la grandeur c ?

b. Pourquoi le coefficient γ intervient-il ?

c. Déterminer l'expression de c en fonction de la température absolue T pour un gaz parfait de masse molaire M .

3. Pour l'air assimilé à un gaz parfait, $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

a. Comment obtient-on la valeur numérique de M ?

b. Calculer numériquement c à $\theta = 18^\circ\text{C}$. comparer cette vitesse à celle du son dans un solide ou un liquide.

On prendra pour R , constante des gaz parfaits, $R = 8,32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$, et pour γ , égal à $\frac{c_p}{c_v}$, $\gamma = 7/5$.

L'onde acoustique correspond à une vibration des molécules d'air autour de leurs positions moyennes. On appelle $u(x,t)$ la vitesse correspondante. Les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ sont liées par la relation : $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}$.

4. Quelle est l'origine (sans démonstration) de cette équation ?

5. La solution de l'équation de propagation et le dispositif étudié permettent d'écrire $p(x,t)$ sous la forme (en notation complexe) :

$$\underline{p}(x,t) = \underline{p}_1 e^{j(\omega t + kx)} + \underline{p}_2 e^{j(\omega t - kx)} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}.$$

a. Quelle est la signification de chacun des termes $\underline{p}_1 e^{j(\omega t + kx)}$ et $\underline{p}_2 e^{j(\omega t - kx)}$?

b. Comment s'écrit alors $\underline{u}(x,t)$?

B. Détermination expérimentale de γ et c

Dans cette partie, l'expérimentateur a placé en $x = 0$ une plaque métallique rigide en aluminium. Le microphone délivre une tension V proportionnelle à $(\langle p^2(x,t) \rangle)^{\frac{1}{2}}$, où le symbole $\langle \rangle$ représente la valeur moyenne dans le temps, soit $V = K(\langle p^2(x,t) \rangle)^{\frac{1}{2}}$.

L'expérimentateur se dit qu'en tout point du tuyau il y a superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchiée et que la fonction $p(x,t)$ proposée en A.5. lui convient.

1. Quelle condition sur u , l'obstacle, supposé parfaitement rigide, impose-t-il en $x = 0$?

2. Quelle est alors l'expression de $\underline{p}(x,t)$? on exprimera le résultat en fonction de \underline{p}_1 .

3. L'expérimentateur se propose de vérifier sa théorie et réalise les trois expériences suivantes dont les résultats sont consignés dans le tableau I. Il a pris soin de rechercher la position x_1 du premier minimum de tension rencontré à partir de $x = 0$ ainsi que celle x_i du $i^{\text{ème}}$. Il remarque au passage que les valeurs lues sur le voltmètre pour ces minima sont quasi nulles.

f en Hz	x_1 en cm	x_i en cm	i
300	32,0	89,0	2
500	17,7	120,0	4
988	8,0	112,0	7

Tableau I

a. Déterminer la relation qui permet de calculer λ (longueur d'onde) en fonction de x_1 , x_i et i .

Attention : la valeur de x_1 seule ne permet pas de déterminer correctement λ .

b. Calculer, à partir des données expérimentales, les valeurs de λ , c et γ pour chaque fréquence (on donnera les résultats sous forme d'un tableau).

c. La valeur de γ obtenue correspond-elle à la valeur théorique ? Justifier.

• microphone mobile relié à un millivoltmètre [mesure acoustique], mousse déphaseuse de sons, pression exercée par l'onde acoustique quand réflexion totale, revêtement mural d'insonorisation [Acoustique], suppression acoustique, tube de Kundt [Acoustique]

d. Quelle hypothèse, émise lors de l'élaboration de l'équation de propagation, se trouve confortée par les résultats de cette expérience ?

4. Le microphone étant en $x = 0$, l'expérimentateur, très observateur, remarque que les indications du voltmètre passent par des valeurs maximales beaucoup plus importantes pour certaines fréquences dont il relève quelques valeurs : 355 Hz, 472 Hz et 590 Hz.

Quelles explications physiques simples permettent de retrouver ces résultats ?
Y-a-t-il contradiction avec le fait que c'est le déplacement de la membrane qui génère les ondes ?

C. Etude d'un matériau

L'expérimentateur place maintenant en $x = 0$ un matériau de type "mousse". Il définit, pour le matériau, un coefficient de réflexion complexe $\underline{R}' = R'e^{j\phi}$. Le but de cette nouvelle expérience est de déterminer $|\underline{R}'|$, ϕ et l'impédance acoustique en $x = 0$.

En utilisant l'expression de $p(x,t)$ donnée en A.5., $\underline{p}(x,t) = \underline{p}_1(x,t) + \underline{p}_2(x,t)$, \underline{R}' est défini par : $\underline{R}' = \frac{\underline{p}_2(0,t)}{\underline{p}_1(0,t)} = R'e^{j\phi}$.

1. Quelle est l'expression générale de $\underline{p}(x,t)$ en fonction de \underline{p}_1 (amplitude complexe de $\underline{p}_1(x,t)$), de R' et de ϕ ?

2. Montrer que le microphone délivre une tension V de la forme :

$$V = K\sqrt{1 + R'^2 + 2R'\cos(2kx - \phi)}.$$

3. L'expérimentateur réalise alors plusieurs expériences dont les résultats sont consignés dans le tableau II. Il prend soin de rechercher la position x_1 du premier minimum de tension rencontré à partir de $x = 0$ ainsi que celle x_i du $i^{\text{ème}}$ minimum.

Les valeurs lues sur le voltmètre V_{\min} et V_{\max} correspondent aux valeurs minimales et maximales de tension.

f en Hz	x_1 en cm	x_i en cm	i	V_{\min} (mV)	V_{\max} (mV)
460	26,6	101,5	3	1,50	6,80
750	13,2	58,8	3	1,10	5,40
845	10,6	51,1	3	1,25	6,30
1016	8,0	41,7	3	0,80	4,05
1042	7,3	40,1	3	1,60	8,35
1185	5,5	49,0	4	0,80	3,95
1400	3,7	28,1	3	1,00	5,05

Tableau II

a. On pose $\alpha = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$; déterminer l'expression de R' en fonction de α .

b. Déterminer l'expression de ϕ en fonction de x_1 et λ .

c. Calculer pour chaque fréquence, les valeurs R' et ϕ . (On donnera les résultats sous forme d'un tableau). Commenter les résultats obtenus.

On définit l'impédance acoustique $\underline{Z} = \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{u}(x,t)}$.

4. En $x = 0$, l'impédance acoustique locale $\underline{Z}(0)$ est fixée par le matériau.

a. Donner l'expression de $\underline{Z}(0)$ en fonction de ρ_0 , c et \underline{R}' .

b. On appelle impédance réduite $\underline{Z}'(0)$ le rapport $\frac{\underline{Z}(0)}{-\rho_0 c}$;

déterminer en fonction de R' et ϕ les expressions des parties réelle $\text{Re}(\underline{Z}'(0))$ et imaginaire $\text{Im}(\underline{Z}'(0))$ de $\underline{Z}'(0)$.

c. Calculer pour chaque fréquence $\text{Re}(\underline{Z}'(0))$ et $\text{Im}(\underline{Z}'(0))$.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

A.1.a. On dit que l'onde de surpression, le son, est une onde plane car en tout point d'un plan défini par x la surpression est la même à un instant donné.

b. C'est le cadre de l'acoustique linéarisée : $p \ll P_s$ associée à de faibles vitesses de déplacement de l'air.

2.a. C'est la valeur de la célérité du son.

b. La formule résulte de l'hypothèse d'une évolution adiabatique quasi statique de gaz parfait : $P\rho^{-\gamma}$ constant où γ intervient.

$$\text{c. } PV = \frac{m}{M}RT \text{ s'écrit } \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

3.a. M est la masse d'une mole d'un mélange gazeux composé de 0,8 mole de N_2 et de 0,2 mole de O_2 (abstraction faite des gaz rares).

$$M = 0,8 \cdot 14 \cdot 2 + 0,2 \cdot 16 \cdot 2 = 28,8 \text{ g.mol}^{-1}.$$

$$\text{b. } T = 291 \text{ K} ; M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} ; \text{A.N. : } c = 342 \text{ m.s}^{-1}.$$

On sait que $c_{\text{air}} < c_{\text{liquide}} < c_{\text{solide}}$; exemples : $c_{\text{eau}} = 1500 \text{ m.s}^{-1}$; $c_{\text{acier}} = 5000 \text{ m.s}^{-1}$.

4. Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire les équations d'Euler :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} p \text{ (avec } \vec{g} = \vec{0} \text{) ce qui permet d'écrire après linéarisation et projection}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

5.a.α. $p_1 e^{j(\omega t + kx)}$ représente une onde sonore plane, harmonique incidente émise par le haut-parleur, se déplaçant dans le sens des x décroissant.

β. $p_2 e^{j(\omega t - kx)}$ représente une onde sonore plane harmonique réfléchie par le matériau, se déplaçant dans le sens des x croissant.

$$\text{b. } \frac{\partial p}{\partial x} = jk p_1 e^{j(\omega t + kx)} - jk p_2 e^{j(\omega t - kx)} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\underline{u} = -\frac{jk}{j\omega\rho_0} p_1 e^{j(\omega t + kx)} + \frac{jk}{j\omega\rho_0} p_2 e^{j(\omega t - kx)} + 0 \text{ (cf. cas } p_1 = 0, p_2 = 0 \text{)}.$$

$$\text{or } \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p}{dt^2} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} ;$$

$$\underline{u} = -\frac{p_1 e^{j(\omega t + kx)}}{\rho_0 c} + \frac{p_2 e^{j(\omega t - kx)}}{\rho_0 c}.$$

B.1. Le contact indéfectible air-métal impose pour l'air $u = 0$ car le métal rigide ne se déforme pas ni ne se déplace.

2. Reportons cette valeur nulle dans l'expression de \underline{u} , pour $x = 0$.

$$-\frac{p_1}{\rho_0 c} e^{j\omega t} + \frac{p_2}{\rho_0 c} e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow p = p_1 (e^{j(\omega t + kx)} + e^{j(\omega t - kx)}) = 2p_1 e^{j\omega t} \cos kx.$$

3.a. Minimum de pression donc de tension : $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0 \Rightarrow \frac{2\pi x_i}{\lambda} = (2i-1) \frac{\pi}{2}$ (i tel que $x_i = (2i-1) \frac{\lambda}{4}$, i tel que le premier minimum soit pour i = 1.

Si on avait utilisé l'expression $(2j+1) \frac{\pi}{2}$, le premier minimum correspondrait à j = 0.

$$x_1 = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_i - x_1 = (i-1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{i-1} (x_i - x_1).$$

b. On sait que $\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow c = \lambda f = 2f \frac{(x_i - x_1)}{i-1}$;

Par ailleurs $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \Rightarrow \gamma = \frac{Mc^2}{RT} \Rightarrow$ avec $M = 29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$ et $T = 291 \text{ K}$.

$$\gamma = \frac{4M}{RT} f^2 \frac{(x_i - x_1)^2}{(i-1)^2}.$$

f (en Hz)	λ (en cm)	c (en m.s ⁻¹)	γ (sans dimension)
300	114,0	342,0	1,400
500	68,2	341,0	1,392
988	34,7	342,5	1,401

c. Les valeurs obtenues sont proches de la valeur adoptée à moins de 1 % près. Les mesures de position, de fréquence, de température ont des incertitudes qui devraient justifier cette dispersion.

d. L'hypothèse de la loi de Laplace $Pp^{-\gamma} = \text{cte}$ est donc vérifiée ; l'évolution est isentropique (adiabatique réversible).

4. Ces résonances correspondent à des modes propres de ce tube de Kundt. Faisons l'hypothèse d'un tube fermé à ses deux extrémités :

$$L = n \frac{\lambda}{2} = \frac{nc}{2f_n} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2L} \Rightarrow n = \frac{f_n}{\frac{c}{2L}}.$$

A.N. : $L = 1,45 \text{ m}$, $c = 342 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow \frac{c}{2L} = 117,9 \text{ Hz}$.

$$f_{n_1} = 355 \text{ Hz} \Rightarrow n_1 = 3 ; \quad f_{n_2} = 472 \text{ Hz} \Rightarrow n_2 = 4 ; \quad f_{n_3} = 590 \text{ Hz} \Rightarrow n_3 = 5.$$

On peut adopter l'hypothèse de résonance pour un tube fermé aux deux extrémités. Les faibles déplacements du haut-parleur sont comparables aux faibles déplacements d'un vibreur excitateur de corde vibrante. On peut considérer ce point d'excitation comme un nœud de vitesse de déplacement et un ventre de surpression (cf. excitation du clairon, trompette etc...). Par analogie, on comprend l'absence de contradiction formelle.

C.1. $p(x, t) = \underline{p}_1 e^{j(\omega t + kn)} + \underline{p}_2 e^{j(\omega t - kx)}.$

$$\underline{p}_1 e^{j\omega t} = p_1(0, t) ; \quad \underline{p}_2 e^{j\omega t} = p_2(0, t).$$

$$R' e^{j\phi} = \frac{p_2(0, t)}{p_1(0, t)} = \frac{\underline{p}_2}{\underline{p}_1} \Rightarrow \underline{p}_2 = \underline{p}_1 R' e^{j\phi}.$$

$$p(x, t) = \underline{p}_1 e^{j(\omega t + kx)} + \underline{p}_1 R' e^{j(\omega t + \phi - kx)} = \underline{p}_1 e^{j\omega t} (e^{jkx} + R' e^{j(\phi - kx)})$$

2. La tension est supposée proportionnelle à la surpression quadratique moyenne

$$pp^* = \underline{p}_1 \underline{p}_1^* \left(e^{jkx} + R' e^{j(\phi - kx)} \right) \left(e^{-jkx} + R' e^{-j(\phi - kx)} \right) = \underline{p}_1 \underline{p}_1^* \left[1 + R'^2 + 2R' \cos(2kx - \phi) \right].$$

$$\Rightarrow V = K_1 \sqrt{1 + R'^2 + 2R' \cos(2kx - \phi)}.$$

$$3. V_{\max} = K_1 (1 + R') \quad \text{pour } \cos(2kx - \phi) = 1;$$

$$V_{\min} = K_1 (1 - R') \quad \text{pour } \cos(2kx - \phi) = -1.$$

$$a. \alpha = \frac{1 + R'}{1 - R'} \Rightarrow R' = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}; R' = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}}.$$

$$b. \text{ Les minima de tension sont tels que } \cos(2kx_i - \phi) = -1.$$

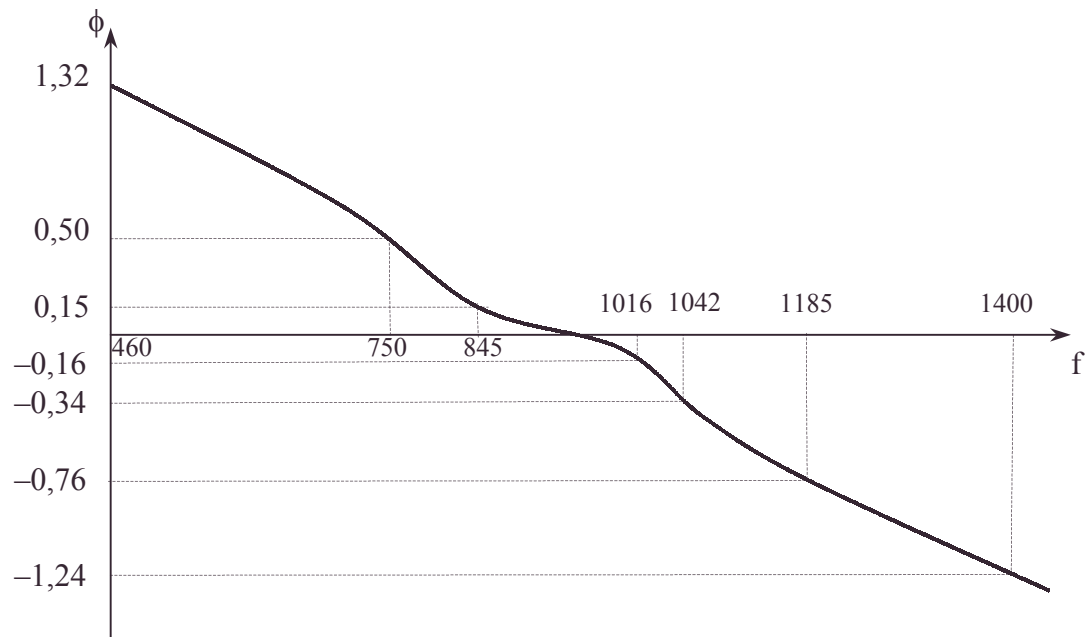
$$\frac{4\pi x_i}{\lambda} - \phi = (2i - 1)\pi; \text{ pour } i = 1: \frac{4\pi x_1}{\lambda} - \phi = \pi \Rightarrow \phi = \pi \left(\frac{4x_1}{\lambda} - 1 \right).$$

$$c. \Rightarrow \frac{4\pi}{\lambda} (x_i - x_1) = 2(i - 1)\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2(x_i - x_1)}{i - 1} \Rightarrow \phi = \pi \left(\frac{2x_1(i - 1)}{(x_i - x_1)} - 1 \right);$$

$$i = 1 \text{ excepté. On rappelle : } \alpha = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}; R' = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1};$$

Cas	f en Hz	λ en cm	ϕ en rad	α	R'	$\text{Re}(\underline{Z}'(0))$	$\text{Im}(\underline{Z}'(0))$
1	460	74,9	1,32	4,53	0,68	0,48	1,17
2	750	45,6	0,50	4,91	0,67	2,04	2,45
3	845	40,5	0,15	5,04	0,67	4,68	1,77
4	1016	33,7	-0,16	5,06	0,67	4,57	-1,85
5	1042	32,8	-0,34	5,22	0,68	3,03	-2,55
6	1185	29,0	-0,76	4,94	0,66	1,13	-1,98
7	1400	24,4	-1,24	5,05	0,67	0,53	-1,26

R' est constant ; ϕ varie avec f (cf. déphaseur).



Dans le domaine de fréquence étudié des voix humaines, tout signal réfléchi complexe se verra déformé par le biais de la phase et sera incompréhensible.

$$4.a. \underline{p}(0, t) = \underline{p}_1 e^{j\omega t} (1 + \underline{R}').$$

- impédance acoustique complexe

Vu A.5., $\underline{u}(x, t) = -\frac{p_1}{\rho_0 c} e^{j\omega t} (e^{jkx} - \underline{R}' e^{j(\phi - kx)})$.

$$\underline{u}(0, t) = \frac{p_1}{\rho_0 c} e^{j\omega t} (-1 + \underline{R}') \Rightarrow \underline{Z}(0) = \frac{p(0, t)}{\underline{u}(0, t)} = \rho_0 c \frac{(\underline{R}' + 1)}{(\underline{R}' - 1)}.$$

$$\text{b. } \underline{Z}'(0) = \frac{\underline{R}' + 1}{-\underline{R}' + 1} = \frac{R' e^{j\phi} + 1}{-R' e^{j\phi} + 1} = \frac{(R' e^{j\phi} + 1)(-R' e^{-j\phi} + 1)}{(-R' e^{j\phi} + 1)(-R' e^{-j\phi} + 1)} = \frac{1 - R'^2 + 2jR' \sin \phi}{R'^2 + 1 - 2R' \cos \phi}.$$

$$\text{Re}(\underline{Z}'(0)) = \frac{1 - R'^2}{1 + R'^2 - 2R' \cos \phi}; \quad \text{Im}(\underline{Z}'(0)) = \frac{2R' \sin \phi}{1 + R'^2 - 2R' \cos \phi}.$$

c. Voir tableau précédent.

7.3.3. Acoustique des milieux continus

I. Propagation d'ondes mécaniques dans un milieu fluide isotrope

1. Montrer que la résultante des forces de pression qu'exerce un fluide sur un parallélépipède de volume $d\tau$ est $\overrightarrow{df_p} = -\overrightarrow{\text{grad}} P \cdot d\tau$.

2. Rappeler la définition de la compressibilité adiabatique d'un fluide χ_a .
On se propose d'étudier la propagation unidimensionnelle du son dans un fluide de masse volumique ρ . Soit $s(x, t)$ l'abscisse d'une section de fluide par rapport à sa position au repos repérée par x .

3. Montrer que $\chi_a = -\frac{1}{p} \frac{\partial s}{\partial x}$ où p désigne la surpression due à l'onde.

4. En déduire une équation de propagation en s faisant intervenir χ_a supposé constant et ρ la masse volumique. En déduire l'équation de propagation de la pression.

5. Calculer la célérité de l'onde acoustique en fonction de χ_a et de ρ .
Dans le cas d'un gaz parfait, trouver une autre expression de la célérité en fonction de la température, de $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et de la masse molaire.

A.N. : calculer la célérité du son dans l'air à 300 K ;
on prendra $\gamma = 1,40$; $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$; $R = 8,32 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$.

II. Propagation d'ondes mécaniques dans un milieu anisotrope

1. Matrice de déformation d'un milieu anisotrope

On généralise la déformation unidimensionnelle précédente. Soit \vec{u} le vecteur déplacement : $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$ supposé petit devant \vec{r} .

\vec{r} rayon vecteur d'un point dans un cristal supposé infini et non déformé,

\vec{r}' rayon vecteur du même point après déformation du cristal.

a. Montrer qu'au 2^{ème} ordre près on peut écrire : $\begin{pmatrix} \vec{u} \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} \vec{r} \end{pmatrix}$, (M) étant une matrice. On utilisera les indices 1, 2, 3 pour les composantes relatives aux axes Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 .

b. On introduit la matrice des déformations selon Kittel : $(u_{ij}) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$.

Montrer que $d\vec{r}'^2 - d\vec{r}^2 = \sum (u_{ij}) dx_i dx_j$.

c. Calculer la dilatation relative $\delta = \frac{dx'_1 dx'_2 dx'_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3}$ en se contentant du

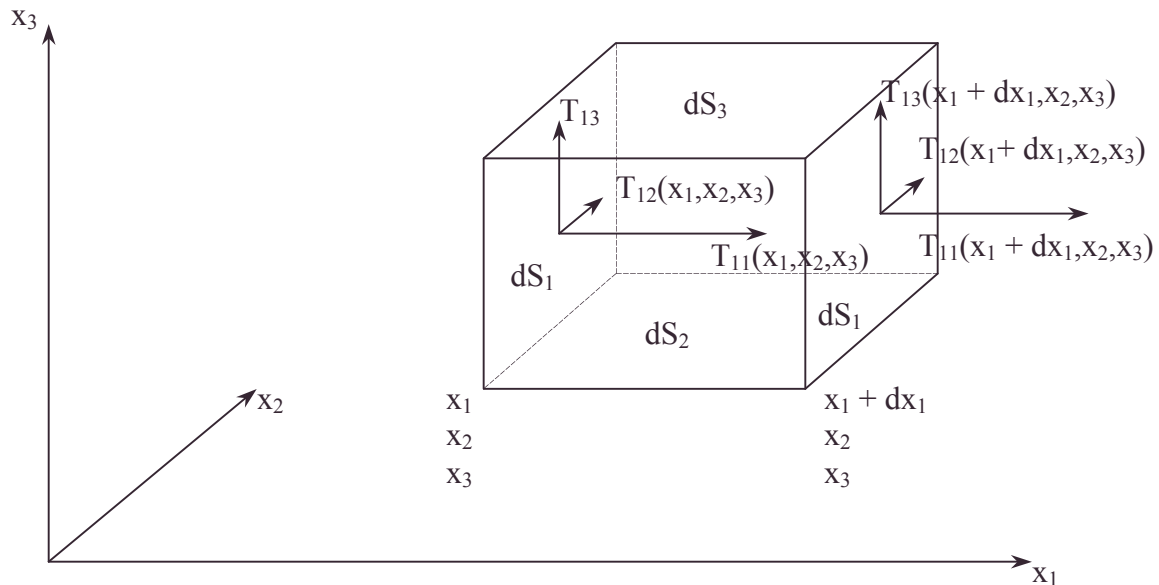
terme principal ; δ est-il indépendant de la base de présentation choisie ?

2. Matrice des efforts (ou des contraintes)

Considérons un parallélépipède élémentaire d'arêtes parallèles aux axes ; sur chaque face s'exerce une force élémentaire proportionnelle à l'aire de la face : la face d'aire dS_i

définie par x_i exerce $\vec{dF}_i = \begin{bmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ T_{i3} \end{bmatrix} dS_i$ sur le monde extérieur

avec $dS_i = dx_j dx_\ell$ avec $j \neq i \neq \ell$.



On appellera matrice des efforts la matrice constituée des $T_{ij}(x_1, x_2, x_3)$.

a. Appliquer le principe de la dynamique au parallélépipède élémentaire soumis par ailleurs à un champ de force de la forme $\rho \vec{K} d\tau$, ρ étant la masse volumique. On fera $\vec{K} = \vec{0}$ dans la suite du problème.

b. Démontrer à l'équilibre en l'absence de couple supplémentaire la symétrie de la matrice des efforts s'exerçant sur l'élément $d\tau$. Interpréter physiquement. Dans quel cas cette symétrie pourrait-elle disparaître ?

3. Coefficients d'élasticité : loi linéarisée de Hooke.

Pour résoudre l'équation du mouvement, nous introduirons des relations linéaires entre les T_{ij} et u_{mn} : $T_{ij} = \sum_{m,n} C_{ij}^{mn} u_{mn}$, les coefficients C_{ij}^{mn} étant appelés coefficients

d'élasticité. Pour simplifier, on introduit la convention de correspondance d'écriture entre le couple (mn) et l'indice k.

(mn)	1,1	2,2	3,3	2,3 ou 3,2	3,1 ou 1,3	1,2 ou 2,1
k	1	2	3	4	5	6

alors $u_{mn} = u'_k$ $T_{ij} = T'_i$.

Pour un cristal possédant les symétries du cube, justifier les particularités de la relation matricielle que l'on admettra :

$$\begin{pmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ T'_3 \\ T'_4 \\ T'_5 \\ T'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{pmatrix}$$

C_{12} et C_{44} sont appelés coefficients de Lamé.

4.a. En appliquant le principe de la mécanique à un parallélépipède élémentaire, montrer que la force par unité de volume a pour expression :

$$\vec{f}_v = \alpha' \vec{\Delta u} + \beta' \text{grad div } \vec{u}. \text{ On admettra la relation } C_{11} = C_{12} + 2C_{44}.$$

b. En considérant ρ constant en première approximation dans ce problème, à quelles équations satisfait $\text{div } \vec{u}$ et $\text{rot } \vec{u}$ pour un tel cristal toujours avec le champ $\vec{K} = \vec{0}$?

Quel est le sens physique de $\text{div } \vec{u}$ et $\text{rot } \vec{u}$?

Peut-on parler d'ondes de torsion ?

Exprimer la célérité de propagation de $\text{div } \vec{u}$ et de $\text{rot } \vec{u}$.

c. Considérons une onde plane se dirigeant dans une direction $O\xi$ quelconque de cosinus directeurs α, β, γ . Quelles sont les célérités possibles ? Etudier les cas particuliers $\alpha = 1$; $\beta = \gamma = 0$.

Quand a-t-on propagation d'une onde transversale ? D'une onde longitudinale ?

A.N. : On donne à 300 K pour BaF_2 ,

$$C_{11} = 0,891 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ; C_{12} = 0,400 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 ; C_{44} = 0,254 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 , \\ \rho = 4,886 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} .$$

Comparer les célérités dans BaF_2 , à la célérité du son dans l'air.

d. Que permet la mesure des célérités des ondes longitudinales et de torsion ?

e. Pour un liquide visqueux incompressible, quel est le lien entre le coefficient de viscosité et les coefficients de Lamé ?

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

$$1. df_{pz} = -p(z)dS + p(z+dz)dS = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dS = -\frac{\partial p}{\partial z} d\tau .$$

De même, selon les autres directions

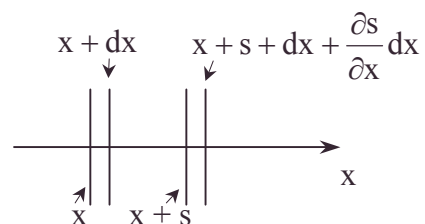
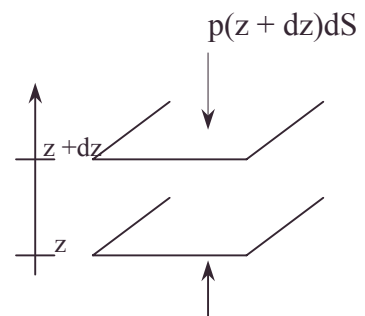
$$\Rightarrow d\vec{f}_p = -\text{grad } P d\tau .$$

$$2. \chi_a = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s .$$

3. On considère une tranche de surface S de volume Sdx :

$$ma_x = f_x \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} dx S = -\rho dx S \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} .$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta V}{V} = \frac{S \frac{\partial s}{\partial x} dx}{S dx} \\ \Delta P = p \end{array} \right\} \chi_a = -\frac{1}{p} \frac{\partial s}{\partial x} .$$



• célérité du son, coefficients de Lamé, coefficients d'élasticité, loi de Hooke [MMC : effort proportionnel à la déformation], principe de la dynamique, symétrie de la matrice des efforts

Le caractère adiabatique est considéré comme assuré vu la constante de temps des échanges thermiques grande devant celle du mouvement mécanique en cause.

4. On a donc : $p = -\frac{1}{\chi_a} \frac{\partial s}{\partial x}$; $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\chi_a} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho \chi_a \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Introduisons $v = \frac{\partial s}{\partial t}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} = -\chi_a \frac{\partial p}{\partial t}$.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\chi_a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho \chi_a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

5.a. $c^2 = \frac{1}{\rho \chi_a}$; ρ est constant à un infiniment petit près.

b. Pour le gaz parfait :

$$PV^\gamma = \text{cste} ; \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 ; \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = -\frac{V}{\gamma P} \Rightarrow \chi_a = \frac{1}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\rho RT} \text{ (avec } P \neq p \text{)}.$$

alors, $c^2 = \frac{\gamma RT}{M}$; A.N.: $c \approx 347 \text{ m/s}$.

II.1.a. $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ en décomposant selon un repère propre par exemple pour les propriétés cristallines anisotropiques.

$$u_1 = 0 + x_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \text{terme du 2}^{\text{ème}} \text{ ordre.}$$

$$u_2 = 0 + x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}.$$

$$u_3 = 0 + x_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

alors $\begin{pmatrix} \vec{u} \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} \vec{r} \end{pmatrix}$ avec $(M) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$ et $\vec{r} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \Rightarrow d\vec{r} \begin{vmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix}$.

b. $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u} \Rightarrow d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}$ avec $d\vec{u} = (M) \begin{pmatrix} d\vec{r} \end{pmatrix}$. En remplaçant r par dr (c'est-à-dire en ne différenciant pas les termes de M ce qui introduirait les termes d'ordre 2)

$$dr'^2 = dr^2 + 2 \underset{\text{petit}}{dr d\vec{u}} + d\vec{u}^2 = dr^2 + 2 \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j.$$

$$dr'^2 = dr^2 + \sum_{\forall i,j} u_{ij} dx_i dx_j ; u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

c. (u_{ij}) étant symétrique, on peut diagonaliser dans une base propre.

$$\text{Alors, } dr'^2 = \sum_i dx_i^2 + \sum_i u_{ii} dx_i^2 = \sum_i (1 + u_{ii}) dx_i^2.$$

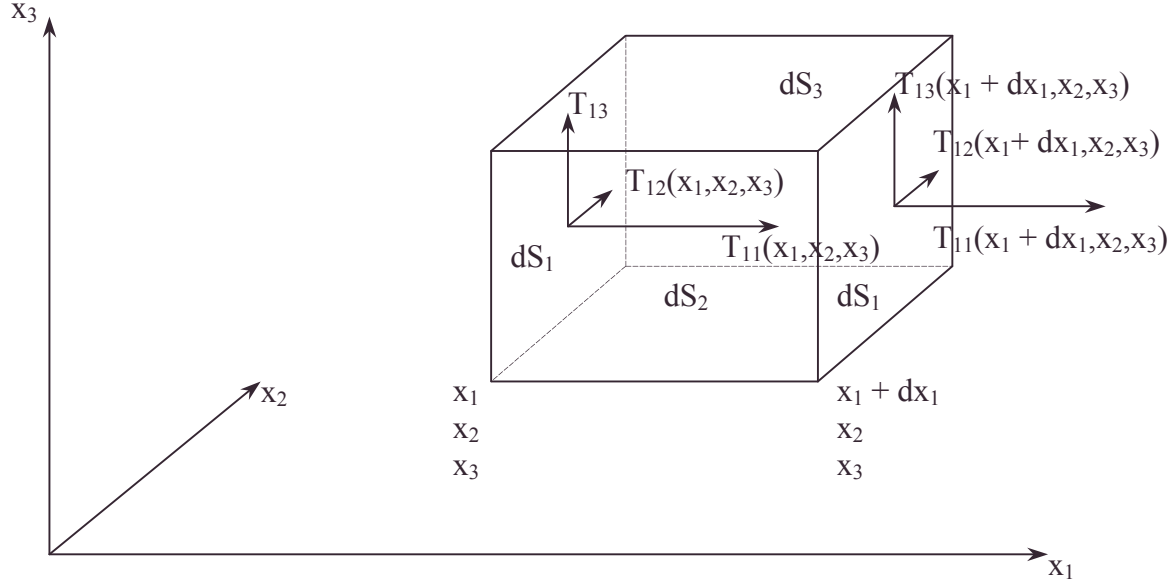
Les dimensions dx_1, dx_2, dx_3 d'un volume élémentaire deviennent vu 1.b. :

• coefficients de Lamé, fluorure de baryum [MMC d'un cristal anisotrope], Laplace (formules isentropiques de)

$dx'_1 = \left(1 + \frac{u_{11}}{2}\right) dx_1$; $dx'_2 = \left(1 + \frac{u_{22}}{2}\right) dx_2$; $dx'_3 = \left(1 + \frac{u_{33}}{2}\right) dx_3$ en extrayant la racine carrée (division par 2).

d'où : $\delta = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{u_{11} + u_{22} + u_{33}}{2}$; $\delta = \frac{\text{Trace}(u_{ij})}{2}$ est donc invariant par changement de base.

2.a. Représentation des forces surfaciques



La somme des forces subies par les faces d'abscisses x_1 et $x_1 + dx_1$ donne :

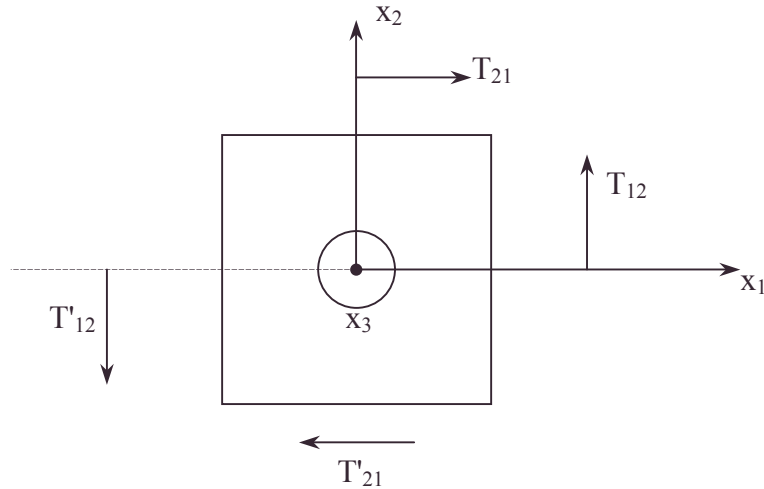
$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & [-T_{11}(x_1, x_2, x_3) + T_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3)] dx_2 dx_3 \\ & [-T_{12}(x_1, x_2, x_3) + T_{12}(x_1 + dx_1, x_2, x_3)] dx_2 dx_3 \\ & [-T_{13}(x_1, x_2, x_3) + T_{13}(x_1 + dx_1, x_2, x_3)] dx_2 dx_3 \end{aligned} \right. \\ & \left. \begin{aligned} & \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \\ & \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \\ & \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Au total, } \left[\begin{aligned} & \left(\sum_{\ell} \frac{\partial T_{\ell_1}}{\partial x_{\ell}} \right) d\tau \\ & \left(\sum_{\ell} \frac{\partial T_{\ell_2}}{\partial x_{\ell}} \right) d\tau \\ & \left(\sum_{\ell} \frac{\partial T_{\ell_3}}{\partial x_{\ell}} \right) d\tau \end{aligned} \right]$$

Le déplacement de cet élément de volume obéit à $\rho d\tau \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho \vec{K} d\tau + \vec{\rho}_v d\tau$ avec une

forme volumique $f_{vj} = \sum_{\ell} \frac{\partial T_{\ell j}}{\partial x_{\ell}}$. Il reste $\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{f}_v + \rho \vec{K}$.

b. Prenons l'équilibre d'un cube sous l'action des T_{ij}



Les composantes normales s'annulent par symétrie.

Représentons le problème à 2 dimensions (projections choisies).

Les forces surfaciques représentées sont telles que :

α. $T_{12} = -T'_{12}$; $T_{21} = T'_{21}$ pour assurer l'annulation de la résultante.

β. $T_{12} = T_{21}$; $T'_{12} = T'_{21}$ pour assurer l'annulation du couple de rotation autour de Ox_3 .

Conclusions : $\forall i, j$, $T_{ij} = T_{ji}$ permet de justifier l'équilibre en translation, en rotation, à 3 dimensions comme à 2.

On distinguera les efforts tangentiels et normaux causes de cisaillement et de dilatation respectivement. Cette symétrie disparaît s'il existe un champ de couples élémentaires par exemple si la matière est magnétique.

3. La symétrie des T_{ij} et des u_{mn} se représente sur les C_{ij}^{mn} .

$$C_{ij}^{mn} = C_{ji}^{mn} = C_{ij}^{nm} = C_{ji}^{nm} \text{ et donc sur } C_{i,k}$$

D'autre part, les sous matrices carrées (a_{ij}) de dimension 3 relatives à un cube sont de la

forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ (cf. matrice). En effet, les axes orthogonaux aux faces, à partir du

centre du cube, ont des rôles équivalents ; on peut échanger leur nom :

$$a_{ij} = a_{ji} = a_{ik} = a_{ki} = a_{jk} = a_{kj} = b \text{ et d'autre part : } a_{ii} = a_{jj} = a_{kk} = a \quad \forall i, j, k \text{ .}$$

Dans l'écriture : $T'_i = \sum_j C_{ik} U'_k$; on distingue les termes "carrés" pour un nouvel indice

variant de 1 à 3 et les termes "rectangles" pour un nouvel indice variant de 4 à 6.

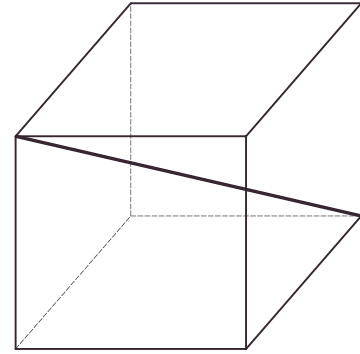
Les termes "carrés" concernent les efforts normaux et les déformations normales (dilatation, compression, traction) selon les axes.

Les termes "rectangles" concernent les efforts tangentiels et les déformations dites de cisaillement ou de torsion (ou de rotation).

• Dans un cube existent 3 grandes diagonales équivalentes (orthogonales entre elles), axes tertiaires pouvant servir de base propre ; autour de chacun d'eux une rotation multiple de $\frac{2\pi}{3}$ laisse le cube invariant,

d'où la matrice diagonale de dimension 3 de valeur propre C_{44} unique, de la sous matrice page 1287.

• Ce problème de changements d'axes propres rend indépendants les problèmes de compression et de torsion.



Cela rejoint la remarque sur la matrice carrée (a_{ij}) de dimension 3 caractéristique d'un cube où les termes rectangles et carrés sont indépendants $a \neq b$.

On comprend ainsi les 2 matrices carrées de dimension 3 traduisant cette indépendance.

On comprend alors la présence des 2 sous matrices nulles (constituées de zéros).

4.a. D'après **2.a.** écrit avec $\vec{K} = \vec{0}$ et la convention d'écriture :

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right), \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right), \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right).\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme demandée, avec $\alpha' = C_{44}$; $\beta' = C_{12} + C_{44}$,

à condition que $C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$.

b. $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{u} - \Delta \vec{u} \Rightarrow \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{u} = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u} - \Delta \vec{u}.$

donc, $\vec{f}_v = (C_{12} + 2C_{44})\Delta \vec{u} + (C_{12} + C_{44})\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u}$ avec $\alpha' = C_{12} + 2C_{44}$; $\beta' = C_{12} + C_{44}$.

Nous savons que $\begin{cases} \text{div} \vec{\text{rot}} \vec{E} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} V = 0 \end{cases}$ et que nous pouvons intervertir l'ordre des

opérateurs de la dérivation entre **4.a.** et **4.b.** puis **2.a.** on tire :

$$\text{div} \vec{f}_v = (C_{12} + 2C_{44})\Delta \text{div} \vec{u} = \text{div} \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right]; \quad \textcircled{1}$$

$$\text{puis } \vec{\text{rot}} \vec{f}_v = C_{44} \Delta \vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\text{rot}} \left[\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right], \quad \textcircled{2}$$

de $\textcircled{1}$: $\Delta(\text{div} \vec{u}) = \frac{\rho}{C_{12} + 2C_{44}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{div} \vec{u})$; $\text{div} \vec{u}$ se propage à une célérité c_1 telle que

$$c_1^2 = \frac{C_{12} + 2C_{44}}{\rho} = \frac{C_{11}}{\rho}.$$

de $\textcircled{2}$: $\Delta(\vec{\text{rot}} \vec{u}) = \frac{\rho}{C_{44}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\text{rot}} \vec{u})$; $\vec{\text{rot}} \vec{u}$ se propage à une célérité c_2 telle que

$$c_2^2 = \frac{C_{44}}{\rho}.$$

• compression, loi de Hooke [MMC : effort proportionnel à la déformation], traction

Un retour sur \vec{u} nous montre que $\text{div } \vec{u}$ est égale à la dilatation relative δ de **1.c.**, alors que $\vec{\text{rot}} \vec{u}$, de par ses composantes, est associé aux termes rectangles de u_{mn} et donc au cisaillement (du fait des forces) et à la torsion (de par les moments associés).

On peut donc justifier la possibilité d'ondes de torsion de par la propagation de $\vec{\text{rot}} \vec{u}$.

$$\text{c. } \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (C_{12} + 2C_{44}) \Delta \vec{u} + (C_{12} + C_{44}) \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{u}.$$

d'où avec $\vec{u} = \vec{u}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et $k = \frac{\omega}{v}$; v la célérité.

$$-\omega^2 \rho \vec{u} = -k^2 (C_{12} + 2C_{44}) \vec{u} + (C_{12} + C_{44}) (-j\vec{k}) \wedge (-j\vec{k} \wedge \vec{u}).$$

$$\text{or } \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{u}) = (\vec{k} \cdot \vec{u}) \vec{k} - k^2 \vec{u} \text{ avec } \vec{k} = k \vec{\xi}.$$

On vérifiera l'écriture matricielle de $(\vec{u} \cdot \vec{\xi}) \vec{\xi}$.

$$\Rightarrow (C_{12} + 2C_{44}) \frac{\vec{u}}{v^2} + \left[\frac{(C_{12} + C_{44})}{v^2} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{u} \\ \vec{u} \end{bmatrix} - \frac{(C_{12} + C_{44})}{v^2} \vec{u} \right] - \rho \vec{u} = \vec{0}.$$

La compatibilité s'exprime par un déterminant :

$$\det \begin{bmatrix} C_{11} + (C_{12} + C_{44})(\alpha^2 - 1) - \rho v^2, & (C_{12} + C_{44})\alpha\beta, & (C_{12} + C_{44})\alpha\gamma \\ (C_{11} + C_{44})\alpha\beta, & C_{11} + (C_{12} + C_{44})(\beta^2 - 1) - \rho v^2, & (C_{12} + C_{44})\beta\gamma \\ (C_{11} + C_{44})\alpha\gamma, & (C_{12} + C_{44})\beta\gamma, & C_{11} + (C_{12} + C_{44})(\gamma^2 - 1) - \rho v^2 \end{bmatrix} = 0$$

Solution particulière : $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ vu $C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$.

$$\det \begin{bmatrix} C_{11} - \rho v^2, & 0, & 0 \\ 0, & C_{44} - \rho v^2, & 0 \\ 0, & 0, & C_{44} - \rho v^2 \end{bmatrix} = 0 ; \text{ on a les trois valeurs propres telles que :}$$

$$v^2 = \frac{C_{44}}{\rho} \text{ cf. onde de torsion solution double) et } v^2 = \frac{C_{11}}{\rho} \text{ (cf. onde longitudinale).}$$

Selon que $\vec{\text{rot}} \vec{u} = 0$ ou $\text{div } \vec{u} = 0$ on a une onde longitudinale (cf. dilatation et acoustique) ou transversale (cf. cisaillement).

A.N. : $C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$ est vérifié numériquement à 1% près : C_{11} est une combinaison pondérée des valeurs propres dites coefficients de Lamé.

Célérités :

$$\alpha. v_1 = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} ; \text{ A.N. : } v_1 = 4270 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\beta. v_2 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} ; \text{ A.N. : } v_2 = 2280 \text{ m.s}^{-1} ; \text{ l'anisotropie est flagrante.}$$

La célérité est de 6 à 12 fois supérieure à celle du son dans l'air.

d. La mesure des célérités, connaissant ρ donne accès à la connaissance de C_{11} et C_{44} et si la relation $C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$ est vraie, on a aussi C_{12} .

e. Le coefficient de viscosité habituel qui intervient dans l'équation de Navier – Stokes s'identifie à C_{44} mais on n'en déduira pas qu'il y a des ondes de torsion dans un fluide.

7.3.4. Ondes magnétohydrodynamiques

On cherche dans ce problème à résoudre quelques phénomènes de propagation d'ondes acoustiques dans des fluides conducteurs non visqueux, de résistance thermique nulle et en présence de champ magnétique. Dans la première partie, on établit le système général d'équations de la magnétohydrodynamique ; dans la deuxième partie, on considère la solution exacte de quelques cas particuliers ; la troisième partie est consacrée à la linéarisation du système général ; la quatrième partie est consacrée à des considérations numériques, et la cinquième traite de différents types d'ondes pouvant se propager dans le milieu considéré. Les étudiants pourront admettre les résultats partiels fournis dans l'énoncé, utiles pour la suite du problème et qu'ils n'auraient pas démontrés.

Rappels mathématiques :

L'espace est rapporté à un repère galiléen Ox , Oy et Oz . Les vecteurs sont désignés par des lettres majuscules ou minuscules surmontées d'une flèche ; leur amplitude est désignée par les mêmes lettres, en typographie normale.

On notera $\frac{D}{Dt}$ l'opérateur dérivée particulaire :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ainsi le vecteur $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ est le vecteur de composantes $\frac{Dv_x}{Dt}$, $\frac{Dv_y}{Dt}$, $\frac{Dv_z}{Dt}$.

On rappelle enfin deux égalités classiques :

- double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.
- analyse vectorielle : $\vec{\text{rot}}(\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\text{div} \vec{a})\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{a} + [(\text{div} \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{b}]$.

I. Equations magnétohydrodynamiques

On considère un fluide conducteur, non visqueux, électriquement neutre et de perméabilité magnétique égale à celle du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$; on note $\rho(\vec{r}, t)$ la masse volumique, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ la vitesse, $p(\vec{r}, t)$ la pression et $\vec{J}(\vec{r}, t)$ la densité de courant de l'élément de fluide au point r et à l'instant t : les quantités ρ , \vec{v} , p et \vec{J} sont donc des ondes de grandeurs physiques.

1. Ecrire l'équation d'Euler associée à ce fluide en négligeant la pesanteur et en tenant compte de l'action du champ magnétique \vec{B} ; cette action est caractérisée par une force volumique $\vec{f}_v = \vec{J} \wedge \vec{B}$.

2. Donner l'expression de la conservation locale de la matière, liant ρ , $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et \vec{v} .

3. Discuter – selon la pulsation de travail et le type de matériau – les ordres de grandeur relatifs des courants de déplacement et de conduction en régime permanent sinusoïdal ; on pourra s'aider du tableau suivant, indiquant des valeurs numériques typiques de la conductivité σ , supposée indépendante de la fréquence, de quelques matériaux plus ou moins conducteurs :

Matériau	Cu	Pb	Ge	NaCl	Verre ordinaire
$\sigma \text{ (}\Omega.\text{m)}^{-1}$	5.10^7	7.10^6	2.10^{-1}	3.10^{-7}	1.10^{-12}

4. Ecrire les équations de Maxwell relatives au système considéré en utilisant explicitement l'hypothèse de neutralité électrique et en justifiant que l'on puisse ici négliger le courant de déplacement.

5. On pose que la relation constitutive du fluide, liant la densité de courant \vec{J} au champ électromagnétique est $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ où \vec{E} représente le champ électrique et où la conductivité σ du milieu est supposée indépendante de \vec{r} et de t (milieu homogène et stationnaire) ; montrer que dans ces conditions le champ magnétique \vec{B} vérifie l'équation [1] : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + (\mu_0 \sigma)^{-1} \Delta \vec{B}$ où Δ désigne l'opérateur laplacien.

Dans toute la suite du problème, on admettra que le fluide est un conducteur parfait : $\frac{1}{\sigma} = 0$.

6. Comment s'exprime dans ces conditions la dérivée particulaire $\frac{D\vec{B}}{Dt}$ lorsque le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est uniforme dans l'espace ? Que peut-on en déduire pour les lignes de champ magnétique lors du déplacement d'un élément de fluide ?

II. Etude de quelques cas particuliers

Cas 1 : milieu incompressible

On considère d'abord le cas d'un fluide incompressible : $\rho(\vec{r}, t) = \text{cste} = \rho_0$ et on cherche la solution pour laquelle toutes les grandeurs ne dépendent que de la coordonnée z et du temps t .

1. Montrer d'une part que \vec{B}_z est constant et d'autre part que l'on peut toujours choisir le système de coordonnées de telle sorte que $v_z = 0$.

2. On désigne par \vec{b} la partie transverse du vecteur \vec{B} ($\vec{b} = (B_x, B_y, 0)$) ; on pose $\pi = p + \frac{b^2}{2\mu_0}$; montrer d'une part que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{B_z}{\rho\mu_0} \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}$ et $\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = B_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$ et d'autre part que π est constant.

3. On définit ici la vitesse d'Alfvén par $\vec{v}_a = \frac{\vec{B}_z}{(\rho_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}}$.

Montrer que cette quantité a effectivement la dimension d'une vitesse.

4. Trouver la solution du système de la question II.2. en termes d'onde plane progressive harmonique; préciser en particulier le lien entre les amplitudes respectives de \vec{v} et de \vec{b} et la vitesse de phase.

Cas 2 : Ondes transverses

On cherche les solutions telles que la seule composante non identiquement nulle de \vec{v} soit $v_x = v$ et que la seule composante non identiquement nulle de \vec{B} soit $b_y = B$.

On pose $\beta = \frac{B(\vec{r}, t)}{\rho(\vec{r}, t)}$ et $p' = p + \frac{B^2}{2\mu_0}$

5. En déduire, à partir de l'équation d'Euler, que $\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}$.

• champ magnétique [partie transverse du], tableau numérique, vitesse d'Alfvén

6. Montrer, en considérant **I.2.** et **I.5.**, que β est constant. Commenter ce dernier résultat.

III. Ondes magnétohydrodynamiques : petites perturbations

L'équilibre du fluide est caractérisé par les conditions suivantes : en chaque point et à tout instant la vitesse est nulle, la densité massique ρ_0 et le champ de pression p_0 sont uniformes et indépendants du temps ; enfin, le champ magnétique \vec{B}_0 est statique et uniforme ; on posera dans ce cas pour la vitesse d'Alfvén $\vec{v}_a = \frac{\vec{B}_0}{(\rho_0 \mu_0)^{1/2}}$. Partant de

cette situation, on perturbe faiblement le système, de telle sorte qu'il soit légitime d'étudier les équations d'évolution linéarisées, pour un mouvement isentropique.

On pose à cette fin :

$$[2] \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t) \quad \text{avec } B_1 \ll B_0 ;$$

$$[3] \quad \rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) \quad \text{avec } \rho_1 \ll \rho_0 ;$$

$$[4] \quad p(\vec{r}, t) = p_0 + p_1(\vec{r}, t) \quad \text{avec } p_1 \ll p_0 ;$$

$$[5] \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(\vec{r}, t).$$

L'équation d'état du fluide peut ici s'écrire [6] $\vec{\text{grad}}(p_1) = s^2 \vec{\text{grad}}(\rho_1)$ pour définir la constante s , vitesse du son dans le milieu considéré.

1. Montrer, en ne gardant que les termes du premier ordre, que :

$$[7] \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}_1) = 0 ;$$

$$[8] \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + s^2 \vec{\text{grad}}(\rho_1) + \left(\frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \right) \wedge \text{rot}(\vec{B}_1) = \vec{0} ;$$

$$[9] \quad \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0) = \vec{0}.$$

2. Eliminer \vec{B}_1 et ρ_1 du système de la question **III.1.** et en déduire l'équation différentielle régissant les variations de \vec{v}_1 : cette "équation de propagation", du deuxième ordre en espace et du deuxième ordre en temps, ne fait intervenir comme constantes que s et la vitesse d'Alfvén \vec{v}_a .

IV. Applications numériques

On utilisera les données suivantes :

pour le mercure :

$$\text{vitesse du son : } s_{\text{Hg}} = 1,45 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{masse volumique : } \rho_0 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

pour le soleil (photosphère) :

$$\text{vitesse du son : } s_0 = 10,0 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{densité en atomes d'hydrogène :}$$

$$d_0 = 6 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

1. Calculer la vitesse d'Alfvén dans le mercure pour $B_0 = 1 \text{ T}$. Quelle serait la valeur du champ magnétique nécessaire pour que cette vitesse soit égale à celle du son dans ce métal ? On suppose que ce champ, \vec{B}_s , est le champ au centre d'un solénoïde parcouru par un courant électrique continu d'intensité I ; le diamètre de ce solénoïde est petit

devant sa longueur. (Pour fixer les idées, on pourra considérer un diamètre intérieur de $2r = 10 \text{ cm}$ et une longueur de 1 m .)

Estimer une valeur du courant I en se donnant a priori un ordre de grandeur raisonnable pour le nombre de spires par unité de longueur de ce solénoïde. Commenter.

2. Calculer la vitesse d'Alfven dans la photosphère solaire où $B_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ T}$. Pour quelle valeur, B_x , du champ magnétique cette vitesse serait-elle égale à celle du son dans la photosphère ?

3. On suppose que ce champ \vec{B}_x est celui qui est créé au centre du solénoïde de la question IV.1., alimenté par une source de courant continu pouvant débiter 300 ampères . L'enroulement est en cuivre (conductivité en I.3.) ; l'épaisseur de la gaine, petite devant le diamètre du câble, sera négligée dans les calculs numériques ; la densité de courant électrique dans l'enroulement ne doit pas dépasser $J_m = 10^7 \text{ A.m}^{-2}$. On suppose que toute la quantité de chaleur dégagée dans le câble par effet Joule est évacuée par circulation d'eau, de débit D ; entre l'entrée et la sortie, l'élévation de la température de l'eau ne doit pas dépasser $\Delta T = 50^\circ\text{C}$.

Proposer et discuter une configuration expérimentale prenant toutes ces contraintes en considération ; préciser notamment les valeurs numériques du diamètre du câble, du nombre de spires par unité de longueur et du débit d'eau, en litres par minute. On pourra considérer que la chaleur massique de l'eau est constante, égale à $4185 \text{ J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$.

V. Régimes de propagation

On étudie la structure des ondes planes solutions de l'équation de propagation établie à la question III.2. et on pose :

$$[10] \quad \vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{V}_1 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \text{ où } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{k} \text{ sont des vecteurs constants.}$$

Une onde sera dite transverse ou longitudinale selon que \vec{V}_1 est orthogonal ou parallèle à \vec{k} .

1. Etablir la relation :

$$[11] \quad -\omega^2 \vec{v}_1 + \left[(s^2 + v_a^2)(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \right] \vec{k} + \left[(\vec{k} \cdot \vec{v}_a) \vec{v}_1 - (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a \right] (\vec{k} \cdot \vec{v}_a) = 0$$

2. On suppose que le produit scalaire $(\vec{k} \cdot \vec{v}_a)$ est nul. Montrer que seule une onde longitudinale peut se propager dans le milieu ; déterminer sa vitesse de phase.

3. On suppose maintenant que \vec{k} et \vec{v}_a sont parallèles : après avoir établi la relation qui en résulte entre \vec{v}_a et \vec{v}_1 , montrer qu'une onde longitudinale et une onde transverse peuvent maintenant se propager simultanément dans le milieu ; déterminer leurs vitesses de phase respectives.

4. Comparer quand cela est possible les solutions de cette partie aux solutions exactes de la partie II.

5. Déterminer \vec{B}_1 pour chacun des trois types d'ondes déterminées en V.2. et V.3. ; on pourra pour ce faire se référer à l'équation [9] de cet énoncé.

6. Donner enfin l'allure des lignes de champ magnétique pour chacun des trois cas rencontrés.

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

I.1. $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} p + \cancel{\rho \vec{g}} + \vec{f}_v = -\vec{\text{grad}} p + \vec{J} \wedge \vec{B}.$

2. $m = \iiint_{V_\Sigma} \rho dz$; écrivons $\frac{Dm}{Dt} = 0$ (cf. conservation de la masse).

$$0 = \iiint_{V_\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} d\vec{S} = \iiint_{V_\Sigma} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right) d\tau, \forall V_\Sigma \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0.$$

3. On a le vecteur densité de courant de déplacement : $\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j \omega \epsilon \vec{E}$; $\vec{J} = \sigma \vec{E}$;

$$\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{J}|} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma} \text{ à défaut de } \epsilon_r \text{ donné.}$$

Introduisons la pulsation critique telle que $\frac{\epsilon_0 \omega_c}{\sigma} = 1.$

Matériau	Cu	Pb	Ge	NaCl	Verre ordinaire
$\omega_c \text{ en rad.s}^{-1}$	$5,65.10^{18}$	$7,92.10^{17}$	$2,26.10^{10}$	$3,39.10^4$	0,113

Si $\omega \ll \omega_c$: $|\vec{j}_D| \ll |\vec{J}|$; si $\omega \gg \omega_c$: $|\vec{J}| \ll |\vec{j}_D|.$

Pour le cas des ondes magnétohydrodynamiques (ondes acoustiques) :

- $\omega \ll \omega_c$ pour les métaux Cu, Pb, et pour le semi-conducteur Ge, soit : $|\vec{j}_D| \ll |\vec{J}|.$
- Ce n'est pas le cas du verre, qui est un isolant électrique : $|\vec{J}| \ll |\vec{j}_D|.$
- On pourrait tenir compte des 2 courants pour NaCl à $\omega = 2\pi.10^3 \text{ rad.s}^{-1}.$

4. L'électroneutralité implique $\rho = 0$; la conduction implique $|\vec{j}_D| \ll |\vec{J}|$ cf. **3.** ; les

équations de Maxwell s'écrivent : $\text{div} \vec{B} = 0$; $\text{div} \vec{E} = 0$; $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$

5. $\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ permet de transcrire l'équation de Maxwell-Ampère en :
 $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \sigma \vec{V} \wedge \vec{B}$; en lui appliquant l'opérateur $\vec{\text{rot}}$, elle devient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{grad}} \underbrace{\text{div} \vec{B}}_0 - \Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{\text{rot}} \vec{E} + \mu_0 \sigma \vec{\text{rot}} (\vec{V} \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 \sigma \vec{\text{rot}} (\vec{V} \wedge \vec{B}) ;$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} (\vec{V} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B} ; \frac{1}{\sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} (\vec{V} \wedge \vec{B}).$$

$$\textbf{6. } \vec{\text{rot}} (\vec{V} \wedge \vec{B}) = - \underbrace{(\text{div} \vec{V}) \vec{B}}_{=0} + \underbrace{(\vec{B} \text{grad}) \vec{V}}_{=0} + \underbrace{(\text{div} \vec{B}) \vec{V}}_0 - \underbrace{(\vec{V} \text{grad}) \vec{B}}_0$$

car \vec{V} est uniforme

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -(\vec{V} \text{grad}) \vec{B} \Rightarrow \frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{V} \text{grad}) \vec{B} = \vec{0}.$$

En suivant une particule fluide dans son déplacement uniforme, le champ \vec{B} paraît uniforme. Les lignes de champ magnétique sont parallèles entre elles. L'absence de cause à une anisotropie permet de confondre les directions de \vec{V} et de \vec{B} , champs uniformes lors du déplacement.

- vecteur densité de courant de déplacement

II.1. Cas 1 : milieu incompressible : z et t seules coordonnées influentes.

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ s'écrit } \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow B_z = B_z(t).$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(v_z B_x - v_x B_z) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y B_z - v_z B_y) = 0 \Rightarrow B_z = \text{cste}.$$

$$\rho = \rho_0 \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z = v_z(t).$$

Or v_z ne dépendant pas de z , ni de x et y ; ne peut décrire une onde plane progressive cf. 4. en physique ondulatoire sauf le cas particulier $v_z = \text{constante}$.

On peut alors choisir le repère galiléen dans lequel $v_z = 0$ moyennant un changement d'axes.

La suite confirmera \vec{v} et \vec{B} grandeurs couplées.

2. Remarquons :

a. $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}$ dans le repère précédemment cité.

b. $\overrightarrow{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial z} \vec{z}$.

c. $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \vec{y} = \mu_0 \vec{J}$.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{J} \wedge \vec{B} - \overrightarrow{\text{grad}} p \text{ s'écrit :}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{B_z}{\rho \mu_0} \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}.$$

$$0 = \frac{-B_y \partial B_y}{\mu_0 \partial z} - \frac{B_x \partial B_x}{\mu_0 \partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{B_y^2 + B_x^2}{2\mu_0} + p \right] = 0 \text{ soit } \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0.$$

$\pi = \pi(t)$ or π ne dépendant pas de x, y, z ne peut décrire une onde progressive plane, sauf le cas particulier limite $\pi = \text{constante}$.

$$\text{L'adaptation d'écriture donne : } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = B_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z};$$

$$\text{en restreignant aux deux premières coordonnées : } \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = B_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}.$$

3. L'équation de Bernoulli : $\frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \rho g + P = \text{constant}$ dans certaines conditions,

montre que l'unité de P et de $\rho_0 V^2$ sont les mêmes, or vu π , l'unité de P et $\frac{b^2}{\mu_0}$ sont les

mêmes ; par transitivité, on en déduit que $\frac{B_z^2}{\rho \mu_0}$ a même unité que V^2 et que

$$v_a = \frac{B_z}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}} \text{ a les dimensions d'une vitesse.}$$

• analyse dimensionnelle, Bernoulli [théorème de], dimension, homogénéité d'une grandeur, magnétohydrodynamique [couplage du mouvement et du champ magnétique en], unité

4. Cherchons les solutions sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{j(\omega t - kz)}$; $\vec{b} = \vec{b}_0 e^{j(\omega t - kz)}$.

Les équations II.2. s'écrivent alors : $j\omega \vec{v} = \frac{-jk B_z}{\rho \mu_0} \vec{b}$; $j\omega \vec{b} = -jk B_z \vec{v}$.

Les amplitudes satisfont à $\vec{v}_0 = \frac{-B_z}{\rho \mu_0} \frac{k}{\omega} \vec{b}_0$; $\vec{b}_0 = -B_z \frac{k}{\omega} \vec{v}_0$ et par remplacement de \vec{b}_0 dans la première, on obtient la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{B_z}{\sqrt{\rho \mu_0}} = \pm v_a \Rightarrow \vec{v}_0 = -\frac{v_a^2}{v_\phi} \frac{\vec{b}_0}{B_z}$.

Cas 2 : Ondes transverses

5. $\vec{J} \wedge \vec{B} = \text{rot} \vec{B} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ se simplifie ici en $\begin{vmatrix} -\frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \\ 0 \\ -\frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial z} \end{vmatrix}$

I.1. s'écrit sur \vec{x} :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} B \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{B^2}{2\mu_0} + p \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}.$$

$$6. \frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial \beta}{\partial t} + v \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial t} \rho - \frac{\partial \rho}{\partial t} B \right)}{\rho^2} - \frac{v}{\rho^2} \left(\rho \frac{\partial B}{\partial x} - B \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

$$\frac{D\beta}{Dt} = -\frac{\rho}{\rho^2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + v \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{B}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right).$$

Or I.2. donne $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v \vec{x}) = 0$, soit $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{D\beta}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + v \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

$$\text{Or } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{B} ; \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ vB \end{vmatrix} ;$$

$$\text{rot} \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ vB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial vB}{\partial y} \\ -\frac{\partial vB}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial(vB)}{\partial x} = -v \frac{\partial B}{\partial x} - B \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{D\beta}{Dt} = 0 ; \quad \frac{B}{\rho} \text{ est constant en suivant le}$$

mouvement. On voit qu'en suivant le mouvement, selon les hypothèses (et les réalités associées) l'invariant change d'expression.

III.1.a. Ecrivons **I.2.** : $\frac{\partial(\rho_1 + \rho_0)}{\partial t} + \text{div}[(\rho_0 + \rho_1)\vec{v}_1] = 0$ s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}}_{=0} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1 + \underbrace{\text{div}(\rho_1 \vec{v}_1)}_{\text{terme d'ordre 2}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0 \quad [7].$$

b. Ecrivons de même **I.1.** : $(\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}_1 \text{grad}) \vec{v}_1}_{\text{terme d'ordre 2}} \right) = -\text{grad} p + \frac{\text{rot} \vec{B}}{\mu_0} \wedge \vec{B}.$

$$= -\underbrace{\text{grad} p_0}_{=0} - \text{grad} p_1 + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\text{rot} \vec{B}_0}_{=0} \wedge \vec{B}_0 + \underbrace{\frac{\text{rot} \vec{B}_0}{\mu_0} \wedge \vec{B}_1}_{=0} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}_1 \wedge \vec{B}_0 + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}_1 \wedge \vec{B}_1}_{\text{ordre 2}}$$

or $\rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ est d'ordre 2.

Il reste $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad} p_1 + \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}_1 \wedge \vec{B}_0$; or, $\text{grad} p_1 = s^2 \text{grad} p_1$.

d'où : $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + s^2 \text{grad} p_1 + \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \wedge \text{rot} \vec{B}_1 = \vec{0} \quad [8].$

c. I.5. s'écrit : $\frac{\partial(\vec{B}_0 + \vec{B}_1)}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)) = \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0) + \underbrace{\text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_1)}_{\text{terme d'ordre 2}} ;$

$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \vec{0}$, d'où $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0) = \vec{0} \quad [9].$

2. Dérivons [8] : $\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} + s^2 \text{grad} \left(\frac{\partial p_1}{\partial t} \right) + \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \wedge \text{rot} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{0}$

Soit : $\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} + s^2 \text{grad}(-\text{div}(\rho_0 \vec{v}_1)) + \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \wedge \text{rot} \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0) = \vec{0}$; posons $\vec{v}_a = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}}$

Soit : $\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \rho_0 \text{grad} \text{div} \vec{v}_1 + \rho_0 \vec{v}_a \wedge \text{rot} \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_a) = \vec{0}$;

d'où : $\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - s^2 \Delta \vec{v}_1 + \vec{v}_a \wedge \text{rot} \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_a) = \vec{0}.$

IV.1.a. $v_a = 7,649 \text{ ms}^{-1}.$

b. Si $v_a = s_{\text{Hg}}$: $B_s = s_{\text{Hg}} \sqrt{\mu_0 \rho_0}$; AN : $B_s = 189,6 \text{ T}.$

c. $I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{s_{\text{Hg}} \sqrt{\mu_0 \rho_0}}{\mu_0 n}$; AN : $n = 10^4 \text{ spires/m} \Rightarrow I = 1,5 \cdot 10^4 \text{ A}$, courant trop

grand pour le diamètre envisagé du fil, cf. **IV.3.** ; on en déduit $v_a \ll s_{\text{Hg}}$, déduction liée à la technologie de production des champs B.

2.a. $\rho_0 = M \frac{d_0}{N_A}$; $M = 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$; $\rho_0 = 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3} \Rightarrow v_a = 13,4 \text{ ms}^{-1}.$

b. $B_x = v_a \sqrt{\mu_0 \rho_0} \Rightarrow B_x = 1,12 \text{ T}.$

$$3. I = \pi \frac{d^2}{4} J \text{ avec } J < J_m \Rightarrow d > \sqrt{\frac{4I}{\pi J_m}} \text{ avec } d_m = \sqrt{\frac{4I}{\pi J_m}}.$$

Le refroidissement est assuré si : $RI^2 = \mu_{\text{eau}} D c \Delta T$ avec $R = \frac{1}{\sigma} \frac{n 2 \pi r}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{8nr}{\sigma d^2}$ et

$$r = \text{rayon du solénoïde.} \Rightarrow D = \frac{RI^2}{\mu_{\text{eau}} c \Delta T} = \frac{8nr}{\sigma d^2} \frac{I^2}{\mu_{\text{eau}} c \Delta T}.$$

AN : $d_m = 6,18.10^{-3} \text{ m}$; $n = 2971 \text{ spires.m}^{-1}$; $D = 161. \text{ min}^{-1}$ avec $\mu_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

$$\mathbf{V.1.} \quad \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -i \omega \vec{v}_1 ; \quad \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{v}_1 ; \quad \text{div } \vec{v}_1 = i \vec{k} \cdot \vec{v}_1.$$

$$\vec{\Delta} \vec{v}_1 = \vec{\text{grad}} \text{div } \vec{v}_1 = i \vec{k} (i \vec{k} \cdot \vec{v}_1) = -\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) ;$$

$$\text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_a) = i \vec{k} \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_a) = i (\vec{k} \cdot \vec{v}_a) \vec{v}_1 - i (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a ;$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_a) = i \vec{k} \wedge (i (\vec{k} \cdot \vec{v}_a) \vec{v}_1 - i (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a) = (\vec{k} \wedge \vec{v}_a) (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - (\vec{k} \wedge \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \vec{v}_a).$$

$$\vec{v}_a \wedge \text{rot} \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_a) = (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_a \wedge \vec{k}) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_a) (\vec{v}_a \wedge \vec{k}) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_a) (\vec{v}_a \wedge \vec{v}_1) \vec{k} - (\vec{v}_a \cdot \vec{k}) \vec{v}_1 \vec{k}.$$

En partant de **III.2.** on aboutit à :

$$-\omega^2 \vec{v}_1 + \left[(s^2 + v_a^2) (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{v}_a) \left((\vec{k} \cdot \vec{v}_a) \vec{v}_1 - (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a \right) \right] = \vec{0}.$$

2. [11] devient :

$$-\omega^2 \vec{v}_1 + (s^2 + v_a^2) (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{k} = \vec{0} ; \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_{1\perp} + \vec{v}_{1\parallel} \Rightarrow -\omega^2 \vec{v}_{1\perp} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{k} :$$

l'onde est longitudinale ;

$$\text{en projection sur cet axe commun : } -\omega^2 v_1 + (s^2 + v_a^2) k^2 v_1 = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = v_\phi^2 = s^2 + v_a^2 \Rightarrow v_\phi = \pm \sqrt{s^2 + v_a^2}.$$

$$3. \vec{k} \parallel \vec{v}_a \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v}_a = k v_a ; \quad (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a = (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \vec{k} ; \quad (\vec{k} \cdot \vec{v}_a) (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \vec{k} = k^2 (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a ,$$

$$\text{d'où : } (k^2 v_a^2 - \omega^2) \vec{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_a^2} - 1 \right) k^2 (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_a = \vec{0}.$$

a. Relation à satisfaire si $\vec{v}_1 \parallel \vec{k} \parallel \vec{v}_a$ (onde longitudinale).

$$(k^2 v_a^2 - \omega^2) \vec{v}_1 + \left(\frac{s^2}{v_a^2} - 1 \right) k^2 v_a^2 \vec{v}_1 = \vec{0} \text{ soit } k^2 v_a^2 - \omega^2 + \frac{s^2 k^2 v_a^2}{v_a^2} - k^2 v_a^2 = 0.$$

$$\text{Soit } k^2 s^2 = \omega^2 \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm s.$$

b. Relation à satisfaire si $\vec{v}_1 \cdot \vec{k} = 0$ (onde transverse).

Multiplions par \vec{v}_1 l'équation [11]

$$(k^2 v_a^2 - \omega^2) v_1^2 + \left(\frac{s^2}{v_a^2} - 1 \right) k^2 (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1) \underbrace{(\vec{v}_a \cdot \vec{v}_1)}_0 = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = v_a^2 \Rightarrow v_\phi = \pm v_a.$$

Ainsi deux types d'onde sont possibles avec deux vitesses de phase différentes.

4. En **II.4.** dans un milieu incompressible, une onde transverse avait aussi v_a comme vitesse de phase ; s lié à la compressibilité et à une onde longitudinale n'était naturellement pas trouvé.

• onde longitudinale, onde transverse, vitesse de phase

5. $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0)$ avec $\vec{v}_1 = \vec{V}_{l_0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ et $\vec{B}_1 = \vec{B}_{l_0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ s'écrit :

$$-i\omega \vec{B}_{l_0} = i\vec{k} \wedge (\vec{V}_{l_0} \wedge \vec{B}_0) = i[\vec{k} \cdot \vec{B}_0] \vec{V}_{l_0} - (\vec{k} \cdot \vec{V}_{l_0}) \vec{B}_0.$$

a. $\vec{k} \cdot \vec{v}_a = 0 \Leftrightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$ vu **III**.

$$\vec{B}_{l_0} = \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{V}_{l_0}}{\omega} \right) \vec{B}_0 \text{ or vu V.2. } \vec{v}_1 // \vec{k} \text{ et } \frac{\omega}{k} = \sqrt{s^2 + v_a^2} ; \vec{B}_{l_0} = \frac{V_{l_0}}{\sqrt{s^2 + v_a^2}} \vec{B}_0.$$

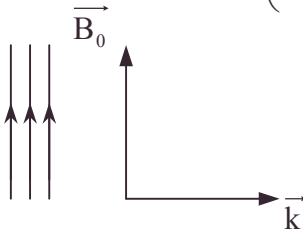
b. si $\vec{k} // \vec{v}_a$ et $\vec{V}_{l_0} // \vec{k} // \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{0}$.

c. si $\vec{k} // \vec{v}_a // \vec{B}_0 ; \vec{v}_1 \cdot \vec{k} = 0 ; \vec{B}_{l_0} = \frac{-k B_0}{\omega} \vec{V}_{l_0}$.

On pourrait inverser certains signes selon le parallélisme et l'antiparallélisme de vecteurs.

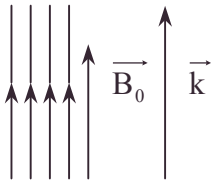
6. $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_0$.

a. cf. 5.a. $\vec{B} = \vec{B}_0 \left(1 + \frac{V_1}{\sqrt{s^2 + v_a^2}} \right)$, $\vec{B} // \vec{B}_0$ or $\vec{k} \perp \vec{B}_0$.



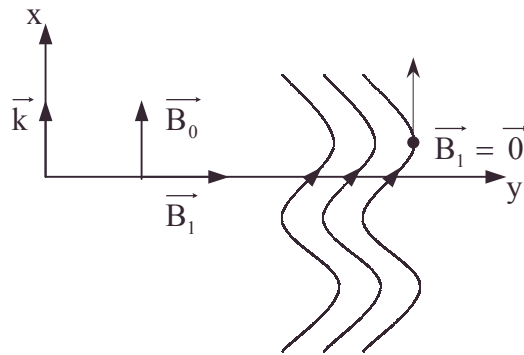
Les lignes de champ se dilatent et se resserrent au cours des ondulations spatio-temporelles en restant parallèles à \vec{B}_0 et orthogonales à \vec{k} .

b.



$\vec{B} = \vec{B}_0$; Les lignes de champ ne changent pas cf. **I.6**.

c. $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_{l_0} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$. Les lignes de champ ressemblent à des sinusoïdes parallèles à t donné avec :
 $\vec{B} = \vec{B}_0 - \vec{B}_{l_0} \cos(kx - \omega t)$.



La ligne de champ paramétrée en x et t :

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} B_0 x \\ -\frac{B_{l_0}}{k} \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix} ; \text{ on vérifie à } t \text{ donné : } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x} = \begin{vmatrix} B_0 \\ -B_{l_0} \cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

7.4. Ondes mécaniques

Appartiennent explicitement aux programmes de PSI, PC, TPC2

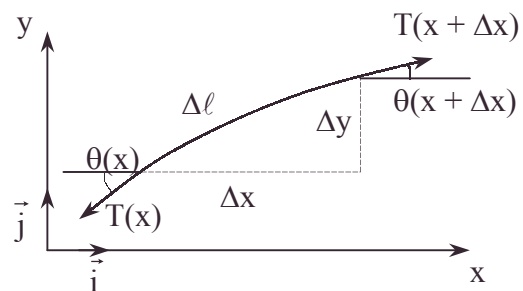
7.4.1. Corde vibrante pesante et série de Fourier

On considère une corde horizontale, de longueur ℓ , de masse linéique σ , fixée à ses deux extrémités. A l'instant initial t_0 , la corde est soumise à un déplacement $f(x)$ hors de sa position de repos, puis on la relâche. On considèrera $f(x)$ comme une fonction paire sur l'intervalle $[-\ell, +\ell]$ pour son développement en série de Fourier.

1. On cherche à établir l'équation de la corde vibrante. On pourra pour cela raisonner à t donné sur un petit élément $\Delta\ell$ de corde, soumis aux tensions $T(x)$ et $T(x+\Delta x)$ à chacune de ses extrémités et faisant des angles respectifs $\theta(x)$ et $\theta(x+\Delta x)$ avec l'horizontale (voir le schéma).

Montrer que si l'on néglige la pesanteur et le mouvement horizontal, l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right].$$



2. En supposant que la corde est soumise à de petites vibrations et que la tension T est constante sur toute la longueur de la corde, comment peut-on simplifier l'équation du mouvement ?

3. Ecrire l'ensemble des conditions initiales et des conditions aux extrémités de la corde.

4. Résoudre l'équation du mouvement en posant : $y = X.Z$ où X n'est fonction que de l'abscisse x et Z n'est fonction que du temps t . On utilisera le fait que toute combinaison linéaire de solutions élémentaires est encore solution d'une équation différentielle linéaire.

5. La corde est écartée de sa position d'équilibre en son milieu d'une hauteur h . Donner l'expression du déplacement de la corde à tout instant t .

6. Donner l'expression des fréquences propres de la corde dans le cas de la question précédente. Donner une représentation graphique sommaire des deux premiers modes normaux associés.

7. Que devient l'équation de la question 1. dans le cas où l'on ne néglige plus le poids de la corde ?

8. Intégrer cette nouvelle équation dans le cas de petites vibrations et d'une tension T constante. On donnera l'équation du déplacement si la corde est écartée de $f(x)$ de sa position de repos puis relâchée. (On pourra prendre une solution de la forme : $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x)$, où y_2 n'est fonction que de l'abscisse x).

9. En supposant que la corde est écartée de sa position d'équilibre en son milieu d'une hauteur h , donner l'expression de la nouvelle amplitude maximale des vibrations de la corde pour son premier mode normal.

Météo ; Durée : 1h

Corrigé

$$1. \, dm = \sigma d\ell = \sigma (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma dx \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ à } t \text{ donné.}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} dm = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$,

soit en projections à t donné :

① $0 = T(x+dx) \cos(\theta(x+dx)) - T(x) \cos \theta(x)$: pas de mouvement axial, car absence d'élasticité type ressort.

$$② \, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dm = T(x+dx) \sin(\theta(x+dx)) - T(x) \sin \theta(x).$$

Remarquons que, à t donné : $\sin \theta = \frac{dy}{d\ell} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}}.$

$$② \text{ donne } \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [T(x) \sin \theta(x)] dx,$$

$$\text{soit } \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}} \right].$$

2. Si $y = A \sin(\omega t - kx)$ avec A infiniment petit d'ordre 1,

$\frac{\partial y}{\partial x} = -k A \cos(\omega t - kx)$ est du même ordre ; $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$ est d'ordre 1 aussi.

$\sin \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ au 2^{ème} ordre près soit : $\cos \theta = 1$ au 2^{ème} ordre près.

Aussi d'après ① $dT = 0$ d'où $T(x) = T_0$ une constante.

Les termes d'ordre 1 satisfont $\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ avec $c^2 = \frac{T}{\sigma}$,
 c célérité des ondes planes progressives.

3.a. $y(x,0) = f(x)$; $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$ sont les conditions initiales, $\forall x$.

b. $y(0,t) = 0$; $y(\ell,t) = 0$ sont les conditions limites, $\forall t$.

$$4. \, y = X(x)Z(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \frac{d^2 Z}{dt^2} \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} Z.$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dt^2}$ la seule fonction de x constamment égale à une fonction de t est la fonction constante Λ .

- Si $\Lambda < 0$: posons $\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\omega^2$ soit $\frac{d^2 Z}{dt^2} + \omega^2 Z = 0$: $Z = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.

Posons $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$; $\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$; $X = A' \cos kx + B' \sin kx$.

Les conditions limites s'écrivent : $X(0, t) = 0$ soit $A' = 0$.

$X(\ell, t) = 0$ soit $B' \sin k\ell = 0$.

Soit $k_n \ell = n\pi, n \in \mathbb{N}$ aussi $k_n = \frac{n\pi}{\ell}$ et $\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}$.

$y = B'_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t \right)$, l'indice n caractérisant les constantes associées au mode n (entier).

• Si $\Lambda > 0$; posons $\Lambda = k^2 c^2 = \omega^2$; $\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0 \Rightarrow X = A'' \cosh kx + B'' \sinh kx$.

Les conditions limites s'écrivent :

$X(0, t) = 0$ soit $A'' = 0$.

$X(\ell, t) = 0$ soit $B'' \sinh k\ell = 0 \Rightarrow B'' = 0 \Rightarrow X = 0, Y = 0$.

L'hypothèse $\Lambda > 0$ est sans intérêt.

Conclusion : si on a un ensemble de modes n (fini en physique),

$$y = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[C_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t + D_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t \right].$$

5.a. Ecrivons la condition initiale en $\frac{\partial y}{\partial t}$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[-C_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t + D_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t \right],$$

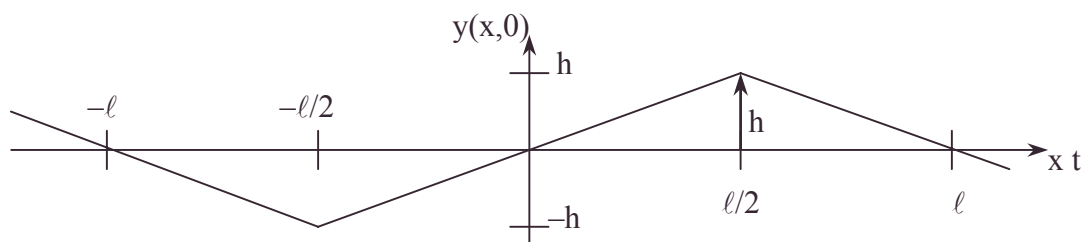
$$\text{soit } \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 = \sum_n D_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \forall x.$$

Or le développement de la fonction périodique de période 2ℓ impaire identiquement

nulle en série de Fourier est $\sum_n D'_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$, avec $D'_n = \frac{2}{2\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} 0 \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0 \quad \forall n$.

On en déduit $D_n = 0$.

b. Ecrivons la condition initiale en $y(x, 0)$ pour trouver C_n .



• Prolongeons $f(x)$ définie sur $[0, \ell]$ afin de la rendre impaire et périodique de période 2ℓ .

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \text{ vu 4., cf. développement de } f(x) \text{ en série de Fourier.}$$

$$\text{Quand } f(x) \text{ est périodique et impaire, } f(x) = \sum_1^\infty C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

• condition initiale, condition limite, ensemble de modes, série de Fourier

$$C_n = \frac{2}{(2\ell)} \int_{-\ell}^{+\ell} \underbrace{f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}}_{\text{fonction paire}} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$C_n = \frac{2}{\ell} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{2hx}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \frac{h}{\ell} (\ell - x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \right].$$

$$\text{Intégrons par partie } \int x \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \left[\frac{-x \cos \frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}} \right] + \int \frac{\cos \frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}} dx;$$

$$\int x \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = -\frac{x\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \ell^2 \frac{\sin \frac{n\pi x}{\ell}}{n^2 \pi^2} + \text{cste.}$$

$$C_n = \frac{4h}{\ell^2} \left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx + \ell \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx - \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \right].$$

$$C_n = \frac{4h}{\ell^2} \left[\left(-\frac{\ell^2}{2\pi n} \underbrace{\cos \frac{n\pi}{2}}_{=0} + \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{\ell^2}{b\pi} \left(-\cos n\pi + \underbrace{\cos \frac{n\pi}{2}}_{=0} \right) \right] \\ \dots \left(\frac{\ell^2}{n\pi} \cos n\pi - \frac{\ell^2}{2\pi n} \underbrace{\cos \frac{n\pi}{2}}_{=0} \right) - \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \left(\underbrace{\sin n\pi}_{=0} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

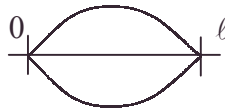
$$C_n = \frac{8h}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}; \quad \text{si } n = 2p, C_{2p} = 0.$$

$$\text{si } n = 2p + 1, C_{2p+1} = \frac{8h}{\pi^2} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}.$$

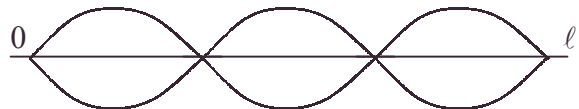
$$\text{Aussi, } y(x, t) = \sum_p \frac{8h(-1)^p}{\pi^2 (2p+1)^2} \cos(2p+1) \frac{\pi ct}{\ell} \sin(2p+1) \frac{\pi x}{\ell}.$$

$$6. \omega_{2p+1} = (2p+1) \frac{\pi c}{\ell} = 2\pi f_{2p+1} \Rightarrow f_{2p+1} = (2p+1) \frac{c}{2\ell}.$$

$$p = 0; \ell = \frac{cT}{2} = \frac{\lambda}{2}; \text{ on a le fuseau}$$



$$p = 1; \ell = \frac{3cT}{2} = \frac{3}{2}\lambda; \text{ on a les 3 fuseaux}$$



$$7. \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} dm = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) + \vec{g} dm \text{ s'écrit en projections à } t \text{ donné : cf. 1.}$$

$$\bullet \sigma \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = dx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T \frac{\partial y}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)} \right] - \sigma g dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} ;$$

$$\bullet 0 = T(x + dx) \cos(\theta(x + dx)) - T(x) \cos \theta(x) .$$

$$8. \text{ L'équation des termes d'ordre 1 s'écrit : cf. 2. : } \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \sigma g .$$

Pour utiliser la question 6., séparons y en deux fonctions de type différent telles que :

$$y = y_1(x, t) + y_2(x) ; \sigma \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} ; T \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \sigma g = 0 , \quad \text{satisfaisant chacune aux conditions limites de } y ;$$

$$y_1(0, t) = 0 = y_1(\ell, t) ; y_2(0, t) = 0 = y_2(\ell, t) .$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{\sigma g}{T} \Rightarrow y_2(x) = \frac{\sigma g}{2T} x(x - \ell) = \frac{g}{2c^2} x(x - \ell) .$$

Les conditions limites $y(x, 0) = f(x) ; \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$ s'écrivent :

$$y_1(x, 0) = f(x) - y_2(x) = g(x) ; \frac{\partial y_1}{\partial t}(x, 0) = 0 .$$

On trouve par analogie entre y du 5. et y_1 , $f(x)$ et $g(x)$:

$$y_1(x, t) = \sum_n C'_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi c}{\ell} t , \text{ avec } C'_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \text{ cf. 5.b.}$$

$$y(x, t) = \frac{\sigma g}{2T} x(x - \ell) + \sum_n C'_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi c}{\ell} t .$$

$$9. C'_n = C_n - \frac{g}{\ell c^2} \int_0^\ell x(x - \ell) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx ; \text{ on connaît } \int x \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx ;$$

$$\text{Intégrons par partie } \int x^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \left[-\frac{\ell x^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right] + \frac{2\ell}{n\pi} \int x \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx .$$

De même,

$$\int x \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \left[\frac{x\ell}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right] - \frac{\ell}{n\pi} \int \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{\ell}{n\pi} \left[x \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right] .$$

$$C'_n = C_n - \frac{g}{\ell c^2} \left[-\frac{\ell^3}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2\ell^2}{n^2 \pi^2} \left(\underbrace{\ell \sin n\pi}_{=0} + \frac{\ell}{n\pi} \cos n\pi - \frac{\ell}{n\pi} \right) \dots \right. \\ \left. \dots - \ell \left(-\frac{\ell^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \underbrace{\sin n\pi}_{=0} \right) \right]$$

$$C'_n = C_n - \frac{2g\ell^2}{n^3 \pi^3 c^2} [\cos n\pi - 1] .$$

$$\text{Si } n = 2p, \cos 2p\pi = 1, C'_{2p} = C_{2p} = 0 ;$$

$$\text{Si } n = 2p + 1, \cos(2p + 1)\pi = -1 ; C'_{2p+1} = C_{2p+1} + \frac{4g\ell^2}{(2p + 1)^3 \pi^3 c^2} ;$$

• conditions limites, corde vibrante pesante, linéarisation, superposition de solutions

Si $p = 0$, $C_1' = \frac{8h}{\pi^2} + \frac{4g\ell^2}{\pi^3 c^2}$, amplitude maximale de $y(x,t)$ pour le mode $n = 1$.

7.4.2. Ondes de torsion (F.F.T.)

Les diverses parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres. Les étudiants pourront admettre les résultats partiels fournis dans l'énoncé, utiles pour la suite et qu'ils n'auraient pas démontrés.

I. Divers régimes d'un oscillateur

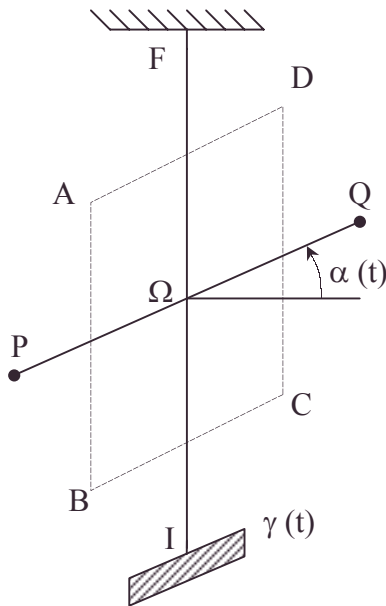


Figure 1

Pendule de torsion symétrique
 $I \Omega = \Omega F = a$

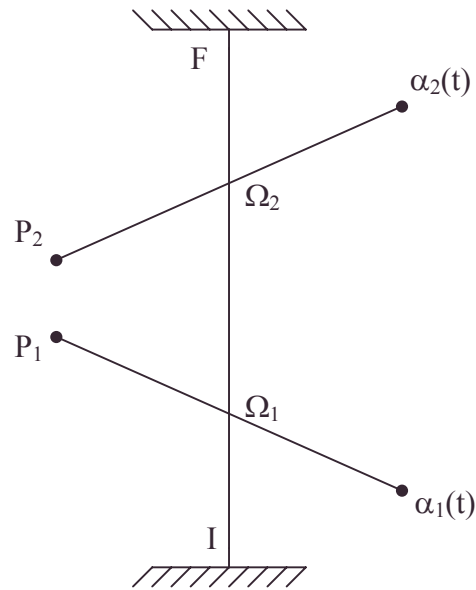


Figure 2

Les deux pendules symétriques couplés
 $I \Omega_1 = \Omega_1 \Omega_2 = \Omega_2 F = a$

Un pendule de torsion symétrique PQ est disposé au milieu Ω de deux points I et F distants de $2a$ sur un axe vertical (figure 1). Les constantes de torsion des deux brins ΩI et ΩF ont une même valeur C et le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe xx' est désigné par J . Dans ces conditions, la pulsation propre des oscillations non amorties

est $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{J}}$. On s'intéresse dans cette partie aux oscillations amorties. L'ensemble

des amortissements se laisse assez bien modéliser par le cadre électrique rectangulaire ABCD, constitué d'une spire rigide de résistance R , de surface S et de moment d'inertie négligeable, représenté en pointillés sur la figure 1. Ce cadre est soumis à un champ magnétique radial (le support des lignes de champ passe par l'axe de rotation) d'intensité constante B . On pose $\phi_0 = BS$; c'est le "flux coupé par radian".

Le système étant abandonné sans vitesse initiale hors de sa position d'équilibre (repérée par $\alpha = 0$), on désigne par $\alpha(t)$ sa position à l'instant t .

1.a. Etablir, par exemple à l'aide de considérations énergétiques, l'équation différentielle

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\phi_0^2}{RJ} \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

b. Discuter succinctement la nature des deux types de régime de retour à l'équilibre ; donner l'expression de la valeur limite de ϕ_0 qui les sépare ; noter cette dernière ϕ_{0c} .

Application numérique : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,5\text{ s}$; $R = 0,010\,\Omega$ et $J = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$.

Montrer que les valeurs usuelles de champ magnétique, de dimension de cadre et de nombre de spires correspondent au régime pseudo-périodique amorti.

2. On pose $\phi_0 = \eta \phi_{0c}$, avec $0 < \eta < 1$, et on excite le système au point I par un barreau (non visible sur la figure 1) auquel on impose un mouvement sinusoïdal de rotation autour de l'axe xx' , d'angle (en notation complexe) $\gamma(t) = \gamma_0 \exp(-i\omega t)$.

Etablir dans ces conditions l'expression, en notation complexe, de $\alpha(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

3. On considère $\omega = \omega_0$; établir alors, en fonction de J , η , ω_0 et γ_0 l'expression de la puissance moyenne $\langle P \rangle$, transmise par l'excitateur.

Application numérique : J et ω_0 conservant leurs valeurs (question 1.b.), calculer $\langle P \rangle$ pour $\eta = 0,1$ et $\gamma_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$.

II. Modes propres de deux oscillateurs couplés

On considère, comme le montre et le précise la figure 2, un système symétrique de deux pendules couplés, non amortis, non excités et identiques l'un et l'autre à celui de la partie I.

1. Etablir le système différentiel vérifié par les angles de rotation $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ de ces deux pendules. Commenter la symétrie de permutation du système obtenu.

2. Montrer que l'on peut décrire le mouvement général comme une combinaison linéaire de deux vibrations harmoniques sinusoïdales (on les nomme modes propres), de pulsations respectives ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$), dont on donnera les expressions respectives en fonction de ω_0 .

3. Comment choisir les conditions initiales pour que seul l'un ou l'autre de ces modes propres soit observable?

III. Modes propres d'une chaîne illimitée d'oscillateurs couplés

On considère dans cette partie les vibrations harmoniques de pulsation ω dans une chaîne verticale, considérée comme illimitée, de pendules non amortis, équidistants et identiques. On désigne par $\alpha_n(t)$ l'élongation angulaire du pendule numéro n (figure 3)

et l'on continue de poser $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{J}}$.

1. Etablir l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre reliant $\frac{d^2 \alpha_n}{dt^2}$ à α_n , α_{n+1} et α_{n-1} .

2. On cherche une solution du système obtenu en III.1., sous la forme $\alpha_n(t) = a_n \exp(-i\omega t)$, où ω est réel et a_n un nombre complexe ne dépendant pas du temps. Justifier, par des considérations physique a priori, que ω est effectivement réel et qu'on peut le choisir positif ; justifier de la même manière que tous les a_n peuvent être choisis de même module. Etablir la relation de récurrence entre a_{n+1} , a_{n-1} et a_n .

On suppose dans ce qui suit que le module commun des $\alpha_n(t)$ est 1.

3. Montrer que $a_n = \exp(ikna)$, où k est réel, est solution du système algébrique de la question III.2., à condition que ω et k satisfassent à une relation – dite relation de dispersion – que l'on établira.

4. Montrer que toutes les solutions physiquement distinctes s'obtiennent pour $0 \leq k \leq \frac{\pi}{a}$. Que représente le mode correspondant à $k = 0$?

Décrire le mode correspondant à $k = \frac{\pi}{a}$.

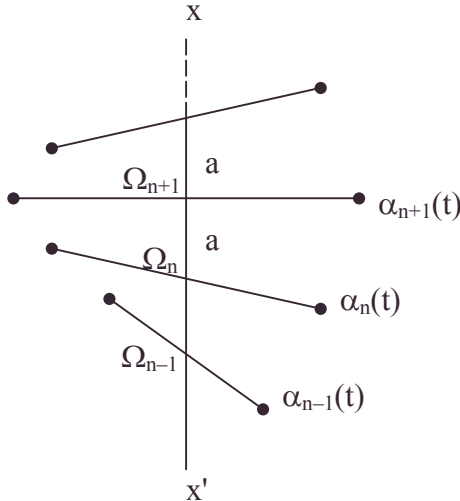


Figure 3

Chaîne illimitée d'oscillateurs couplés, identiques et équidistants

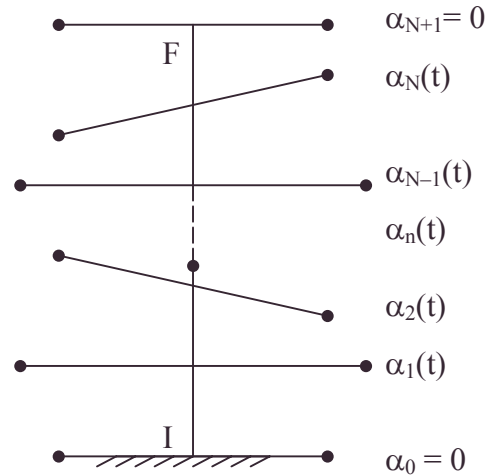


Figure 4

Chaîne de $(N + 2)$ oscillateurs couplés, les pendules de chaque extrémité sont maintenus immobiles.

IV. Modes propres d'une chaîne finie d'oscillateurs couplés

On considère maintenant (figure 4) une chaîne de $N + 2$ pendules, identiques aux précédents, numérotés de 0 à $(N + 1)$, séparés les uns des autres par des fils de longueur a et de constante de torsion C . Ces pendules sont disposés verticalement entre deux points fixes I et F. Le pendule numéro 0 et le pendule numéro $(N + 1)$ sont maintenus fixes, respectivement en I et F. On étudie les modes propres sinusoïdaux stationnaires du système et l'on pose à cette fin : $\alpha_n(t) = [A \exp i k n a + B \exp -i k n a] \exp -i \omega t$.

1. Justifier brièvement la nécessité et la signification physique des constantes A et B.
2. Montrer que la relation de dispersion du système est toujours $\omega^2(k) = 2\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$ et que les conditions aux limites du problème exigent que k ,

désormais appelé "vecteur d'onde" (et identifié, vu le caractère unidimensionnel du problème, à sa mesure algébrique), dépende d'un nombre entier relatif, p , selon la loi

$$k = k_p = \frac{\pi p}{(N + 1)a}.$$

On dira que k est "discrétisé" et l'on parlera de "discrétisation".

3. Il est commode de substituer à l'expression des conditions aux limites réelles de la chaîne d'oscillateurs l'artifice mathématique des "conditions aux limites périodiques", dont on démontre qu'il affecte très peu les résultats, tout en simplifiant considérablement les calculs.

Dans ce modèle, on substitue à une chaîne finie de longueur $L = Na$ une chaîne illimitée vérifiant, pour tout p , $\alpha_p = \alpha_{p+N}$. Cela revient, par exemple, à identifier le point d'abscisse 0 au point d'abscisse L .

On a donc introduit ce faisant une périodicité de chaîne, (macropériode $L = Na$) qui vient se superposer à celle des pendules (qui reste a).

Montrer que cette condition aux limites fictive conduit elle aussi à une discrétisation de k et donc du jeu de pulsations propres ω .

Quel est le nombre de vecteurs d'onde ainsi obtenu ? Commentaire.

V. Modes localisés dans une chaîne infinie périodique

On considère ici l'influence d'une perturbation localisée dans la chaîne : le moment d'inertie du pendule numéro 0 n'est plus J , mais $J_0 = J(1 - \varepsilon)$ avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

La chaîne sera étudiée dans le cadre du modèle des conditions aux limites périodiques de la partie IV., c'est-à-dire modélisée par une chaîne infinie et de macropériode spatiale Na . L'étude précédente a conduit à la discrétisation du vecteur d'onde, selon la loi

$$k = k_p = \frac{\pi p}{(N+1)a}, \text{ l'entier } p \text{ ayant } N \text{ valeurs entières successives. A partir du jeu des } N$$

grandeurs a_n , on définit le jeu des N grandeurs $Q_{k_p} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{n=N} a_n \exp i k_p n a$.

On démontre alors que $a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=1}^{p=N} Q_{k_p} \exp -i k_p n a$ (cf. inversion de l'opération).

Les grandeurs a_n et Q_{k_p} sont dites "transformées de Fourier discrètes" (TDF) l'une de l'autre. On suppose toujours que la dépendance temporelle de α_n est en $\exp -i \omega t$ et l'on se propose de déterminer le nouveau jeu de pulsations propres dans la chaîne.

1. Montrer que l'équation du mouvement du pendule numéro n de la chaîne entraîne la relation de récurrence suivante entre les a_n :

$$-J\omega^2 a_n - C(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) = -J\omega^2 \alpha_0 \varepsilon \delta_{n0} = F_n$$

où le symbole de Kronecker, δ_{ij} , est défini par : $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j ; \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$

2. On désigne par $f_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n F_n \exp i k n a$ le jeu des TDF des F_n . Montrer, à partir de la

relation obtenue en V.1., que $Q_k = \frac{1}{J} \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}$, avec $\omega_k^2 = 2\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$.

Déduire de ce résultat l'expression des a_n en fonction de a_0 , ε , ω , N et les ω_k .

3. Choissant judicieusement une valeur particulière de n , montrer que les pulsations propres ω' du système perturbé sont solutions de l'équation (dite équation séculaire) :

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_k \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega_k^2} = G(\omega').$$

4. Tracer rapidement l'allure de la fonction $G(\omega')$, en précisant les valeurs suivantes ; $G(0)$, (qui n'est pas nul), $G(\omega_k -)$, $G(\omega_k +)$ et $G(\infty)$. Discuter graphiquement les solutions de l'équation séculaire de ε et retrouver que, lorsque $\varepsilon = 0$, $\omega' = \omega_k$.

VI. Oscillateurs mécaniques couplés : une analogie électrique

La figure 5 représente un filtre électrique, constitué d'inductances égales, de valeur L , alternant avec des capacités identiques de valeur C_0 . On désigne respectivement par Q_n et V_n la charge et le potentiel de la capacité de rang n et par i_n l'intensité du courant qui circule dans l'inductance comprise entre les capacités de rang $(n-1)$ et n .

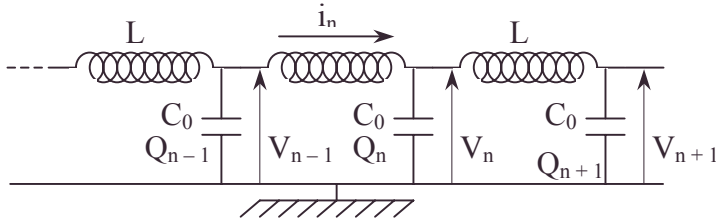


Figure 5

Filtre électrique

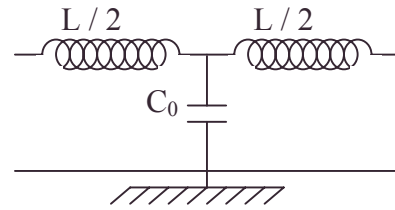


Figure 6

Un choix de cellule élémentaire

1. Etablir l'équation différentielle donnant $\frac{d^2 i_n}{dt^2}$ en fonction des courants i_{n-1} , i_{n+1} et i_n

du filtre, et comparer cette équation à celle qui a été établie en **III.1**. En déduire une correspondance possible entre (L, C_0) d'une part, (J, C) d'autre part. On pourra donc poser dans toute la suite : $i_n(t) = i_0 \exp i(n\varphi - \omega t)$, où φ est un nombre réel, déterminé par le mode de fonctionnement du filtre (c'est-à-dire par les conditions aux limites).

La figure 6 représente un choix possible de cellule élémentaire du filtre électrique. Remarquer que cette cellule est symétrique. On supposera que ce filtre est d'une part ouvert à gauche, d'autre part fermé à droite sur son impédance caractéristique complexe \underline{Z}_c . On rappelle que l'impédance d'entrée d'un réseau chargé par son impédance caractéristique est égale à cette impédance caractéristique. A l'évidence, \underline{Z}_c est aussi l'impédance caractéristique d'un nombre quelconque, voire illimité, de cellules élémentaires, montées en cascade.

2. Déterminer l'expression du \underline{Z}_c de la cellule élémentaire en fonction de $\frac{L}{C_0}$, ω_0 et ω .

En déduire l'expression du \underline{Z}_c du filtre en fonction de $\frac{L}{C_0}$ et φ (on trouvera que \underline{Z}_c représente un résistor).

3. Démontrer la relation hybride : $\frac{L}{2} \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \underline{Z}_c \frac{di_n}{dt} = \frac{1}{C_0} (i_{n-1} - i_n)$ et retrouver l'expression de l'impédance caractéristique \underline{Z}_c .

On pourra trouver avantageux de poser : $\underline{Z}_c = Z_c^r + i Z_c^i$ avec Z_c^r et Z_c^i réels. Quelle serait l'impédance caractéristique du réseau d'oscillateurs mécaniques de la partie **III** ?

VII. Retour sur les oscillateurs mécaniques couplés : considérations énergétiques

On considère un réseau illimité de cellules élémentaires (cf. figure 3) : on y définit la densité moyenne d'énergie cinétique $\langle \varepsilon_c \rangle$, comme le quotient de l'énergie cinétique moyenne d'un oscillateur par la longueur de la maille.

On définit de la même manière la densité d'énergie potentielle $\langle \varepsilon_p \rangle$, que l'on peut commodément affecter à une cellule et enfin la densité moyenne d'énergie, $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_p + \varepsilon_c \rangle$. On rappelle le choix $|a_n| = 1$.

1. Montrer que : $\langle \varepsilon_c \rangle = \left(\frac{J \omega_0^2}{2a} \right) \sin^2 \frac{ka}{2} = \langle \varepsilon_p \rangle = \left(\frac{C}{a} \right) \sin^2 \frac{ka}{2}$.

2. Le flux d'énergie d'une cellule à sa suivante, noté ϕ_e est défini comme la puissance moyenne absorbée lors du passage de la première cellule à la seconde ; ce flux est donc

• cellules [cf quadripôles]élémentaires en cascade, densité volumique d'énergie potentielle, impédance caractéristique

associé au couple $\Gamma_{n,n+1} = C(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ exercé par la cellule de rang $(n + 1)$ sur la cellule de rang n .

Montrer que : $\phi_\varepsilon = C \sqrt{\frac{C}{J}} \left(\sin \frac{ka}{2} \right) (\sin ka)$.

3. Par définition, la vitesse de propagation de l'énergie, notée v_ε , est le quotient du flux ϕ_ε par la densité d'énergie $\langle \varepsilon \rangle$.

Donner l'expression de la vitesse de propagation de l'énergie dans la chaîne et comparer cette dernière à celle de la vitesse de groupe v_g . Commentaire.

4. L'impédance (mécanique) caractéristique $\underline{Z}_{mc} = Z_{mc}^r + i Z_{mc}^i$ étant définie comme le rapport du couple à la vitesse angulaire : $\Gamma_{n,n+1} = -\underline{Z}_{mc} \frac{d\alpha_n}{dt}$, donner l'expression de Z_{mc}^r en fonction de v_ε, J et a , puis celle de Z_{mc}^i en fonction de J et ω . Commentaire.

Mines ; Durée : 3h

Corrigé

I.1.a. L'effet dissipatif est dû à l'effet Joule.

La f.e.m. d'induction $e = -\frac{d\phi_{\text{coupé}}}{dt} = -\phi_0 \dot{\alpha} \Rightarrow P_{\text{Joule}} = \frac{e^2}{R} = \frac{\phi_0^2}{R} \dot{\alpha}^2$,

l'énergie cinétique $\frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$, l'énergie potentielle $\frac{1}{2} 2C \alpha^2$, permettent le bilan en

puissance : $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + C \alpha^2 \right] = -\frac{\phi_0^2}{R} \dot{\alpha}^2 \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{\phi_0^2}{R J} \dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$.

b. Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\phi_0^2}{R J} r + \omega_0^2 = 0$;

$\Delta = \frac{\phi_0^4}{(R J)^2} - 4\omega_0^2$; $\Delta > 0$ si $\phi_0 > \sqrt{2 R J \omega_0}$, $\phi_{0c} = \sqrt{2 R J \omega_0}$;

$\phi_0 > \phi_{0c}$ régime aperiodique amorti.

$\phi_0 = \phi_{0c}$ régime aperiodique amorti critique.

$\phi_0 < \phi_{0c}$ régime pseudo-periodique amorti.

AN : $\phi_{0c} = 6,34 \cdot 10^{-2}$ Wb.

Valeurs usuelles : $B = 10^{-2}$ T ; $S = 10^{-2}$ m² ; $N = 10$; $\phi_0 = 10^{-3}$ Wb.

$\phi_0 < \phi_{0c}$ régime pseudo-periodique amorti.

2. Appliquons le théorème du moment cinétique au cadre :

$J \ddot{\alpha} = -C(\alpha - \gamma) - C \alpha - \frac{\phi_0^2}{R} \dot{\alpha} \Rightarrow \ddot{\alpha} + 2\omega_0 \eta^2 \dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \frac{\omega_0^2}{2} \gamma$.

En notation complexe : $\gamma = \gamma_0 e^{-i\omega t}$, $\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}$; $\alpha_0 = \frac{\omega_0^2 \gamma_0}{2[\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega_0 \eta^2 \omega]}$.

3. La puissance fournie par l'excitateur (exerçant le couple $-C(\alpha - \gamma)$ avec une vitesse angulaire $\dot{\gamma}$) est en notation réelle $P = C(\gamma - \alpha) \dot{\gamma}$ à l'instant t .

La puissance moyenne est : $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(C(\gamma - \alpha) \dot{\gamma}^*)$ en notation complexe.

$$\text{Pour } \omega = \omega_0 : \langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[i \omega_0 \gamma_0^2 C \left(1 - \frac{i \omega_0^2}{4 \omega_0^2 \eta^2} \right) \right] = \frac{\omega_0^2 \gamma_0^2}{8 \eta^2} C ;$$

$$\text{AN : } \langle P \rangle = \frac{J \omega_0^3 \gamma_0^2}{16 \eta^2} = \frac{J \pi^3 \gamma_0^2}{2 T^3 \eta^2} ; \langle P \rangle = 7,938.10^{-2} \text{ W} .$$

II.1. Appliquons le théorème du moment cinétique à chaque pendule :

$$J \ddot{\alpha}_1 = -C \alpha_1 - C(\alpha_1 - \alpha_2) ; J \ddot{\alpha}_2 = -C \alpha_2 - C(\alpha_2 - \alpha_1) ;$$

$$\text{Ainsi, } \ddot{\alpha}_1 + \omega_0^2 \alpha_1 = \frac{\omega_0^2}{2} \alpha_2 ; \ddot{\alpha}_2 + \omega_0^2 \alpha_2 = \frac{\omega_0^2}{2} \alpha_1 .$$

La permutation α_1, α_2 laisse le système d'équations invariant.

2. Posons $S = \alpha_1 + \alpha_2$; $D = \alpha_2 - \alpha_1$;

$$\ddot{S} + \omega_1^2 S = 0 \quad \text{avec } \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{2} ;$$

$$\ddot{D} + \omega_2^2 D = 0 \quad \text{avec } \omega_2^2 = \frac{3}{2} \omega_0^2, \omega_2 > \omega_1 .$$

A partir des solutions sinusoïdales en S (et en D) de pulsation ω_1 (et respectivement

$$\omega_2), \text{ on obtient : } \alpha_1 = \frac{S-D}{2} ; \alpha_2 = \frac{S+D}{2}, \text{ c.q.f.d.}$$

3. • si $S \equiv 0 \quad \forall t : \alpha_1 = -\frac{D}{2} ; \alpha_2 = \frac{D}{2}$ dépendent uniquement de ω_2 ; il suffit que

$$S(0) = 0 \text{ et } \dot{S}(0) = 0 .$$

• Si $D \equiv 0 \quad \forall t : \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{S}{2}$, dépendent uniquement de ω_1 ; il suffit que

$$D(0) = 0 \text{ et } \dot{D}(0) = 0 .$$

III.1. Le théorème du moment cinétique appliqué au n^e pendule donne :

$$J \ddot{\alpha}_n = -C(\alpha_n - \alpha_{n+1}) - C(\alpha_n - \alpha_{n-1}), \text{ soit } \ddot{\alpha}_n = \frac{\omega_0^2}{2} (\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} - 2\alpha_n) .$$

$$\text{2.a. } \omega = \omega' + i \omega'' \text{ donne } \alpha_n = \alpha_{0_n} e^{-i \omega' t} e^{\omega'' t} .$$

L'énergie cinétique $E_{c_n} = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}_n^2$ aurait une expression infinie pour $t = \pm \infty$ si ω''

positif ou négatif, ce qui est à rejeter : $\omega'' = 0 \Rightarrow \omega$ est réel.

On peut le choisir positif moyennant un déphasage par rapport au cas ω négatif.

b. La chaîne étant illimitée, il revient au même d'étudier un pendule ou un autre. On peut donc choisir $|a_n| = \text{constante } \forall n$. (On ne prend pas a_n car la phase peut être différente. cf. synchronisation ou non).

$$\text{c. } \alpha_n = a_n \exp -i \omega t \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2) a_n = \frac{\omega_0^2}{2} (a_{n+1} + a_{n-1}) .$$

$$3. a_n = \exp i k n a ; a_{n+1} = a_n \exp i k a ; a_{n-1} = a_n \exp -i k a .$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \omega_0^2 \cos ka \text{ ou } \omega^2 = 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} .$$

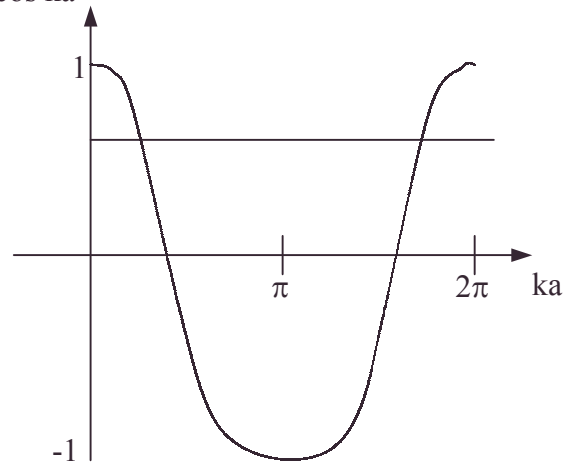
a_n est solution acceptable à condition de satisfaire à cette relation.

4.a. $-1 < \cos ka < +1$ pour k réel. Voir figure ci-après.

L'ensemble des valeurs est décrit une fois pour $0 \leq ka \leq \pi$.

b. $k = 0$; tous les pendules sont en phase, mais $\omega = 0$ le seul mouvement est de translation.

c. $k = \frac{\pi}{a}$; les pendules successifs sont en opposition de phase ($\omega = \omega_0 \sqrt{2}$) : le motif se répète localement quel que soit l'indice de la paire de 2 pendules successifs considérée. Il n'y a pas de propagation, mais onde stationnaire.



$$\text{IV.1. } \alpha_n(t) = A \exp -i(\omega t - k n a) + B \exp -i(\omega t + k n a) .$$

A décrit une onde plane progressive se propageant selon les x croissants .

B décrit une onde plane progressive se propageant en sens contraire.

On peut appeler l'une onde incidente et l'autre, onde réfléchi, la chaîne étant finie et les extrémités fixes. On ne peut avoir une onde progressive unique vu la réflexion sur les extrémités d'où la nécessité $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

2.a. Injectons α_n dans **III.1.** :

$$e^{-i\omega t} (-\omega^2 + \omega_0^2) (A e^{i k n a} + B e^{-i k n a}) = e^{-i\omega t} \frac{\omega_0^2}{2} [A e^{i k n a} \cdot 2 \cos ka + B e^{-i k n a} \cdot 2 \cos ka] ,$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \cos ka \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 (1 - \cos ka) , \text{ ou } \omega^2 = 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} .$$

b. Conditions limites :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \Rightarrow A + B = 0 ; \\ \alpha_{N+1} = 0 \Rightarrow A e^{i k (N+1) a} + B e^{-i k (N+1) a} = 0 . \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \sin k (N+1) a = 0 \text{ or, } A \neq 0 \Rightarrow k_p = \frac{\pi p}{(N+1) a} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ cqfd.}$$

3. Etudions pour une chaîne infinie, l'onde progressive : $\alpha_n = \exp -i(\omega t - k n a)$.

La macropériode $L = Na$ impose $\exp i k (n + N) a = \exp i k n a$,

$$\text{soit } \exp i k N a = 1 \Leftrightarrow k N a = 2\pi p \text{ avec } p \in \mathbb{Z} : k_p = \frac{2\pi p}{Na} = \frac{2\pi p}{L} .$$

Cette relation est identique à celle de ② pour N grand, pair ou impair.

$$\text{Comme la relation de dispersion reste valable : } \omega_p^2 = \omega_0^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi p}{N} \right) , p \in \mathbb{Z} .$$

• Les valeurs distinctes de ω sont obtenues pour $-N < 2p \leq +N$ (cf. **III.4.** cercle trigonométrique).

– Si N est pair, $N = 2q$ $p \in \{-(q-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, q\}$, soit N valeurs.

– Si N est impair, $N = 2q + 1$ $p \in \left\{ -\left(q + \frac{1}{2}\right), -\left(q - \frac{1}{2}\right), \dots, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, \dots, q + \frac{1}{2} \right\}$,

soit $2q + 1$ valeurs. On obtient aussi N valeurs de k .

• Le couplage montre qu'il y a autant de k que de pendules dans la macropériode.

V.1. III.2. donne : $-J\omega^2 a_n - C(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) = 0$.

Ecrivons cette équation dans le cas particulier $n = 0$.

$$-J(1 - \varepsilon)\omega^2 a_0 - C(a_1 + a_{-1} - 2a_0) = 0 \Rightarrow -J\omega^2 a_0 - C(a_1 + a_{-1} - 2a_0) = -J\omega^2 a_0 \varepsilon.$$

$$\text{Ainsi : } -J\omega^2 a_n - C(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) = -J\omega^2 a_0 \varepsilon \delta_{n0} = F_n.$$

L'écriture permet d'insérer le cas $n = 0$ dans le cas général.

2.a. $f_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N F_n e^{ikna}$; remplaçons F_n .

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[-J\omega^2 \sum_1^N a_n e^{ikna} - C \left(\sum_1^N a_{n+1} e^{ikna} + \sum_1^N a_{n-1} e^{ikna} - 2 \sum_1^N a_n e^{ikna} \right) \right] ;$$

$$f_k = -J\omega^2 Q_k - C(e^{-ika} Q_k + e^{ika} Q_k - 2Q_k) = -JQ_k \left[\omega^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 (2\cos ka - 2) \right] ;$$

$$f_k = JQ_k (\omega_k^2 - \omega^2) ; Q_k = \frac{1}{J} \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \text{ avec } \omega_k^2 = 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

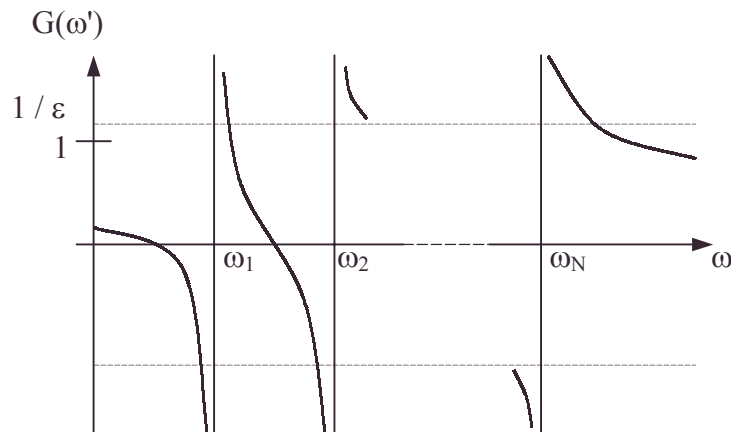
b. $a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \frac{f_k}{J} \frac{\exp(-ikna)}{\omega_k^2 - \omega^2}$; or, $f_k = \frac{-J\omega^2 a_0 \varepsilon}{\sqrt{N}} \forall k$ vu $F_n = 0$ si $n \neq 0$.

$$a_n = \frac{a_0 \varepsilon \omega^2}{N} \sum_k \frac{\exp(-ikna)}{\omega^2 - \omega_k^2}.$$

3. Pour $n = 0$, $a_0 = a_0 \frac{\varepsilon \omega^2}{N} \sum_k \frac{1}{\omega^2 - \omega_k^2}$; $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_k \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_k^2} = G(\omega)$.

Les pulsations propres doivent y satisfaire. On peut transcrire ω par ω' bien évidemment.

4.



• Remarquons pour $k = 0$:

$$\omega_0 = 0 : G(\omega') = \frac{1}{N} \left(\frac{\omega'^2}{\omega'^2 - 0} + \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega_1^2} + \dots + \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega_N^2} \right). \text{ Quand } \omega' \rightarrow 0 ; G(\omega') \rightarrow \frac{1}{N}.$$

- $G(\omega_k -) = -\infty ; G(\omega_k +) = +\infty$.
- L'intersection de la droite $y = \frac{1}{\varepsilon}$ avec la courbe $y = G(\omega')$ donne :
 - $\varepsilon = 0 ; y = \infty ; \omega' = \omega_k$ avec $k \in \{1, 2, \dots, N\}$.
 - $\varepsilon = 1$; on ne trouve aucune intersection avant ω_1 mais N intersections voisines de $\omega_k +$.
 - $\varepsilon < 0$; on perd l'intersection supérieure à ω_N ; on a N intersections voisines de $\omega_k -$; on a une intersection entre 0 et ω_1 .

VI.1. Ecrivons la loi d'Ohm entre les nœuds V_{n-1} et V_n :

$$V_{n-1} - V_n = \frac{L di_n}{dt} ; \text{ or, } V_{n-1} = \frac{Q_{n-1}}{C_0} ; V_n = \frac{Q_n}{C_0}.$$

$$\text{Ecrivons la loi aux nœuds } V_{n-1} \text{ et } V_n : i_{n-1} - i_n = \frac{dQ_{n-1}}{dt} ; i_n - i_{n+1} = \frac{dQ_n}{dt}.$$

En dérivant la première équation et en substituant par les dernières :

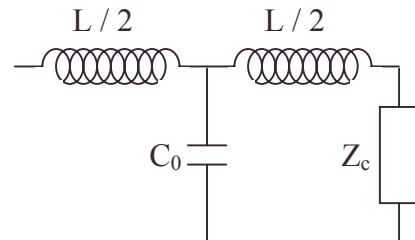
$$\frac{L d^2 i_n}{dt^2} + \frac{1}{C_0} (2i_n - i_{n-1} - i_{n+1}) = 0 \text{ que l'on rapproche de :}$$

$$J \ddot{\alpha}_n + C(2\alpha_n - \alpha_{n-1} - \alpha_{n+1}) = 0 ; \frac{1}{LC_0} \text{ est analogue à } \frac{C}{J}.$$

On associera les inerties J et L , et par complémentarité $\frac{1}{C_0}$ et C .

2. Ce montage a une impédance \underline{Z}_c .

$$\underline{Z}_c = j \frac{L\omega}{2} + \frac{\left(\underline{Z}_c + j \frac{L\omega}{2} \right) \frac{1}{j\omega}}{\underline{Z}_c + j \frac{L\omega}{2} + \frac{1}{JC\omega}}$$



$$\text{Il reste : } \underline{Z}_c^2 = \frac{L}{C_0} - \frac{L^2 \omega^2}{4}.$$

$$\text{Introduisons } \omega_0^2 = \frac{2}{LC_0} \text{ analogue à } \omega_0 = 2 \frac{C}{J} : \underline{Z}_c^2 = \frac{L}{C_0} \left(1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \right).$$

La relation de dispersion des oscillateurs mécaniques :

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \text{ s'écrit par analogie pour le filtre : } \omega^2 = 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{En remplaçant } \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} ; \underline{Z}_c^2 = \frac{L}{C_0} \cos^2 \frac{\varphi}{2} ; \underline{Z}_c = \pm \sqrt{\frac{L}{C_0}} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

On prendra le signe + du résistor ordinaire (le signe - donnant une résistance négative est éliminé en l'absence de sources d'énergie extérieures au schéma).

3.a. La partie à droite de la cellule $n - 1$ est d'impédance \underline{Z}_c .

L'équation de la maille fermée est : $\frac{L}{2} \frac{di_n}{dt} + \underline{Z}_c i_n - \frac{Q_{n-1}}{C_0} = 0$.

La loi aux nœuds : $i_{n-1} - i_n = \frac{dQ_{n-1}}{dt}$.

$$\frac{L}{2} \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \underline{Z}_c \frac{di_n}{dt} = \frac{1}{C_0} (i_{n-1} - i_n).$$

b. $i_n = i_0 \exp i(n\varphi - \omega t)$;

$i_{n-1} = i_0 \exp i(n\varphi - \omega t - \varphi) = i_n e^{-i\varphi}$. On tire de **3.a.** :

$$\underline{Z}_c = Z_c^r + Z_c^i = -\frac{e^{-i\varphi} - 1}{i\omega C_0} - \frac{L\omega}{2i} = \frac{2e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}}{C_0 \omega} + i \frac{L\omega}{2}.$$

$$Z_c^r = 2 \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{C_0 \omega} \sin \frac{\varphi}{2} ; \text{ or, } 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow Z_c^r = \frac{L}{C_0} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \Rightarrow Z_c^r = + \sqrt{\frac{L}{C_0}} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

$$Z_c^i = -2 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{C_0 \omega} + \frac{L\omega}{2} = 0 \text{ car } \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

c. Vu l'analogie : $\underline{Z}_c = \sqrt{JC} \cos \frac{ka}{2}$.

VII.1.a. $\alpha_n = \cos(kna - \omega t) = \text{Re}(\exp i(\omega t - kna))$;

$$\varepsilon_c(t) = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2} J \left(\dot{\alpha}_n \right)^2 \right] = \frac{\omega^2 J}{2a} \sin^2(kna - \omega t) ; \langle \varepsilon_c(t) \rangle = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 J}{2a} ; \text{ or } \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \sin^2 \frac{ka}{2} ;$$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon_c \rangle = \frac{1}{2} \frac{J \omega_0^2}{a} \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

$$\text{b. } \varepsilon_p(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2} C \left[(\alpha_n - \alpha_{n-1})^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2 \right] \right).$$

Le coefficient $\frac{1}{2}$ s'impose pour ne pas attribuer 2 fois la même énergie potentielle à un fil de torsion. Transformons les différences de cosinus en produit.

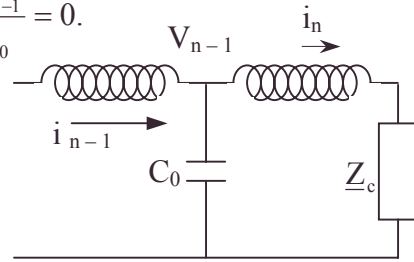
$$\Rightarrow \varepsilon_p(t) = \frac{C}{4a} \left[4 \sin^2 \left(k \left(n - \frac{1}{2} \right) a - \omega t \right) \sin^2 \frac{ka}{2} + 4 \sin^2 \left(k \left(n + \frac{1}{2} \right) a - \omega t \right) \sin^2 \frac{ka}{2} \right] ;$$

$$\langle \varepsilon_p \rangle = \frac{C}{a} \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

c. Vu ω_0^2 , $\langle \varepsilon_c \rangle = \langle \varepsilon_p \rangle$.

2. $P = -C(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \dot{\alpha}_{n+1}$; le signe $-$ s'impose devant ce bilan.

On utilisera la notation complexe ; l'astérisque indique le conjugué.



$$\phi_\varepsilon = \langle P \rangle = -\frac{C}{2} \operatorname{Re} \left[(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \dot{\alpha}_{n+1}^* \right] = \frac{C\omega}{2} \sin ka = C \sqrt{\frac{C}{J}} \sin \frac{ka}{2} \sin ka$$

$$\text{vu } \omega = 2 \sqrt{\frac{C}{J}} \sin \frac{ka}{2}.$$

$$\mathbf{3.a.} \quad v_\varepsilon = \frac{\phi_\varepsilon}{\langle \varepsilon \rangle} \text{ avec } \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_c \rangle + \langle \varepsilon_p \rangle = 2 \frac{C}{a} \sin^2 \frac{ka}{2}; \quad v_\varepsilon = a \sqrt{\frac{C}{J}} \cos \frac{ka}{2}.$$

$$\mathbf{b.} \quad \omega^2 = 2 \omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = a \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin \frac{ka}{2} \cos \frac{ka}{2} = a \sqrt{\frac{C}{J}} \cos \frac{ka}{2}.$$

$$v_g = v_\varepsilon.$$

Comme dans le vide infini sans charge ni courant (sans dispersion ni absorption) pour les ondes électromagnétiques, la vitesse de groupe est égale à la vitesse de propagation de l'énergie de chaque onde (pour une direction donnée) sans dépendre de ω .

$$\mathbf{4.} \quad \Gamma_{n,n+1} = C(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = -Z_{mc} \dot{\alpha}_n; \quad \alpha_n = \exp i(kna - \omega t) \text{ cf. } |a_n| = 1.$$

$$\alpha_{n+1} = \exp i(kna - \omega t + ka) = e^{ika} \alpha_n \Rightarrow$$

$$Z_{mc} = Z_{mc}^r + i Z_{mc}^i = \frac{C}{i\omega} [\exp(ika) - 1] = 2 \frac{C}{\omega} e^{i\frac{ka}{2}} \sin \frac{ka}{2}.$$

$$\bullet \quad Z_{mc}^r = 2 \frac{C}{\omega} \cos \frac{ka}{2} \sin \frac{ka}{2} = \frac{C\sqrt{2}}{\omega_0} \cos \frac{ka}{2} = \frac{J}{a} v_\varepsilon.$$

$$Z_{mc}^i = 2 \frac{C}{\omega} \sin^2 \frac{ka}{2} = C \frac{\omega}{\omega_0^2} = \frac{J\omega}{2}.$$

$$\bullet \quad \dot{\alpha}_n = i\omega \alpha_n \Rightarrow \Gamma_{n,n+1} = -Z_{mc}^r \dot{\alpha}_n - Z_{mc}^i \omega \alpha_n.$$

Le terme réel correspond à un terme de frottement visqueux dont l'importance dépend des formes (J , a) et du milieu (v_ε).

Le terme imaginaire qui fait intervenir l'angle et la constante de torsion correspond à un couple de rappel élastique.

7.5. Optique

7.5.1. Optique géométrique

Appartient aux programmes de MPSI, PCSI, PTSI, TSI1, BCPST1, TPC1

7.5.1.1. Miroir liquide

On se propose de déterminer la position du foyer optique F du miroir formé par un liquide dans un récipient tournant. On prendra comme origine de l'axe de symétrie du miroir le sommet S constitué par le point le plus bas de sa concavité, l'axe Sz étant toujours orienté selon la verticale ascendante. L'équation de la surface libre dans le repère tournant est donc :

$$z = Cr^2, \text{ avec } C = \frac{\omega^2}{2g}, \omega \text{ étant la vitesse angulaire. } \textcircled{5}$$

On prendra $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ pour les applications numériques.

I. Définitions

1. Définir le chemin optique (MN) entre deux points M et N dans un milieu quelconque d'indice $n(x,y,z)$. Exprimer MN si le milieu est homogène, d'indice n constant.

2. Quelle est la condition sur (MN) pour qu'un système optique soit rigoureusement stigmatique pour le couple de points M et N ?

3. Qu'appelle-t-on foyer image d'un système optique ?

II. Détermination optique de la distance focale

On considère un objet lumineux (étoile, galaxie) que l'on peut considérer comme situé à l'infini dans la direction de l'axe Sz du miroir liquide. Tous les rayons qu'il émet parviennent donc sur celui-ci parallèlement à Sz. Soit (P) le plan d'un front d'onde incident à la distance D de S, émis par l'objet, et M (r, D) un point quelconque de ce plan.

1. Exprimer en fonction de D, r, C et e le chemin optique (MN) entre le point M et le point N (0, e) où le rayon réfléchi coupe l'axe Sz, en utilisant le point d'incidence I(r, z) du rayon sur le miroir.

2. En supposant constant le chemin optique (MN) quelque soit le rayon incident (c'est-à-dire quel que soit r), déterminer la position e du point N sur l'axe Sz.

3. En déduire que le miroir liquide est rigoureusement stigmatique pour un objet situé à l'infini sur l'axe Sz, et que son foyer optique F est situé à une distance focale du

$$\text{sommet } f = \frac{g}{2\omega^2}.$$

4. Calculer la période de rotation T à imposer pour obtenir un miroir liquide de télescope de distance focale $f = 2,45 \text{ m}$. Le rayon interne R de la cuve étant de 1,41 m, que vaut la vitesse linéaire du liquide au bord de la cuve ?

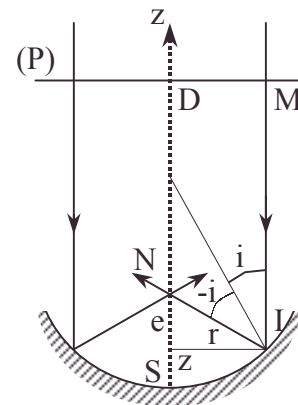
III. Calcul mathématique direct de la distance focale

Retrouver le résultat précédent par un raisonnement mathématique direct utilisant l'expression polaire de la courbe ⑤ ramenée au foyer F (faire un schéma clair).

IV. Discussion

1. Quel est l'avantage essentiel d'un miroir de cette forme par rapport à un miroir classique sphérique pour l'observation astronomique ? Quel inconvénient majeur présentent les miroirs liquides pour cet usage par rapport aux autres télescopes ?

2. Le liquide métallique utilisé jusqu'à présent est le mercure.



Expliquer pourquoi les chercheurs ont récemment utilisé un autre liquide métallique (mélange eutectique gallium – indium).

3. Pour minimiser la formation passagère de rides à la surface du mercure, dues à d'éventuelles vibrations du sol, on peut montrer qu'il est préférable d'utiliser une faible hauteur de mercure.

Calculer la dénivellation de mercure Δh entre le centre et le bord du miroir. En déduire la hauteur au repos et le poids minimum de mercure nécessaire à la formation du miroir de focale $f = 2,45$ m. ($\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$).

Autres concours ; Option ATS ; Durée : 1h

Corrigé

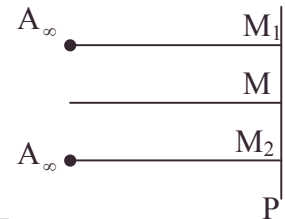
I.1.a. $(MN) = \int_M^N n \, ds$.

b. Si $n = n_0$, la courbe suivie par la lumière (photons) est une ligne droite en absence de réflexion. $(MN) = n_0 MN$.

2. Le stigmatisme rigoureux est défini par un chemin optique constant pour chacun des rayons passant par M et N.

3. Le foyer image est le point conjugué du point objet à l'infini sur l'axe optique du système (ici, Sz).

II.1.a. $(A_\infty, M_1) = (A_\infty, M_2) = (A_\infty, M) \quad \forall M \in P \perp S_z$.
 $(A_\infty, M_1, F) = (A_\infty, M_2, F) = (A_\infty, M, F) \quad \forall M \in P \Rightarrow$
 $(M_1 F) = (M_2 F) = (MF) \quad \forall M \in P$



b. $(MF) = MI + IN \quad \forall n = 1$.

$$MN = (MF) = (D - z) + \sqrt{(e - z)^2 + r^2} = D - Cr^2 + \sqrt{(e - Cr^2)^2 + r^2}.$$

2. r étant le paramètre variable qualifiant M .

On doit avoir : $\frac{d(MN)}{dr} = 0$:

$$0 = -2Cr + \frac{1}{2} \frac{2r - 4Cr(e - Cr^2)}{\sqrt{(e - Cr^2)^2 + r^2}} \Rightarrow 2C\sqrt{(e - Cr^2)^2 + r^2} = 1 - 2C(e - Cr^2).$$

Elevons au carré : $4C^2(e - Cr^2)^2 + 4C^2r^2 = 1 - 4C(e - Cr^2) + 4C^2(e - Cr^2)^2$.

Il reste $e = \frac{1}{4C}$ qui détermine F .

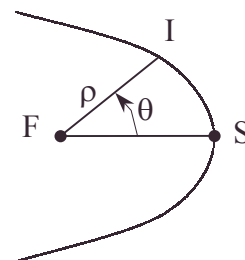
3. $f = \overline{SF} = e = \frac{1}{\frac{4\omega^2}{2g}} = \frac{g}{2\omega^2}$.

4.a. $\omega = \sqrt{\frac{g}{2f}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2f}{g}}$; A.N. : $T = 4,4$ s.

b. $V = \omega R$; A.N. : $V = 1,99 \text{ m.s}^{-1}$.

III. $\rho = \frac{p}{1 + \cos \theta}$ est l'équation de cette parabole.

$\theta = 0 \Rightarrow \rho = f = \frac{p}{2} \Rightarrow \rho(1 + \cos \theta) = p = 2f$.



• mélange eutectique gallium indium [liquide réfléchissant], rides à la surface du mercure, stigmatisme rigoureux

Or, $\rho = IF = \sqrt{(e-r)^2 + r^2}$ et $\rho \cos \theta = e - z$ et $e = f$.

$$\sqrt{(f-z)^2 + r^2} + f - z = 2f \Rightarrow \sqrt{(f-z)^2 + r^2} = f + z.$$

Elevons au carré : $(f-z)^2 + r^2 = (f+z)^2$ soit $r^2 = 4fz = 4fCr^2 \Rightarrow f = \frac{1}{4C} = \frac{g}{2\omega^2}$.

IV.1.a. En dehors des points de Weierstrass, points conjugués dans le cadre du stigmatisme rigoureux, le stigmatisme du miroir sphérique est approché et par conséquent des déformations dites aberrations géométriques existent.

b. L'axe du télescope à mercure tournant à symétrie de révolution est à axe exclusivement vertical, ce qui limite la zone d'observation.

2. La vapeur de mercure étant toxique on préfère trouver d'autres matériaux au pouvoir de réflexion élevé et sans absorption cf. effet Joule.

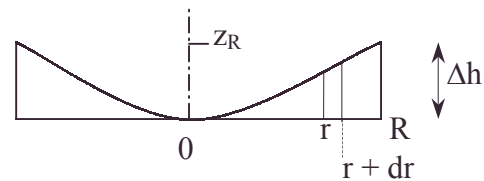
3.a. $\Delta h = z_R - z_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{R^2}{4f}$. A.N. $\Delta h = 0,20 \text{ m}$

b. Volume : $V = \iint 2\pi r dr z(r)$

$$V = \int_0^R 2\pi r dr Cr^2 = \frac{2\pi C}{4} R^4.$$

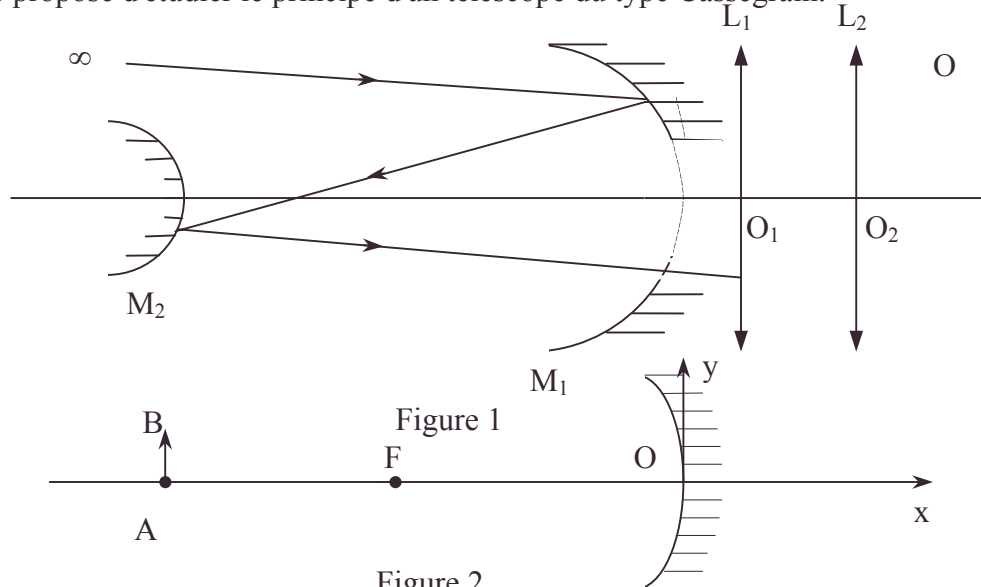
$$V = \frac{2\pi}{16f} R^4 \Rightarrow m = \frac{2\pi\rho}{16f} R^4 ; \text{A.N. : } m = 8616 \text{ kg} \Rightarrow mg = 84437 \text{ N}.$$

c. $h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8f}$; A.N. : $h = 0,10 \text{ m}$.



7.5.1.2. Télescope du type Cassegrain avec miroirs et oculaire

On se propose d'étudier le principe d'un télescope du type Cassegrain.



Cet appareil comporte (Figure 1) :

1. Un miroir objectif sphérique concave M_1 de rayon R_1 percé d'une petite ouverture centrale derrière laquelle on place l'oculaire O .
2. Un petit miroir sphérique convexe M_2 de rayon R_2 qui envoie vers l'oculaire la lumière réfléchiée sur l'objectif M_1 .
3. Un oculaire O .

• aberrations géométriques, parabole, points de Weierstrass [stigmatisme parfait], télescope du type Cassegrain

4. Un dispositif mécanique permettant au télescope de conserver une position fixe par rapport aux astres observés, en dépit du mouvement de la Terre.

Dans tout le problème on se placera dans le contexte de l'approximation de Gauss.

I. L'oculaire

Il est constitué de deux lentilles minces L_1 et L_2 placée dans l'air, centrées sur le même axe, la lumière rencontrant d'abord L_1 et se propageant de gauche à droite.

On désigne par O_1 et O_2 les centres optiques, F_1, F'_1, F_2 et F'_2 respectivement les foyers objet et image de L_1 et L_2 . On posera $\overline{O_1 O_2} = e$; $\overline{O_1 F'_1} = f'_1$; $\overline{O_2 F'_2} = f'_2$.

1. Etudier le système optique pour $e = 0$.

2. Pour $e \neq 0$, chercher la position d'un point A placé sur l'axe pour que l'image de A à travers le système des 2 lentilles coïncide avec A.

On calculera $p = \overline{O_1 A}$ en fonction de e , f'_1 et f'_2 .

3. L'ensemble des deux lentilles constitue un système centré unique. On tracera sur une figure claire, la marche des rayons lumineux pour l'oculaire de Huygens défini par

$$\frac{f'_1}{3} = \frac{e}{2} = f'_2 = a.$$

Les rayons à tracer sont :

a. L'incident ① parallèle à l'axe principal optique. Il coupe en sortie l'axe en F' . Montrer que F' est le conjugué de F'_1 par L_2 ; F' sera le foyer image du système optique.

b. L'incident ② passant par F , foyer objet du système et qui sort parallèle à l'axe optique. Montrer que F est le conjugué de F_2 par L_1 .

c. L'incident parallèle à l'axe optique entre les deux lentilles. Montrer que F et F' sont les foyers du système optique.

d. En utilisant la relation de conjugaison de Newton $\overline{FA.F'A'} = -f'^2$, retrouver la relation dite de Gullstrand : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f_1 f'_2}$.

e. Le système est-il convergent ou bien divergent ?

II. Les miroirs du télescope

On considère maintenant le système optique constitué des deux miroirs. On appellera respectivement S_i et F_i les sommets et foyers du miroir i ; notons $f_i = \overline{S_i F_i}$ et $d = \overline{F_1 F_2}$.

1. Déterminer l'emplacement de l'image d'un objet donnée par l'ensemble des deux miroirs M_1 et M_2 et dans cet ordre. L'objet sera placé en x , tel que $x = \overline{F_1 A}$.

Situer l'image pour un objet à l'infini.

2. On déplace le miroir M_2 par rapport à M_1 de façon à ce que l'image d'un point à l'infini sur l'axe après réflexions sur M_1 puis M_2 coïncide avec le sommet de M_1 .

Indiquer la relation qui détermine la position de M_2 par rapport à M_1 .

3. Les miroirs M_1 et M_2 ne sont plus sphériques : M_1 est parabolique et M_2 est hyperbolique. Quel intérêt y a-t-il à choisir ces formes plutôt que la forme sphérique ?

AIR ; Durée : 1h30

Corrigé

I. Etude de l'oculaire

1. Quand 2 lentilles minces ont $e = 0$ soit $O_1 \equiv O_2 \equiv O$ on peut considérer le système comme une lentille mince, en particulier un rayon passant par le centre O n'est pas dévié car passant par O_1 , il ne l'est pas et passant par O_2 , il ne l'est pas non plus : on conserve la particularité d'une lentille mince.

Optique géométrique

Les relations de conjugaison pour un objet A de l'axe à travers les deux lentilles :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1}; \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_2}; \quad \text{par addition :}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{f'_1 \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2}.$$

2. Soit $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A' = A$ ("point double" ou invariant de la transformation).

$p = \overline{O_1A}$ est la variable de résolution $\overline{O_2A} = \overline{O_1A} - \overline{O_1O_2} = p - e$.

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \overline{O_1A_1} = \frac{pf'_1}{p + f'_1}; \quad \frac{1}{\overline{O_2A}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \overline{O_2A_1} = \frac{f'_2(p - e)}{f'_2 + e - p}.$$

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_1} + \overline{A_1O_2} = \frac{pf'_1}{p + f'_1} + \frac{f'_2(e - p)}{f'_2 + e - p} = e \Rightarrow p^2(f'_1 + f'_2 - e) + pe(e - 2f'_1) + e^2f'_1 = 0$$

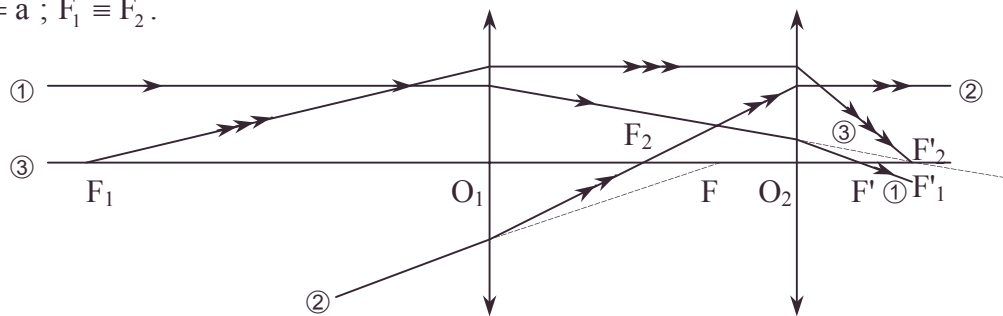
$$p = \frac{-e(e - 2f'_1) \pm e\sqrt{e^2 - 4f'_1f'_2}}{2(f'_1 + f'_2 - e)};$$

3.a.b.c. Les foyers obéissent aux conjugaisons :

$$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty; \quad A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F'.$$

$$\overline{O_1F'} = 3a = \overline{O_1D_2} + \overline{O_2F'_1} = 2a + \overline{O_2F'_1} \Rightarrow \overline{O_2F'_1} = a.$$

$$\overline{O_2F'_2} = a; \quad F'_1 \equiv F'_2.$$



d. Démonstration de la formule de Gullstrand dans le cas d'un doublet de lentilles minces

• Calculons la position de F' par la relation de Newton pour L_2 .

$$\overline{F_2F'_1} \cdot \overline{F'_2F'} = -f'^2_2 \Rightarrow \overline{F'_2F'} = \frac{-f'^2_2}{\overline{O_1F'_1} - \overline{O_1O_2} - \overline{O_2F_2}} = \frac{f'^2_2}{e - f'_1 - f'_2}.$$

• Calculons la position de F de même pour L_1 .

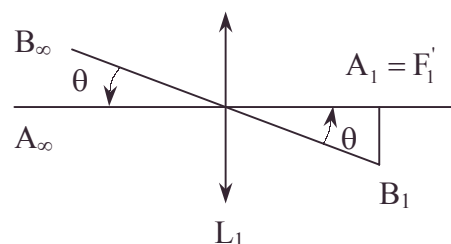
$$\overline{F_1F} \cdot \overline{F'_1F_2} = -f'^2_1 \Rightarrow \overline{F_1F} = \frac{-f'^2_1}{e - f'_1 - f'_2}.$$

• En absence de théorie des points principaux dans le programme de certaines filières la distance focale du doublet se retrouve par des considérations sur l'infini.

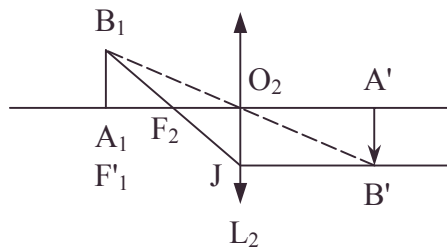
• En observant un objet à l'infini de diamètre apparent θ , l'image intermédiaire obtenue par L_1 , A_1B_1 mesure $\overline{A_1B_1} = -f'_1\theta$.

• L'image définitive à travers L_2 mesure :

$$\overline{A'B'} = \overline{O_2J} = \overline{A_1B_1} \frac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F_2F'_1}}.$$

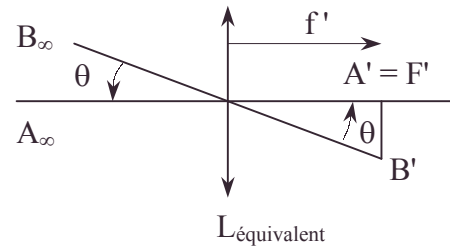


• point double [points objet et image coïncident]



$$\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1} \frac{f_2'}{F_2F_1'} = \frac{-f_1'f_2'}{F_2F_1'} \theta.$$

avec $\overline{F_2F_1'} = \overline{O_1F_1'} - \overline{O_2F_2} - \overline{O_1O_2}$ soit
 $\overline{F_2F_1'} = f_1' + f_2' - e.$



avec $\overline{A'B'} = -f'\theta$

• Quand on considère e, f_1', f_2' comme des infiniment petits par rapport à O_1A , tout se passe comme si les 2 lentilles ne constituaient qu'une seule lentille mince cf. $e = 0$, d'où un problème équivalent pour l'observation d'un point à l'infini.

f' la nouvelle distance focale du système

$$\text{équivalent : } \Rightarrow -f'\theta = \frac{-f_1'f_2'\theta}{f_1' + f_2' - e} \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1'f_2'}.$$

e. Cas particulier étudié : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{a} - \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a} \Rightarrow f' = \frac{3a}{2}.$

$f' = 4,5 \text{ cm} > 0$: le système est convergent.

II.1. $A \xrightarrow{M_1} A_1 \xrightarrow{M_2} A'$; la relation de Newton pour un miroir s'écrit :

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = f'^2 ;$$

Pour M_1 , $\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1A_1} = f_1'^2$; pour M_2 , $\overline{F_2A_1} \cdot \overline{F_2A'} = f_2'^2$.

$$\overline{F_2A_1} = \overline{F_1A_1} - \overline{F_1F_2} = \frac{f_1'^2}{x} - d \Rightarrow \overline{F_2A'} = \frac{f_2'^2 x}{f_1'^2 - dx}.$$

• Si $x \rightarrow \infty$, $\overline{F_2A'} \rightarrow -\frac{f_2'^2}{d}.$

2. On considère que d détermine la position de M_2 par rapport à M_1 , d paramètre de l'énoncé.

On veut $A' = S_1$ pour A_∞ : soit $\overline{F_2A'} = \overline{F_2F_1} + \overline{F_1S_1} = -(d + f_1) = -\frac{f_2'^2}{d}.$

On a : $d^2 + df_1 - f_2'^2 = 0 \Rightarrow d = \frac{-f_1 \pm \sqrt{f_1^2 + 4f_2'^2}}{2}.$

3.a. • Pour un dioptré quelconque, la conjugaison de A, A' s'écrit en terme de chemin optique :

$$n_1 AI + n_2 A'I = \text{cste } \forall I.$$

• Pour un miroir ($n_2 = -n_1$), on a : $IA - IA' = \text{cste}, \forall I.$

• Le stigmatisme rigoureux pour A, A' définit le miroir, comme ensemble des points I ; c'est la définition géométrique d'une hyperbole de foyer A et A' : M_1, M_2 peuvent être hyperboliques pour des cas toujours les mêmes en A, A_1, A' .

• Le cas particulier de M_1 s'explique car A est à l'infini ; l'hyperbole devient une parabole (2^{ème} foyer à l'infini).

b. Défaut : les miroirs sphériques ont un stigmatisme approché et des aberrations géométriques se manifesteront en A' lieu d'observation.

• dioptré, principe de Fermat, tout se passe comme si

7.5.1.3. Lunette astronomique

On représente une lunette astronomique par deux lentilles minces convergentes : l'objectif L_1 de focale $f'_1 = 80\text{ cm}$, diamètre $D = 60\text{ mm}$, et l'oculaire L_2 de focale $f'_2 = 6,0\text{ mm}$. La lunette est réglée à l'infini (c'est-à-dire quand elle donne d'un objet à l'infini une image à l'infini).

1. Quelle est la distance h entre L_1 et L_2 ? Quel est l'intérêt de ce réglage ?
2. Représenter sur un schéma, sans respecter l'échelle, le devenir d'un rayon incident faisant un angle α avec l'axe optique et émergeant sous un angle α' dans les conditions de Gauss.

3. Déterminer l'expression du grossissement angulaire $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de la lunette en fonction de f'_1 et f'_2 .

4. On a, au moment de l'observation : la distance Terre – Mars égale à $7,0 \cdot 10^7\text{ km}$, le diamètre de Mars 6800 km ; la distance Terre – Lune égale à $3,8 \cdot 10^5\text{ km}$, le diamètre de la Lune de 3400 km . En estimant l'angle maximal sous lequel l'observateur voit une image, à environ 30° , cet observateur voit-il Mars en entier ? Même question pour la lune.

5. Tous les rayons incidents qui pénètrent dans l'objectif de la lunette donnent des rayons émergents qui, à la sortie de l'instrument, passent à l'intérieur d'un cercle appelé "cercle oculaire".

- a. Etablir la relation qui lie le diamètre d du cercle oculaire, le diamètre D de l'objectif et le grossissement G .
- b. Quelle est la position du cercle oculaire par rapport à l'oculaire ?
- c. Où faut-il placer l'œil pour avoir une observation optimale ? Quelle taille maximale le cercle oculaire ne doit-il pas dépasser a priori, lors d'une observation visuelle ?

6. Lorsqu'on observe une étoile à l'aide de la lunette, l'image paraît ponctuelle. Quel est alors l'intérêt de la lunette ?

7. On admet que le pouvoir de résolution de l'objectif est donné par $\beta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ on prendra $\lambda = 550\text{ nm}$.

- a. Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution de l'objectif ?
- b. Quelles sont les autres causes de limitation du pouvoir de résolution réel ?

Autres concours ; Durée : 1h

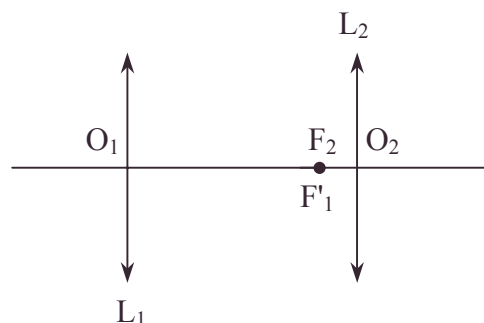
Corrigé

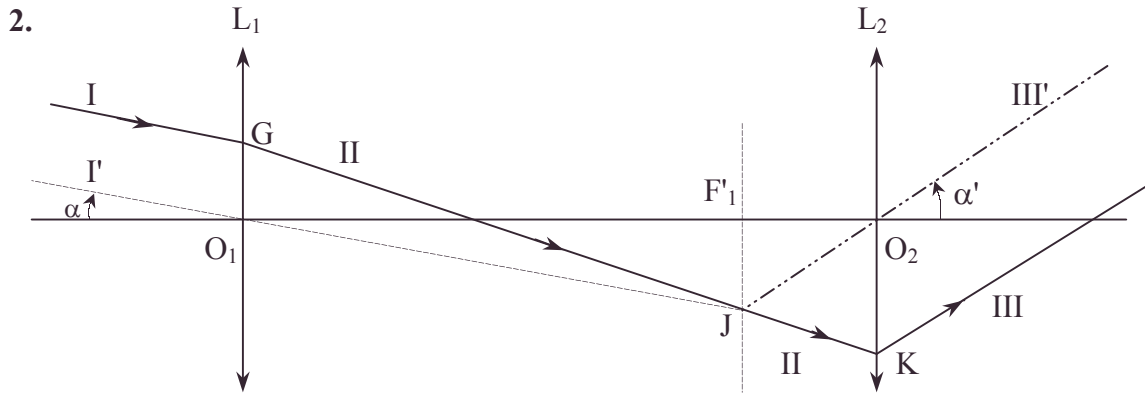
1. Le système est afocal (foyers à l'infini) :

$$F'_1 \equiv F_2.$$

$$O_1 O_2 = f'_1 + f'_2 ; \text{A.N. : } h = 80,6\text{ cm.}$$

L'œil idéal voit à l'infini sans effort. Ce système afocal évite l'accommodation pour voir l'image à l'infini d'un objet.





- I' et III' sont des rayons auxiliaires de raisonnement.
- I et I' rayons parallèles convergeant en J ; ils émergent de L₂ parallèlement à III' qui n'est pas dévié car passant par O₂.
Construction : il suffit de tracer GJ jusque en K pour avoir II puis de tracer la parallèle à III' passant par K pour avoir III.

3. Notons sur la figure $\alpha' > 0$, $\alpha < 0$.
 $\overline{F_1'J} = f_1'\alpha = -f_2'\alpha'$ en assimilant angle et tangente dans les triangles $O_1F_1'J$ et $O_2F_2'J$.

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'} ; \text{A.N. : } G = 133,3.$$

$$4. \alpha = -\frac{\phi}{L} ; \alpha' = G\alpha = \frac{f_1'}{f_2'} \frac{\phi}{L}.$$

Pour Mars, $\alpha' = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$;

pour la Lune, $\alpha' = 1,2 \text{ rad}$.

Or, $\alpha'_{\text{lim}} = 0,52 \text{ rad} = 30^\circ$.

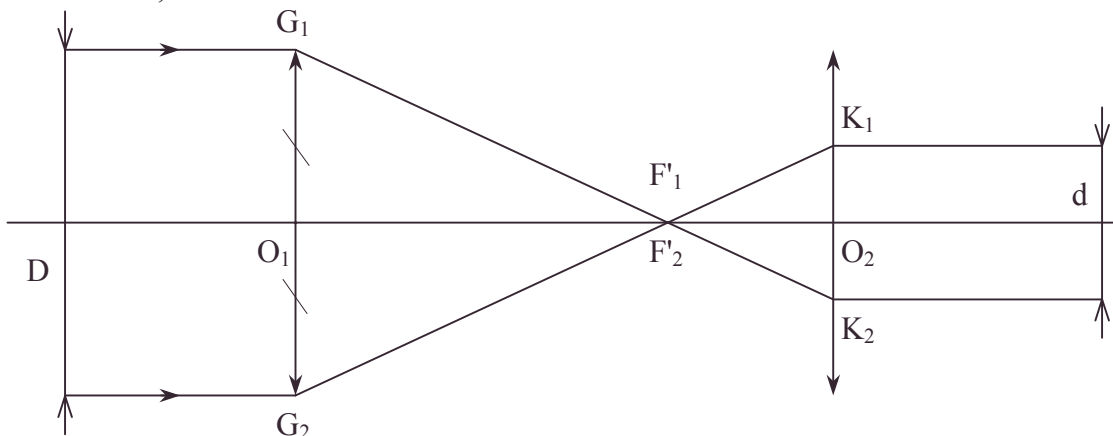
Un observateur voit Mars en entier mais ne voit pas la Lune d'un seul coup d'œil dans les conditions décrites.

5. Vu l'approximation de Gauss, la figure ci-après est faite avec $\alpha = 0$.

a. Sur la figure qui suit les triangles $G_1G_2F_1'$ et $K_1K_2F_1'$ sont semblables

$$\Rightarrow \frac{D}{d} = \frac{f_1'}{f_2'} = -G \Rightarrow d = -\frac{D}{G}.$$

A.N. : $d = 0,45 \text{ mm}$.



• accommodation de l'œil, approximation de Gauss, configuration afocale, rayons auxiliaires en optique géométrique, système afocal

b. On peut supposer le diamètre de l'oculaire supérieur à d vu sa faible valeur. Tous les rayons qui pénètrent dans l'objectif passent par l'image de l'objectif par rapport à l'oculaire ; on obtient le cercle oculaire de position O' , conjugué de O_1 par rapport à O_2 .

$$\frac{1}{O_2 O_1'} - \frac{1}{O_2 O_1} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \overline{O_2 O_1'} = \frac{f_2' \overline{O_2 O_1}}{\overline{O_2 O_1} - f_2'} ; \text{A.N. : } \overline{O_2 O_1'} = 6,04 \text{ mm.}$$

O_1' se confond avec F_2' à 0,04 mm près.

c. L'œil reçoit en ce lieu le maximum d'énergie lumineuse reçue sur l'objectif si la pupille a son diamètre supérieur à d ; le maximum de d est le diamètre de la pupille en première approximation.

6. L'image d'une étoile reste ponctuelle avec ou sans lunette ; mais la surface réceptrice de lumière est l'objectif qui reçoit beaucoup plus d'énergie que la surface de la pupille. L'étoile semble plus brillante.

7.a. La diffraction négligée par l'optique géométrique limite le pouvoir de résolution de l'objectif car on obtient des taches d'Airy et non des points. A.N.: $\beta = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ rad.}$

L'angle $\beta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ correspond au premier zéro de la fonction décrivant l'intensité de la

tache d'Airy dans le plan focal de L_1 . β est d'autant plus grand que D est faible ; une bonne lunette a un "bon" diamètre.

b. Autres causes : turbulence et absorption atmosphériques, aberrations des lentilles, texture discrétisée du récepteur (rétine, pellicule, capteur CCD numérique d' image vidéo).

7.5.1.4. Fibre optique – guidage optique

1. Un guide d'onde permet de transporter sur des courtes distances des puissances très importantes, de quelques MW. Dans les télécommunications, la puissance transportée est très faible (mW) mais le nombre d'informations véhiculées doit être très important.

1. Pourriez-vous expliquer pourquoi on a orienté les recherches vers les fréquences optiques dans les télécommunications ? Pour de telles fréquences, le guidage est obtenu par une fibre de verre et repose sur le phénomène de réflexion totale.

2. Décrivez quelques dispositifs ou appareils utilisant le phénomène de réflexion totale.

2. Etude du phénomène de réflexion totale

On adoptera dorénavant la notation complexe pour décrire les ondes électromagnétiques.

1. Loïs de Descartes

Soit une onde électromagnétique plane incidente dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}_i = \vec{E}_{0_i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$ en notation complexe.

Cette onde arrive sur la surface de séparation plane entre deux diélectriques d'indice n_1 et n_2 , de perméabilité magnétique μ_0 . Les champs électriques réfléchis et transmis s'écrivent respectivement $\vec{E}_r = \vec{E}_{0_r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$ et $\vec{E}_t = \vec{E}_{0_t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$.

a. Donner les relations qu'imposent les conditions de continuité.

b. En déduire les lois de Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction.

c. On suppose $n_2 < n_1$. A partir de quel angle limite θ_c de l'angle d'incidence θ_i dans le milieu 1, se produit le phénomène de réflexion totale ?

Donner l'ordre de grandeur de θ_c si les milieux sont du verre ordinaire ($n = 1,5$) et l'air ($n = 1$).

2. Onde évanescente

On se place dans le cas où $\theta_i > \theta_c$ ($n_2 < n_1$).

Nous admettons que, d'un point de vue purement formel, les lois de Descartes s'appliquent également dans le cas de la réflexion totale ; θ_t étant "l'angle de réfraction", avec " $\sin \theta_t > 1$ " et l'on pose $\cos \theta_t = -(1 - \sin^2 \theta_t)^{\frac{1}{2}} = -jm$ (m réel positif).

a. Avec les notations de la figure 3, expliciter le champ transmis \vec{E}_t en fonction de $y, z, \theta_i, n_1, n_2, \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ (on ne cherchera pas à calculer l'amplitude \vec{E}_{0t} de ce champ).

b. Etudier la propagation de l'onde transmise, appelée onde évanescente, suivant Oz.

c. Cette onde se propage-t-elle suivant Oy ? Pour quelle valeur δ de y , l'amplitude du champ transmis \vec{E}_t est-elle divisée par e ($\ln e = 1$) ?

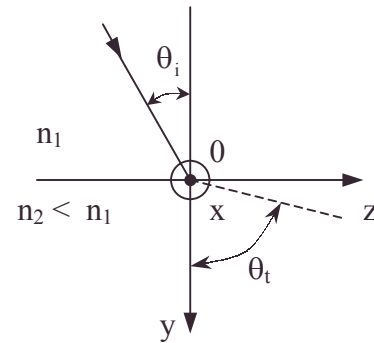


figure 3

Comment varie δ en fonction de θ_i ? On fera une étude très sommaire en traçant $\frac{\delta}{\lambda_2}$

pour $\frac{n_1}{n_2} = 1,5$ en fonction de θ_i ($\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$, λ_0 longueur d'onde dans le milieu 2).

3. La fibre optique

1. Atténuation dans la fibre

Les pertes par transmission X sont exprimées en dB/km. On rappelle que $X_{dB} = 10 \log \frac{p_1}{p_2}$; p_1 puissance optique à l'entrée de la fibre et p_2 puissance optique au

bout d'un kilomètre de parcours. Au début, l'atténuation était de 10 dB/km. Actuellement on arrive à 0,2 dB/km.

Dans les deux cas, exprimer en % les pertes au bout de 1 km.

2. Profil d'indice

Une fibre optique est généralement constituée d'un cœur de rayon a dont l'indice n varie avec la distance r à l'axe, et d'une gaine d'indice constant n_2 . Nous supposons que :

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right) & \text{pour } r < a \\ n_2^2 & \text{pour } a < r < b \end{cases}$$

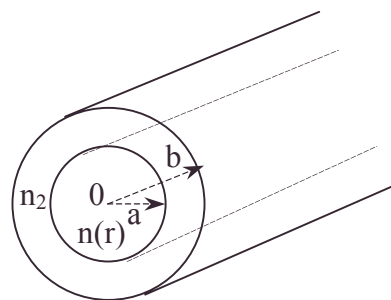


figure 4 $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$.

avec $n_2 < n_1$, α = constante positive, b rayon extérieur de la gaine et $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$.

Dans la pratique, n_1 et n_2 ont des valeurs très voisines et Δ est très petit en général ($\Delta \approx 10^{-2}$). Représenter $n = f(r)$ pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = \infty$.

3. Fibre à saut d'indice

On envisage le cas d'une fibre à saut d'indice (α infini).

a. Le plan d'incidence d'un rayon SI se propageant dans l'air et tombant sur la fibre est le plan de la figure 5.

Montrer que si θ_i reste inférieur à un angle θ_a , un rayon peut être guidé dans le cœur.

On appelle "ouverture numérique" O.N. la quantité $\sin \theta_a$. Exprimer l'O.N. en fonction de n_1 et Δ .

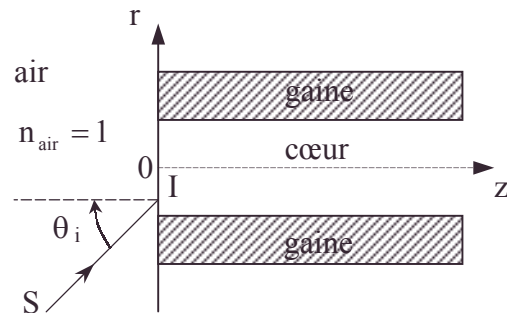


figure 5

Application numérique : Calculer l'O.N. pour $\Delta = 10^{-2}$ et $n_1 = 1,5$.

b. Une impulsion lumineuse arrive à $t = 0$ au point 0 ($r = 0$) sous la forme d'un faisceau conique convergent, de demi-angle au sommet θ_i ($\theta_i < \theta_a$).

Pour une fibre de longueur ℓ , calculer l'élargissement (temporel) Δt de cette impulsion à la sortie de la fibre. Exprimer Δt en fonction de ℓ , n_1 , c et θ_i .

Application numérique : calculer Δt pour $\ell = 10$ m, $\theta_i = 8^\circ$, $n_1 = 1,5$.

4. Fibre à gradient d'indice

C'est pour remédier en particulier à l'élargissement des impulsions que l'on a fabriqué des fibres à gradient d'indice (n varie en fonction de r). Le cœur de la fibre est, en fait, constitué d'un grand nombre de couches (une cinquantaine) d'indices décroissants. Pour $r = 0$, $n = n_1$.

On considère un rayon lumineux pénétrant dans la fibre en 0, se propageant dans un plan axial et dans le cœur.

a. Montrer que (cf. figure 5) : $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \left(\frac{n}{A}\right)^2 - 1$, où A est une constante que l'on exprimera en fonction de n_1 et $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{1}{n_1} \sin \theta_i\right)$.

On considère dorénavant une fibre pour laquelle $n(r)$ est de la forme indiquée ci-dessus avec $\alpha = 2$.

Pour les applications numériques, on prendra $a = 25 \mu\text{m}$, $n_1 = 1,5$ et $\Delta = 10^{-2}$.

b. Intégrer l'équation différentielle précédente. On donnera l'équation de la trajectoire d'un rayon en fonction de a , Δ , θ_0 . Quelle est la nature de cette trajectoire ?

Montrer que le rayon coupe l'axe Oz en des points régulièrement espacés d'une longueur d que l'on exprimera en fonction de a , Δ et θ_0 .

Application numérique : calculer d pour $\theta_i = 8^\circ$.

c. Dans les conditions précédentes, quelle est la condition sur θ_i pour que le rayon de propage dans le cœur de la fibre ?

Donner l'ouverture numérique O.N. en fonction de Δ et n_1 .

Application numérique : calculer l'O.N.

Quelle valeur θ_i ne doit-il pas dépasser ? Vérifier que cette condition est réalisée dans l'application numérique de la question 3.4.b.

d. On considère de nouveau l'impulsion lumineuse définie à la question 3.3.b. (avec $\sin \theta_i < \text{O.N.}$). Calculer l'élargissement $\Delta t'$ de cette impulsion à la sortie d'une fibre à gradient d'indice de longueur ℓ . On supposera θ_i suffisamment petit et $a \ll \ell$ pour pouvoir faire toutes les approximations utiles dans le calcul.

- élargissement temporel de l'impulsion lumineuse à la sortie de la fibre optique, faisceau lumineux conique convergent des fibres optiques, impulsion lumineuse, ouverture numérique[fibres optiques], profil d'indice, trajectoire d'un rayon dans une fibre à gradient d'indice

On exprimera $\Delta t'$ en fonction de n_1 , ℓ , c et $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \theta_i}{n_1}\right)$.

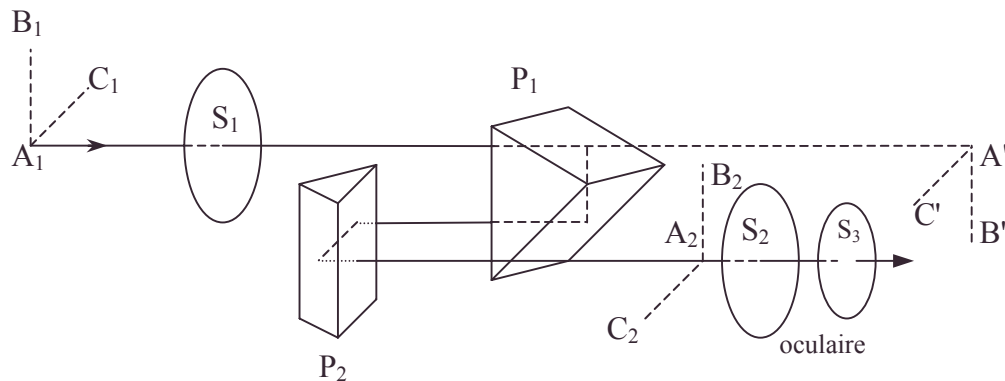
Application numérique : calculer $\Delta t'$ pour $\theta_i = 8^\circ$ et $\ell = 10 \text{ m}$.

Centrale ; Durée : 1h30

Corrigé

1.1. La fréquence plus élevée en optique permet une rapidité d'exécution et donc un volume d'information à traiter supérieur.

2.a. Utilisation de prismes à réflexion totale dans les jumelles : pour redresser l'image donnée par l'objectif, et décentrage.



b. Mesure de l'indice de réfraction d'une substance par mesure de l'angle d'incidence limite : $n_1 \sin i_{\text{lim}} = n_2$ (Réfractomètre).

2.1.a.b. Soit une base de vecteurs tangents dans le dioptré : \vec{u}_1, \vec{u}_2 orthogonaux, \vec{u}_3 le vecteur directement perpendiculaire (tous unitaires).

α. Ecrivons la continuité de $\vec{E}_{\text{tangential}}$ selon les deux directions orthogonales \vec{u}_i du dioptré.

$$\vec{u}_i \cdot (\vec{E}_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \vec{E}_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} - \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}) = 0.$$

Prenons l'origine dans le plan : pour $\vec{r} = \vec{0}$ on a : $\vec{u}_i (\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} - \vec{E}_{0t}) = 0$ et l'égalité, $\forall \vec{r}$, impose l'égalité des phases $\forall \vec{r}$, solution évidente, unique comme toujours en physique, facile à vérifier vu **β**.

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \Rightarrow \text{Loi de Descartes à la réflexion : } \theta_i = -\theta_r.$$

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \Rightarrow \text{Loi de Descartes à la réfraction : } n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t.$$

β. Ecrivons la continuité de \vec{D}_{normal} ($\sigma = 0$ et $\epsilon_r = n^2$ cf. 2 diélectriques électriquement neutres).

$$\epsilon_0 \vec{u}_3 \cdot (n_1^2 \vec{E}_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + n_1^2 \vec{E}_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} - n_2^2 \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}) = 0.$$

$\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_3 (n_1^2 \vec{E}_{0i} + n_1^2 \vec{E}_{0r} - n_2^2 \vec{E}_{0t}) = 0$ et l'égalité $\forall \vec{r}$ impose la même égalité des phases et les mêmes lois.

c. Réflexion totale pour $\theta_i < \theta_c$; $\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ correspond à $\theta_t = \frac{\pi}{2}$;

AN : $\theta_c = 41,81^\circ$.

• ouverture numérique [fibres optiques], prismes à réflexion totale dans les jumelles

2.a. $\theta_i > \theta_c$; $n_2 < n_1$.

Vu la figure 3, $k_{ix} = k_{tx} = 0$, $k_{ty}^2 + k_{tz}^2 = n_2^2 k_0^2$.

Or dans \mathbb{C} , la loi de Descartes s'applique et $k_{tz} = n_2 k_0 \sin \theta_t = k_{iz} = n_1 k_0 \sin \theta_i$;

d'où $k_{ty}^2 = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) \Rightarrow$ dans \mathbb{C} : $k_{ty} = \pm j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}$.

$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - z k_0 n_1 \sin \theta_i \pm j y k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2})}$; il faut prendre le signe $-$ pour que $|\vec{E}_t| \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow +\infty$, car dans le cas contraire l'amplification sans source d'énergie est impossible.

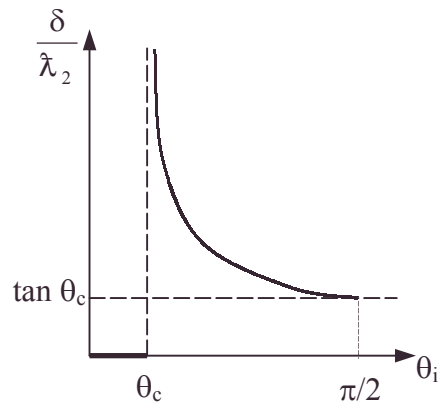
$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - 2\pi n_1 \sin \theta_i \frac{z}{\lambda_0})} e^{-2\pi n_1 \frac{y}{\lambda_0} \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}}$.

b.c. Il n'y a pas propagation selon Oy, seulement selon Oz, avec :

$v_\phi = \frac{\omega \lambda_0}{2\pi n_1 \sin \theta_i}$.

L'amplitude de \vec{E}_t : $\vec{E}_{0t} e^{-2\pi n_1 \frac{y}{\lambda_0} \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}} = \frac{\vec{E}_{0t}}{e}$ pour $y = \delta$

avec $\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n_1 \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}}$; $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2} = \frac{\lambda_0}{n_1 \sin \theta_c}$; $\frac{\delta}{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_c} - 1}}$.



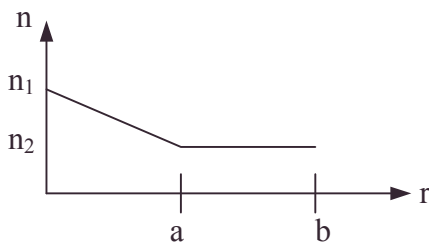
$\frac{\pi}{2} > \theta_i > \theta_c$

3.1.a. $10 \log_{10} \frac{p_1}{p_2} = 10$; $p_2 = 0,1 p_1$; $\frac{p_1 - p_2}{p_1} = 90\%$.

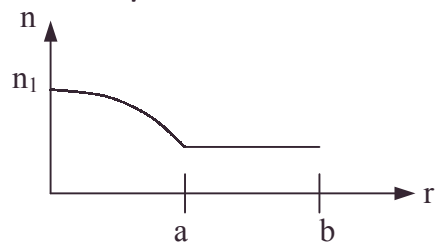
b. $10 \log_{10} \frac{p_1}{p_2} = 0,2$; $p_2 = 0,955 p_1$; $\frac{p_1 - p_2}{p_1} = 4,5\%$.

2. $n^2(r) = n_1^2 \left(1 - 2 \frac{(n_1^2 - n_2^2)}{2n_1^2} \left(\frac{r}{a} \right)^\alpha \right)$ pour $r < a$; $n^2 = n_2^2$ si $a < r < b$.

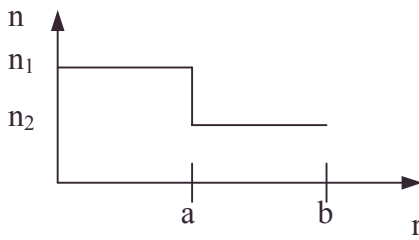
α. $\alpha = 1$.



β. $\alpha = 2$



γ. $\alpha = \infty$

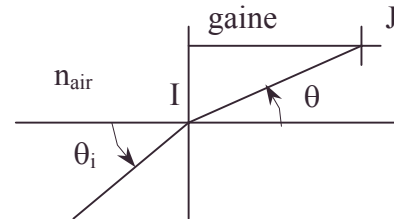


3.a. La loi de Descartes en I s'écrit :

$$\sin \theta_i = n_1 \sin \theta.$$

Pour que le rayon revienne en J vers le cœur, il faut qu'il y ait réflexion totale en J d'angle limite

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$



L'angle d'incidence par rapport à la gaine étant $\frac{\pi}{2} - \theta$, il faut $\frac{\pi}{2} - \theta > \theta_c$, soit :

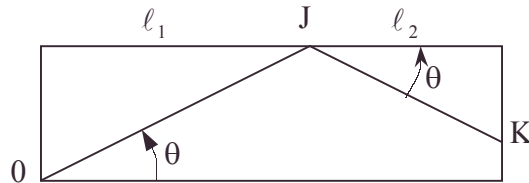
$\sin \theta < \cos \theta_c$, or $\sin \theta_i = n_1 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta_i < n_1 \cos \theta_c$, soit $\theta_i < \arcsin(n_1 \cos \theta_c)$; ainsi $\theta_a = \arcsin(n_1 \cos \theta_c)$.

$$\text{O.N.} = \sin \theta_a = n_1 \cos \theta_c = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = n_1 \sqrt{2\Delta} ; \text{AN : O.N.} = 0,212.$$

b. La distance parcourue par un rayon quelconque est :

$$\frac{\ell_1}{\cos \theta} + \frac{\ell_2}{\cos \theta} = \frac{\ell}{\cos \theta}.$$

ℓ_1 et ℓ_2 peuvent être divisés quand les réflexions sont multiples.



$$\text{La date de sortie est : } t = \frac{\frac{\ell}{\cos \theta}}{\frac{c}{n_1}} = \frac{n_1 \ell}{c \cdot \cos \theta},$$

$$\text{avec } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}} ; \text{ pour } \theta = 0, t_0 = \frac{n \ell}{c}.$$

Les écarts de date de sortie donnent :

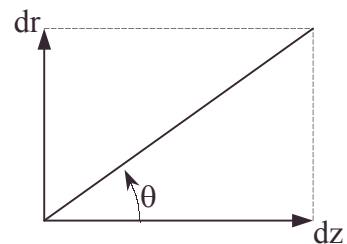
$$\Delta t = n_1 \frac{\ell}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}} - 1 \right] ; \text{AN : } \Delta t = 2,167 \cdot 10^{-10} \text{ s}.$$

4.a. L'angle d'incidence est $\frac{\pi}{2} - \theta(r)$; la loi de Descartes

donne pour tout r vu la structure en couches d'épaisseur dr :

$$n(r) \cos \theta(r) = B = n_1 \cos \theta_0. \text{ (avec } n_1 \sin \theta_0 = \sin \theta_i \text{) ;}$$

$$\tan \theta = \frac{dr}{dz} \Rightarrow \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 = \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1.$$



$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n^2(r)}{n_1^2 \cos^2 \theta_0} - 1 \text{ avec } A = B = n_1 \cos \theta_0 \text{ où } \theta_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \theta_i}{n_1}\right) \text{ c.q.f.d.}$$

$$\text{b. } \frac{dr}{dz} = \sqrt{\frac{n_1^2}{A^2} \left(1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) - 1} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\frac{n_1^2}{A^2} - 1 - \frac{2n_1^2 \Delta}{a^2 A^2} r^2}} = \sqrt{2\Delta} \frac{n_1}{a A} dz$$

$$\Rightarrow \frac{dr a}{\sin \theta_0} \frac{\sqrt{2\Delta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r\sqrt{2\Delta}}{\sin \theta_0}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2\Delta} dz}{a \cos \theta_0}$$

$$\arcsin \frac{r\sqrt{2\Delta}}{\sin \theta_0} = \frac{\sqrt{2\Delta} z}{a \cos \theta_0} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{2\Delta}} \sin \theta_0 \sin \left(\frac{z}{a \cos \theta_0} \sqrt{2\Delta}\right).$$

La trajectoire est une portion de sinussoïde.

La sinussoïde s'annule pour 0 et pour les multiples de sa demi-période : $d = \frac{a\pi \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}$.

A.N. : $d = 5,530 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ avec $a = 25 \mu\text{m}$.

c.α. Pour éviter la réflexion sur la gaine, il faut $r < a$.

Soit $\sin \theta_0 \leq \sqrt{2\Delta}$, soit $\sin \theta_i \leq n_1 \sqrt{2\Delta}$; A.N. : $\theta_i < 12,25^\circ$. Cette condition est réalisée avec $\theta_i = 8^\circ$.

β. Pour que le rayon reste dans le cœur, la condition de réflexion totale sur la gaine suffit.

Elle suppose avec θ_c tel que $\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$: $\frac{\pi}{2} - \theta(a) > \theta_c \Rightarrow \cos \theta_{(a)} < \frac{n_2}{n_1}$

$$\text{or } \cos \theta_{(a)} = \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_0 \text{ et } \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_0 = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2 \theta_{(a)}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta_i \leq n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^4} \Leftrightarrow \sin \theta_i \leq n_1 2\sqrt{\Delta - \Delta^2} \Rightarrow \cos \theta_{(a)} < \frac{n_2}{n_1}.$$

A.N. : O.N. = $2n_1 \sqrt{\Delta - \Delta^2} = 0,2985$; $\theta_i < 17,37^\circ$.

Cette condition est moins restrictive que **α.** qui était déjà réalisée pour $\theta_i = 8^\circ$.

$$\text{d. Le chemin optique est : } \int n ds = \int_0^\ell n dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}.$$

$$\text{Il est parcouru à la vitesse } c : \Rightarrow t' = \frac{1}{c} \int_0^\ell n dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}.$$

vu **4.a.b.** :

$$t' = \int_0^\ell \frac{n}{c \cos \theta} dz = \int_0^\ell \frac{n^2}{c \frac{\cos \theta}{n}} dz = \frac{n_1^2}{c \cos \theta_0} \int_0^\ell \left(1 - \frac{2\Delta}{a^2} \frac{a^2}{2\Delta} \sin^2 \theta_0 \sin^2 \frac{z}{a \cos \theta_0} \sqrt{2\Delta}\right) dz.$$

• milieu d'indice variable

$$t' = \frac{n_1}{\cos \theta_0 c} \left(\ell - \frac{\ell}{2} \sin^2 \theta_0 + \frac{a \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}{4\sqrt{2\Delta}} \sin \left(\frac{2\sqrt{2\Delta} \ell}{\cos \theta_0 a} \right) \right).$$

Simplifions grâce à : $a \ll \ell$; $t' = \frac{n_1}{\cos \theta_0 c} \left(\ell - \frac{\ell}{2} \sin^2 \theta_0 \right)$; $t'_0 = \frac{n_1 \ell}{c}$ pour $\theta_0 = 0$.

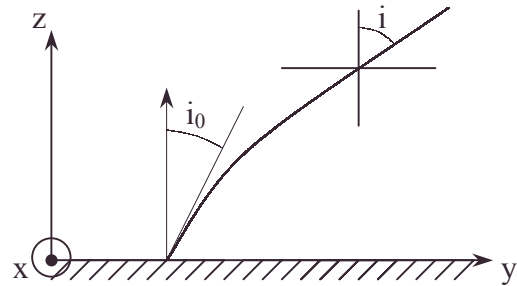
Comme précédemment, les écarts de date de sortie donnent :

$$\Delta t' = \frac{n_1 \ell}{\cos \theta_0 c} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{2} \right) - \frac{n_1 \ell}{c} ; \text{AN : } \Delta t' = 4,67 \cdot 10^{-13} \text{ s.}$$

$\Delta t' \ll \Delta t$ d'où l'intérêt de la structure cylindrique multicouche dite à gradient d'indice.

7.5.1.5. L'atmosphère Milieu d'indice variable

1. En supposant l'atmosphère formée de couches planes dont l'indice varie en fonction de l'altitude z uniquement, suivant une loi quelconque, donner la relation existant entre l'angle i_0 sous lequel on voit une étoile à la surface de la Terre ($n = n_0$) et l'angle i sous lequel on la verrait s'il n'y avait pas d'atmosphère ($n = 1$).



En posant la différence $i - i_0 = \Delta$ petite, montrer que l'on peut écrire $\Delta \approx \tan i_0$.

(Δ en minutes d'arc). On donne $n_0 = 1,000294$.

Indiquer les variations de Δ avec la température et la pression au sol.

2. Soit un trièdre trirectangle Ox, Oy, Oz ; on suppose d'abord que l'indice n est constant dans tout plan parallèle à Oxy ; il est uniquement fonction de z .

a. Etablir l'équation différentielle qui définit les courbes suivies par les rayons lumineux passant par l'origine O .

b. On suppose que $n^2 = n_0^2 \left(1 + \frac{2z}{a} \right)$;

trouver l'équation des courbes suivies par les rayons passant par l'origine.

3. Supposons maintenant les surfaces équiindices sphériques et concentriques ; $n = f(r)$.

a. Trouver la condition $nr \sin i = \text{cste}$ et en déduire l'équation différentielle qui définit la courbe (en coordonnées polaires) dans un plan méridien.

b. En supposant $n = \frac{k}{\sqrt{r}}$, chercher quelles sont les courbes suivies par les rayons.

4. A nouveau on suppose que $n^2 = n_0^2 \left(1 + \frac{2z}{a} \right)$ comme au 2. mais avec $a > 0$.

Donner l'équation de la caustique, enveloppe des courbes (rayons) passant par O ; montrer qu'elle sépare l'espace en deux régions : l'une visible, l'autre invisible, du point O . En déduire l'aspect de la pseudo-image d'un objet linéaire entièrement dans l'espace visible, d'un objet partiellement dans l'espace visible.

Quand observe-t-on un tel phénomène ?

ENS ; Durée : 1h30

• chemin optique, milieu d'indice variable, surfaces équiindices

Corrigé

1.α. Vu la figure ci-après, la loi de Descartes écrite de proche en proche en divisant l'intervalle en intervalles égaux et infinitésimaux :

$n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = \dots = \sin i$ permet d'obtenir $\sin i = n_0 \sin i_0$.

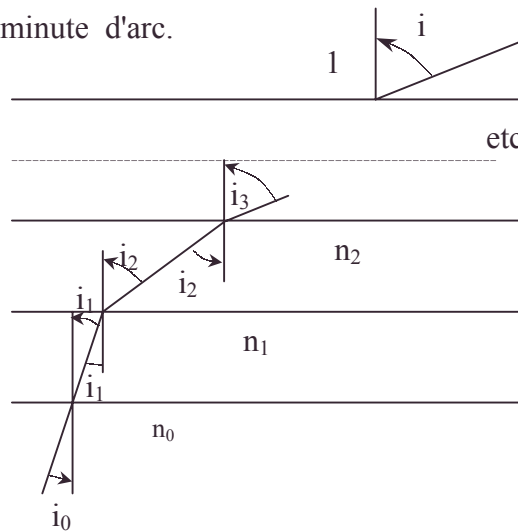
Or, $i = i_0 + \Delta \Rightarrow \sin i = \sin i_0 \cos \Delta + \cos i_0 \sin \Delta$.

Δ étant petit, $\sin i = \sin i_0 + \Delta \cos i_0 = n_0 \sin i_0$.

$\Rightarrow \Delta = (n_0 - 1) \tan i_0$; i_0 est la mesure au sol.

A.N. : $n_0 - 1 = 2,94 \cdot 10^{-4} \# 1 \text{ minute d'arc} = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ rad}$,

$\Rightarrow \Delta \# \tan i_0$ avec Δ en minute d'arc.



β. L'effet de déviation réfraction de la lumière par la matière caractérisée localement par la grandeur intensive ρ , dépend de la quantité de matière.

On comprend que la variation de n soit proportionnelle à la variation de ρ ;

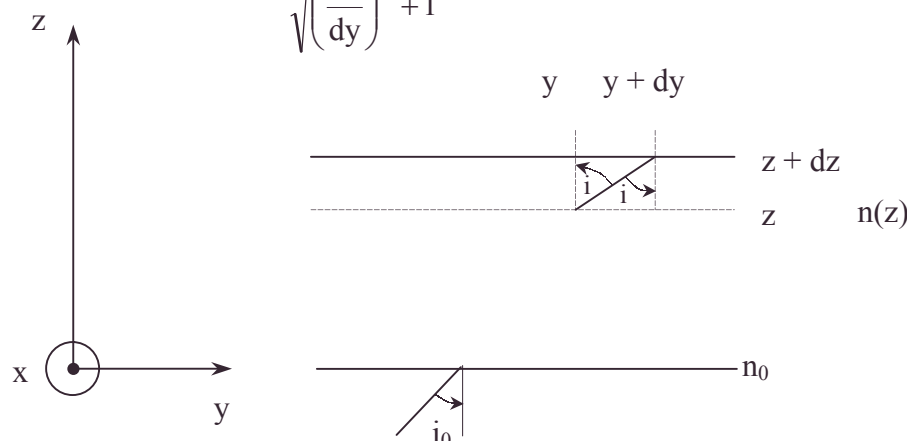
on peut comprendre ainsi la loi de Gladstone : $\frac{(n-1)}{(\rho-0)} = C$ une constante.

Or $PV = m \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{MP}{RT} \Rightarrow \Delta = (n_{\text{sol}} - 1) \tan i_0 = C \frac{MP}{RT} \tan i_0$.

Δ est proportionnel à P et inversement proportionnel à T .

2. Considérons la loi de Descartes écrite de proche en proche entre le sol de cote $z = 0$ et le plan de cote z : $n(z) \sin i(z) = n_0 \sin i_0$.

$$\sin i = \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dz^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$



• loi de Gladstone [indice de réfraction des gaz] , modèle optique de l'atmosphère

$$\frac{n^2}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} = n_0^2 \sin^2 i_0 \Rightarrow \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1 = \frac{n^2(z)}{n_0^2 \sin^2 i_0}.$$

et vu la figure, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = + \left(\frac{n^2(z)}{n_0^2 \sin^2 i_0} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$; si z croît avec y , le signe est +.

$$\text{b. } n^2 = n_0^2 \left(1 + \frac{2z}{a} \right) \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{\left(n_0^2 (1 - \sin^2 i_0) + 2 \frac{n_0^2 z}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{n_0 \sin i_0}.$$

On pourra aussi considérer le cas symétrique avec le signe – quand z décroît avec y .

$$\frac{dz}{dy} = \pm \frac{\left(\cos^2 i_0 + 2 \frac{z}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sin i_0} = \pm \cotan i_0 \left(1 + \frac{2z}{a \cos^2 i_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{dz}{\left(1 + \frac{2z}{a \cos^2 i_0} \right)^{\frac{1}{2}}} = \pm dy \cotan i_0.$$

$$\left(1 + \frac{2z}{a \cos^2 i_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1 + \frac{2z}{a \cos^2 i_0}} \cdot a \cos^2 i_0 = \pm y \cotan i_0 + \text{cste} = y \cotan i_0 + a \cos^2 i_0 \quad (\text{cf. } y = 0, z = 0).$$

Elevons au carré :

$$\left(1 + \frac{2z}{a \cos^2 i_0} \right) a^2 \cos^4 i_0 = (\pm y \cotan i_0 + a \cos^2 i_0)^2.$$

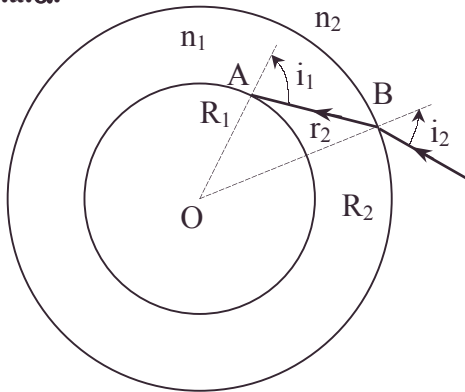
$$\frac{2z}{a \cos^2 i_0} = \frac{y^2 \cotan^2 i_0}{a^2 \cos^4 i_0} \pm \frac{2 a y \cotan i_0}{a^2 \cos^2 i_0}.$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{y^2}{a \sin^2 i_0} \pm y \cotan i_0 ; \text{ or } \cotan^2 i_0 = \frac{1 - \sin^2 i_0}{\sin^2 i_0} = \frac{1}{\sin^2 i_0} - 1.$$

$$\text{Posons } m = \frac{1}{\sin^2 i_0} ; z = \frac{1}{2} m \frac{y^2}{a} \pm y \sqrt{m-1}.$$

On a une famille de paraboles avec $m \geq 1 > 0$ dont on étudiera plus loin les propriétés.

3.a.α.



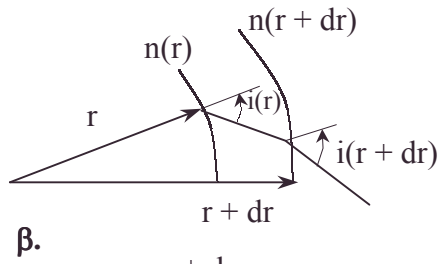
Dans le triangle OAB, on a les relations trigonométriques :

$$\textcircled{1} \frac{R_2}{\sin(\pi - i_1)} = \frac{R_1}{\sin r_2} ;$$

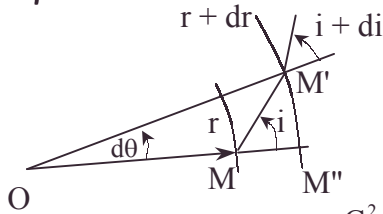
$$\text{or } n_2 \sin i_2 = n_1 \sin r_2 ; \sin(\pi - i_1) = \sin i_1.$$

① donne en faisant le produit des extrêmes et des moyens (cf. produit en croix) :

$$R_2 n_2 \sin i_2 = n_1 R_1 \sin i_1.$$



En découpant l'atmosphère en pellicules sphériques,
 $n(r+dr)(r+dr)\sin i(r+dr) = n(r)r\sin i(r)$,
 $\Rightarrow d(nr\sin i) = 0 \Rightarrow nr\sin i = \text{cste} = C$.



Dans le triangle curviligne infinitésimal, MM'M''

$\tan i = \frac{(r+dr)d\theta}{dr} = r \frac{d\theta}{dr}$ à un infiniment petit d'ordre supérieur.

or, $\tan^2 i = \frac{\sin^2 i}{1 - \sin^2 i} = \frac{\frac{C^2}{n^2 r^2}}{1 - \frac{C^2}{n^2 r^2}} = \frac{C^2}{n^2 r^2 - C^2} = r^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2$ soit $\frac{d\theta}{dr} = \frac{C}{r\sqrt{n^2 r^2 - C^2}}$ en

choisissant le signe +, ce qui revient à choisir l'orientation des angles.

b. Si $n = \frac{k}{\sqrt{r}}$, $n^2 = \frac{k^2}{r}$, $d\theta = \frac{C dr}{r\sqrt{k^2 r - C^2}}$.

Posons $u = \frac{k^2 r}{C^2} - 1$; $du = \frac{k^2}{C^2} dr$; $d\theta = \frac{\frac{C^2}{k^2} du}{\sqrt{u}(1+u)\frac{C^2}{k^2}}$.

Posons $v = \sqrt{u}$, $dv = \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}}$; $d\theta = \frac{2 dv}{1+v^2}$.

$\theta - \theta_0 = 2 \arctan v = 2 \arctan \sqrt{\frac{k^2}{C^2} r - 1}$.

Choisissons l'origine des angles de sorte que $\theta_0 = 0$.

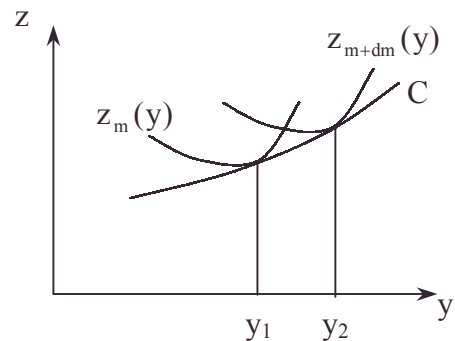
$\sqrt{\frac{k^2}{C^2} r - 1} = \tan \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{k^2 r}{C^2} = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$;

or $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$;

$\frac{k^2 r}{C^2} = \frac{2}{1 + \cos \theta} \Rightarrow r = \frac{2 \frac{C^2}{k^2}}{1 + \cos \theta}$. L'excentricité vaut 1.

Il s'agit d'une famille de paraboles de foyer O, de paramètre $\frac{2C^2}{k^2} = \frac{2n_0^2 r_0^2}{k^2} \sin^2 i_0$.

4.a. L'enveloppe à la famille des paraboles de paramètres m



- enveloppe à la famille des paraboles de paramètres m, rayons paraboliques

$z = \frac{m}{2} \frac{y^2}{a} + y\sqrt{m-1}$ est la ligne tangente en chacun de ses points M à une parabole définie par une valeur m et une seule (valeur double en général) de sorte que $\frac{\partial z}{\partial m} = 0$ à y donné ($y_1 = y_2$). Voir figure ci-dessous.

$$M \begin{vmatrix} x \\ y \text{ vérifie } z = \frac{my^2}{2a} \pm y\sqrt{m-1} \text{ et } 0 \equiv \frac{\partial z}{\partial m} = \frac{y^2}{2a} \pm \frac{y}{2\sqrt{m-1}} \Rightarrow \text{si } y \neq 0, \sqrt{m-1} = \mp \frac{a}{y} \\ z \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \pm y\sqrt{m-1} = -a$ (en vérifiant les deux cas pour $a > 0$).

$$\Rightarrow z = \frac{ma^2}{2a(m-1)} - a \Rightarrow z = \frac{(m-1+1)a}{2(m-1)} - a = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2(m-1)} = -\frac{a}{2} + \frac{y^2}{2a}$$

$\Rightarrow y^2 = 2a\left(z + \frac{a}{2}\right)$; la caustique C est une parabole d'axe Oz. (cf. symétrie des émissions en O).

On remarque qu'en $z = 0$, $y = \pm a$; qu'en $y = 0$, $z = -\frac{a}{2}$

b. Pour un point objet N $\begin{vmatrix} x \\ y \text{ donné, les rayons paraboliques passant par N et O} \\ z \end{vmatrix}$

$$\text{vérifient } z = \frac{my^2}{2a} \pm y\sqrt{m-1} \Rightarrow z - \frac{my^2}{2a} = \pm y\sqrt{m-1}$$

$$\Rightarrow \left(z - \frac{my^2}{2a}\right)^2 = y^2(m-1) \Rightarrow z^2 - 2m \frac{zy^2}{2a} + \frac{m^2 y^4}{4a^2} = y^2 m - y^2$$

$$\frac{y^4 m^2}{4a^2} - my^2 \left(1 + \frac{z}{a}\right) + z^2 + y^2 = 0, \text{ équation du } 2^{\text{e}} \text{ degré en } m.$$

$$m = \frac{y^2 \left(1 + \frac{z}{a}\right) \pm \sqrt{\Delta}}{\frac{y^4}{2a^2}} = \frac{2a^2}{y^2} \left(1 + \frac{z}{a}\right) \pm \frac{2a^2}{y^4} \sqrt{\Delta} \text{ avec } \Delta \text{ écrit plus loin.}$$

Remarque : $m > 0$ car $m > 1$ quand il existe sur \mathbb{R} .

$$\Delta = y^4 \left(1 + \frac{z}{a}\right)^2 - \frac{y^4}{a^2} (z^2 + y^2) = y^4 \left[1 + \frac{z^2}{a^2} + \frac{2z}{a} - \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}\right].$$

$$\Delta = y^4 \left(1 + \frac{2z}{a} - \frac{y^2}{a^2}\right) = \frac{y^4}{a^2} (a^2 + 2az - y^2).$$

On reconnaît que $\Delta = 0$ correspond à $y = 0$ et $y^2 = 2a\left(z + \frac{a}{2}\right)$ la caustique.

• $\Delta = 0$ si $N \in C$; $m = \frac{2a^2}{y^2} \left(1 + \frac{z}{a}\right)$, solution unique (double) (sans oublier $y = 0$, cas particulier de la verticale).

• *caustique*

- $\Delta < 0 \Rightarrow y^2 > 2a \left(z + \frac{a}{2} \right)$, c'est le régionnement de l'extérieur à C.

car on vérifie par y^2 grand et $z = 0$.

Il n'y a pas de solutions réelles par conséquent

Aucun rayon partant de N extérieur à C n'atteint O : le point objet ne peut être vu quand il est à l'extérieur de C. Cet espace est invisible du point O.

- $\Delta > 0 \Rightarrow y^2 < 2a \left(z + \frac{a}{2} \right)$ c'est le régionnement de l'intérieur de C.

que l'on vérifie pour $y = 0$, $z = 0$.

Il y a 2 solutions réelles ; il y a 2 rayons paraboliques pour aller de N intérieur à C à O, conformément aux lois de Descartes.

Rappelons que si a est infini, $n = n_0$. Les deux paraboles se confondent avec le segment de droite ON de la propagation rectiligne.

Cet espace intérieur à C est visible mais 2 rayons issus de N sont reçus en O (au lieu d'un seul : cas habituel et cas de $N \in C$).

c. D'autre part, $\frac{dz}{dy} = \frac{my}{a} \pm \sqrt{m-1} \Rightarrow \left(\frac{dz}{dy} \right)_0 = \pm \sqrt{m-1}$. [N.B. : $\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{m}{a} > 0$].

L'habitude de la propagation rectiligne assigne N sur le prolongement des droites $z = \pm \sqrt{m_+ - 1} y$ et $z = \pm \sqrt{m_- - 1} y$, m_+ et m_- étant les solutions trouvées pour le trinôme du second degré, avec le signe de $\pm \sqrt{\Delta}$.

Les paraboles ont leurs minima pour $\frac{dz}{dy} = 0$,

pour $y_{\min} = \mp a \frac{\sqrt{m-1}}{m}$; $z_{\min} = \frac{m}{2a} a^2 \frac{(m-1)}{m^2} \pm \left(\mp \frac{a}{m} (m-1) \right) = \frac{a(m-1)}{2m} - a \frac{(m-1)}{m}$.

$z_{\min} = -\frac{a}{2} \left(\frac{m-1}{m} \right) < 0$.

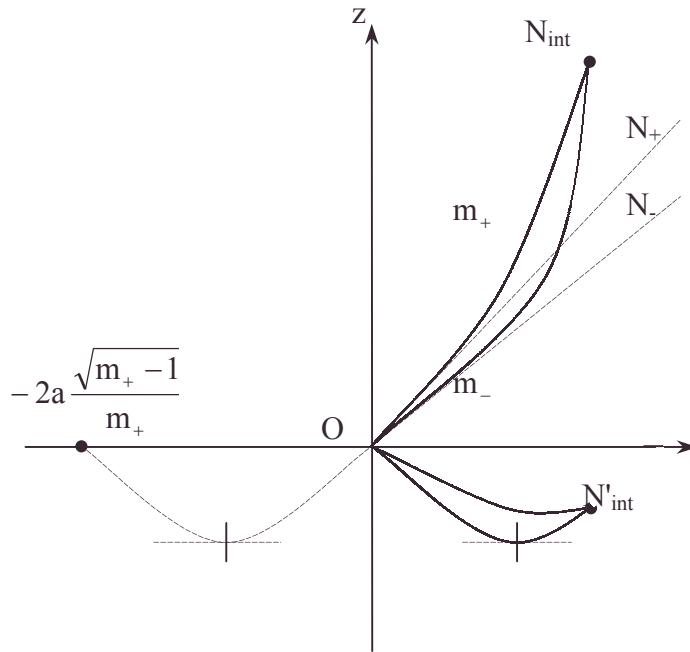
Dès qu'une parabole passant par O passe par un point intérieur à C, tous les points restent intérieurs à C car si elle avait un point à l'extérieur de C, il pourrait par la parabole étudiée avoir une communication lumineuse avec O, ce qui est impossible vu l'étude faite pour $\Delta < 0$.

Discussion

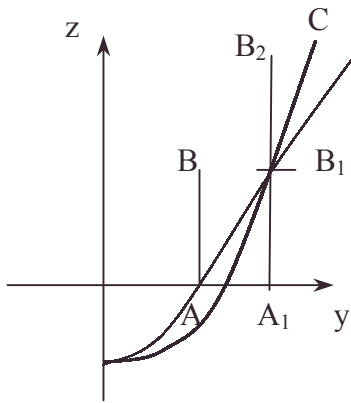
L'énoncé ne dit pas si l'espace est transparent pour $z = 0$, car sinon il faut étudier l'interception de la parabole issue de N_{int} par le plan $z = 0 = \frac{my^2}{2a} \pm y \sqrt{m-1}$,

soit $y = \mp 2a \frac{\sqrt{m-1}}{m}$, c'est-à-dire $y < 0$ si $\frac{dz}{dy} > 0$, et donc n'accepter que

$\left(\frac{dz}{dy} \right)_0 > 0$ si $y_N > 0$, et les $\left(\frac{dz}{dy} \right)_0 < 0$ si $y_N < 0$.



Chaque point visible de l'espace $y > 0$ où $\frac{dz}{dy} > 0$ est vu double avec un décalage angulaire de $\frac{4a^2}{y^4} \sqrt{\Delta}$ d'autant plus grand que y est proche de 0 ; comme d'après la figure le minimum est alors à $y < 0$ vu $\frac{dz}{dy} > 0$ (cf. \pm et \mp) avec une altitude inférieure vu la fonction $n(z)$ étudiée.



L'objet (entièrement visible) AB est vu avec 2 dimensions angulaires de O, d'où une pseudo-image trouble car double.

Cas d'objets partiellement visibles : A_1B_1 n'est pas vu car extérieur à C, B_1B_2 est vu double comme AB.

d. C'est le phénomène connu de mirage de palmeraies où l'image est trouble, tronquée (cf. A_1B_1) avec une mauvaise appréciation angulaire de chacune des deux impressions et par conséquent de la distance selon les critères habituels ; le voisinage du sol présente un décalage de ses "images" et est trouble comme lorsqu'on "voit" un plan d'eau au loin (cf. dioptré non stigmatique sous cette incidence).

7.5.2. Optique ondulatoire

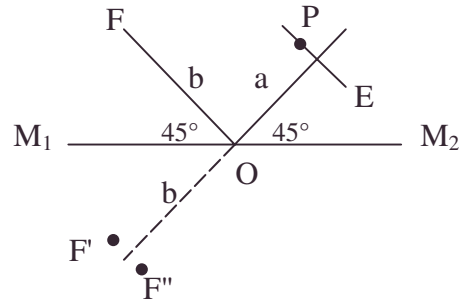
Appartiennent aux programmes de MP, PSI, PC, PT, TSI2, BCPST2, TPC2

7.5.2.1. Interférences

7.5.2.1.1. Miroirs de Fresnel

On considère un dispositif interférentiel à "miroirs de Fresnel".

Les miroirs sont carrés de côté λ et font entre eux l'angle α toujours très petit. Ils sont éclairés uniformément par une source lumineuse constituée par une fente dont les bords sont parallèles à l'arête commune D des miroirs et située à la distance b de cette arête.



On observe les franges sur un écran E parallèle au plan des deux images de la fente données par les miroirs et situées à la distance a de D.

L'incidence moyenne des rayons sur les miroirs est de 45° .

On donne $\lambda = 2$ cm, $\alpha = 4$ minutes d'arc, $b = 1$ m, $a = 1,4$ m.

A. Etude de l'influence de l'étendue de la source

La source est supposée parfaitement monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide. On donne $\lambda = 550$ nm.

1. La fente F est infiniment fine

a. Calculer la largeur d du champ d'interférences, l'interfrange i et le nombre de franges brillantes N . Application numérique.

b. On désigne par x la distance d'un point P de l'écran au centre de la frange centrale.

Rappeler l'expression de l'intensité lumineuse $I(x)$ en P en fonction de i , x et de l'intensité I_m au centre de la frange brillante centrale.

2. La fente F est remplacée par deux fentes infiniment fines et identiques F_1 et F_2 symétriques par rapport à l'ancienne position de F, toutes deux situées à la distance b de D et parallèles à D.

On appelle Y la distance entre F_1 et F_2 . Les fentes sont également éclairées par la lumière de longueur d'onde λ et sont des sources incohérentes entre elles.

a. Etablir l'expression de l'intensité $I(x)$ dans le plan E en fonction de x , i , Y , a , b et I_m définis ci-dessus.

b. Donner l'expression du facteur de visibilité V défini par $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ où I_{\max} et

I_{\min} désignent respectivement les intensités maximum et minimum dans le plan de l'écran E.

c. Représenter sommairement V en fonction de Y .

3. On revient au dispositif à fente unique F mais on tient maintenant compte de sa largeur $2Y_0$ petite devant sa longueur. Les deux bords de F sont parallèles à D et situés à la distance b de D. On précise que $2Y_0 \ll b$. La fente est éclairée uniformément par la lumière de longueur d'onde λ .

On considère que la fente source émet une vibration d'égale intensité dans toutes les directions si bien qu'aucun terme de diffraction n'est à calculer.

a. On appelle I_m l'intensité au centre de la frange centrale.

Etablir l'expression de l'intensité $I(x)$ dans le plan E en fonction de x , I_m , i , Y_0 , a et b .

• champ d'interférences, facteur de visibilité, interférences, interfranges, nombre de franges brillantes du champ d'interférence, optique ondulatoire

b. Donner l'expression du facteur de visibilité V défini dans la question **2.b.**

c. Représenter sommairement V en fonction de Y_0 .

d. Pour quelles valeurs de Y_0 , V est-il supérieur à 0,9 ?

B. Etude de l'influence de la largeur spectrale de la source

Dans cette partie, le point P de l'écran E sera caractérisé uniquement par la différence de marche δ entre les deux rayons en ce point. La source est une fente unique dont on négligera l'étendue. En revanche, cette source ne sera plus supposée rigoureusement monochromatique.

1. La lumière émise est formée de deux raies également intenses, rigoureusement monochromatiques, de longueurs d'ondes dans le vide λ_1 et λ_2 très voisines.

a. Calculer l'intensité lumineuse en P en fonction de δ , λ_1 et λ_2 puis en fonction de la longueur d'onde moyenne λ_0 , de l'écart $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ et δ .

b. En déduire l'expression du facteur de visibilité V défini ci-dessus. Quelle est la plus petite valeur de l'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$ pour laquelle V devient nul ?

Soit p_0 cette valeur.

c. Application numérique : $\lambda_2 - \lambda_1 = 3 \text{ nm}$, $\lambda_2 = \lambda_1 \approx 546 \text{ nm}$.

Calculer p_0 . A quelle distance de la frange centrale aura-t-on en un point M de l'écran l'ordre $p = p_0$?

Qu'observerait-on au voisinage de M ? Une telle observation est-elle possible ?

d. Application numérique : répondre à la même question que **1.c.** avec une source émettant les deux radiations suivantes :
 $\lambda_1 = 486 \text{ nm}$ (bleu-vert) ;
 $\lambda_2 = 434 \text{ nm}$ (violet).

2. On désigne par $I_v dv$ l'intensité correspondant au domaine spectral compris entre les fréquences v et $v + dv$ pour chacun des deux rayons qui interfèrent en P .

La grandeur I_v est telle que $I_v = I_0$ pour $v_1 \leq v \leq v_2$ et $I_v = 0$ pour $v > v_2$ et $v < v_1$.

On admet que $v_2 - v_1 \ll v_1$ et v_2 .

a. Calculer l'intensité lumineuse en P en fonction de :

$$\delta, v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} \text{ et } \Delta v = v_2 - v_1.$$

b. En déduire l'expression en P du facteur de visibilité V et en donner une représentation sommaire en fonction de Δv .

c. Exprimer en fonction de la longueur d'onde moyenne λ_0 et de la largeur d'émission $\Delta\lambda$ en longueur d'onde, la plus petite valeur de δ pour laquelle les franges d'interférence en P ne peuvent plus se produire.

Quel est l'ordre d'interférence correspondant ? Observera-t-on le brouillage ?

AN : $\Delta\lambda = 3 \text{ nm}$; $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$.

CCP ; Durée : 2h

Corrigé

A. Soit F' et F'' les images de F par rapport à M_1 et M_2 . Sachant qu'on appelle faisceau issu de F' (respectivement F''), le faisceau après réflexion sur M_1 (respectivement M_2) le dessin non détaillé ici permet de comprendre que l'intersection des deux faisceaux issus de F' et F'' est un dièdre d'angle $2\alpha = F'OF''$ car si on considère la rotation d'angle α de M_2 par rapport à M_1 le rayon FO tourne d'un angle 2α . (cf. Poggendorf).

Optique ondulatoire

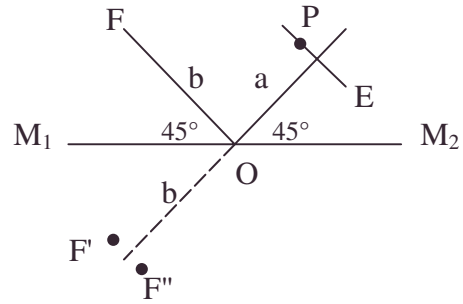
1.a.α. La largeur du champ d'interférence sur E est donc $d = a.2\alpha$. AN : $d = 3,26.10^{-3}$ m.

β. La formule de l'interfrange des interférences données par les trous d'Young est applicable :

$$i = \frac{\lambda \ll D \gg}{\ll a \gg} \text{ avec } \ll D \gg = a + b \text{ et } \ll a \gg = 2\alpha b ;$$

$$i = \lambda \frac{a + b}{2b\alpha} ; \text{ AN : } i = 0,567.10^{-3} \text{ m} .$$

$$\gamma. N = 2E \left(\frac{d}{2i} \right) + 1, E \text{ fonction partie entière. AN : } N = 5.$$

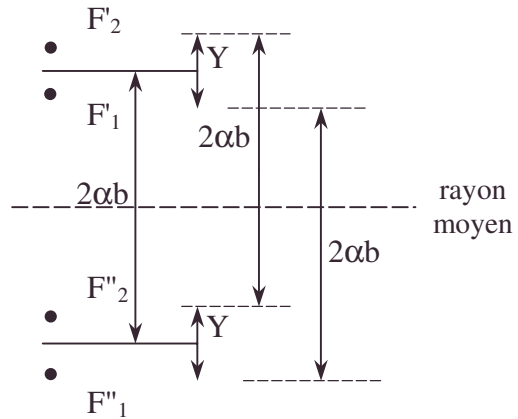


b. L'intensité d'interférences à deux sources cohérentes est $I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \varphi)$; si i est la période spatiale de I ; $I = \frac{I_m}{2} \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \right)$.

2.a. Vu les symétries

- Le milieu de $F'_2 F''_2$ est décalé de $\frac{Y}{2}$ par rapport au milieu de $F' F''$, il se projette sur l'écran en $\frac{Ya}{2b}$ (cf. grandissement de $\frac{a}{b}$).

$$I_2 = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{i} \left(x - \frac{Ya}{2b} \right) \right).$$



- Le milieu de $F'_1 F''_1$ est décalé de $-\frac{Y}{2}$ par rapport au milieu de $F' F''$, il se projette optiquement sur l'écran et il est décalé de $-\frac{Ya}{2b}$.

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{i} \left(x + \frac{Ya}{2b} \right) \right).$$

- $I = I_1 + I_2$ vu l'éclairage incohérent .

On transforme la somme de cosinus en un produit.

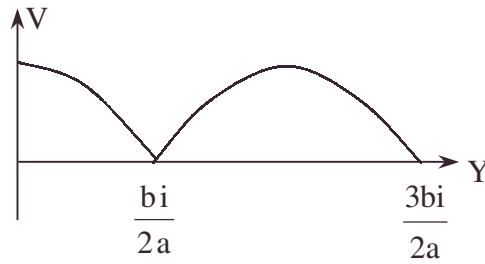
$$I = I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \cdot \cos \frac{\pi Ya}{bi} \right).$$

En utilisant I_m , intensité au centre de la frange centrale ($x = 0$) : $I_m = I_0 \left(1 + \left| \cos \frac{\pi Ya}{bi} \right| \right)$.

$$I(x) = \frac{I_m}{1 + \left| \cos \frac{\pi Ya}{bi} \right|} \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \cos \frac{\pi Ya}{bi} \right).$$

b. On obtient les extrema pour $\cos 2\pi \frac{x}{i} = \pm 1 \Rightarrow V = \left| \cos \frac{\pi Ya}{bi} \right|$.

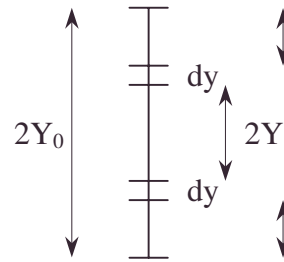
- champ d'interférences, éclairage incohérent, interférences, interfrange

c. $Y > 0$ 

3.a. En éclairage habituellement incohérent et vu la question 2. qui associe 2 zones symétriques séparées de Y :

$$I(x) = \int dI = \int_0^{Y_0} K_1 \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \cos 2\pi \frac{Ya}{bi} \right) dy ;$$

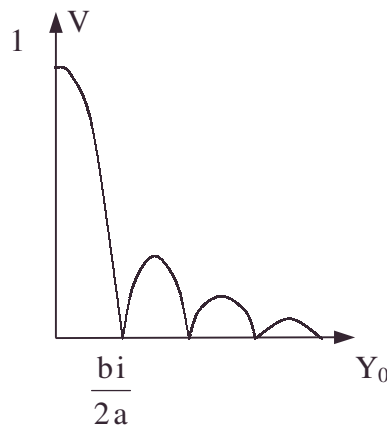
$$I(x) = K_1 Y_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \left[\frac{\sin \frac{2\pi Y_0 a}{bi}}{\frac{2\pi Y_0 a}{bi}} \right] \right) ;$$



En introduisant comme en 2.a. :

$$I_m = K_1 Y_0 \left(1 + \left| \frac{\sin \frac{2\pi Y_0 a}{bi}}{\frac{2\pi Y_0 a}{bi}} \right| \right) \Rightarrow I = \frac{I_m}{1 + \left| \frac{\sin \frac{2\pi Y_0 a}{bi}}{\frac{2\pi Y_0 a}{bi}} \right|} \left[1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \frac{\sin \frac{2\pi Y_0 a}{bi}}{\frac{2\pi Y_0 a}{bi}} \right].$$

b. Comme en 2. : $V = \left| \frac{\sin \frac{2\pi Y_0 a}{bi}}{\frac{2\pi Y_0 a}{bi}} \right|$.

c. $Y_0 > 0$ 

d. $\frac{\sin \frac{2\pi Y_0 a}{bi}}{\frac{2\pi Y_0 a}{bi}} = 0,9 \Rightarrow Y_0 = \frac{bi}{8a}$; A.N. : $Y_0 \# 5.10^{-5} \text{ m.}$

La figure témoigne de l'unicité de la réponse.

• coefficient de cohérence partielle, contraste, visibilité

B.1.a. $I = I_1 + I_2$; $I = K_2 \left(1 \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda_1} + 1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda_2} \right)$ en procédant comme précédemment en **A.2.**

$$I = \frac{I_m}{1 + \left| \cos \pi \delta \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right|} \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \cos \pi \delta \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right).$$

b.α. $V = \left| \cos \pi \delta \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right|.$

β. $V = 0$; $p_0 = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{2\Delta \lambda}$. L'ordre d'interférence numérote les franges brillantes à partir de 0 en $x = 0$ (expérience d'Young classique).

c.α. $p_0 = 91$.

β. $x_M = p_0 i = 91i$; **AN :** $x_M = 51.10^{-3} \text{ m} > 1,63.10^{-3} \text{ m}$ ainsi $x_M > \frac{d}{2}$.

γ. En dehors du champ d'interférence, le brouillage ($V = 0$) est impossible à voir.

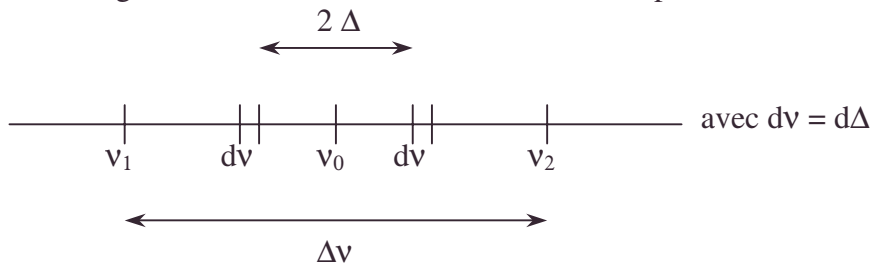
d.α. $p_0 = 4,4$.

β. $x_M = p_0 i = 4,4i$; **A.N. :** $x_M = 2.10^{-3} \text{ m} > 1,63.10^{-3} \text{ m}$ ainsi $x_M > \frac{d}{2}$.

γ. De même, le brouillage n'est pas observable.

2.a. $I = \int_0^{\frac{\Delta v}{2}} dI$ avec $dI = \frac{I_0}{2} dv \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{c} (v_0 + \Delta) + 1 + \cos \frac{2\pi \delta}{c} (v_0 - \Delta) \right).$

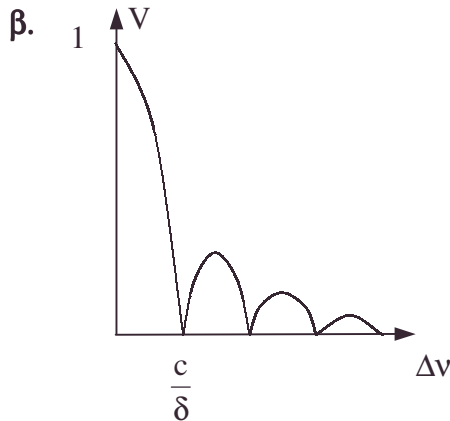
cf. analogie avec **A.3.** et **B.1.** avec la notation Δ explicitée ci-dessous.



$$I = I_0 \int_0^{\frac{\Delta v}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta v_0}{c} \cos \frac{2\pi \delta}{c} \Delta \right) d\Delta = I_0 \frac{\Delta v}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi \delta v_0}{c} \frac{\sin \frac{\pi \delta \Delta v}{c}}{\pi \delta \frac{\Delta v}{c}} \right].$$

b.α. $V = \left| \frac{\sin \pi \delta \frac{\Delta v}{c}}{\pi \delta \frac{\Delta v}{c}} \right|.$

Cf. **A.3.b.**

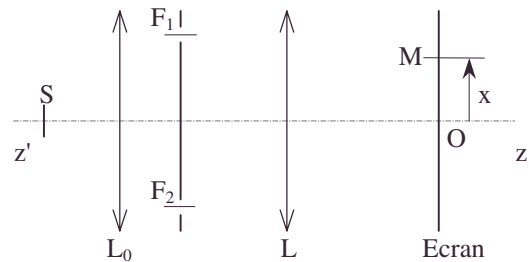


c. $\delta = \frac{c}{\Delta v} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}$ car $v = \frac{c}{\lambda}$ $\Delta v = \frac{c \Delta \lambda}{\lambda_0^2}$; AN : $\delta = 9,94 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}$; AN : $p = 182$. On ne l'observera pas cf. **B.1.c**.

7.5.2.1.2. Fentes d'Young

I.1. Deux fentes F_1 et F_2 , identiques, parallèles, distantes de a sont éclairées par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide, obtenu en plaçant un point source S au foyer objet d'une lentille L_0 . L'observation se fait sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille L .



L'axe zz' est l'axe de symétrie du dispositif optique.

On admettra :

a. que l'amplitude de la vibration lumineuse est proportionnelle à la largeur de la fente.

b. que l'éclairement I en un point de l'écran est proportionnel au carré de l'amplitude de la vibration lumineuse en ce point.

Dans cette première partie, les différentes fentes utilisées, F_1 , F_2 puis F_3 sont supposées extrêmement fines.

On demande de déterminer l'expression de l'éclairement I de l'écran en fonction de x , abscisse d'un point de l'écran par rapport au point O .

Tracer le graphe $I = f(x)$.

Application numérique : $\lambda = 0,6 \text{ } \mu\text{m}$; $a = 0,25 \text{ mm}$; F (distance focale de L) = 2 m .

2. On ajoute une troisième fente F_3 identique et parallèle à F_1 et F_2 à mi-distance de ces deux fentes. Déterminer à nouveau l'éclairement de l'écran. Tracer $I = f(x)$.

3. Mêmes questions dans le cas où F_3 a une largeur double de celle de F_1 et F_2 (les fentes demeurent infiniment fines).

4. On dispose à la place des trois fentes précédentes un réseau R comportant n traits par unité de longueur, et dont la largeur totale est λ . Les traits du réseau sont parallèles entre eux, équidistants de b , et de largeur extrêmement faible.

Exprimer I et tracer $I = f(x)$.

Application numérique : $n = 25 \text{ traits / mm}$; $\lambda = 2 \text{ cm}$.

II. Une fente fine F de largeur e , centrée sur $x'x$, remplace le réseau.

Déterminer l'éclairement I de l'écran en fonction de x .

• éclairement de l'écran, écran placé dans le plan focal d'une lentille, graphe, ordre d'interférence, point source au foyer objet d'une lentille [obtention d'un faisceau parallèle à l'axe], troisième fente d'Young

Optique ondulatoire

Application numérique : $e = 5.10^{-5}$ mm.

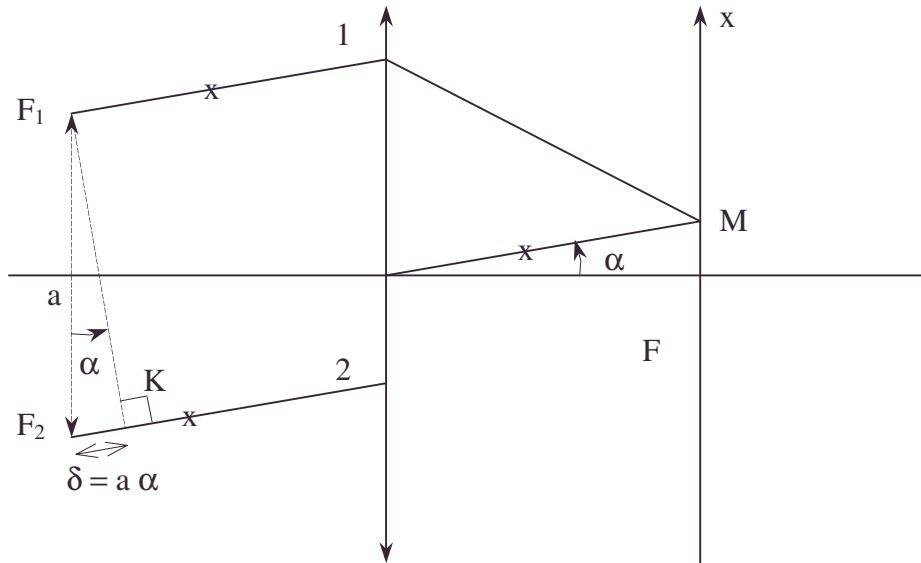
III. Reprendre les questions **I.1.**, **I.2.** et **I.3.** en supposant maintenant que les fentes ont une largeur $e = \frac{a}{5}$.

AIR ; Durée 2 h

Corrigé

I.1. Le point M est conjugué à travers L d'un point à l'infini M' dans la direction α ; la lentille n'introduit pas de différence de marche entre les différents rayons $(M'M) = (M'F_1) + (F_1M) = (M'K) + (KM)$ or $(M'F_1) = (M'K) \Rightarrow (F_1M) = (KM)$.

La diffraction introduit la différence de marche $F_2K = a \alpha$.



Si le rayon passant par M et le centre de F_1 sert de référence : (la croix x indique que les rayons sont parallèles.)

$\underline{a}(M) = a_0 + a_0 e^{-j\varphi}$ avec $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \alpha$ et $\alpha = \frac{x}{F}$ dans l'approximation de Gauss imposée par L.

$$I = \underline{a} \underline{a}^* = \frac{I_0}{4} = a_0 (1 + e^{-j\varphi}) a_0^* (1 + e^{j\varphi}) = a_0 a_0^* (2 + 2 \cos \varphi) = 4 a_0 a_0^* \cos^2 \frac{\pi a x}{\lambda F} = I_0 \cos^2 \frac{\pi a x}{\lambda F}.$$

$a_0 a_0^*$ correspond à l'éclairement si on fermait une des fentes.

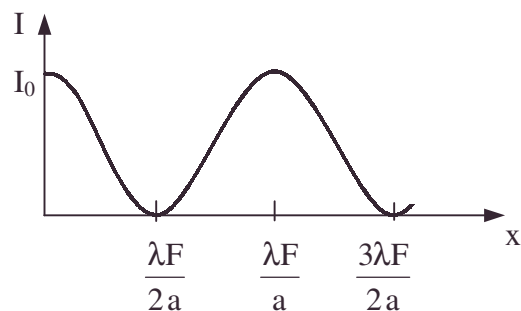
L'éclairement moyen vaut naturellement

$$2 a_0 a_0^* = \frac{I_0}{2}$$

Période spatiale : $i = \frac{\lambda F}{a}$.

AN : $i = 4,8.10^{-3}$ m.

La représentation est symétrique pour $x < 0$.

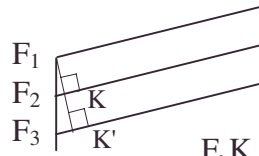


2. $\underline{a} = a_0 + a_0 e^{-j\varphi_1} + a_0 e^{-j\varphi_2}$ avec $\varphi_1 = \frac{2\pi a}{\lambda} \alpha$; $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} a \alpha = 2\varphi_1$ (cf. schéma) ;

en prenant comme référence le rayon passant par M et le centre de F_1 .

$$\underline{a} = a_0 (1 + e^{-j\varphi_1} + e^{-j2\varphi_1}) = a_0 \frac{1 - e^{-j3\varphi_1}}{1 - e^{-j\varphi_1}},$$

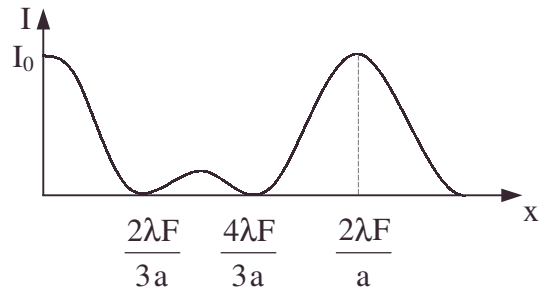
somme d'une suite géométrique à 3 termes.



$$F_2 K = \frac{a}{2} \alpha \text{ et } F_3 K' = 2 \frac{a}{2} \alpha$$

$$I = \underline{a} \underline{a}^* = a_0 a_0^* \frac{\sin^2 \frac{3\varphi_1}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}}$$

$$I = \frac{I_0}{9} \frac{\sin^2 \frac{3\pi ax}{2\lambda F}}{\sin^2 \frac{\pi ax}{2\lambda F}}$$



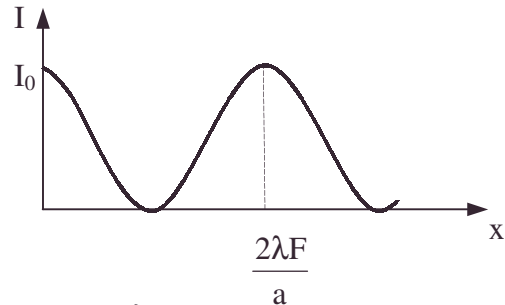
$$\begin{cases} \text{Période spatiale : } i = \frac{2\lambda F}{a} ; \\ \text{AN : } i = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ m.} \end{cases}$$

3. $\underline{a} = a_0 + 2a_0 e^{-j\varphi_1} + a_0 e^{-j2\varphi_1} = a_0 e^{-j\varphi_1} (e^{j\varphi_1} + 2 + e^{-j\varphi_1})$

$$\underline{a} = 2a_0 e^{-j\varphi_1} (1 + \cos \varphi_1).$$

$$I = \underline{a} \underline{a}^* = 4a_0 a_0^* (1 + \cos \varphi_1)^2 = 16a_0 a_0^* \cos^4 \frac{\varphi_1}{2}.$$

$$I = I_0 \cos^4 \frac{\pi ax}{2\lambda F}$$



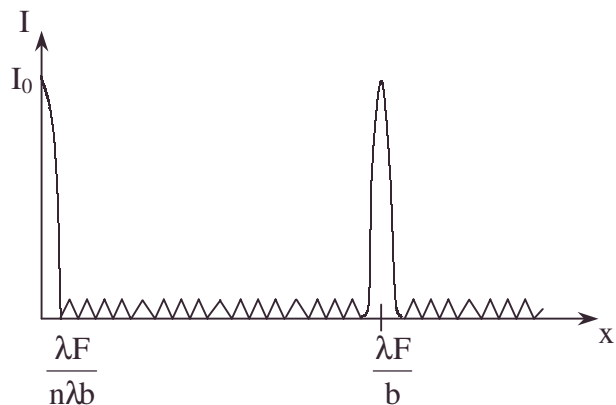
Période spatiale : $i' = \frac{2\lambda F}{a}$; A.N. : $i' = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$

4. $\underline{a} = a_0 + a_0 e^{-j\varphi_1} + a_0 e^{-j2\varphi_1} + \dots + a_0 e^{-j(N-1)\varphi_1}$ $N \neq n\lambda.$

Somme d'une progression géométrique.

$$\underline{a} = a_0 \left(\frac{1 - e^{-jN\varphi_1}}{1 - e^{-j\varphi_1}} \right) \text{ avec } \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} b \frac{x}{F}.$$

$$I = \underline{a} \underline{a}^* = \frac{I_0}{n^2 \lambda^2} \frac{\sin^2 \frac{n\lambda \pi x b}{\lambda F}}{\sin^2 \frac{b \pi x}{\lambda F}}.$$



AN : $i = \frac{\lambda F}{b} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ avec $b = \frac{1}{n} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$

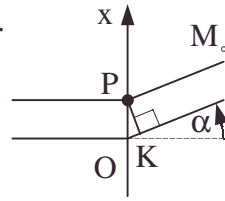
II. Diffraction par une fente : référence de phase, le rayon passant par O :

$$\underline{a} = a_0 \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} e^{j\varphi} dS \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x\alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{x}{F}.$$

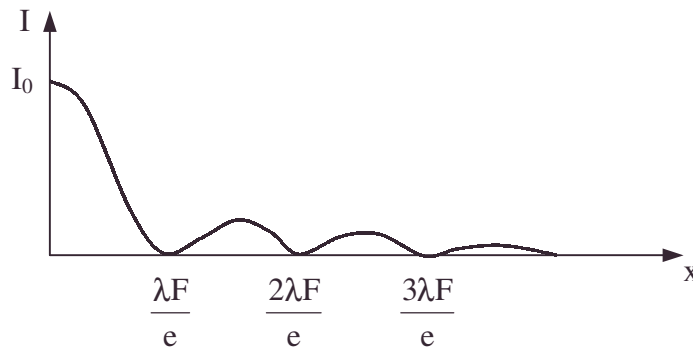
$dS = Ldx$, L la longueur de la fente.

$$\underline{a} = a_1 e^{\frac{\sin \frac{\pi\alpha e}{\lambda}}{\frac{\pi\alpha e}{\lambda}}} \quad \text{avec} \quad a_1 = a_0 Le.$$

$$I = \underline{a} \underline{a}^* = a_1 a_1^* e^{2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x}{\lambda F}} = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x}{\lambda F}.$$



$OK = x\alpha$ est l'avance de marche du rayon passant par P et (M_∞) de $x\alpha$ par rapport au rayon de référence passant par O et M_∞ .



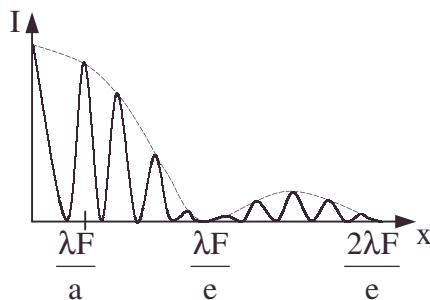
$$i'_{II} = \frac{\lambda F}{e}$$

$$AN : i'_{II} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

III.1. Diffraction par deux fentes égales : l'amplitude diffractée par chaque fente dans la direction α est la même qu'en **II**. On obtient par intégration sur chaque fente vu **I.1.** :

$$\underline{a} = a_1 \operatorname{sinc} \frac{\pi\alpha e}{\lambda} \left(1 + e^{-j \frac{2\pi\alpha a}{\lambda}} \right).$$

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x}{\lambda F} \cos^2 \frac{\pi a x}{\lambda F} \quad \text{soit une modulation des interférences par la diffraction.}$$

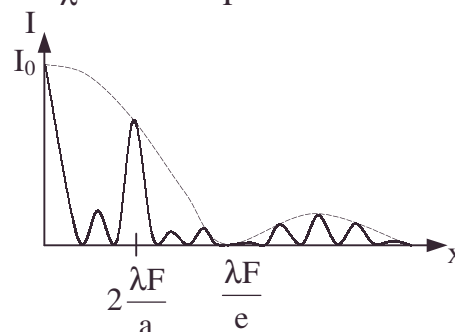


L'arche centrale de la diffraction contient 9 arches d'interférence. La figure ne représente que la moitié du champ d'interférence.

2. Diffraction par trois fentes égales : de même.

$$\underline{a} = a_1 \operatorname{sinc} \frac{\pi\alpha e}{\lambda} \left(1 + e^{-j\varphi_1} + e^{-2j\varphi_1} \right) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 = \frac{2\pi a}{\lambda} \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{x}{F}.$$

$$I = \frac{I_0}{9} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x}{\lambda F} \frac{\sin^2 \frac{3\pi x a}{2\lambda F}}{\sin^2 \frac{\pi x a}{2\lambda F}}.$$



3. Diffraction par trois fentes inégales :

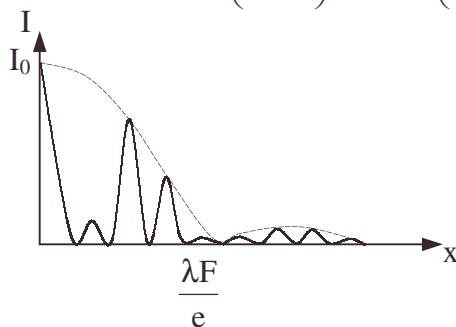
$$\underline{a} = a_1 \operatorname{sinc} \frac{\pi \alpha e}{\lambda} (1 + e^{-2j\varphi_1}) + 2a_1 \operatorname{sinc} \frac{2\pi \alpha e}{\lambda} \cdot e^{-j\varphi_1}$$

$$\underline{a} = 2a_1 e^{-j\varphi_1} \operatorname{sinc} \frac{\pi \alpha e}{\lambda} \cos \varphi_1 + 2a_1 e^{-j\varphi_1} \operatorname{sinc} \frac{\pi \alpha e}{\lambda} \cos \frac{\pi \alpha e}{\lambda}.$$

$$\underline{a} = 2a_1 e^{-j\varphi_1} \operatorname{sinc} \frac{\pi \alpha e}{\lambda} \left(\cos \frac{\pi \alpha x}{\lambda F} + \cos \frac{\pi x e}{\lambda F} \right); \text{ transformons la somme en produit :}$$

$$\underline{a} = 4a_1 e^{-j\varphi_1} \operatorname{sinc} \frac{\pi x e}{\lambda F} \cos \frac{\pi x (a+e)}{\lambda F} \cos \frac{\pi x (a+e)}{\lambda F}.$$

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x e}{\lambda F} \cos^2 \frac{\pi x}{\lambda F} \left(\frac{a+e}{2} \right) \cos^2 \frac{\pi x}{\lambda F} \left(\frac{a-e}{2} \right).$$



7.5.2.1.3. Frange achromatique, spectre cannelé obtenus avec les fentes d'Young

La figure 1 représente un montage classique de diffraction. L_1 et L_2 sont des lentilles convergentes identiques, de distance focale image f , d'axe commun O_1O_2 . S est une fente source très fine ; elle est centrée au foyer-objet de L_1 , verticale, perpendiculaire à O_1O_2 (le plan de figure est le plan horizontal passant par O_1O_2).

Entre L_1 et L_2 on dispose, perpendiculairement à O_1O_2 , un écran plan P' dans lequel on a découpé une fente S' de centre O , parallèle à S , de longueur b très grande devant sa largeur a .

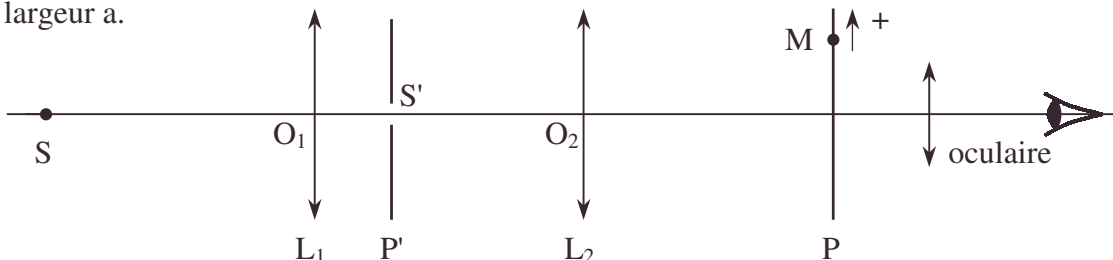


figure 1

La lumière monochromatique de longueur d'onde λ (dans l'air) émise par S traverse L_1 et tombe sur P' . Le faisceau issu de S' passe à travers L_2 . Au moyen d'un oculaire convenable, on observe la figure de diffraction obtenue dans le plan focal-image P de L_2 , au voisinage du plan de figure. On a disposé dans P un micromètre gradué en dixièmes de millimètre, et dont les traits sont perpendiculaires au plan de figure, donc parallèles à S ; le trait zéro rencontre l'axe O_1O_2 ; la distance x d'un point M du plan P à ce trait est comptée algébriquement (sens positif indiqué sur la figure).

• figure de diffraction obtenue dans le plan focal-image de la lentille d'observation, micromètre [mesure optique], spectre cannelé

1.a. Etablir l'expression donnant l'éclairement E en un point P , d'abscisse x , $|x|$ étant d'ailleurs petit devant f , et M étant au voisinage du plan de figure ; on appellera E_0 l'éclairement pour $x = 0$.

On trouvera : $E = E_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$ où $u = \frac{\pi x}{\lambda}$ et $\lambda = \frac{\lambda f}{a}$.

b. Dessiner l'allure de la courbe représentant E en fonction de x . Préciser la position du maximum principal et celle des minimums d'éclairement, en fonction de λ .

c. On prend : $f = 1 \text{ m}$; $\lambda = 0,5461 \text{ } \mu\text{m}$.

Quelles doivent être les valeurs (en mm) a_1 et a_2 de a pour que :

1. Les premières franges obscures se trouvent sur les traits : $x = \pm 0,1 \text{ mm}$?

2. L'éclairement ne diminue pas plus de 10 % quand on passe du centre du champ utile à ses extrémités pour lesquelles : $x_2 = \pm 2 \text{ mm}$? (On calculera a_2 à 2 % près).

d. On déplace entre L_1 et L_2 , par translation, l'écran P' dont la fente S' limite toujours le faisceau traversant L_2 . La figure de diffraction change-t-elle ?

e. On fait tourner S autour de O_1O_2 d'un angle θ à partir de la position initiale.

Dire comment varie l'orientation des franges observées.

2. Dans le plan P' , on a maintenant découpé deux fentes S'_1 et S'_2 , analogues à S' et toujours parallèles à S (qui a repris son orientation initiale). Leur largeur commune est a et leurs milieux sont distants de d (figure 2).

La lumière est diffractée par ces deux fentes.

a. Calculer et représenter graphiquement la répartition de l'éclairement dans P . (Le calcul le plus complet sera évidemment le plus apprécié, mais les étudiants pourront éventuellement se limiter au calcul élémentaire classique dont les résultats sont exacts lorsque la largeur a est assez petite pour que l'éclairement que produiraient séparément S'_1 et S'_2 soit pratiquement uniforme dans le champ utile).

b. Calculer numériquement l'interfrange ξ (en mm) avec les données précédentes et $d = 10 \text{ mm}$.

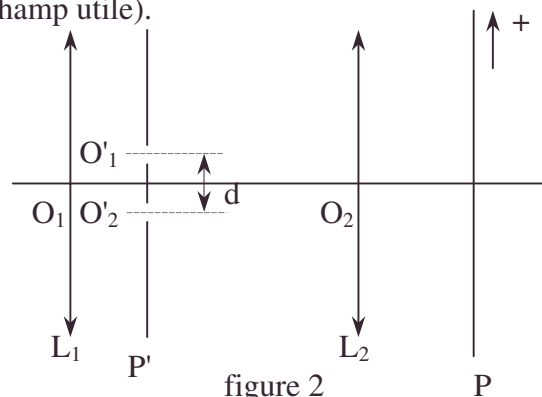


figure 2

II. La largeur a des fentes S'_1 et S'_2 est maintenant, et comme dans toute la suite du problème, suffisamment petite pour que l'éclairement qu'elles produiraient séparément soit pratiquement uniforme dans le champ utile. On interpose sur le faisceau ayant traversé S'_1 de centre O'_1 une lame de verre transparente, à faces parallèles, d'épaisseur e , d'indice n (par rapport à l'air), pour la radiation utilisée.

1. 1^{er} cas :

la lame est normale à O_1O_2 , donc aux rayons moyens du faisceau issu de S'_1 .

a. Calculer le nouvel ordre d'interférence $p_0(x)$ en un point M , d'abscisse x , du plan P en admettant que la différence de marche supplémentaire δ_0 introduite par la lame est, pour tous les rayons, celle qui correspond aux rayons moyens proches de l'axe optique. L'interfrange est-il changé ?

b. Quel est l'ordre d'interférence pour $x = 0$, avec les données précédentes et $e = 0,03 \text{ mm}$; $n = 1,524$?

• différence de marche supplémentaire introduite par une lame à faces parallèles placée orthogonalement aux rayons

2. 2^e cas :

On fait tourner la lame autour d'une parallèle à la direction commune des fentes ; l'angle d'incidence moyen devient i (figure 3).

a. Montrer que la différence de marche supplémentaire introduite sur les rayons moyens est donnée par la formule $\delta = e(n \cos r - \cos i)$, r désignant l'angle de réfraction correspondant à l'incidence i .

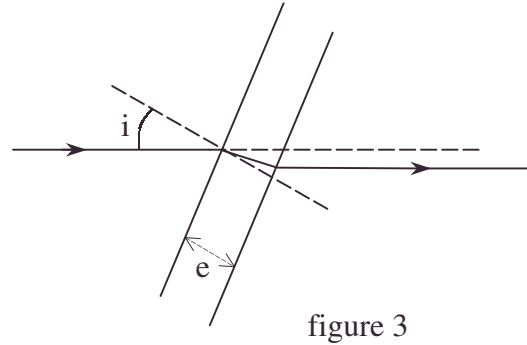


figure 3

b. Que devient pratiquement l'expression de δ pour de petites valeurs de i ?

c. Quel est dans ces conditions le nouvel ordre d'interférence $p(x)$ en M, avec la même approximation qu'en II.1.a.?

3.a. La lame est de nouveau normale aux rayons moyens, on ne fait plus l'approximation précédemment admise (II.1.a.).

En utilisant l'expression demandée (II.2.b.), trouver l'ordre d'interférence $p_0(x)$ en M, d'abscisse x .

Quelle erreur commettait-on précédemment ?

La calculer numériquement pour $x = 0$ et $x = \pm 2$ mm. Conclusion ?

b. Même question pour une incidence moyenne $i_0 = 0,1$ rad, l'ordre d'interférence devenant $p'(x)$.

4. La lame est de nouveau normale aux rayons moyens.

On éclaire en lumière blanche. L'indice n de la lame dépend de la longueur d'onde λ :

$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ (A et B sont des constantes). La dispersion des lentilles est négligeable.

a. Calculer l'ordre d'interférence précédemment noté $p_0(x)$ et que l'on appelle maintenant $p(x, \lambda)$, au point M.

b. Chercher s'il existe des valeurs x_0 de x pour lesquelles p est indépendant de la longueur d'onde λ ou, à défaut, pour lesquelles il est au moins possible d'annuler la dérivée $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$ pour la longueur d'onde moyenne λ_0 du spectre utilisé.

En déduire l'existence d'une frange achromatique (achromatisme approché).

Calculer $p_0 = p(x_0, \lambda_0)$.

c. Aux données précédentes, on ajoute :

$A = 1,500$; $B = 0,0072$ (λ en microns) ; $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$.

Calculer numériquement x_0 et p_0 . L'éclairement de la frange achromatique est-il maximal, minimal ou a-t-il une valeur intermédiaire ?

III. Entre le plan P' des fentes S'_1 et S'_2 , placés très près de la lentille L_1 et la lentille L_2 , on a disposé (figure 4) deux tubes identiques T_1 et T_2 , cylindriques, de section rectangulaire, accolés, dont les axes sont parallèles à O_1O_2 et situés dans le plan de la figure.

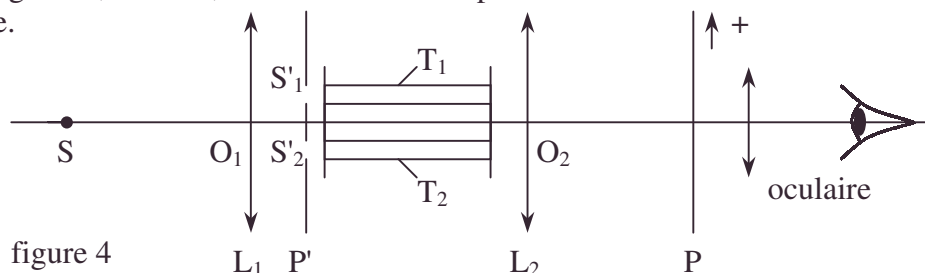


figure 4

Optique ondulatoire

Ces axes distants de d rencontrent les fentes S'_1 et S'_2 en leur milieu. Les tubes, de longueur L , sont fermés par des obturateurs en verre que l'on a découpés dans une même lame à faces parallèles, pour que les chemins optiques qu'ils introduisent sur les deux faisceaux soient égaux. Des tubulures permettent de faire le vide dans T_1 et T_2 , ou d'y introduire des gaz. On constitue ainsi un interféromètre à faisceaux séparés.

Pour les applications numériques, on conserve les données précédentes, notamment $d = 1 \text{ cm}$, et on prend $L = 1 \text{ m}$.

Pour un gaz donné et une longueur d'onde donnée, $N - 1$ (N est l'indice absolu) est proportionnel à la masse volumique du gaz dans l'état où il se trouve.

A la place du trait zéro de la graduation (où se trouve la frange d'ordre nul pour toutes les radiations lorsque les tubes provoquent la même différence de marche), on place la fente d'un spectroscopie disposé de telle sorte que la lumière le traverse effectivement. Les tubes contenant le même gaz, dans les mêmes conditions, et la fente S émettant de la lumière blanche, on obtient le spectre de cette lumière ; on dira, conventionnellement, que le spectre est uniformément brillant.

Les tubes T_1 et T_2 étant initialement vides, on fait lentement pénétrer de l'air sec, à 15°C dans l'un des tubes, par exemple T_2 . Dans le spectre apparaissent des cannelures alternativement sombres et brillantes (spectre cannelé), qui défilent du violet vers le rouge. On cesse de laisser entrer l'air lorsqu'une 50^{ème} cannelure brillante se trouve sur la division de l'échelle des longueurs d'onde correspondant à $\lambda_0 = 0,54607 \mu\text{m}$.

On appelle toujours N_S ($N_S - 1 = 277.10^{-6}$) l'indice absolu de l'air sec à 15°C sous la pression normale pour λ_0 et N cet indice, dans les mêmes conditions, mais pour une longueur d'onde λ quelconque.

1.a. En écrivant l'expression de l'ordre d'interférence en fonction des données, de la pression P dans T_2 et de la longueur d'onde, justifier très simplement, en quelques mots, l'existence et le déplacement des cannelures.

b. Quelle est, en millimètres de mercure, la pression finale dans T_2 ? La pression normale vaut 760 mm Hg .

2.a. On numérote 0 la cannelure brillante correspondant à λ_0 , 1, 2... m (>0),..., les cannelures suivantes situées du côté du violet, $-1, -2, \dots, m$ (<0), les cannelures situées du côté du rouge.

Calculer l'ordre d'interférence p_m sur ces cannelures, ainsi que l'ordre d'interférence p'_m sur les cannelures sombres situées entre les cannelures brillantes de numéro m et $m + 1$.

Les longueurs d'onde correspondantes λ_m, λ'_m étant déterminées par l'expérience en se servant de l'étalonnage du spectroscopie, qu'en déduit-on pour l'air ?

b. Calculer approximativement le nombre de cannelures brillantes situées dans l'intervalle $(0,40 \mu\text{m} - 0,75 \mu\text{m})$ en négligeant la dispersion de l'air.

Calculer exactement ce nombre au moyen des données suivantes :

$N - 1 = 281,7.10^{-6}$ pour $\lambda = 0,40 \mu\text{m}$ et $N - 1 = 274,9.10^{-6}$ pour $\lambda = 0,75 \mu\text{m}$.

CCP ; Durée : 1h

Corrigé

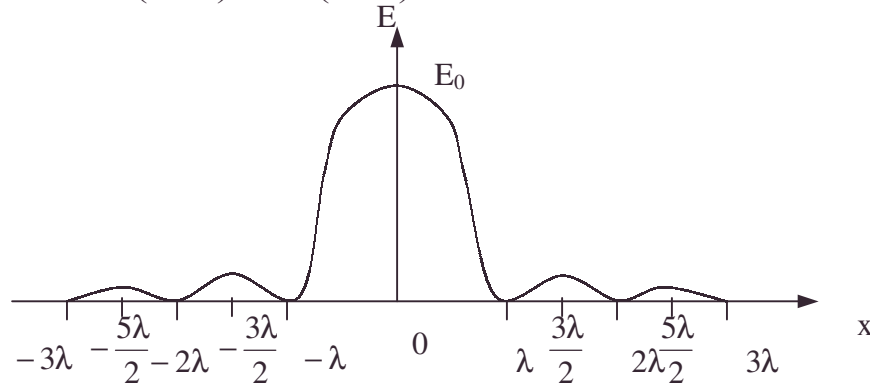
I.1.a. D'après le principe d'Huygens-Fresnel ; le rayon diffracté étant SOM :

$$a(M, t) = K e^{j(\omega t - k_0(SOM))} \iint_{S'} e^{jk_0 \alpha x} dS \text{ avec } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ et } dS = b dx.$$

$$a(M, t) = K a b e^{j(\omega t - k_0(SOM))} \text{sinc } k_0 \frac{\alpha a}{2} ; \text{ or, } x = f\alpha.$$

$$E = a a^* = K K^* (ab)^2 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = E_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \text{ avec } u = \frac{\pi \alpha a}{\lambda} = \frac{\pi x a}{\lambda f}.$$

b.



$$E_{\max} = E_0 \text{ pour } x = 0.$$

$$E_{\min} = 0 \text{ pour } x = p\lambda \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{c.1. } x_1 = \lambda = \frac{\lambda f}{a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda f}{x_1}; \text{ AN : } a_1 = 5,461 \text{ mm.}$$

$$2. 0,9 E_0 = E_0 \text{sinc} \frac{\pi x_2 a_2}{\lambda f}; \text{ AN : } a_2 = 0,0685 \text{ mm.}$$

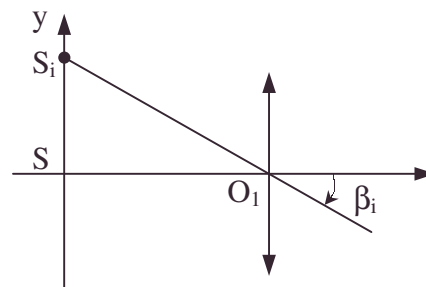
d. D'après le principe d'Huygens-Fresnel :

On change $e^{j(\omega t - k_0(\text{SOM}))}$ mais $\iint_{S'} e^{jk_0 \alpha x} ds$ ne change pas. E ne change pas.

e. Détaillons : prenons un point S_i de S ;
il donne un faisceau incident sur S'

$$\text{de vecteur d'onde } \vec{k}_i \begin{vmatrix} k_0 \alpha_i \\ k_0 \beta_i \\ k_0 \gamma_i \end{vmatrix};$$

$$\text{or, } \vec{SS_i} \begin{vmatrix} r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha_i = -\frac{r \sin \theta}{f} \\ \beta_i = -\frac{r \cos \theta}{f} \end{vmatrix}$$



$$a_i(M, t) = K e^{j(\omega t - k_0(S_i \text{OM}))} \iint_{S'} e^{jk_0[(\alpha - \alpha_i)x + (\beta - \beta_i)y]} dx dy.$$

y n'ayant pas d'intérêt physique, la fente étant infinie, il faut : $\beta - \beta_i = 0$ (comme lorsque $\beta_i = 0$).

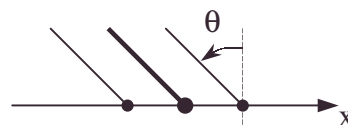
$$a_i(M, t) = K a e^{j(\omega t - k_0(S_i \text{OM}))} \text{sinc} \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f} - \alpha_i \right); E_i(M, t) = E_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi a}{\lambda f} (x + r \sin \theta).$$

$E_{i \max}$ a lieu pour $x = -r \sin \theta$, $y = \beta_i f = -r \cos \theta$ soit pour l'image géométrique.

Quand r varie, les maxima sont sur l'image géométrique de la fente S ; la période des annulations à partir du maximum est $\frac{\lambda F}{a}$ mais uniquement selon la direction

horizontale.

Quand la fente tourne, l'image tourne,
et les franges tournent du même angle.



2.a. Appliquons le principe d'Huygens-Fresnel à chaque fente.

$$a_1(M, t) = K e^{j(\omega t - k_0(SO_1'M))} \iint_{S_1'} e^{jk_0 \alpha x} ds ; a_2(M, t) = K e^{j(\omega t - k_0(SO_2'M))} \iint_{S_2'} e^{jk_0 \alpha x} ds .$$

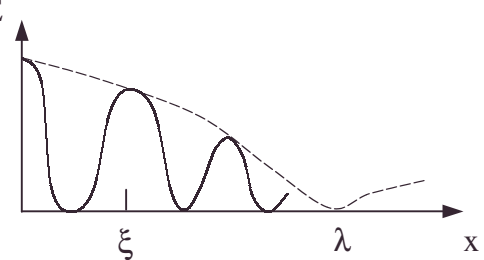
Remarquons : $\iint_{S_1'} e^{jk_0 \alpha x} dS = \iint_{S_2'} e^{jk_0 \alpha x} dS = \frac{a}{2} b \text{sinc} \frac{\pi x}{\lambda}$.

$a(M, t) = a_1 + a_2$ l'éclairage étant cohérent or $\alpha d = O_2'M - O_1'M$.

$$a(M, t) = K a b \text{sinc} \frac{\pi x}{\lambda} e^{j(\omega t - k_0(S_1'O_2'M))} (1 + e^{-jk_0 \alpha d}) ;$$

$$E(M) = aa^* = E_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi x}{\lambda} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{\lambda f} d \right) .$$

La diffraction module les interférences.

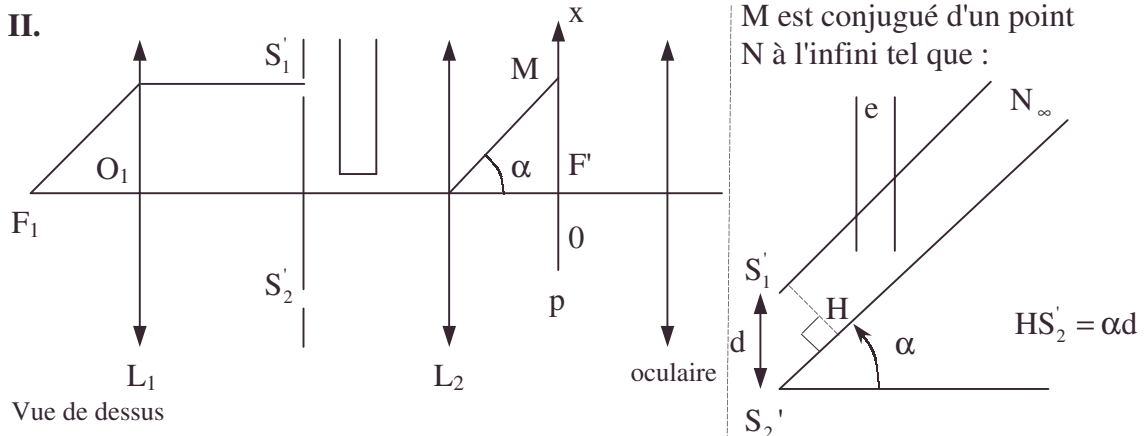


b. Interfrange des interférences :

c'est la période (en particulier des maxima) $\frac{2\pi x_p d}{\lambda f} = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$.

$$\xi = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda f}{d} ; \text{AN : } \xi = 0,0546 \text{ mm} .$$

II.



Vue de dessus

1.a.alpha. Avec α petit : $(S_2'N) - (S_1'N) = -en + e + \alpha d$. ; posons $\delta_0 = (n-1)e$.

La conjugaison par L_2 entre N et M n'introduit pas de différence de marche :

$$(S_2'M) - (S_1'M) = d \frac{x}{f} - (n-1)e ; x = f\alpha .$$

$$p_0(x) = \frac{(S_2'M) - (S_1'M)}{\lambda} = \frac{d}{\lambda f} x - (n-1) \frac{e}{\lambda} .$$

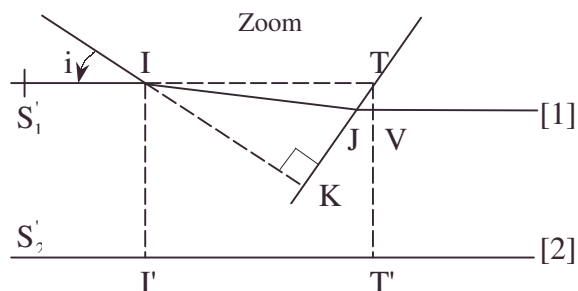
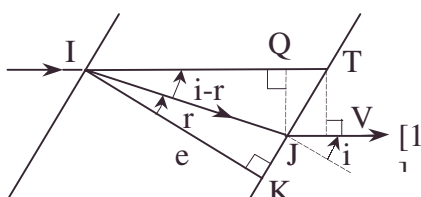
$$\beta. p_0(x) = p_{\text{avant}}(x) - \frac{\delta_0}{\lambda} .$$

La variation d'abscisse qui modifie p_{avant} et p_0 d'une unité est la même.

L'interfrange ne change pas.

b. $x = 0$; $p_{\text{avant}}(0) = 0$; $p_0(0) = -(n-1) \frac{e}{\lambda}$; AN : $p_0(0) = -28,79$.

2.a. Soit T' la projection de T sur [2].



$$IK = e = IJ \cos r ; IQ = IJ \cos(i - r).$$

La différence de marche optique entre les rayons [2] et [1] est :

$$\delta = n IJ + J V - I' T' = n IJ + J V - I T = n IJ - IQ = \frac{n e}{\cos r} - \frac{e}{\cos r} \cos(i - r) ;$$

$$\delta = \frac{e}{\cos r} (n - \cos i \cos r - \sin i \sin r) = \frac{e}{\cos r} (n - \cos i \cos r - n \sin^2 r).$$

$$\delta = \frac{e}{\cos r} (n - \cos i \cos r - n(1 - \cos^2 r)); \delta = e(n \cos r - \cos i) ; \text{ on retrouve } \delta_0 \text{ pour } i = 0.$$

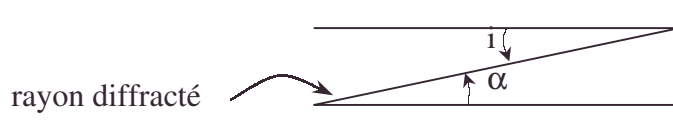
b. i petit : $\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} ; \cos r = 1 - \frac{r^2}{2}$ avec $i = n r$ (cf. loi de Descartes linéarisée).

Soit $\cos r = 1 - \frac{i^2}{2n^2} ; \delta = e(n - 1) + \frac{ei^2}{2} - \frac{nei^2}{2n^2} = e(n - 1) + \frac{ei^2}{2} \frac{(n - 1)}{n}.$

$\delta = e(n - 1) \left(1 + \frac{i^2}{2n} \right).$ On retrouve δ_0 pour $i = 0$.

c. $p_0(x) = \frac{xd}{\lambda f} - (n - 1) \frac{e}{\lambda} \left(1 + \frac{i^2}{2n} \right).$

3.a.α. $p'_0(x) = \frac{xd}{\lambda f} - \frac{\delta}{\lambda}$ avec $i = \alpha = \frac{x}{f} ; \alpha = \text{angle de diffraction}..$

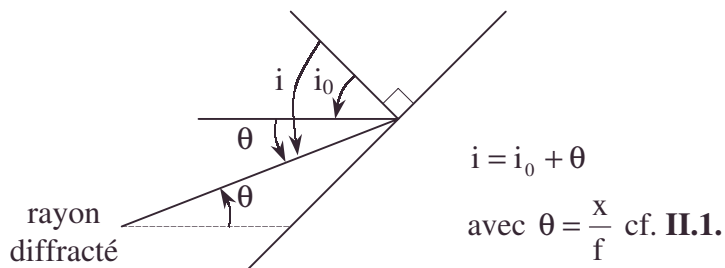


$$p'_0(x) = \frac{dx}{\lambda f} - \frac{e}{\lambda} (n - 1) \left(1 + \frac{x^2}{2nf^2} \right).$$

β. Erreur commise : $p_0 - p'_0 = \frac{(n - 1)ex^2}{2\lambda nf^2}.$

AN : $p'_0 - p_0 = 0$, pour $x = 0$. ; $p_0 - p'_0 = 3,8.10^{-5}$ pour $x = \pm 2 \text{ mm}$;
on justifie $p'_0 = p_0$.

b.



α. $p'(x) = \frac{xd}{\lambda F} - (n - 1) \frac{e}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2n} \left(i_0 + \frac{x}{f} \right)^2 \right).$

β. $p - p' = \frac{(n - 1)e}{2n} \frac{x}{\lambda f} 2i_0.$

$p' - p = 0$ pour $x = 0$;

$p - p' = 3,8.10^{-5}$ pour $x = \pm 2 \text{ mm}$; on justifie encore $p' \approx p$.

$$4.a. p(x, \lambda) = \frac{xd}{\lambda f} - (A-1) \frac{e}{\lambda} - \frac{Be}{\lambda^3}.$$

$$b. \frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \left(-\frac{dx}{f} + (A-1)e + 3B \frac{e}{\lambda^2} \right) = 0 \text{ pour } x_0 = \frac{fe}{d} \left(A-1 + \frac{3B}{\lambda_0^2} \right);$$

Alors, $p(n_0, \lambda)$ est indépendant de λ au 2^{ème} ordre près.

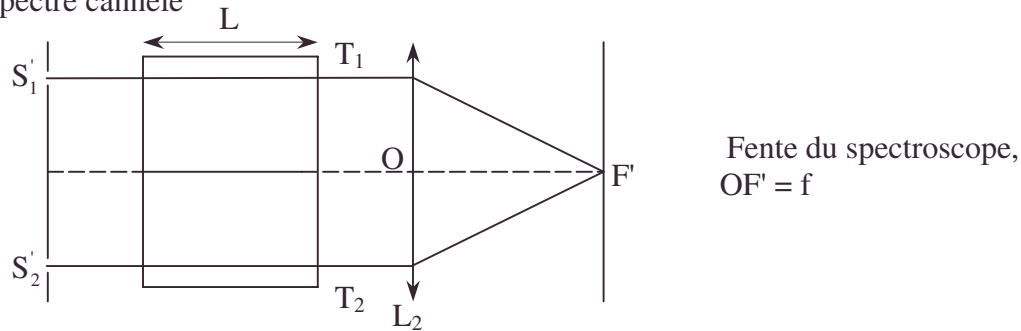
L'ordre étant le même quel que soit λ , la frange x_0 sera blanche (achromatique donc).

$$p_0 = \frac{d}{\lambda_0 f} \frac{fe}{d} \left(-1 + A + \frac{3B}{\lambda_0^2} \right) - (A-1) \frac{e}{\lambda_0} - \frac{Be}{\lambda_0^3} = \frac{2Be}{\lambda_0^3}.$$

$$c. AN : x_0 = 1,68.10^{-3} \text{ m}; p_0 = 2 \text{ (on prendra } e \text{ en } \mu\text{m)}.$$

p_0 étant entier, le déphasage entre les 2 rayons est multiple de 2π , les amplitudes étant en phase, l'éclairement est maximal.

III. Spectre cannelé



Rappelons que l'on peut numéroté les franges d'interférences (pour λ donné) par p , à partir de la frange centrale $\delta = 0$. L'introduction d'air dans T2 fait descendre cette frange centrale c $\left(x_c \frac{d}{f} + (N-1)L = 0 \right)$. La première frange sombre $p = \frac{1}{2}$ au-dessus de cette

frange centrale a lieu à une distance $\frac{1}{2}i$ avec $i = \frac{\lambda f}{d}$; elle sera en F' pour la plus petite

longueur d'onde visible d'abord (soit le violet) et ensuite par continuité jusqu'à la plus grande longueur d'onde visible (le rouge); de même, pour $p = 1$, 1^{ère} frange brillante à une distance i de c et ainsi de suite pour un ordre donné quelconque. Ainsi apparaissent en F' des cannelures alternativement sombres et brillantes qui défilent du violet vers le rouge (dont les longueurs d'onde sont mesurées par le spectroscopie).

$$b. \text{ On a la loi de Gladstone : } \frac{N-1}{\rho} = \frac{N_s-1}{\rho_0} \text{ or } P = \rho \frac{RT}{M} \Rightarrow N-1 = (N_s-1) \frac{P}{P_0};$$

$$\text{Pour } \lambda_0, p_s = 50 = (N_s-1) \frac{P}{P_0} \frac{L}{\lambda_0} \Rightarrow P = \frac{P_0 p_s \lambda_0}{(N_s-1)L}.$$

$$AN : P = 74,91 \text{ mm Hg. vu } P_0 = 760 \text{ mm Hg.}$$

2.a. On fait un changement d'origine.

Pour p donné, l'ordre augmente lorsque λ diminue : $p_m = p_s + m$ pour les franges brillantes.

$$\text{Pour les franges sombres : } p'_m = p_m + \frac{1}{2} = p_s + m + \frac{1}{2}, \text{ tel que } p_m < p'_m < p_{m+1}.$$

On en déduit l'indice de l'air pour les différentes longueurs d'onde.

$$N_m - 1 = (p_s + m) \frac{\lambda_m}{L} \frac{P_0}{p}; N'_m - 1 = \left(p_s + m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda'_m}{L} \frac{P_0}{p} \text{ or } N_s - 1 = p_s \frac{\lambda_0}{L} \frac{P_0}{P}.$$

$$N_m = 1 + \frac{p_s + m}{p_s} \frac{\lambda_m}{\lambda_0} (N_s - 1); N'_m = 1 + \left(\frac{p_s + m + \frac{1}{2}}{p_s} \right) \frac{\lambda'_m}{\lambda_0} (N_s - 1).$$

b.α. Approximativement : $N_m - 1 \# N_s - 1$ si on néglige la dispersion de l'air :

$$p_s + m = \frac{p_s}{\lambda_m} \lambda_0.$$

$$m_2 - m_1 = p_s \lambda_0 \left[\frac{1}{\lambda_{m2}} - \frac{1}{\lambda_{m1}} \right];$$

AN : $\lambda_{m2} = 0,4\mu\text{m}; \lambda_{m1} = 0,75\mu\text{m}; m_2 - m_1 = 31,85$ soit quasiment 32 cannelures brillantes.

$$\beta. p_s + m_1 = \frac{N-1}{N_s-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{m1}} p_s; \text{AN : } p_s + m_1 = 36,13 \text{ pour } \lambda_{m1} = 0,75\mu\text{m}.$$

$$p_s + m_2 = \frac{N-1}{N_s-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{m2}} p_s; \text{AN : } p_s + m_2 = 69,42 \text{ pour } \lambda_{m2} = 0,40\mu\text{m}.$$

$m_2 - m_1 = 33,29$, soit 33 cannelures brillantes. On a une détermination plus précise, 1 cannelure de plus garantie.

7.5.2.1.4. Séparation d'étoiles doubles

Pour mesurer la distance angulaire séparant deux étoiles proches S_1 et S_2 , on place un écran percé de deux fentes infiniment fines, d'écartement variable a , devant l'objectif d'une lunette astronomique. A l'aide de l'oculaire, on observe un système de franges situé dans le plan focal image de l'objectif.

1. On considère d'abord un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$ qui éclaire normalement un écran (E) opaque percé de deux fentes. Après l'écran on dispose une lentille convergente de focale $f'_1 = 80 \text{ cm}$ et de foyer image F'_1 . Les deux fentes sont infiniment fines, identiques, parfaitement transparentes, de grande dimension b selon $F'_1 z$. Leurs centres O_1 et O_2 sont distants de a . Un récepteur "ponctuel" explore le champ d'interférences en $M(0, y, 0)$, y telle que $|y| \ll f'_1$ dans le repère $(F'_1, F'_1 x, F'_1 y, F'_1 z)$.

a. Montrer que la différence de marche au point $M(0, y, 0)$ entre les deux ondes provenant respectivement de O_1 et O_2 (cf. figure 1, échelle non respectée), peut se mettre sous la forme : $\delta = a \frac{y}{f'_1}$.

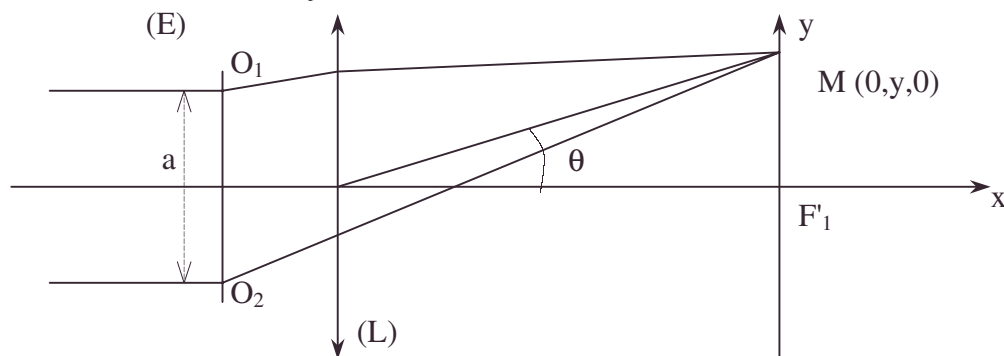


Figure 1

b. Exprimer l'intensité lumineuse $I(y)$ enregistrée par le récepteur ponctuel placé en M en fonction des variables a , y , λ et f_1' . Quel phénomène observe-t-on ? Donner l'allure de $I(y)$ en fonction de y . Donner l'expression de l'interfrange.

2. On observe maintenant un système double constitué de deux étoiles S_1 et S_2 , identiques et très proches l'une de l'autre. On considérera que S_1 est sur l'axe optique et on notera ε l'écart angulaire entre les deux sources S_1 et S_2 . (cf. figure 2).

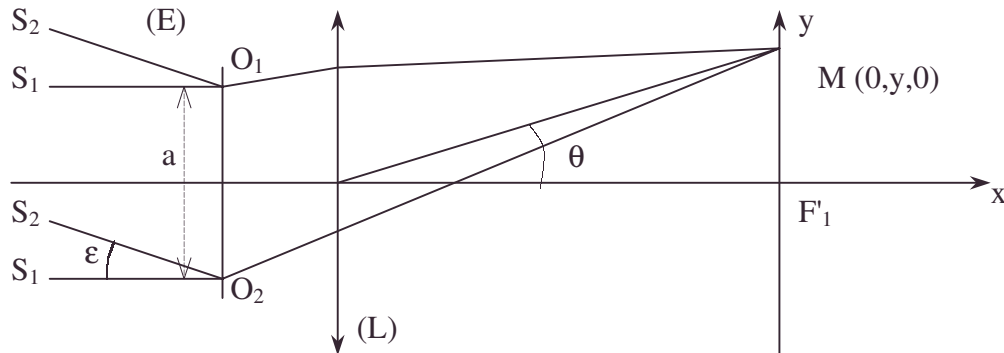


Figure 2

a. Montrer que l'intensité lumineuse due aux deux sources incohérentes S_1 et S_2 observées simultanément peut se mettre sous la forme :

$$I(y) = K \left(1 + \cos \left(\pi \frac{\delta'}{\lambda} \right) \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} + \pi \frac{\delta'}{\lambda} \right) \right), \quad \text{avec} \quad \delta' = a\varepsilon \text{ et } \delta = a \frac{y}{f_1'}, \quad K \text{ est une constante.}$$

constante.

b. On caractérise le contraste par le facteur de visibilité des franges :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}; \quad \text{établir son expression en fonction de } \delta' \text{ et } \lambda.$$

3. Sur quel paramètre peut-on agir pour obtenir $V = 0$?
Qu'observe-t-on lorsque $V = 0$?

Avec la lunette dont le diamètre d'objectif est $D = 60 \text{ mm}$ et pour $\lambda = 550 \text{ nm}$, peut-on séparer les systèmes doubles suivants :

ζ Hercule ($\varepsilon = 1,37$ secondes d'angle), 85 Pégase ($\varepsilon = 0,83$ secondes d'angle) ?

4. Parmi les hypothèses faites dans le calcul ci-dessus, quelles sont celles qui vous paraissent les plus éloignées de la réalité expérimentale ou les plus difficiles à réaliser lors de l'application pratique de cette méthode ?

Autres concours ; Durée : 1h

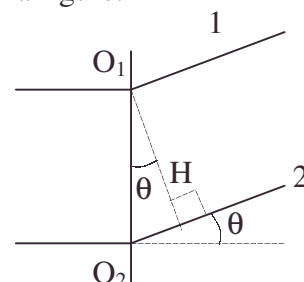
Corrigé

1.a. La lentille n'introduit pas de différence de marche car elle conjugue le point de concours à l'infini des rayons parallèles avec le point M du plan focal de L .
On sait qu'on obtient des franges isoéclairées orthogonales au plan de la figure et qu'il suffit de s'intéresser au phénomène qui a lieu dans le plan de la figure.

$$\delta = O_2 H = a \sin \theta \approx a \theta.$$

$$\text{Par ailleurs, } \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{f_1'} \text{ vu la figure 1.}$$

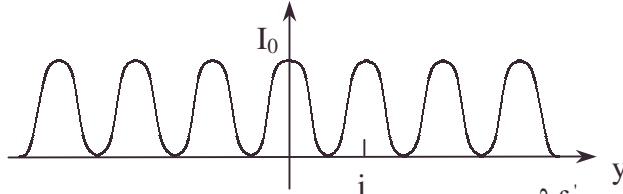
$$\delta = \frac{ay}{f_1'}.$$



$$\text{b.}\alpha. A(M) = A_1 + A_2 = A_0 \left(1 + e^{j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right); A^*(M) = A_0^* \left(1 + e^{-j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right)$$

$$I(M) = A(M) A^*(M) = A_0 A_0^* \left(1 + e^{j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right) \left(1 + e^{-j \frac{2\pi\delta}{\lambda}} \right) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi a y}{\lambda f_1'} \right).$$

β. On observe des interférences



γ. Période spatiale en y de $\cos 2\pi \frac{y}{i}$; $i = \frac{\lambda f_1'}{a}$.

2.a. On ajoute les intensités provenant de 2 sources incohérentes :

$$I(M) = I_1 + I_2 = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta_1}{\lambda} + 1 + \cos \frac{2\pi\delta_2}{\lambda} \right)$$

$\delta_1 = \delta = \frac{ay}{f_1'}$ pour l'intensité venant de S_1 ;

Pour le rayonnement venant de S_2 :

$$\delta_2 = O_2 H' + O_2 H'' = a\varepsilon + \frac{a}{f_1'} y = \delta' + \delta ;$$

On transforme la somme de cosinus en produit :

$$I(M) = I_0 \left(1 + \cos \frac{\pi\delta'}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \frac{\pi\delta'}{\lambda} \right) \right).$$

b. $I_{\max} = I_0 \left(1 + \cos \frac{\pi\delta'}{\lambda} \right)$ obtenue pour $\cos \frac{\pi a y}{\lambda f_1'} = 1$ (car la variable physique est ici y) ;

si $\cos \frac{\pi\delta'}{\lambda} > 0$ car ε petit.

$$I_{\min} = I_0 \left(1 - \cos \frac{\pi\delta'}{\lambda} \right); V = \left| \cos \frac{\pi\delta'}{\lambda} \right|.$$

3.a. $V = 0$ pour $\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} = \pm \frac{\pi}{2}$ (ε est très petit). On prendra le signe + devant $\frac{\pi}{2}$ si $\varepsilon > 0$.

On peut agir sur a et en particulier la valeur maximale pour a : le diamètre D de l'objectif.

b. Quand $V = 0$ on a une teinte uniforme brouillée sans possibilité de distinguer des franges.

c. D est la limite de $a \Rightarrow |\varepsilon_{\lim}| = \frac{\lambda}{2D}$;

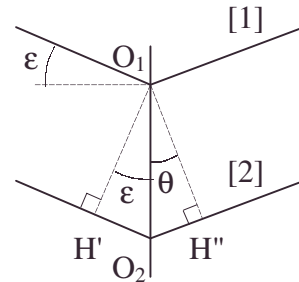
A.N. : $|\varepsilon_{\lim}| = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,95 \text{ seconde d'angle}$.

On peut distinguer les 2 étoiles de ζ Hercule.

On ne peut distinguer celles de 85 Pégase.

4.a. Il est improbable d'avoir des intensités égales pour une même longueur d'onde pour 2 étoiles de vitesses différentes (cf. effet Doppler), visibles ou détectables actuellement à travers une lunette astronomique.

b. Il est difficile de détecter visuellement le brouillage associé à $V = 0$.



c. Il faut une disposition des étoiles dans l'espace par rapport au télescope au moment de l'observation telle que $|\epsilon| > |\epsilon_{\text{lim}}|$.

7.5.2.1.5. Interférométrie stellaire

En 1996, les astronomes ont déterminé, avec une excellente précision, la géométrie de l'étoile double Capella, dans le domaine spectral du proche infrarouge. La méthode utilisée est celle qui fut imaginée dès 1868 par Fizeau, puis mise en œuvre pour la première fois par Michelson en 1920, dans le domaine visible.

L'apport nouveau réside dans la neutralisation des effets perturbants de la turbulence atmosphérique par l'utilisation de trois télescopes : on combine convenablement les facteurs de visibilité des franges d'interférence obtenues avec les différents couples de télescopes.

1. Système optique

L'objectif d'un télescope est constitué d'un miroir primaire sphérique M_P , concave, dont le rayon de courbure sur l'axe optique est de 30 m, et un petit miroir sphérique secondaire M_S , convexe, de rayon de courbure 32 m (figure 1). La distance entre les sommets S_1 et S_2 des deux miroirs est de 9 m.

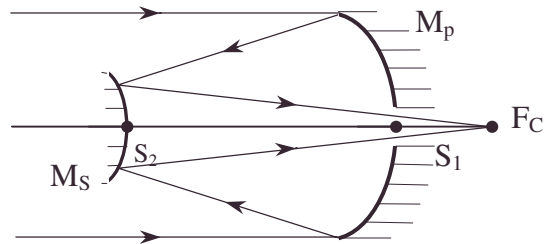


Figure 1

a. Où se trouve le foyer image F_P du miroir primaire M_P ?

b. Quelle est, par rapport au sommet S_2 du miroir secondaire M_S , la position de l'image F_C que donne M_S de F_P ? En déduire la distance qui sépare F_C du sommet S_1 du miroir primaire.

Dans la suite, on assimile le télescope à une lentille mince convergente L , de centre O et de distance focale image $f = 24$ m.

2. Image d'un objet ponctuel

On considère un diaphragme percé d'une ouverture caractérisée par la fonction pupillaire $\mathcal{P}(x,y)$ qui vaut 1 en tout point M de l'ouverture et 0 en tout point en dehors de l'ouverture ; x et y sont les coordonnées cartésiennes de M dans un système d'axes perpendiculaires situés dans le plan du diaphragme.

Lorsqu'on éclaire un tel diaphragme, à l'aide d'une onde incidente, plane, tombant en incidence normale, la répartition de l'éclairement, dans le plan XY , parallèle au plan du diaphragme et situé à l'infini, se met sous la forme :

$$I(P) = \underline{\psi}(u,v) \underline{\psi}^*(u,v) \text{ avec } \underline{\psi}(u,v) = \iint \mathcal{P}(x,y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

P étant un point quelconque du plan XY ; u et v sont deux variables reliées à X et Y . On rappelle que j est le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$, noté parfois i ; le signe moins de l'argument de l'exponentielle n'a qu'une importance conventionnelle.

On place le diaphragme devant la lentille représentant le télescope et on observe la répartition de l'éclairement dans son plan focal image autour du foyer principal image F

a. Pourquoi la figure de diffraction, observée dans le plan focal image de la lentille, c'est-à-dire à distance finie, relève-t-elle de la théorie de la diffraction dite à l'infini ? Quelle est la signification physique de l'argument de l'exponentielle ? Justifier l'appellation fréquences spatiales pour u et v .

b. Trouver la répartition $I(u)$ de l'éclairement dans le cas d'une fente infiniment allongée selon Oy et de largeur ϵ selon Ox . Représenter avec soin le graphe $I(u)$, en calculant la hauteur relative du premier maximum secondaire comparée à celle du maximum central.

• Capella [étoile double], coefficient de cohérence partielle, contraste, Doppler [effet], infrarouge [optique dans le domaine spectral du proche infrarouge], interférométrie stellaire, non séparation des étoiles doubles de 85 Pégase, visibilité

c. Calculer la largeur totale ΔX_1 du maximum central dans le plan focal, dans le cas où $\varepsilon = 14 \text{ cm}$, $\lambda = 635 \text{ nm}$ et $f = 24 \text{ m}$. En déduire la demi-largeur angulaire $\Delta X_1 / 2f$ en millisecondes d'arc. On rappelle que 1 milliseconde d'arc = $1'' = 5 \mu\text{rad}$.

3. Fentes de Young

Le diaphragme pupillaire est percé de deux fentes F_1 et F_2 distantes de a .

a. Trouver la répartition de l'éclairement $I(u)$ dans le plan focal image de la lentille lorsque l'étoile observée est un point lumineux situé sur l'axe de la lentille.

b. Représenter avec soin le graphe $I(u)$, dans le cas où $a = 70 \text{ cm}$. Calculer, en millisecondes d'arc, l'interfrange angulaire pour $\lambda = 635 \text{ nm}$.

c. Quelle conclusion physique doit-on tirer sur l'influence de la largeur des fentes ?

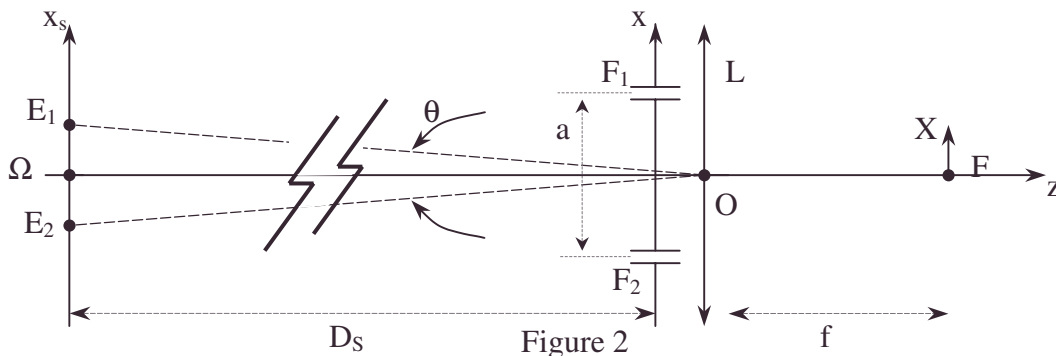
4. Distance angulaire d'une étoile double symétrique

On pointe, avec le dispositif des fentes de Young, le centre Ω d'une étoile double symétrique ; cette étoile est constituée de deux sources primaires incohérentes E_1 et E_2 , de contributions égales en intensité : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.

On oriente la direction définie par les fentes de telle sorte que F_1F_2 passant par O soit parallèle à E_1E_2 (Figure 2). La largeur ε de chacune des fentes est négligeable devant la distance a qui les sépare.

On désigne par λ la longueur d'onde, D_s la distance ΩO , x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s parallèle à l'axe pupillaire Ox et x_{s2} la position analogue de E_2 .

On a ici $x_{s2} = -x_{s1}$.



a. Quelles sont, en fonction de I_s , λ , a , X , f , D_s , x_{s1} et x_{s2} , les contributions de E_1 et E_2 dans l'éclairement du plan focal de la lentille ?

b. Montrer, sans calcul, que la répartition de l'éclairement devient uniforme lorsque la distance a des deux fentes prend une valeur particulière a_1 que l'on déterminera en fonction de λ et de la distance angulaire θ qui sépare E_1 et E_2 .

Dans le cas de Capella, supposée symétrique dans le visible, pour $\lambda = 635 \text{ nm}$, on a trouvé $a_1 = 116,5 \text{ cm}$. En déduire θ en millisecondes d'arc.

c. Etablir l'expression de la répartition de l'éclairement résultant des contributions de E_1 et E_2 .

5. Interféromètre à deux télescopes

Au lieu d'utiliser un seul télescope dont la pupille est percée de deux trous, on couple deux télescopes identiques T_1 et T_2 , de même ouverture circulaire, de diamètre négligeable par rapport à la ligne de base $a = T_1T_2$ (figure 3). Dans ce cas, la position moyenne de l'étoile est repérée par l'angle α , différent de 0, que fait, avec la normale à T_1T_2 , la direction ΩO , O étant le milieu de T_1T_2 .

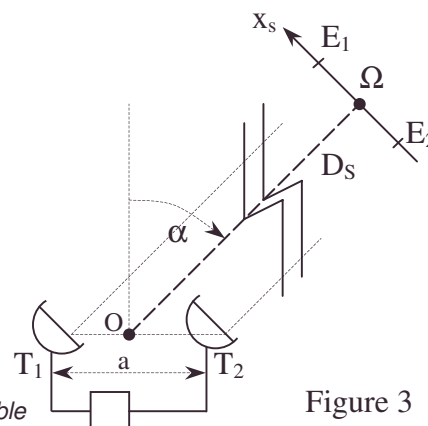


Figure 3

• demi-largeur, diaphragme, distance angulaire d'une étoile double symétrique, figure de diffraction obtenue dans le plan focal-image de la lentille d'observation, graphe, influence de la largeur des fentes, interfrange

Optique ondulatoire

On désigne ici aussi par D_S la distance $O\Omega$, x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s perpendiculaire à la direction $O\Omega$, et x_{s2} la position analogue de E_2 , avec : $x_{s2} = -x_{s1}$.

Un dispositif annexe permet de faire interférer les ondes optiques arrivant aux foyers images en introduisant une différence de marche supplémentaire L_s , déterminée.

On se place dans le cas où $a = 6,10$ m et $\alpha = 60^\circ$. En outre, le rayonnement est quasi-monochromatique et centré sur la longueur d'onde $\lambda = 635$ nm. Enfin, l'étoile est supposée symétrique : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.

a. Exprimer, en fonction de λ , α , L_s , a , x_{s1} , x_{s2} et D_S les différences de phase ϕ_1 et ϕ_2 associées à E_1 et E_2 .

b. Montrer que l'éclairement total I s'écrit : $I = 2I_s \left[1 + \cos\left(\frac{\pi b \theta}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi \frac{\lambda + L_s}{\lambda}\right) \right]$.

b et λ étant des longueurs que l'on déterminera en fonction de a et de α .

c. Trouver, en millisecondes d'arc, la plus petite distance angulaire que l'on a pu détecter en obtenant un éclairement uniforme avec les valeurs précédentes de a , λ et α . Quel est l'intérêt d'un tel système par rapport à celui décrit à la question **IV** ?

d. On s'arrange généralement pour que $L_s = -\lambda$. Quelle en est la raison ?

6. Distance angulaire des composantes d'une étoile double non symétrique

On considère à nouveau le montage de la figure 2, mais les contributions de E_1 et E_2 sont différentes : $I_{s2} = \mu I_{s1}$, μ étant un facteur inconnu.

a. Montrer que la nouvelle répartition de l'éclairement total dans le plan focal image de la lentille peut se mettre sous la forme : $I(P) = (I_{s1} + I_{s2}) \left[1 + \text{Re} \left\{ \underline{\gamma}_s \exp \left(j 2\pi \frac{aX}{\lambda f} \right) \right\} \right]$,

où $\underline{\gamma}_s$, appelé degré complexe de cohérence spatiale, a pour expression :

$$\underline{\gamma}_s = C_1 \exp \left(j\pi \frac{a}{\lambda_s} \right) + C_2 \exp \left(-j\pi \frac{a}{\lambda_s} \right)$$

C_1 , C_2 étant deux facteurs que l'on exprimera en fonction de μ , et λ_s une largeur que l'on reliera à λ et à la distance angulaire θ . En déduire la partie réelle, la partie imaginaire, le module $|\underline{\gamma}_s|$ et l'argument α_s de $\underline{\gamma}_s$.

b. Le facteur de visibilité des franges d'interférence est défini expérimentalement par $V = \frac{(I_M - I_m)}{(I_M + I_m)}$, I_M étant la valeur maximale de l'éclairement et I_m sa valeur minimale.

Quelle relation simple existe-t-il entre $\underline{\gamma}_s$ et V ?

c. Donner l'expression de V en fonction de μ et de $\cos \frac{\pi a}{\lambda_s}$. Quelles sont les valeurs minimale V_m et maximale V_M de V en fonction de μ ? Que deviennent ces valeurs dans le cas où $\mu = 1$?

d. Pour $a = a_1 = 116,5$ cm, on atteint la première valeur minimale V_m qui vaut 0,35. En outre, on constate que $\alpha_s > 0$. Trouver la distance angulaire θ et la valeur de μ .

CCP ; Durée : 2h

Corrigé

1.a. $\overline{S_1 C_p} = -30 \text{ m} \Rightarrow \overline{S_1 F_p} = -15 \text{ m}$ car F est le milieu de $S_1 C_p$.

• introduction d'une différence de marche supplémentaire prédéterminée entre 2 ondes interférentes, télescopes identiques couplés

b. $A_{\infty} \xrightarrow{M_P} F_P \xrightarrow{M_S} F_C$ or $f'_S = \overline{S_2 F_S} = -16 \text{ m}$.

$$\frac{1}{\overline{S_2 F_C}} + \frac{1}{\overline{S_2 F_P}} = \frac{1}{f'_S} \Rightarrow \overline{S_2 F_C} = \frac{\overline{S_2 F_P} \cdot f'_S}{\overline{S_2 F_P} - f'_S}; \overline{S_2 F_C} = 9,6 \text{ m} \Rightarrow \overline{S_1 F_C} = \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 F_C} = 0,6 \text{ m}.$$

2.a.α. La conjugaison par une lentille n'apporte pas de modification relative des chemins optiques ; l'éclairage en incidence normale également.

L'intensité diffractée à l'infini constitue un objet dont la lentille donne une image proportionnelle dans le plan focal image.

L'intensité observée à distance finie dans le plan focal image est identique à l'intensité diffractée à l'infini par le diaphragme.

β. Le rayon passant par M et le rayon de référence passant par l'origine des coordonnées du diaphragme diffractant dans la même direction à l'infini (définie par P), après le diaphragme, ont un déphasage $2\pi(ux + vy)$.

γ. Quand $\varphi = 2\pi vt$, v est la fréquence (temporelle).

Quand $\varphi = 2\pi ux$, u est la fréquence spatiale en x .

De même, v pour la variable y .

On identifiera : $2\pi(ux + vy) = \vec{k} \cdot \vec{OM}$, O étant l'origine des coordonnées dans le plan du diaphragme.

b. Le sens physique de y disparaît : pour une fente infinie invariante par rapport à toute translation parallèle à elle-même, le choix de l'origine est indifférent et la valeur de y pour M peut être choisie arbitrairement ; pour être cohérent avec cette analyse, le coefficient de y , v , doit être nul, pour que la valeur de y n'ait aucune conséquence : on n'observe de la lumière diffractée que dans le plan $y = 0$, défini par $v = 0$.

$$\Psi(P) = \iint e^{-i2\pi ux} dx dy = L \left[\frac{e^{-2ju\pi x}}{-2ju\pi} \right]_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}} = L\varepsilon \text{sinc}(\pi u \varepsilon), L \text{ étant la dimension (grande) de}$$

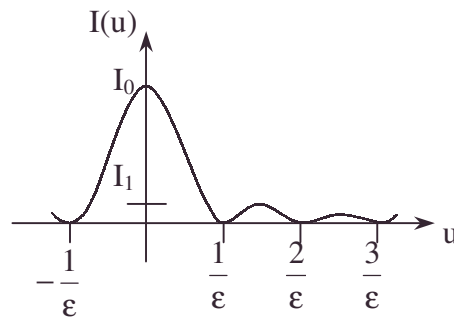
la fente selon y .

$$I(u) = I_0 \text{sinc}^2(\pi u \varepsilon).$$

On obtient le premier maximum secondaire I_1 approximativement et rapidement pour

$$u = \frac{3}{2}\varepsilon; \frac{I_1}{I_0} = \frac{4}{9\pi} = 0,045.$$

Le tracé exact de la courbe donne $\frac{I_1}{I_0} = 0,0495$.



La largeur de la frange centrale est prise égale à $\Delta u = \frac{2}{\varepsilon}$.

c. Le déphasage entre les 2 rayons issus de O et M s'écrit : $\varphi = 2\pi ux = \frac{2\pi}{\lambda} x \theta$

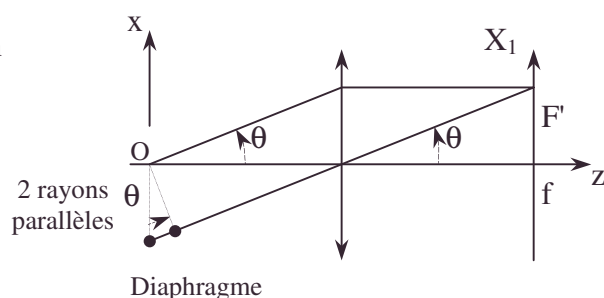
$$\Rightarrow u = \frac{\theta}{\lambda} \text{ pour } \theta \text{ petit vu l'approximation}$$

de Gauss imposée par la lentille.

Or, $X_1 = f \theta = f u \lambda$.

$$\Delta X_1 = f \lambda \Delta u = 2f \frac{\lambda}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\Delta X_1}{2f} = \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

$$\text{A.N. : } \Delta X_1 = 2,18 \cdot 10^{-4} \text{ m};$$



$$\frac{\Delta X_1}{2f} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 907,1 \text{ millisecondes d'arc (soit moins d'une seconde d'arc).}$$

3.a. Voir figure ci-dessous ;

$$\delta = a\theta ; \text{ si } u = \frac{\theta}{\lambda} \delta = a u \lambda \text{ et } I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta) \text{ devient } I(u) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos 2\pi u).$$

b. L'interfrange "angulaire" est la période pour les angles. Ici θ_i étant petit,

$$2\pi \frac{a}{\lambda} \theta_i = 2\pi \Rightarrow \theta_i = \frac{\lambda}{a}.$$

A.N. : $1'' = 5 \mu\text{rad} \Rightarrow \theta = 181 \text{ millisecondes d'arc.}$

$$\text{c. } I = I_0 \text{sinc}^2(\pi u \epsilon) \cos^2 \pi a u.$$

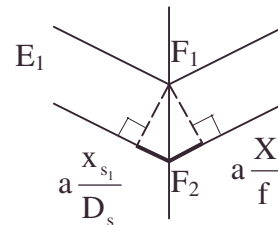
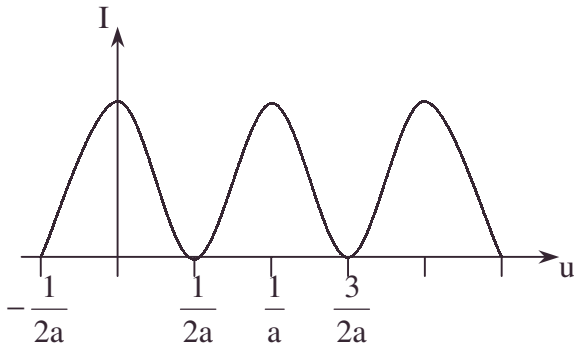
La diffraction module les interférences et nuit à leur visibilité effective cf. **2.b.** et sa figure.

4.a. Vu la figure ci-contre pour un direction de diffraction donnée, E_1 est associé à

$$\delta_1 = \frac{aX}{f} + \frac{ax_{s1}}{D_s};$$

de même par symétrie avant les fentes,

$$E_2 \text{ est associé à } \delta_2 = \frac{aX}{f} - \frac{ax_{s1}}{D_s}.$$



$$E_1 \rightarrow I_1 = I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi aX}{\lambda f} + \frac{2\pi ax_{s1}}{\lambda D_s} \right) \right); E_2 \rightarrow I_2 = I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi aX}{\lambda f} - \frac{2\pi ax_{s1}}{\lambda D_s} \right) \right).$$

On notera que $I_{1\text{max}} = 2I_s$; $I_{1\text{min}} = 0$ et $\langle I_1 \rangle = I_s$ (cf. absence de cohérence donc d'interférences).

b. Si les deux phénomènes périodiques de période angulaire λ / a sont décalés d'une demi-période, il y a brouillage : soit pour $\theta = \frac{\lambda}{2a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{2\theta}$.

$$\text{A.N. : } \theta_1 = \frac{\lambda}{2a_1} ; \theta_1 = 55 \text{ millisecondes d'arc.}$$

c. Vu la transformation de somme de cosinus en produit :

$$I = I_1 + I_2 = 2I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax_{s1}}{D_s \lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi aX}{f \lambda} \right) \right);$$

5.a. $\delta_1 = E_1 T_1 - E_1 T_2 + L_s$; $\delta_2 = E_2 T_1 - E_2 T_2 + L_s$ vu la figure 3.

On notera que α n'est pas petit, ni $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Utilisons une méthode vectorielle pour introduire Ω .

$$E_1 T_1 - E_1 T_2 = \frac{E_1 T_1^2 - E_1 T_2^2}{E_1 T_1 + E_1 T_2} = \frac{\overrightarrow{E_1 T_1}^2 - \overrightarrow{E_1 T_2}^2}{E_1 T_1 + E_1 T_2} = \frac{(\overrightarrow{E_1 T_1} - \overrightarrow{E_1 T_2})(\overrightarrow{E_1 T_1} + \overrightarrow{E_1 T_2})}{(E_1 T_1 + E_1 T_2)}.$$

Or, $\overrightarrow{E_1 T_1} - \overrightarrow{E_1 T_2} = \overrightarrow{T_2 T_1}$ et $E_1 T_1 + E_1 T_2 \neq 2D_s$ selon la technique habituelle sur les équivalents.

$$E_1 T_1 - E_1 T_2 = \frac{\overrightarrow{T_2 T_1}}{2D_s} (\overrightarrow{E_1 \Omega} + \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{O T_1} + \overrightarrow{E_1 \Omega} + \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{O T_2}) = \frac{\overrightarrow{T_2 T_1}}{D_s} \cdot \overrightarrow{E_1 \Omega} + \frac{\overrightarrow{T_2 T_1}}{D_s} \cdot \overrightarrow{\Omega O} + 0.$$

$$E_1 T_1 - E_1 T_2 = -\frac{a}{D_s} x_{s1} \cos \alpha + a \sin \alpha \Rightarrow \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(L_s - \frac{a x_{s1}}{D_s} \cos \alpha + a \sin \alpha \right).$$

$$\text{De même en } \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(L_s + \frac{a x_{s1}}{D_s} \cos \alpha + a \sin \alpha \right).$$

$$\text{b. } I_1 = I_s (1 + \cos \phi_1); I_2 = I_s (1 + \cos \phi_2) \Rightarrow I = I_1 + I_2.$$

$$\Rightarrow I = 2I_s \left(1 + \cos \frac{2\pi x_{s1} a \cos \alpha}{D_s \lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (a \sin \alpha + L_s) \right); \text{ or } \theta = \frac{2x_{s1}}{D_s},$$

d'où $b = a \cos \alpha$ et $\lambda = a \sin \alpha$.

c. Le rôle précédemment joué par a en 4.c. est joué par $b = a \cos \alpha$.

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{2a \cos \alpha}; \text{ A.N. : } \theta_1 = 21 \text{ millisecondes d'arc. C'est mieux.}$$

Vu $\cos \alpha < 1$, on peut utiliser des valeurs de a plus grandes (cf. extension des télescopes).

$$\text{d. Si } L_s = -\lambda : \cos \frac{2\pi}{\lambda} (a \sin \alpha + L_s) = 1; I = 2I_s \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a x_{s1} \cos \alpha}{\lambda D_s} \right) \right).$$

La visibilité vaut 1 (soit le maximum atteint).

$$\text{6.a. } I_{s2} = \mu I_{s1} \Rightarrow \mu \in \mathbb{R}^+.$$

$$I = I_{s1} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} + \frac{2\pi a x_{s1}}{D_s \lambda} \right) \right) + I_{s2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} - \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} \right) \right).$$

Remarquons, pour introduire l'expression de l'énoncé : $I_{s1} + I_{s2}$, que $I_{s1} + I_{s2} = I_{s1} (1 + \mu)$

$$\Rightarrow I_{s1} = \frac{I_{s1} + I_{s2}}{1 + \mu} \text{ et } I_{s2} = \frac{\mu}{1 + \mu} (I_{s1} + I_{s2}).$$

$$\Rightarrow I = (I_{s1} + I_{s2}) \left[1 + \frac{1}{1 + \mu} \cos \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} + \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} \right) + \frac{\mu}{1 + \mu} \cos \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} - \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} \right) \right]$$

$$I = (I_{s1} + I_{s2}) \left(1 + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 + \mu} \exp j \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} + \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} \right) + \frac{\mu}{1 + \mu} \exp j \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} - \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} \right) \right] \right).$$

$$I = (I_{s1} + I_{s2}) \left(1 + \operatorname{Re} \left[e^{j \frac{2\pi a X}{\lambda f}} \left(\frac{1}{1 + \mu} \exp j \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} + \frac{\mu}{1 + \mu} \exp -j \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} \right) \right] \right) \text{ de la forme}$$

$$\text{proposée, avec } C_1 = \frac{1}{1 + \mu}; C_2 = \frac{\mu}{1 + \mu} \text{ et } \lambda_s = \frac{\lambda D_s}{2x_{s1}} = \frac{\lambda}{\theta}.$$

Utilisons la formule d'Euler $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ aux 2 exponentielles :

$$\underline{\gamma}_s = \cos \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} + j \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right) \sin \frac{2\pi a x_{s1}}{\lambda D_s} = |\underline{\gamma}_s| (\cos \arg \underline{\gamma}_s + j \sin \arg \underline{\gamma}_s)$$

$$\operatorname{Re}(\underline{\gamma}_s) = \cos \left(\frac{\pi a \theta}{\lambda} \right); \operatorname{Im}(\underline{\gamma}_s) = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \sin \left(\frac{\pi a \theta}{\lambda} \right).$$

Optique ondulatoire

$$|\underline{\gamma}_s|^2 = 1 - \sin^2 \frac{\pi a \theta}{\lambda} + \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi a \theta}{\lambda} = 1 - \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \sin^2 \frac{\pi a \theta}{\lambda}. \text{ On voit } |\gamma_s| \leq 1$$

$$\text{ou } |\underline{\gamma}_s|^2 = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 + \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \cos^2 \frac{\pi a \theta}{\lambda}.$$

$$\alpha_s = \arg \underline{\gamma}_s = \arctan \left[\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} \tan \left(\frac{\pi a \theta}{\lambda} \right) \right].$$

b. Remplaçons dans l'expression donnée en **6.a.** : $\underline{\gamma}_s = |\underline{\gamma}_s| e^{j\alpha_s}$.

$$I = (I_{s1} + I_{s2}) \left(1 + \operatorname{Re} \left(|\underline{\gamma}_s| e^{j \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} + \alpha_s \right)} \right) \right) = (I_{s1} + I_{s2}) \left(1 + |\underline{\gamma}_s| \cos \left(\frac{2\pi a X}{\lambda f} + \alpha_s \right) \right).$$

$$I_{\max} = (I_{s1} + I_{s2}) (1 + |\underline{\gamma}_s|); I_{\min} = (I_{s1} + I_{s2}) (1 - |\underline{\gamma}_s|) \Rightarrow V = |\underline{\gamma}_s|.$$

$$\text{c. } V = \sqrt{\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 + \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda_s}};$$

$$V_m = \left| \frac{1-\mu}{1+\mu} \right| \text{ obtenu pour le minimum de } \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda_s} = 0;$$

$$V_M = 1 \text{ obtenu pour le maximum de } \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda_0} = 1.$$

$$\text{Si } \mu = 1 : V_m = 0 ; V_M = 1.$$

$$\text{d. } \alpha_s > 0 \text{ et } \theta > 0 \Rightarrow 1 - \mu > 0 \Rightarrow V_m = \frac{1-\mu}{1+\mu} = 0,35 \Rightarrow \mu = 0,48$$

$$\text{or } \cos^2 \frac{\pi a}{\lambda} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{2a_1} \text{ A.N. : } \theta = 55 \text{ millisecondes d'arc.}$$

On retrouve la même performance que lorsque $\mu = 1$.

7.5.2.2. Diffraction

N'appartient pas explicitement au programme de TSI2

7.5.2.2.1. Diffractions de pupilles

On envisage, dans le vide, une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ , de direction de propagation $z'z$ et un plan d'onde (P).

Dans ce plan d'onde, on place une plaque opaque sauf dans une région (S). Dans la suite, cette région (S) sera appelée "pupille".

On repère la position d'un point M dans le plan d'onde par ses coordonnées x et y par rapport à des axes rectangulaires (figure 1). On s'intéresse à l'amplitude complexe de l'onde diffractée par la pupille dans une direction OB caractérisée par le vecteur unitaire \vec{u} de composantes α, β, γ dans le repère Ox, y, z .

On prendra comme origine des phases celle de la vibration envoyée en B par O. Conformément au principe de Huygens-Fresnel, un élément de pupille d'aire $dx dy$ centré en M constitue une source secondaire qui envoie dans la direction OB une

vibration d'amplitude complexe : $dA = KT(x, y) \frac{dx dy}{S} e^{j\varphi}$, où j désigne le symbole

complexe tel que $j^2 = -1$. Dans l'expression précédente, S désigne l'aire de la pupille ; K désigne un terme constant homogène à une amplitude ; φ désigne un déphasage qui dépend de la position du point M ; $T(x, y)$ désigne la transparence (ou coefficient de transmission de l'amplitude scalaire optique), en M, de la pupille : ce terme tient compte du fait que la pupille peut introduire en chaque point une modification qui sera indiquée question par question. Quand la pupille se réduit à une simple ouverture pratiquée dans une plaque opaque, $T(x, y) = 1$ en tout point de la pupille et $T(x, y) = 0$ pour la partie opaque de la plaque.

I. La pupille est une simple ouverture rectangulaire dans une plaque opaque.

La pupille est centrée en O et a pour côtés a et b (figure 2).

1. Déterminer l'amplitude complexe A de l'onde diffractée par cette ouverture dans la direction OB définie par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

2. On suppose que, a restant fini, b devient très supérieur à a : on obtient ainsi une fente de largeur a . Montrer alors que la lumière n'est parfaitement diffractée que dans le plan défini par $\beta = 0$ et donner l'expression de A . Représenter la variation de A en fonction de α . Déterminer également l'intensité J de l'onde diffractée.

3. On place une lentille convergente d'axe principal $z'z$ comme l'indique la figure 3. Dessiner ce qu'on observe dans le plan focal de la lentille situé à la distance f' de la lentille. Dans le plan focal, l'axe $O'x'$ est parallèle à Ox , l'axe $O'y'$ est parallèle à Oy .

II. 1. On envisage à présent une pupille de forme et de transparence quelconques. On lui fait subir une translation dans son plan. Le transformé de O est Ω de coordonnées (x_0, y_0) (figure 4). Donner l'expression de l'amplitude complexe de l'onde diffractée dans la direction \vec{u} par la pupille dans sa position translatée. En déduire que l'intensité de l'onde diffractée est la même que lorsque la pupille est dans sa position primitive.

2. On considère deux pupilles identiques qui se déduisent l'une de l'autre par une translation dans le plan (P) (figure 5). Montrer que l'amplitude complexe de l'onde diffractée par l'ensemble des deux pupilles s'obtient en multipliant un "terme de

Diffraction

diffraction" relatif à une pupille par un "terme d'interférences" relatif à deux sources ponctuelles situées en O_1 et O_2 .

3. Appliquer ce résultat général au cas de deux fentes de largeur a dont les centres O_1 et O_2 sont à la distance d (figure 6). Exprimer en fonction de α l'amplitude complexe A de l'onde diffractée. Représenter graphiquement l'intensité J en fonction de α pour $\frac{d}{a} = 5$. Que devient J dans le cas limite de deux fentes infiniment fines ? Que vaut alors le "terme de diffraction" (en intensité) ?

III. La pupille est à présent un rectangle de côté b grand devant a (forme de fente), un dispositif convenable réalisant une transparence périodique $T(x) = \cos \frac{2\pi x}{a_0}$.

Déterminer et représenter graphiquement A en fonction de α .
Comment évolue la courbe quand a_0 diminue ?

IV. La pupille a la même forme qu'à la question **III.**, mais la transparence périodique est à présent : $T(x) = \cos^2 \frac{2\pi x}{a_0}$. Répondre aux mêmes questions qu'en **III.**

De plus, pourriez-vous indiquer un procédé permettant de réaliser une telle pupille ?

V. On considère à présent une ligne lumineuse située dans le plan xOz perpendiculairement à l'axe $z'z$. Cette ligne peut être considérée comme formée de points-sources indépendants. Une lentille convergente d'axe principal $z'z$, très éloignée de l'objet, en donne une image dans son plan focal. Sur la figure 7, θ_0 est l'abscisse angulaire d'un point quelconque de l'objet et θ , celle d'un point quelconque de l'image. Les extrémités de l'objet et de son image correspondent aux abscisses angulaires respectives $\theta = \theta_0 = 0$ et $\theta = \theta_0 = \theta_1$. Le plan de la figure 7 est le plan xOz et la fente a donc sa plus grande dimension perpendiculaire au plan de figure.

1. θ étant un angle petit, montrer que θ s'identifie à α défini au début de l'énoncé.

2. Si l'on ne tient pas compte du phénomène de diffraction, l'image géométrique dans l'approximation de Gauss est une ligne d'éclairement $E(\theta)$ située dans le plan focal de la lentille. Montrer que, si l'on fait intervenir la diffraction, l'éclairement dans le plan focal est donné par : $E'(\theta) = \int_0^{\theta_1} E(\theta_0) D(\theta - \theta_0) d\theta_0$, où la fonction D de la variable $\theta - \theta_0$ (notée $D(\theta - \theta_0)$) rend compte de la diffraction de la fente qui diaphragme la lentille.

3. Dans le cas où l'éclairement $E(\theta)$ de l'image géométrique est constant, on va étudier $E'(\theta)$ sans calculer effectivement l'intégrale.

Montrer que, dans le cas où la largeur angulaire θ_1 de l'objet est grande devant la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction de la fente, l'éclairement E' a l'allure représentée à la figure 8.

Montrer que si, au contraire, la largeur angulaire de l'objet est du même ordre ou plus petite que la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction de la fente, l'image géométrique est beaucoup plus altérée par la diffraction que dans le cas précédent.

ENS ; Durée : 1h30

Figures du problème

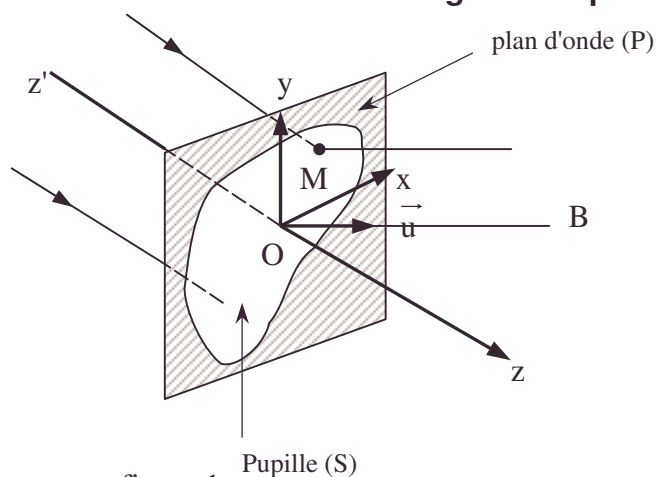


figure 1

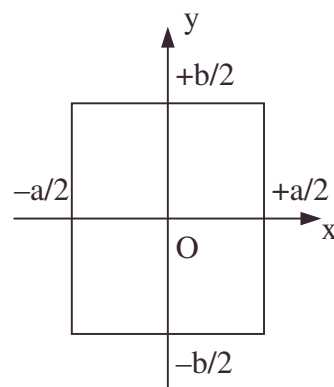


figure 2

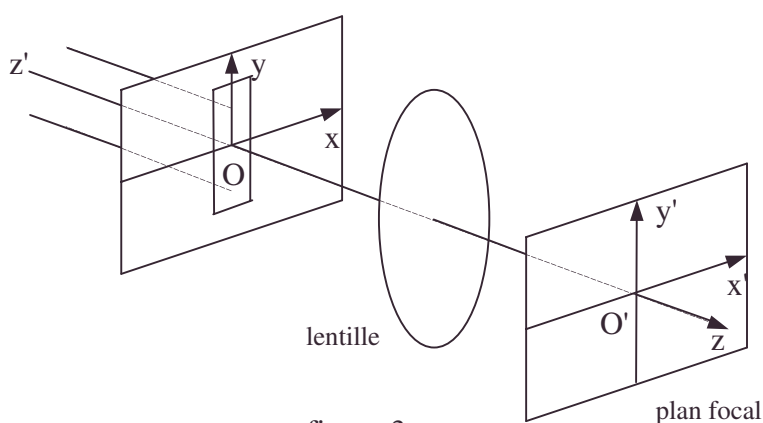


figure 3

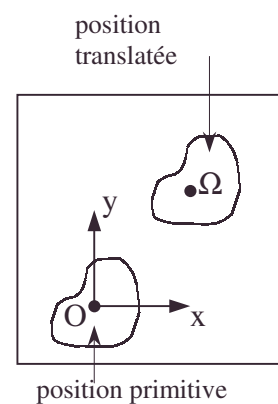
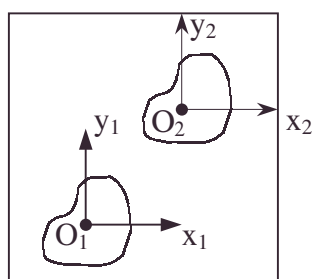
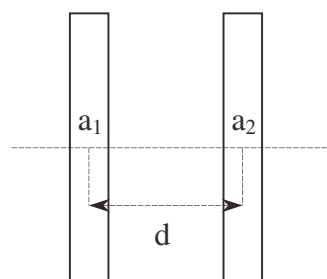


figure 4



2 pupilles identiques

figure 5



2 fentes

figure 6

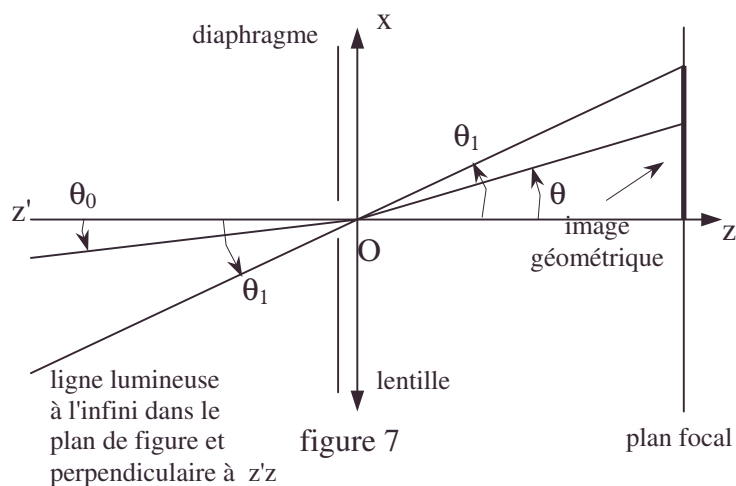


figure 7

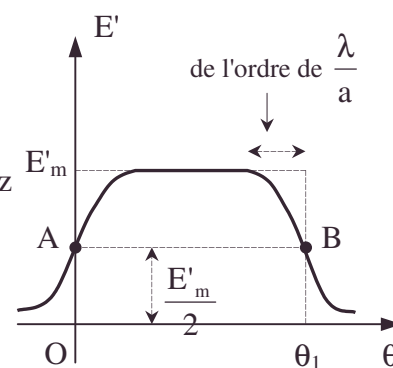


figure 8

Corrigé

I.1. $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (x\alpha + y\beta)$.

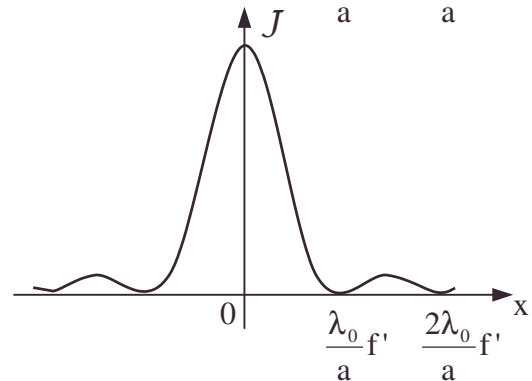
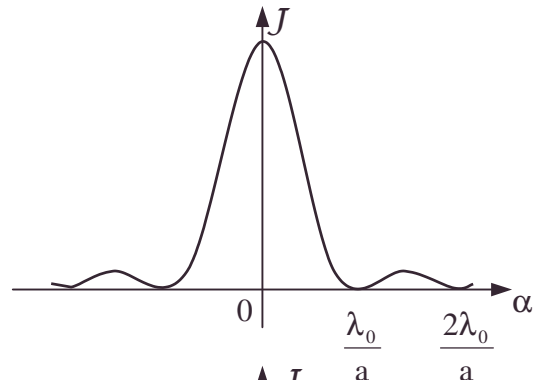
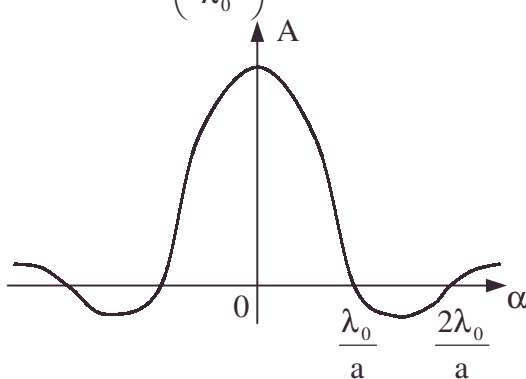
$$dA = \frac{K}{S} dx dy e^{j\varphi}, \text{ notation donnée dans l'énoncé ; } A = \frac{K}{S} \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha x} dx \right] \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0}y\beta} dy \right].$$

$$A = \frac{K}{S} \frac{a 2j \sin \frac{\pi}{\lambda_0} a \alpha}{\frac{2\pi j}{\lambda_0} \alpha a} \cdot \frac{b \sin \frac{\pi b \beta}{\lambda_0}}{\frac{\pi b \beta}{\lambda_0}} \Rightarrow A = K \left(\frac{\sin \frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}{\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}} \right) \left(\frac{\sin \frac{\pi b \beta}{\lambda_0}}{\frac{\pi b \beta}{\lambda_0}} \right).$$

2.α. $b \rightarrow \infty \Rightarrow \beta = 0$ condition nécessaire pour qu'il existe des points où $A \neq 0$.

β. $A = K \frac{\sin \frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}{\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}$ dans le plan $\beta = 0$; $A = 0$ ailleurs.

γ. $J = K^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}{\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right)^2}$ dans le plan $\beta = 0$. $J = 0$ ailleurs.



3. $\alpha = \frac{x'}{f'}$; $J = K^2 \text{sinc}^2 \frac{\pi a x'}{\lambda_0 f'}$. On a une frange de pointillés selon Ox' dont l'éclairement est indiqué ci-dessus.

$$\text{II.1.}\alpha. \quad dA = KT \frac{dx dy}{S} e^{j\varphi_\Omega} e^{j(\overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{u}) \frac{2\pi}{\lambda_0}} \text{ avec } \varphi_\Omega = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u}.$$

$\overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{u} = x_0 \alpha + y_0 \beta$, $\iint_{S_\Omega} T_\Omega e^{j\varphi_\Omega} dx_\Omega dy_\Omega = \iint_{S_0} T_0 e^{j\varphi} dx_0 dy_0$ évidence mathématique du changement de notation de indices, (O, Ω) .

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega} ; A_\Omega = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(x_0\alpha + y_0\beta)} A_0.$$

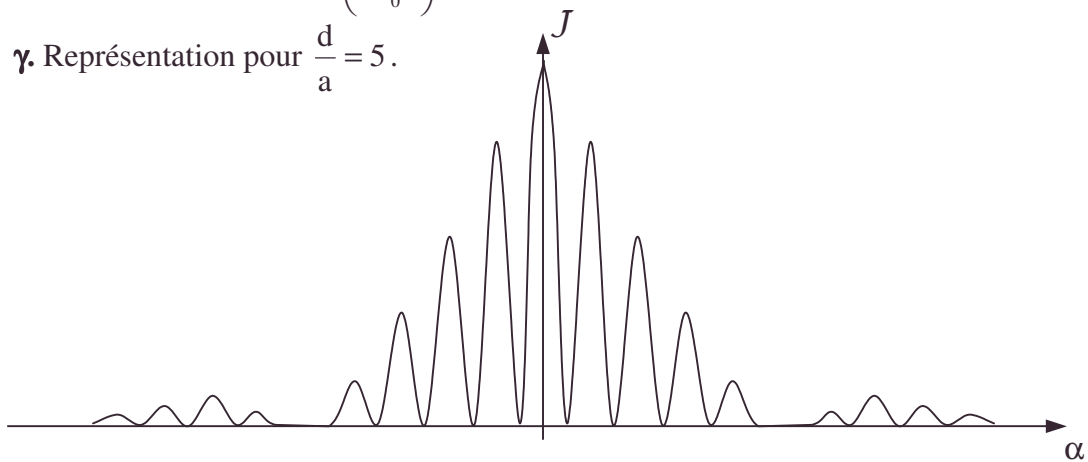
$\beta.$ $\Rightarrow J_\Omega = J_0$. La translation de la pupille ne modifie pas l'intensité de l'onde diffractée.

$$2. O_2 \text{ jouant le rôle de } \Omega. \quad \int dA_{O_1} + \int dA_{O_2} = \left(\underset{\text{terme d'interférence}}{1 + e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}(x_0\alpha + y_0\beta)}} \right) \underset{\text{terme diffraction}}{\int dA_{O_1}},$$

$$3.\alpha. \quad A = K \frac{\sin \frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}{\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}} \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0} \alpha d} \right).$$

$$\beta. \quad J = A \cdot A^* \Rightarrow J = 4K^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}{\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0} \right)^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi d \alpha}{\lambda_0}.$$

$\gamma.$ Représentation pour $\frac{d}{a} = 5$.



$$\delta. \quad J = 4K^2 \cos^2 \frac{\pi d \alpha}{\lambda_0} \text{ car le terme de diffraction en } \frac{\sin^2 X}{X^2} \rightarrow 1 \text{ quand } X \rightarrow 0$$

III.a. Le terme en $\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0} y \beta} dy = b$ car si $b \rightarrow \infty$, y n'a pas de sens physique et $\beta = 0$ obligatoirement cf. I.2.

$$dA = \frac{bK}{S} \cos \frac{2\pi x}{a_0} dx e^{j\frac{2\pi}{\lambda_0} x \alpha} ; dA = \frac{bK}{S} \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi x}{a_0}} + e^{-j\frac{2\pi x}{a_0}} \right) e^{j\frac{2\pi x \alpha}{\lambda_0}} dx.$$

$$dA = \frac{1}{2} \frac{bK}{S} \left[e^{j2\pi x \left(\frac{1}{a_0} + \frac{\alpha}{\lambda_0} \right)} + e^{j2\pi x \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{1}{a_0} \right)} \right] dx.$$

$$A = \frac{\frac{1}{2}bK}{S} \left[\frac{2j \sin \pi a \left(\frac{1}{a_0} + \frac{\alpha}{\lambda_0} \right)}{2\pi j \left(\frac{1}{a_0} + \frac{\alpha}{\lambda_0} \right)} + \frac{2j \sin \pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{1}{a_0} \right)}{2\pi j \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{1}{a_0} \right)} \right]$$

$$A = \frac{abK}{2S} \left[\frac{\sin \pi a \left(\frac{1}{a_0} + \frac{\alpha}{\lambda_0} \right)}{\pi a \left(\frac{1}{a_0} + \frac{\alpha}{\lambda_0} \right)} + \frac{\sin \pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{1}{a_0} \right)}{\pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{1}{a_0} \right)} \right]$$

b. Etude des zéros

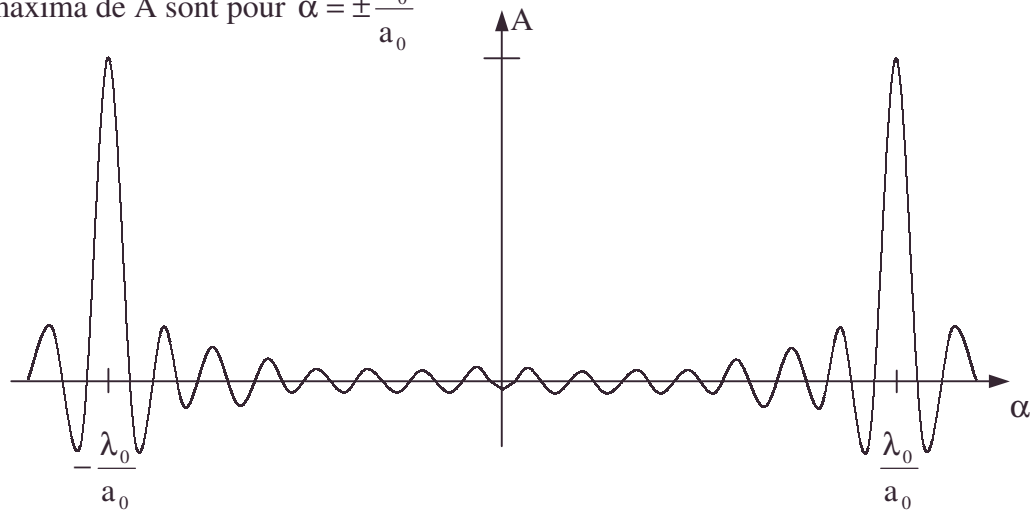
$\sin X = 0$; $X = p\pi$ $p \in \mathbb{Z}^*$.

- $\pi a \left(\frac{1}{a_0} + \frac{\alpha}{\lambda_0} \right) = p\pi$.

$$\frac{\alpha}{\lambda_0} = \frac{p}{a} - \frac{1}{a_0} \Rightarrow \alpha = \frac{p\lambda_0}{a} - \frac{\lambda_0}{a_0}.$$

- $\pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{1}{a_0} \right) = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}^*$; $\alpha = k \frac{\lambda_0}{a} + \frac{\lambda_0}{a_0}$.

Les maxima de A sont pour $\alpha = \pm \frac{\lambda_0}{a_0}$



$$\text{c. } A = \frac{1}{2} K' \left[\frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{a_0} + \alpha \right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{a_0} + \alpha \right)} + \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\alpha - \frac{\lambda_0}{a_0} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\alpha - \frac{\lambda_0}{a_0} \right)} \right] ; a_0 \rightarrow 0 ; \frac{\lambda_0}{a_0} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \alpha \ll \frac{\lambda_0}{a_0}.$$

$$A \rightarrow K' \left(\frac{\sin \frac{\pi a}{a_0}}{\frac{\pi a}{a_0}} \right) \text{ indépendant de } \alpha.$$

$J = AA^*$ sera uniforme dans le plan focal image d'une lentille d'observation.

C'est un moyen de ne plus voir la diffraction de la pupille (intéressant à condition que $\text{sinc} \frac{\pi a}{a_0}$ soit voisin de 1 et non de 0).

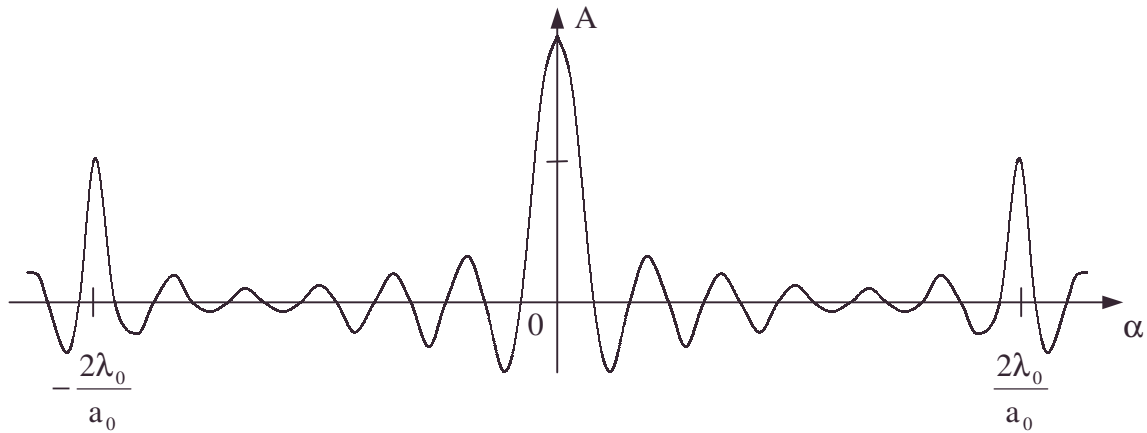
IV.

$$\text{a. } dA = \frac{bK}{2S} \left(1 + \cos \frac{4\pi x}{a_0} \right) e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \alpha} dx ; dA = \frac{bk}{2S} e^{j \frac{2\pi x \alpha}{\lambda_0}} dx + \frac{bK}{4S} \left[e^{j 2\pi x \left(\frac{2}{a_0} + \frac{\alpha}{\lambda_0} \right)} + e^{j 2\pi x \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{2}{a_0} \right)} \right] dx$$

$$A = \frac{abK}{2S} \cdot \frac{2j \sin \frac{2\pi a \alpha}{2\lambda_0}}{\frac{2\pi j \alpha a}{\lambda_0}} + \frac{abK}{4S} \left[\frac{\sin \pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} + \frac{2}{a_0} \right)}{\pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} + \frac{2}{a_0} \right)} + \frac{\sin \pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{2}{a_0} \right)}{\pi a \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} - \frac{2}{a_0} \right)} \right]$$

$$A = \frac{K}{4} \left[2 \frac{\sin \frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}{\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}} + \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\alpha + \frac{2\lambda_0}{a_0} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\alpha + \frac{2\lambda_0}{a_0} \right)} + \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\alpha - \frac{2\lambda_0}{a_0} \right)}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\alpha - \frac{2\lambda_0}{a_0} \right)} \right]$$

b. De manière analogue à III.



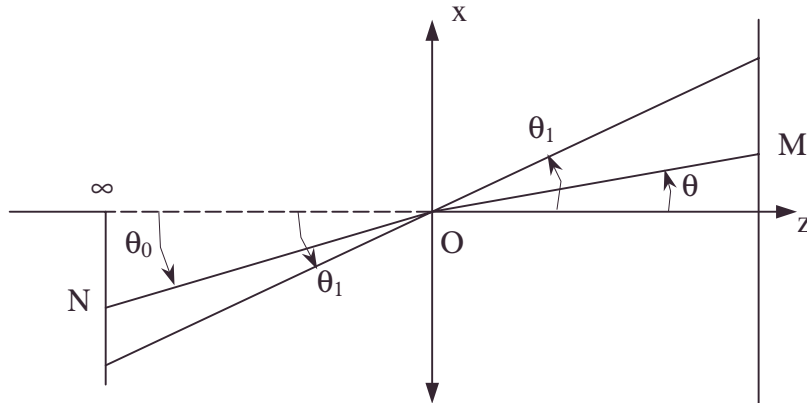
$$\text{c. } \bullet \quad a_0 \rightarrow 0 ; \frac{\lambda_0}{a_0} \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \ll \frac{2\lambda_0}{a_0} ; A = \frac{K}{2} \left[\frac{\sin \frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}}{\frac{\pi a \alpha}{\lambda_0}} + \frac{\sin \frac{2\pi a}{a_0}}{\frac{2\pi a}{a_0}} \right] \text{ si } \alpha \ll \frac{2\lambda_0}{a_0} .$$

Pour que A soit indépendant de α , il faut de plus $a \ll \lambda_0$.

d. On peut envisager la réalisation par photographie d'interférences d'interfrange $i = \frac{a_0}{2}$

où l'intensité est $J = J_0 \cos^2 \frac{2\pi x}{a_0}$.

V.



1. Dans l'approximation de Gauss $\gamma \neq 1$ or $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \Rightarrow \alpha$ petit : $\alpha = \sin \theta \approx \theta$.

2. Chaque point objet N défini par θ_0 donne une diffraction à l'infini qu'on observe

dans le plan focal. Pour un point isolé N, $E = E(\theta_0) \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda_0} (\theta - \theta_0)}{\left[\frac{\pi a}{\lambda_0} (\theta - \theta_0) \right]^2}$ avec $E(\theta_0)$ donné

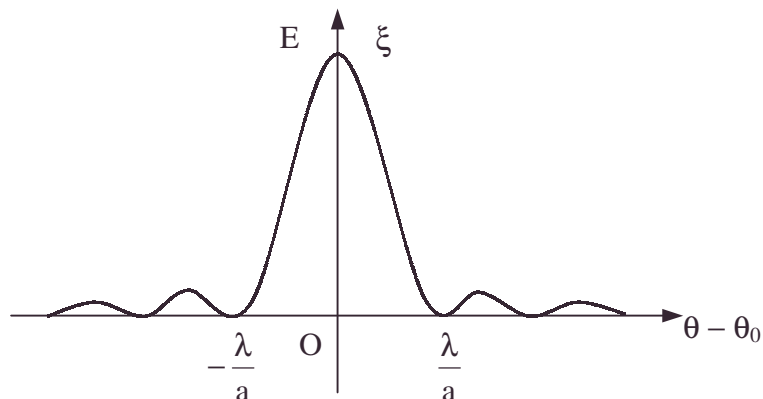
(cf. image géométrique) ; pour une longueur de ligne dx ($\approx K d\theta_0$ si θ_0 petit) autour de

N, on a l'écriture équivalente : $dE = K' E(\theta_0) d\theta \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda_0} (\theta - \theta_0)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} (\theta - \theta_0) \right)^2} \Rightarrow$ c.q.f.d. avec

$$D(\theta - \theta_0) = K' \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda_0} (\theta - \theta_0)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} (\theta - \theta_0) \right)^2}.$$

car on additionne les éclairissements (élémentaires) incohérents.

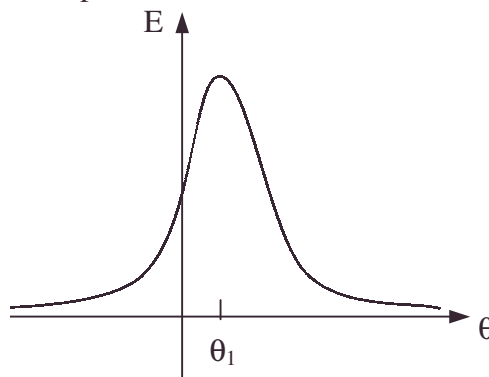
3.a. A chaque point est attaché une tache d'éclairissement (due à la diffraction) identique



En suivant la recommandation de l'énoncé de ne pas calculer l'intégrale, dans le cas simple $E(\theta) = E$, $\forall \theta$ par simple superposition pour un objet infini, on comprend que l'éclairissement somme soit constant pour les points du centre de l'image et diminue vers les extrémités.

Si $\frac{\lambda}{a}$ est très petit, on comprend numériquement qu'en faisant une approximation rectangulaire de la contribution à l'intégrale de **V.2.** pour chaque point de l'ordre de $\frac{E\lambda}{a}$, on a pour un segment Δx une somme d'éclairement proportionnelle à $E \frac{\lambda}{a} \Delta x$, constante indépendante de θ_0 sauf au voisinage du bord ; en négligeant les maxima secondaires, on comprend que la puissance reçue par unité de surface décroisse quand la puissance émise cesse sur une distance de l'ordre de $\frac{\lambda}{a}$ (cf. figure 8).

b. Si θ_1 est du même ordre que $\frac{\lambda}{a}$ ou même plus petit, la figure 8 s'altère par diminution quasi totale du plateau central.



Quand l'extension de l'image géométrique diminue, la diffraction prend une plus grande importance relative qui finit par altérer beaucoup l'image géométrique (cf. observation des étoiles). Les pieds secondaires alimentent les faibles éclaircissements.

c. Le calcul par ordinateur confirme.

7.5.2.2.2. Fente, lunette astronomique, étoile double

On s'intéresse dans ce problème au passage d'une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ (sauf pour les questions **II.5.a.** et **III.1.c.**) à travers une ou plusieurs ouvertures et en considérant avec plus de détail le cas particulier des fentes où une dimension de l'ouverture est suffisamment grande pour qu'il ne se produise pas de diffraction dans la direction correspondante.

La première partie est consacrée au rappel de quelques résultats de base de la diffraction à l'infini, la deuxième à l'étude élémentaire d'une lunette astronomique, et la troisième à une application au filtrage spatial d'une image. Noter cependant que la question **III.5.** ne fait appel qu'aux résultats théoriques établis dans la partie **II.**

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

I. Application du principe de Huygens-Fresnel

1. Indiquer à quelles conditions, expérimentales et d'observation, on peut considérer les ondes électromagnétiques comme planes.

- observation des franges de diffraction à l'infini

Diffraction

2. Décrire le dispositif expérimental classique permettant l'observation des franges de diffraction à l'infini.

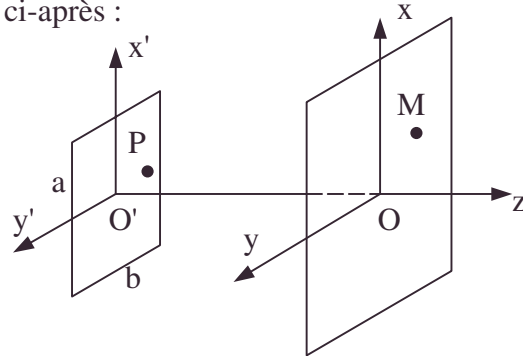
3. Préciser ce que l'on observe sur l'écran dans le cas d'une fente suffisamment fine.

4.a. Enoncer le principe de Huygens-Fresnel ; son application sera nécessaire à l'étude théorique qui suit.

b. Donner l'expression de $s(M)$, amplitude de l'onde au point M dans le plan d'observation ; on posera \vec{u}_0 vecteur unitaire du faisceau incident, \vec{u} vecteur unitaire dans une direction de la lumière diffractée et $d\Sigma = dx_p dy_p$ l'élément d'aire entourant le point courant P de l'ouverture plane de centre O'.

5. On considère le cas représenté sur la figure ci-après :

L'ouverture de diffraction S' , située dans le plan $O'x'y'$ perpendiculaire à l'axe optique $O'z$, est rectangulaire et de centre O' ; ses dimensions selon les directions $O'x'$ et $O'y'$ sont respectivement a et b . On désigne par α_0, β_0 et γ_0 les paramètres directeurs de la direction du vecteur unitaire \vec{u}_0 du faisceau incident et par α, β et γ ceux du vecteur unitaire \vec{u} de la lumière diffractée.



Montrer que l'amplitude en un point M du plan d'observation Oxy parallèle à $O'x'y'$

$$\text{s'écrit: [1] } s(M) = s_0 \frac{\sin\left[\pi(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{\lambda}\right]}{\pi(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{\lambda}} \frac{\sin\left[\pi(\beta - \beta_0)\frac{b}{\lambda}\right]}{\pi(\beta - \beta_0)\frac{b}{\lambda}}$$

$$\text{ou } s(M) = s_0 \left\{ \text{sinc}\left[\pi(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{\lambda}\right] \right\} \left\{ \text{sinc}\left[\pi(\beta - \beta_0)\frac{b}{\lambda}\right] \right\},$$

ce qui définit la fonction "sinus cardinal" $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ et où, $\varphi(O')$ désignant la phase de l'onde au point O', s_0 est proportionnel à $a b \{\exp[i\varphi(O')]\}$.

6. On suppose que les deux lentilles de la question I.2. sont identiques : soit f leur distance focale commune. Quelle est l'expression $s(x,y)$ déduite de [1], dans l'approximation de Gauss, quand on fait intervenir cette distance focale f ?

Ce sera l'expression [2].

II. Lunette astronomique ; observation d'une étoile

Les applications numériques se feront avec $f = 1\text{m}$, $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$ et $a = 1 \text{ mm}$. L'observation se fait grâce à un oculaire de distance focale de 2 cm , gradué au dixième de millimètre, l'image de la fente coïncidant avec le zéro de graduation. Enfin, le champ de l'oculaire couvre une surface de $2 \times 3 \text{ mm}^2$. On rappelle que l'oculaire est le système agrandisseur utilisé entre la dernière image réelle et l'œil dans un système optique. Pour être efficace, il doit avoir une grande ouverture et une petite distance focale. Un réticule (ou un micromètre) dans le plan focal de l'oculaire facilite alors l'observation de l'image.

1. Que devient l'expression [2] dans le cas d'une fente infiniment longue de largeur a ?

2. Décrire l'aspect du champ de vision, c'est-à-dire la répartition de l'éclairement. Montrer en particulier que l'éclairement du premier maximum latéral est déjà très faible par rapport à celui du maximum central.

Calculer numériquement la demi-largeur x_1 de la bande centrale.

3. Que se passe-t-il si on fait subir à l'ouverture diffractante :

- a. une translation dans son propre plan ?
- b. une rotation dans son propre plan ?
- c. une rotation autour de l'axe $O'y'$?

4. Qu'observe-t-on dans l'oculaire lorsque l'on diminue la largeur de la fente S' ?

Jusqu'à quel ordre de grandeur de cette largeur de fente x_1 les résultats énoncés restent-ils valables ?

Calculer a_0 , valeur numérique de la largeur qu'il convient de donner à la fente S' pour que la décroissance de brillance de la frange centrale entre le centre et le bord du champ (c'est-à-dire à 3 mm du centre) ne dépasse pas 1 %.

5.a. La fente S' de largeur $a = 1$ mm est maintenant placée contre l'objectif d'une lunette astronomique braquée vers une étoile que l'on pourra considérer comme une source ponctuelle à l'infini. On rappelle qu'une lunette astronomique est un instrument d'optique destiné à l'observation d'objets éloignés. L'image de l'objet se forme dans le plan focal de l'objectif ; dans la configuration afocale, très usitée, les plans focaux des combinaisons de lentilles minces représentant respectivement l'objectif et l'oculaire sont distants de la somme des distances focales associées. Peut-on parler d'amplification de la diffraction par l'oculaire ?

Décrire sommairement le phénomène observé en lumière blanche.

b. La lunette est maintenant dirigée vers une étoile binaire dont les composantes S_1 et S_2 ont même éclat. A quelle condition les composantes de ce doublet sont-elles séparées par cette lunette astronomique ? (Prendre $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$). Que donnerait une fente 10 fois plus large ? On rappelle le critère de Rayleigh : la limite de résolution d'un système optique est la séparation de deux objets donnant dans l'espace image deux taches de diffraction telles que le maximum central de l'une coïncide avec le premier minimum nul de l'autre.

III. Fentes d'Young

L'écran est maintenant percé de deux fentes parallèles identiques S'_1 et S'_2 distantes de h , de centres respectifs O'_1 et O'_2 et de même largeur a .

1.a. Montrer qu'en lumière monochromatique, l'expression de l'éclairement moyen est

$$E(x) = E_0 \left[1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \right] \left[\text{sinc} \left(\pi \frac{x}{I} \right) \right]^2.$$

Donner les expressions de I et i . Comparer leurs ordres de grandeur a priori.

- b.** Tracer l'allure de $E(x)$ en fonction de x .
- c.** Qu'observe-t-on en lumière monochromatique ? En lumière blanche ?
- d.** Qu'observe-t-on en lumière monochromatique si $a = a_0$ (cf. **II.4.**) ?

2. Décrire ce que l'on observe sur l'écran si l'on utilise pour tout matériel un laser néon-hélium et une double fente pratiquée dans un écran en matière plastique opaque (à titre documentaire : $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$ et le diamètre du faisceau est de l'ordre de 0,8 mm). Quelles précautions théoriques doit-on prendre ?

3. Justifier succinctement et sans faire le calcul complet quelle serait, qualitativement, l'expression de l'éclairement si les franges d'interférence étaient obtenues à partir des bimiros de Fresnel.

4. La lunette de la question **II.5.** est maintenant braquée vers la même étoile binaire que celle de la question **II.5.b.** On recouvre l'objectif de deux fentes parallèles et de même largeur, très petite devant celle de l'intervalle opaque, variable, qui les sépare.

a. En faisant varier la distance qui sépare les deux fentes, on constate que la visibilité des franges d'interférence devient nulle quand cette distance atteint la valeur $e = 40 \text{ cm}$.

En déduire l'expression de la distance angulaire entre les deux composantes de l'étoile double. Application numérique : $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$.

b. L'écran, muni des deux fentes d'écartement variable, peut tourner autour d'un axe perpendiculaire à son propre plan. Expliquer pourquoi il est possible avec ce dispositif de rendre compte de l'existence de ce doublet et de créer une échelle pour mesurer la séparation des composantes d'une étoile binaire.

5. Une photographie de frange brillante est faite sur une diapositive "noir et blanc". Le filtre gris de transparence variable ainsi obtenu est placé contre la fente unique du dispositif du paragraphe **II**. On admettra que l'effet de ce filtre est de multiplier l'amplitude incidente supposée uniforme par le "facteur de transmission"

$T_1(x') = \cos \pi \frac{x'}{a}$. Le dispositif est réglé de telle sorte que la largeur de la fente brillante centrale sur la diapositive soit exactement égale à la largeur de la fente diffractante.

a. Etablir l'expression de l'intensité diffractée dans une direction faisant un angle α avec l'axe des x . On posera $\mu = \left(2 \frac{\pi}{\lambda}\right)(\alpha - \alpha_0)$.

On pourra utiliser l'intégrale définie :

$$\int_{-A}^{+A} (\cos \alpha x) (\exp i \beta x) dx = \frac{\sin(\beta + \alpha) A}{\beta + \alpha} + \frac{\sin(\beta - \alpha) A}{\beta - \alpha}.$$

b. Etudier les modifications apportées par cet écran transparent pour ce qui concerne :

α . l'intensité au centre de la figure de diffraction.

β . la largeur en μ au centre de celle-ci.

γ . les positions respectives des zéros et des maxima successifs.

c. Pour quel type d'observation utilise-t-on de tels filtres ? Justifier leur nom de "filtre apodisant" ("a" privatif et "podos", pied).

d. Qu'obtiendrait-on si le facteur de transmission du filtre placé devant la fente se mettait sous la forme $T_2(x') = 1 - T_1(x')$?

On ne fera pas le calcul complet mais on se contentera d'un raisonnement se fondant sur la complémentarité des facteurs de transmission.

Pourquoi n'utilise-t-on pas ce type d'écran pour affiner les images ?

Mines ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. • Une onde électromagnétique est plane s'il existe un repère \mathcal{R} où $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t)$, x étant l'abscisse de M dans \mathcal{R} .

- Expérimentalement, on réalise une onde plane en mettant un point source dans le plan focal objet d'une lentille.

- Inversement on vérifie que l'onde est plane en observant si elle converge en un point du plan focal image d'une lentille.

• complémentarité des facteurs de transmission, énoncé du principe d'Huygens-Fresnel, facteur de transmission de l'amplitude optique, filtre apodisant, Huygens-Fresnel [énoncé du principe d']

2. Dispositif : une fente source F dans le plan focal objet d'une lentille L_1 ;
une lentille L_1 ;
une fente diffractante F_1 (parallèle à F) de largeur a ;
une lentille L_2 de distance focale f'_2 ;
un écran dans le plan focal image de L_2 .

3. On observe des franges de diffraction parallèles à F_1 et à F dont l'éclairement est en

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi a x}{\lambda_0 f'_2}.$$

4.a. Principe d'Huygens-Fresnel dans le cadre des ondes planes (première approximation des ondelettes sphériques).

L'amplitude de l'onde plane diffractée à l'infini M_∞ dans la direction du vecteur d'onde \vec{k}_2 se calcule par l'intégrale de surface définie par la surface diffractante Σ_1 .

$$a(M_\infty, t) = K e^{j\varphi_0} \iint_{\Sigma_1} e^{j(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OP}} dx_p dy_p.$$

- \vec{k}_1 est le vecteur d'onde de l'onde plane incidente.
- $\varphi_0 = \omega t - k_0 \delta_0$.
- δ_0 est le chemin optique de référence entre le point source et le point M_∞ , pour le rayon de référence passant par un point O de la surface diffractante Σ_1 .
- K est une constante adaptée au problème cf. éclairement mesuré.

b. La lentille d'observation modifie δ_0 mais n'introduit pas de déphasage entre les rayons.

$s(M, t) = K e^{j(\omega t - k_0 \delta_0)} \iint_{S'} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}} dx_p dy_p$, δ_0 chemin optique entre le point source et M en passant par O'.

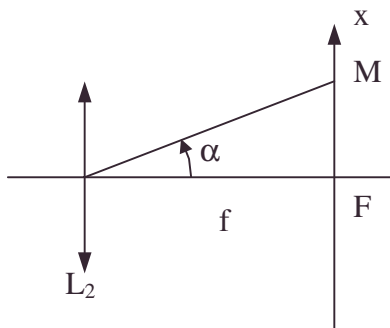
$$5. \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) x} dx = a \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) a \right] \Rightarrow \text{vu 4.b.}$$

$$s(M, t) = s_0 \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) a \right] \text{sinc} \left[\frac{\pi}{\lambda} (\beta - \beta_0) b \right], \text{ avec } s_0 = K a b e^{j\varphi(O')},$$

avec $\varphi(O') = \omega t - k_0 \delta_0$ ou encore $k_0 \delta_0 - \omega t$ en notation américaine.

Avec ωt présent ou non selon la convention de notation utilisée.

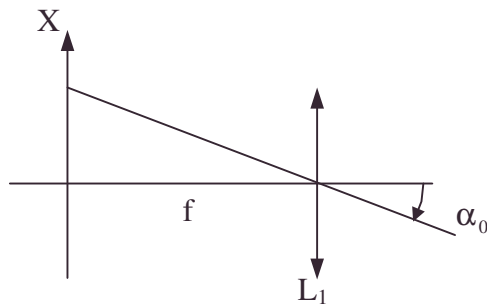
6. Nous savons que dans l'approximation de Gauss,



$$\frac{x_M}{f} = \alpha, \text{ de même } \frac{y_M}{f} = \beta.$$

Diffraction

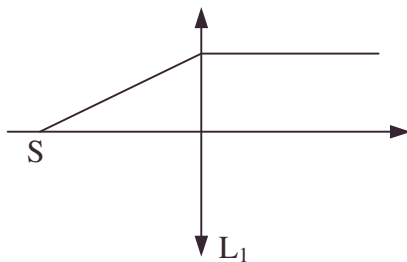
Inversement,



$$\frac{X}{f} = -\alpha_0, \text{ de même } \frac{Y}{f} = -\beta_0.$$

$$s = s_0 \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi a}{f\lambda} (x + X) \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi b}{f\lambda} (y + Y) \right].$$

On simplifie habituellement l'éclairement en prenant seulement un point source au foyer objet de L_1 .



$$\alpha_0 = 0 ; \beta_0 = 0, \quad s = s_0 \operatorname{sinc} \frac{\pi ax}{f\lambda} \operatorname{sinc} \frac{\pi by}{f\lambda}. \quad [2]$$

$$\text{II.1.a. } \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\operatorname{sinc} \frac{\pi}{\lambda} (\beta - \beta_0) b \right) = 0 \text{ sauf si } \beta = \beta_0$$

$$\text{soit pour } y' = -y \text{ où } \operatorname{sinc} \frac{\pi}{a} (\beta - \beta_0) b = 1.$$

En prenant une fente source fine parallèle à la fente diffractante $\alpha_0 = 0$,

$$s = s_0 \operatorname{sinc} \frac{\pi a}{f\lambda} x \text{ pour } y = -y'.$$

$$2. \quad \mathcal{E} = s.s^* = \mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi ax}{f\lambda} \text{ pour } y = -y'.$$

- Les annulations de $\operatorname{sinc}^2 x$ sont pour $x = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}^*$.
- Les maxima secondaires sont approximativement pour $x = (2p+1)\frac{\pi}{2}$.
- Le premier maximum secondaire a lieu pour $x \approx \frac{3\pi}{2}$.

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{9\pi^2}; \quad \text{AN : } \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = 0,045. \text{ Le premier maximum latéral est très faible}$$

par rapport au maximum central.

- demi-largeur $\frac{\pi ax_1}{f\lambda} = \pi$, $x_1 = \frac{f\lambda}{a}$; AN : $f = 1\text{ m}$; $x_1 = 5,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

3.a. Une translation ne modifie pas les paramètres angulaires $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$; l'intégration donne les mêmes résultats, la figure n'est pas changée.

b. Prenons un point S_i de la fente F de centre S_0 . Il donne un faisceau incident de

$$\text{vecteur d'onde } \vec{k}_i \begin{vmatrix} k_0 \alpha_i \\ k_0 \beta_i \\ k_0 \gamma_i \end{vmatrix}.$$

Si θ est la rotation supposée positive de l'ouverture diffractante (fente uniformément longue).

$\vec{S_0 S_i}$ dans le repère lié à la fente diffractante subit une rotation d'angle $-\theta$.

$$\vec{S_0 S_i} = \begin{vmatrix} r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i = -\frac{r}{f_1'} \cos \theta \\ \beta_i = \frac{r}{f_1'} \sin \theta \end{cases}$$

$$s_i(M, t) = K e^{j\phi_i} \iint_{\Sigma} e^{jk_0(\alpha - \alpha_i)x} e^{jk_0(\beta - \beta_i)y} dx' dy'.$$

Y n'ayant pas d'intérêt physique, la fente F étant supposée infinie, il faut $\beta - \beta_i = 0$.

$$s_i = K a e^{j\phi_i} \text{sinc} \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f_2'} - \alpha_i \right).$$

$$\mathcal{E}_i(M, t) = \mathcal{E}_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{f_2'} + \frac{r \cos \theta}{f_1'} \right).$$

$$\mathcal{E}_{i \max} \text{ se produit pour } x = -\frac{f_2'}{f_1'} r \cos \theta, y = \beta_i f_2' = \frac{f_2'}{f_1'} r \sin \theta.$$

Ainsi quand r varie, les maxima sont sur l'image géométrique de F sur Oxy , soit une droite et quand la fente tourne de θ , l'image tourne.

Or la période source des annulations à partir du maximum principal est $\frac{\lambda F_2'}{a}$ mais uniquement selon la direction horizontale, cf. $\beta - \beta_i = 0$.

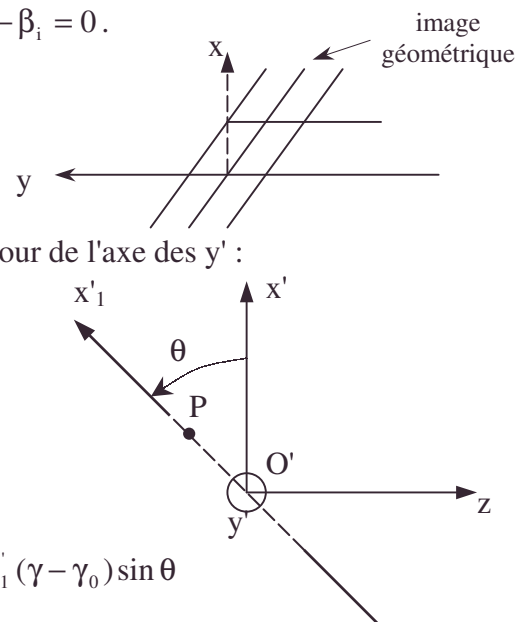
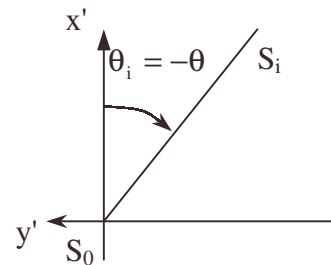
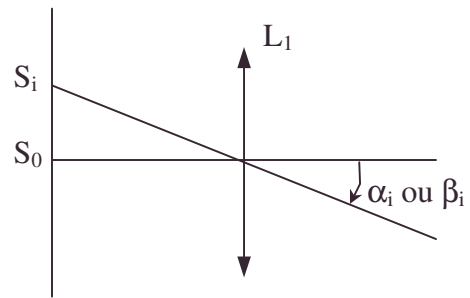
Les franges tournent du même angle dans le repère lié à la fente diffractante. Mais dans le repère fixe où ce repère a tourné de θ les franges sont restées identiques (cf. optique géométrique pour la frange centrale).

c. Envisageons une rotation de la fente F_1 autour de l'axe des y' :

$$\vec{O'P} \begin{vmatrix} x_1' \cos \theta \\ y' \\ -x_1' \sin \theta \end{vmatrix}_{O'x'y'z}$$

$$(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{O'P} = x_1'(\alpha - \alpha_0) \cos \theta + y'(\beta - \beta_0) - x_1'(\gamma - \gamma_0) \sin \theta$$

Par intégration sur x_1' et y' :



$$s = s_0 \operatorname{sinc} \frac{\pi}{\lambda} a [(\alpha - \alpha_0) \cos \theta - (\gamma - \gamma_0) \sin \theta], \text{ et pour } \theta \text{ petit et } \alpha_0 = 0,$$

$$s = s_0 \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - (\gamma - \gamma_0) \theta) \right].$$

Mais $\gamma - \gamma_0 \neq 0$ car $\gamma \neq 1$ et $\gamma_0 \neq 1$, α du 1^{er} ordre et $(\gamma - \gamma_0) \theta$ d'ordre supérieur négligeable.

Le maximum $\alpha = 0$ est inchangé.

La rotation θ petit n'a pas d'effet au 1^{er} ordre.

4.a. $a \rightarrow 0, \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x a}{\lambda f} \rightarrow 1$. L'éclairement tend à devenir uniforme sur tout le domaine

d'observation (il est aussi de plus en plus faible).

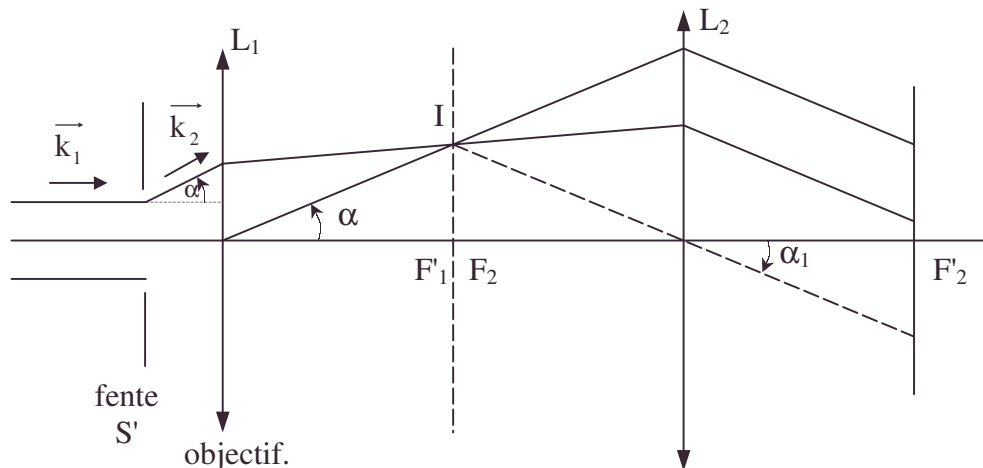
b. On peut adopter le critère énoncé d'une décroissance inférieure à 1% entre le centre et le bord du champ.

c. A.N. : si on prend pour faire la comparaison $x'_1 = 3 \text{ mm}$,

$$\text{invertissons } \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x'_1 a_0}{\lambda f} = 0,99 ;$$

$$f = 2 \text{ cm} ; a_0 = 2.10^{-7} \text{ m.}$$

5.a.



$$\bullet F'_1 I = f'_1 \tan \alpha = -f'_2 \tan \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha \frac{f'_1}{f'_2} \text{ dans l'approximation de Gauss.}$$

• Ainsi on peut amplifier l'angle de diffraction. La demi-largeur angulaire due à a est $\frac{\lambda}{a}$, elle devient après traversée de l'objectif $\frac{f'_1}{f'_2} \frac{\lambda}{a}$.

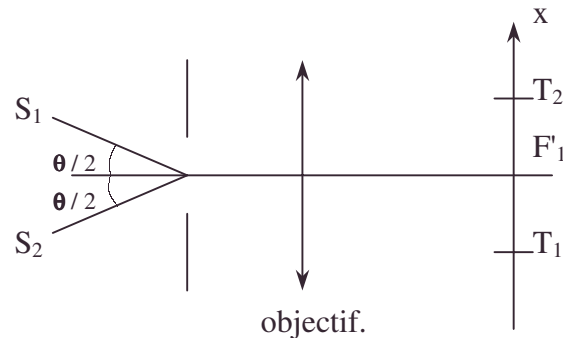
• En lumière blanche, la 1^{ère} annulation a lieu pour $\alpha = \frac{\lambda}{a}$, soit d'abord pour le bleu ($\lambda_B = 0,4 \mu\text{m}$) pour finir par le rouge ($\lambda_R = 0,8 \mu\text{m}$) qui est majoritaire pour $\alpha = \frac{\lambda_B}{a}$ et irise donc la frange centrale blanche. Ce n'est pas l'échelle de teinte de Newton à centre blanc obtenue avec un Michelson par interférence car il s'agit de diffraction pure en $\operatorname{sinc} X$; on obtient rapidement le blanc d'ordre supérieur où plusieurs longueurs d'onde visibles sont éteintes.

b. On sépare les taches de diffraction T_1 et T_2 dans le plan F'_1 d'après le critère de Rayleigh si $2\frac{\theta}{2}f'_1 = f'_1 \frac{\lambda}{a}$ soit $\theta_{\text{lim}} = \frac{\lambda}{a}$,

AN : $\theta_{\text{lim}} = 5,46 \cdot 10^{-4}$ rad.

Si $a' = 10a$, $\theta_{\text{lim}} = 0,546 \cdot 10^{-4}$ rad ;

il faut que la détection suive !

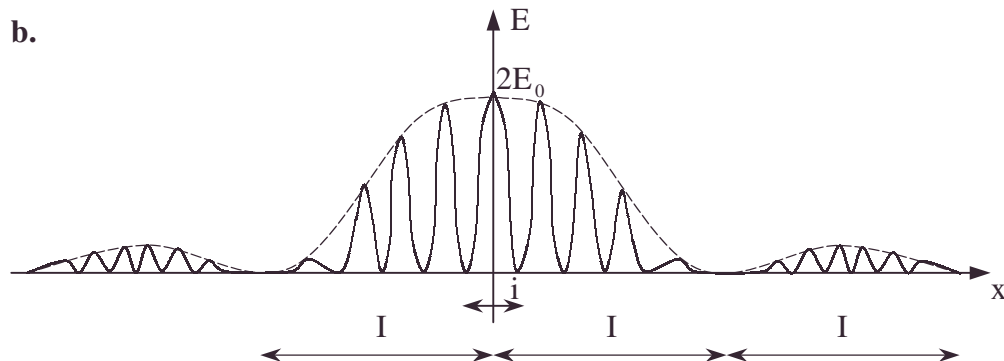


III.1.a. Vu l'éclairage cohérent, on additionne les amplitudes : ($\alpha_0 = 0$ cf. **I.**).

$$s = k \text{absinc} \frac{\pi \alpha a}{\lambda} (e^{j\varphi_{O_1}} + e^{j\varphi_{O_2}}) = k \text{absinc} \frac{\pi x a}{\lambda f'_2} e^{j\varphi_{O_1}} (1 + e^{j\varphi}) \text{ avec } \varphi = \varphi_{O_2} - \varphi_{O_1}.$$

$$E = s.s^* = E_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi x a}{\lambda f'_2} (1 + \cos \varphi) ; \quad \cos \varphi = \cos \frac{2\pi h x}{\lambda f'_2}.$$

$$E = E_0 \text{sinc}^2 \pi \frac{x}{I} (1 + \cos 2\pi \frac{x}{i}) \text{ avec } i = \frac{\lambda f'_2}{h} \text{ et } I = \frac{\lambda f'_2}{a} ; \quad ; \quad h \gg a \Rightarrow I \gg i.$$



c.α. La diffraction d'une fente module les franges d'interférences de période i (l'interfrange).

β. En lumière blanche, on a superposition des phénomènes monochromatiques incohérents entre eux. L'interfrange rouge est double de l'interfrange bleu. La frange centrale $x = 0$ est blanche ; elle est irisée de pourpre ; les teintes de Newton sont modifiées partiellement par la diffraction ; on obtient le blanc d'ordre supérieur rapidement après environ 3 interfranges.

d. Si $a = a_0$, la modulation de la diffraction n'est pas vue dans le champ d'observation.

$$E \text{ est périodique de période } i : E = E_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \right).$$

2. Sans lentille, la zone éclairée a une hauteur de l'ordre de $d = 0,8$ mm ; on observe des franges d'interférence modulée par la diffraction, de hauteur réduite.

- La distance D de l'écran à la double fente doit être grande pour justifier la diffraction à l'infini nécessaire à l'application du principe d'Huygens-Fresnel.
- Les deux fentes doivent être éclairées $d > h + a$.

Diffraction

3. L'expérience des miroirs de Fresnel (cf. pages 1343) est analogue à celle des trous d'Young ; le rayon moyen est quasiment le symétrique par rapport aux miroirs du rayon qui aboutit sur l'arête. L'écran (éloigné) est disposé perpendiculairement au rayon moyen.

La diffraction est négligeable.

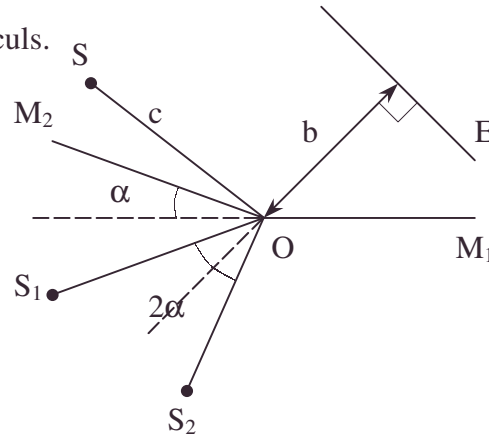
α de l'ordre de la minute d'arc simplifie les calculs.

$$\text{Formellement } i = \frac{\lambda D}{a}$$

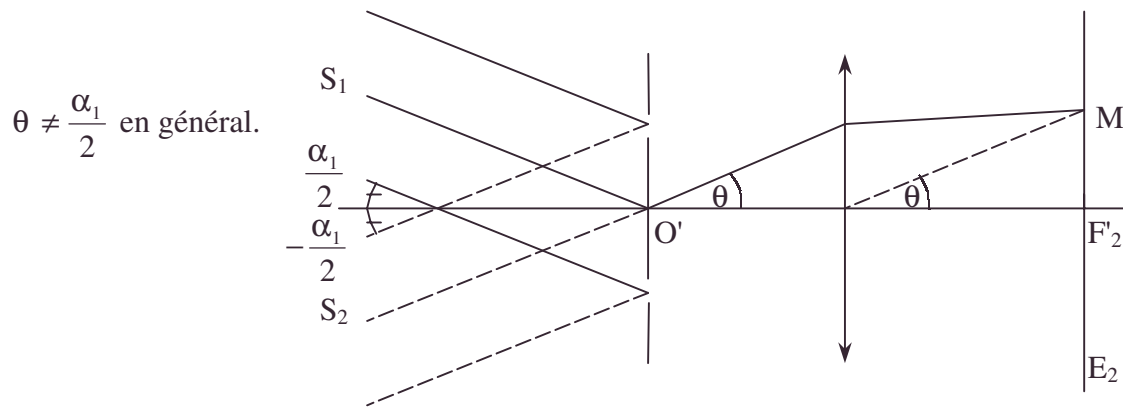
avec $a = 2\alpha c$ et

$$D = c + b.$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \cos 2\pi \frac{x}{i} \right).$$



4.a. Chaque étoile donne un éclairement incohérent avec celui donné par l'autre. On additionne les éclairements.



$\theta \neq \frac{\alpha_1}{2}$ en général.

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta_1 \right); \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta_2 \right).$$

Il y a brouillage quand $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0$ (l'éclairement moyen des franges).

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta_1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta_2 = 0 \text{ soit } \frac{2\pi}{\lambda} \delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_2 + (2p+1)\pi \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Or, } \delta_1 = e\theta + e\frac{\alpha_1}{2}; \delta_2 = e\theta - e\frac{\alpha_1}{2} \text{ avec } \theta = \frac{x}{f'_2}.$$

$$\text{Il reste } \alpha_1 = \left(p + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{e} \text{ soit } \alpha_{1 \text{ minimum}} = \frac{\lambda}{2e}.$$

$$\text{AN : } \alpha_{1 \text{ min}} = 6,825 \cdot 10^{-7} \text{ rad.}$$

b. L'écartement variable permet de déterminer α (cf. **4.a.**) brouillage.

- En recevant plus de puissance les fentes d'Young permettent de mieux réaliser l'expérience des trous d'Young dans la mesure où les fentes sont bien parallèles.

- Un micromètre permet de mesurer des angles cf. $x = f'\theta$.

5.a. Appliquons le principe d'Huygens-Fresnel, en tenant compte de T_1 en utilisant la formule :

• apodisation [diffraction], brouillage, demi-largeur, micromètre [mesure optique], miroirs de Fresnel

$$s_1 = k \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos \pi \frac{x'}{a} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) x'} dx' = ak \left[\text{sinc} \left[\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) + \frac{\pi}{2} \right] + \text{sinc} \left[\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha_0) - \frac{\pi}{2} \right] \right],$$

$$E = s_1 s_1^* = k^2 a^2 \left(\text{sinc} \left(\mu \frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \text{sinc} \left(\frac{\mu a}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2;$$

$$E = k^2 a^2 \left[\frac{\cos \frac{\mu a}{2}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\mu a}{2}} + \frac{\cos \frac{\mu a}{2}}{\frac{\pi}{2} + \frac{\mu a}{2}} \right]^2 = \pi^2 k^2 a^2 \frac{\cos^2 \mu \frac{a}{2}}{\left[\frac{\pi^2}{4} - \left(\mu \frac{a}{2} \right)^2 \right]^2}.$$

b. Quand $T_1 = 1$, $E' = k^2 a^2 \text{sinc}^2 \mu \frac{a}{2}$; $E_0' = k^2 a^2$.

α. Le centre est pour $\mu = 0$; $E_0 = \pi^2 k^2 a^2 \frac{1}{\frac{\pi^2}{16}} = \frac{16}{\pi^2} k^2 a^2 = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 E_0'$.

L'intensité au centre a augmenté ici de 60 %.

β. $E' = 0$ pour $\mu \frac{a}{2} = p\pi$ $p \in \mathbb{Z}$. La demi-largeur de E' est en $\mu : \frac{2\pi}{a}$.

$E = 0$ pour $\mu \frac{a}{2} = (2p+1) \frac{\pi}{2}$ $p \in \mathbb{Z}^*$ cf. forme $\frac{0}{0} \neq 0$ pour $p = 0$ cf. graphe.

Il faut prendre $p = 1$ et $p = -2$ pour avoir les premiers zéros.

La largeur en phase vaut $\frac{6\pi}{2} \Rightarrow$ la demi-largeur de E est en $\mu : \frac{3\pi}{a}$.

La largeur est augmentée de 50 %.

γ. Les zéros de E' et de E sont décalés de $\frac{\pi}{a}$ en μ ; les périodes d'annulation sont

en $\frac{2\pi}{a}$, identiques pour les deux cas. Les maxima secondaires de même.

c. La conséquence de l'élargissement et de l'augmentation du pic central est la diminution par la diffraction des maxima secondaires : il y a apodisation.

On utilisera de tels filtres pour diminuer en optique astronomique les taches de diffraction secondaires.

$$\mathbf{d. \alpha.} \quad \iint_{\text{plan}} T_1 e^{jk(\alpha x' + \beta y')} dx' dy' + \iint_{\text{plan}} T_2 e^{jk(\alpha x' + \beta y')} dx' dy' = \iint_{\text{plan}} e^{jk(\alpha x' + \beta y')} dx' dy';$$

$$s_1 + s_2 = s$$

s est l'amplitude de l'image géométrique non affectée par la diffraction, les dimensions étant infinies; soit la description du foyer F'_2 ; $s = 0$ en dehors de ce point.

$$\Rightarrow s_1 = -s_2 \Rightarrow s_1 s_1^* = s_2 s_2^*.$$

Les éclairissements E_1 et E_2 associés à T_1 et T_2 sont égaux sauf au point image géométrique.

L'apodisation est encore possible.

β. Cette condition exige une onde plane d'extension infinie non réalisable (cf. approximation de Gauss des lentilles).

De plus, l'éclairissement intense de l'image géométrique doit être mis à part des mesures, faites dans un voisinage intéressant pour elles : annulation (ou maxima secondaires).

Ce type d'écran ne peut donc être utilisé pour affiner les images (géométriques).

7.5.2.3. Réseaux

Appartiennent au programme de Vétô

7.5.2.3.1. Réseau par réflexion Réseau échellette – Effet Zeeman

I. Diffraction par un miroir

Les figures 1 et 2 précisent les caractéristiques géométriques d'un miroir rectangulaire plan de centre A. Sa longueur L est suffisamment élevée et il n'est pas nécessaire de tenir compte de la diffraction dans la direction correspondante. Le miroir est éclairé sous l'incidence i positive dans le plan XY par un faisceau de lumière parallèle, et on s'intéresse à la figure de diffraction à l'infini dans la direction de l'angle i' négatif.

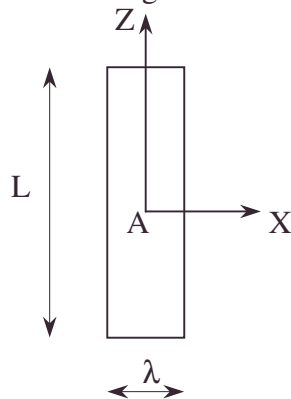


Figure 1

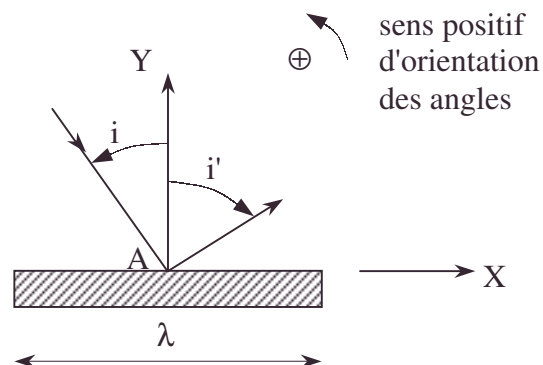


Figure 2

1. En lumière monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide, calculer l'intensité I diffractée en fonction de λ , i , i' et λ en notant I_0 l'intensité maximale.

2. On rappelle figure 3 les caractéristiques de la fonction $\left(\frac{\sin \phi}{\phi}\right)^2$.

Que peut-on dire de la direction i' correspondant au maximum d'intensité diffractée ?

Calculer l'intensité des deux premiers maxima secondaires.

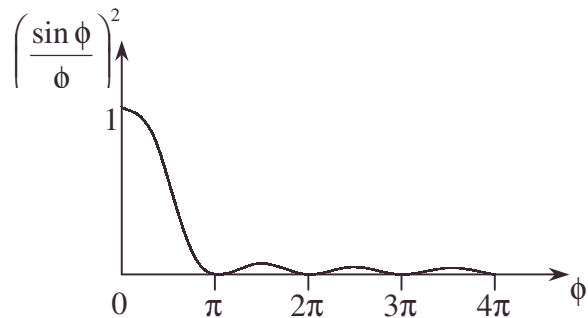


Figure 3

3. On réalise le montage de la figure 4.

L est la source lumineuse placée contre un obstacle opaque percé d'un petit trou circulaire S . L_1 et L_2 sont deux lentilles convergentes, perpendiculaires entre elles. S est au foyer objet de L_1 et un écran plan xOz est situé dans le plan focal image de L_2 . Une lame Σ semi-transparente, semi-réfléchissante, est placée à 45° de L_1 et L_2 . Eclairée par un faisceau de lumière, elle donne naissance à la fois à un faisceau réfléchi et à un faisceau transmis.

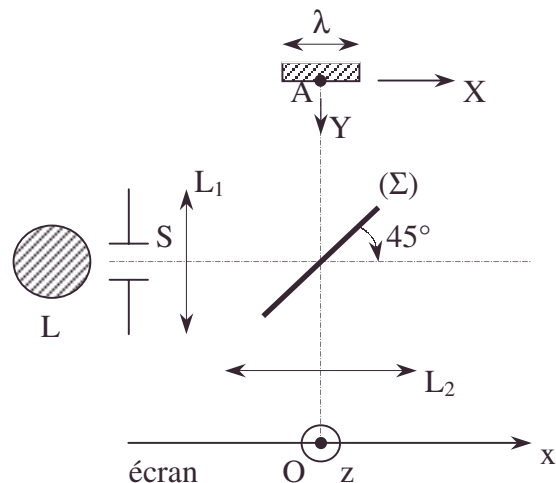


Figure 4

• lame semi-transparente

Le miroir diffractant étudié en 1. et 2. est parallèle à la lentille L_2 de focale f .

a. Décrire avec précision et en trois lignes au maximum ce qu'on voit sur l'écran.

Faire un schéma.

b. Quelles sont les modifications apportées sur l'écran par une translation de la distance d du miroir selon l'axe AX ? (La distance d reste évidemment assez faible pour que le miroir soit toujours éclairé compte tenu des dimensions de L_1 et Σ).

c. Même question pour une rotation d'angle θ du miroir autour de l'axe AZ .

Faire un schéma.

II. Réseau plan par réflexion

Un réseau est constitué par N miroirs identiques à celui étudié en I. ; ces miroirs sont parallèles, coplanaires et régulièrement espacés de la distance a comme l'indique la figure 5.

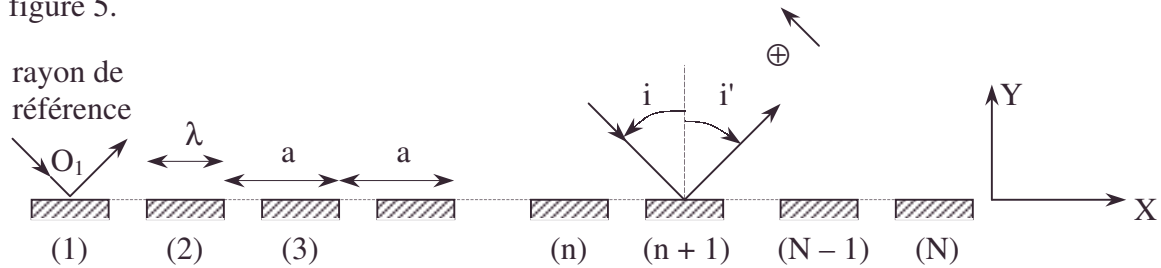


Figure 5

Il est éclairé sous l'incidence i positive dans le plan XY par un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide.

1. Montrer, en le justifiant soigneusement, que l'amplitude de l'onde lumineuse diffractée à l'infini par le réseau dans la direction i' est proportionnelle à :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i' + \sin i) X\right) dX \left[\sum_{n=1}^N \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i' + \sin i) (n-1)a\right) \right].$$

2. En déduire que l'intensité peut se mettre sous la forme d'un produit d'une fonction de la variable $\phi = \frac{\pi\lambda}{a} (\sin i' + \sin i)$ et d'une fonction de la variable $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin i' + \sin i)$.

Déterminer ces deux fonctions et interpréter qualitativement I.

3. La figure 6 rappelle les caractéristiques de la fonction $\left(\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{N \sin \frac{\phi}{2}} \right)^2$

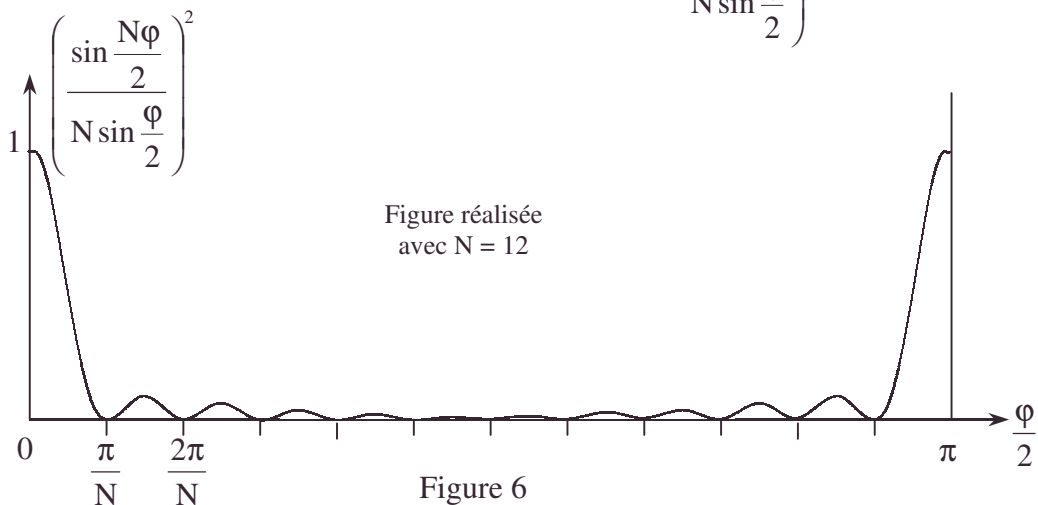


Figure 6

La hauteur des maxima secondaires est très faible (moins de 5%) et ceux-ci ne sont pas visibles (les plus importants sont trop proches des maxima principaux car N est grand). On appelle ordre le nombre entier p caractérisant un maximum principal tel que $\varphi = 2p\pi$.

a. On donne $a = 2\mu\text{m}$; $i = 10^\circ$ et $\lambda = 643,8\text{ nm}$. Quels sont les ordres théoriquement possibles ?

b. On suppose que N est très très grand et que $a = 2\lambda$. Dessiner le graphe I fonction de φ en tenant compte du résultat de la question 3.a. Que constate-t-on ?

4. On réalise le montage de la figure 7, qui reprend en partie celui de la figure 4. S est ici une fente très fine percée dans un écran opaque, placée de telle sorte qu'elle soit parallèle aux miroirs du réseau.

L'ensemble {lentille L_2 , écran Oxz confondu avec le plan focal image de L_2 } est placé de telle sorte que l'ordre +1 se situe sur l'axe Oz .

Déterminer sur l'écran la position de l'ordre 0 en supposant que la distance focale de L_2 vaut 50 cm.

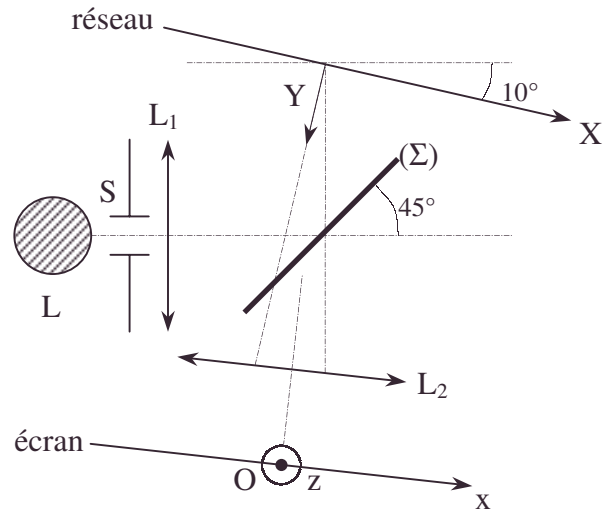


Figure 7

5. On utilise une lampe à vapeur de cadmium qui émet une radiation rouge $\lambda = 643,8\text{ nm}$. Soumise à un champ magnétique de 1 Tesla, la lampe émet trois radiations de longueurs d'onde $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$, et $\lambda - \Delta\lambda$ avec $\Delta\lambda = 1,93 \cdot 10^{-2}\text{ nm}$. C'est l'effet Zeeman.

a. Calculer, pour l'ordre p , la variation $\Delta i'$ de l'angle i' qui résulte de la variation $\Delta\lambda$ de la longueur d'onde.

b. Le nombre N de miroirs du réseau étant fini, chaque ordre est caractérisé par une largeur $\frac{2\pi}{N}$ pour la variable $\frac{\varphi}{2}$ (voir figure 6). En déduire la largeur $\Delta_2 i'$ correspondante pour la variable i' .

c. On admet que deux longueurs d'onde sont séparées si leurs maxima sont distants (en variable i') de plus de leur demi largeur (figure 8).

En déduire la valeur maximale R que doit prendre le rapport $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ pour que deux radiations soient séparées.

R s'appelle le pouvoir de résolution du réseau.

Avec $N = 20000$, les trois radiations de la lampe sont-elles séparées dans l'ordre 1 ? Quelle est l'intensité correspondant à cet ordre 1 ?

d. Pour un réseau déterminé (a, λ, N fixés), que peut-on faire pour augmenter R ? Quel est l'inconvénient qui en résulte ?

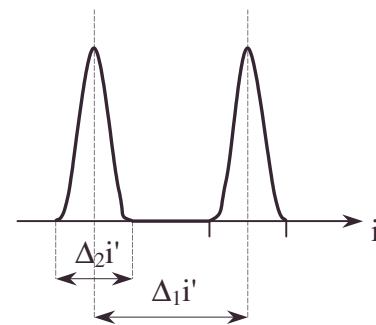


Figure 8

III. Réseau à échellette

Le réseau représenté figure 9, dit réseau à échellette, permet de remédier à l'inconvénient mentionné ci-dessus.

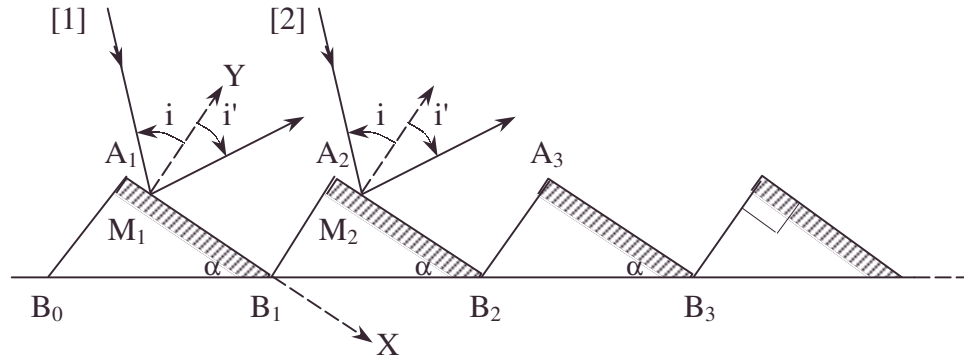


Figure 9

Il est constitué de N miroirs identiques de largeur $\lambda = A_n B_n$ ($1 \leq n \leq N$), parallèles entre eux mais non coplanaires. On l'éclaire sous l'incidence i positive dans le plan XY par un faisceau de lumière parallèle monochromatique. On notera b la distance $B_0 B_1 = B_1 B_2 \dots = B_{n-1} B_n$.

1. Soient M_1 et M_2 deux points situés sur les miroirs 1 et 2 à des distances identiques de A_1 et A_2 : $A_1 M_1 = A_2 M_2$ et par conséquent $M_1 M_2 = b$. Calculer la différence de marche δ entre les rayons [1] et [2] se réfléchissant en M_1 et M_2 , et interférant à l'infini.

2. Calculer l'intensité diffractée à l'infini par le réseau sous une forme analogue à celle de la question II.2.

3.a. Pour quelle valeur de i' , à i fixé, obtient-on le maximum de la tache centrale de diffraction ?

b. Peut-on faire en sorte que, pour la valeur de i' trouvée ci-dessus, on obtienne un ordre p_0 non nul ? Quelle relation doit alors être vérifiée ?

c. Calculer comme en II.5. le pouvoir de résolution de ce réseau.

d. Expliquer clairement, en 5 lignes maximum, l'intérêt du réseau à échellette par rapport au réseau plan par réflexion.

e. On choisit un réseau à échellette de même longueur que le réseau de la question II. avec $N = 20000$, $b = 2 \mu\text{m}$ et $\alpha = 30^\circ$.

Calculer, pour $\lambda = 643,8 \text{ nm}$, l'ordre p_{0m} maximum possible en valeur absolue, l'angle i positif correspondant, le pouvoir de résolution et l'intensité correspondante. La séparation des trois radiations rouges du cadmium est-elle possible ?

4. On désire en plus éliminer l'ordre voisin $p_{0m} + 1$ en faisant coïncider l'angle correspondant $i'_{p_{0m}+1}$ avec un zéro de la fonction diffraction par un miroir. Chercher l'angle $i'_{p_{0m}+1}$ ainsi que la valeur qu'il faut donner à λ ($\lambda < b$). En déduire que les triangles $B_{n-1} A_n B_n$ sont presque des triangles rectangles.

Autres concours ; Durée : 3h

Corrigé

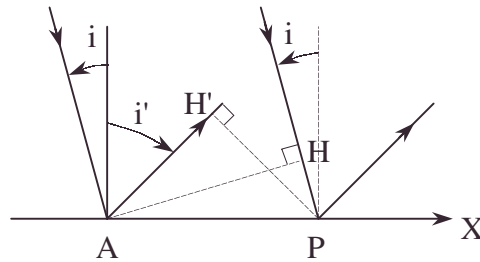
I.1. La granulométrie de la surface assure une diffusion de la lumière par ondelettes, analogue donc à celle que l'on retrouve dans la diffraction par un trou, traitée par le principe d'Huygens Fresnel. Par analogie, nous l'appliquons.

$$A(M_\infty) = K e^{-j\Phi_{0\text{ref}}} \iint e^{j(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{AP}} dX_p dZ_p.$$

- analogue du principe d'Huygens Fresnel pour les miroirs, différence de marche [ou de chemin optique], éliminer l'ordre supérieur d'un pic brillant, granulométrie de surface [assure une diffusion de la lumière analogue à la diffraction par une pupille]

Le rôle de $Z \infty$ doit physiquement disparaître $\Rightarrow k_{2z} = 0$;

rayon de référence passant par M_∞ et un point particulier de la zone diffractante.



l'étude intéressante porte sur X.

$\delta = HP - AH' = X(\sin i + \sin i')$ vu $\sin i' < 0$.

$$A(M_\infty) = KLe^{-j\varphi_{0\text{ref}}} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} e^{-j\frac{2\pi\delta}{\lambda}} dX_p = KLe^{-j\varphi_{0\text{ref}}} \left(\frac{e^{-j\frac{2\pi\lambda}{2\lambda}(\sin i + \sin i')} - e^{+j\frac{2\pi\lambda}{\lambda 2}(\sin i + \sin i')}}{-j\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i + \sin i')} \right) =$$

$$KL\lambda e^{-j\varphi_{0\text{ref}}} \sin c \left[\frac{\pi\lambda}{\lambda}(\sin i + \sin i') \right].$$

$$I(M_\infty) = A(M_\infty)A^*(M_\infty) = KK^*(L\lambda)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi\lambda}{\lambda}(\sin i + \sin i') \right) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi\lambda}{\lambda}(\sin i + \sin i') \right)$$

2.a. Le maximum de I a lieu pour $\sin i + \sin i' = 0$, soit $i' = -i$. Le maximum de la diffraction correspond à l'optique géométrique cf. loi de Descartes de la réflexion.

b. L'approximation habituelle en physique pour calculer les maxima secondaires est de faire le calcul pour $\phi_1 = \frac{3\pi}{2}, \phi_2 = \frac{5\pi}{2} \dots$ $I(\phi_1) = 4,50 \cdot 10^{-2} I_0$; $I(\phi_2) = 1,62 \cdot 10^{-2} I_0$.

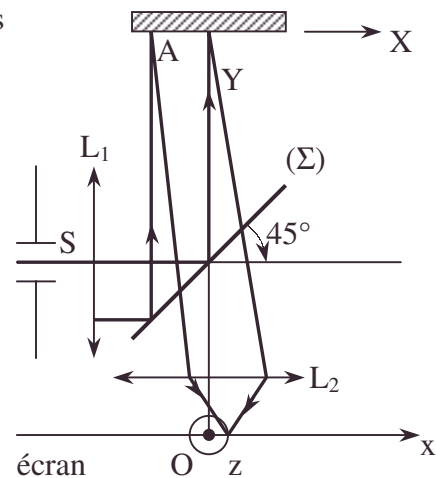
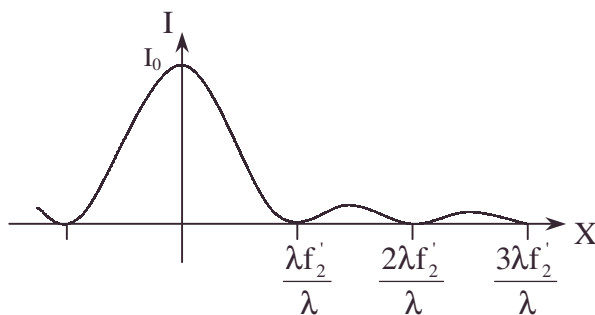
On néglige souvent 5 devant 100 en physique : on néglige le plus souvent ces maxima secondaires.

3.a. Par construction, les rayons reçus par le miroir sont parallèles et de $i = 0$, la diffraction à l'infini est observée, par conjugaison dans le plan focal image de L_2 ; celle-ci n'apporte aucune perturbation de différence de marche.

$$I = I_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi\lambda \sin i'}{\lambda} = I_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi\lambda X}{\lambda f_2'}, \text{ vu l'approximation de Gauss nécessaire à } L_2.$$

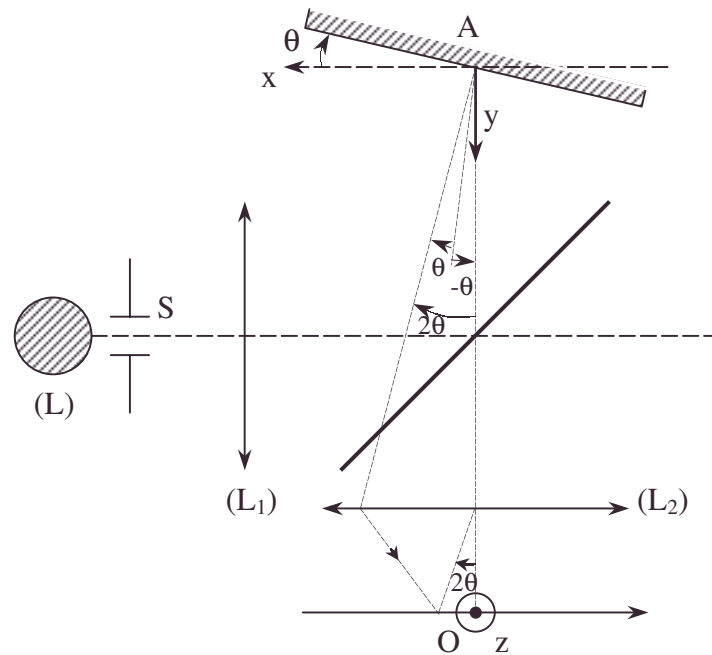
La condition L infini réduit la diffraction visible à appartenir au plan de la figure.

Les points de l'axe OX et seulement eux sont éclairés selon la loi écrite.



b. La translation latérale du miroir diffractant ne change pas $i = 0$, ni la loi à l'infini en i' , ni l'image correspondante dans le plan focal de L_2 .

c.



Le nouvel angle d'incidence sur le miroir est $i = 2\theta$. $\sin i + \sin i' = 2\theta + \frac{X}{f_2'}$.

$I = I_0 \text{sinc}^2 \frac{\pi\lambda}{\lambda} \left(2\theta + \frac{X}{f_2'} \right)$, soit la même courbe que précédemment, ayant subi une translation qui la centre en $X = -2f_2'\theta$.

II.1. Prenons comme rayon de référence le rayon passant par O_1 de \vec{k}_1 et \vec{k}_2 donnés par i et i' .

Appliquons le principe d'Huygens Fresnel à l'ensemble en sachant que L infini supprime la diffraction en dehors du plan de la figure.

$$A(M_\infty) = LK e^{-j\varphi_{\text{ref}}} \int_{\text{toute la surface diffractante}} e^{j(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{O_1 P}} dX_P.$$

$$\vec{O_1 P} = \vec{O_1 O_n} + \vec{O_n O_p}; \quad d\vec{O_1 P} = d\vec{O_n P}.$$

$$A(M_\infty) = LK e^{-j\varphi_{\text{ref}}} \left[\sum_1^N \left[\int_{\text{miroir } n} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i + \sin i')X_n} dX_{nP} \right] \right] e^{j(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{O_1 O_n}}$$

$$= LK e^{-j\varphi_{\text{ref}}} \left[\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i + \sin i')X} dX \right] \left[\sum_1^N e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i + \sin i')(n-1)a} \right].$$

$$\text{or } \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i + \sin i')X'} dX' = \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i + \sin i')X} dX.$$

$A(M_\infty)$ est bien de la forme demandée.

$$I = AA^* = \lambda^2 L^2 KK^* \text{sinc}^2 \frac{\pi \lambda}{\lambda} (\sin i + \sin i') \frac{\left(1 - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i + \sin i') Na}\right) \left(1 - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i + \sin i') (n-1) Na}\right)}{\left(1 - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i + \sin i') a}\right) \left(1 - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i + \sin i') a}\right)}.$$

$$I = \frac{I_0}{N^2} \text{sinc}^2 \frac{\pi \lambda}{\lambda} (\sin i + \sin i') \frac{\sin^2 N \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i + \sin i') \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (\sin i + \sin i') \frac{a}{2}}.$$

$$I = \frac{I_0}{N^2} \text{sinc}^2 \phi \frac{\sin^2 N \frac{\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}}.$$

- ϕ est associée à la fonction de la diffraction en $\text{sinc}^2 \phi$.
- ϕ est associée à la somme des amplitudes des différents rayons de référence passant par O_n à \vec{k}_1, \vec{k}_2 donnés, ϕ est un terme d'interférence, qui se représente par

$$\frac{1}{N^2} \frac{\sin^2 N \frac{\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \text{ au niveau des intensités.}$$

- I : le phénomène d'interférence est modulé par la diffraction.

3.a. On définit un ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} (\sin i + \sin i')$.

or $-1 < \sin i' < +1$; A.N. : $i = 10^\circ \Rightarrow -2,5 < p < 3,6$.

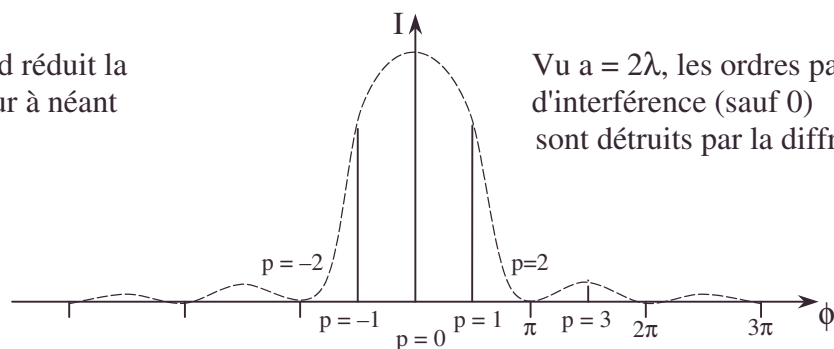
Les ordres visibles, ceux des maxima, correspondent aux valeurs entières de p .

On a donc à étudier :

p	-2	-1	0	+1	+2	+3
i'	-54,6°	-27,9°	-10,0°	8,5°	28,0°	52,4°

b.

N très grand réduit la demi largeur à néant



Vu $a = 2\lambda$, les ordres pairs d'interférence (sauf 0) sont détruits par la diffraction.

Les raies notables correspondent à $p = -1, 0, +1$ vu l'élimination totale de ± 2 et partielle de ± 3 .

4. Vu la construction $i = 10^\circ$

Pour $p = 1$ $\sin i'_1 = \frac{\lambda}{a} - \sin i$ qui sert de référence pour fixer Oz.

Pour $p = 0$ $\sin i'_0 = -\sin i$

- *diffraction modulant les interférences*

Dans l'approximation de Gauss qui règle la lentille L_2 ,

$$i'_0 - i'_1 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow X_0 = -f'_2 \frac{\lambda}{a}.$$

A.N. : $X'_0 = -16,1 \text{ cm}$.

5.a. On ne voit que les ordres p entiers car ils sont les plus lumineux ;

pour p donné, $\sin i' = p \frac{\lambda}{a} - \sin i$; $\cos i' di' = \frac{p}{a} d\lambda$.

$$\Delta_1 i' = \frac{|p| \Delta \lambda}{a \cos i'}.$$

$$\text{b. } \phi = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i' + \sin i) ; d\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos i' di' \text{ pour } \lambda \text{ donné soit } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos i' \Delta i'.$$

or la limite est pour $\Delta\phi = 4 \frac{\pi}{N} \Rightarrow \Delta_2 i' = \frac{2\lambda}{Na \cos i'}$ selon les définitions de l'énoncé.

c.α. Le critère de Rayleigh considère 2 raies séparées si $\Delta_1 i' > \frac{\Delta_2 i'}{2}$ soit $|p| N > \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$.

La valeur maximale de $\frac{\lambda}{\Delta \lambda}$ est donc $R = |p| N$.

$$\text{β. A.N. : } R = 20000 ; \Delta \lambda = 1,93 \cdot 10^{-2} \text{ nm} ; \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = 33358.$$

Le critère de Rayleigh n'est pas satisfait : les 3 raies ne sont pas séparées.

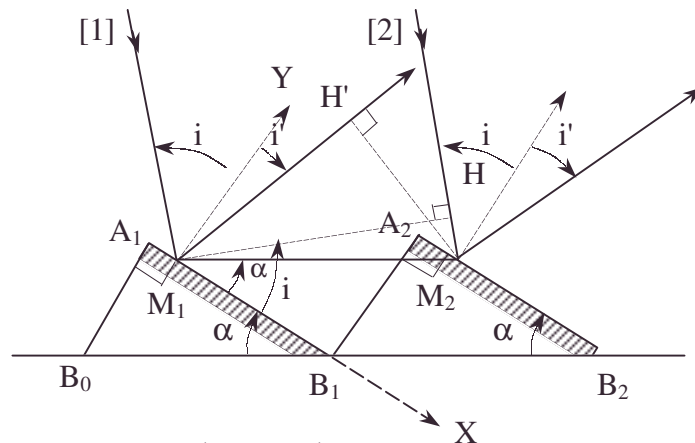
$$\text{γ. } \phi = \frac{\pi \lambda}{\lambda} (\sin i + \sin i') = \pi \frac{\lambda}{a} p \text{ A.N.: } a = 2\lambda ; p = 1 ; \phi = \frac{\pi}{2}.$$

$$I \# I_0 \text{sinc}^2 \phi = I_0 \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 ; \text{A.N.: } I = 0,4 I_0.$$

d. $R = pN$; à N fixé, il faut augmenter l'ordre p .

On sait que la diffraction étudiée précédemment va faire diminuer de plus en plus l'intensité lumineuse déjà affaiblie à l'ordre 1.

III.1.



$$\delta = M_2 H - M_1 H' ; M_1 H' = b \cos \left(\frac{\pi}{2} + i' - \alpha \right) ; M_2 H = b \sin (i - \alpha) \text{ car } i' < 0 \text{ et } i > 0.$$

$$\delta = b [\sin (i' - \alpha) + \sin (i - \alpha)]. \text{ Pour } \alpha = 0, \text{ on retrouve } \delta_{II}.$$

2. On retrouve la structure des interférences et de la diffraction de chaque plage et par analogie pour chaque structure on écrit :

- approximation de Gauss, critère de séparation de Rayleigh, observation de pics de réseaux d'ordres entiers, pouvoir de résolution

$$I = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2 N \frac{\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \text{ avec } \phi = \frac{\pi \lambda}{\lambda} (\sin i' + \sin i).$$

$$\phi = \frac{2\pi b}{\lambda} (\sin(i' - \alpha) + \sin(i - \alpha)).$$

3.a. $\sin^2 \phi = 1$ pour $i' = -i$ assure le maximum d'intensité de la diffraction.

b. Reportons $i' = -i$ dans $\phi = \frac{2\pi b}{\lambda} [\sin(i - \alpha) - \sin(i + \alpha)]$;

$$\phi = \frac{2\pi b}{\lambda} [\sin i \cos \alpha - \sin \alpha \cos i - \sin i \cos \alpha - \cos i \sin \alpha]$$

on a un maximum pour $\phi = 2\pi p_0$ avec $p_0 \in \mathbb{Z}$. $p_0 \neq 0$ en général.

soit $p_0 = -\frac{2b}{\lambda} \sin \alpha \cos i$ (pour les valeurs en correspondance).

c. Reprenons la démonstration du **II.5.**

$$\alpha. \sin(i' - \alpha) = p \frac{\lambda}{b} - \sin(i - \alpha) \Rightarrow \cos(i' - \alpha) di' = \frac{p}{b} d\lambda \Rightarrow \Delta_1 i' = \frac{|p| \Delta \lambda}{b \cos(i' - \alpha)}$$

$$\beta. \phi = \frac{2\pi b}{\lambda} (\sin(i' - \alpha) + \sin(i - \alpha)) \Rightarrow d\phi = \frac{2\pi b}{\lambda} \cos(i' - \alpha) di'.$$

$$\text{or } d\phi = \frac{4\pi}{N} \Rightarrow \Delta_2 i' = \frac{2\lambda}{Nb \cos(i' - \alpha)}.$$

γ. Le critère de séparation de Rayleigh impose $\Delta_1 i' > \frac{\Delta_2 i'}{2}$ soit :

$$|p| N > \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \Rightarrow R = |p| N.$$

d. En jouant sur α , p au centre est différent de 0. On peut étudier d'autres incidence i dans les conditions d'éclairement favorisées par la diffraction c'est-à-dire dans le lobe central.

$$\text{e.}\alpha. \text{ On a : } \frac{\pi}{2} \geq |i| \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \cos i \leq 1 ; -2 \frac{b \sin \alpha}{\lambda} \leq p \leq 0 ; \text{A.N. : } -3,11 \leq p \leq 0.$$

Les valeurs visibles sont donc $p = 0, -1, -2, -3$.

$$\beta. \text{ On a le maximum 3 de } |p| \text{ pour } i_{-3} = \arccos \frac{3\lambda}{2b \sin \alpha} > 0.$$

$$\text{A.N. : } i_{-3} = 0,263 \text{ rad. ou } i_{-3} = 15,05^\circ.$$

$$\gamma. \text{ A.N. : } R = 3.20000 = 60000.$$

δ. A.N. : $I = I_0$. Maximum d'éclairement, facilitant les mesures.

$$\epsilon. \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{1,93.10^{-2}}{643,8} = 33358 ; \text{ les raies sont séparables car } R > \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$

On peut étudier l'effet Zeeman.

$$4. p_{0m} + 1 = -2 ; i_{-3} = 15,05^\circ.$$

α . On satisfait à : $\sin(i'_{-2} - \alpha) + \sin(i_{-3} - \alpha) = -\frac{2\lambda}{b}$: maximum d'interférence d'ordre $-2 \Rightarrow i'_{-2} = \alpha - \arcsin\left[\frac{2\lambda}{b} + \sin(i_{-3} - \alpha)\right]$.

A.N. : $i'_{-2} = 7,31^\circ$.

β . $\frac{2\pi}{\lambda}(\sin i_{-3} + \sin i'_{-2}) = \pi$; zéro de diffraction (cas simple en accord avec γ .)

$\Rightarrow \lambda = \frac{\lambda}{2(\sin i'_{-2} + \sin i_{-3})}$; A.N. : $\lambda = 1,664 \mu\text{m}$.

γ . On a $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin \gamma}{\lambda}$.

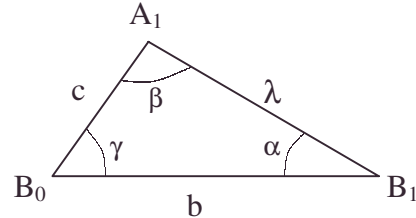
$\overrightarrow{A_1 B_0} = \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{B_1 B_0} \Rightarrow c^2 = \lambda^2 + b^2 - 2b\lambda \cos \alpha$.

A.N. : $c = 1,0048 \mu\text{m}$.

$\sin \beta = \frac{b}{c} \sin \alpha$; A.N. : $\sin \beta = 0,995$; $\beta = 1,473$.

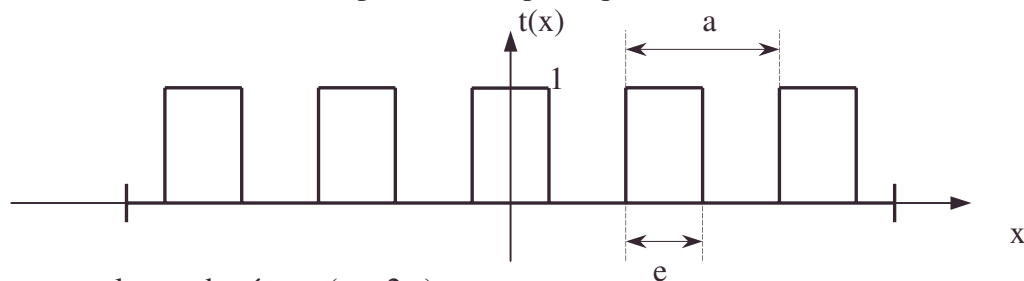
$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \beta = 0,1 \text{ rad}$.

L'angle A_1 est presque rectangle.

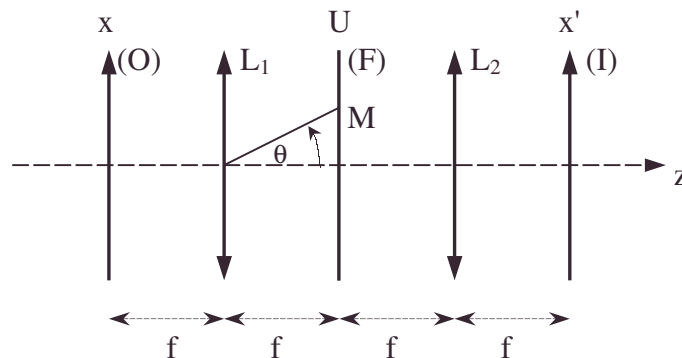


7.5.2.3.2. Filtrage spatial

Un réseau par transmission est constitué d'un écran opaque plan percé par $2N + 1$ fentes F_n identiques, rectilignes, parallèles et de longueur L' très grande devant leur largeur e . Sa transmittance en amplitude ne dépend que de x .



- a est le pas du réseau ($a = 2.e$)
- La longueur du réseau suivant l'axe des x est $L = (2N+1).a$.
- F_n est la fente centrée sur l'abscisse $x = na$.
- Le montage utilisé dans tout le problème est donné ci-dessous :



- Le plan (O) est dit plan objet.
- Le plan (F) est dit plan de Fourier.

• longueur du réseau, pas du réseau, plan de Fourier

- Le plan (I) est dit plan image. Tous les plans possèdent leurs coordonnées avec des axes parallèles entre eux.
- L_1 et L_2 sont deux lentilles convergentes de même distance focale f , on négligera tout phénomène de diffraction dû à leurs montures.
- Le plan (O) porte le réseau défini ci-avant et est éclairé suivant l'axe z sous incidence normale par une onde plane, cohérente, monochromatique et de longueur d'onde dans le vide λ ; $\lambda \ll a$.

Question 1

Etablir au moyen d'un schéma, la construction du trajet d'un faisceau lumineux issu d'un point P du réseau (plan objet) et aboutissant sur le plan (I).

Question 2

Soit un point M du plan (F), repéré par l'angle θ .

1. Donner l'expression, en fonction de $v = \frac{\sin(\theta)}{\lambda}$, de l'amplitude complexe $\underline{A}_n(v)$ du champ diffracté en M par une seule fente F_n , centrée sur l'abscisse $x = n.a$ du réseau.

2. En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}(v)$ diffractée par le réseau. On appellera B_0 l'amplitude complexe pour $v = 0$.

3. Admettant que l'intensité dans le plan F est maximale pour $v = v_m = \frac{m}{a}$ (m étant un entier), déterminer, dans le plan (F) et pour θ petit, les valeurs des abscisses U_m correspondant aux maxima d'intensité.

4. Calculer pour ces valeurs de v_m les amplitudes complexes \underline{A}_m du champ dans le plan (F), préciser leurs valeurs relatives pour les cinq premiers termes non nuls.

Question 3

On admettra dans la suite du problème que les caractéristiques du système optique nous permettent de considérer que le champ dans le plan (F) est équivalent au champ émis par $2p + 1$ sources ponctuelles équidistantes situées aux points U_m et émettant des amplitudes complexes \underline{A}_m .

On remarquera que l'image R' du réseau R observé dans le plan (I) s'interprète à partir du principe de Huygens-Fresnel comme le résultat des interférences des ondes rayonnées sur le plan (I) par les $2p + 1$ sources ponctuelles ci-dessus définies.

1. On place dans le plan (F) un diaphragme ne laissant passer que le maximum situé en $U = 0$; exprimer l'intensité $I(x')$ dans le plan (I).

2. On place dans le plan (F) un diaphragme ne laissant passer que le maximum situé en $U = 0$ et les deux premiers maxima situés de part et d'autre.

Exprimer et représenter dans le plan (I), l'intensité $I(x')$ résultante de l'action de ces trois sources.

3. On place dans le plan (F) un diaphragme ne laissant passer que les deux premiers maxima situés de part et d'autre de $U = 0$.

Exprimer et représenter dans le plan (I), l'intensité $I(x')$ résultante de l'action de ces deux sources.

4. Le plan F n'étant pas diaphragmé, écrire le module $A(x')$ de l'amplitude complexe du champ dans le plan (I) sous la forme $A(x') = A_0 + \sum_{m=1}^p A_m \cdot \cos\left(2\pi m \frac{x'}{a}\right)$.

5. Démontrer, en décomposant la transmittance du réseau en série de Fourier, une relation liant $A(x')$ à la transmittance en amplitude $t(x')$.

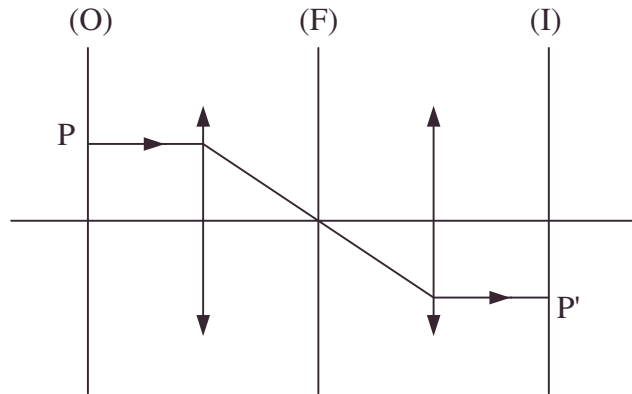
CCP ; Durée : 2h

- diaphragme, diffraction par une fente, image du réseau, principe de Huygens-Fresnel, transmittance du réseau

Corrigé

1. Soit P un point du plan (O) ; son image par L_1 est à l'infini ; l'image de cet intermédiaire est donc dans le plan focal de L_2 , soit dans le plan (I).

Le tracé (voir figure ci-après) d'un rayon parallèle à l'axe z, passant par P, permet de trouver P', le grandissement linéaire $\gamma_{P',P} = -1$.



2.1. Les ondes diffractées à l'infini par un élément du plan (O) dans la direction θ se retrouvent au point M du plan focal (F) de L_1 ; la conjugaison n'introduit pas de variation de différence de marche.

$$\underline{A}_n = K_1 e^{j\phi_0} \iint_{F_n} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{OP}} dS = K_1 e^{j\phi_0} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{OO_n}} \iint_{F_n} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{O_n P}} dS, \phi_0 \text{ étant la phase du rayon de référence passant par } x = 0 \text{ et de direction } \theta.$$

$$\underline{A}_n(v) = L' e K e^{j\phi_0} \text{sinc}(\pi v e) e^{j2\pi v n a}.$$

$$2. \underline{A} = \sum_{-N}^{+N} L' e K e^{j\phi_0} \text{sinc}(\pi v e) e^{j2\pi v n a} = e L' K e^{j\phi_0} \text{sinc}(\pi v e) \sum_{-N}^{+N} e^{j2\pi v n a}.$$

$$\underline{A} = e L' K e^{j\phi_0} \text{sinc}(\pi v e) \frac{\sin(2N+1)\pi v a}{\sin \pi v a}.$$

Pour $\theta = 0, v = 0, \frac{\sin(2N+1)\pi v a}{\sin \pi v a} = (2N+1) \frac{v\pi a}{\pi v a} = 2N+1.$

$$B_0 = e L' K e^{j\phi_0} (2N+1) \Rightarrow \underline{A}(v) = \frac{B_0}{2N+1} \text{sinc}(\pi v e) \frac{\sin(2N+1)\pi v a}{\sin \pi v a}.$$

3.a. 2 rayons passant par les centres de 2 fentes consécutives sont déphasés de $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = 2\pi a v$.

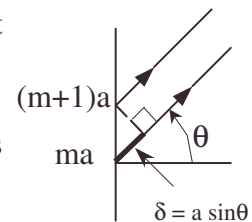
On obtient des maxima quand $\varphi = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ car toutes les amplitudes sont alors en phase

$$\Rightarrow v_m = \frac{m}{a} = \frac{\sin \theta_m}{\lambda} \left(\# \frac{\theta_m}{\lambda} \text{ quand } \theta_m \text{ petit} \right).$$

b. $U_m = f \theta_m = \lambda f v_m$ pour θ toujours petit dans l'approximation de Gauss d'une lentille. Mais $\text{sinc}\left(\pi m \frac{e}{a}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\pi m}{2}\right) = 0$ pour $m = 2p \neq 0$.

Il faudra prendre m impair.

$$U_{2p+1} = \lambda f v_{2p+1} = \frac{\lambda}{a} f (2p+1) \text{ avec } v_{2p+1} = \frac{2p+1}{a}.$$



4. Les A_m associés aux v_m :

$$\underline{A}_{2p+1} = eK e^{j\phi_0} \frac{\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}}{(2p+1)\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi(2p+1)} \text{ mais } \underline{A}_0 = eK e^{j\phi_0} \Rightarrow \underline{A}_{2p+1} = \frac{A_0(-1)^p}{(2p+1)\frac{\pi}{2}}.$$

m	0	1	3	5	7
$\frac{\underline{A}_m}{A_0}$	1,0000	0,6366	-0,2122	0,1273	-0,0909

$9\% \leq \frac{|A_m|}{|A_0|} \leq 100\%$ soit des valeurs importantes cf. optique géométrique.

3.1. A_0 donne une intensité uniforme sur le plan (I) : $I_0 = |A_0|^2$.

2. En négligeant les contributions à l'intégrale des points M qui ne sont pas de grands maxima. On peut dire qu'on a ici 3 points séparés de $a' = \frac{\lambda f}{a}$ (cf. anomalie pour $m = 0$).

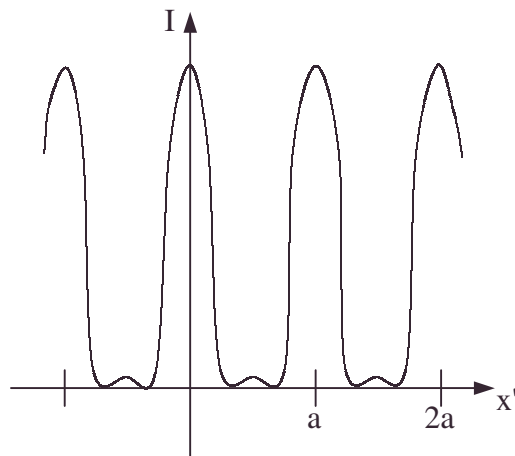
$A(x') = C \iint_{(F)} A(M) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM}} dS$, C une constante, en appliquant le principe d'Huygens-Fresnel aux amplitudes présentes dans (F).

On remarquera $x' = f \theta'$ et $\underline{A}_1 = \frac{2}{\pi} A_0$; $\underline{A}_{-1} = \frac{2}{\pi} A_0$:

$$A(x') = e^{j\phi_0} \left(A_0 + \underline{A}_1 e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta' a'} + \underline{A}_{-1} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta' a'} \right);$$

$$A(x') = e^{j\phi_0} A_0 \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(e^{j\frac{2\pi x'}{a}} + e^{-j\frac{2\pi x'}{a}} \right) \right] = e^{j\phi_0} A_0 \left(1 + \frac{4}{\pi} \cos 2\pi \frac{x'}{a} \right);$$

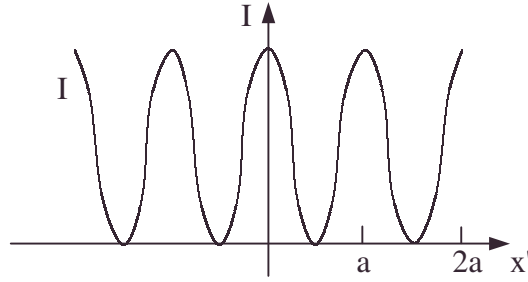
$$I(x') = |A_0|^2 \left(1 + \frac{4}{\pi} \cos 2\pi \frac{x'}{a} \right)^2.$$



$$3. A(x') = \frac{2A_0}{\pi} e^{j\phi_0} \left(e^{j2\pi \frac{x'}{a}} + e^{-j2\pi \frac{x'}{a}} \right) = \frac{4A_0}{\pi} e^{j\phi_0} \cos \frac{2\pi x'}{a}.$$

$$I(x') = \frac{16|A_0|^2}{\pi^2} \cos^2 \frac{2\pi x'}{a}.$$

cf. trous d'Young.



$$4. A(x') = \left(A_0 + \dots \underline{A}_{2p+1} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (2p+1) \frac{\lambda f}{a} \sin \theta'} + \underline{A}_{-(2p+1)} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (2p+1) \frac{\lambda f}{a} \sin \theta'} + \dots \right) \text{ vu I.4. ;}$$

$$\text{or } \sin \theta' \approx x' ; A(x') = A_0 \left(1 + \dots + \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi} \cos(2p+1) 2\pi \frac{x'}{a} \dots \right).$$

ce qui est la forme demandée, avec $A_0' = A_0$; $A_{2p} = 0$; $A_{2p+1} = \frac{4(-1)^p A_0}{(2p+1)\pi}$.

5.a. Cherchons la série de Fourier de $t(x)$:

$$t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{x}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{x}{a} \right);$$

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} t(x') dx' = \frac{1}{2}.$$

$b_n = 0$ car $t(x)$ est une fonction paire et $\sin 2\pi n \frac{x}{a}$ est impaire.

$$a_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} \cos 2\pi n \frac{x}{a} dx = 2 \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{2}\right)}{\pi n} \Rightarrow a_{2p} = 0 ; a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)\pi}.$$

b. On en déduit $A(x') = 2A_0 t(x')$.

On retrouve que l'amplitude dans (I) est égale à celle dans (O).

L'hypothèse de la question 3. suffit à retrouver l'image géométrique dans son entier. Les questions précédentes étudient le prélèvement par filtrage de parties de l'amplitude (et donc d'énergie) de l'image complète.

7.5.2.3.3. Marquage optique des écoulements Réseau sinusoïdal

Ecriture

La figure d'interférences (R) formée dans la cellule d'écoulement (C) par recombinaison des deux faisceaux (F_1) et (F_2) issus du puissant laser à impulsions (La_1) éclaire le fluide à chaque tir laser.

Les molécules de marqueur photochrome dissoutes dans le fluide présentent la propriété de noircir lorsqu'elles reçoivent une illumination intense (réaction photochimique). La figure d'interférences (R) est donc "écrite" au sein du fluide sous la forme d'un réseau de franges alternativement opaques et transparentes.

- image géométrique, marquage optique des écoulements, réseau sinusoïdal, transmittance de réseau

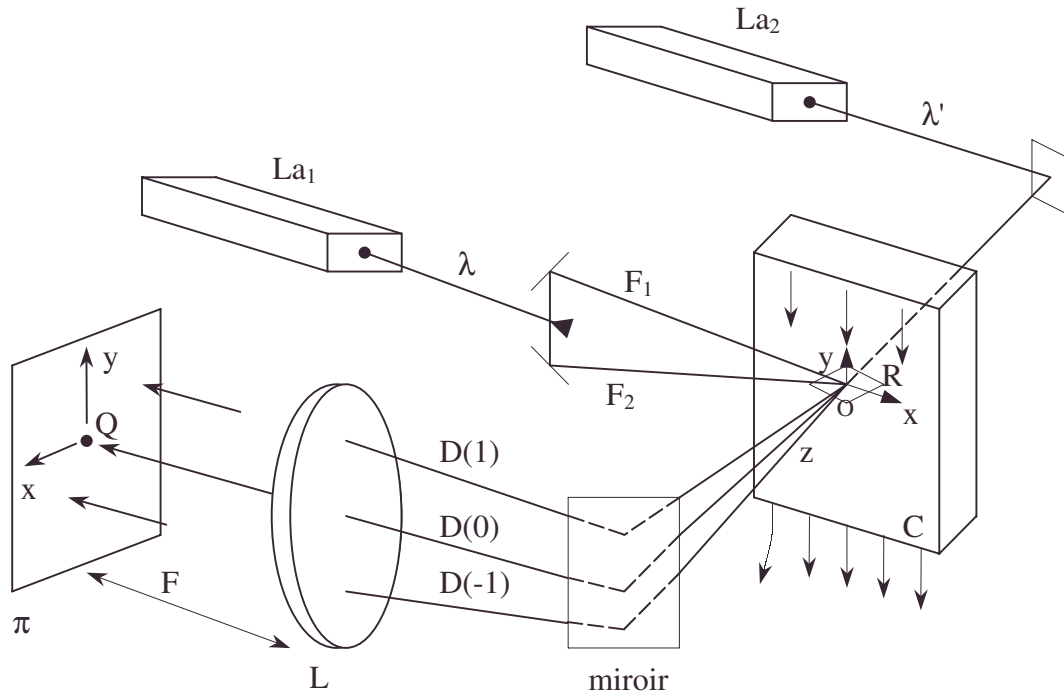


Figure 1 : Schéma général de l'expérience.

Lecture

Ce réseau devenu matériel est entraîné et modifié dans le champ de vitesse de l'écoulement. Le faisceau d'un laser auxiliaire de faible puissance (La_2) est alors diffracté par le réseau en écoulement et l'analyse de la figure de diffraction obtenue dans le plan focal (π) de la lentille d'observation (L) permet de remonter aux paramètres du champ de vitesse de l'écoulement.

Rappels et préliminaires

- Dans tout le problème on négligera l'effet des parois de la cellule d'écoulement sur la marche des faisceaux de lumière.

- L'amplitude lumineuse au point M (rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) d'une onde plane monochromatique (longueur d'onde λ dans le vide) se propageant dans un milieu d'indice n dans la direction de vecteur d'onde \vec{k} ($|\vec{k}| = 2\frac{\pi}{\lambda}$) s'écrit :

$A(\vec{r}) = \sqrt{I_0} \exp(in \vec{k} \cdot \vec{r})$, le point O étant choisi comme origine des phases et I_0 représentant l'intensité du faisceau de lumière.

$$\left| \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{2\pi i(\alpha - \beta u)\xi} d\xi \right|^2 = \text{sinc}^2 \pi(\alpha - \beta u) a, \text{ avec } \text{sinc}(x) = \frac{1}{x} \sin x, \text{ fonction sinus cardinal.}$$

Le maximum est obtenu pour $u = \frac{\alpha}{\beta}$ et vaut 1.

La demi-largeur en u du premier lobe (distance entre le maximum et le premier zéro) est définie par $\Delta u = \frac{1}{\beta a}$.

- Questions faisant appel au raisonnement et au sens physique

La réponse à ces questions n'est pas le résultat d'un quelconque calcul, mais l'aboutissement d'un processus de raisonnements simples que vous devez "traduire par écrit" en dix lignes au grand maximum.

- fonction sinus cardinal [définition], molécules de marqueur photochrome dissoutes dans le fluide

Ne négligez pas ces questions car elles auront un poids important dans le barème de correction.

- La réponse à la question **I.3.** nécessite le tracé de la marche des faisceaux à travers le système optique d'observation. La correction tiendra compte de la clarté et de la qualité de ce tracé ; l'étudiant devra faire apparaître sur cette figure les éléments de construction auxiliaires nécessaires à éliminer toute ambiguïté sur la façon dont a été construite la marche des faisceaux.

- Dans tout ce problème, les dessins seront plus efficaces que les calculs.

Première partie : fluide au repos

I.1. Ecriture à la longueur d'onde λ (figure 2)

a. Ecrire les composantes des vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 des faisceaux F_1 et F_2 dans la cellule d'écoulement en les linéarisant en θ .

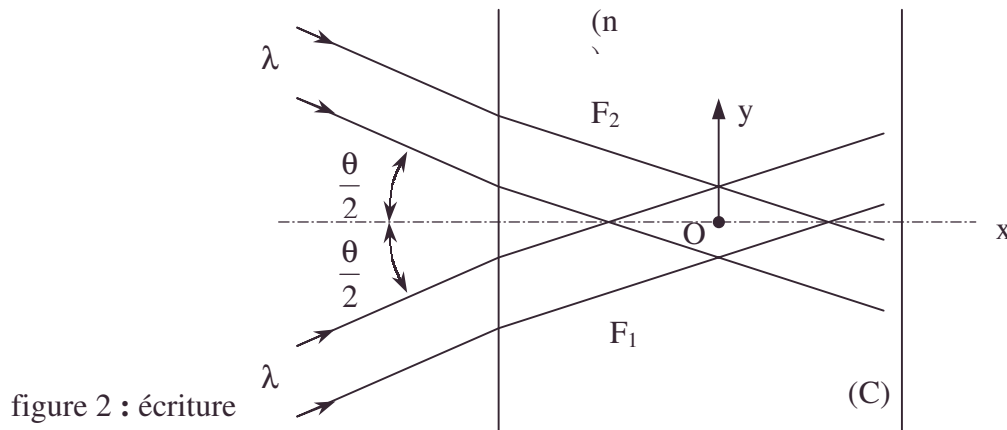


figure 2 : écriture

b. I_0 étant l'intensité de chacun des deux faisceaux, montrer que l'intensité lumineuse au point (x,y) de la figure d'interférences s'écrit :

$$J(x,y) = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{f(x,y)}{p} \right), \text{ où } f(x,y) \text{ est une fonction (représentant la géométrie des franges) que l'on précisera.}$$

c. Quelle est la signification physique du paramètre p ?

Valeur numérique pour $\lambda = 503,0 \text{ nm}$ et $\theta = 34'35''$.

d. Justifier par des arguments physiques (maximum 10 lignes) le fait que le paramètre p soit indépendant de l'indice n du fluide.

2. Marquage

$T(x,y)$ désignant la transparence (ou facteur de transmission de la puissance) du fluide après illumination ($0 \leq T(x,y) \leq 1$), montrer qu'elle s'exprime par l'expression

$$T(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{+2\pi i \frac{f(x,y)}{p}} - \frac{1}{4} e^{-2\pi i \frac{f(x,y)}{p}} \text{ si l'on admet la proportionnalité entre l'intensité et "l'opacité" } 1 - T.$$

Rappelons que les photochromes noircissent sous l'action de la lumière, une frange brillante est matérialisée sous la forme d'un trait opaque.

3. Lecture à la longueur d'onde λ' (figure 3)

On admettra qu'un réseau de diffraction à profil sinusoïdal (cas du réseau $T(x,y)$) ne diffracte que trois faisceaux notés $D(-1)$, $D(0)$ et $D(1)$ (voir figure 3).

a. Compléter la marche des faisceaux sur la figure 3.

Relire à ce sujet les préliminaires.

b. Exprimer les coordonnées (X,Y) des centres $C(-1)$, $C(0)$ et $C(1)$ des trois taches de diffraction qui apparaissent dans le plan (π) , plan focal de la lentille (L) d'observation.

- marquage des écoulements [une frange brillante est matérialisée sous la forme d'un trait opaque de réseau], transparence

c. Justifier par des arguments physiques (maximum 10 lignes) le fait que là encore l'indice de réfraction du liquide n n'intervient pas dans la position des ordres de diffraction.

d. Les arguments développés en I.1.d. et en I.3.c. sont-ils de même nature ? Sur quel principe d'optique (évident si l'on compare les figures 2 et 3) peut-on s'appuyer pour l'affirmer ?

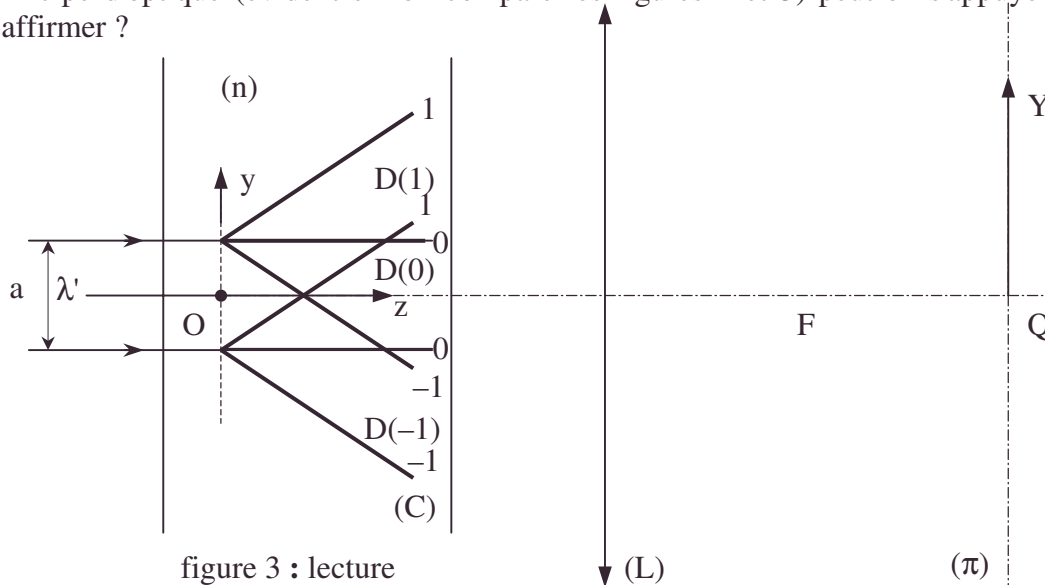


figure 3 : lecture

Deuxième partie – Fluide en écoulement

II.1. Effet du champ de vitesse sur le réseau marqué

L'origine des temps étant choisie juste à la fin du pulse d'écriture, la géométrie du réseau à l'instant $t = 0$ a donc été définie au cours de la première partie.

Ce réseau est maintenant distordu dans un écoulement caractérisé par le champ de

$$\text{vitesse : } \vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -Gx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (G > 0).$$

a. Dessiner l'allure du réseau à l'instant t dans le plan x, y et montrer que le pas mesuré selon Oy est une constante indépendante du temps.

b. Exprimer, en fonction du temps, l'angle $\alpha(t)$ entre l'axe Oy et la normale aux traits. Quelles sont la valeur et l'unité du gradient de vitesse G si l'angle $\alpha(t)$ vaut $9^\circ 5' 30''$ au temps $t = 80 \text{ ms}$?

c. Expression du pas $p(t)$ mesuré sur cette normale en fonction du temps ; valeur numérique dans les mêmes conditions qu'au II.1.b.

d. En déduire géométriquement, en fonction du temps, les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ du centre $C(1)$ de la tache de diffraction d'ordre (1) dans le plan (π) et montrer qu'au cours du temps il se déplace sur une droite d'ordonnée constante, le vecteur $\vec{QC}(1)$ faisant à tout instant l'angle $\alpha(t)$ avec l'axe QY .

e. Donner à l'instant t l'expression de la fonction $f_t(x, y)$ représentant la géométrie des franges.

2. Résolution

On admettra que la répartition de l'intensité lumineuse autour du point $C(1)$ [plan π] dans la tache de diffraction d'ordre (1) est donnée par :

$$J_t(X, Y) = \left| \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik \frac{XX+YY}{F}} e^{2\pi i \frac{f_t(x,y)}{p}} dx dy \right|^2,$$

où le faisceau du laser de lecture La_2 est supposé (pour des raisons de simplification de calcul) de section carrée de côté a . Dans cette expression, k' représente le module du vecteur d'onde du faisceau de lecture (longueur d'onde dans le vide λ').

a. Dans l'expression de J_t apparaît un des trois termes constitutifs de la fonction de transparence du fluide marqué à l'instant t : $T_t(x,y)$?

A quoi correspondraient physiquement les intégrales similaires formées à partir des deux autres termes de $T_t(x,y)$? (Cinq lignes maximum).

b. Montrer que la demi-largeur de la tache de diffraction mesurée selon QX est indépendante du temps. Justifier sans calcul que la demi-largeur de cette même tache mesurée selon QY est égale à la précédente.

c. Montrer que le rapport : demi-largeur selon QY sur ordonnée du centre de la tache $C(1)$ est indépendant à la fois de la longueur d'onde λ' et de la focale f de la lentille.

Que représentent physiquement les paramètres dont dépend ce rapport ?

d. en déduire le plus petit gradient de vitesse mesurable à l'instant t si l'on admet le critère de séparation de Rayleigh : deux taches sont séparables si la distance entre leurs centres respectifs est supérieure ou égale à la demi-largeur de chacune des taches.

Application numérique : $a = 635 \mu m$; $t = 80 ms$.

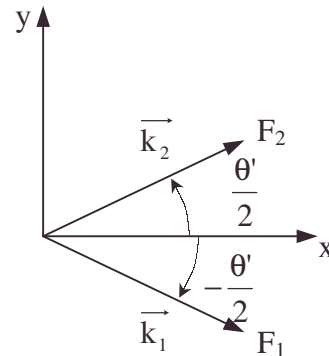
e. Le réseau inscrit n'est pas indélébile. La transparence tend à redevenir uniforme au cours du temps. Avez-vous une idée du mécanisme physique responsable de cette "extinction du réseau" ?

ESPCI ; Durée : 2h.

Corrigé

I.1.a. Vu la définition particulière de \vec{k} :

$$\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{\theta'}{2} \\ \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta'}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{\theta'}{2} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta'}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Or, la loi de Descartes $\sin \frac{\theta}{2} = n \sin \frac{\theta'}{2}$, n étant l'indice du fluide :

Linéarisons : $\frac{\theta}{2} = n \frac{\theta'}{2}$; $\cos \frac{\theta'}{2} = 1$; $\sin \frac{\theta'}{2} = \frac{\theta'}{2} = \frac{\theta}{2n}$;

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\theta}{2n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\theta}{2n} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

b. $A = \sqrt{I_0} \left(e^{i n \vec{k}_1 \vec{r}} + e^{i n \vec{k}_2 \vec{r}} \right) = \sqrt{I_0} e^{i n \vec{k}_1 \vec{r}} \left(1 + e^{i n (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r}} \right)$,

$$\text{avec } n(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = n \left(0, \frac{2\pi\theta}{\lambda n}, 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2\pi\theta y}{\lambda}.$$

$$J = AA^* = I_0 \left(1 + e^{i 2\pi \frac{\theta y}{\lambda}} \right) \left(1 + e^{-i \frac{2\pi\theta y}{\lambda}} \right) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{\frac{\lambda}{\theta}} \right); \begin{cases} f(x, y) \equiv y \\ p \equiv \frac{\lambda}{\theta} \end{cases}.$$

Conclusion : $J = \text{constante}$ pour y constant.

Cela définit des franges d'interférence parallèles à Ox .

c.α. $J = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{y}{p} \right)$; p est la période spatiale en y , l'interfrange.

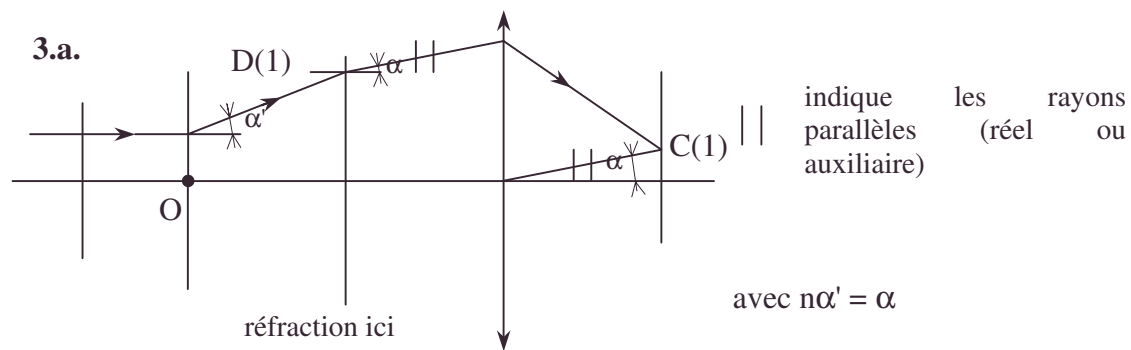
β. $\Delta n : p = 5,000 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$

d. La réfraction autrement dit la conjugaison n'introduit pas de différence de marche optique. Seuls les écarts géométriques de position (cf. symétrie) dans le vide interviennent dans la différence de marche et donc dans $f(x, y)$ aussi bien que dans p .

2. $\cos 2\pi \frac{f(x, y)}{p} = \frac{e^{i 2\pi \frac{y}{p}} + e^{-i \frac{2\pi y}{p}}}{2}$. En terme de négatif de photo noir et blanc, on a :

$J = k_1 (1 - T)$ or, $J_{\max} = 4I_0$, pour (cf. phrase de l'énoncé en **I.2.**) $T = 0 \Rightarrow k = 4I_0$.

$T = 1 - \frac{J}{k} = 1 - \frac{2I_0}{4I_0} \left(1 + \frac{1}{2} \left(e^{i 2\pi \frac{y}{p}} + e^{-i 2\pi \frac{y}{p}} \right) \right)$ c.q.f.d.



$C(-1)$ est symétrique de $C(1)$; $C(O)$ est sur l'axe de symétrie ($\alpha = 0$).

b.α. Les maxima d'éclairement correspondent à des rayons, tous en phase dans la diffraction à l'infini (pour un même faisceau).

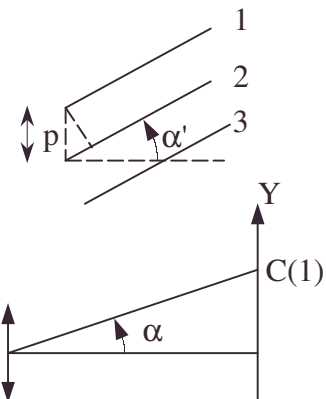
$\varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n \cdot p \alpha' = m \cdot 2\pi \quad m \in \mathbb{Z},$

p étant l'interfrange, le pas du réseau cf; figure ci-contre.

Or, $n\alpha' = \alpha$ cf. Descartes linéarisée ou loi de Képler.

$\Rightarrow \alpha = m \frac{\lambda}{p}$ (p l'interfrange de **I.1.b.**) $m \in \{-1, 0, +1\}$.

β. $Y_{C(m)} = F\alpha_m$; $X_{C(m)} = 0$.

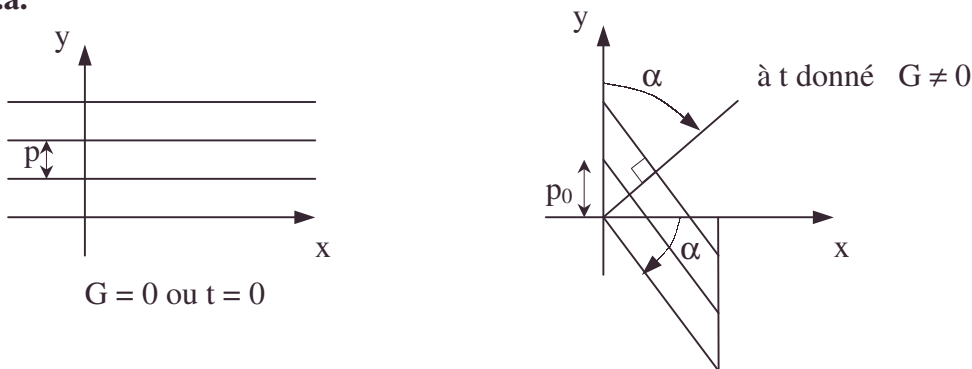


- $Y_{C(1)} = F \frac{\lambda}{p}$; $X_{C(1)} = 0$ cf. symétrie.
- Par symétrie, $Y_{C(-1)} = F \frac{\lambda}{p}$; $X_{C(-1)} = 0$.
- $Y_{C(0)} = 0$, $X_{C(0)} = 0$.

En résumé, $Y_{C(m)} = m F \frac{\lambda}{p}$ avec $m \in \{-1, 0, +1\}$: $X_{C(m)} = 0$.

c.d. La conjugaison associée aux réfractions n'apporte aucune différence de chemin optique (cf. principe de Fermat ou stigmatisme). Les figures 2 et 3 présentent des analogies quand on s'intéresse aux maxima d'éclairement (rayons en phase), raisonnement valable en diffraction ainsi qu'en optique géométrique qui en est la 1^{ère} approximation.

II.1.a.



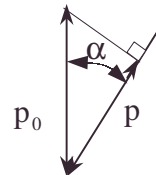
Il y a proportionnalité de la distance parcourue à x initial, si bien que 2 points de même x conservent une distance égale ; le pas selon Oy reste égal à p.

b. Vu les angles à côtés perpendiculaires, en respectant l'orientation trigonométrique, $\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{G x t}{x} = -G t \Leftrightarrow \alpha(t) = -\arctan G t$.

AN : $G = \frac{-\tan \alpha}{t} = 2,000 \text{ s}^{-1}$; unité de $G = \text{s}^{-1}$.

$$\text{c. } p = p_0 \cos \alpha = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\lambda}{\theta} \sqrt{\frac{1}{1 + G^2 t^2}}.$$

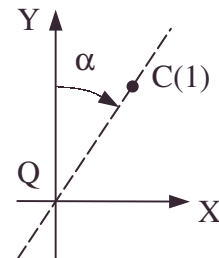
AN : $p = 4,937 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.



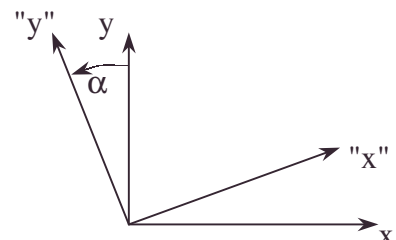
d. Vu la rotation d'angle α portant sur les causes et les conséquences cf. 2.

$$C(1) \begin{cases} X = -\frac{F\lambda'}{p} \sin \alpha = -\frac{F\lambda'}{p_0} \tan \alpha = G t \frac{F\lambda'}{p_0} \\ Y = \frac{F\lambda'}{p} \cos \alpha = \frac{F\lambda'}{p_0} \text{ droite d'ordonnée constante} \end{cases}$$

$\overrightarrow{QC}(1)$ fait un angle α avec QY car $\tan \alpha = \frac{X}{Y} = Gt$ à t donné.



e. La rotation d'angle α des anciens axes du I.1. permet d'écrire "y" = $y \cos \alpha - \sin \alpha x$ vu $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ calculé en **d**.



- principe de Fermat, loi de Képler

$$f_t(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1+G^2t^2}} + \frac{xGt}{\sqrt{1+G^2t^2}}.$$

2.a.α. Le terme $e^{\frac{2\pi i f(x,y)}{p}}$ est remplacé par $e^{-\frac{2\pi i f(x,y)}{p}}$.

Le changement de $f_t(x, y)$ en $-f_t(x, y)$ correspond à la symétrie (" y " \rightarrow " $-y$ ") et fait correspondre $C(-1)$ à $C(1)$.

β. Le changement de f_t en "0" correspond au moyen terme, soit à $C(0)$.

Par les intégrales similaires on obtiendrait respectivement les figures de diffraction autour de $C(-1)$ et de $C(0)$. On reconnaît les intégrales intervenant dans l'intégrale de Huygens-Fresnel décrivant la diffraction à l'infini du réseau sinusoïdal.

b. On sait que $\left| \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{2\pi i(\alpha - \beta u)\xi} d\xi \right|^2 = \text{sinc}^2 \pi(\alpha - \beta u)a$ et que la demi-largeur du

premier lobe est définie par $\Delta u = \frac{1}{\beta a}$.

$$|J_t|^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{2\pi i \left(\frac{xGt}{p\sqrt{1+G^2t^2}} - \frac{2\pi xX}{\lambda'F} \right)} dx \right| \left| \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{2\pi i \left(\frac{y}{p\sqrt{1+G^2t^2}} - \frac{2\pi yY}{\lambda'F} \right)} dy \right|.$$

$$J_t = \text{sinc}^2 \left[\pi \left(\frac{Gt}{p\sqrt{1+G^2t^2}} - \frac{X}{\lambda'F} \right) a \right] \text{sinc}^2 \left[\pi \left(\frac{1}{p\sqrt{1+G^2t^2}} - \frac{Y}{\lambda'F} \right) a \right],$$

l'énoncé précise dans ses préliminaires les demi-largeurs de premier lobe :

$$\Delta X = \frac{\lambda'F}{a}; \text{ on voit par là même } \Delta Y = \frac{\lambda'F}{a}. \text{ Elles sont indépendantes de } t.$$

Les deux demi-largeurs sont égales vu la symétrie des interventions de X et Y dans J_t qui fait appel à l'intégration sur un carré.

c. $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\lambda'F}{a \cos \alpha \frac{\lambda'F}{p}} = \frac{p_0}{a}$ est indépendant de λ' et de F , c'est le rapport des

dimensions caractéristiques des diffractions (a arête du carré de La_2 , p_0 pas selon Oy créé par La_1).

d. Quand $G = 0$, $C(1), C(-1)$ et $C(0)$ sont confondus. Soit ΔG la plus petite valeur mesurable.

Quand $G = \Delta G$ les 3 taches se séparent et la position $C(1)$ a pour abscisse :

$$X = \Delta G t \frac{F\lambda'}{p_0}, \text{ or : le critère de Rayleigh est satisfait si } X \geq \Delta X :$$

$$t\Delta G \frac{F\lambda'}{p_0} \geq \frac{\lambda'F}{a} \text{ soit } \Delta G \geq \frac{p_0}{at} \text{ AN : } \Delta G = 1s^{-1}.$$

e. La diffusion moléculaire ou turbulente des molécules du marqueur en est la cause.

7.5.2.3.4. Principe d'un laser

Voir page 683.

7.5.2.3.5. Interféromètre de Pérot-Fabry

Voir page 1414.

- critère de séparation de Rayleigh, demi-largeur, réseau sinusoïdal, rotation de droites

7.5.2.4. Interféromètres

7.5.2.4.1. Anneaux d'égales inclinaisons et influence de la température de la source lumineuse – Effet Doppler

On s'intéresse dans ce problème à un phénomène d'interférences et à l'influence de la température de la source lumineuse sur la largeur spectrale des radiations émises et donc sur la visibilité du phénomène.

I. Etude du phénomène d'interférences en lumière parfaitement monochromatique

On considère un système optique constitué par une source étendue S centrée au foyer objet d'une lentille mince. La source S émet une lumière parfaitement monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On place après la lentille mince deux lames de verre L_1 et L_2 strictement parallèles, séparant une lame d'air d'épaisseur e et d'indice $n = 1$. On considère que les deux rayons qui interfèrent sont ceux indiqués sur la figure 1, c'est-à-dire que l'on négligera l'épaisseur des lames de verre L_1 et L_2 .

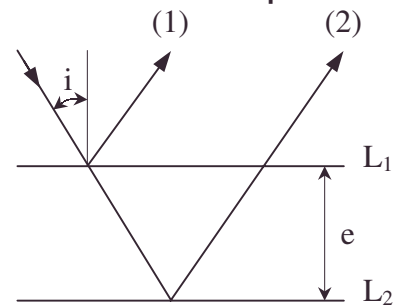


figure 1

On supposera que les deux rayons qui interfèrent ont la même intensité lumineuse. On note i l'angle d'incidence d'un rayon incident avec le système (L_1L_2) . On ne tient pas compte d'éventuels changements de phase lors de certains types de réflexion.

1. Exprimer la différence de marche entre les rayons (1) et (2) en fonction de e et de i .
2. En déduire que les franges d'interférences sont des anneaux situés à l'infini.
3. Exprimer l'ordre d'interférences en général, et l'ordre d'interférences au centre en particulier. On admet que l'ordre d'interférences au centre ($i = 0$) p_0 est un entier.

Quel est alors l'ordre d'interférences du premier anneau brillant ?

4. Quels sont les rayons angulaires i_1, i_2, i_3 des trois premiers anneaux brillants si l'on choisit $\lambda_0 = 0,5460 \mu\text{m}$ (raie verte du mercure) et $e = 2\text{cm}$?

On considère que l'angle i est très petit.

5. Comment s'écrit l'expression de l'intensité lumineuse I en un point M de l'écran en fonction de I_0 , intensité lumineuse au centre de la figure d'interférences (p_0 entier), de p_0 et de i ?

6. Représenter l'allure de la courbe $I = I(i)$ jusqu'au troisième anneau brillant.

II. Influence de la largeur spectrale

La source S n'émet pas une radiation parfaitement monochromatique. L'émission a de ce fait une certaine largeur $\Delta\lambda_0$, c'est-à-dire qu'elle contient toutes les radiations dont le

nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est compris entre $\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma_0}{2}$ et $\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma_0}{2}$, chaque radiation élémentaire de largeur $d\sigma$ donnant au centre de l'écran l'intensité élémentaire $dI_0 = \frac{I_0 d\sigma}{\Delta\sigma_0}$ (on considère toujours p_0 entier).

1. Déterminer à nouveau l'intensité lumineuse en un point M de l'écran en la mettant sous la forme : $I = \frac{I_0}{2}(1 + V \cos \varphi)$, où V est une fonction de e, i et $\Delta\sigma_0$ et φ une fonction de p_0 et de i.

2. On se place au centre ($i = 0$) ; pour quelle valeur e_0 de e a-t-on la fonction V qui s'annule pour la première fois ?

Faire l'application numérique avec $\Delta\lambda_0 = 0,5.10^{-2} \text{ nm}$.

Que peut-on en déduire pour la visibilité des franges quand $e = 2 \text{ cm}$?

III. Influence de la température de la source

1. Effet Doppler-Fizeau : on s'intéresse dans cette question au changement de fréquence d'une radiation lumineuse après réflexion sur un miroir mobile.

Soit c la vitesse de la lumière, v la vitesse du miroir supposé se déplacer normalement à son plan, et α l'angle d'incidence (figure 2).

Exprimer le changement de fréquence δf de la radiation en fonction de f, fréquence de la radiation, c, v et a.

2. Relation avec la température : on considère le rayonnement comme étant enfermé dans une enceinte sphérique à parois parfaitement réfléchissantes.

En dilatant les parois de l'enceinte de façon à faire varier son volume V, on fait subir au rayonnement une succession de réflexions du type de celle étudiée au 3.1.

On considère un rayon lumineux faisant l'angle α avec la surface réfléchissante sphérique (cf. figure 3), on appelle R le rayon de l'enceinte sphérique à un instant donné et $\frac{dR}{dt}$ sa variation par unité de temps.

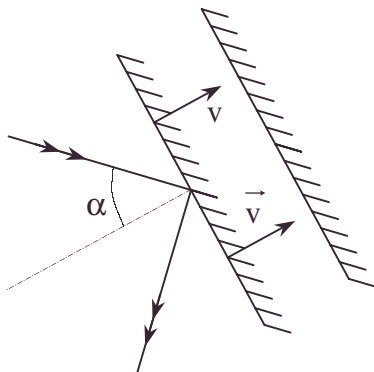


figure 2

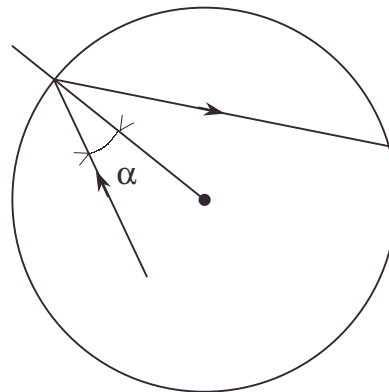


figure 3

1. Quel est le chemin parcouru par le rayon lumineux entre deux réflexions successives ? Quel est alors le nombre de réflexions subies par unité de temps ?

Quelle est alors la relation liant la variation relative de fréquence $\frac{df}{f}$ à celle du rayon

$\frac{dR}{R}$?

2.a. Quelle est qualitativement l'influence de la température T sur la variation dR de R ? En admettant que les conclusions précédentes s'appliquent au cas où l'enceinte est de forme quelconque, en déduire l'influence de T sur la largeur spectrale d'une raie monochromatique.

b. Application : on se place à la valeur $e = e_0$ indiquée précédemment. On éteint la lampe et on la rallume après refroidissement. Que se passe-t-il sur l'écran ?

c. On prend pour la largeur spectrale à froid la valeur $\Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda_0}{2}$.

Calculer alors le contraste $\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ des franges d'interférences.

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

I. On a le même schéma équivalent que celui de l'interféromètre de Michelson.

$$1. n=1 \quad r=i \Rightarrow \delta = IJ + JH = \frac{e}{\cos r} + \frac{e}{\cos r} \cos 2r$$

$$\delta = \frac{e}{\cos r} 2 \cos^2 r = 2e \cos i$$

2. Dans chaque plan méridien, l'amplitude à l'infini est la même pour i donné ; on a des anneaux à l'infini d'égales inclinaisons.

$$3.a. \text{ Au centre, } i=0 ; \delta_0 = 2e ; p_0 = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e}{\lambda_0}.$$

p_0 entier, on a un point brillant. (on rappelle que les rayons 1 et 2 subissent le même nombre de réflexions).

$$b. p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2e \cos i}{\lambda_0} < p_0.$$

Les anneaux brillants sont numérotés par p entiers, en variant d'une unité ; le 1^{er} anneau brillant est donc numéroté par $p_0 - 1$ vu l'énoncé.

$$4. p_0 = 73260 ; p_1 = 73259 ; p_2 = 73258 ; p_3 = 73257.$$

D'une manière générale, $p_k = p_0 - k$.

$$\cos i_k = \frac{p_0 - k}{p_0} \text{ soit } 1 - \frac{i_k^2}{2} \approx 1 - \frac{k}{p_0} \Rightarrow i_k = \sqrt{\frac{2k}{p_0}} = \sqrt{\frac{k\lambda_0}{e}}.$$

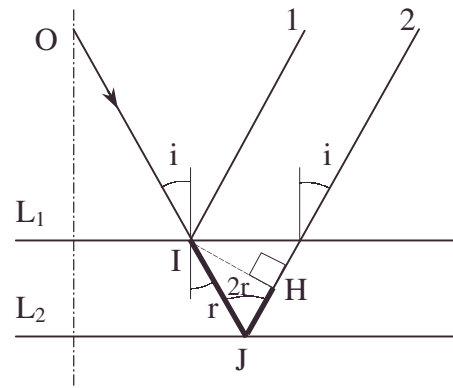
$$\text{AN : } i_1 = 5,225 \cdot 10^{-3} \text{ rad ; } i_2 = 7,389 \cdot 10^{-3} \text{ rad ; } i_3 = 9,050 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$5. a(M) = A_0 e^{i\varphi_0} \left(1 + e^{-j \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}} \right);$$

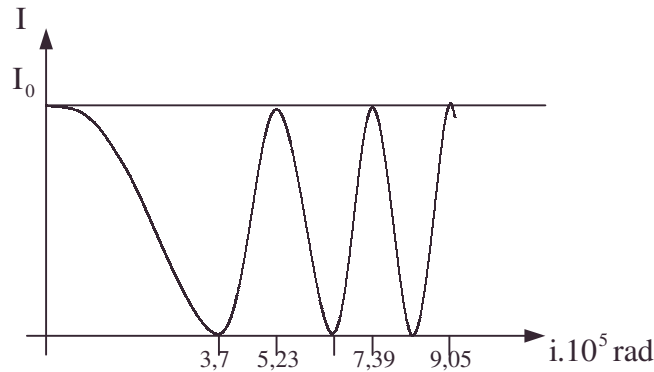
$$I(M) = a \cdot a^* = I_0 \cos^2 \frac{\pi\delta}{\lambda_0} = I_0 \cos^2 [\pi p_0 \cos i],$$

$$\text{ou : } I(M) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos 2\pi p_0 \cos i),$$

$$\text{ou } I(M) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos 4\pi e \sigma \cos i), \text{ avec } \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$



On visualise un effet non linéarisé.



II.1. à dI_0 est associé $dI = \frac{dI_0}{2} (1 + \cos 2\pi p_0 \cos i)$ avec $dI_0 = \frac{I_0 d\sigma}{\Delta\sigma_0}$,

et $I = \frac{I_0}{2\Delta\sigma_0} \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma_0}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma_0}{2}} (1 + \cos 4\pi e \sigma \cos i) d\sigma$; $I = \frac{I_0}{2} (1 + \text{sinc}[2\pi e \Delta\sigma_0 \cos i] \cos 2\pi p_0 \cos i)$.

Ainsi, $V = \text{sinc } 2\pi e \cos i \Delta\sigma_0$ et $\varphi = 2\pi p_0 \cos i$.

2.a. La première annulation de $\text{sinc } X$ est $X = \pi$; $i = 0 \Rightarrow V = 0$ pour $e_0 = \frac{1}{2\Delta\sigma_0}$.

Or, $\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0} \Rightarrow \Delta\sigma_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0^2}$ (en terme d'incertitude).

$e_0 = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0}$; AN : $e_0 = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

b. Pour $i = 0$: $V_1 = \text{sinc } \pi \frac{e_1}{e_0}$; AN : $e_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $V_1 = 0,407$. La visibilité

s'améliore mais reste médiocre.

III.1. Soit la théorie classique de l'effet Doppler :

On note T la période de la radiation dans le repère du laboratoire soit l'écart temporel entre 2 maxima à l'émission. Observons dans le repère lié au miroir l'écart temporel entre 2 maxima successifs. Supposons qu'un premier maximum atteigne le miroir en $t = 0$; il avait parcouru une distance d . Le maximum suivant à atteindre le miroir va parcourir un supplément $v \cos \alpha T$ et donc aura un décalage temporel $\frac{\delta T}{T} = \frac{v \cos \alpha}{c}$.

L'effet est doublé vu la réflexion qui introduit le même décalage, dans le retour au repère du laboratoire. $\frac{\delta T}{T} = \frac{2v \cos \alpha}{C}$ or $T = \frac{1}{f}$; $\ln T = -\ln f$

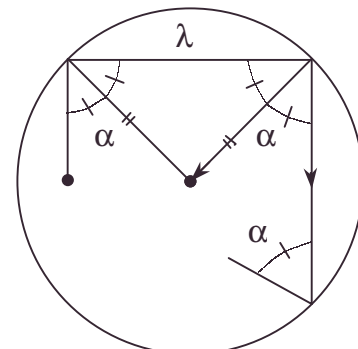
$$\Rightarrow \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta f}{f} \Rightarrow \delta f = -2f \frac{v \cos \alpha}{C}$$

2.1.a. Distance λ entre deux réflexions :

$\lambda = 2R \cos \alpha$.

b. Comme la figure montre la répétition du fait,

on enregistre par seconde n réflexions : $n = \frac{1}{\frac{2R \cos \alpha}{c}}$.



c. D'où :

$$\frac{df}{dt} = n \delta f = -\frac{c}{2R \cos \alpha} f \frac{2v \cos \alpha}{c} = -\frac{vf}{R}.$$

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = -\frac{v}{R} = -\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \text{ car } v_{\text{radial}} = \frac{dR}{dt}; \frac{df}{f} = -\frac{dR}{R}.$$

2.a. R croît avec T, $\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{df}{f} = \frac{dR}{R}.$

La largeur spectrale augmente donc avec T ce qui confirme l'intuition donnée par l'augmentation de chaos.

b. Vu II.2. $V = 0$ pour $e = e_0$.

Si T diminue, $\Delta\lambda$ diminue et V augmente $\left(\Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)$. On retrouve à froid des anneaux.

$$\text{c. } \Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda_0}{2}; \Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_0}{2}; V = \frac{\sin \frac{2\pi}{2\Delta\sigma_0} \frac{\Delta\sigma_0}{2}}{\frac{2\pi}{2\Delta\sigma_0} \frac{\Delta\sigma_0}{2}} = \frac{1}{\pi}.$$

AN : $V = 0,637$.

Le contraste $\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |V|$; AN : $\Gamma = 0,637$.

On comprend l'amélioration de l'observation quand on laisse refroidir la lampe.

7.5.2.4.2. Michelson Détection d'enveloppe Spectroscopie de Fourier d'une répartition gaussienne

L'objet de ce problème est l'obtention puis la détection du signal interférométrique associé à une source lumineuse de faible largeur spectrale.

Signal interférométrique

La figure 1 schématise un interféromètre de Michelson réglé pour donner des anneaux : il s'agit d'un appareil à faisceaux séparés, éclairé par une lampe à vapeur de mercure, S_0 , que l'on considérera comme une source lumineuse ponctuelle et monochromatique (longueur d'onde λ), placée au foyer objet d'une lentille L_1 . Une lame séparatrice à faces parallèles, S, est inclinée à 45° sur le faisceau incident, de telle sorte que les faisceaux réfléchis par les miroirs perpendiculaires M_1 et M_2 soient perpendiculaires entre eux. Afin que les différents faisceaux subissent le même nombre de réflexions ou de réfractions, on place contre la séparatrice une lame identique C, dite compensatrice ; on ne se préoccupera pas de l'épaisseur de l'ensemble (S + C) ; dans ces conditions, l'indice dans l'interféromètre sera celui de l'air et on le prendra égal à 1. Le faisceau sortant de l'interféromètre est focalisé par la lentille L_2 sur un détecteur PM (photomultiplicateur) placé en P qui délivre un courant électrique $i(t)$ proportionnel au flux lumineux qu'il reçoit. Le miroir M_1 est mobile et dans sa position initiale son abscisse est telle que l'ordre d'interférence au foyer image de la lentille L_2 est nul.

Il est clair qu'un déplacement x de ce miroir parallèlement à lui-même fait varier la différence de marche entre les rayons qui interfèrent au foyer de la lentille L_2 de $\delta = 2x$.

• compensatrice, contraste, flux lumineux reçu [courant électrique du récepteur proportionnel au], séparatrice, spectre gaussien

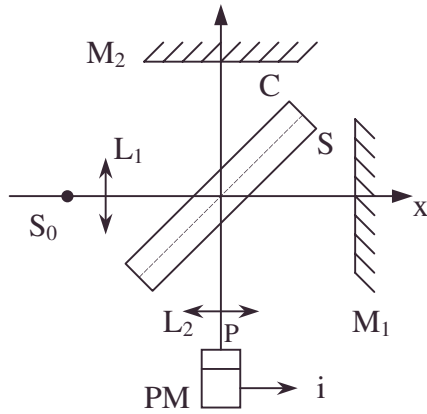


figure 1
Schéma d'un interféromètre de Michelson

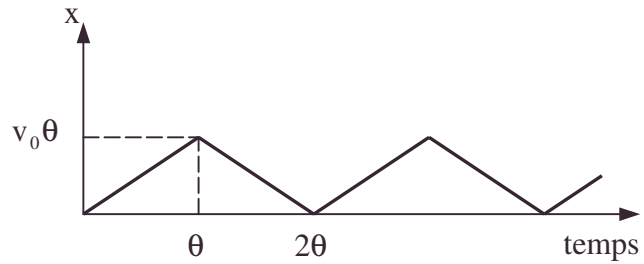


figure 2
Loi de déplacement du miroir M_1

1. Donner, lorsque le miroir M_1 a été translaté de x , l'expression de la différence de phase ϕ entre les rayons qui interfèrent à l'infini.

2. Déterminer l'expression de l'intensité vibratoire I au point P en fonction de x .
On désignera par I_0 la valeur maximale de cette intensité.

Comme représenté à la figure 2, le déplacement du miroir M_1 commandé par un moteur électrique, est périodique et modélisé par la loi $x = v_0 t$ pour $0 \leq t \leq \theta$ et $x = v_0 (2\theta - t)$ pour $\theta \leq t \leq 2\theta$, la période étant 2θ .

On donne $v_0 = 8.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et $\lambda = 546,1 \text{ nm}$.

3. Déterminer la loi de variation en fonction du temps du signal électrique $i(t)$ délivré par le photomultiplicateur (on désignera par i_0 sa valeur maximale) ; donner l'expression de sa période $T_0(\lambda)$ en fonction de λ et v_0 .

Calculer la valeur numérique de $T_0(\lambda)$ et celle du contraste $\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

On suppose bien entendu que le déplacement du miroir est très supérieur à λ .

4. On considère une source qui émet deux radiations de même intensité et de longueur d'onde très proches, λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 < \lambda_2$. On posera $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Montrer que

l'intensité lumineuse au sortir de l'interféromètre peut s'écrire $I = I_0 \left[1 + V(x) \cos \frac{4\pi x}{\lambda} \right]$,

où $\lambda \# \lambda_1 \# \lambda_2$. Donner l'expression de $V(x)$.

5. En fait, la lampe à vapeur de mercure présente une luminance énergétique L dont le profil spectral est gaussien tel que $L = \int_0^\infty \mathcal{L}(\sigma) d\sigma$; la densité spectrale est donc :

$\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}_0 \exp - \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2}$, où $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est le nombre d'onde ($0 \leq \sigma < \infty$), et a une constante.

Soient σ_1 et σ_2 ($\sigma_2 > \sigma_1$) les nombres d'onde pour lesquels $\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}_0}{2}$.

Donner l'expression de la largeur spectrale $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ de la source considérée.

• *contraste du signal électrique [enregistré dans un Michelson], déplacement du miroir commandé par un moteur électrique, différence de phase optique, luminance énergétique dont le profil spectral est gaussien, visibilité d'un enregistrement optique opéré avec un Michelson*

6. On suppose $\Delta\sigma \ll \sigma_0$ et on pose $T = \frac{1}{2\pi a v_0}$; quelle est la dimension de T ?

Déterminer l'expression du rapport $r = \frac{T_0(\lambda_0)}{T}$ en fonction de $\Delta\sigma$ et de $\lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0}$.

Calculer la valeur numérique de ce rapport.

On donne : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1,28 \cdot 10^{-6}$ pour $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$. Commenter.

7. Montrer que le signal électrique en sortie du photomultiplicateur est décrit par une loi du type $i(t) = i_0 \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{t}{T} \right) \cos \left[2\pi \frac{t}{T_0(\lambda_0)} \right] \right\}$.

Déterminer l'expression de la visibilité $\gamma(u)$.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$

et $\int_0^{+\infty} (\cos 2\pi u \delta) \left[\exp - \left(\frac{u - \sigma_0}{a} \right)^2 \right] du = a \sqrt{\pi} (\exp - \pi^2 a^2 \delta^2) \cos 2\pi \sigma_0 \delta$ pour $a \ll \sigma_0$.

8. Donner l'allure du signal délivré, en fonction du temps, par le photomultiplicateur.

Calculer le contraste, tel qu'il est défini en 3.

On distinguera deux cas : $0 \leq t \leq \theta$ et $\theta \leq t \leq 2\theta$.

Mines ; Durée : 1 h

Corrigé

1. $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$ avec $\delta = 2x \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi x}{\lambda}$.

2. $A = A_0 + A_0 e^{-j\varphi} \Rightarrow I = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \varphi) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi x}{\lambda} \right)$.

3. I étant proportionnel à i : $i = \frac{i_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi x(t)}{\lambda} \right)$,

avec $x(t) = v_0 t$ pour $0 \leq t \leq \theta$, modulo 2θ .

et $x(t) = v_0 (2\theta - t)$ pour $\theta \leq t \leq 2\theta$, modulo 2θ .

i a une période spatiale (en x) de $\frac{\lambda}{2}$, petite devant $v_0 \theta$.

$\exists n$ entier tel que $v_0 \theta \neq n \frac{\lambda}{2}$; $\theta \neq \frac{n\lambda}{2v_0} \Rightarrow T_0 = \frac{\lambda}{2v_0}$;

AN : $T_0 = 3,413 \cdot 10^{-5} \text{ s}$; $\Gamma = 1$ cf. interférences des trous d'Young.

4. On additionne les intensités $I(\lambda_1)$ et $I(\lambda_2)$ supposés de même I_0 .

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi x}{\lambda_1} \right) + \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi x}{\lambda_2} \right) = I_0 \left(1 + \cos 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \cos 2\pi x \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right)$$

$$I = I_0 \left(1 + V \cos \frac{4\pi x}{\lambda} \right) \text{ avec } \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} ; \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \neq \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \text{ car } \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda.$$

$$V = \cos \left[2\pi x \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \right].$$

• coefficient de cohérence partielle, contraste, période spatiale, visibilité d'un enregistrement optique opéré avec un Michelson

5. On cherche la bande passante en σ : $\exp - \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2} = \frac{1}{2}$.

En prenant le logarithme népérien : $\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a} \right)^2 = \ln 2$.

Soit : $\sigma = \sigma_0 \pm a\sqrt{\ln 2}$; $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 = 2a\sqrt{\ln 2}$.

6. • a a l'unité de σ soit m^{-1} ; av_0 a donc comme unité s^{-1} et T la seconde comme unité.

$$\bullet r = \frac{T_0}{T} = \frac{2\pi av_0 \lambda_0}{2v_0} = \pi a \lambda_0 = \pi \frac{\Delta\sigma \lambda_0}{2\sqrt{\ln 2}} ; \sigma = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \text{ (cf. incertitude).}$$

$$r = \frac{\pi}{2\sqrt{\ln 2}} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} ; \text{AN : } r = 2,415 \cdot 10^{-6}.$$

La largeur spectrale relative $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ est reliée à un rapport des durées nécessaires au miroir pour caractériser l'expérience (voir plus loin).

7. On additionne les intensités vibratoires dI de $dI_0 = K\mathcal{L}_0 e^{-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2}} d\sigma$, \mathcal{L} étant la luminance spectrale. K tient compte des angles solides déterminants.

$$I = K \int_0^\infty \frac{\mathcal{L}_0}{2} (1 + \cos 4\pi \sigma x) e^{-\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma \text{ de la forme } I = I_1 + I_2.$$

a. Calculons I_1 . Posons $u = \frac{\sigma - \sigma_0}{a}$. Or, $\sigma_0 \gg a$.

A la borne $\sigma = 0$ correspond la borne en u : $-\frac{\sigma_0}{a}$ soit $-\infty$.

A la borne $\sigma = +\infty$ correspond la borne $+\infty$.

$$I_1 = K \frac{\mathcal{L}_0}{2} a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = K \frac{\mathcal{L}_0}{2} a \sqrt{\pi}.$$

b. Calculons I_2 : posons ici $u = \sigma$, $\delta = 2x$.

$$I_2 = K \frac{\mathcal{L}_0}{2} \int_0^{+\infty} \cos 2\pi u \delta \exp - \left(\frac{u - \sigma_0}{a} \right)^2 du = K \frac{\mathcal{L}_0}{2} a \sqrt{\pi} \cos 2\pi \sigma_0 \delta \cdot (\exp - \pi^2 a^2 \delta^2).$$

$$c. I = K \frac{\mathcal{L}_0}{2} a \sqrt{\pi} (1 + (\exp - 4\pi^2 a^2 x^2) \cos 4\pi \sigma_0 x).$$

Or, i est proportionnel à I et $x = x(t)$. On trouve :

$$\bullet i_1 = i_0 \left(1 + e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2} \cos 2\pi \frac{t}{T_0(\lambda_0)} \right) \text{ pour } 0 \leq t \leq \theta.$$

$$\text{vu } T = \frac{1}{2\pi av_0}, x = v_0 t, T_0 = \frac{\lambda}{2v_0} \Rightarrow \gamma_1(u) = e^{-u^2} \text{ avec } u = \frac{t}{T}.$$

$$\bullet i_2 = i_0 \left(1 + e^{-\left(\frac{2\theta - t}{T}\right)^2} \cos \left[\frac{2\pi\theta}{\lambda_0} v_0 - \frac{2\pi t}{T_0(\lambda_0)} \right] \right).$$

L'espace étant rapporté à un repère muni d'une base cartésienne $R(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on considère l'interféromètre schématisé sur la figure 1 : il est constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 et d'une lame semi-réfléchissante G , supposée d'épaisseur négligeable, jouant le rôle de séparatrice. Le miroir M_1 est orthogonal en son centre O_1 à l'axe I_x ; il est mobile seulement en translation parallèle à cet axe. La séparatrice, de centre I est disposée à 45° de l'axe I_x . Le miroir M_2 , perpendiculaire au plan de la figure a son centre O_2 placé sur l'axe I_y ; M_2 n'est mobile qu'en rotation autour d'un axe (O_2, \vec{e}_z) perpendiculaire en O_2 au plan de la figure. Une lentille mince convergente (L) de distance focale image f est disposée de façon que son axe optique coïncide avec I_y ; un écran (E) est placé dans son plan focal image (figure 1). L'ensemble est placé dans l'air assimilé au vide et éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 .

1. La source, placée en S , est ponctuelle. M_2 est orthogonal à M_1 .

a. Montrer qu'on obtient en un point P de l'écran des interférences entre deux ondes issues de deux sources cohérentes S_1 et S_2 dont on indiquera les positions sur une figure. On ne considérera que des ondes réfléchies une seule fois par la séparatrice et une seule fois par un miroir.

Envisager le cas d'un rayon émis sous un angle quelconque et tracer sur la figure les rayons émergents de l'interféromètre.

b. Décrire le phénomène observé sur l'écran et montrer que la figure d'interférences est constituée d'anneaux de centre F , foyer principal image de (L).

c. Considérant un rayon qui, après transmission par G , arrive sous l'incidence i , faible, sur le miroir M_1 , calculer la différence de chemin optique δ , de deux rayons qui interfèrent en un point P de l'écran, en fonction de i et de la différence de longueur $|IO_1 - IO_2| = d$ entre les deux "bras" de l'interféromètre.

d. Calculer l'ordre d'interférence p au point P , en fonction de d , i et λ_0 . En déduire l'ordre d'interférence p_0 au centre.

L'incidence i étant faible, déterminer le rayon du n ème anneau brillant, en fonction de f , λ_0 , d , n et de l'excédent fractionnaire ε défini par : $p_0 = k_1 + \varepsilon$, où k_1 est l'ordre d'interférence du premier anneau brillant.

e. Décrire le phénomène observé dans le cas $d = 0$ ("contact optique").

2. On suppose dans cette question que la position de M_1 est réglée au contact optique. Après avoir enlevé la lentille (L), on fait subir au miroir M_2 une rotation d'angle θ , petit, autour de l'axe (O_2, \vec{e}_z) .

a. De même qu'en **1.a.**, préciser sur une figure la position des deux sources secondaires S_1 et S_2 . Indiquer, sans effectuer de calcul, l'allure de la figure d'interférences observée sur un écran parallèle à S_1S_2 .

b. On fait varier l'angle θ en agissant sur les vis de réglage de M_2 . Comment est modifiée la figure d'interférence ? Qu'observe-t-on si $\theta = 0$?

3. On remplace la source ponctuelle par une source étendue monochromatique de même longueur d'onde λ_0 et on dispose, en plus de la lentille (L), d'une deuxième lentille (L'). Comment faut-il modifier le montage précédent pour obtenir successivement des franges de même forme qu'aux questions **1.** puis **2.** ? Préciser sur deux schémas les montages correspondants.

4. La lame séparatrice G est en verre d'indice n et a une épaisseur non négligeable. Elle est semi-réfléchissante par sa face antérieure (figure 2).

• *bras d'interféromètre de Michelson, contact optique, différence de marche [ou de chemin optique], excédent fractionnaire, lame semi-réfléchissante, Michelson [ses deux sources cohérentes], séparatrice*

a. Montrer, à l'aide d'une figure, que la différence de chemin optique δ calculée en 1.c. est modifiée.

b. Etudier la possibilité d'utiliser, pour remplacer G, un dispositif composé de deux prismes de section principale rectangle isocèle, identiques et accolés? Représenter ce dispositif sur une figure en indiquant quelle surface il faut rendre semi-transparente.

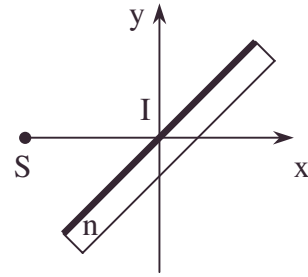


Figure 2

II. Application à la mesure de distances

L'interféromètre de Michelson est utilisé couramment pour la mesure de distances, le montage étant réalisé afin que la distance à mesurer d coïncide avec la différence de longueur des bras de l'interféromètre. Dans la suite du problème, les deux miroirs, fixes, sont perpendiculaires. M_1 est constitué par la surface réfléchissante de l'objet dont on souhaite mesurer la distance à l'image M'_2 de M_2 dans la séparatrice, supposée d'épaisseur négligeable. La source monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , est constituée d'une diode laser à semi-conducteur. Elle est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente (C) (figure 3).

On utilise un photodétecteur, placé au foyer image F de la lentille (L), pour enregistrer l'éclairement $\mathcal{E}(F)$ en ce point. Soit \mathcal{E}_0 l'éclairement incident au point I sur la séparatrice G ; celle-ci sépare le faisceau incident en un faisceau réfléchi et un faisceau transmis de même intensité $\mathcal{E}_0/2$.

1.a. Calculer le déphasage ϕ des deux ondes interférant en F, puis l'éclairement $\mathcal{E}(F)$ en fonction de \mathcal{E}_0 , d et λ_0 .

b. Le détecteur permet la mesure relative de l'éclairement, en fournissant le rapport $\mathcal{E}_r = \frac{\mathcal{E}(F)}{\mathcal{E}_0}$. Exprimer la distance d en fonction de \mathcal{E}_r et de λ_0 . Peut-on déduire sans ambiguïté de cette mesure la distance d ?

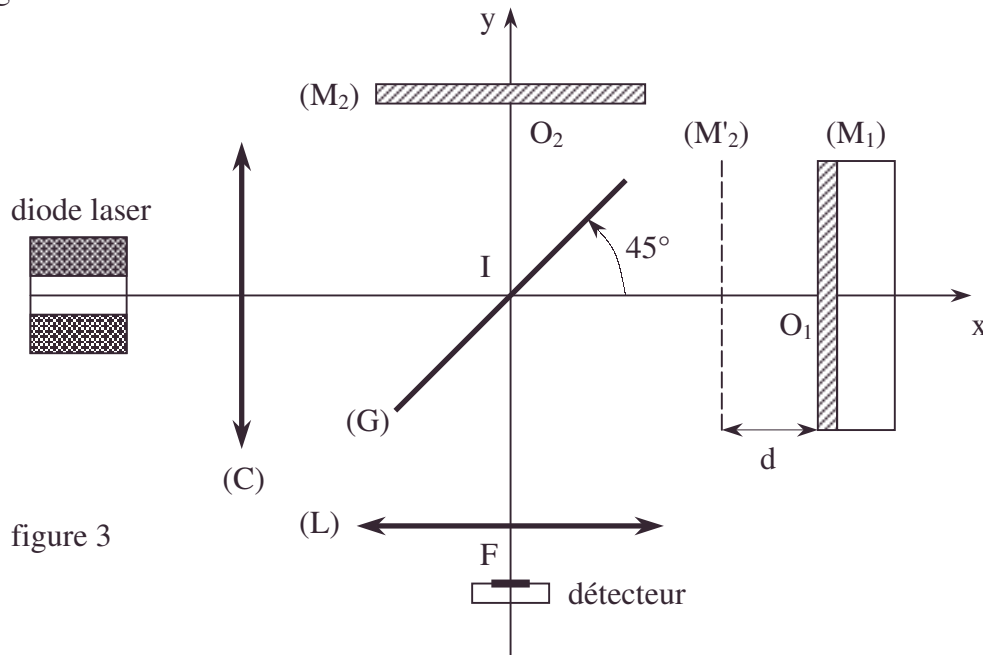


figure 3

2. Dans la gamme de distances allant approximativement du centimètre au mètre, la mesure de d peut être réalisée par changement de longueur d'onde.

• défilement d'un certain nombre de franges, déphasage des deux ondes interférant, détecteur permettant la mesure relative de l'éclairement [cf contraste], différence de marche [ou de chemin optique], diode laser à semi-conducteur, lampe spectrale [faible variation de la longueur d'onde d'émission], photodétecteur

a. La longueur d'onde de la lumière émise par la diode laser subit une faible variation $\Delta\lambda$ et émet de ce fait une radiation de longueur d'onde $\lambda_0 + \Delta\lambda$, avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Déterminer la variation $\Delta\phi$ de ϕ qui en résulte. Montrer que $|\Delta\phi|$ peut se mettre sous la forme $|\Delta\phi| = 2\pi\delta/\Lambda$ où δ est la différence de chemin optique en F. Donner l'expression de Λ et indiquer sa dimension.

b. Montrer que la variation $\Delta\lambda$ de λ_0 provoque le "défilement" au point F d'un certain nombre N de franges. Calculer N en fonction de la distance d et de Λ .

c. Application numérique

$\lambda_0 = 775 \text{ nm}$. La vitesse de la lumière sera prise égale à $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

1. La fréquence de l'émission diminue de 100 GHz. Calculer le décalage de longueur d'onde $\Delta\lambda$ puis Λ .

2. L'éclairement en F étant maximum pour λ_0 , on applique un décalage progressif de 0,2 nm. On compte 322 franges brillantes qui défilent, après quoi l'éclairement en F reste nul. Calculer la distance d limite.

III. Source et détecteur utilisés dans le montage interférométrique

On utilise comme source une diode laser de longueur d'onde variable avec le courant d'injection. Quand la diode est parcourue par un courant constant I_0 , elle émet une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 . En superposant à I_0 un courant $i_{DL}(t)$, petit devant I_0 , on provoque une variation $\Delta\lambda(t)$ de la longueur d'onde, proportionnelle à i_{DL} , sans variation notable de la puissance optique émise. On posera $\Delta\lambda = \alpha i_{DL}$, où α est une constante positive.

D'autre part, le détecteur convertit le signal optique reçu en sortie de l'interféromètre, en un signal électrique pouvant subir divers traitements analogiques et numériques.

A. Circuit de modulation de la diode laser

Dans les conditions d'utilisation, le schéma électrique équivalent du laser, donné sur la figure 4, est constitué d'une résistance R_5 en série avec une diode à jonction DL alimentée par une source de courant continu non représentée sur cette figure.

1. Le circuit de modulation qui délivre le courant $i_{DL}(t)$ provoquant le décalage de longueur d'onde est schématisé sur la figure 4. A est un amplificateur opérationnel idéal (AO) fonctionnant en régime linéaire.

On rappelle qu'un amplificateur opérationnel idéal a une tension différentielle d'entrée $(v^+ - v^-)$, nulle en régime linéaire et une impédance d'entrée infinie.

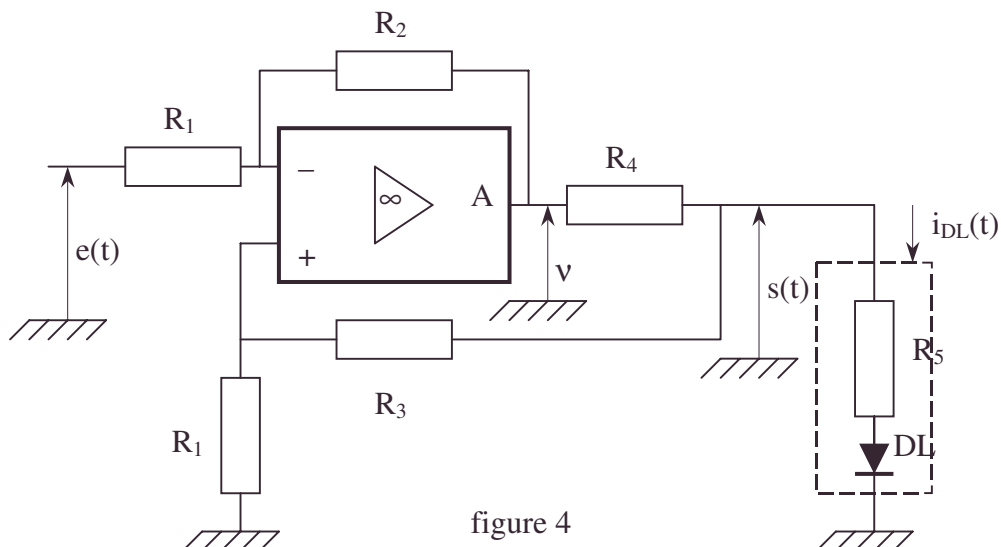


figure 4

- variation de la longueur d'onde émise par la diode laser proportionnelle à la variation d'intensité

a. Calculer la tension v à la sortie de A , en fonction des tensions d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ du montage et des résistances R_1 , R_2 et R_3 .

b. Calculer le courant $i_{DL}(t)$ traversant la diode laser en fonction de $e(t)$, $s(t)$ et des résistances du montage. Montrer que pour $R_2 = R_3 + R_4$ le courant $i_{DL}(t)$ ne dépend pas du circuit d'utilisation (diode laser). En déduire, dans ce cas, la fonction du montage.

2. La tension $e(t)$ appliquée au circuit d'alimentation de la diode est obtenue en sortie du circuit de la figure 5 (page suivante), comportant un AO fonctionnant en régime linéaire et deux interrupteurs à deux positions, K_1 et K_2 . La tension E appliquée à la borne (2) de K_1 est continue. Initialement les interrupteurs sont en position (1).

A l'instant $t = 0$, K_1 et K_2 basculent simultanément en position (2), jusqu'à l'instant $t = \tau$ où K_1 puis K_2 reviennent en (1).

a. Déterminer, dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$, la forme de la tension $e(t)$ délivrée par ce circuit. tracer le graphe $e(t)$. Quel rôle joue ce circuit ?

b. Déterminer pour $t > \tau$, la tension $e(t)$ et le courant $i''(t)$ qui traverse la résistance R'' . Préciser l'utilité de la branche R'', K_2 .

c. Déterminer dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$, le courant $i_{DL}(t)$ traversant la diode laser en fonction de E , C et des résistances R_1 , R_3 , R_4 et R' .

d. τ est suffisamment petit pour que i_{DL} reste inférieure à une valeur limite i_{\max} ($i_{\max} = 10 \text{ mA}$). Dans ces conditions, la variation de la puissance optique émise est faible et l'accroissement de longueur d'onde est proportionnel à i_{DL} : $\Delta\lambda = \alpha i_{DL}$. Montrer que dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$, la variation de la longueur d'onde est fonction linéaire du temps, avec : $\Delta\lambda = \beta t$. Calculer β en fonction de α et des composants des circuits étudiés.

e. Application numérique

1. Dans le circuit de la figure 5, $R' = 1 \text{ M}\Omega$, $C = 50 \text{ }\mu\text{F}$ et $E = 15 \text{ V}$.

On fixe la valeur maximum de $|e(t)|$ à $0,1 \text{ V}$; calculer τ .

2. $\alpha = 2 \text{ nm.A}^{-1}$; $R_1 = 1000 \text{ }\Omega$; $R_3 = 5.10^5 \text{ }\Omega$; $R_4 = 560 \text{ }\Omega$; calculer β .

Dans la suite, on considérera β comme une donnée du problème.

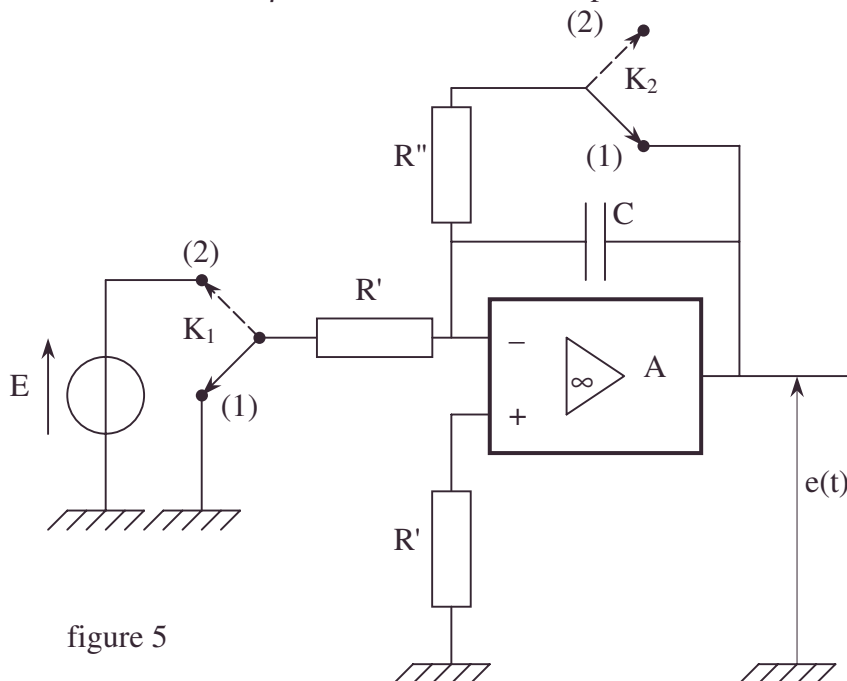


figure 5

B. Circuit de détection

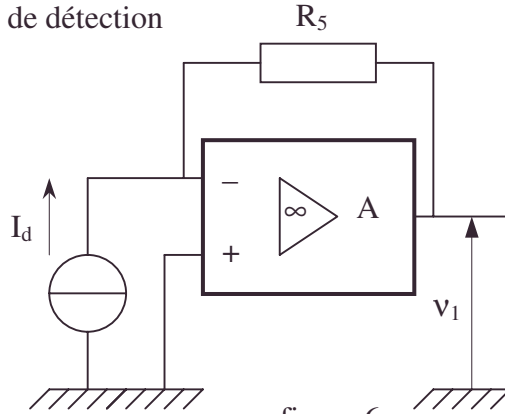


figure 6

Le détecteur est une photodiode de surface utile suffisamment petite ($= 0,1 \text{ mm}^2$) pour qu'on puisse considérer qu'elle est uniformément éclairée et qu'elle détecte l'éclairement au point F du montage interférométrique (figure 3).

1. La photodiode est polarisée en inverse par une différence de potentiel V appliquée par un circuit qui ne sera pas étudié ici.

Soumise à une puissance optique (flux lumineux) P_0 , elle est parcourue par un courant total donné par la relation :

$$I_d = I_{\text{photo}} + I_{\text{obs}} \left[\exp\left(\frac{V}{V_0}\right) - 1 \right], \text{ où } I_{\text{phot}} \text{ est proportionnel à la puissance optique reçue,}$$

$$I_{\text{phot}} = -\mathfrak{R} P_0.$$

On donne $\mathfrak{R} = 0,625 \text{ A.W}^{-1}$ dans les conditions de la mesure ; $I_{\text{obs}} = 10^{-10} \text{ A}$.

V_0 dépend de la température : on prendra $V_0 = 10 \text{ mV}$.

a. Tracer, pour V variant entre -2 volts et $+0,15 \text{ volts}$, les caractéristiques $I_d(V)$ du détecteur pour trois valeurs de la puissance optique reçue :

$$P_0 = 0 \text{ W} ; P_0 = 10^{-3} \text{ W} ; P_0 = 3.10^{-3} \text{ W}.$$

b. Montrer, à partir de ces courbes, que la photodiode se comporte comme une source de courant en parallèle sur une conductance négligeable et que le courant délivré, I_d est proportionnel à la puissance optique reçue.

2. Le détecteur délivre un courant basse fréquence (quelques centaines de hertz) auquel est superposé un bruit haute fréquence ($> 100 \text{ kHz}$). Ce courant est injecté sur l'entrée inverseuse d'un AO suivant le schéma de la figure 6.

Exprimer, en fonction des valeurs des composants et de \mathfrak{R} , le rapport v_1 / P_0 de la tension de sortie du montage de la figure 6, à la puissance optique incidente au point F.

Application numérique : $R_5 = 1 \text{ M}\Omega$; l'aire de la surface du détecteur étant égale à $0,1 \text{ mm}^2$, donner la relation entre v_1 et l'éclairement en F.

3. On place après le montage précédent une cellule de filtrage, représentée sur la figure 7.

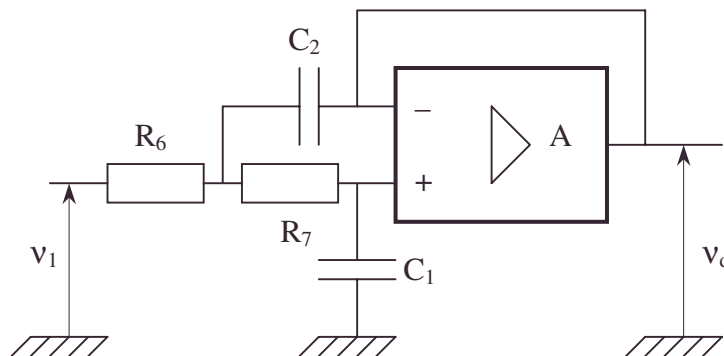


figure 7

- a. Déterminer la fonction de transfert harmonique de ce circuit.
- b. On donne $R_6 = 2260 \, \Omega$; $R_7 = 16,5 \, \Omega$; $C_1 = 100 \, \text{pF}$; $C_2 = 470 \, \text{pF}$. Etudier les variations avec la fréquence du module de la fonction de transfert. Tracer dans le plan de Bode la courbe de réponse en amplitude, en précisant les asymptotes et les points particuliers.
- c. Préciser la nature de ce filtre et son rôle dans le circuit de détection.
- d. Donner la relation entre la tension v_d de sortie de ce circuit et l'éclairement $\mathcal{E}(F)$ de la surface du détecteur, en précisant la condition de validité de cette relation.

IV. Mesure de distances par transformation de Fourier

On reprend dans cette partie le montage interférométrique de la partie II., suivant le schéma de principe de la figure 8. La diode laser émettant une radiation de longueur d'onde λ_0 , on provoque une variation i_{DL} du courant qui la traverse. La modulation est appliquée à l'aide du circuit étudié à la question III.A.2., pendant l'intervalle de temps τ , suffisamment petit pour que i_{DL} reste faible.

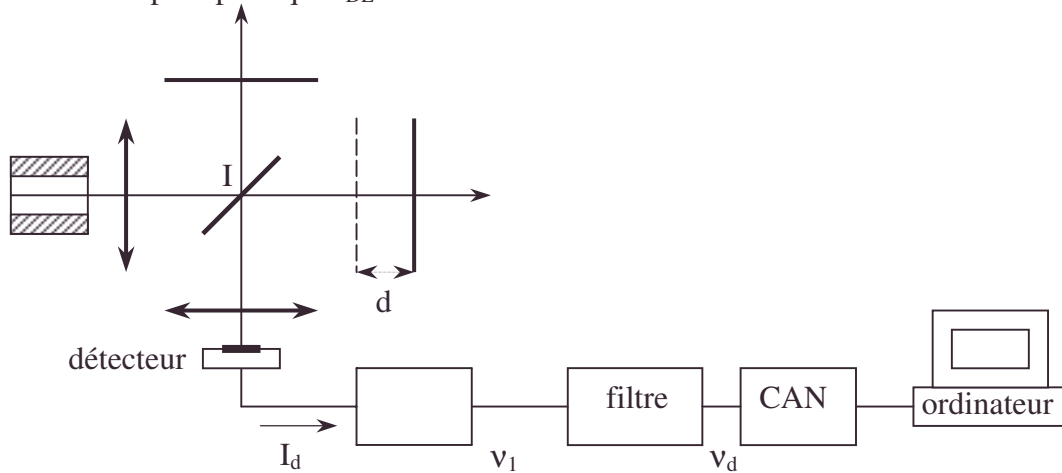


figure 8

Dans ces conditions, la longueur d'onde de la radiation émise par le laser varie entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$ suivant une loi de la forme : $\lambda(t) = \lambda_0 + \beta t$ où β est la constante déterminée à la question III.A.2.d.

1.a. Déterminer la loi de variation $\phi(t)$ du déphasage entre les deux ondes qui interfèrent en F ; on posera $\phi(0) = \phi_0$.

b. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $\mathcal{E}(t)$ recueillie au point F. Tracer le graphe de $\mathcal{E}(t)$.

2. Le photodétecteur placé en F et soumis à l'éclairement \mathcal{E} fournit, à l'aide du circuit étudié en III.B., une tension $v_d(t)$ de la forme déterminée en III.B.3.d.

a. Montrer que, pendant la durée τ de variation de longueur d'onde de l'émission, v_d varie suivant la loi : $v_d(t) = a[1 + \cos(2\pi f_s t - \phi_0)]$.

Exprimer f_s en fonction de β , λ_0 et de la différence de marche δ de l'interféromètre. Indiquer la dimension de f_s .

Dans la suite, on admettra que $v_d(t) = 0$ pour $t > \tau$.

b. Représenter les variations de $v_d(t)$.

3. Le signal $v_d(t)$, après conversion analogique - numérique, est traité par ordinateur :

Interféromètres

on lui applique une transformation de Fourier, pour obtenir la fonction $S(f)$ définie par : $S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_d(t) \exp(-j2\pi f t) dt$; dans la suite, $S(f)$ sera appelé spectre de fréquences de $v_d(t)$.

a. Montrer que si la durée τ de variation de longueur d'onde était très grande ($\tau \rightarrow \infty$), le spectre de fréquences $S_\infty(f)$ se composerait de trois fréquences discrètes, 0, $-f_s$ et $+f_s$.

b. La durée τ étant finie, déterminer $S(f)$.

c. A quelle condition sur f_s et τ le spectre en intensité $I(f) = |S(f)|^2$ se réduit-il à la somme de trois termes ? Représenter dans ce cas $I(f)$.

d. Indiquer la méthode de détermination de f_s à partir de l'enregistrement du spectre $I(f)$.

e. Application numérique : $\lambda_0 = 775 \text{ nm}$; $\beta = 0,54 \text{ nm.s}^{-1}$; $f_s = 750 \text{ Hz}$. Calculer d .

CCP ; Durée : 3h**Corrigé**

1.a. Le système est équivalent à celui de 2 sources secondaires S_1 et S_2 , images de S à travers les miroirs M_1 , M_2 et G ; S_1 et S_2 sont indépendants des rayons vu le stigmatisme des miroirs. Voir figure 1.bis (page suivante).

b. Vu la symétrie de révolution autour de FS, S_2 , on obtient des anneaux d'égale inclinaison localisés à l'infini, la lentille en donne une image dans le plan focal image, centré en F vu la symétrie.

$$\text{c. } IO_1 - IO_2 = d ; S_1 S_2 = IS_1 - IS_2 ; IS_1 = IO_1 + O_1 S ;$$

$$IS_2 = IO_2 + O_2 S_2 = IO_2 + O_1 S - d ;$$

$$S_1 S_2 = 2d \Rightarrow S_1 H = \delta = 2d \cos i .$$

D'après le théorème de Malus, la conjugaison ne modifie pas cette différence de marche ; si i est faible, $\delta = 2d \left(1 - \frac{i^2}{2} \right)$.

$$\text{d.}\alpha. p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2d}{\lambda_0} - \frac{di^2}{\lambda_0} ; p \text{ décroît avec } i \text{ à partir de } p_0 .$$

$$\beta. \text{ Au centre } F, i = 0 : p_0 = \frac{2d}{\lambda_0} \Rightarrow i = \sqrt{\frac{\lambda_0}{d} (p_0 - p)} .$$

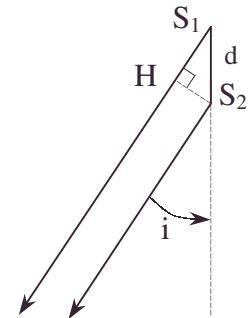
$$\gamma. FP = f \tan i = f i = f \sqrt{\frac{\lambda_0}{d} (p_0 - p)} .$$

Le 1^{er} anneau brillant a $p_1 = k_1 \quad k_1 \in \mathbb{N}$, et pour rayon $r_1 = f \sqrt{\frac{\lambda_0}{d} \epsilon}$.

Le n^{ième} anneau brillant a $p_n = k_1 - n + 1$ (on vérifie sur $n = 1$ et $n = 2$) et pour rayon :

$$r_n = f \sqrt{\frac{\lambda_0}{d} (\epsilon + n - 1)} .$$

e. $\delta = 0 \quad \forall i$, on a une teinte uniforme dite "plate".

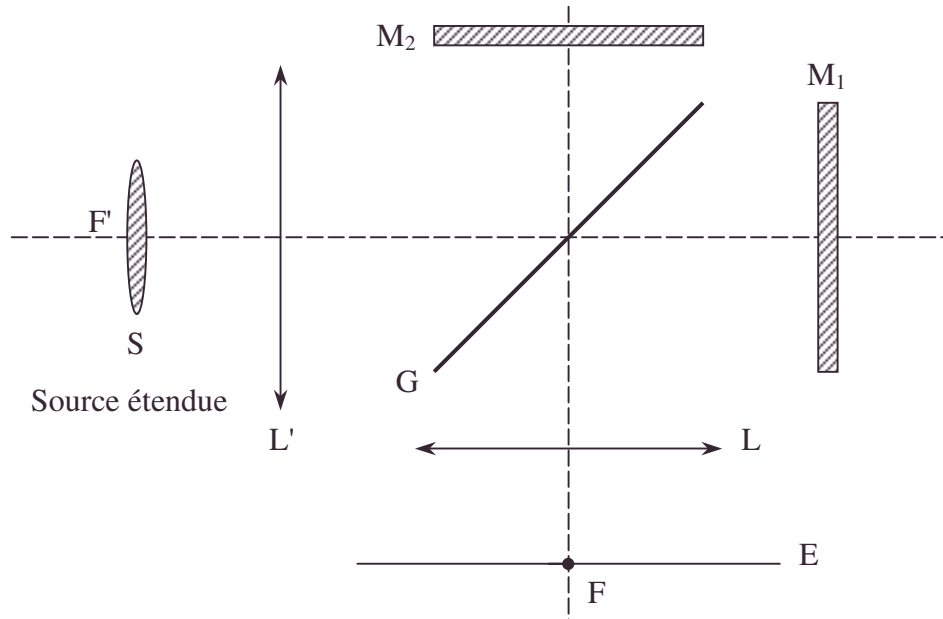


2.a. Les deux rayons qui interfèrent en P semblent venir de S_1 et S_2 , voir figure 2 bis (page suivante). Quand le rayon incident est SI, son réfléchi sur M_2 est O_2S_2 . Quand M_2 tourne de θ , le rayon O_2S_2 tourne de 2θ (cf. Poggendorf).

Cette expérience analogue à celle des trous d'Young donne des franges d'interférences (délocalisées) assimilables à des droites orthogonales au plan de la figure, équidistantes sur l'écran d'interfrange $\frac{\lambda_0 D}{S_1 S_2}$, D étant la distance de l'écran à $S_1 S_2$.

b. Quand on augmente θ , on augmente $S_1 S_2$, on diminue l'interfrange. Si $\theta = 0$, $S_1 \equiv S_2$; $\delta = 0$, l'interfrange est infinie, la teinte est uniforme.

3.a.



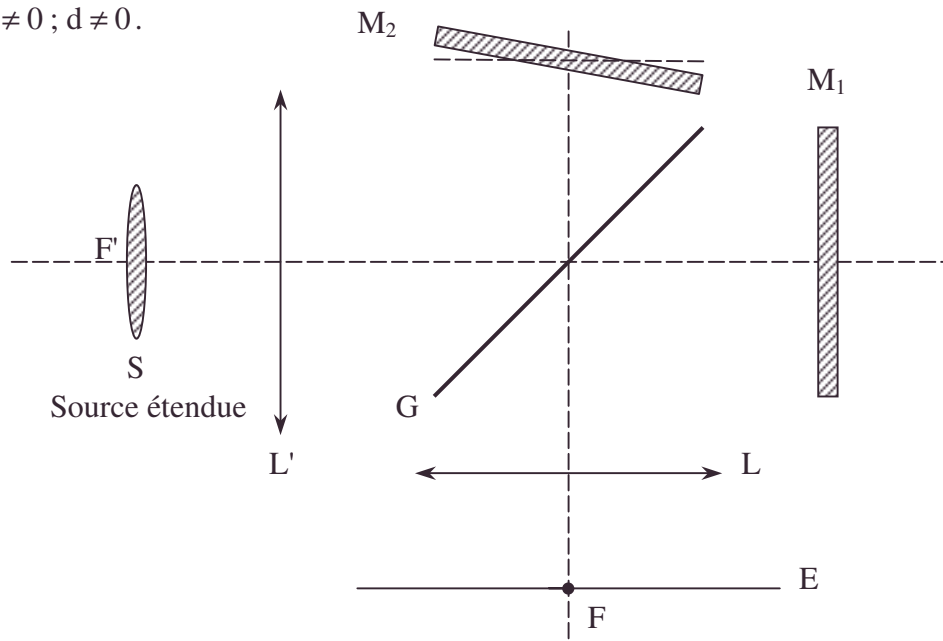
$\theta = 0; d \neq 0$.

On observe des anneaux d'égale inclinaison dans le plan focal de L.

Ils sont issus de la superposition des anneaux que chaque point de la source engendre.

L'intensité est plus grande habituellement avec une source étendue.

b. $\theta \neq 0; d \neq 0$.



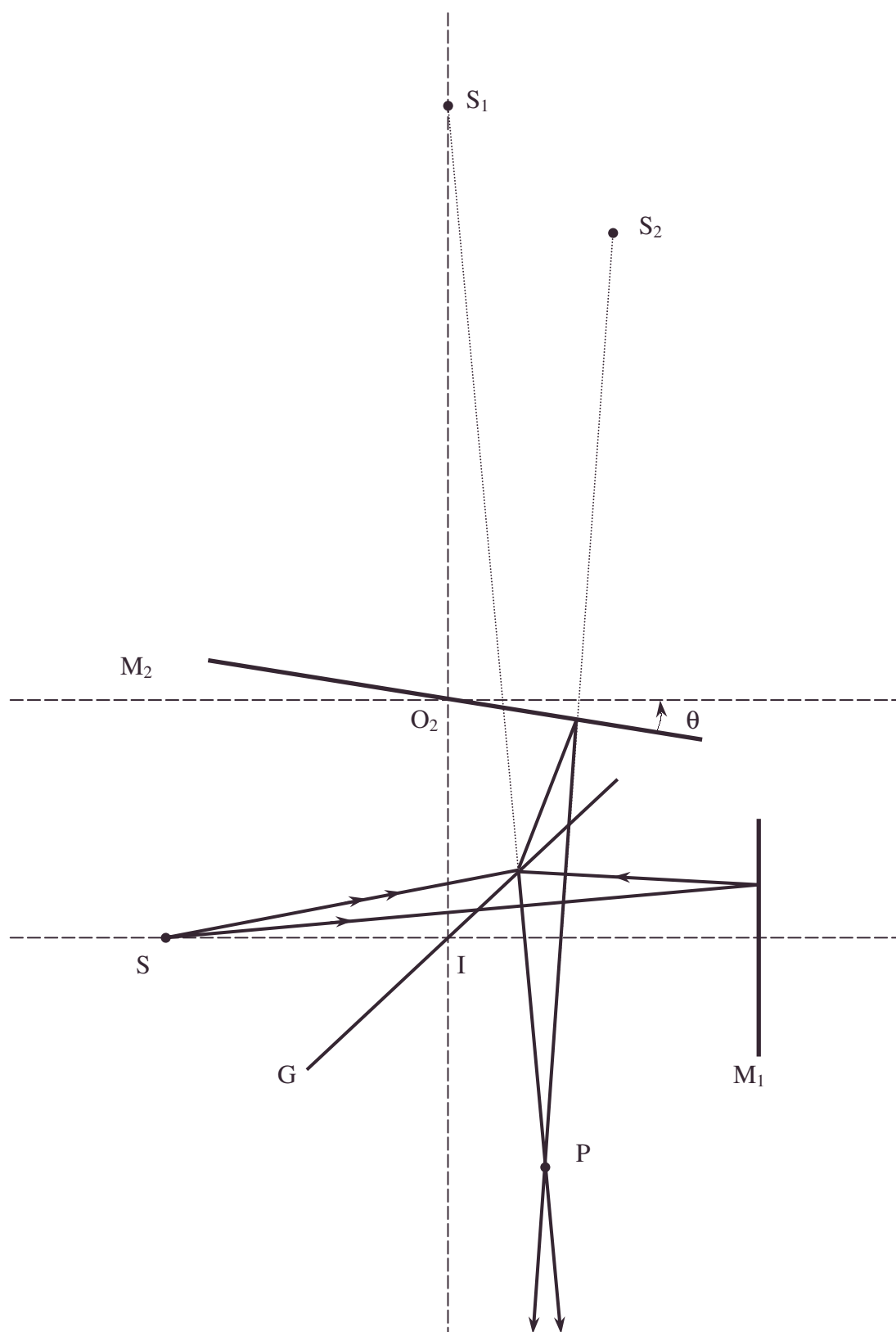


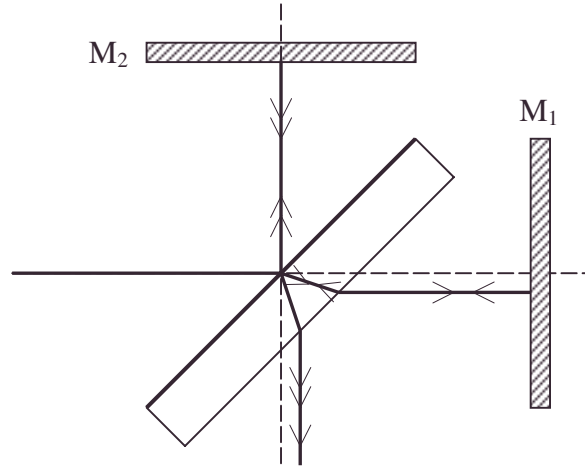
figure 2bis

Interféromètres

On observe des franges rectilignes d'égale épaisseur sur E quand E est conjugué de M_2 sensiblement.

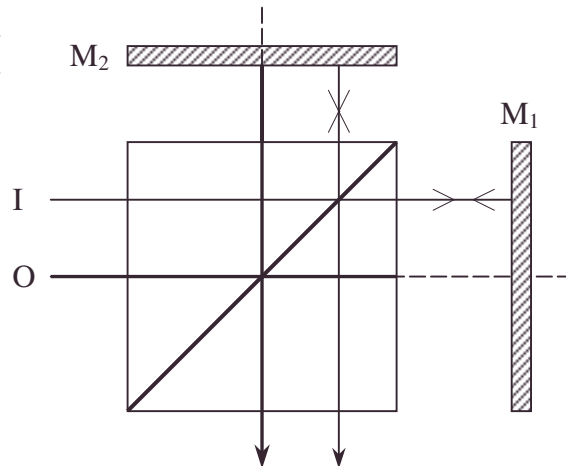
On rappelle que la conjugaison par une lentille n'introduit pas de différence de marche entre les différents rayons issus d'un même point d'où la superposition sans brouillage des franges d'égales épaisseurs \forall la source ponctuelle $S_i \in S$.

4.a. Le rayon se réfléchissant sur M_1 traverse trois épaisseurs de verre, celui se réfléchissant sur M_2 n'en traverse qu'une seule ; δ est modifiée par ce système par rapport au cas **1.c**.



b. On vérifie l'égalité des parcours pour deux rayons dans un cas particulier simple.

$\theta = 0$, $i = 0$, $d = 0$ la surface hypoténuse commune étant métallisée.



$$\text{II.1.a.}\alpha. \quad \phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{4\pi d}{\lambda_0}; i = 0 \text{ en F.}$$

\beta. La séparatrice divise l'éclairement par 2 et donc l'amplitude par $\sqrt{2}$ à la réflexion et à la transmission ; si l'amplitude incidente en I est a_0 , elle devient

$$\frac{a_0}{(\sqrt{2})^2} = \frac{a_0}{2} \quad \text{en arrivant sur L après réflexion sur } M_1 \text{ ou } M_2 ;$$

$$a(F) = a_1 + a_2 = \frac{a_0}{2} (1 + e^{-j\phi}).$$

$$\mathcal{E}(F) = a(F) a^*(F) = \frac{a_0 a_0^*}{4} (1 + e^{-j\phi})(1 + e^{+j\phi}) = \frac{2a_0 a_0^*}{4} (1 + \cos \phi).$$

$$\mathcal{E}(F) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (1 + \cos \phi) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \frac{\cos 4\pi d}{\lambda_0} \right).$$

$$\text{b. } \mathcal{E}_r(F) = \frac{1 + \cos \frac{4\pi d}{\lambda_0}}{2} \Rightarrow 2\mathcal{E}_r(F) - 1 = \cos \frac{4\pi d}{\lambda_0}.$$

$$d = \pm \frac{\lambda_0}{4\pi} \arccos(2\mathcal{E}_r(F) - 1) + i \frac{\lambda_0}{2}, i \in \mathbb{Z}.$$

C'est ce $\cos \phi$ qui est mesuré ; il y a une incertitude de signe sur ϕ et donc sur d ; l'argument est déterminé modulo 2π , $\Rightarrow d$ est déterminé à $i \frac{\lambda_0}{2}$ près (sans compter l'ambiguïté de signe).

$$\text{2.a. } \phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \Rightarrow d\phi = -\frac{2\pi\delta d\lambda}{\lambda_0^2} \Rightarrow |\Delta\phi| = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0^2} |\Delta\lambda| \Rightarrow \Lambda = \frac{\lambda_0^2}{|\Delta\lambda|}. \wedge \text{ est en m.}$$

b. Si en F on a une frange brillante, en F passe une frange quand $|\Delta\phi| = 2\pi$; Il défile N franges en F quand $|\Delta\phi| = 2\pi N \Rightarrow N = \frac{|\Delta\phi|}{2\pi} = \frac{\delta}{\Lambda} = \frac{2d}{\Lambda} = \frac{2d}{\lambda_0^2} |\Delta\lambda|$.

c.1.a. Δ aura ici le sens de variation algébrique ; $\lambda = \frac{c}{v}$; $d\lambda = \Delta\lambda = -c \frac{dv}{v^2} = -c \frac{\Delta v}{v^2}$;

$$\Delta\lambda = -\lambda_0^2 \frac{\Delta v}{c} \text{ A.N. : } \Delta\lambda = 20 \text{ nm.}$$

$$\text{b. } \Lambda = \frac{c}{|\Delta v|} ; \text{ A.N. : } \Lambda = 3.10^{-3} \text{ m.}$$

$$\text{2. Vu 2.b. } d = \frac{N\lambda_0^2}{2|\Delta\lambda|} ; \text{ A.N. : } d = 0,4835 \text{ m.}$$

Cette distance importante permet de comprendre que l'éclairement reste nul ultérieurement : si on augmente $\Delta\lambda$ donc N, $2d$ dépasse la longueur utile du train d'onde émis qui permet l'observation des interférences .

III. Source et détecteur

A.1.a. Appliquons le théorème de Millman .

$$V^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v}{R_2} + \frac{e}{R_1} ; \text{ or } V^+ = \frac{R_1 s}{R_1 + R_3} \text{ et } V^+ = V^- ; \text{ d'où } v = \frac{R_2 + R_1}{R_3 + R_1} s - \frac{R_2}{R_1} e.$$

b. Soit i_4 le courant parcourant R_4 , i' le courant parcourant R_3 .

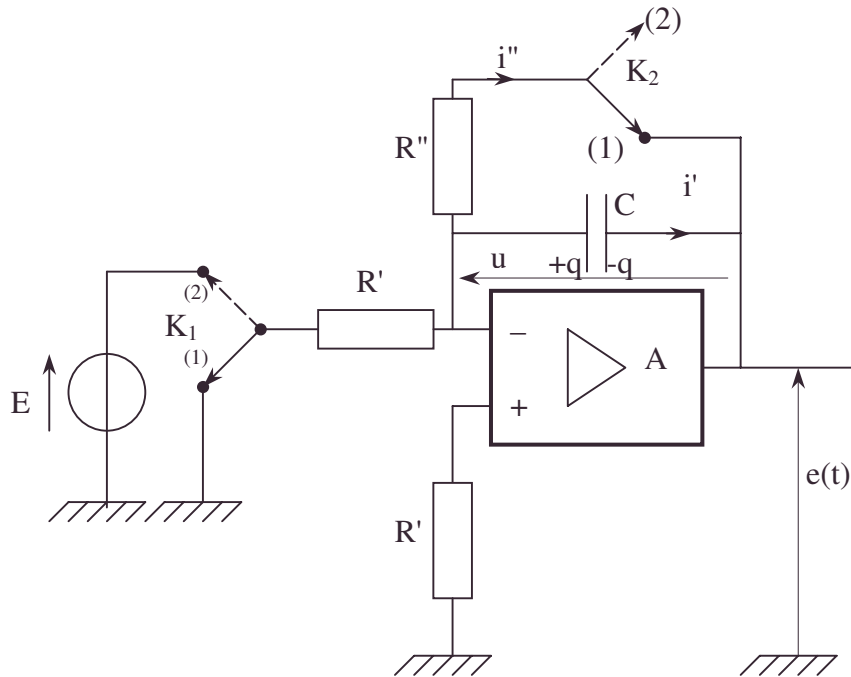
$$\text{On a } i_{DL} = i_4 + i' ; \text{ or } i_4 = \frac{v-s}{R_4} \text{ et } i' = \frac{-s}{R_1 + R_3} ;$$

$$\text{d'où } i_{DL} = -\frac{R_2}{R_1 R_4} e + \frac{R_2 - (R_3 + R_4)}{R_4 (R_3 + R_1)} s.$$

Si on a $R_2 = R_3 + R_4$ alors $i_{DL} = -\frac{(R_3 + R_4)}{R_1 R_4} e$, donc i_{DL} ne dépend pas du circuit d'utilisation.

Le montage est donc une source de courant commandée par une tension d'entrée.

2.a.



Soit $u = \frac{q}{C}$, puisque $V^- = V^+ : e + u = 0 \Rightarrow \frac{de}{dt} + \frac{dq}{Cdt} = 0$;

or $\frac{dq}{dt} = i' = i = \frac{E}{R'}$, pour $0 < t < \tau$; $\frac{de}{dt} = -\frac{E}{CR'}$ $\Rightarrow e = -\int_0^t \frac{Edt}{CR'}$.

$e = -\frac{Et}{CR'}$ mais à $t = 0$, C est naturellement déchargée $q(0) = Cu_0 = 0 = -Ce_0$ vu

$$V^- = V^+ \Rightarrow e = -\frac{Et}{CR'}.$$

On obtient une droite.

Ce circuit est un circuit intégrateur (cf. figure ci-contre).

b. Pour $t > \tau$ le condensateur se décharge dans la résistance R'' donc le courant dans R'' vérifie $i'' = -\frac{e}{R''}$.

$$i'' = -\frac{dq}{dt} = -\frac{Cdu}{dt} = C\frac{de}{dt} = -\frac{e}{R''} ;$$

on résout cette équation, d'où : $e = Ae^{\frac{-(t-\tau)}{R''C}}$; or, à $t = \tau$, on a $e = -\frac{E}{R'C}\tau$;

$$\Rightarrow e(t) = -\frac{E\tau}{R'C}e^{\frac{-(t-\tau)}{R''C}} ; i'' = -\frac{E\tau}{R'R''C}e^{\frac{-(t-\tau)}{R''C}}.$$

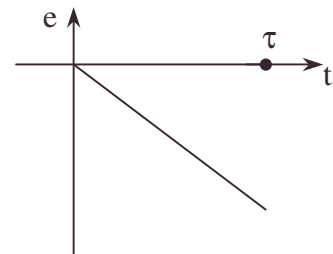
R'' et K_2 permettent le retour à zéro de e .

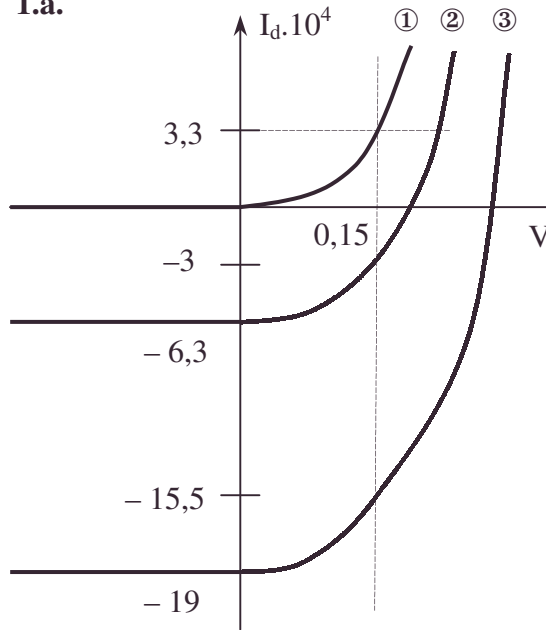
c. On a vu que $i_{DL} = -\frac{R_3 + R_4}{R_1 R_4} e \Rightarrow i_{DL} = \frac{(R_3 + R_4)}{R_1 R_4} \frac{E}{R'C} t$ pour $0 < t < \tau$.

d. On a $\Delta\lambda = \alpha i_{DL} = \beta t = \alpha \frac{(R_3 + R_4)}{R_1 R_4 R'} \frac{E}{C} t \Rightarrow \beta = \frac{\alpha(R_3 + R_4)E}{R_1 R_4 R'C}$ pour $0 < t < \tau$.

e.1. On veut que $|e(t)| \leq 0,1V$; $\tau = \frac{|E_{\max}|}{E} R'C$: A.N. : $\tau = 333,4$ ms.

2. A.N. : $\beta = 5,36.10^{-10} \text{ m.s}^{-1}$.



B. Circuit de détection**1.a.**

$$P_0 = 0 \text{ W} ; I_{\text{phot}} = 0$$

$$\textcircled{1} \quad I_d = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ A pour } V = 0,15 \text{ V}$$

$$P_0 = 10^{-3} \text{ W} ; I_{\text{phot}} = -6,25 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

$$\textcircled{2} \quad I_d = -2,98 \cdot 10^{-4} \text{ A pour } V = 0,15 \text{ V}$$

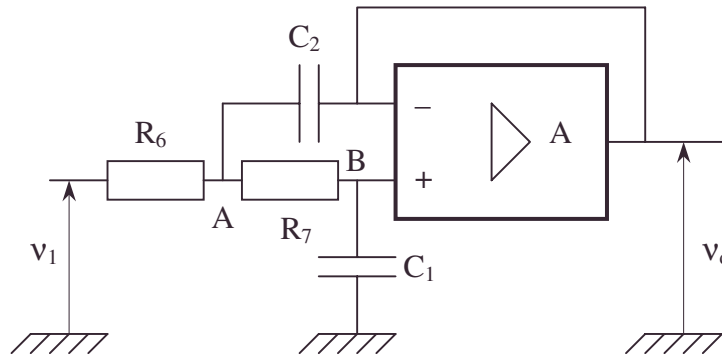
$$P_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ W} ; I_{\text{phot}} = -18,75 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

$$\textcircled{3} \quad I_d = -15,5 \cdot 10^{-4} \text{ A pour } V = 0,15 \text{ V}$$

b. D'après les courbes on voit bien que la photodiode polarisée en inverse se comporte comme une source de courant quasi parfaite donc en parallèle sur une conductance négligeable. On a $I_d = I_{\text{phot}} = -\mathfrak{R}P_0$.

$$\text{2.a. On a } v_1 = -R_5 I_d \Rightarrow v_1 = R_5 \mathfrak{R} P_0 \Rightarrow \frac{v_1}{P_0} = R_5 \mathfrak{R}.$$

$$\text{b. } P_0 = S \mathcal{E}(F) \Rightarrow v_1 = S \mathfrak{R} R_5 \mathcal{E}(F) ; \text{A.N.: } v_1 = 6,25 \cdot 10^{-2} \mathcal{E}(F).$$

3.a.

Appliquons le théorème de Millman en A :

$$V_A \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + jC_2 \omega \right) = \frac{v_d}{R_7} + \frac{v_{n1}}{R_6} + v_d jC_2 \omega,$$

$$\text{puis en B : } v_d \left(\frac{1}{R_7} + jC_1 \omega \right) = \frac{V_A}{R_7} \Rightarrow V_A = v_d (1 + R_7 jC_1 \omega).$$

$$v_d (1 + R_7 jC_1 \omega) \left(\frac{R_6 + R_7 + R_6 R_7 jC_2 \omega}{R_6 R_7} \right) - \frac{v_d}{R_7} (1 + R_7 jC_2 \omega) = \frac{v_1}{R_6}.$$

$$\frac{v_d}{R_7} (R_6 + R_7 - R_6 + R_6 R_7 jC_2 \omega + (R_6 + R_7) R_7 jC_1 \omega - R_7^2 \omega^2 R_6 C_1 C_2 - R_6 R_7 jC_2 \omega) = v_1$$

$$v_d[1 - R_7 R_6 C_1 C_2 \omega^2 + j\omega C_1 (R_6 + R_7)] = v_1.$$

$$\frac{v_d}{v_1} = \frac{1}{1 - R_7 R_6 C_1 C_2 \omega^2 + j\omega C_1 (R_6 + R_7)}.$$

b. On obtient :

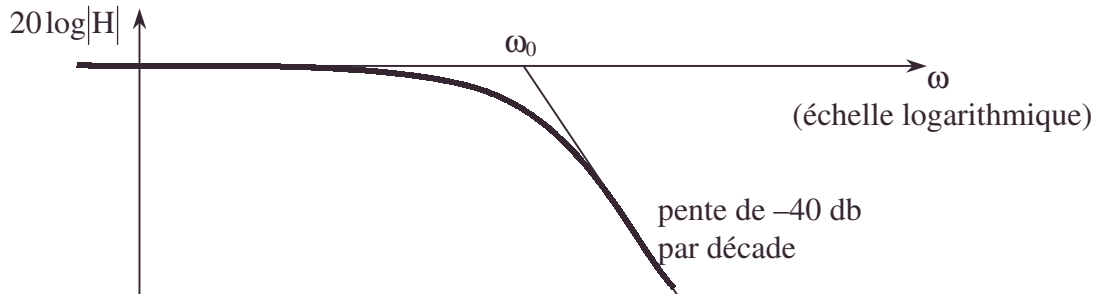
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left[(1 - R_7 R_6 C_1 C_2 \omega^2)^2 + C_1^2 \omega^2 (R_6 + R_7)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

$\omega \rightarrow 0$: asymptote en échelle logarithmique ; $20 \log |H| = 0$.

$\omega \rightarrow \infty$: $|H(\omega)| \sim \frac{1}{C_2 C_1 \omega^2 R_6 R_7} \Rightarrow$ on a une asymptote :

$$20 \log |H(\omega)| = -40 \log \frac{\omega}{\omega_0} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_6 R_7}};$$

A.N. : $\omega_0 = 23886630 \text{ rad.s}^{-1}$; $\log \omega_0 = 7,38$.



c. On obtient un filtre passe-bas qui sert à filtrer le signal de sortie du détecteur ; il enlève tous les signaux des très hautes fréquences liés aux phénomènes lumineux exception faite de la valeur moyenne associée à l'éclairement (moyenne statistique).

$$\mathbf{d.} v_d = v_1 = S \Re R_s \mathcal{E}(F),$$

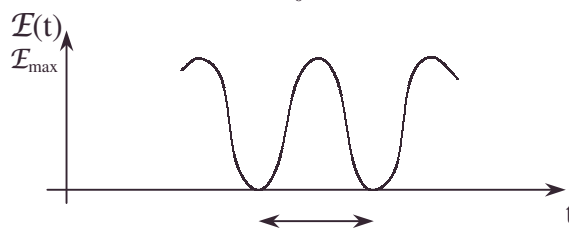
tout-à-fait valable si $\omega < \frac{\omega_0}{10}$, c'est-à-dire $\omega < 2388663 \text{ rad.s}^{-1}$.

IV.1.a. Δ a ici le sens de variation ; $\Delta \lambda = \beta t \Rightarrow \Delta \phi = \phi - \phi(0) = -\frac{2\pi \delta \Delta \lambda}{\lambda_0^2} = -\frac{4\pi d \beta t}{\lambda_0^2}$;

$$\phi = \phi_0 - \frac{4\pi d}{\lambda_0^2} \beta t.$$

$$\mathbf{b.} \mathcal{E}(t) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(1 + \cos \left(\phi_0 - \frac{4\pi d \beta t}{\lambda_0^2} \right) \right) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} [1 + \cos(2\pi f_s t - \phi_0)].$$

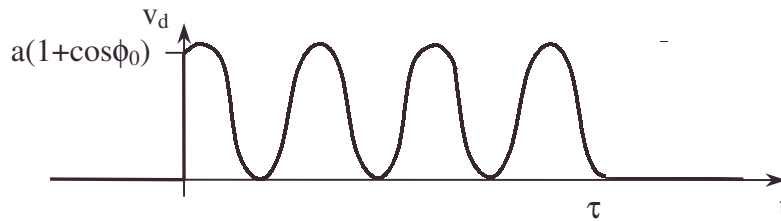
La période $T = \frac{\lambda_0^2}{2\beta d}$ et la fréquence $f_s = \frac{1}{T} = \frac{2\beta d}{\lambda_0^2}$.



2.a. La relation de proportionnalité implique l'égalité des fréquences $f_s = \frac{2\beta d}{\lambda_0^2} = \frac{\beta \delta}{\lambda_0^2}$.

f_s est donc en Hz. On a par identification de l'amplitude $a = S\Re R_s \frac{E_{\max}}{2}$.

b. On a limitation de la courbe à l'intervalle de fonctionnement $[0, \tau]$.



3.a. Les valeurs de fréquence associées à $\cos(2\pi f_s t - \phi_0)$ de durée infinie sont $\pm f_s$.
La valeur de fréquence associée à 1 est 0.

$$\begin{aligned} \text{b. } S(f) &= \int_0^\tau a e^{-j2\pi f t} \left(1 + \frac{e^{+2j\pi f_s t - j\phi_0} + e^{-(2j\pi f_s t - j\phi_0)}}{2} \right) dt \\ \frac{S(f)}{a} &= \frac{[e^{-2\pi f j \tau} - 1]}{-2\pi f j} + \frac{e^{-j\phi_0}}{2} \frac{[e^{-j2\pi(f-f_s)\tau} - 1]}{-j2\pi(f-f_s)} + \frac{e^{+j\phi_0}}{2} \frac{[e^{-j2\pi(f+f_s)\tau} - 1]}{-j2\pi(f+f_s)} \\ \frac{S(f)}{a} &= e^{-\pi f j \tau} \frac{[e^{-\pi f j \tau} - e^{+\pi f j \tau}]}{-2j\pi f \tau} + j \frac{e^{-j\phi_0}}{2} e^{-j\pi(f-f_s)\tau} \frac{[e^{-j\pi(f-f_s)\tau} - e^{+j\pi(f-f_s)\tau}]}{-2j\pi(f-f_s)\tau} \dots \\ &\quad \dots + j \frac{e^{+j\phi_0}}{2} e^{-j\pi(f+f_s)\tau} \frac{[e^{-j\pi(f+f_s)\tau} - e^{+j\pi(f+f_s)\tau}]}{-j2\pi(f+f_s)\tau} \end{aligned}$$

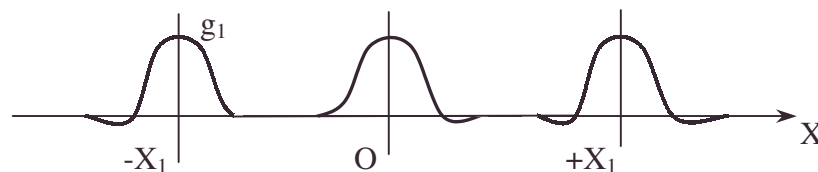
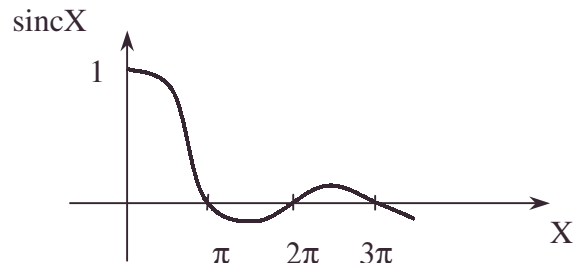
$$S(f) = a e^{-\pi f j \tau} \text{sinc} \pi f \tau + \frac{a \tau e^{-j\phi_0}}{2} e^{-j\pi(f-f_s)\tau} \text{sinc} \pi(f-f_s)\tau + \frac{a \tau e^{+j\phi_0}}{2} e^{-j\pi(f+f_s)\tau} \text{sinc} \pi(f+f_s)\tau.$$

c. Si $S = g_1 + g_2$, $S^* = g_1^* + g_2^*$; $SS^* = g_1 g_1^* + g_2 g_2^* + g_1 g_2^* + g_1^* g_2$.

SS^* se réduira à $|g_1|^2 + |g_2|^2$ si les deux autres produits sont négligeables.
Or les fonctions mises en jeu ici sont modulées par :

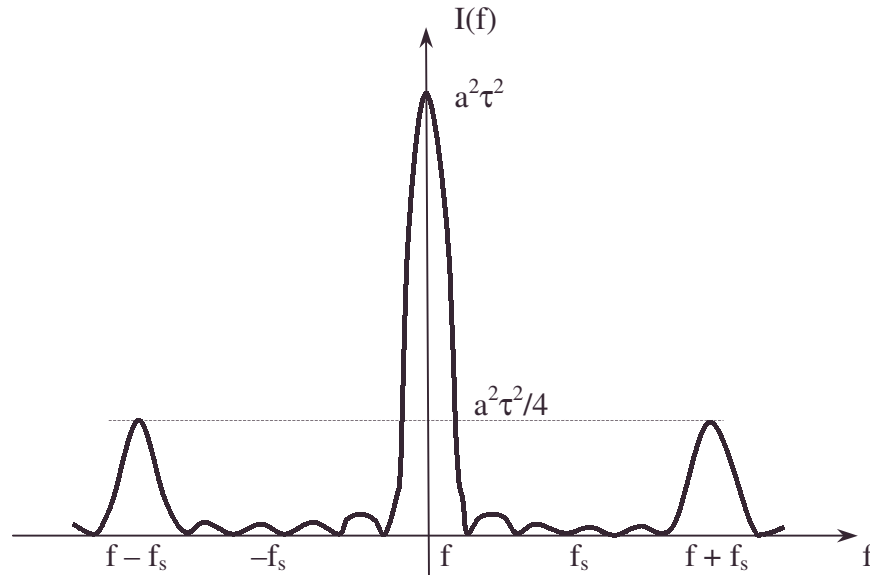
$\text{sinc}(X - X_1)$ avec $X_1 = \pm \pi f_s \tau$.

Les produits des fonctions modulantes seront négligeables si les maxima principaux sont suffisamment éloignés afin que les superpositions soient quasi inexistantes.



Soit si $X_1 > \pi$ au moins soit $f_s \tau > 1$ au moins pour adopter le critère de Rayleigh.
Alors $I(f)$ se réduit aux carrés des modules (cf. Parseval) des fonctions intervenant dans $S(f)$.

$$I(f) = S(f)S^*(f) = a^2 \tau^2 \text{sinc}^2 \pi f \tau + \frac{a^2 \tau^2}{4} \text{sinc}^2 \pi(f-f_s)\tau + \frac{a^2 \tau^2}{4} \text{sinc}^2 \pi(f+f_s)\tau.$$



d. On mesure $2f_s$ l'écart fréquentiel entre les deux pics latéraux

e. $f_s = \frac{2\beta d}{\lambda_0^2} \Rightarrow d = \frac{\lambda_0^2 f_s}{2\beta}$; A.N. : $d = 0,417 \text{ m}$.

On fera le rapprochement avec le résultat obtenu optiquement.

7.5.2.4.4. Détection de radiosource Corrélation

Première partie

On considère un dispositif récepteur pour ondes métriques constitué d'un réflecteur et d'un détecteur placé en son foyer. La réponse du dispositif peut être calculée en considérant une surface plane (voisine de la surface du réflecteur) située dans le plan xOy (figure 1), de longueur λ et de largeur unité. Lorsqu'elle reçoit un rayonnement électromagnétique, elle donne à l'entrée d'un détecteur D une tension électrique v proportionnelle à l'intégrale de la composante E_y du champ électrique reçu à sa surface :

$$v(t) = \alpha_1 \iint_{\text{surface}} E_y(x, y, t) dx dy .$$

Le détecteur D donne une tension électrique de sortie $f(\tau) = \frac{\alpha_2}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} v^2(t) dt$.

On posera : $\alpha^2 = \alpha_1 \alpha_2$.

T est un temps d'intégration très supérieur à la période du rayonnement reçu.

Une radiosource ponctuelle située à l'infini envoie sur l'antenne sous l'incidence θ (orientée positivement vers la droite) une onde plane monochromatique polarisée rectilignement (le champ électrique E étant parallèle à Oy) de pulsation ω , de longueur d'onde λ et de vecteur d'onde \vec{k} : $E = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$.

En prenant comme origine des phases la phase du rayonnement incident en O, calculer :

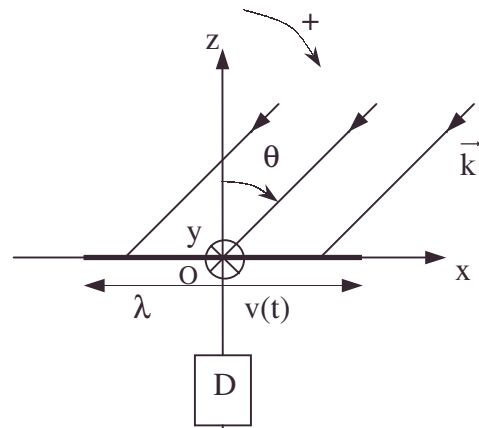


figure 1

- durée des mesures d'un détecteur métrique [durée d'intégration très supérieure à la période du rayonnement reçu], écart fréquentiel entre les deux pics latéraux [analyse de signal], radiosource, récepteur pour ondes métriques [constitué d'un réflecteur et d'un détecteur placé au foyer]

I.a. la tension $v(t)$.

b. la tension $f(\tau)$. Montrer que pour T très supérieur à $\frac{2\pi}{\omega}$, on peut négliger la dépendance de f par rapport à τ et que f se réduit alors à une tension continue que l'on désignera par $s(\theta)$ pour expliciter sa dépendance par rapport à θ .

c. Indiquer l'allure de $s(\theta)$.

On prendra : $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 300 \text{ MHz}$ ($3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$) ; $\lambda = 10 \text{ m}$.

La courbe $s(\theta)$ vous suggère-t-elle une analogie optique ?

Deuxième partie

II.1. On considère un interféromètre simple "à addition" (figure 2) constitué de deux antennes identiques à la précédente et centrées en O_1 et O_2 .

$OO_1 = -\frac{L}{2}$; $OO_2 = \frac{L}{2}$. La distance $O_1O_2 = L$ est très supérieure à λ .

Les signaux $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont additionnés en A après avoir parcouru des longueurs égales de câbles de jonction et envoyés dans le détecteur D décrit précédemment.

a. Calculer la tension de sortie $s_D(\theta)$ ou "réponse de l'interféromètre" observée lorsque l'appareil reçoit une onde plane monochromatique identique à celle indiquée dans la première partie.

On se placera toujours dans l'hypothèse où le temps d'intégration T est très supérieur à la période du rayonnement reçu.

b. Indiquer l'allure de la courbe $s_D(\theta)$ en prenant $L = 1 \text{ km}$, $\lambda = 10 \text{ m}$, $\nu = 300 \text{ MHz}$.

Donner une "analogie optique" du phénomène étudié.

2. On considère maintenant un interféromètre "à corrélation". Les signaux v_1 et v_2 sont envoyés, après avoir parcouru des trajets égaux dans les câbles de jonction, sur les deux entrées d'un corrélateur C (figure 3), qui délivre une tension de sortie $f_c(\tau)$:

$$f_c(\tau) = \frac{\alpha_2}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} v_1(t) \cdot v_2(t) dt.$$

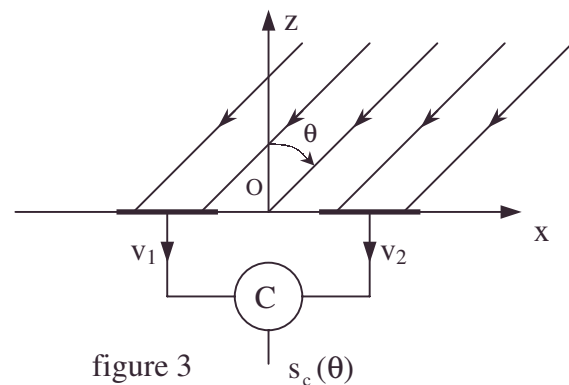
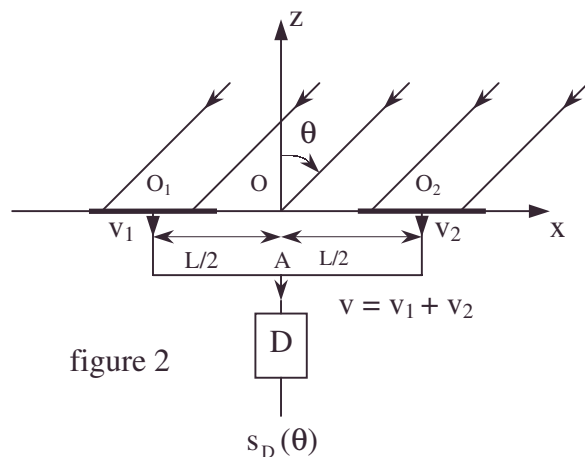
a. Montrer, comme précédemment, que si le temps d'intégration T est bien supérieur à la période du rayonnement reçu, on peut assimiler la réponse de l'interféromètre à une tension indépendante de τ : $s_c(\theta)$ dont on donnera l'expression.

A quel phénomène (gênant) peut correspondre le terme négligé ?

b. Indiquer l'allure de la courbe $s_c(\theta)$.

On prendra les mêmes valeurs numériques de L, λ, ν que dans la question 1.b.

c. Comparer les "réponses" $s_D(\theta)$ et $s_c(\theta)$; comment peut-on interpréter l'écart ?



Troisième partie

On utilise désormais l'interféromètre à corrélation et, dans cette partie, on négligera d'emblée la dépendance en τ de la tension fournie par le corrélateur.

Afin de pouvoir observer une radiosource ponctuelle à l'infini au cours de son passage au-dessus de l'horizon, on fait pivoter les antennes autour d'axes parallèles à Oy, placés respectivement en O_1 et O_2 , de façon que les plans des antennes soient constamment normaux à la direction de la source (figure 4).

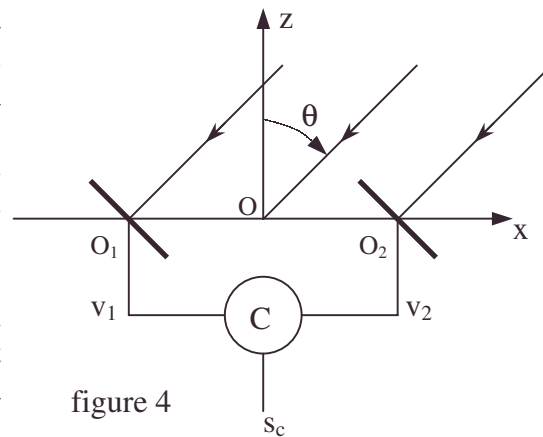


figure 4

1. En quoi la "réponse" $s_c(\theta)$ est-elle modifiée ? Quel est l'avantage de ce dispositif par rapport à celui d'antennes "omnidirectionnelles" obtenues en faisant tendre λ vers zéro ?

Ce système de poursuite est utilisé dans toute la suite du problème.

2. On observe une source ponctuelle au cours de son passage lorsque θ varie de -75° à $+75^\circ$. Calculer l'intervalle angulaire $\Delta\theta$ séparant deux maxima positifs successifs de $s_c(\theta)$ obtenus respectivement pour $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, en fonction de θ_0 , L et λ .

On fera les approximations permises quand $\Delta\theta$ (en radian) est petit devant 1. Tracer la courbe donnant les variations de $\Delta\theta$ en minutes d'arc en fonction de θ_0 (en degrés).

3. On observe maintenant dans les conditions définies au début de **III**, une radiosource monochromatique incohérente de largeur angulaire h , centrée en θ_0 et d'intensité uniforme pour $\theta_0 - \frac{h}{2} < \theta < \theta_0 + \frac{h}{2}$. On admettra sans démonstration que la tension de sortie $S_c(\theta_0)$ du corrélateur est la somme des tensions que produirait chacun des éléments quasi-ponctuels de largeur $d\theta$ en lesquels on peut diviser la source.

On fera toutes les approximations permises par le fait que h et l'interfrange $\Delta\theta$ trouvé dans **III.2**, sont petits devant 1.

a. Calculer $S_c(\theta_0)$ en fonction de θ_0 , de h et des paramètres définissant l'interféromètre, on mettra le résultat sous la forme $S_c(\theta_0) = s_c(\theta_0)A_h(\theta_0)$, où $s_c(\theta_0)$ représente l'intensité du signal que l'on obtiendrait si la largeur de la source était nulle ($h = 0$).

b. Tracer la courbe représentant $A_h(\theta_0)$ en fonction de θ_0 , θ_0 variant de -75° à $+75^\circ$ pour les deux valeurs de h : $h_1 = \frac{\lambda}{2L}$ et $h_2 = \frac{\lambda}{L}$.

En utilisant une analogie optique, interprétez le résultat obtenu pour $\theta_0 = 0$ dans le cas où $h = h_2 = \frac{\lambda}{L}$. Peut-on, compte tenu de la variation de l'interfrange avec θ_0 (**III.2**), interpréter le fait que les valeurs obtenues pour $A_h(\theta_0)$ se rapprochent de 1 lorsque θ_0 augmente ?

c. Ce type d'observations peut-il constituer une méthode de mesure de la largeur des radiosources ? Quelles en sont les limitations ?

Connaissez-vous un dispositif optique permettant de mesurer la largeur angulaire des étoiles ?

4. On observe une radiosource ponctuelle, repérée par la direction θ , émettant un grand nombre N pair d'ondes planes polarisées comme précédemment d'amplitudes E_{0i} , de pulsations $\omega_i = \omega_0 + m \delta\omega$ (m entier variant de $-\frac{N}{2}$ à $+\frac{N}{2}$) et de phases, prises en

O, de valeurs φ_i réparties au hasard.

On suppose $N\delta\omega = B$ très inférieur à ω_0 (figure 5).

Le temps d'intégration T du corrélateur

est très supérieur à $\frac{2\pi}{\omega_0}$ mais on ne

négligera pas $\frac{2\pi}{\delta\omega}$ devant T .

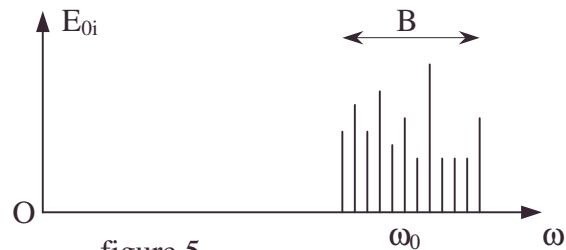


figure 5

a. Exprimer la tension de sortie $f = \frac{\alpha_2}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} v_1 \cdot v_2 dt$, les tensions v_1 et v_2

correspondant chacune à toutes les sources monochromatiques envisagées qui seront désignées par les indices i pour v_1 et j pour v_2 . Montrer que la tension de sortie f est égale à la somme de deux termes :

- Un terme $s_c(\theta)$, somme des tensions de sortie s_i correspondant aux différentes ondes de pulsation ω_i considérées isolément, qui ne dépend pas du temps τ ;
- Un terme $g(\tau)$ dépendant de τ et faisant intervenir des pulsations multiples de $\delta\omega$.

b. Les amplitudes E_{0i} sont supposées égales à $\frac{E_0}{\sqrt{N}}$: que devient $s_c(\theta)$ quand N croît

indéfiniment, $\delta\omega$ tendant alors vers 0, ce qui correspond à une bande continue de pulsations d'extension finie $B = N\delta\omega$ ($B \ll \omega_0$) ?

Montrer que $s_c(\theta)$ est le produit de deux termes, l'un dépendant de B (appelé fonction de cohérence), l'autre indépendant de B (terme de franges).

Pour quelles valeurs de B l'amplitude des franges, au voisinage de $\theta = 30^\circ$ pour $L = 1\text{km}$,

- est-elle réduite de moitié ?
- disparaît-elle complètement ?

Ecole Polytechnique ; Durée : 3h

Corrigé

$$\text{I.a. } \vec{r} = \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{k} = \begin{vmatrix} -k \sin \theta \\ 0 \\ -k \cos \theta \end{vmatrix} ; \vec{k} \cdot \vec{r} = -k x \sin \theta ;$$

$$v(t) = \alpha_1 \iint E_0 \cos(-kx \sin \theta - \omega t) dx dy = \alpha_1 E_0 \cdot 1 \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \cos(\omega t + kx \sin \theta) dx ;$$

$$v(t) = \alpha_1 E_0 \frac{\sin\left(\omega t + \frac{k\lambda \sin \theta}{2}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{k\lambda \sin \theta}{2}\right)}{k \sin \theta} = 2 \alpha_1 E_0 \frac{\cos \omega t}{k \sin \theta} \sin\left(\frac{k\lambda \sin \theta}{2}\right).$$

$$v(t) = E_0 \alpha_1 \ell \cos \omega t \left(\frac{\sin X}{X} \right) \text{ avec } X = k \frac{\ell}{2} \sin \theta = 2\pi \frac{v}{c} \frac{\ell}{2} \sin \theta.$$

$$\text{b. } f(\tau) = \frac{1}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} E_0^2 \alpha_1^2 \ell^2 \cos^2 \omega t \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 dt;$$

$$f(\tau) = E_0^2 \alpha_1^2 \ell^2 \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\sin 2\omega T - \sin 2\omega(\tau-T)}{4\omega T}}_{\rightarrow 0} \right)$$

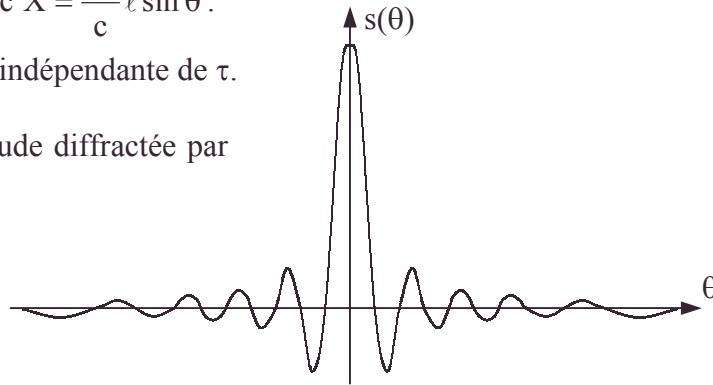
La dépendance temporelle tend vers 0 quand $T \rightarrow +\infty$.

$$s(\theta) = \frac{1}{2} E_0^2 \alpha_1^2 \ell^2 \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \text{ avec } X = \frac{\pi v}{c} \ell \sin \theta.$$

$s(\theta)$ est une tension continue indépendante de τ .

c. AN : $X = 10 \pi \sin \theta$.

On a l'analogie avec l'amplitude diffractée par une fente finie de largeur ℓ .



II.1.a. En notation complexe :

$$v(t) = \alpha E_0 \left(\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)} dS \right) = e^{-j\omega t} \alpha E_0 \left(\iint_{\Sigma_1} e^{j\vec{k} \cdot \vec{OO}_1} dS e^{j\vec{k} \cdot \vec{O}_1 \vec{M}} + \iint_{\Sigma_2} e^{j\vec{k} \cdot \vec{OO}_2} dS e^{j\vec{k} \cdot \vec{O}_2 \vec{M}} \right);$$

$$v(t) = \alpha_1 E_0 e^{-j\omega t} \left(\iint_{\Sigma_1} e^{j\vec{k} \cdot \vec{O}_1 \vec{M}} dS \left[e^{j\vec{k} \cdot \vec{OO}_1} + e^{j\vec{k} \cdot \vec{OO}_2} \right] \right) \text{ car } \iint_{\Sigma_1} e^{j\vec{k} \cdot \vec{O}_1 \vec{M}} dS = \iint_{\Sigma_2} e^{j\vec{k} \cdot \vec{O}_2 \vec{M}} dS;$$

$$v(t) = \alpha_1 E_0 e^{-j\omega t} \left(\frac{\sin X}{X} \right) \left(e^{j\frac{kL}{2} \sin \theta} + e^{-j\frac{kL}{2} \sin \theta} \right) \text{ avec } X = k \frac{\ell}{2} \sin \theta.$$

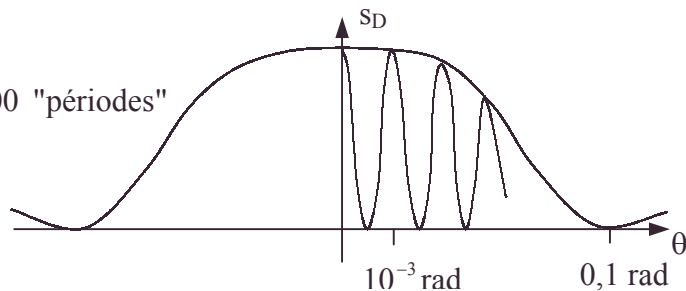
$$v(t) = 2\ell \alpha_1 E_0 e^{-j\omega t} \left(\frac{\sin X}{X} \right) \cos \left(k \frac{L}{2} \sin \theta \right).$$

$$\langle v^2(t) \rangle = 4\alpha_1^2 \ell^2 E_0^2 \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{kL}{2} \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{2}.$$

$$s_D(\theta) = 4s(\theta) \cos^2 \left(\frac{kL}{2} \sin \theta \right) = 2s(\theta) (1 + \cos(kL \sin \theta)).$$

b. AN : $kL = 2000 \pi$.

$\frac{L}{k} = 10^2$, il y a de l'ordre de 200 "périodes" dans l'arche centrale de $s(\theta)$.



On a l'analogie avec le phénomène d'interférences de 2 fentes d'Young modulées par la diffraction d'une fente.

- amplitude diffractée par une fente finie de largeur

2.a. En notation réelle (à cause de l'intégrale f_c bilinéaire), **II.1.a.** s'écrit :

$$v(t) = \underbrace{\alpha_1 \ell E_0 \left(\frac{\sin X}{X} \right) \cos \left(\frac{kL}{2} \sin \theta - \omega t \right)}_{v_1(t)} + \underbrace{\alpha_1 \ell E_0 \left(\frac{\sin X}{X} \right) \cos \left(\frac{kL}{2} \sin \theta + \omega t \right)}_{v_2(t)}.$$

$$f_c = \frac{1}{T} \alpha^2 E_0^2 \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \ell^2 \int_{\tau-T}^{\tau} \frac{1}{2} (\cos(kL \sin \theta) + \cos 2\omega t) dt ;$$

$$f_c = \ell^2 \alpha^2 E_0^2 \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{T \cos(kL \sin \theta)}{T} + \frac{\sin(2\omega \tau) - \sin(2\omega(\tau - T))}{2\omega T} \right).$$

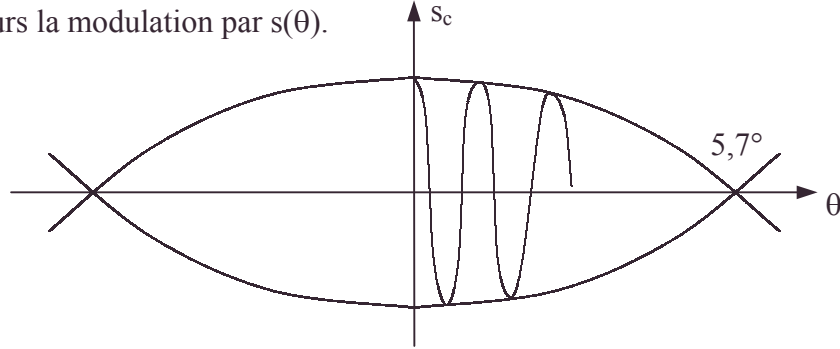
Quand $T \rightarrow \infty$, on a la tension continue indépendante de τ .

$$s_c(\theta) = \frac{1}{2} \ell^2 \alpha^2 E_0^2 \left(\frac{\sin X}{X} \right)^2 \cos(kL \sin \theta) = s(\theta) \cos(kL \sin \theta).$$

Le terme négligé a une harmonique double 2ω , d'amplitude faible ; il pourra être considéré comme un défaut à la linéarité de la détection.

b. L'annulation du $\cos(kL \sin \theta)$ est pour $kL \sin \theta = (2p+1) \frac{\pi}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

On a toujours la modulation par $s(\theta)$.



c. La valeur moyenne de s_c est nulle ; on aura une vérification de bon enregistrement grâce à cette symétrie.

$\frac{s_D}{2} - s_c = s(\theta)$. On retrouve la diffraction dans l'écart (ce qui peut constituer un moyen de vérification voire d'obtention).

$$\text{III.1.a. } v_1(t) = \alpha_1 E_0 e^{-j\omega t} \iint e^{j\vec{k} \cdot \vec{OO_1}} e^{j\vec{k} \cdot \vec{O_1P}} dS = \alpha_1 E_0 e^{-j\omega t} e^{j\vec{k} \cdot \vec{OO_1}} \ell, \text{ car } \vec{k} \perp \vec{O_1P}.$$

$$\text{Et sur } \mathbb{R}, v_1(t) = \alpha_1 \ell E_0 \cdot \cos \left(-\omega t + k \frac{L}{2} \sin \theta \right); v_2(t) = \alpha_1 \ell E_0 \cdot \cos \left(\omega t + \frac{k}{2} L \sin \theta \right).$$

$$f_c = E_0^2 \alpha^2 \ell^2 \frac{1}{T} \int \frac{1}{2} (\cos 2\omega t + \cos kL \sin \theta) dt.$$

$$f_c = \alpha^2 E_0^2 \frac{1}{2} \left(\cos(kL \sin \theta) + \frac{\sin 2\omega \tau - \sin 2\omega(\tau - T)}{4\omega T} \right).$$

$$s_c(\theta) = \frac{1}{2} E_0^2 \alpha^2 \ell^2 \cos(kL \sin \theta); \text{ le terme de diffraction } \left(\frac{\sin \left(k \frac{\ell}{2} \sin \theta \right)}{k \frac{\ell}{2} \sin \theta} \right)^2 \text{ a disparu.}$$

b. Comme pour les antennes omnidirectionnelles à ℓ très petit, la forme est identique, mais ici à $\ell \neq 0$, la puissance reçue est supérieure et la précision sera meilleure vu la disparition apparente de la diffraction.

$$2. s_c(\theta) = \frac{1}{2} E_0^2 \alpha^2 \lambda^2 \cos(kL \sin \theta).$$

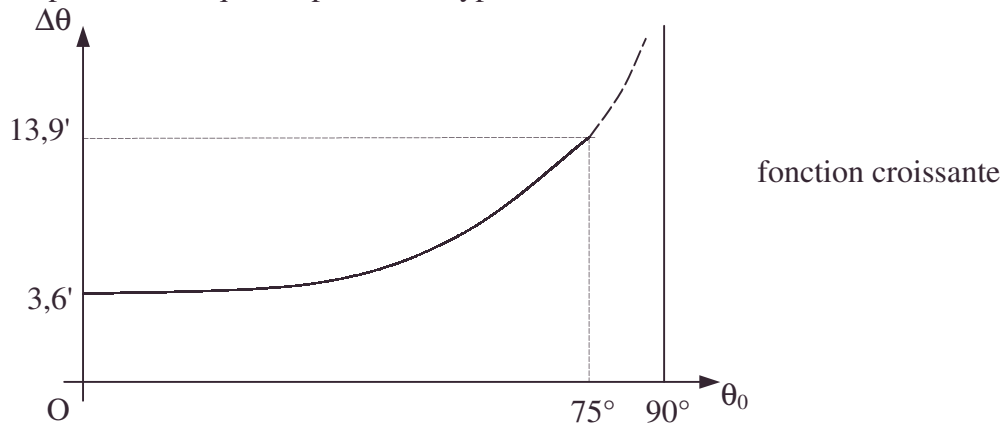
Un maximum en θ_0 satisfait $kL \sin \theta_0 = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$;

et le maximum suivant $kL \sin(\theta_0 + \Delta\theta) = 2(p+1)\pi$.

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \sin \theta_0 = \frac{2\pi}{kL} = \cos \theta_0 \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi}{kL \cos \theta_0}.$$

On obtient de petites valeurs

angulaires pour $\Delta\theta$, ce qui fait partie des hypothèses.



$$3.a. S_c = D \int_{\theta_0 - \frac{h}{2}}^{\theta_0 + \frac{h}{2}} \frac{1}{2} E_0^2 \alpha^2 \lambda^2 \cos(kL \sin \theta) d\theta ; \text{ Posons } u = kL \sin \theta ; du = kL \cos \theta d\theta .$$

$$d\theta = \frac{1}{kL \cos \theta} \frac{du}{kL \cos \theta_0} \Rightarrow$$

$$S_c = \frac{1}{2} \frac{D E_0^2 \alpha^2 \lambda^2}{(\cos \theta_0) kL} \int_{u_1}^{u_2} \cos u du = \frac{D E_0^2 \alpha^2 \lambda^2}{2 (\cos \theta_0) Lk} (\sin u_2 - \sin u_1).$$

$$S_c = \frac{D E_0^2 \alpha^2 \lambda^2}{kL 2 \cos \theta_0} 2 \sin \left(\frac{u_2 - u_1}{2} \right) \cos \left(\frac{u_2 + u_1}{2} \right) \text{ avec :}$$

$$u_2 = kL \sin \left(\theta_0 + \frac{h}{2} \right) = kL \sin \theta_0 \cos \frac{h}{2} + kL \cos \theta_0 \sin \frac{h}{2} ;$$

$$u_1 = kL \sin \left(\theta_0 - \frac{h}{2} \right) = kL \sin \theta_0 \cos \frac{h}{2} - kL \cos \theta_0 \sin \frac{h}{2} ;$$

$$\text{Soit } \frac{u_2 - u_1}{2} = kL \cos \theta_0 \sin \frac{h}{2} \text{ \# } kL \frac{h}{2} \cos \theta_0 \text{ et } \frac{u_2 + u_1}{2} = kL \sin \theta_0 \cos \frac{h}{2} \text{ \# } kL \sin \theta_0 .$$

$$S_c = \frac{D E_0^2 \alpha^2 \lambda^2}{kL \cos \theta_0} \sin \left(kL \frac{h}{2} \cos \theta_0 \right) \cos(kL \sin \theta_0).$$

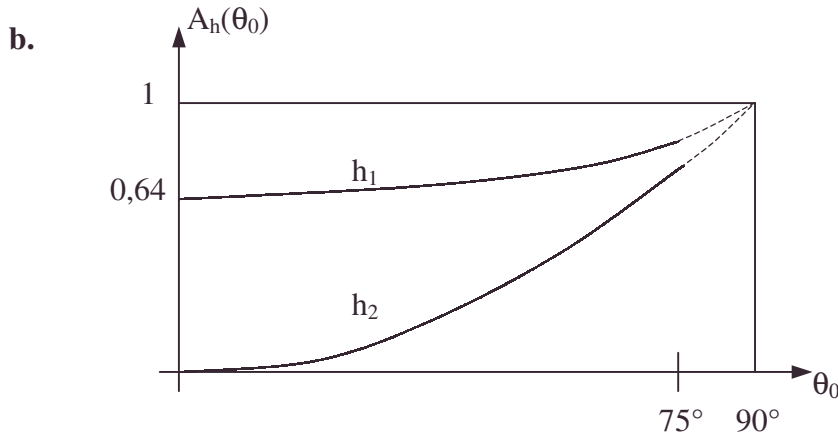
Or,

$$s_c(\theta_0) = \frac{1}{2} E_0^2 \alpha^2 \lambda^2 \cos(kL \sin \theta_0) \Rightarrow A_h(\theta_0) = \frac{S_c(\theta_0)}{s_c(\theta_0)} = \frac{2D}{kL \cos \theta_0} \sin \left(\frac{h k L \cos \theta_0}{2} \right).$$

Simplification physique :

$$\text{si } h \rightarrow 0, S_c \rightarrow s_c \Rightarrow A_h(\theta_0) \rightarrow 1 \Rightarrow D = \frac{1}{h}, \text{ et } A_h(\theta_0) = \frac{\sin Y}{Y} \text{ avec } Y = \frac{h k L \cos \theta_0}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } S_c = s_c(\theta_0) \cos(kL \sin \theta_0) \frac{\sin Y}{Y}.$$



- $S_c = 0$ pour $\theta_0 = 0$ pour $h = h_2$; cela évoque $\frac{\sin Y}{Y} = 0$ en optique pour les fentes d'Young (avec $Y = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sin \theta$), soit des interférences annulées par la diffraction.

- $\theta_0 \rightarrow 90^\circ$, $\cos \theta_0 \rightarrow 0$, $Y \rightarrow 0$ or $Y = \frac{h\pi}{\Delta\theta} \Rightarrow \Delta\theta \rightarrow +\infty$

qui s'interprète par $h \ll \Delta\theta$: $S_c = s_c$. On voit ainsi que $A_h \rightarrow 1$ quand θ_0 croît.

c. La mesure de s_c , S_c donc de $A_h(\theta_0)$ donne accès à h si h pas trop petit devant $\Delta\theta$. Rappelons que le calcul suppose que l'onde monochromatique et que les points émettent une puissance égale.

Pour mesurer un écart angulaire, on associe 2 points lumineux symétriques distants de α_1 angulairement. Chacun donne un système d'interférences (par exemple à l'aide de fentes d'Young) :

$$I_1 = I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} e \left(\theta + \frac{\alpha_1}{2} \right) \right); I_2 = I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} e \left(\theta - \frac{\alpha_1}{2} \right) \right)$$

On observe le brouillage de ces deux systèmes pour :

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda_0} e \left(\theta + \frac{\alpha_1}{2} \right) + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} e \left(\theta - \frac{\alpha_1}{2} \right) = 0, \text{ soit } \frac{2\pi}{\lambda_0} e \left(\theta + \frac{\alpha_1}{2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} e \left(\theta - \frac{\alpha_1}{2} \right) + \pi.$$

La mesure de e donne α_1 qui peut être l'écart angulaire de 2 points diamétralement opposés de l'étoile.

Il existe aussi un système de miroirs dit de Michelson pour faire cette mesure.

4.a. $v_1(t) = \sum_i \alpha_i \lambda E_{0i} \cos \left(\omega_i t - k_i \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_i \right);$

$$v_2(t) = \sum_i \alpha_i \lambda E_{0i} \cos \left(\omega_i t + k_i \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_i \right).$$

$$v_1 v_2 = \sum_{i,j} \alpha_i^2 \lambda^2 E_{0i} E_{0j} \cos \left(\omega_i t - k_i \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_i \right) \cos \left(\omega_j t + k_j \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_j \right),$$

$$v_1 v_2 = \sum_{i,j} \frac{\alpha_i^2}{2} \lambda^2 E_{0i} E_{0j} \left[\cos \left((\omega_i - \omega_j)t - (k_j + k_i) \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_i - \varphi_j \right) + \cos \left((\omega_i + \omega_j)t + (k_j - k_i) \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_i + \varphi_j \right) \right].$$

- brouillage

$$f = \frac{\alpha_2}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} v_1 v_2 dt = \sum_{\forall i=j} \frac{\alpha^2 \ell^2}{2} E_{0i}^2 \left[\underbrace{\frac{[\sin(2\omega_i t + 2\varphi_i)]_{\tau-T}^{\tau}}{(2\omega_i T)}}_{\rightarrow 0} + \cos\left(2k_i \frac{L}{2} \sin \theta\right) \right] \\ + \sum_{i \neq j} \frac{\alpha^2 \ell^2}{2} E_{0i} E_{0j} \left[\frac{\left[\sin\left((\omega_i - \omega_j)t - (k_i + k_j) \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_i - \varphi_j\right) \right]_{\tau-T}^{\tau}}{(\omega_i - \omega_j)T} \right. \\ \left. + \frac{\left[\sin\left((\omega_i + \omega_j)t + (k_j - k_i) \sin \theta \frac{L}{2} + \varphi_i + \varphi_j\right) \right]_{\tau-T}^{\tau}}{(\omega_i + \omega_j)T} \right] \quad \xrightarrow{\text{cf. II.2.a.}} \rightarrow 0$$

$$f = \underbrace{\sum_{\forall i=j} \frac{\alpha^2 \ell^2}{2} E_{0i}^2 \cos\left(2k_i \frac{L}{2} \sin \theta\right)}_{\substack{s_c(\theta) \\ \text{terme constant qu'on peut isoler par} \\ \text{filtrage.}}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \frac{\alpha^2 \ell^2}{2} E_{0i} E_{0j} \left[\frac{\sin[(i-j)\delta\omega t] - (k_j + k_i) \frac{L}{2} \sin \theta + \varphi_i - \varphi_j}{(i-j)\delta\omega t} \right]}_{g(\tau)}$$

b.α. $s_c(\theta) = \frac{1}{2N} \alpha^2 \ell^2 E_0^2 \sum_i \cos \omega_i \frac{L}{c} \sin \theta$, partie réelle de $\frac{\alpha^2 \ell^2 E_0^2}{2N} \sum_i e^{j\omega_i \frac{L}{c} \sin \theta}$ avec

$\omega_i = \omega_0 + m\delta\omega$ de somme :

$$\frac{\alpha^2 \ell^2 E_0^2}{2N} e^{j(\omega_0 - \frac{N}{2}\delta\omega) \frac{L}{c} \sin \theta} \left[\frac{1 - e^{jN\delta\omega \frac{L}{c} \sin \theta}}{1 - e^{j\delta\omega \frac{L}{c} \sin \theta}} \right] = \frac{\alpha^2 \ell^2 E_0^2}{2N} e^{j(\omega_0 - \frac{N}{2}\delta\omega) \frac{L}{c} \sin \theta} \frac{e^{\frac{jN}{2}\delta\omega \frac{L}{c} \sin \theta} \sin\left[N \frac{\delta\omega L}{2c} \sin \theta\right]}{e^{\frac{j}{2}\delta\omega \frac{L}{c} \sin \theta} \sin\left[\frac{\delta\omega L}{2c} \sin \theta\right]},$$

de partie réelle : $s_c(\theta) = \frac{\sin\left(N \frac{\delta\omega L}{2c} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega L}{2c} \sin \theta\right)} \cdot \frac{\alpha^2 \ell^2 E_0^2}{2N} \cos\left[\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right) \frac{L}{2} \sin \theta\right].$

$$\delta\omega \rightarrow 0 ; s_c(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{BL \sin \theta}{2c}\right)}{\frac{\delta\omega L}{2c} \sin \theta \cdot N} \frac{1}{2} \alpha^2 \ell^2 E_0^2 \cos\left(\omega_0 \frac{L}{c} \sin \theta\right),$$

$$s_c(\theta) = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{BL \sin \theta}{2c}\right)}{\frac{BL \sin \theta}{2c}}}_{\text{Cette fonction de cohérence dépend de B.}} \cdot \underbrace{\frac{\alpha^2 \lambda^2 E_0^2 \cos\left(\omega_0 \frac{L}{c} \sin \theta\right)}{2}}_{\text{Terme de franges indépendant de B (de type } s_c(\theta))}$$

β. • Si $z = \frac{BL}{2c} \sin \theta$, on a :

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2} \text{ pour } z = 1,895 \text{ rad, soit } B = 22,74 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ en ne gardant qu'une valeur.}$$

$$\frac{\sin z}{z} = 0 \text{ pour } z = \pi, \text{ soit } B = 37,70 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Cela peut constituer une méthode de mesure.

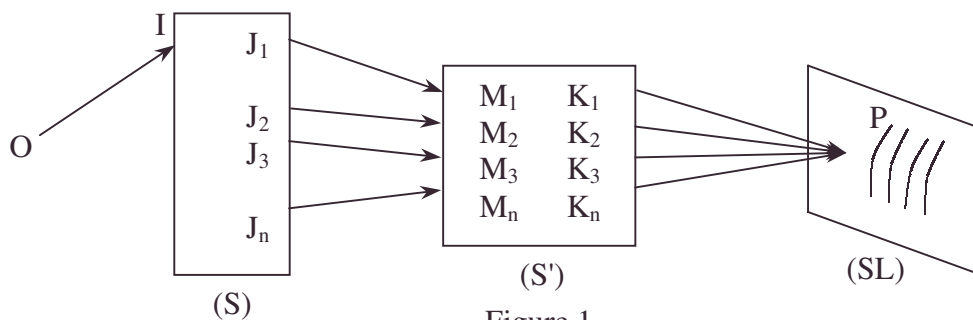
Remarque : $\theta = 0$, $s_c(0) = \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 E_0^2$, cf. III.1.

7.5.2.4.5. Interféromètre de Pérot-Fabry

Application : pompage optique du laser

I. Description générale d'un montage interférentiel

La figure 1 donne l'organigramme de nombreuses expériences d'interférences : un rayon incident OI arrive sur un premier dispositif optique (S) et donne naissance à n rayons distincts J_1M_1 , J_2M_2 , J_3M_3 , ..., J_nM_n . Ces n rayons passent ensuite à travers un second système optique (S') qui les recombine en les faisant tous converger en un même point P ; à chaque rayon OI est ainsi associé un point P . L'ensemble de tous les points P constitue une surface (SL) . Tous les rayons K_iP qui arrivent au point P sont cohérents entre eux et peuvent interférer, l'amplitude de la vibration lumineuse en P est fixée par les amplitudes et les phases des vibrations associées aux différents rayons K_iP , (SL) est appelée surface de localisation des franges d'interférence.



Soient $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ les phases respectives en P des rayons K_iP , on s'arrange souvent pour que les phases varient régulièrement d'un rayon K_iP au suivant, c'est-à-dire pour que la différence de phase $\psi = (\phi_i - \phi_{i+1})$ soit indépendante des deux rayons consécutifs considérés et ne soit en définitive fixée que par le rayon initial OI . A chaque point P de (SL) correspond donc une valeur de ψ . Si $\psi = p \cdot 2\pi$ (avec p entier), tous les rayons arrivent en phase au point P où toutes les vibrations se renforcent par interférence

• montage interférentiel [description générale d'un]

Interféromètres

constructive : l'ensemble des points P pour lesquels p a la même valeur entière, se répartissent selon une courbe dessinée sur (SL) et qu'on appelle $p^{\text{ième}}$ frange d'interférence brillante.

Si on désigne par ξ et η deux paramètres géométriques permettant de repérer le point P sur la surface (SL) et par λ la longueur d'onde, on peut toujours exprimer ψ en fonction de ξ et η par une relation de la forme $\psi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) f(\xi, \eta)$, $f(\xi, \eta)$ étant une grandeur homogène à une longueur et qu'on appelle différence de marche des rayons au point P.

On classe les montages interférométriques selon le nombre n de rayons qui sont engendrés par (S). Les deux cas intéressants correspondent à :

$n = 2$, on dit qu'on a un "dispositif à deux ondes".

n grand devant 2, on dit qu'on a un dispositif "à ondes multiples".

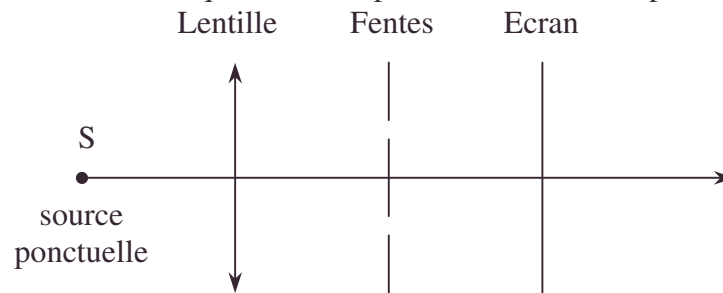


Figure 2 : fentes d'Young

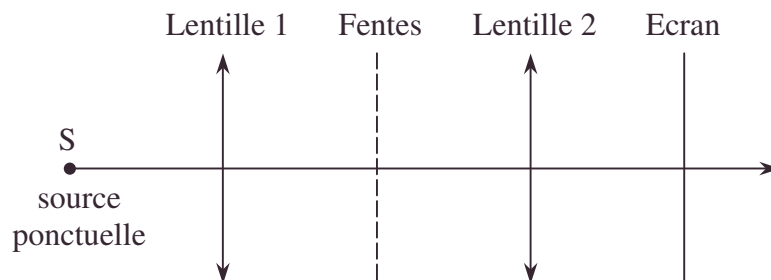


Figure 3 : écran percé régulièrement de n fentes de petite dimension

Question 1

Décrire brièvement (dix lignes d'explications) le fonctionnement des deux montages interférométriques proposés en figures 2 et 3. Justifier qu'il s'agit soit d'un interféromètre à deux ondes soit d'un montage d'interférence en ondes multiples.

II. Comparaison des figures d'interférence à deux ondes ou à ondes multiples

On suppose que les n rayons qui arrivent en P ont tous la même amplitude A et on désigne la grandeur lumineuse complexe du $i^{\text{ème}}$ rayon par $a_i = A.e^{j\omega t} [e^{-j\psi}]^{(i-1)}$. (j est le symbole imaginaire, $j^2 = -1$).

Question 2

Déterminer au point P la grandeur lumineuse complexe $a = \alpha e^{j\omega t}$ qui est la somme des grandeurs lumineuses complexes des n rayons arrivant en P, puis l'intensité lumineuse $I = \frac{1}{2} a a^*$, où a^* est le complexe conjugué de a .

Quand ψ varie, la fonction $I(\psi)$ présente des maxima principaux $I_{\max} = I(\psi_p)$ pour toutes les valeurs de ψ telles que $\psi_p = 2.p.\pi$ (p entier). Soient $\psi_{+\frac{1}{2}}^p$ et $\psi_{-\frac{1}{2}}^p$ les deux valeurs de ψ les plus proches de ψ_p et pour lesquelles $I(\psi)$ vaut $\frac{I_{\max}}{2}$. On appelle interfrange la quantité $i = (\psi_{p+1} - \psi_p)$ et largeur de frange $\Delta\psi = \left(\psi_{+\frac{1}{2}}^p - \psi_{-\frac{1}{2}}^p \right)$.

Question 3

On considère un montage à deux ondes ($n = 2$) et un montage à ondes multiples avec $n = 10$. Dans chacun des deux cas, caractériser sommairement la forme des franges d'interférences $I(\psi)$; donner la largeur de frange et calculer l'interfrange.

Tracer approximativement I en fonction de ψ .

Quel est l'intérêt du dispositif à n ondes par rapport au dispositif à deux ondes ?

III. Etude d'un interféromètre Pérot Fabry (PF)

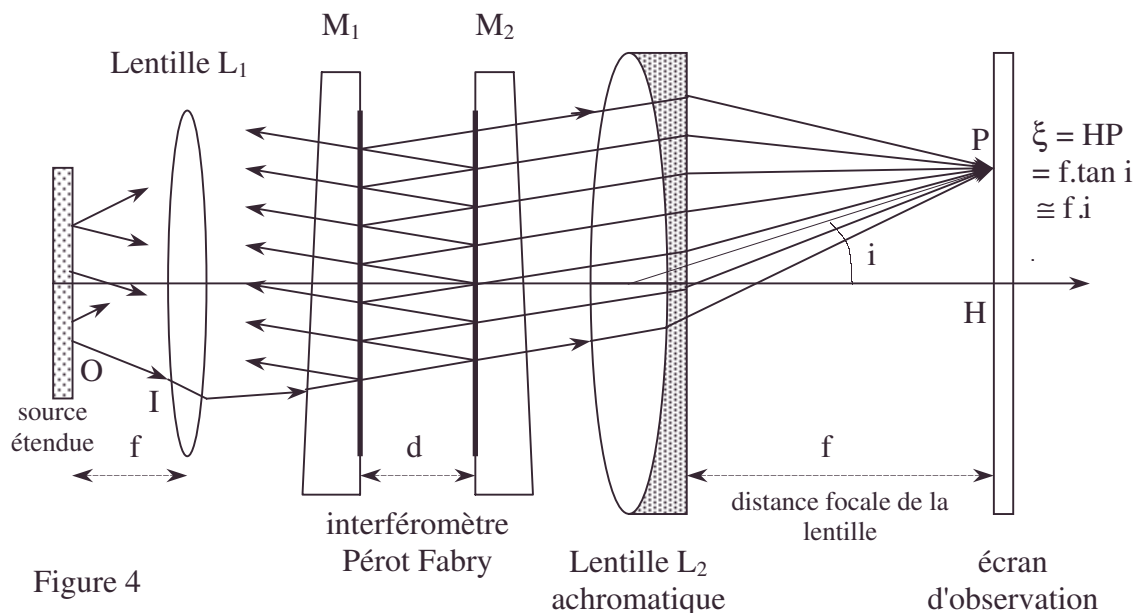


Figure 4

La figure 4 donne le schéma d'un interféromètre de Pérot Fabry, les deux faces M_1 et M_2 de deux lames de verre ont été polies avec soin et ont reçu un traitement de surface leur donnant un coefficient de réflexion élevé. La position des deux lames est normalement réglée pour que M_1 et M_2 soient parallèles. Le dispositif est éclairé avec une source étendue monochromatique qui émet des rayons d'égale intensité dans toutes les directions. On néglige toutes les réflexions et réfractions qui se produisent sur les faces des lames autres que M_1 et M_2 .

Question 4

Pourquoi dit-on que les franges données par l'appareil de Pérot Fabry sont localisées à l'infini ? Quel est le rôle de la lentille L_2 dans le montage de la figure 2 ? Expliquer pourquoi les franges observées dans le plan focal de F_2 sont des anneaux circulaires.

Les deux miroirs sont identiques. On désigne par r et t les coefficients respectifs de réflexion et de transmission des deux lames pour les amplitudes des ondes lumineuses, et par $R = r^2$, $T = t^2$ les coefficients correspondants pour les intensités lumineuses. On admet que transmission et réflexion se font sans déphasage et que r et t sont des nombres réels positifs. Au point de vue ordre de grandeur, on a : $T \ll 1$, R et $(R + T)$

sont légèrement plus petits que l'unité, on appelle $A_b = 1 - (R + T)$ le coefficient d'absorption des miroirs.

Evaluation du nombre de rayons qui interfèrent dans un PF

Le PF, dont on a seulement dessiné les faces réfléchissantes M_1 et M_2 , a été délibérément déréglé et ses faces font entre elles un très petit angle 2α (figure 5). une source ponctuelle S est placée au foyer de la lentille L_1 , la lentille L_2 reçoit la totalité des rayons sortant du PF. Dans le plan focal de L_2 il se forme une série d'images ponctuelles $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$ extrêmement voisines.

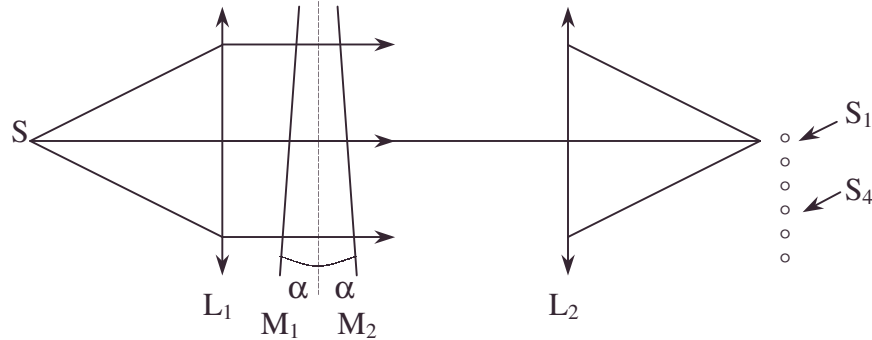


Figure 5

Question 5

Calculer, en fonction de l'angle α et de la distance focale de la lentille L_2 , la distance entre les images S_1 et S_{10} , faire l'application numérique pour $f = 1\text{ m}$ et $\alpha = 1'$.

Dans le plan focal de la lentille L_2 on place une cellule photoélectrique qui peut recevoir l'ensemble des images $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$ et qui délivre un signal électrique proportionnel au flux lumineux qu'elle reçoit. On désigne par P_0 le flux lumineux reçu en l'absence du PF.

Calculer, en fonction de P_0 , R et T : d'une part, les flux lumineux reçus par les différentes images, $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$ et d'autre part, le flux lumineux total P reçu par la cellule photoélectrique ($S_1 + S_2 + \dots + S_\infty$).

On veut déterminer les coefficients R , T et A_b des miroirs. Pour cela, on fait les manipulations suivantes :

- (1) on mesure d'abord le flux P_0 reçu par la cellule, en l'absence du PF,
- (2) on mesure le flux P' quand une seule lame du PF est placée entre les deux lentilles,
- (3) enfin on mesure le flux P reçu quand les deux lames du PF sont placées entre les lentilles.

Question 6

Exprimer R , T et A_b en fonction de P_0 , P et P' . Faire l'application numérique dans le cas où P_0 , P et P' valent respectivement 100, 0,21 et 2 (en unités arbitraires). En supposant R voisin de 1, calculer le numéro d'ordre n de l'image S_n qui reçoit un flux lumineux e^6 fois plus faible que pour l'image S_1 . Déterminer n avec les données de l'application numérique précédente.

Le PF est à nouveau parfaitement réglé, ses deux miroirs sont identiques et caractérisés par les coefficients r , t , $R = r^2$, $T = t^2$; on néglige l'absorption dans les miroirs ($R + T = 1$). On utilise une source étendue monochromatique de longueur d'onde λ .

On considérera que les milieux à l'intérieur et à l'extérieur du PF ont le même indice de réfraction, ainsi il n'y a pas de changement de direction du rayon lumineux lorsqu'il entre ou sort du PF.

Question 7

On considère (figure 6) un rayon SI, d'amplitude de vibration a et d'angle d'incidence i . Montrer que le déphasage entre deux rayons successifs auxquels il donne naissance vaut : $\psi = \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) \cos i$.

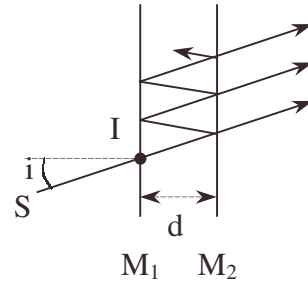


Figure 6

Question 8

Calculer l'intensité lumineuse $I(i)$ observée à l'infini dans la direction définie par l'angle i . L'exprimer en fonction de ψ , R , T et A .

Mettre l'expression obtenue sous la forme $\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{(1-R)} \right)^2 A(\psi, R)$, la fonction

$A(\psi, R)$ (fonction d'Airy) ne dépend que de ψ et de R . Représenter graphiquement les variations de $A(\psi, R)$ pour $R = 0,9$ et pour $R = 0,2$.

Appliquer à la fonction d'Airy la notion de largeur de frange $\Delta\psi$ telle qu'elle avait été introduite au début de ce problème. On appelle finesse F du PF le rapport $F = \frac{2\pi}{\Delta\psi}$;

comparer l'expression de F à celle du nombre n de rayons utiles calculé à la question 6. Qu'en déduisez-vous ? Au vu de vos déductions et des résultats de la question 3., que faut-il modifier sur le PF pour obtenir des pics plus fins ?

Question 9

Le PF a une épaisseur de 1 cm, la distance focale de la lentille L_2 est de 1m, on observe les anneaux qui se forment dans le plan focal de la lentille L_2 . déterminer les rayons ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 des anneaux observés dont les rayons sont immédiatement supérieurs à 1 cm, pour une source ayant deux longueurs d'onde particulières $\lambda_1 = 632,8 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 633,0 \text{ nm}$. Tracer l'allure des pics relatifs à λ_1 et λ_2 ayant un rayon immédiatement supérieur à 1 cm. Pourquoi peut-on dire que le PF est un outil puissant de spectroscopie ? En déduire son pouvoir de résolution $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ (on considérera

comme décelable un écart de longueur d'onde $\Delta\lambda$ correspondant au critère de Rayleigh à mi-hauteur. On se place ici dans le cas où $R = 0,9$.

IV. Etude d'un Pérot Fabry à pertes compensées

On considère encore deux miroirs plans parallèles disposés face à face sur lesquels on envoie une onde plane monochromatique D_0 (longueur d'onde λ , pulsation ω) dont les plans d'ondes sont parallèles aux plans des miroirs. Sur les miroirs, différentes ondes planes prennent naissance : G_0, D_1, G_1, D_1 (figure 7), la notation D_i ou G_i est simple et indique seulement que les ondes se propagent vers la droite ou vers la gauche.

On admet que le dispositif est éclairé depuis suffisamment longtemps pour qu'un régime sinusoïdal forcé ait été atteint. Ainsi les ondes D_1 , et G_1 sont les ondes planes qui résultent de la superposition des ondes créées par réflexions multiples entre les deux miroirs.

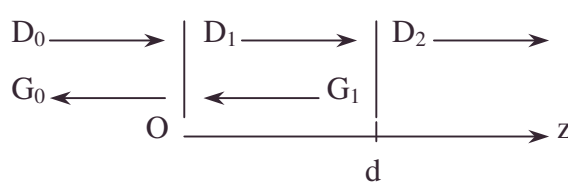


Figure 7

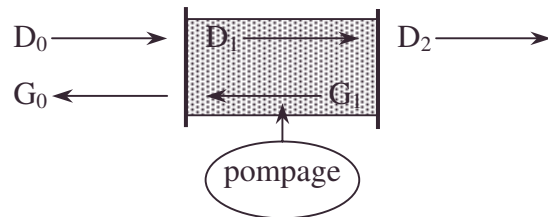


Figure 8

Les ondes qui se propagent vers la droite s'écrivent $D_1 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-jkz}$, celles qui se propagent vers la gauche $G_1 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{+jkz}$, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, l'axe des z étant perpendiculaire aux miroirs et ayant son origine sur l'un d'eux. D_0 est connu, il s'agit de déterminer les amplitudes des quatre autres ondes, pour cela il suffit d'écrire les équations de continuité des champs sur les miroirs, soit :

$$\begin{aligned} \text{continuité en } z = 0 \quad & D_1 = t_1 D_0 + r_1 G_1 \quad \text{et} \quad G_0 = r_1 D_0 + t_1 G_1 \\ \text{continuité en } z = d \quad & G_1 \cdot e^{+jkd} = r_2 D_1 e^{-jkd} \quad \text{et} \quad D_2 \cdot e^{-jkd} = t_2 D_1 \cdot e^{-jkd} \end{aligned}$$

où t_1 , r_1 et t_2 , r_2 sont respectivement les coefficients de transmission et de réflexion à l'entrée et à la sortie du dispositif.

Question 10

En résolvant le système des 4 équations précédentes, exprimer D_2 en fonction de D_0 , t_1 , t_2 , r_1 , r_2 et $k \cdot d$. Calculer alors $D_2 \cdot D_2^*$, D_2^* est le nombre complexe conjugué de D_2 . Comparer à l'expression obtenue pour $I(i)$ à la question 8.

On place maintenant entre les miroirs (figure 8) un milieu matériel qu'on soumet à un traitement approprié (pompage optique) qui lui apporte de l'énergie et le rend amplificateur pour des ondes lumineuses de pulsation ω : dans ces conditions le coefficient k qui figure dans les équations précédentes doit s'écrire $k = k' + jk''$, k'' étant un nombre réel positif d'autant plus grand que le pompage est plus intense et $k' > 0$.

Question 11

Reprendre le calcul précédent de $D_2 D_2^*$ en y introduisant $k' + jk''$. Calculer la finesse de ce dispositif et montrer qu'il est possible d'obtenir une finesse aussi élevée qu'on le désire et qu'il existe une valeur k''_{seuil} de k'' pour laquelle le rapport

d'intensité $\frac{D_2 D_2^*}{D_0 D_0^*}$ devient infini. Que se passe-t-il lorsque k'' a une valeur égale à k''_{seuil}

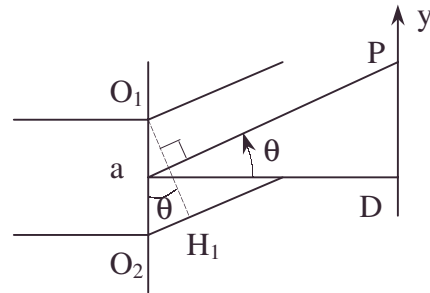
sachant que $\frac{1}{2} D_2 D_2^*$ l'énergie sortant du dispositif est finie ?

En conclusion, à quoi peut servir ce dispositif ?

CCP ; Durée : 3h

Corrigé**I. Question 1****1. Interféromètre à deux ondes cohérentes**

L'expérience des fentes d'Young divise le front d'onde émis par S ; les ondes cylindriques diffractées par les fentes supposées ultra fines interfèrent en tout point ; la description simple à l'aide d'interférence d'ondes planes se fait quand l'écran est éloigné (diffraction à l'infini). On obtient des franges sombres et brillantes parallèles aux fentes sur l'écran, invariantes par translation parallèlement aux fentes.



Dans un plan orthogonal aux fentes, la différence de marche entre 2 rayons interférents

$$\text{est } \delta = a \sin \theta \approx a \frac{y}{D} ; \psi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

(D distance de l'écran aux plans des fentes).

$$a(P) = a_1(P) + a_2(P) = A \left(1 + e^{-2j\frac{\pi\delta}{\lambda}} \right).$$

$$I(P) = \frac{a(P)a^*(P)}{2} = \frac{A.A^*}{2} \left(1 + e^{-2j\frac{\pi\delta}{\lambda}} \right) \left(1 + e^{+2j\frac{\pi\delta}{\lambda}} \right) = AA^* \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{D} \right)$$

$$I(P) = 2|A|^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} ; I_{\max} = \frac{2^2|A|^2}{2}.$$

2. $n \gg 2$, on a un montage d'interférences à ondes multiples. Les différents rayons qui interfèrent à l'infini proviennent de la division du front d'onde par les trous diffractants. On observe sur l'écran dans le plan focal image de L_2 des franges sombres et brillantes. La méthode des ondes planes pourra y être appliquée (cf. réseau et question 2.).

II. Question 2

a. ψ représente le retard de phase d'un rayon sur le rayon voisin plus court.

$$a = A e^{j\omega t} [1 + e^{-j\psi} \dots + e^{-(n-1)j\psi}] = A e^{j\omega t} \frac{(1 - e^{-jn\psi})}{1 - e^{-j\psi}}$$

$$a = A e^{j\omega t} \frac{e^{-j\frac{n\psi}{2}} \left(e^{+j\frac{n\psi}{2}} - e^{-j\frac{n\psi}{2}} \right)}{e^{-j\frac{\psi}{2}} \left(e^{+j\frac{\psi}{2}} - e^{-j\frac{\psi}{2}} \right)} = A e^{j\omega t} e^{-j\frac{(n-1)\psi}{2}} \frac{\sin \frac{n\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}}.$$

$$\mathbf{b.} I = \frac{1}{2} a a^* = \frac{|A|^2}{2} \frac{\sin^2 \frac{n\psi}{2}}{\sin^2 \frac{\psi}{2}} ; I_{\max} = \frac{n^2 |A|^2}{2}.$$

Question 3

a. Les maxima principaux sont obtenus évidemment pour

$$\psi = 2p\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \Rightarrow i = 2\pi \text{ rad.}$$

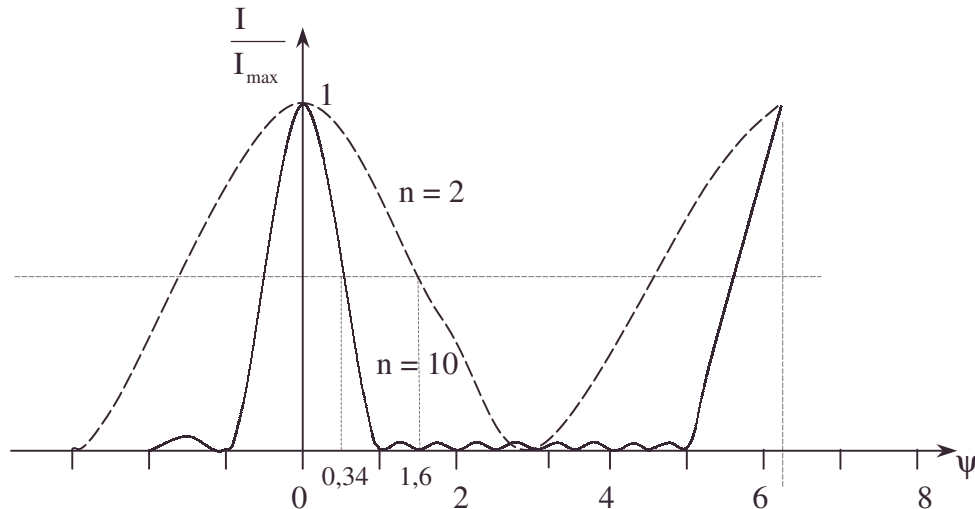
$$\mathbf{b. \alpha.} n = 2 ; I_{\max} = 2|A|^2 ; A^2 = 2|A|^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$$\frac{\psi}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + p\pi \Rightarrow \psi_{\frac{1}{2}}^p = \frac{\pi}{2} + 2p\pi ; \psi_{-\frac{1}{2}}^p = -\frac{\pi}{2} + 2p\pi \Rightarrow \Delta\psi = \pi \text{ rad.}$$

$$\beta.n = 10 ; I_{\max} = 50|A|^2 ; \frac{I_{\max}}{2} = \frac{50}{2}|A|^2 = \frac{|A|^2}{2} \left(\frac{\sin 5\psi}{\sin \frac{\psi}{2}} \right)^2 \Rightarrow \frac{\sin 5\psi}{\sin \frac{\psi}{2}} = 7,07.$$

On trouve graphiquement : $\psi = \pm 0,344 \text{ rad} \Rightarrow \Delta\psi = 0,69 \text{ rad.}$

On voit la diminution de la largeur de frange pour le dispositif à n ondes d'où la finesse et un positionnement plus précis.



Il y a 9 annulations équiréparties à $\frac{2\pi}{10} = 0,63 \text{ rad.}$

III. Question 4

a. Chaque point de la source donne des rayons parallèles après L_1 ; chaque rayon donne des rayons parallèles à lui-même après le PF, qui interfèrent à l'infini (dans une direction i donnée, dans le plan méridien pour simplifier).

Il y a superposition des interférences issues des différents rayons émis dans une direction i depuis la source ; le PF donne le même retard pour chacun d'eux ; leur intensité lumineuse est donc commune.

b. La lentille L_2 donne une image de ces points à l'infini, par conjugaison, sur l'écran situé dans le plan focal. La conjugaison ne modifie pas les différences de marche.

c. La symétrie de révolution cylindrique donne des franges circulaires ou anneaux.

Question 5

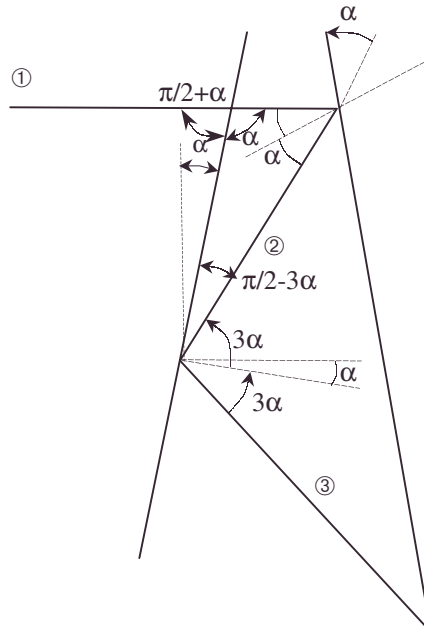
a. En partant du cas ① particulier, ③ fait un angle de $3\alpha + \alpha = 4\alpha$ par rapport à la direction de ①.

Le rayon ③ va converger en S_2 , à une distance de l'axe de $4\alpha f$. La procédure de décalage se reproduit à chaque réflexion sur M_2 en introduisant un nouvel écart angulaire de 4α soit un écart de $4\alpha f$ dans le plan focal de L_2 .

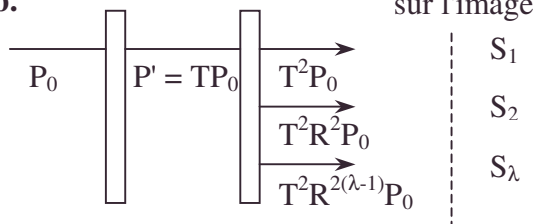
On a 9 intervalles entre S_1 et S_{10} ; $S_1 S_{10} = 36 \alpha f$.

A.N. : $\alpha = 1' = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$; $S_1 S_{10} = 1,05 \text{ cm.}$

- conjugaison optique[ne modifie pas une différence de marche optique]



b.



$$\Rightarrow P = P_0 T^2 (1 + R^2 + R^{2(\lambda-1)} \dots)$$

$$\lambda \rightarrow \infty : P = \frac{P_0 T^2}{1 - R^2}$$

Question 6

a. On remarque $T = \frac{P'}{P_0}$; $P = \frac{P_0 T^2}{1 - R^2} = \frac{P'^2}{P_0 (1 - R^2)} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{P'^2}{P_0 P}$.

$$R = \sqrt{1 - \frac{P'^2}{P_0 P}} ; \text{ or } A_b + R + T = 1 \Rightarrow A_b = 1 - \frac{P'}{P_0} - \sqrt{1 - \frac{P'^2}{P_0 P}}.$$

A.N. : $T = 0,02$; $R = 0,90$; $A_b = 0,08$.

b. $\frac{P_n}{P_1} = e^{-6} = R^{2(n-1)} \Rightarrow 2(n-1) \ln R = -6 \Rightarrow n = 1 - \frac{3}{\ln R}$.

A.N. : $n = 29,47$.

S_{30} a donc un flux inférieur à e^{-6} fois le flux de S_1 (ce qui n'est pas le cas de S_{29}).

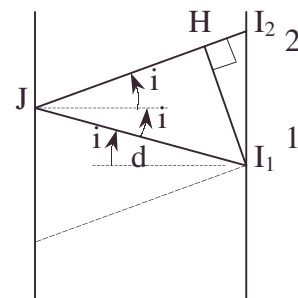
Question 7

Entre 2 rayons successifs on a une différence de marche.

$$\delta = I_1 J H ; J I_1 = \frac{d}{\cos i} ; J H = J I_1 \cos 2i$$

$$\delta = \frac{d}{\cos i} (1 + \cos 2i) = \frac{2d \cos^2 i}{\cos i} = 2d \cos i.$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi d \cos i}{\lambda}.$$



Question 8

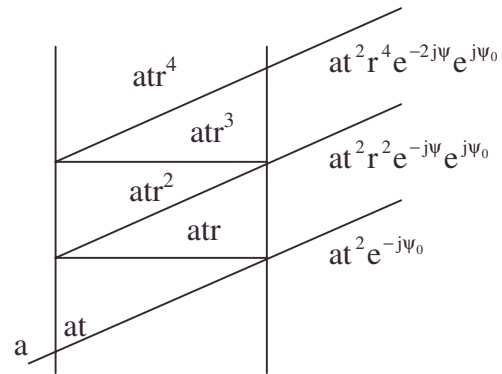
Le calcul classique se fait avec une infinité de rayons.

a. On a l'amplitude :

$$a = A t^2 e^{j\phi_0} e^{j\phi_0} (1 + r^2 e^{-j\psi} + r^4 e^{-2j\psi} \dots)$$

$$= A t^2 e^{j\phi_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (r^2 e^{-j\psi})^n}{1 - r^2 e^{-j\psi}} \text{ or } r^2 < 1$$

$$= \frac{A t^2 e^{-j\phi_0}}{1 - r^2 e^{-j\psi}}.$$



b. $I = \frac{1}{2} a^* a = \frac{|A|^2}{2} \frac{t^4}{(1 - r^2 e^{-j\psi})(1 - r^2 e^{+j\psi})} = \frac{|A|^2 T^2}{2(1 + R^2 - 2R \cos \psi)}.$

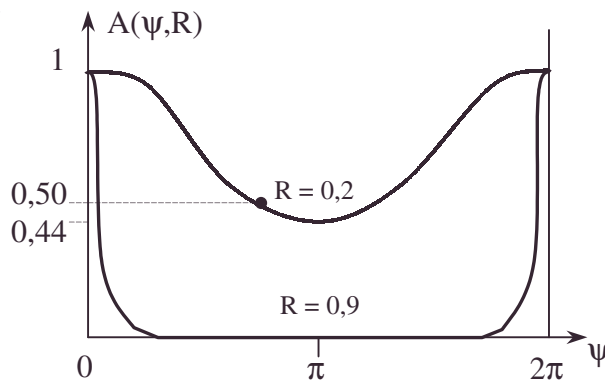
Or $\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2};$

$$I = \frac{|A|^2}{2} \frac{T^2}{\left((1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)} = \frac{|A|^2}{2} \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} \right]}.$$

Quand on a $T = 1$ et $R = 0$ $I_0 = \frac{|A|^2}{2}.$

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2 A(\psi, R) \text{ avec } A(\psi, R) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}}.$$

c.



	R = 0,9	R = 0,2
$A_{\min}(\psi, R)$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	0,44

d. On a la demi-largeur pour $I = \frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_0}{2} \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2,$

soit $\frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} = 1$ soit $\sin \frac{\psi}{2} = \frac{1 - R}{2\sqrt{R}} \Rightarrow \psi = 2 \arcsin \frac{1 - R}{2\sqrt{R}}.$

$$\Delta\psi = 4 \arcsin \frac{1 - R}{2\sqrt{R}}; F = \frac{\pi}{2 \arcsin \frac{1 - R}{2\sqrt{R}}}$$

	R = 0,9	R = 0,2
$\Delta\psi$	0,21 rad	4,4 rad
F	29,9	1,42

Pour $R = 0,9$, $F \# n$ mais le critère n'est pas le même car ici $\lambda \rightarrow \infty$:

(Critère ici) $0,5 \gg 2,5 \cdot 10^{-3}$ (critère en e^{-6} question 6.). Pour $R = 0,2$ le présent critère est peu significatif.

• demi-largeur, fonction d'Airy

Les pics sont d'autant plus fins que R s'approche de 1.

Question 9

a. Rayon des anneaux : $\rho_i = f i$.

or $\delta = 2d \cos i = p\lambda$ pour les anneaux brillants $p \in \mathbb{Z}$.

$$1 - \frac{i_p^2}{2} = \frac{p\lambda}{2d} \Rightarrow i_p = \sqrt{2 \left(1 - \frac{p\lambda}{2d} \right)}.$$

Vu $\rho = f i$ $\rho > 1$ cm suppose $i_p > 10^{-2}$ rad soit $1 - \frac{p\lambda}{2d} > \frac{10^{-4}}{2} \Rightarrow \frac{p\lambda}{2d} < 0,99995$.

$$\lambda_1 = 632,8 \text{ nm} \quad p < 0,99995 \cdot \frac{2d}{\lambda_1}; \quad \text{A.N. : } p < 31603,98.$$

$$\lambda_2 = 633,0 \text{ nm} \quad p < 0,99995 \cdot \frac{2d}{\lambda_2}; \quad \text{A.N. : } p < 31593,9.$$

On prendra les 4 valeurs entières de p inférieures aux valeurs calculées et on calculera

$$\rho_\lambda = f \sqrt{2 \left(1 - \frac{\rho_\lambda \lambda}{2d} \right)}; \quad i_\lambda \text{ reste de l'ordre de } 10^{-2} \text{ rad.}$$

λ_1	$p_1 = 31603$	$p_2 = 31602$
	$\rho_1 = 1,2734 \text{ cm}$	$\rho_3 = 1,5014 \text{ cm}$
λ_2	$p'_1 = 31593$	$p'_2 = 31592$
	$\rho_2 = 1,2777 \text{ cm}$	$\rho_4 = 1,5046 \text{ cm}$

b. Séparation des anneaux : $d\rho = f di$.

$$\psi = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos i \Rightarrow d\psi = -\frac{4\pi d}{\lambda_0} \sin i di \text{ pour la variable } i \text{ à } \lambda_0 \text{ donné en prenant}$$

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \text{ par exemple.}$$

$$d\psi = -\frac{4\pi d}{\lambda_0} i di = -\frac{4\pi d}{\lambda_0} \frac{\rho}{f} \frac{d\rho}{f}.$$

Le critère de séparation de Rayleigh exige que les maxima soient séparés en phase de plus de $\frac{\Delta\psi}{2}$: soit $\frac{4\pi d}{\lambda_0 f^2} \rho \Delta\rho > \frac{\Delta\phi_R}{2}$ pour $R = 0,9$

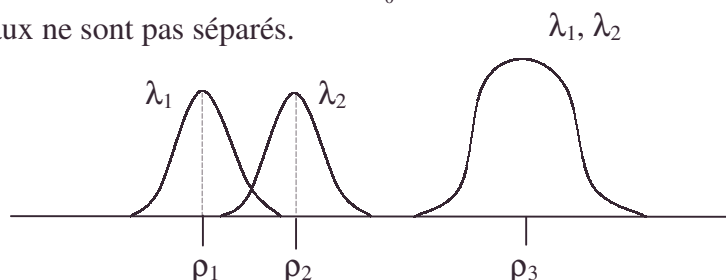
- pour les anneaux ρ_1, ρ_2 : $\frac{4\pi d \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (\rho_2 - \rho_1)}{\lambda_0 f^2} = 0,11 \text{ rad} \geq 0,105 \text{ rad.}$

Les anneaux sont séparés (de justesse il est vrai).

- pour les anneaux ρ_3, ρ_4 : $\frac{4\pi d \frac{\rho_3 + \rho_4}{2} (\rho_4 - \rho_3)}{\lambda_0 f^2} = 0,095 < 0,105 \text{ rad.}$

Les anneaux ne sont pas séparés.

c.



• critère de séparation de Rayleigh, pouvoir de résolution

d. Conclusion : le PF, qui sépare 2 raies de longueur d'onde distantes de 2.10^{-10} m est un bon outil de spectroscopie mais cette mesure est comparable ici à la performance d'un réseau.

e. La variable physique étant λ , au voisinage de $i = 0$, $\psi = \frac{4\pi d}{\lambda} \Rightarrow d\psi = -4\pi d \frac{d\lambda}{\lambda^2}$;

le critère de Rayleigh considère comme séparées 2 raies si $4\pi d \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} > \frac{\Delta\phi}{2}$.

$$\frac{\Delta\lambda_{\text{lim}}}{\lambda} = \frac{\lambda\Delta\phi}{8\pi d} \text{ avec } \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} ; \text{ A.N.: } \frac{\Delta\lambda_{\text{lim}}}{\lambda} = 5.10^{-7} ; \text{ A.N. : prenons } \lambda = 6.10^{-7} \text{ m.}$$

$\Delta\lambda_{\text{lim}} = 3.10^{-13}$ m ; dans les conditions optimales, le PF est un outil puissant de spectroscopie.

IV. Question 10

a. Eliminons D_1 car $D_1 = \frac{D_2}{t_2}$ d'après la 4^{ème} relation et reportons dans la 1^{ère} :

$$\frac{D_2}{t_2} = t_1 D_0 + r_1 G_1 ; \text{ tirons } G_1 \text{ de la 3^{ème} relation : } G_1 = r_2 D_1 e^{-2jkd} = \frac{r_2}{t_2} D_2 e^{-2jkd} \Rightarrow$$

$$D_2 = t_1 D_0 + \frac{r_1 r_2}{t_2} D_2 e^{-2jkd} \Rightarrow \frac{D_2}{t_2} (1 - e^{-2jkd} r_1 r_2) = t_1 D_0$$

$$D_2 = \frac{t_1 t_2 D_0}{1 - r_1 r_2 e^{-2jkd}} ; D_2^* = \frac{t_1 t_2 D_0^*}{1 - r_1 r_2 e^{2jkd}}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } D_2 D_2^* &= \frac{(t_1 t_2 |D_0|)^2}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2kd} = \frac{(t_1 t_2 |D_0|)^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 kd} \\ &= |D_0|^2 \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 kd}. \end{aligned}$$

$D_2 D_2^* = I$ quand $T = t_1 t_2$; $R = r_1 r_2$; ce qui est le cas pour le cas où $r = r_1 = r_2$; $t = t_1 = t_2$.

Question 11

a. Formellement le calcul est le même car les opérations sont linéaires :

$$D_2 = \frac{t_1 t_2 D_0}{1 - r_1 r_2 e^{2k'd} e^{-2jk'd}} ; D_2^* = \frac{t_1 t_2 D_0^*}{1 - r_1 r_2 e^{2k'd} e^{+2jk'd}}.$$

$$D_2 D_2^* = \frac{(t_1 t_2)^2 D_0 D_0^*}{1 + r_1^2 r_2^2 e^{4k'd} - 2r_1 r_2 e^{2k'd} \cos 2k'd} \text{ or } \cos 2k'd = 1 - 2\sin^2 k'd ;$$

$$\begin{aligned} D_2 D_2^* &= \frac{(t_1 t_2)^2 D_0 D_0^*}{(1 - r_1 r_2 e^{2k'd})^2 + 4r_1 r_2 e^{2k'd} \sin^2 k'd} \\ &= \frac{(t_1 t_2)^2 D_0 D_0^*}{(1 - r_1 r_2 e^{2k'd})^2} \frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2 e^{2k'd}}{(1 - r_1 r_2 e^{2k'd})^2} \sin^2 k'd}. \end{aligned}$$

b. La nouvelle fonction d'Airy $A' = \frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2 e^{2k''d}}{(1 - r_1 r_2 e^{2k''d})^2} \sin^2 k'd}$.

Formellement par rapport à la précédente étude de la question 8., R est remplacé par

$$r_1 r_2 e^{2k''d} \Rightarrow F = \frac{\pi}{2 \arcsin \frac{1 - r_1 r_2 e^{2k''d}}{2e^{k''d} \sqrt{r_1 r_2}}}.$$

c. $F \rightarrow \infty$ si $r_1 r_2 e^{2k''d} \rightarrow 1$, soit $k''_{\text{seuil}} = -\frac{\ln r_1 r_2}{2d}$.

d. Quand on a un maximum $A' = 1$ soit $k'd = p\pi$, $p \in \mathbb{N}$ avec $\omega_p = \frac{p\pi}{cd}$ la sortie.

$$\frac{D_2 D_2^*}{D_0 D_0^*} = \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2 e^{2k''d})^2} \rightarrow \infty \text{ quand } r_1 r_2 e^{2k''d} \rightarrow 1, \text{ c'est-à-dire pour } k'' = k''_{\text{seuil}}.$$

e. Comme pour un oscillateur électronique, faisons $\frac{1}{2} D_0 D_0^* = 0$, alors $\frac{1}{2} D_2 D_2^*$ de la forme $0.\infty$ peut être finie pour une pulsation propre ω_p du système oscillant. On a une source lumineuse grâce au pompage optique qui permet l'amplification de l'onde de pulsation caractéristique : c'est le principe du laser.

7.5.2.4.6. Modulateur de lumière avec interféromètre de Mach-Zender

Voir page 1212.

7.5.2.4.7. Principe du laser

Voir page 683.

7.5.2.5. Lumière polarisée

7.5.2.5.1. Pouvoir rotatoire du quartz en lumière blanche

On se propose d'étudier le pouvoir rotatoire d'une lame de quartz Q taillée perpendiculairement à son axe optique au moyen d'un spectroscope.

Les caractéristiques des différents organes de cet instrument n'interviendront dans aucun des calculs qui suivent.

La fente du spectroscope est éclairée par une source S de lumière blanche qui a traversé, à l'état de faisceau à peu près parallèle, les éléments suivants :

- Un polariseur P ;
- La lame de quartz Q normale au rayon moyen du faisceau ;
- Un analyseur A dont le plan de vibration (ou le plan de section principale) est parallèle à celui du polariseur.

• analyseur[polariseur], collimateur du spectroscope, courbe d'étalonnage du pouvoir rotatoire [en fonction de la longueur d'onde], épaisseur de lame de quartz [pour la loi de Biot], faisceau lumineux à peu près parallèle dans un polarimètre, lame de quartz taillée perpendiculairement à son axe optique [loi de Biot], lumière polarisée, nombre de raies noires dues à la lame de quartz [loi de Biot], pouvoir rotatoire, tableau umérique

1. Dans ces conditions, représenter schématiquement, avec les lentilles nécessaires, un montage permettant d'éclairer la fente F du collimateur du spectroscopie.

Le spectroscopie sera représenté seulement par cette fente F.

2. Les rotations ρ subies par le plan d'une vibration lumineuse qui traverse dans les conditions précédentes une lame de quartz de 1 millimètre d'épaisseur sont données par le tableau ci-dessous, comptées selon le sens trigonométrique pour un observateur placé à droite de la lame de 1 millimètre d'épaisseur.

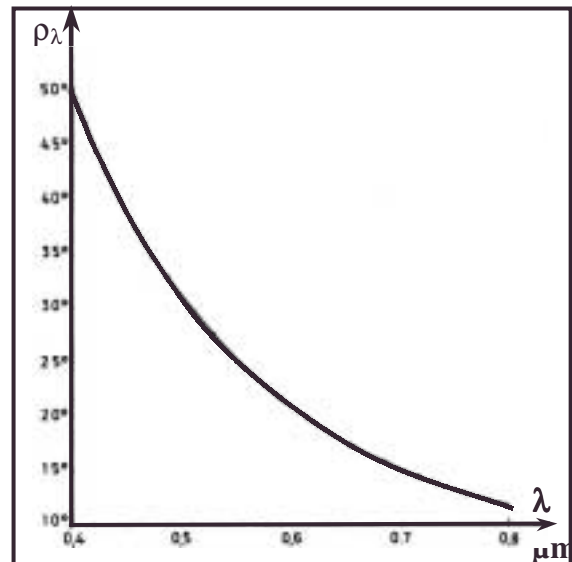
λ longueurs d'onde en μm	ρ_λ rotations	λ longueurs d'onde en μm	ρ_λ rotations
0,760	12,65°	0,527	27,54°
0,718	14,30°	0,486	32,76°
0,687	15,75°	0,431	42,59°
0,656	17,31°	0,410	47,48°
0,589	21,71°	0,400	50,00°

On admettra que le spectre visible est limité par les longueurs d'onde : 0,4 μm (violet) et 0,8 μm (rouge).

La lame de quartz utilisée a une épaisseur de 18 mm. L'expérience montre que le spectre visible observé au spectroscopie est sillonné de raies noires (spectre cannelé).

Expliquer pourquoi.

Combien observe-t-on de raies noires ?
En utilisant la courbe ci-contre, déterminer les longueurs d'onde correspondantes. Donner les résultats sous forme d'un tableau.



3. Combien de cannelures noires observerait-on, après avoir fait tourner l'analyseur de 90° ? Déterminer les longueurs d'onde correspondantes.

4. Indiquer les phénomènes observés pendant une rotation continue de l'analyseur.

5. La rotation ρ_λ par millimètre de quartz peut être représentée approximativement par la relation empirique $\rho_\lambda = \frac{A}{\lambda^2}$, A étant une constante.

Calculer A en utilisant la radiation $\lambda = 0,589\mu\text{m}$ raie jaune du sodium.

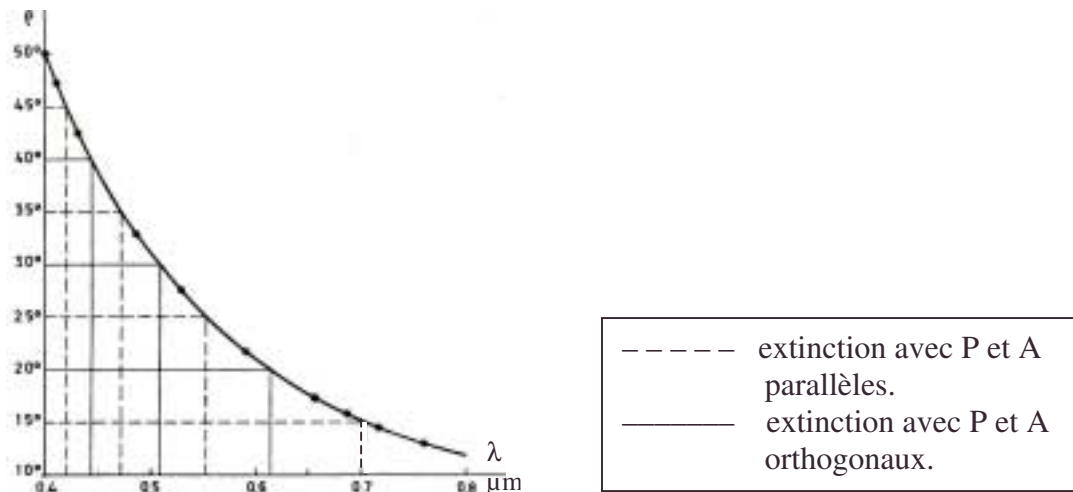
Vérifier la relation pour les radiations 0,687 μm et 0,400 μm .

I.N.A. ; Durée : 1h

Corrigé

1. On travaille en lumière parallèle autant qu'il est possible entre les lentilles L_1 , L_2 .

- analyseur[polariseur], effet d'une rotation continue de l'analyseur, faisceau lumineux à peu près parallèle dans un polarimètre, relation empirique du pouvoir rotatoire avec la longueur d'onde, tableau numérique



4. Envisageons la rotation continue de l'analyseur d'un angle

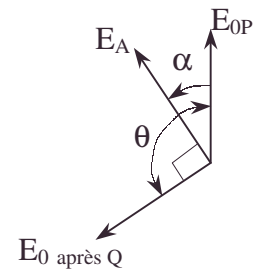
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

On voit d'après le schéma ci-contre qu'il y a des cannelures noires pour $(\theta_\lambda - \alpha) = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{N}^+$.

$$\theta_\lambda = 18\rho_\lambda = \alpha + (2k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Pour k donné, si α croît, comme ρ_λ est une fonction décroissante de λ , λ décroît.

Une cannelure noire de k donné se déplace dans le spectre du côté rouge vers le côté bleu quand α croît.



5.

λ en μm	0,589	0,687	0,400
$A = \rho_\lambda \lambda^2$ en μm^2	$A_1 = 7,53$	7,43	8,00
$\rho_\lambda = \frac{A_1}{\lambda^2}$ en $^\circ\text{mm}^{-1}$	21,71	15,96	47,1
$\rho_{\lambda\text{réel}}$ en $^\circ\text{mm}^{-1}$	21,71	15,75	50,00

La loi empirique établie pour $\lambda = 0,589\mu\text{m}$ est vérifiée à 1% près pour $\lambda = 0,687\mu\text{m}$.

Il y a un écart de 6% pour $\lambda = 0,400\mu\text{m}$.

En fait, A dépend de λ (interaction photon-matière).

Chapitre 1 : énergie et structure

Appartiennent aux programmes de MPSI, PCSI (PSI), PTSI,
TSI1, TPC1 et 2

1.1. Thermochimie

Egalement au programme PT et partiellement de BCPSI2

1.1.1. Température et pression d'explosion à volume constant

Considérons la réaction totale $\frac{1}{2}\text{H}_{2(g)} + \frac{1}{2}\text{Cl}_{2(g)} \rightarrow \text{HCl}_{(g)}$ pour laquelle la variation d'enthalpie standard $\Delta_r H^0$ à 25°C est égale à $-90,0\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Calculer la température et la pression maximales pouvant être atteintes dans l'explosion à volume constant d'un mélange pris initialement à 25°C sous la pression de 1 bar et dont les fractions molaires de H_2 et Cl_2 sont respectivement $x_{\text{H}_2} = 0,75$ et $x_{\text{Cl}_2} = 0,25$.

Les gaz diatomiques, supposés parfaits, ont une même capacité calorifique molaire à volume constant : $C_V = 20,88 + 0,0017 t$ (en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$), la température t étant exprimée en $^\circ\text{C}$.

Centrale

Corrigé



EI	0,25	0,75	0
EF	0	0,50	0,50

au total 1 mole.

Pour des gaz parfaits à T constant :

$$\Delta_r H = \Delta_r U + \Delta_r (PV) = \Delta_r U + RT\Delta_r n = \Delta_r U \quad \text{car } \Delta n = 0, \quad \text{et } \Delta_r H^0 = \Delta_r U^0 (= Q_V) .$$

En partant d'un mélange initial de 1 mole, on a 0,25 mole de H_2 et 0,75 mole de Cl_2 qui donneront 0,50 mole de HCl et un restant de 0,50 mole de Cl_2 ; on a un mélange final de 1 mole que $\Delta_r H^0$.0,5 chauffe à volume constant jusqu'aux conditions maximales de T et P.

$$-0,5 \cdot (\Delta H^0) = \int_{T_{298}}^{T_{\max}} 1 \cdot C_V dT = 21,39(T_{\max} - T_{298}) + \frac{0,0017}{2}(T_{\max}^2 - T_{298}^2) .$$

A.N. : $\Delta_r H^0 = -90,0\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$; $T_{\max} = 2211\text{K}$, or à n et V constants,

$$\frac{P_{\max}}{T_{\max}} = \frac{P_1}{T_1} \Rightarrow P_{\max} = T_{\max} \frac{P_1}{T_1} ; \text{ A.N. : } P_{\max} = 7,42\text{ bar} .$$

1.1.2. Température de flamme du monoxyde de carbone (1)

Préambule

Dans une inflammation, la réaction de combustion met en jeu un phénomène si rapide que l'on peut admettre que les échanges énergétiques avec l'extérieur n'ont pas le temps de se faire : le phénomène peut être considéré comme adiabatique et la chaleur dégagée sert à élever la température T des gaz de combustion.

Données numériques utiles

– Enthalpie standard de formation à 298 K ($\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$).

	$\text{CO}_{2(\text{g})}$	$\text{CO}_{(\text{g})}$
$\Delta_f H^0$	-393320	-110400

– Capacités calorifiques molaires à pression constante ($\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$).

	C_p^0
$\text{CO}_{2(\text{g})}$	$30,53 + 1,29 \cdot 10^{-2} T$
$\text{N}_{2(\text{g})}$	$27,17 + 4,18 \cdot 10^{-3} T$
$\text{O}_{2(\text{g})}$	$30,53 + 1,299 \cdot 10^{-2} T$
$\text{CO}_{(\text{g})}$	$26,97 + 2,509 \cdot 10^{-3} T$

– On prendra comme composition de l'air :

1 volume d'oxygène pour 3,8 volumes d'azote.

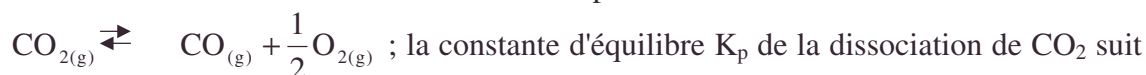
– Les gaz initiaux sont pris à température ambiante $T_0 = 298 \text{ K}$.

1. Calculer la température maximale théorique de la combustion isobare sous 1 bar du monoxyde de carbone dans les deux cas suivants :

a. avec la quantité théorique d'oxygène pur ;

b. avec la quantité théorique d'air.

2. En fait on doit considérer à ces températures la dissociation de CO_2 selon



la loi suivante : $\log K_p = -\frac{14800}{T} + 4,52$.

On demande de déterminer, dans ce cas, la valeur de la température maximale de flamme de CO avec la quantité théorique d'air, en tenant compte de la dissociation de CO_2 .

Centrale

Corrigé

1.a. $\text{CO}_{(\text{g})} + \frac{1}{2} \text{O}_{2(\text{g})} + (1,9\text{N}_{2(\text{g})}) \rightarrow \text{CO}_{2(\text{g})} + (1,9\text{N}_{2(\text{g})})$ de bilan :

EI 1 0,5 0_(a) ou 1,9_(b) 0 0_(a) ou 1,9_(b)

EF 0 0 0_(a) ou 1,9_(b) 1 0_(a) ou 1,9_(b)

Toute la chaleur sert à chauffer CO_2 : $Q_p = \int_{298}^T C_{p\text{CO}_2}^0 dT$.

$$\Delta_r H_1^0 = \Delta_f H_{\text{CO}_2}^0 - \Delta_f H_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{2} \Delta_f H_{\text{O}_2}^0 = -Q_p$$

A.N. : $\Delta_r H_1^0 = -393320 + 110400 - 0 = -282,920 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

• air, constante d'équilibre, C_p^0 , enthalpie standard de formation, combustion isobare

$$Q_p = 282920 = \int_{298}^T (30,53 + 1,299 \cdot 10^{-2} T) dT = 30,53(T - 298) + \frac{1,299}{2} \cdot 10^{-2} (T^2 - 298^2)$$

$$\Rightarrow T = 4761 \text{ K.}$$

b. La chaleur sert à chauffer 1 mole de CO₂ et 1,9 mole (cf. 3,8 / 2) de N₂ :

$$\text{A.N. : } 282920 = \int_{298}^T (30,53 + 1,9 \cdot 27,17 + 1,9 \cdot 4,18 \cdot 10^{-3} T + 1,299 \cdot 10^{-2} T) dT$$

$$= 82,153(T - 298) + 1,0466 \cdot 10^{-2} (T^2 - 298^2) \Rightarrow T = 2773 \text{ K.}$$

2. $\text{CO}_{(g)} + \frac{1}{2} \text{O}_{2(g)} \rightleftharpoons \text{CO}_{2(g)}$ et le gaz indifférent N₂. On rappelle : $P_i = X_i P$.

Bilan 1 0,5 0 1,9 ; au total 3,4 moles.

 1 - x 0,5(1-x) x 1,9 ; au total $3,4 - \frac{x}{2}$.

$$K_p = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}} \frac{1}{P_{\text{O}_2}^2}} = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \left(3,4 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 10^{4,52 - \frac{14800}{T}} \quad \textcircled{1} \quad \text{et le bilan thermique s'écrit :}$$

$$x \Delta_r H_1^0 = \int_{298}^T (x C_{\text{P}_{\text{CO}_2}}^0 + (1-x) C_{\text{P}_{\text{CO}}}^0 + 0,5(1-x) C_{\text{P}_{\text{O}_2}}^0 + 1,9 C_{\text{P}_{\text{N}_2}}^0) dT \quad \textcircled{2}.$$

A.N. : La résolution numérique par ordinateur de ces équations à deux inconnues donne $x = 0,68$; $T = 2697 \text{ K}$. On vérifiera les résultats par crainte d'instabilité de la résolution numérique

1.1.3. Température de flamme du monoxyde de carbone (2)

Données :

- Extrait de tables thermodynamiques (à $T_0 = 298 \text{ K}$).

Formule	Etat	$\Delta_f H^\circ$ en J.mol ⁻¹	C_p en J.mol ⁻¹ .K ⁻¹
CO	gaz	- 110500	29,1
CO ₂	gaz	- 393500	37,1
O ₂	gaz	0	29,4
N ₂	gaz	0	29,1

où $\Delta_f H^\circ$ est l'enthalpie standard de formation à 298 K.

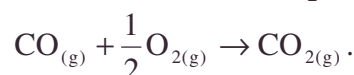
- Les capacités thermiques molaires à pression constante C_p sont supposées être indépendantes de la température.

- Les gaz sont considérés comme étant parfaits et la pression de référence est :

$$P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa.}$$

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On étudie la combustion rapide (donc adiabatique) d'une mole de CO dans la quantité juste suffisante d'air (composition molaire : 20 % de O₂ et 80 % de N₂) selon :



La température initiale des réactifs est celle des tables ($T_i = T_0 = 298 \text{ K}$).

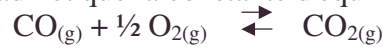
La combustion a lieu à pression constante ($P = P_0 = 1 \text{ bar}$).

1. Calculer la température maximale T_f susceptible d'être atteinte par l'ensemble des gaz en considérant que la réaction est totale, isobare et adiabatique (température maximale de flamme).

• air, combustion isobare, constante d'équilibre, deux équations non linéaires à deux inconnues, gaz parfait, monoxyde de carbone, résolution numérique informatique, tables thermodynamiques partielles, température de flamme

2. Si l'on effectue la combustion à volume constant plutôt qu'à pression constante, la température finale sera-t-elle plus élevée (justifier brièvement la réponse) ?

3. En réalité, vu la température atteinte, la réaction n'est certainement pas totale. En première approximation, on admet que la constante d'équilibre de la réaction :



varie avec la température absolue T selon la loi : $K(T) = \exp\left(a + \frac{b}{T}\right)$ ①

On donne : $a = -10,4$; $b = 34040 \text{ K}$.

a. Quelle justification théorique peut-on donner à l'expression de $K(T)$?

On se propose de déterminer une valeur plus vraisemblable de la température de flamme T_f atteinte. La réaction a lieu à pression constante ($P = P_0 = 1 \text{ bar}$) avec toujours la quantité suffisante d'air. On appelle α le taux de transformation de CO en CO_2 (α est inférieur à 1 puisque la réaction n'est pas totale).

b. Exprimer la constante d'équilibre K en fonction des pressions partielles des constituants, puis en fonction de α .

c. En utilisant la loi ①, donner l'expression de T_f en fonction de α (On notera cette fonction f_1 et calculer sa valeur pour $\alpha = 0,8$).

d. En effectuant un bilan thermique semblable à celui effectué en 1., donner une autre expression de T_f en fonction de α (on notera cette fonction f_2) et calculer sa valeur pour $\alpha = 0,8$.

e. En réalité, la valeur exacte de α est celle pour laquelle les fonctions f_1 et f_2 s'identifient. Rechercher par une méthode numérique cette valeur de α et celle de la température de flamme T_f atteinte.

Petites Mines ; Durée : 1h00

Corrigé

Le bilan total adiabatique peut être traduit : la chaleur produite à pression constante par la réaction sert à chauffer les produits présents de manière isobare.

$$1. \Delta_r H^0 = -C_{p_{\text{finaux}}} (T_f - T_0) \text{ avec } \Delta_r H_0 = \Delta_f H^0_{\text{produits}} - \Delta_f H^0_{\text{réactifs}} ;$$

A.N. : $\Delta_f H^0 = -238000 \text{ J.mol}^{-1}$ et $C_{p_{\text{finaux}}} = C_p(\text{CO}_2) + 2C_p(\text{N}_2)$ car il y a 4 fois plus de N_2 que de O_2 ; A.N. : $C_{p_{\text{finaux}}} = 95,3 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

$$T_f = T_0 - \Delta_r H^0 / C_{p_{\text{finaux}}} ; \text{ A.N. : } T_f = 3268 \text{ K}$$

2. La chaleur produite à volume constant sert à chauffer les produits présents à volume constant. La notation avec prime permet d'insister sur ce fait.

$$\Delta_r U' = -C_{v_{\text{finaux}}} (T'_f - T_0) \text{ avec } \Delta_r U' = \Delta_r H^0 - (\Delta_r n RT) \text{ et } \Delta_r n = -0,5 .$$

$$\Rightarrow \Delta_r U'^0 \approx \Delta_r H^0 ; T'_f = T_0 - \frac{\Delta_r H^0}{C_{v_{\text{final}}}} ;$$

$$\text{Vu } C_v = C_p - R, C_{v_{\text{finaux}}} = C_{p_{\text{finaux}}} - 3R ; \text{ A.N. : } C_{v_{\text{finaux}}} = 70,36 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} .$$

$$\text{A.N. : } T'_f = 4320 \text{ K} . \text{ On vérifie } T'_f > T_f .$$

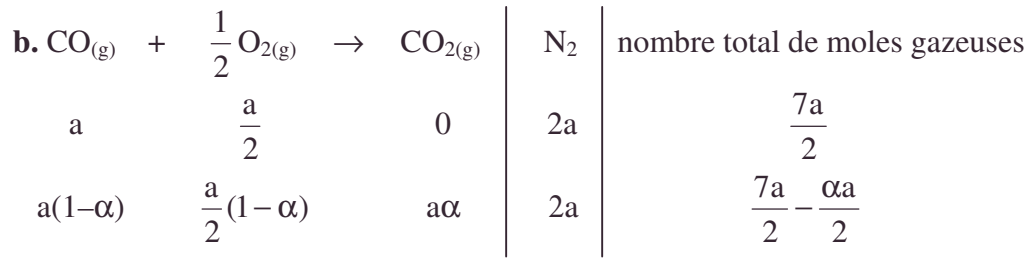
Comparaison théorique :

$$C_{v_{\text{finaux}}} = C_{p_{\text{finaux}}} - 3R \text{ donc } C_{v_{\text{finaux}}} < C_{p_{\text{finaux}}} \Rightarrow T'_f - T_0 > T_f - T_0 \Rightarrow T'_f > T_f .$$

• bilan thermique, constante d'équilibre, Ellingham, méthode numérique, taux de transformation adiabatique

$$\mathbf{3.a.} \Delta_r G^0(T) = -RT \ln K = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 \Rightarrow \ln K = -\frac{\Delta_r H^0}{RT} + \frac{\Delta_r S^0}{R} = \frac{b}{T} + a.$$

En faisant l'hypothèse d'Ellingham, $\Delta_r H^0 = bR$, $\Delta_r S^0 = aR$.



$$P_j = X_j P_0 ; P_{\text{CO}} = \frac{2(1-\alpha)P_0}{7-\alpha} ; P_{\text{CO}_2} = \frac{2\alpha P_0}{7-\alpha} ; P_{\text{O}_2} = \frac{(1-\alpha)P_0}{7-\alpha}.$$

$$K = \frac{P_{\text{CO}_2} P_0^{\frac{1}{2}}}{P_{\text{CO}} \sqrt{P_{\text{O}_2}}} = \frac{\alpha \sqrt{7-\alpha}}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} P_0^{\frac{1}{2}}.$$

c.

$$\frac{\alpha \sqrt{7-\alpha} P_0^{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \exp\left(a + \frac{b}{T}\right) \Rightarrow T_f = \frac{b}{\ln \frac{\alpha \sqrt{7-\alpha} P_0^{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha)^{\frac{3}{2}}} - a} = f_1(\alpha) ; \text{A.N. : } T_f = 2520 \text{ K}$$

$$\mathbf{d.} \Delta H_{\text{réel}} = \alpha \Delta_r H^0 = -C_{\text{P final}} (T_f - T_0).$$

$$C_{\text{P final}} = (1-\alpha)C_p(\text{CO}) + \frac{1}{2}(1-\alpha)C_p(\text{O}_2) + \alpha C_p(\text{CO}_2) + 2C_p(\text{N}_2) \Rightarrow T_f = T_0 - \frac{\alpha \Delta_r H^0}{C_{\text{P final}}}$$

$$T_f = \frac{283000\alpha}{102 - 6,7\alpha} + 298 = f_2(\alpha) ; \text{A.N. : } \alpha = 0,8 ; T_f = 2640 \text{ K}.$$

$$\mathbf{e.} f_1(\alpha) = f_2(\alpha) \Rightarrow \alpha = 0,774 \text{ et } T_f = 2560 \text{ K}.$$

1.1.4. Grillage du sulfure de plomb Rôle de la gangue

I. Etude de la réaction de grillage du sulfure de plomb.

Le minerai de plomb contient essentiellement de la galène PbS. Afin d'éliminer le soufre, il faut d'abord effectuer l'opération que l'on appelle grillage.

La réaction correspondante est : $\text{PbS}_{(s)} + \frac{3}{2} \text{O}_{2(g)} \rightarrow \text{PbO}_{(s)} + \text{SO}_{2(g)}.$

Afin de décomposer $\text{PbSO}_{4(s)}$ qui se forme au cours du grillage, la température doit être au moins égale à 950° C. Il faut cependant éviter d'atteindre 1114° C, température de fusion de PbS. (Exemples de contraintes métallurgiques ou minéralogiques).

1. A l'aide des données, exprimer puis calculer l'enthalpie standard de la réaction de grillage à 298 K.

2. Calculer l'enthalpie standard de la réaction à 1223 K. Calculer sa variation relative entre 298 K et 1223 K.

- exothermique, galène, gangue, grillage, minerai, réaction auto-entretenue, soufre, sulfure de plomb, tables thermodynamiques partielles, température de fusion

3. La réaction est exothermique. Les réactifs sont le minerai et de l'air, sachant que la composition molaire de l'air est de 80% de diazote et 20% de dioxygène. Les réactifs entrent à la température de 298 K et la réaction a lieu à 1223 K. Schématiquement on pourra considérer que la quantité de chaleur dégagée (transfert thermique) à pression constante sert à chauffer uniquement les réactifs entrant. En supposant que la transformation totale soit adiabatique, déterminer la température à laquelle sont portés les réactifs.

La réaction peut-elle être auto-entretenu ? Dans ce cas, faudrait-il prévoir un système de refroidissement ou doit-on apporter de l'énergie pour chauffer les réactifs jusqu'à 1223 K ?

4. En fait, le minerai est constitué d'un mélange de PbS et de gangue, à x % de PbS en moles. En considérant que la capacité calorifique (thermique) molaire de la gangue est de $48 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, calculer la valeur de x pour que la température atteinte soit de 1223 K. en se plaçant dans les mêmes conditions jusqu'au **3**.

On donne les enthalpies standard de formation à 298 K et les valeurs des capacités calorifiques molaires à pression constante, considérées comme constantes dans les intervalles de température considérés.

	PbS _(s)	PbO _(s)	O _{2(g)}	SO _{2(g)}	N _{2(g)}
$\Delta_f H_{298}^0 (\text{kJ}.\text{mol}^{-1})$	-100,4	-217,4	0	-296,8	0
$C_p^0 (\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1})$	49,5	45,8	29,4	39,9	29,1

Petites Mines ; Durée : 1h00

Corrigé

$$1. \Delta_r H_{298}^0 = \Delta_f H_{298}^0 (\text{PbO}_{(s)}) + \Delta_f H_{298}^0 (\text{SO}_{2(g)}) - \Delta_f H_{298}^0 (\text{PbS}_{(s)}) - \frac{3}{2} \Delta_f H_{298}^0 (\text{O}_{2(g)})$$

$$\text{A.N. : } \Delta_r H_{298}^0 = -413,8 \text{ kJ/mol.}$$

$$2.a. \Delta H_{r1223}^0 = \Delta_r H_{298}^0 + \int_{298}^{1223} \sum_i \nu_i C_{p_i}^0 dT = \Delta_r H_{298}^0 + (\sum_i \nu_i C_{p_i}^0) (T_{1223} - T_{298}).$$

$$\text{A.N. : } \Delta_r H_{1223}^0 = -421,1 \text{ kJ/mol.}$$

$$b. \text{Variation relative : } \left| \frac{\Delta_r H_{1223}^0 - \Delta_r H_{298}^0}{\Delta_r H_{298}^0} \right| = 0,018 = 1,8\%, \text{ ce qui est une variation très}$$

modérée pour un intervalle de 925K.

$$3. \text{Quantité de chaleur libérée par la réaction : } -\Delta_r H_{1223}^0.$$

Si elle sert à chauffer les réactifs entrants selon une méthode systémique en régime

$$\text{permanent} \Rightarrow -\Delta_r H_{1223}^0 = \sum_i \nu_i C_{p_i}^0 (T - T_{298}) \text{ avec } \sum_i \nu_i C_{p_i}^0 = C_{p_{\text{PbS}}}^0 + \frac{3}{2} C_{p_{\text{O}_2}}^0 + 6 C_{p_{\text{N}_2}}^0,$$

$$\text{en tenant compte des réactifs présents : PbS}_{(s)}, \frac{3}{2} \text{O}_{2(g)}, 6 \text{N}_{2(g)}$$

$$\text{d'où } T = T_{298} - \frac{\Delta_r H_{1223}^0}{\sum_i \nu_i C_{p_i}^0}. \text{ A.N. : } T = 1868 \text{ K.}$$

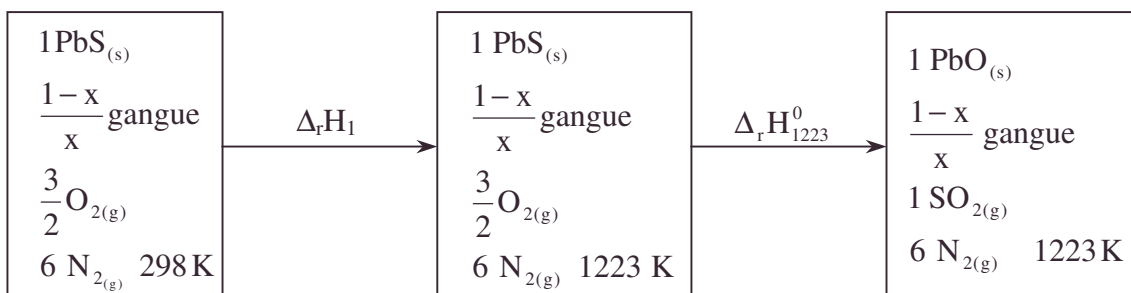
Cette température est supérieure à 1223 K, il faudra refroidir les réactifs pour que la réaction ait lieu à 1223 K. Ainsi la réaction pourra être auto-entretenu, on pourra détourner une partie de la chaleur libérée par la réaction.

4. Si on part d'une mole de minerai, on a 1-x mole de gangue et x mole de PbS.

- gangue, réaction auto-entretenu

Liaisons

Si on part d'une mole de $\text{PbS}_{(s)}$, on a $\frac{1-x}{x}$ mole de gangue ; la même procédure qu'en 3. est appliquée au nouveau cas auto-entretenu.



On a naturellement : $\Delta_r H_1 + \Delta_r H_{1223}^0 = 0$ avec $\Delta_r H_1 = \sum_i v_i C_{P_i}^0 (T_{1223} - T_{298})$,

avec $\sum_i v_i C_{P_i}^0 = C_{P_{\text{PbS}}}^0 + \frac{3}{2} C_{P_{\text{O}_2}}^0 + 6 C_{P_{\text{N}_2}}^0 + \frac{1-x}{x} C_{P_{\text{gangue}}}^0$.

A.N. : $T_{1223} - T_{298} = 925 \text{ K}$.

$$\Rightarrow \sum_i v_i C_{P_i}^0 = 268,2 + 48 \left(\frac{1-x}{x} \right) = \frac{421,1 \cdot 10^3}{925} \Rightarrow x = 0,20$$

On a 20% de PbS dans le minerai.

1.2. Liaisons

également au programme de PCSI et BCPST1

1.2.1. Tableau périodique

1. Quelles sont les structures électroniques de :

- l'atome d'oxygène (numéro atomique $Z = 8$) ?
- l'atome de fer ($Z = 26$),
- l'ion ferrique,
- l'atome d'argent ($Z = 47$).

2. Quel est l'élément qui a un numéro atomique Z compris entre 3 et 10 et qui a une réactivité chimique semblable à celle du silicium ($Z = 14$) ?

3. Quels sont la place dans la classification périodique et le nom :

- de l'élément le plus électronégatif ?
- de l'élément le moins électronégatif ?

Capes

Corrigé

1. Vu l'application des règles de remplissage des niveaux d'énergie croissants de Pauli, Hund et Klechkovski ,

a. $1s^2 2s^2 2p^4$.

b. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$.

c. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^0 3d^5$; l'ionisation concerne les couches les plus externes.

d. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1 4d^{10}$; anomalie de la structure électronique par rapport à la règle de Klechkovski commune vu la stabilité de la sous couche d complète

• césium, conditions normales, électronégatif, fluor, gaz parfait, liaison, nombre d'atomes dans une molécule, numéro atomique, phosphore, règle de Klechkovski, silicium, structure électronique, tableau périodique

2. Le carbone C pour lequel $Z = 6$, élément au-dessus du silicium, dans sa colonne du tableau périodique.

3.a. Le fluor F de $Z = 9$.

b. Le césium Cs de $Z = 55$.

1.2.2. Nombre d'atomes de la molécule de phosphore

250 g de phosphore à l'état gazeux occupent un volume de 50 dm^3 à 295 K et une pression de 1 bar. Sachant que la masse atomique molaire du phosphore vaut 31 g.mol^{-1} .

a. calculer le volume qui serait occupé par cette quantité de phosphore supposé gaz parfait dans les conditions normales ;

b. calculer le nombre d'atomes contenus dans une molécule de phosphore.

Capes

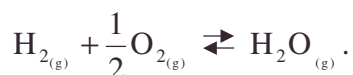
Corrigé

a. $V_0 = V \frac{T_0}{T}$; A.N. : $T_0 = 273 \text{ K}$; $V_0 = 46,27 \text{ dm}^3$.

b. $n = \frac{PV}{RT} = 2,07$; $x = \frac{m}{31.n}$; A.N. : $x = 3,9 \approx 4$. Il s'agit de la molécule P_4 à l'état gazeux.

1.2.3. Energies de liaison de la molécule H_2O

On donne l'enthalpie de formation standard de l'eau gazeuse à 298 K, $\Delta_f H_{298 \text{ K}}^0(\text{H}_2\text{O}, \text{g}) = -241,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$ correspondant à la réaction :



a. Calculer $\Delta_f H_{310 \text{ K}}^0(\text{H}_2\text{O}, \text{g})$, sachant que les capacités calorifiques standard de l'hydrogène, de l'oxygène et de l'eau, à l'état gazeux, sont respectivement égales à $29,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, $29,7 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ et $33,6 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, dans l'intervalle de température envisagé. Comparer le résultat obtenu à la valeur pour 298 K.

b. Déterminer l'énergie molaire E_{OH} de la liaison OH dans la molécule d'eau à l'état gazeux, sachant que les énergies molaires des liaisons HH et OO dans les molécules H_2 et O_2 sont respectivement égales à : $E_{\text{HH}} = -435,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$
 $E_{\text{OO}} = -494,5 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

c. Pourquoi y a-t-il une différence entre $\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}, \text{g})$ et $2E_{\text{OH}}$;

Capes

Corrigé

a. $\frac{d\Delta_f H^0}{dt} = \Delta_f C_p^0 \Rightarrow$

• chaleur latente molaire de sublimation, énergie de liaison, énergie de liaison covalente, liaison covalente, tables thermodynamiques partielles

Liaisons

$$\Delta_f H_{310}^0 = \Delta_f H_{298}^0 + (T_{310} - T_{298})(C_{P_{H_2O}}^0 - C_{P_{H_2}}^0 - \frac{1}{2}C_{P_{O_2}}^0); \text{A.N.: } \Delta_f H_{310}^0 = -241,84 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

L'écart entre les deux valeurs est négligeable.

$$\text{b. } H_{2(g)} + \frac{1}{2}O_{2(g)} \rightleftharpoons H_2O_{(g)}; \Delta_f H^0(H_2O, g) = 2E_{OH} - E_{HH} - \frac{1}{2}E_{OO},$$

$$\text{d'où : } E_{OH} = \frac{1}{2}\Delta_f H^0(H_2O, g) + \frac{1}{2}E_{HH} + \frac{1}{4}E_{OO}; \text{A.N.: } E_{OH} = -462,2 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

$$\text{c. } 2H_{(g)} + O_{(g)} \rightleftharpoons H_2O_{(g)}; \Delta'_f H^0 = 2E_{OH} \neq \Delta_f H^0.$$

Les réactifs étant différents dans les 2 modes b et c de formation de H_2O , on a bien :

$$2E_{OH} \neq \Delta_f H^0(H_2O, g).$$

1.2.4. Energies de liaison covalente (en considérant leur valeur absolue uniquement)

1. On considère une molécule $A - B$, A et B représentant des atomes ou des groupements d'atomes.

Définir de manière précise l'énergie de la liaison covalente $A - B$ dans cette molécule.

2. Calculer l'énergie E_σ de la liaison $C - C$ dans les alcanes.

3. Calculer l'énergie E_π de la liaison π dans les alcènes.

Données :

- Enthalpie de combustion molaire standard à 25°C

	C_{graphite}	C_2H_4	C_2H_6
$\Delta_r H^0 \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$	-393	-1410	-1532

- Enthalpie de formation molaire standard à 25°C de $H_2O_{(l)}$

$$\Delta_f H^0 = -286 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

- Energie de la liaison $H - H$

$$E_{H-H} = 431 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

- Energie de la liaison $C - H$ dans les hydrocarbures

$$E_{C-H} = 414 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

- Chaleur latente molaire de sublimation du graphite à 25°C

$$L_C = 718 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

CCP : Concours 1^{er} cycle universitaire ; Durée : 1h00

Corrigé

1. L'énergie de la liaison covalente $A - B$ est l'enthalpie de la réaction de dissociation de la molécule $A - B$ gazeuse, libre de toute interaction pour donner les deux éléments à l'état gazeux A et B : $A - B_{(g)} \rightleftharpoons A_{(g)} + B_{(g)}$; $E_l = \Delta_r H > 0$.

2.a. $C_{\text{graphite}} + O_{2(g)} \rightleftharpoons CO_{2(g)}$

$$\begin{aligned} \Delta_r H_l^0 &= \Delta_f H^0(CO_{2(g)}) - \Delta_f H^0(C_{\text{graphite}}) - \Delta_f H^0(O_{2(g)}) \\ &= \Delta_f(CO_{2(g)}) - 0 - 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \Delta_f H^0(CO_{2(g)}) = -393 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

Ce calcul est nécessaire pour **b**.

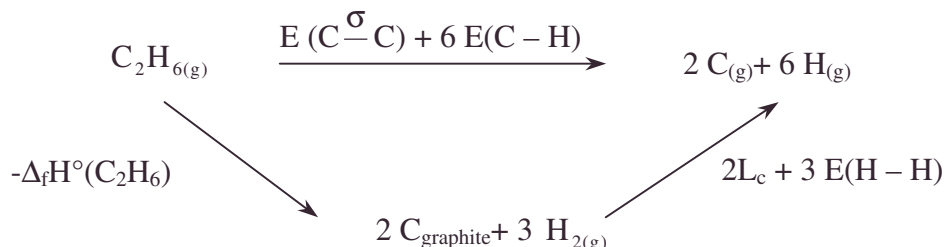
• acide méthanoïque, argon, béryllium, caractère ionique de la liaison, chlorure d'hydrogène, dimérisation, distance internucléaire, état d'hybridation, fer carbonyle, molécule, moment dipolaire, structure géométrique



$$\Delta_f H^0 = 2\Delta_f H^0(\text{CO}_2) + 3\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(l)}) - \Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_6).$$

A.N. : $\Delta_f H^0 = -1532 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $\Delta_f H^0_{\text{H}_2\text{O}_{(l)}} = -286 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

c. Utilisons la méthode du cycle :

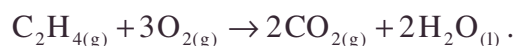


$$E(\text{C}\overset{\sigma}{\text{C}}) + 6E(\text{C}-\text{H}) = -\Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_6) + 2L_c + 3E(\text{H}-\text{H}) \Rightarrow$$

$$E_\sigma = -\Delta_f H^0_{\text{C}_2\text{H}_6} + 2L_c + 3E_{\text{HH}} - 6E_{\text{CH}}$$

A.N. : $E(\text{C}\overset{\sigma}{\text{C}}) = 357 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

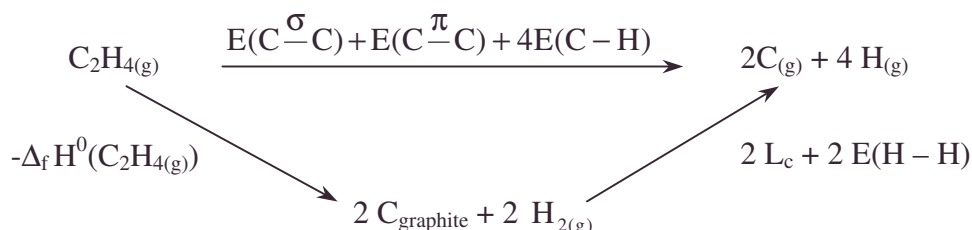
3.a. Considérons :



$$\Delta_f H^0 = 2\Delta_f H^0(\text{CO}_{2(g)}) + 2\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(l)}) - \Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_{4(g)}).$$

D'où : $\Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_4) = 52 \text{ kJ.mol}^{-1}$; calcul utile pour **b.**

b. Utilisons la méthode du cycle thermochimique :



$$E_1(\text{C}\overset{\sigma}{\text{C}}) + E(\text{C}\overset{\pi}{\text{C}}) + 4E(\text{C}-\text{H}) = -\Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_4) + 2L_c + 2E(\text{H}-\text{H}).$$

Vu $E(\text{C}\overset{\sigma}{\text{C}})$:

$$\begin{aligned}
 E_\pi &= -\Delta_f H^0_{\text{C}_2\text{H}_4} + 2L_c + 2E_{\text{HH}} - 4E_{\text{CH}} + \Delta_f H^0_{\text{C}_2\text{H}_6} - 3E_{\text{HH}} + 6E_{\text{CH}} - 2L_c \\
 &= \Delta_f H^0_{\text{C}_2\text{H}_6} - \Delta_f H^0_{\text{C}_2\text{H}_4} - E_{\text{HH}} + 2E_{\text{CH}} \Rightarrow \text{A.N. : } E_1(\text{C}\overset{\pi}{\text{C}}) = 233 \text{ kJ.mol}^{-1}.
 \end{aligned}$$

1.2.5. Molécules

1. La molécule de chlorure d'hydrogène HCl a un moment dipolaire $\mu_{\text{HCl}} = 1,070 \text{ D}$. On rappelle que $1 \text{ D} = 0,33 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$ et que $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Sachant que la distance internucléaire dans la molécule HCl est égale à $d = 1,31 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, calculer le pourcentage de caractère ionique de la liaison H-Cl.

• arête, chlorure de potassium, chlorure de sodium, cristallographie, dipôles induits, forces de Van der Waals, hexaèdre, krypton, liaison hydrogène, London, rayon ionique, règle de stabilité de Sigdwick, structure cristalline

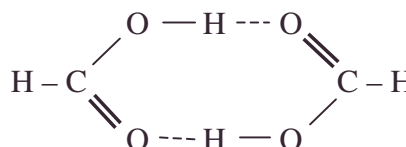
Liaisons

2. Sachant que le numéro atomique du béryllium est $Z = 4$,
 - a. Quelle est la structure géométrique de la molécule BeH_2 ?
 - b. Quel est l'état d'hybridation du béryllium dans cette molécule ?
- 3.a. Donner la structure géométrique de la molécule de fer carbonyle : $\text{Fe}(\text{CO})_5$.
 b. A quelle règle y satisfait la distribution électronique autour de l'atome de fer ?
4. Quel est le type d'interaction existant entre les atomes d'argon ($Z = 18$) dans l'argon liquide ?
5. Justifier la possibilité d'une dimérisation de l'acide méthanoïque HCOOH . Faire un schéma simplifié représentatif du dimère. Quelles en sont les conséquences physicochimiques ?

Capes

Corrigé

1. $x = \frac{\mu_{\text{HCl}}}{ed}$; A.N. : $x = 0,168 = 16,8\%$.
- 2.a. La structure $\text{H} - \text{B} - \text{H}$ de BeH_2 est linéaire vu la théorie VSEPR.
 b. Hybridation sp , méthode de calcul des fonctions d'onde moléculaire à partir des fonctions d'onde atomique pondérées à égalité pour les niveaux s et p .
- 3.a. Fe est au centre d'un hexaèdre dont les 5 sommets sont occupés par CO. (Bipyramide à base triangulaire équilatérale).
 b. L'atome de fer de $Z = 26$ se trouve avec la même distribution électronique que le krypton $Z = 36$ (en recevant 5 doublets des ligands), gaz rare stable de la même ligne du tableau périodique ; c'est la règle de stabilité de Sigdwick.
4. L'existence de l'argon liquide est due aux forces de Van der Waals –cf. étude de London sur les dipôles induits.
5. Les liaisons hydrogènes permettent de comprendre l'existence du dimère :
 Conséquences physicochimiques : on aura des températures de changement d'état plus élevées ;
 l'acidité, la réactivité à SOCl_2 et PCl_5 seront augmentées.

**1.2.6. Interaction de dipôles**

Voir page 599.

1.2.7. Synthèse de Diels-Adler du terpinéol (Théorie de Hueckel)

Voir page 1725.

1.3. Cristallographie également au programme de PC

1.3.1. Le cristal de chlorure de potassium

Le chlorure de potassium a la même structure cristalline que le chlorure de sodium. Les masses atomiques molaires relatives du chlore et du potassium valent respectivement 35,5 et 39 ; la constante d'Avogadro N_A a pour valeur $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; la masse volumique ρ du chlorure de potassium est égale à $1,988 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ à 15° C .

a. Quelle est, à cette température, la longueur a de l'arête de la maille élémentaire du chlorure de potassium ?

b. Quel est le rayon ionique $r(\text{K}^+)$ de l'ion potassium K^+ , sachant que le rayon ionique $r(\text{Cl}^-)$ de l'ion chlorure Cl^- est égal à $1,81 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Capes

Corrigé

a. Le chlorure de sodium a un cristal ayant 2 structures cubiques faces centrées décalées d'une demi arête. Une structure cubique à faces centrées affecte 4 particules en propre par cube : $4 = \frac{8}{8} + \frac{6}{2}$ en distinguant les 8 sommets appartenant à 8 cubes et les 6 centres de face appartenant à 2 cubes.

$$\rho = \frac{4 (39 + 35,5) \cdot 10^{-3}}{a^3 N_A} \text{ en kg.m}^{-3}, \text{ d'où : } a = \left[(39 + 35,5) \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\rho N_A} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{A.N. : } a = 6,29 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

b. Sur une arête, en admettant l'état tangent des sphères chargées de signes opposés alternativement, on a :

$$a = 2r_{(\text{K}^+)} + 2r_{(\text{Cl}^-)} \Rightarrow r_{(\text{K}^+)} = \frac{a}{2} - r_{(\text{Cl}^-)} ; \text{A.N. : } r_{(\text{K}^+)} = 1,336 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

1.3.2. Composés interstitiels fer – carbone

Dans l'intervalle de température $[1185 \text{ K} - 1667 \text{ K}]$, le fer a une structure cristalline cubique à faces centrées (CFC). Cette variété allotropique du fer est désignée par Fe_γ .

A la température de 1200 K , le paramètre de la maille élémentaire de Fe_γ est égal à $0,3647 \text{ nm}$.

Le carbone de rayon atomique $r_c = 0,077 \text{ nm}$ peut entrer en solution dans Fe_γ en occupant les sites interstitiels octaédriques de la structure CFC.

La teneur en carbone des solutions solides obtenues peut être exprimée :

- soit par le rapport atomique $y_c = \frac{n_c}{n_{\text{Fe}}}$ où n_c et n_{Fe} sont respectivement le nombre

d'atomes de carbone et le nombre d'atomes de fer dans la phase étudiée.

- soit par le pourcentage en masse de carbone X_c dans la phase étudiée.

$$1. \text{ Vérifier que : } X_c = \frac{100 y_c}{4,654 + y_c}.$$

Masses molaires des éléments en g.mol^{-1} : $M_{\text{Fe}} = 55,85$; $M_c = 12$.

2. Calculer la valeur maximale du rayon de la sphère inscriptible dans un site interstitiel octaédrique du Fe_γ et la comparer à la valeur de r_c .

• CFC, composé interstitiel fer – carbone, octaédrique, paramètre de maille élémentaire, site interstitiel octaédrique, site octaédrique, solution solide, structure cubique faces centrées, variété allotropique

3. Si tous les sites interstitiels octaédriques du Fe γ étaient occupés par un atome de carbone, quels seraient le rapport atomique théorique (y_c)_{th} et le pourcentage en masse théorique (X_c)_{th} du carbone dans la solution solide correspondante ?

ENSAM

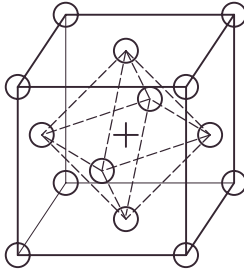
Corrigé

$$I.1. X_c = 100 \frac{m_c}{m_c + m_{Fe}} = 100 \frac{n_c \frac{M_c}{N_A \cdot 10^3}}{n_c \frac{M_c}{N_A \cdot 10^3} + n_{Fe} \frac{M_{Fe}}{N_A \cdot 10^3}}.$$

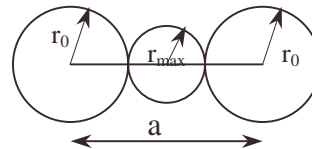
Divisons numérateur et dénominateur par $n_{Fe} M_c$:

$$X_c = 100 \frac{y_c}{y_c + \frac{M_{Fe}}{M_c}} = 100 \frac{y_c}{y_c + 4,654}.$$

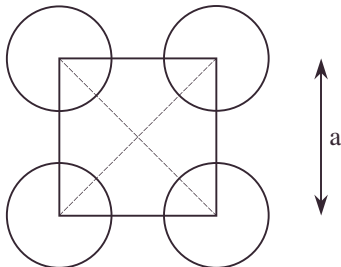
2. Considérons le site octaédrique, plus simple à voir au centre de la maille CFC que au centre d'une arête.



a. Selon les six directions principales de l'octaèdre, nous avons : $2 r_{max} + 2 r_{Fe} = a$



b. Les atomes de fer sont tangents sur chaque face du cube : $4 r_{Fe} = a \sqrt{2}$, d'où :



$$r_{max} = \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$A.N. : r_{max} = 0,0534 \text{ nm}.$$

On voit $r_c > r_{max}$; On peut envisager :

- une augmentation de a ;
- Des contraintes modifiant les rayons r_c .

3.a. Vu 8 atomes aux sommets, partagés entre 8 cubes

6 atomes aux centres des faces partagés entre 2 cubes

Nombre d'atomes de fer appartenant en propre à la maille CFC : $\Rightarrow \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$.

b. Nombre de sites octaédriques : 1 au centre du cube, 12 au centre de chaque arête partagés entre 4 cubes.

$$1 + \frac{12}{4} = 4 \Rightarrow y_{c_{th}} = 1 ; A.N. : X_{c_{th}} = \frac{100}{5,654} = 17,7.$$

Ordre de grandeur acceptable, cela justifie la méthode de mesure du problème continué page 1553.

1.3.3. Conductivité du silicium

Voir page 605

1.3.4. Tirage d'un monocristal de germanium

Voir page 680

1.3.5. Diagrammes binaires mettant en jeu des cristaux

Voir pages 1543 et 1546

On n'a pas utilisé la notion statistique de corrélation illusoire sur un faible nombre de données expérimentales

2.1. Ordre d'une décomposition gazeuse

Dans certaines conditions, la décomposition de N_2O se fait suivant la réaction gazeuse :



que l'on suit à volume constant par des mesures de pression. Les résultats sont consignés

dans le tableau suivant, pour $T = 990^\circ C$, $\left(1 \text{ torr} = \frac{101325}{760} \text{ Pa} \right)$.

t /min	0	30	53	100
p /torr	100	116	125	136

- Calculer la pression finale et déterminer le temps de demi-réaction.
- A la même température, mais pour une pression initiale de 400 torrs, le temps de demi réaction est de 52 minutes. Quel est l'ordre de la réaction ?

Capes

Corrigé



$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 0 & & 0 & \text{nombre total } 2, & p_0 = 2 \frac{RT}{V} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2-2\xi & & 2\xi & & \xi & \text{nombre total } 2+\xi ; & p = (2+\xi) \frac{RT}{V} \end{array}$$

a.α. $P_f = 150$ torrs, car pour deux moles initiales on a à la fin trois moles c'est-à-dire pour $\xi = 1$.

β. La demi réaction est donc caractérisée par $p = 125$ torrs pour $\xi = 0,5$.

La lecture du tableau donne $\tau = 53$ minutes.

b. Prenons α ordre de la réaction :

$$\frac{1}{2} \frac{d(N_2O)}{dt} = -k(N_2O)^\alpha ; \frac{d(N_2O)}{(N_2O)^\alpha} = -2k dt ; \frac{(N_2O)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(N_2O)_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -2kt ,$$

$$1^{\text{ère}} \text{ étude à } p_0 = 100 \text{ torrs : pour } (N_2O) = \frac{(N_2O)_0}{2} : 2k\tau = \frac{(N_2O)_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\alpha}} \right) ;$$

$2^{\text{ème}} \text{ étude à } p_0 = 400 \text{ torrs :}$

$$\text{pour } (N_2O) = \frac{(N_2O)'_0}{2} = \frac{4(N_2O)_0}{2} : 2k\tau' = 4^{1-\alpha} \frac{(N_2O)_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\alpha}} \right)$$

$$\frac{\tau'}{\tau} = 4^{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{\ln \frac{\tau'}{\tau}}{\log 4} \# 1 .$$

2.2. Suivi de la pression totale

La décomposition thermique de l'éthanal fournit du méthane et du monoxyde de carbone selon une réaction totale en phase gazeuse, décrite par le schéma réactionnel suivant : $CH_3CHO_{(g)} \rightarrow CH_{4(g)} + CO_{(g)}$

Afin d'étudier la cinétique de cette décomposition, on introduit initialement le l'éthanal pur dans un réacteur à volume constant. La température du milieu réactionnel est

- cinétique, éthanal, hectopascal, méthane, monoxyde de carbone, ordre, réaction gazeuse, temps de demi-réaction, torr, volume constant

maintenue à 477° C. L'évolution de la décomposition est suivie par mesure de la pression totale du mélange gazeux en fonction du temps. Le tableau ci-dessous rassemble les valeurs expérimentales obtenues. Le temps t est exprimé en minutes (min) et la pression totale P est exprimée en hectopascals (hPa).

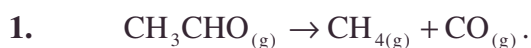
t (min)	0	4	9	14	20	26,5	34	42,5	53
P (hPa)	283	297	312	326	340	354	368	382	397

Les diverses espèces gazeuses présentes se comportent comme des gaz parfaits de constante molaire $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Calculer les pressions partielles de l'éthanal pour les valeurs du temps indiquées dans le tableau.
2. Calculer les concentrations volumiques molaires correspondantes.
3. Déterminer l'ordre cinétique n de la réaction et la valeur de la constante de vitesse k.
4. Calculer le temps de demi-réaction, si la même quantité initiale d'éthanal était introduite dans un réacteur de volume double du précédent et pour la température de 477° C.

ENSAM

Corrigé



bilan

n_0	0	0	
$n_0 - \xi$	ξ	ξ	total : $n_0 + \xi$

$$P_0 = n_0 \frac{RT}{V}; P_{\text{CH}_3\text{CHO}} = (n_0 - \xi) \frac{RT}{V}; P_{\text{CH}_4} = P_{\text{CO}} = \xi \frac{RT}{V}; P = (n_0 + \xi) \frac{RT}{V}$$

$$\Rightarrow P_{\text{CH}_3\text{CHO}} = 2P_0 - P. \text{ A.N. : voir tableau en 3.}$$

2. $P_{\text{CH}_3\text{CHO}} = (\text{CH}_3\text{CHO}) RT \Rightarrow (\text{CH}_3\text{CHO}) = \frac{P_{\text{CH}_3\text{CHO}}}{RT}$; unité : $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$.

A.N. : voir tableau en 3..

3. Faisons l'hypothèse de l'ordre 2 :

$$\frac{d(\text{CH}_3\text{CHO})}{dt} = -k(\text{CH}_3\text{CHO})^2 = \frac{1}{(\text{CH}_3\text{CHO})} - \frac{1}{(\text{CH}_3\text{CHO})_0} = kt.$$

Ici, CH_3CHO est en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

$$k = \frac{1}{t} \frac{(\text{CH}_3\text{CHO})_0 - (\text{CH}_3\text{CHO})}{(\text{CH}_3\text{CHO})(\text{CH}_3\text{CHO})_0} = \left(\frac{1}{t} \frac{(P_0 - P)}{P_0(2P_0 - P)} \right).$$

Si il existe k constant $\forall t$, l'hypothèse ordre 2 est vérifiée. (cf. tableau).

t min	0	4	9	14	20	26,5	34	42,5	53
$P_{\text{CH}_3\text{CHO}}$ (hPa)	283	269	254	240	226	212	198	184	169
(CH_3CHO) $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$	4,54	4,31	4,07	3,85	3,62	3,40	3,18	2,95	2,71
k	—	2,94	2,83	2,82	2,80	2,79	2,77	2,79	2,81

$\forall t$, on peut adopter $k = 2,80 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \Rightarrow n = 2$.

4. Pour une réaction d'ordre 2, on calcule :

$$(\text{CH}_3\text{CHO}) = \frac{(\text{CH}_3\text{CHO})_0}{2} \text{ pour } \tau = \frac{1}{k(\text{CH}_3\text{CHO})_0}.$$

Si $(\text{CH}_3\text{CHO})_0$ est divisé par 2, $\tau' = \frac{2}{k(\text{CH}_3\text{CHO})_0} = 2\tau$.

A.N. : $\tau = 78,67 \text{ min}$; $\tau' = 157,33 \text{ min}$.

2.3. Cinétique des SN

1. On étudie la cinétique de la réaction totale de substitution nucléophile $\text{R Br} + \text{OH}^- \rightarrow \text{ROH} + \text{Br}^-$, en déterminant les vitesses initiales correspondant à différentes concentrations initiales de réactifs. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau I où les vitesses initiales exprimées en $\text{mole.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ sont désignées par v et où le symbole () représente la concentration initiale d'un réactif en mole.L^{-1} .

Tableau I

Vitesse initiale v_i	(OH^-)	(R Br)
$v_1 = 0,12$	10^{-3}	10^{-3}
$v_2 = 0,12$	2.10^{-3}	10^{-3}
$v_3 = 0,24$	3.10^{-3}	2.10^{-3}

Déterminer les ordres partiels et la constante de vitesse avec son unité.

2. La réaction totale : $\text{R'Br} + \text{OH}^- \rightarrow \text{R'OH} + \text{Br}^-$ étudiée de la même manière, donne lieu aux résultats consignés dans le tableau II. On utilise les mêmes conventions et les mêmes unités.

Tableau II

Vitesse initiale v'_i	$[\text{OH}^-]$	$[\text{R' Br}]$
$v'_1 = 4,4.10^{-4}$	10^{-1}	10^{-1}
$v'_2 = 8,8.10^{-4}$	2.10^{-1}	10^{-1}
$v'_3 = 2,6.10^{-3}$	3.10^{-1}	2.10^{-1}

Déterminer les ordres partiels et la constante de vitesse avec son unité.

3. On sait par ailleurs que les dérivés bromés étudiés sont le 1-bromopropane et le 2-bromo-2-méthylpropane. Ecrire les formules correspondant respectivement à R et R'. Justifier brièvement votre réponse.

CCP

Corrigé

1. Le tableau permet de trouver les ordres (supposés exister) tels que $v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{OH}^-]^\beta$.

a. v est indépendant de (OH^-) à (RBr) constant (expériences 1 et 2) $\Rightarrow \beta = 0$

b. v double quand (RBr) est doublé (expérience 3) $\Rightarrow \alpha = 1$

c. A.N. : $k = \frac{v}{[\text{RBr}]}$; A.N. : (3 résultats identiques) : $k = 120 \text{ min}^{-1}$

2. Le tableau permet de trouver les ordres (supposés exister) tels que $v = k'[\text{R'Br}]^{\alpha'} [\text{OH}^-]^{\beta'}$.

a. v double (à RBr constant) quand on double (OH^-) (expériences 1 et 2): $\beta' = 1$

$$\text{b. } \beta'=1 ; \frac{v_1}{v_3} = \left(\frac{[\text{R}'\text{Br}]_1}{[\text{R}'\text{Br}]_3} \right)^{\alpha'} \frac{(\text{OH}^-)_1}{(\text{OH}^-)_3} \Rightarrow \alpha' = \frac{\ln \frac{v_1}{v_3} - \ln \frac{(\text{OH}^-)_1}{(\text{OH}^-)_3}}{\ln \frac{(\text{R}'\text{Br})_1}{(\text{R}'\text{Br})_2}}.$$

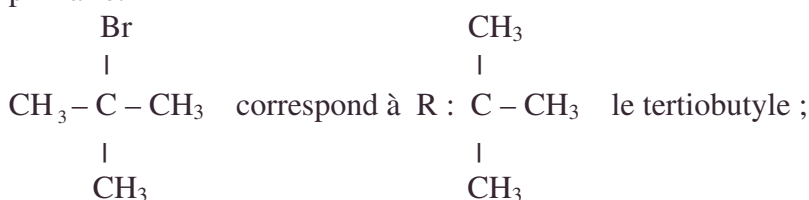
AN : $\alpha' = 1$.

On obtient une vérification numérique en changeant l'indice 1 en 2 dans l'expression de α' .

$$k' = \frac{V}{(\text{R}'\text{Br})(\text{OH}^-)} ; \text{A.N. : } k' = 0,044 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{min}^{-1}.$$

3. Le cours permet d'affirmer que RBr subit une SN1 et R'Br une SN2.

L'instabilité des carbocations primaires et l'encombrement stérique des complexes activés avec substitution sur un carbone tertiaire les justifient. R est tertiaire, R' est primaire.



$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{Br}$ correspond à R' : $\text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$ le propyle.

2.4. Substitution nucléophile inorganique

Le mécanisme de la réaction de l'iode sur les thiosulfates comporte deux étapes :

– 1^{ère} étape de constante de vitesse k_1 : $\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + \text{I}_2 \rightarrow \text{S}_2\text{O}_3\text{I}^- + \text{I}^-$.

– 2^{ème} étape de constante de vitesse k_2 : $\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + \text{S}_2\text{O}_3\text{I}^- \rightarrow \text{S}_4\text{O}_6^{2-} + \text{I}^-$.

a. Préciser les déplacements de charge et les réactifs nucléophiles de ces deux étapes.

En admettant une loi de vitesse globale $v = k_1(\text{I}_2)(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})$,

avec (I_2) = concentration en diiode et $(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})$ = concentration en ions thiosulfates,

b. dire quelle est l'étape déterminante ;

c. trouver v à l'aide du principe de l'état stationnaire ;

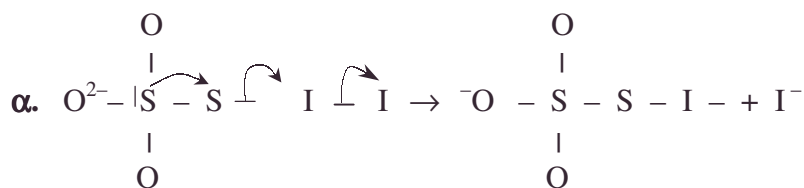
d. représenter par un schéma les variations de l'enthalpie libre standard de la réaction en cours d'évolution ;

e. qu'appelle-t-on enthalpie libre d'activation d'une étape?

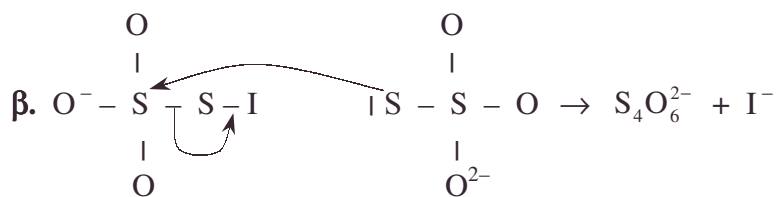
Capes

Corrigé

a. $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ est nucléophile dans les deux étapes :



- carbocation, carbone tertiaire, complexe activé, encombrement stérique, enthalpie libre d'activation, étape déterminante, principe de l'état stationnaire, profil réactionnel, réactifs nucléophiles, SN1, SN2, tertibutyle, thiosulfate



b. La première étape impose sa vitesse car la vitesse globale égale la vitesse de cette étape.

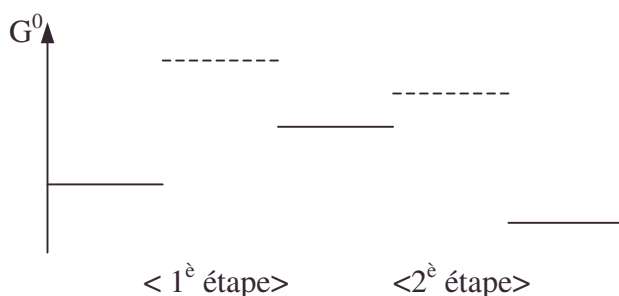
c. Appliquons le principe de Bodenstein ou de l'état stationnaire à l'intermédiaire $\text{S}_2\text{O}_3\text{I}^-$;

$$\frac{d}{dt}(\text{S}_2\text{O}_3\text{I}^-) = 0 = k_1(\text{I}_2)(\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) - k_2(\text{S}_2\text{O}_3\text{I}^-)(\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) \Rightarrow (\text{S}_2\text{O}_3\text{I}^-) = \frac{k_1}{k_2}(\text{I}_2)$$

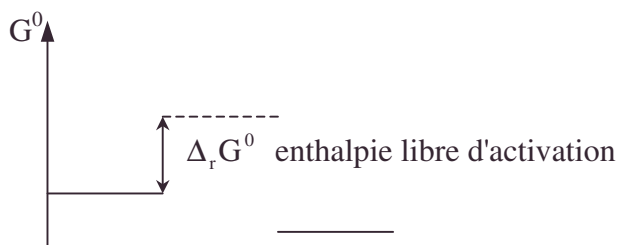
$$\text{or : } v = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = \frac{1}{2} [k_1(\text{I}_2)(\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) + k_2(\text{S}_2\text{O}_3\text{I}^-)(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})] = k_1(\text{I}_2)(\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) \text{ après}$$

remplacement de $(S_2O_3I^-)$.

d.



e.



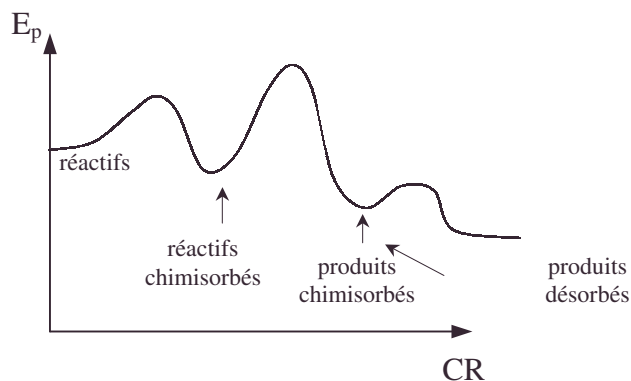
2.5. Profil réactionnel d'une catalyse avec chimisorption

Tracer l'allure du profil réactionnel le plus simple d'une réaction utilisant une catalyse hétérogène avec chimisorption.

Capes

Corrigé

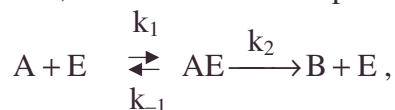
Exemple de l'hydrogénation catalytique (Ni ou Pt) de l'éthylène en éthane.



- catalyse, chimisorption, principe de Bodenstein ou de l'état stationnaire, profil réactionnel

2.6. Constante de Michaelis en catalyse

On considère la réaction $A \rightarrow B$ en présence d'un catalyseur E qui agit en formant un complexe activé, symbolisé AE, selon le schéma simplifié suivant :



k_1 , k_{-1} et k_2 étant les constantes de vitesse correspondantes, ce qui revient à négliger la formation de AE à partir de B et de E.

1. Exprimer la vitesse de formation de AE en fonction de (A), de (AE), des constantes de vitesse et de la concentration initiale du catalyseur E_0 .

Montrer qu'il peut exister un état stationnaire dans lequel la concentration du complexe activé (AE) est constante.

Exprimer cette concentration en fonction de (A), E_0 et de $K_M = \frac{k_2 + k_{-1}}{k_1}$.

K_M est appelée "constante de Michaelis".

2. L'état stationnaire précédent étant supposé atteint, exprimer la vitesse de disparition de A en fonction de (A), E_0 , k_2 et K_M .

3. Intégrer l'équation différentielle obtenue en 2. dans les deux cas suivants :

a. (A) $\gg K_M$.

b. (A) $\ll K_M$.

Donner l'ordre de la réaction dans les deux cas considérés.

Quelle est la concentration de AE à l'état stationnaire dans le cas a. ?

4. Le D-glucose peut être oxydé en acide D-gluconique par l'oxygène moléculaire en présence d'un catalyseur enzymatique, la glucose oxydase.

La réaction s'écrit :



Elle relève du schéma précédent dans la mesure où, si l'on opère en solution aqueuse et sous une pression partielle constante d'oxygène, les concentrations (ou activité) de O_2 et H_2O sont constantes et n'interviennent pas dans l'écriture des vitesses de réaction.

On peut suivre la concentration de l'eau oxygénée formée.

A un même volume d'une solution contenant une concentration fixe de glucose oxydase on ajoute des quantités variables de D-glucose et on mesure l'intervalle de temps Δt nécessaire pour que la concentration de l'eau oxygénée passe d'une valeur C_1 à une valeur C_2 ($C_2 > C_1$) non données numériquement ici.

On a le tableau suivant :

Quantité de D-glucose introduite (μg)	$\Delta t(\text{s})$
100	89,6
150	67,2
200	44,8

Dans quel cas se trouve-t-on du point de vue cinétique ?

En déduire une méthode de dosage du D-glucose.

On veut doser une solution de D-glucose de concentration inconnue. On applique le mode opératoire précédent et on mesure un intervalle de temps Δt de 80,6 s. En déduire la quantité de D-glucose introduite.

ESPCI ; Durée : 1h

Corrigé

$$1.a. \frac{d(AE)}{dt} = k_1(A)(E) - k_{-1}(AE) - k_2(AE).$$

$$\frac{d(E)}{dt} = -k_1(A)(E) + k_{-1}(AE) + k_2(AE) \text{ ainsi } \frac{d(E)}{dt} + \frac{d(AE)}{dt} = 0 \Rightarrow (E) + (AE) = E_0 + 0$$

$$\text{On peut éliminer } (E) = E_0 - (AE) \Rightarrow \frac{d(AE)}{dt} = k_1(A)E_0 - k_1(A)(AE) - (k_1 + k_2)(AE).$$

$$\text{En introduisant la constante de Michaelis : } \frac{d(AE)}{dt} = k_1[E_0(A) - [(A) + K_M](AE)].$$

b. Cherchons un éventuel état stationnaire pour AE.

$$\frac{d(AE)}{dt} = 0 \text{ est tel que } (AE) = \frac{E_0(A)}{(A) + K_M} :$$

c'est possible si (AE) est constante, par exemple quand (A) >> K_M, alors (AE) = E₀.

$$2. \text{Ecrivons la conservation de A : } (A) + (AE) + (B) = \text{cste} ; \frac{d(A)}{dt} + \frac{d(AE)}{dt} + \frac{d(B)}{dt} = 0.$$

$$\text{or } \frac{d(B)}{dt} = k_2(AE) = \frac{k_2 E_0(A)}{(A) + K_M} \Rightarrow -\frac{d(A)}{dt} = \frac{k_2 E_0(A)}{(A) + K_M}.$$

$$3.a. (A) \gg K_M ; (AE) = E_0 ; -\frac{d(A)}{dt} = k_2 E_0 \text{ réaction d'ordre 0 ; } (A) = A_0 - k_2 E_0 t.$$

$$b. (A) \ll K_M ; \frac{d(A)}{dt} = -\frac{k_2 E_0}{K_M} A ; \text{ réaction d'ordre 1 ; } A = A_0 \exp \frac{-k_2 E_0 t}{K_M}.$$

4.a. Identifications :

A : D – glucose ; B : acide D – gluconique + H₂O₂ ; E : glucose oxydase, on a :

C = (H₂O₂) = (acide D – gluconique) .

On constate par le tableau donné que la relation numérique entre A₀ et Δt est linéaire pour C₂ – C₁ et A₀ fixés.

$$\text{Essayons l'hypothèse a. soit l'ordre zéro : } \frac{dC}{dt} = -\frac{d(A)}{dt} \Rightarrow C_2 - C_1 = (A)_1 - (A)_2.$$

$$\text{or, } (A) = -k_2 E_0 t + A_0 ; (A)_1 - (A)_2 = +k_2 E_0 (t_2 - t_1) + A_{0_1} - A_{0_2} = C_2 - C_1.$$

$$\text{aussi, } A_{0_2} = k_2 E_0 \Delta t - (C_2 - C_1) + A_{0_1} \text{ traduction de la loi } A_0, \Delta t \text{ linéaire.}$$

Le cas **a.** est vérifié (et le cas **b.** ne l'est pas cf. loi exponentielle).

b. Méthode de dosage : acceptant la loi linéaire précédente entre A₀, Δt, en mesurant Δt on obtient A₀

c. On trouve par interpolation linéaire une quantité de 120 μg de D-glucose.

2.7. Cinétique d'une estérification

On étudie l'estérification du butan-1-ol par l'acide acétique. La réaction a lieu à 25° C en solution dans le tétrachlorure de carbone (tétrachlorométhane), en présence d'acide chlorhydrique (une seule phase pour l'ensemble).

Dans ces conditions :

- La réaction est totale.
- L'acide chlorhydrique est totalement dissocié.
- L'acide acétique n'est pratiquement pas dissocié.
- La vitesse de la réaction peut être représentée par une expression de la forme :

$$v = k[\text{CH}_3\text{COOH}]^\alpha [\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH}]^\beta [\text{H}^+]^\gamma$$

Les résultats expérimentaux sont présentés dans les tableaux suivants. Toutes les concentrations, symbolisées par (), sont en mole par litre et les temps en minutes.

Tableau 1

Concentrations initiales	$(\text{CH}_3\text{COOH})_0 = 0,1200$; $(\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH})_0 = 4,2$; $(\text{HCl})_0 = 0,067$					
Temps	3	5	7	15	21	33
(CH_3COOH)	0,1064	0,0981	0,0906	0,0657	0,0516	0,0318

Tableau 2

Concentrations initiales	$(\text{CH}_3\text{COOH})_0 = 0,1700$; $(\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH})_0 = 3,8$; $(\text{HCl})_0 = 0,052$					
Temps	3	5	12	17	28	43
(CH_3COOH)	0,1548	0,1454	0,1169	0,1000	0,0710	0,0444

Tableau 3

Concentrations initiales	$(\text{CH}_3\text{COOH})_0 = 0,1000$; $(\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH})_0 = 3,8$; $(\text{HCl})_0 = 0,017$					
Temps	8	14	21	32	49	55
(CH_3COOH)	0,0922	0,0867	0,0807	0,0722	0,0607	0,0571

Tableau 4

Concentrations initiales	$(\text{CH}_3\text{COOH})_0 = 0,1300$; $(\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH})_0 = 4,4$; $(\text{HCl})_0 = 0,020$					
Temps	8	13	17	29	36	49
(CH_3COOH)	0,1181	0,1112	0,1060	0,0918	0,0844	0,0722

Tableau 5

Concentrations initiales	$(\text{CH}_3\text{COOH})_0 = 0,0900$; $(\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH})_0 = 3,6$; $(\text{HCl})_0 = 0,053$					
Temps	3	7	9	14	19	27
(CH_3COOH)	0,0818	0,0720	0,0676	0,0577	0,0492	0,0381

1. Calculer les concentrations de toutes les espèces présentes à l'instant $t = 33$ min dans le tableau 1. Si on les compare aux concentrations initiales, on constate que certaines n'ont pas, ou pratiquement pas varié au cours de la réaction.

Donner alors une expression simplifiée de la vitesse de réaction et rechercher l'ordre de la réaction par rapport à l'acide acétique.

Calculer d'après les valeurs du tableau, la constante de vitesse apparente k_1 .

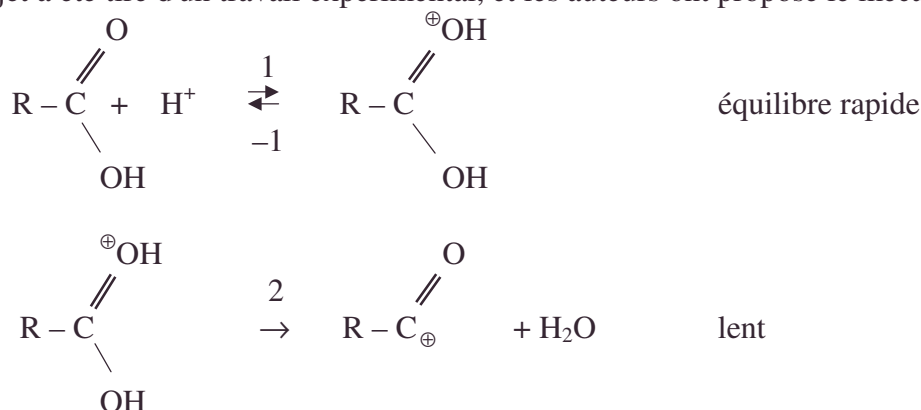
Donner son unité.

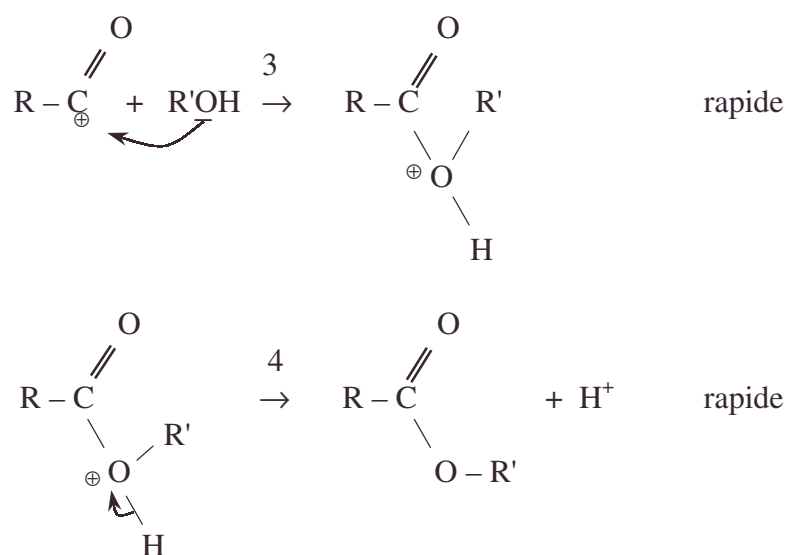
2. En utilisant plusieurs constantes de vitesse apparente du même type que k_1 , déterminer l'ordre par rapport à H^+ et celui par rapport au butanol.

3. Calculer la constante de vitesse k et donner son unité.

4. Quel est le rôle joué par HCl ? Justifier votre réponse.

5. Ce sujet a été tiré d'un travail expérimental, et les auteurs ont proposé le mécanisme suivant :





Montrer que ce mécanisme est compatible avec l'équation de vitesse précédemment trouvée. D'autres travaux ont permis d'autres propositions.

CCP ; Durée : 1h00

Corrigé

1. Une seule donnée est connue directement à $t = 33 \text{ min}$:

$$(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}) = 0,0318 \text{ mol.l}^{-1}.$$



$t = 0$	4,2000	0,1200	0	0
$t = 33 \text{ min}$	$4,2000 - \xi$	$0,1200 - \xi$	ξ	ξ

• On a $0,1200 - \xi = 0,0318 \Rightarrow \xi = 0,0882$.

$$(\text{H}_2\text{O}) = 0,0882 \text{ mol.l}^{-1} ; (\text{CH}_3\text{CO}_2(\text{CH}_2)_2\text{CH}_3) = 0,0882 \text{ mol.l}^{-1}.$$

$$(\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH}) = 4,1118 \text{ mol.l}^{-1}.$$

• Vu le fort excès de butan-1-ol, sa concentration n'a pratiquement pas varié.

• H^+ sert de catalyseur $\Rightarrow (\text{H}^+) = (\text{Cl}^-) = 0,067 \text{ mol.l}^{-1}$, leur concentration ne varie pas.

• On peut prendre dans ce contexte $v = k_1' (\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})^\alpha$.

• Vérifions graphiquement l'ordre 1 de la réaction d'estérification :

$$v = -\frac{d(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{dt} = k_1' (\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}) \Leftrightarrow \ln \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})_0} = -k_1' t.$$

L'hypothèse $\alpha = 1$ est compatible avec les données du tableau car on mesure une pente constante : $k_1' = 0,0401 \text{ min}^{-1}$.

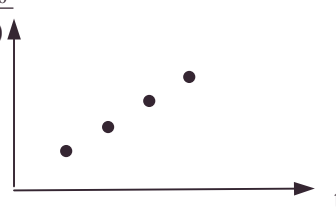
2. $k_1' = k (\text{H}^+)^{\gamma} (\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{OH})^{\beta}$.

Formellement $\beta = 0$ car la concentration du butanol n'intervient pas.

Calculons k_1' pour chaque tableau.

Vérifions l'hypothèse $\gamma = 1$ grâce à la 3^{ème} ligne du tableau suivant qui donne une constante :

• *estérification, excès, mécanisme*

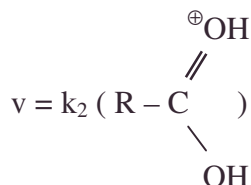


TABEAU	1	2	3	4	5
k'_1	0,040	0,031	0,010	0,012	0,032
$k'_1 / (H^+)$	0,60	0,60	0,59	0,60	0,60

3. $k = \frac{k'_1}{(H^+)}$; A.N. : $k = 0,60 \text{ L.mol}^{-1} . \text{min}^{-1}$.

4. H^+ est un catalyseur qui n'intervient pas dans la constante d'équilibre mais uniquement dans la vitesse (cf. $\gamma = 1$).

5. La vitesse du mécanisme est imposée par l'étape lente :



Or, l'équilibre rapide a pour constante $K_1 = \frac{k''_1}{k''_{-1}} = \frac{(R - \overset{\oplus \text{OH}}{\underset{\parallel}{C}} - \text{OH})}{(H^+) (R\text{COOH})}$

$$\Rightarrow v = k_2 K_1 (H^+) (R\text{COOH})$$

Ce mécanisme est compatible avec les résultats expérimentaux $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = 0$.

2.8. Cinétique d'oxydoréduction

$\text{BrO}_3^- + \text{Br}^-$

Dans le problème qui suit on prendra les activités des espèces chimiques égales à leurs concentrations. Les concentrations seront toutes exprimées en mol.L^{-1} , et représentées par le symbole (). L'indice "0" : ()₀ correspondra à une concentration initiale dans la solution.

On utilisera : $R = 8,32 \text{ J.deg}^{-1} . \text{mole}^{-1}$.

$$T^\circ\text{K} = \theta^\circ\text{C} + 273 ; \mathcal{F} = 96500 \text{ coulombs.mol}^{-1}.$$

I. On veut faire réagir en milieu acide des ions bromures sur des ions bromates à 25°C en solution aqueuse.

1. Ecrire l'équation de la réaction sans coefficient stœchiométrique fractionnaire.

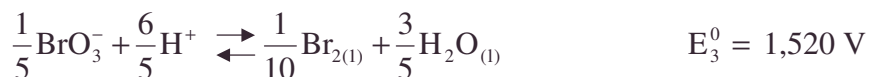
2. Calculer la constante d'équilibre correspondante.

Une solution est maintenue à $\text{pH} = 1$ et l'on a $(\text{BrO}_3^-)_0 = 0,001$; $(\text{Br}^-)_0 = 0,300$.

3. Montrer par le calcul que lorsque l'équilibre est atteint, le bromate a totalement réagi. Légitimer les approximations. (Le dibrome reste en solution).

Données : (potentiels normaux)





L'indice (1) indique que le brome est liquide.

L'indice (sol) indique que le brome est en solution.

II. On considère la réaction de formation de brome à partir de bromate et de bromure comme totale dans les conditions opératoires. On se propose de déterminer la cinétique de la réaction, c'est-à-dire établir les ordres partiels, (α) par rapport à l'ion bromate, (β) par rapport à l'ion bromure, (γ) par rapport à l'ion H^+ , et calculer la constante de vitesse ainsi que l'énergie d'activation de la réaction.

A. Des expériences faites à 0°C à partir des conditions initiales $(\text{BrO}_3^-) = 0,001$; $(\text{Br}^-) = 0,143$; $(\text{H}^+) = 0,100$ ont donné les résultats consignés dans le tableau 1.

Tableau 1

Temps en s	0	100	200	500
(BrO_3^-)	$10 \cdot 10^{-4}$	$9,61 \cdot 10^{-4}$	$9,24 \cdot 10^{-4}$	$8,20 \cdot 10^{-4}$
Temps en s	1000	2000	3000	5000
(BrO_3^-)	$6,73 \cdot 10^{-4}$	$4,53 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-4}$	$1,38 \cdot 10^{-4}$

1. Montrer qu'on peut déterminer l'ordre de la réaction par rapport à l'ion bromate.

2. Déterminer cet ordre.

3. Calculer la constante apparente de vitesse en précisant sa signification exacte et l'unité employée.

B. Dans une autre série d'expériences faites, à la même température, pour différentes valeurs des concentrations initiales, on chronomètre les temps t_1 et t_2 , exprimés en secondes, nécessaires pour que la concentration de l'ion bromate passe respectivement de $(\text{BrO}_3^-)_0$ à $(\text{BrO}_3^-)_0 - 5 \cdot 10^{-4}$ et de $(\text{BrO}_3^-)_0$ à $(\text{BrO}_3^-)_0 - 10^{-3}$.

On obtient les résultats consignés dans le tableau 2.

Tableau 2

$(\text{BrO}_3^-)_0$	$(\text{Br}^-)_0$	$(\text{H}^+)_0$	t_1	t_2
0,111	0,108	0,100	15	30
0,136	0,110	0,100	12	24
0,121	0,120	0,091	15	30
0,097	0,143	0,120	9	18

1. Expliciter l'expression de la vitesse de la réaction et montrer que dans ces conditions expérimentales, il est normal que l'ordre global apparent de la réaction soit nul.

2. Déterminer les ordres partiels entiers par rapport à l'ion bromure et à l'ion H^+ . (Les concentrations données avec trois chiffres significatifs légitiment un écart d'environ 10 % par rapport aux valeurs entières de ces ordres).

3. Calculer la constante de vitesse à 0°C . (Ne pas oublier de préciser l'unité employée).

C. D'autres expériences conduites à différentes températures permettent d'établir le tableau 3. On chronomètre les temps t_1 et t_2 pour que la concentration du brome passe respectivement de 0 à $12 \cdot 10^{-5}$ et de 0 à $24 \cdot 10^{-5}$. Le pH durant ces expériences est maintenu égal à 2. $(\text{BrO}_3^-)_0 = 0,089$; $(\text{Br}^-)_0 = 0,140$.

Tableau 3

Température (° C)	t ₁ (secondes)	t ₂ (secondes)
7	64	128
15	34	68
20	23	46
25	16	32
30	11	22

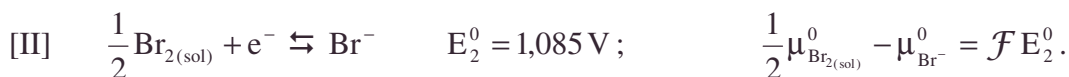
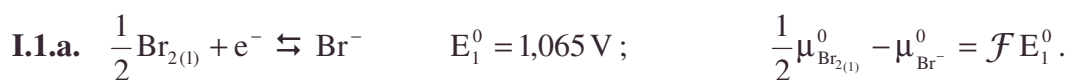
1. Déterminer l'énergie d'activation de la réaction.

2. Vérifier que la constante de vitesse trouvée à partir du tableau 2 est compatible avec cette valeur.

N.B. : Les solutions graphiques sont acceptées.

CCP ; Durée : 3h.

Corrigé



En éliminant e^- dont l'existence est douteuse ou brève en solution aqueuse :

$$\frac{1}{2} \text{Br}_{2(l)} \rightleftharpoons \frac{1}{2} \text{Br}_{2(sol)} ; K_1 = \frac{(\text{Br}_{2(sol)})^{\frac{1}{2}}}{C^{\frac{1}{2}}} \text{ avec } \Delta_r G_1^0 = -RT \ln K_1 .$$

$$\Delta_r G_1^0 = \frac{1}{2} \mu_{\text{Br}_{2(sol)}}^0 - \frac{1}{2} \mu_{\text{Br}_{2(l)}}^0 = \frac{1}{2} \mu_{\text{Br}_{2(sol)}}^0 - \frac{1}{2} \mu_{\text{Br}_{2(l)}}^0 - \left(\frac{1}{2} \mu_{\text{Br}_{2(l)}}^0 - \mu_{\text{Br}^-}^0 \right) = \mathcal{F} (E_2^0 - E_1^0) ;$$

A.N. : $K_1 = 0,46 ; (\text{Br}_2)_{\text{sol}} = 0,21 \text{ mol.L}^{-1} .$



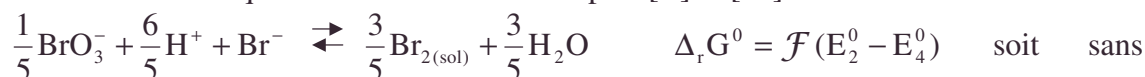
$$\frac{1}{5} \mu_{\text{BrO}_3^-}^0 + \frac{6}{5} \mu_{\text{H}^+}^0 - \frac{1}{10} \mu_{\text{Br}_{2(l)}}^0 - \frac{3}{5} \mu_{\text{H}_2\text{O}}^0 = \mathcal{F} E_3^0 ; \text{ AN : } E_3^0 = 1,520 \text{ V} , \text{ on en déduit :}$$



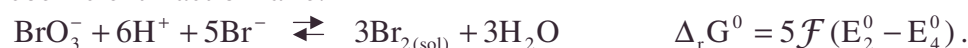
$$\frac{1}{2} \mu_{\text{BrO}_3^-}^0 + \frac{6}{5} \mu_{\text{H}^+}^0 - \frac{1}{10} \mu_{\text{Br}_{2(sol)}}^0 - \frac{3}{5} \mu_{\text{H}_2\text{O}}^0 = \mathcal{F} E_3^0 - \frac{1}{5} \mathcal{F} (E_2^0 - E_1^0) = \mathcal{F} E_4^0 ;$$

$$E_4^0 = E_3^0 - \frac{1}{5} (E_2^0 - E_1^0) ; \text{ AN : } E_4^0 = 1,516 \text{ V} .$$

c. Ecrivons l'équation de réaction des couples [II] et [III] :



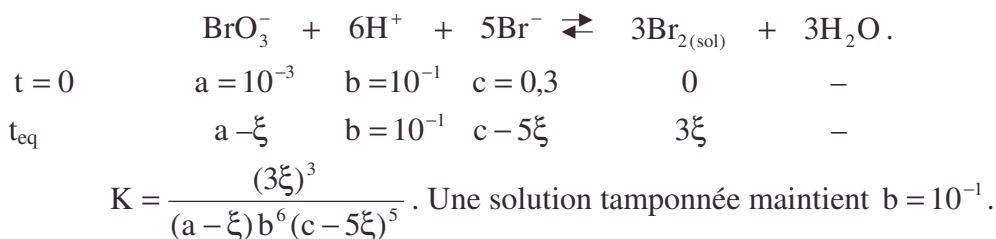
coefficient fractionnaire.



2. $\Delta_r G^0 = -RT \ln K = \mathcal{F} (6E_2^0 - 5E_3^0 - E_1^0) \text{ vu } E_4^0 \Rightarrow K = 10^{-\frac{5(E_2^0 - E_4^0)}{0,059}} \text{ et I.1.c.}$

$$K = 10^{-\frac{1}{0,059} (6E_2^0 - 5E_3^0 - E_1^0)} ; \text{ A.N. : } K = 3,35.10^{36} .$$

3.a. Ecrivons le bilan molaire de la réaction dans un litre :



$$\xi < 10^{-3} \Rightarrow (\text{Br}_{2(\text{sol})}) < 3 \cdot 10^{-3}.$$

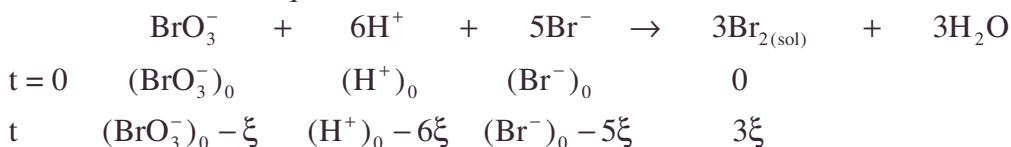
Il n'y a pas de déplacement de $\text{Br}_{2(\text{sol})} \rightleftharpoons \text{Br}_{2(\text{l})}$ car l'équilibre ne peut exister vu la constante d'équilibre K_l et $\text{Br}_{2(\text{sol})} < 0,2$.

La résolution de l'équation donne $\xi = 10^{-3}$ à $3,3 \cdot 10^{-36}$ près $\Rightarrow (\text{BrO}_3^-) \neq 0$.

b. Méthode rapide légitimée : $K \gg 1$ la réaction est quasi totale. La quantité la plus petite disparaît quasi complètement : le bromate a totalement réagi :

$$a - \xi \neq 0, \text{ soit } \xi = 10^{-3}.$$

II. Pour l'étude cinétique, il est habituel d'éviter les coefficients fractionnaires.



La solution n'est pas tamponnée si l'on veut étudier l'ordre par rapport à H^+ .

A.1. On a $\xi_{\text{max}} = (\text{BrO}_3^-)_0 = 10^{-3} \Rightarrow$

$$(\text{Br}^-) \neq (\text{Br}^-)_0; (\text{H}^+) \neq (\text{H}^+)_0. \text{ Donc si } v = K (\text{BrO}_3^-)^\alpha (\text{Br}^-)^\beta (\text{H}^+)^\gamma,$$

$$\text{alors } v = K' (\text{BrO}_3^-)^\alpha = -\frac{d(\text{BrO}_3^-)}{dt} \text{ avec } K' = K (\text{Br}^-)_0^\beta (\text{H}^+)_0^\gamma.$$

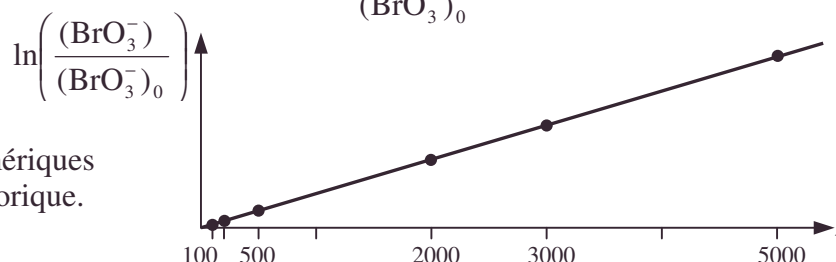
$$\Rightarrow \ln K' + \alpha \ln(\text{BrO}_3^-) = \ln \left[-\frac{d(\text{BrO}_3^-)}{dt} \right]$$

$$\text{et pour deux instants } t_1, t_2 : \alpha \ln \frac{(\text{BrO}_3^-)_{t_2}}{(\text{BrO}_3^-)_{t_1}} = \ln \left[\frac{\left[\frac{d(\text{BrO}_3^-)}{dt} \right]_{t_2}}{\left[\frac{d(\text{BrO}_3^-)}{dt} \right]_{t_1}} \right]$$

(cf. méthode de dégénérescence de l'ordre). La connaissance de $(\text{BrO}_3^-)(t)$ permet d'atteindre $\frac{d(\text{BrO}_3^-)}{dt}$ et donc avec deux valeurs de (BrO_3^-) et $\frac{d(\text{BrO}_3^-)}{dt}$ d'atteindre α .

2. Détermination graphique : elle tient compte de toutes les données.

Supposons $\alpha = 1$: l'équation différentielle donne $\ln \frac{(\text{BrO}_3^-)}{(\text{BrO}_3^-)_0} = -K t$.



Les résultats numériques vérifient l'expression théorique.
 $\alpha = 1$ est vérifié.

• *activité, bromate, couple rédox, dégénérescence de l'ordre, Détermination graphique, solution tamponnée*

3. La pente de la droite donne : $K' = 3,96 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ tel que $v = K'(\text{BrO}_3^-)$.

Remarque : la constante apparente de vitesse dépend de fait des conditions expérimentales ; ce n'est pas la véritable constante de vitesse, $K' = K(\text{Br}^-)_0^\beta (\text{H}^+)_0^\gamma$.

B. On fixe $\xi_1 = \xi(t_1) = 5 \cdot 10^{-4}$; $\xi_2 = \xi(t_2) = 10^{-3}$.

1. Il est légitime de négliger ξ_1 et ξ_2 devant les concentrations initiales.

$v = K(\text{BrO}_3^-)^\alpha (\text{Br}^-)^\beta (\text{H}^+)^\gamma$ peut donc être considérée comme constante.

Vérifions l'hypothèse d'ordre global zéro qu'on identifie à $v = \text{constante}$.

$v = \frac{d\xi}{dt} \Leftrightarrow \xi = vt \Leftrightarrow t = \frac{\xi}{v}$; $t_1 = \frac{\xi_1}{v}$; $t_2 = \frac{\xi_2}{v}$; $\xi_2 = 2\xi_1 \Rightarrow t_2 = 2t_1$ vérifié dans les 4 expériences.

$$2. v = \frac{\xi_1}{t_1} = \frac{\xi_2}{t_2} = K(\text{BrO}_3^-)_0 (\text{Br}^-)_0^\beta (\text{H}^+)_0^\gamma.$$

a. Utilisons $(\text{H}^+)_{01} = (\text{H}^+)_{02}$ dans les deux premières expériences :

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = K(\text{BrO}_3^-)_{0,1} (\text{Br}^-)_{0,1}^\beta (\text{H}^+)_{0,1}^\gamma \\ v_2 = K(\text{BrO}_3^-)_{0,2} (\text{Br}^-)_{0,2}^\beta (\text{H}^+)_{0,2}^\gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{(\text{Br}^-)_{0,2}}{(\text{Br}^-)_{0,1}} \right)^\beta = \frac{v_2}{v_1} \frac{(\text{BrO}_3^-)_{0,1}}{(\text{BrO}_3^-)_{0,2}}$$

$$\text{Or, à } \xi_1 \text{ fixé, } \frac{v_2}{v_1} = \frac{t_{1,1}}{t_{1,2}} \Rightarrow \beta = \frac{\ln \left(\frac{t_{1,1}}{t_{1,2}} \frac{(\text{BrO}_3^-)_{0,1}}{(\text{BrO}_3^-)_{0,2}} \right)}{\ln \left(\frac{(\text{Br}^-)_{0,2}}{(\text{Br}^-)_{0,1}} \right)} ; \text{AN : } \beta = 1,09 ;$$

On peut prendre $\beta = 1$.

b. Déterminons γ en éliminant K sur les 4 expériences.

$$v_1 = K(\text{BrO}_3^-)_{0,1} (\text{Br}^-)_{0,1} (\text{H}^+)_{0,1}^\gamma ; v_2 = K(\text{BrO}_3^-)_{0,2} (\text{Br}^-)_{0,2} (\text{H}^+)_{0,2}^\gamma$$

$$v_3 = K(\text{BrO}_3^-)_{0,3} (\text{Br}^-)_{0,3} (\text{H}^+)_{0,3}^\gamma ; v_4 = K(\text{BrO}_3^-)_{0,4} (\text{Br}^-)_{0,4} (\text{H}^+)_{0,4}^\gamma$$

$$\gamma_1 = \frac{\ln \frac{t_{14}}{t_{13}} \frac{(\text{BrO}_3^-)_{0,4}}{(\text{BrO}_3^-)_{0,3}} \frac{(\text{Br}^-)_{0,4}}{(\text{Br}^-)_{0,3}}}{\ln \frac{(\text{H}^+)_{0,3}}{(\text{H}^+)_{0,4}}} ; \gamma_2 = \frac{\ln \frac{t_{12}}{t_{13}} \frac{(\text{BrO}_3^-)_{0,2}}{(\text{BrO}_3^-)_{0,3}} \frac{(\text{Br}^-)_{0,2}}{(\text{Br}^-)_{0,3}}}{\ln \frac{(\text{H}^+)_{0,3}}{(\text{H}^+)_{0,2}}}$$

$$\gamma_3 = \frac{\ln \frac{t_{11}}{t_{13}} \frac{(\text{BrO}_3^-)_{0,1}}{(\text{BrO}_3^-)_{0,3}} \frac{(\text{Br}^-)_{0,1}}{(\text{Br}^-)_{0,3}}}{\ln \frac{(\text{H}^+)_{0,3}}{(\text{H}^+)_{0,1}}} ; \text{A.N. : } \gamma_1 = 2,01 ; \gamma_2 = 2,04 ; \gamma_3 = 2,03.$$

On acceptera $\gamma = 2$ vu le critère énoncé.

$$3. K = \frac{v_i}{(\text{BrO}_3^-)_{0,i} (\text{Br}^-)_{0,i} (\text{H}^+)_{0,i}^2}.$$

i	1	2	3	4
K	0,2780	0,2785	0,2772	0,2781

On retiendra $K = 0,278 \text{ mol}^{-3} \cdot \text{L}^3 \text{ s}^{-1}$.

C. $\xi_1 = \xi(t_1) = 12 \cdot 10^{-5}$; $\xi_2 = \xi(t_2) = 24 \cdot 10^{-5}$.

On peut légitimement écrire $(\text{BrO}_3^-)^\# (\text{BrO}_3^-)_0$; $(\text{Br}^-) = (\text{Br}^-)_0$

On vérifie v constant car $\xi_2 = 2\xi_1$ est associé à $t_2 = 2t_1$ soit l'ordre zéro : $\xi = vt$.

• ordre zéro

$$1. K = Ae^{\frac{E_a}{RT}} \text{ avec } K = \frac{v}{(\text{BrO}_3^-)_0 (\text{Br}^-)_0 (10^{-2})^2} = \frac{\xi_1}{t_1 (\text{BrO}_3^-)_0 (\text{Br}^-)_0 (10^{-2})^2}.$$

$$\ln K = \frac{-E_a}{RT} + \ln A = \ln \frac{\xi_1}{(\text{BrO}_3^-)_0 (\text{Br}^-)_0 (10^{-2})^2} - \ln t_1;$$

$$\ln t_1 = \frac{E_a}{RT} + C$$

Cette détermination tient compte de tous les résultats.

La pente $\frac{E_a}{R}$ vaut $6,65 \cdot 10^3$;

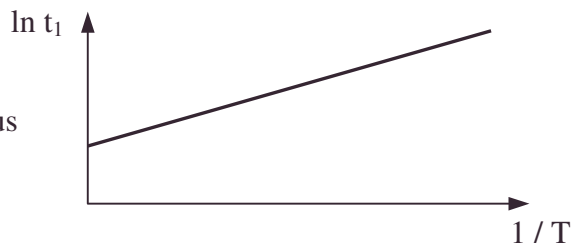
$$E_a = 55,31 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

L'ordonnée à l'origine est $C = -19,53$.

$$2. \text{ à } T = 273 \text{ K ; on en déduit } t_1 = 123,7 \text{ s (cf. } \ln t_1 = \frac{E_a}{RT} + C).$$

$$\text{On en déduit } K = \frac{\xi_1}{t_1 (\text{BrO}_3^-)_0 (\text{Br}^-)_0 (\text{H}^+)^2} = 0,778 \text{ mol}^{-3} \cdot \text{L}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Il y a compatibilité car on a le même ordre de grandeur qu'en B.3.



2.9. Substitutions Nucléophiles

Voir page 1700.

2.10. Mécanismes de SN

Voir page 1700.

2.11. Addition de chlorure d'hydrogène sur l'éthylène

Voir page 1720.

2.12. Obtention industrielle du MTBE, antidétonant non polluant

Voir page 1741.

Chapitre 3 : Thermodynamique chimique

au programme de MP, PSI, PC, PT, BCPST2, TPC2

3.1. Equilibres homogènes

3.1.1. Fraction molaire et densité

On verse 40 cm³ d'un composé liquide S pur de masse molaire $M(S) = 60 \text{ g.mol}^{-1}$ et de densité $d = 1,05$ dans 60 cm³ d'eau ; on obtient ainsi 100 cm³ d'une solution aqueuse. Donner la fraction molaire x_S de S dans cette solution. On considère S comme inerte vis-à-vis de l'eau. $M(H_2O) = 18 \text{ g.mol}^{-1}$.

Capes

Corrigé

$$n_s = \frac{m_s}{M(S)} = \frac{d \cdot 40}{M(S)} ; n_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{M(H_2O)} = \frac{60}{M(H_2O)} \Rightarrow x_s = \frac{n_s}{n_s + n_{H_2O}} ;$$

$$\text{A.N. : } n_s = 0,70 ; n_{H_2O} = 3,33 ; x_s = 0,17 .$$

On n'est pas dans le cadre d'une solution diluée.

3.1.2. Variance de la conversion industrielle du gaz à l'eau

Soit l'équilibre en phase gazeuse $CO_{(g)} + H_2O_{(g)} \rightleftharpoons CO_{2(g)} + H_{2(g)}$.

Quelle est la variance :

- dans le cas général ;
- lorsque l'équilibre est obtenu à partir d'un mélange de monoxyde de carbone et d'eau en proportion quelconque ;
- lorsque l'équilibre est obtenu à partir d'un mélange équimolaire de monoxyde de carbone et d'eau ?

Capes

Corrigé

La formule de Gibbs donne la variance : $v = n - r - m + 2 - \phi$.

n est le nombre de constituants chimiques ;

r est le nombre d'équilibres chimiques ;

ϕ est le nombre de phases ; 2 représente les 2 paramètres physiques intensifs T et P .

Dans le cas étudié, 2 est à remplacer par 1 si la pression n'est pas un facteur d'équilibre.

m est le nombre de relations particulières non comptées dans la démonstration de Gibbs.

a. $m = 0$; ici, $v = 4 - 1 + 1 - 1 = 3$.

b. $m = 1$ car $p_{H_2} = p_{CO_2}$ d'où $v = 2$.

c. $m = 2$ car $p_{H_2} = p_{CO_2}$ et $p_{CO} = p_{H_2O}$ d'où $v = 1$.

Si on fixe la température, tout est déterminé ; on ne saurait conclure à $v = 0$, car on a sélectionné préalablement les paramètres intensifs sélectionnables a priori en **a.** ; ceci n'exclut pas la possibilité de $v = 0$ pour certains équilibres.

• conversion, densité, équilibre homogène, facteur de l'équilibre, fraction molaire, gaz à l'eau, phase liquide, thermodynamique chimique, variance

3.1.3. Dissociation du chlorure d'hydrogène

Le chlorure d'hydrogène peut se dissocier à haute température, ce qui conduit à l'équilibre : $\text{HCl}_{(g)} \rightleftharpoons \frac{1}{2}\text{H}_{2(g)} + \frac{1}{2}\text{Cl}_{2(g)}$.

Nernst a relié la température thermodynamique et le logarithme décimal de la constante d'équilibre K : $\log K = -\frac{9554}{T} + 0,553 \log T - 2,42$.

a. Déterminer la variance des systèmes obtenus à partir de HCl pur.

b. Trouver $\Delta_r G^0(T)$ variation d'enthalpie libre standard de la réaction de dissociation.

On prendra $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

c. Trouver la variation d'enthalpie standard $\Delta_r H^0(T)$ de la réaction de dissociation.

d. Trouver la valeur du coefficient de dissociation à $T = 800 \text{ K}$, 1000 K et 1200 K .

Centrale

Corrigé

a. $v_{\text{Gibbs}} = c - r + 2 - \phi$;

$v_{\text{théorique}} = 3 - 1 + 2 - 1 = 3$ mais en partant de HCl pur $P_{\text{H}_2} = P_{\text{Cl}_2} \Rightarrow v = 2$.

P n'étant pas facteur d'équilibre, le 2 de la formule de Gibbs est à remplacer par 1 ; on peut dire $v_{\text{pratique}} = 1$: on peut fixer T.

b. $\Delta_r G^0 = -RT \ln K$;.

$$\Delta_r G^0 = 182,7 \cdot 10^3 + 46,28 T - 4,6 T \ln T.$$

c. or, $\Delta_r H^0 = -T^2 \frac{d}{dT} \left[\frac{\Delta_r G^0}{T} \right]$ A.N. : $\Delta_r H^0 = 183 \cdot 10^3 + 4,60 T$. On note $\Delta_r H^0 > 0$.

d. $\text{HCl}_{(g)} \rightleftharpoons \frac{1}{2}\text{H}_{2(g)} + \frac{1}{2}\text{Cl}_{2(g)}$ de bilan molaire :

a	0	0
$a(1 - \alpha)$	$\frac{a\alpha}{2}$	$\frac{a\alpha}{2}$

$$K = K_p = K_c = \frac{\alpha^2}{2(1 - \alpha)} ; \alpha^2 + 2K\alpha - 2K = 0 ; \alpha = -K + \sqrt{(K + 2)K} ; \text{on donne } K(T).$$

A.N. :

T en K	800	1000	1200
K	$1,75 \cdot 10^{-13}$	$4,84 \cdot 10^{-11}$	$2,09 \cdot 10^{-9}$
α	$5,92 \cdot 10^{-7}$	$9,83 \cdot 10^{-6}$	$6,47 \cdot 10^{-5}$

α reste faible car les températures ne sont pas très élevées pour cet équilibre endothermique.

3.1.4. Solution non diluée

On réalise à 25°C l'estérification suivante en phase liquide homogène :



• chlorure d'hydrogène, coefficient de dissociation, constante d'équilibre, facteur d'équilibre, variance, variation d'enthalpie libre standard de la réaction

Equilibres homogènes

à partir d'un mélange équimolaire d'éthanol et d'acide acétique. On atteint au bout d'un certain temps un état d'équilibre caractérisé par la disparition des deux tiers de l'acide initial.

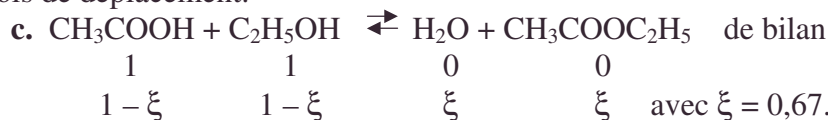
- Quel serait alors l'effet d'une élévation de température ?
- Dans quel sens se déplacerait l'équilibre si on ajoutait un peu d'acide acétique pur ?
- Calculer la constante d'équilibre à 25° C.
- Quelles seraient les quantités des différents constituants à l'équilibre si l'on essayait de faire réagir à 25° C une mole d'acétate d'éthyle et une mole d'eau ?

Capes

Corrigé

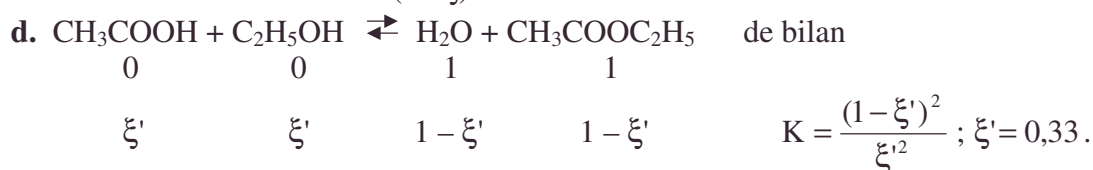
a. Vu les lois de déplacement des équilibres chimiques, la réaction étant athermique, l'élévation de température n'a aucun effet.

b. L'équilibre se déplacerait dans le sens de la disparition de l'acide, vu $\Delta v_i = 0$ et les lois de déplacement.



La constante d'équilibre s'exprime à l'aide des fractions molaires, activités des solutions non diluées.

$$K = X_{\text{H}_2\text{O}} X_{\text{ester}} / X_{\text{acide}} X_{\text{alcool}} = \frac{\xi^2}{(1-\xi)^2}; \text{ A.N. : } K = 4.$$



En effet, le bilan molaire impose deux relations sur les fractions molaires, paramètres chimiques intensifs ; T et P n'ont pas de rôle ; la variance étant nulle ($v = 4 - 1 - 2 + 0 - 1$) ; on retrouve le même équilibre après une attente soit la même composition que précédemment.

3.1.5. Synthèse industrielle du méthanol

On rappelle que la pression standard vaut 1 bar = 10^5 Pa.

On considère l'équilibre de synthèse du méthanol à T = 500 K sous la pression P = 20 bars. (valeurs à utiliser dans tout l'exercice).



- On réalise un mélange de monoxyde de carbone et d'hydrogène et on laisse sur le catalyseur convenable s'établir l'équilibre précédent à pression constante. Quelle doit être la proportion d'hydrogène et de monoxyde de carbone dans le mélange initial pour que la fraction molaire en méthanol dans le mélange en équilibre soit maximale ?
- On réalise un mélange stœchiométrique de monoxyde de carbone et d'hydrogène (1 mole de CO, 2 moles de H₂) et on désigne par x l'avancement de la réaction (nombre de moles de méthanol formées). Calculer x à l'équilibre.

On prendra $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

• affinité, avancement, catalyse, estérification, fraction molaire maximale, hydrolyse, déplacement des équilibres, mélange équimolaire, mélange stœchiométrique, réaction athermique, représenter, solutions non diluées

3. Exprimer en fonction de $\Delta_r G^0$ et x le $\Delta_r G$ réactionnel (opposé de l'affinité chimique) pour x quelconque. Représenter $\Delta_r G$ pour x prenant toutes les valeurs possibles et retrouver le résultat donnant x à l'équilibre.

4. Calculer la différence d'enthalpie libre $G_f - G_i$ entre l'état initial et l'état d'équilibre final.

5. On considère un mélange en équilibre comprenant n_{H_2} moles d'hydrogène, n_{CO} moles de monoxyde de carbone, n_{CH_3OH} moles de méthanol soit n moles au total.

On introduit à T et P constantes ε moles de CO ($\varepsilon \ll n_{CO}$) ce qui rompt l'équilibre. Etudier selon la valeur de la fraction molaire en CO l'équilibre, dans quel sens évolue le système après cette perturbation de l'équilibre initial.

Autres concours ; Durée : 1h00

Corrigé



de nombre total de moles gazeuses

$$t_{eq} \quad \begin{array}{ccc} x - z & y - 2z & z \\ X_{CO} = \frac{x - z}{x + y - 2z} ; X_{H_2} = \frac{y - 2z}{x + y - 2z} ; X_{CH_3OH} = \frac{z}{x + y - 2z} . \end{array} \quad n = x + y - 2z$$

Posons $X = \frac{x}{x + y - 2z} ; Y = \frac{y}{x + y - 2z} ; Z = \frac{z}{x + y - 2z} .$

$$X_{CO} = X - Z ; X_{H_2} = Y - 2Z ; X_{CH_3OH} = Z ;$$

$$X_{CO} + X_{H_2} + X_{CH_3OH} = 1 \Rightarrow X + Y - 2Z = 0 \quad [1]$$

$$K = \frac{P_{CH_3OH} P^{0^2}}{P_{CO} P_{H_2}^2} ; P_i = X_i P \Rightarrow K = \frac{X_{CH_3OH} P^{0^2}}{X_{CO} X_{H_2}^2 P^2} = \frac{Z P^{0^2}}{(X - Z)(Y - 2Z)^2 P} . [2]$$

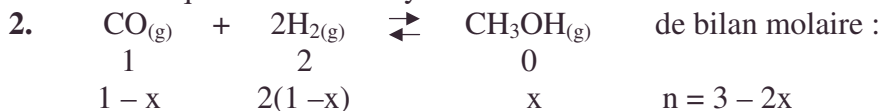
Or, quand X_{CH_3OH} est maximale, $dZ = 0$;

$$[1] \Rightarrow dX + dY = 0 \text{ à } T \text{ et } P \text{ constants ;}$$

$$[2] \Rightarrow d \ln K = 0 = \frac{dZ}{Z} - \frac{d(X - Z)}{X - Z} - 2 \frac{d(Y - 2Z)}{Y - 2Z} \text{ à } T \text{ et } P \text{ constant ; soit}$$

$$0 = -\frac{dX}{X - Z} - 2 \frac{dY}{Y - 2Z} ;$$

l'identité donne quel que soit dX et donc quel que soit t $Y = 2X$ soit les proportions stœchiométriques : donc $x = 2y$ au moment initial.



Le remplacement de $P_i = \frac{n_i}{n} P$ donne :

$$K = \frac{P_0^2 x (3 - 2x)^2}{P^2 4(1 - x)^3} ;$$

$$\Delta_r G^0 = -RT \ln K \text{ soit } K = e^{-\frac{\Delta_r G^0}{RT}} \Rightarrow \text{A.N. : } x = 0,469 \Rightarrow X_{CH_3OH} = 0,23 .$$

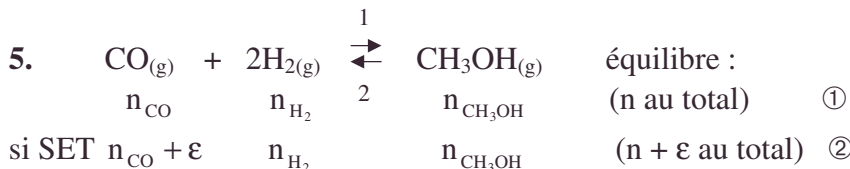
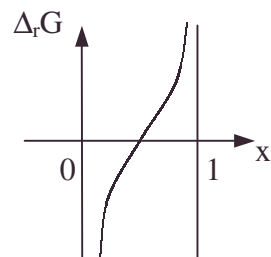
$$3. \quad \Delta_r G = \Delta_r G^0_{(T)} + RT \ln \left(\frac{P^0 x (3-2x)^2}{P^2 4(1-x)^3} \right);$$

$$x \leq 0 \quad \Delta_r G \rightarrow -\infty$$

$$x \leq 1 \quad \Delta_r G \rightarrow +\infty$$

Le tracé donne : $\Delta_r G = 0$ pour $x = 0,469$

$$4. \quad dG = \Delta_r G^0 dx \Rightarrow G_f - G_i = x_{eq} \Delta_r G^0; \text{ AN : } G_f - G_i = 9,33 \text{ kJ.}$$



$$\text{Vu 2.} \quad \textcircled{1} \quad \Delta_r G = \Delta_r G^0 + RT \ln \left(\frac{n_{\text{CH}_3\text{OH}} n^2 P^{0^2}}{n_{\text{CO}} n_{\text{H}_2}^2 P^2} \right) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \Delta_r G' = \Delta_r G^0 + RT \log \left(\frac{n_{\text{CH}_3\text{OH}} (n + \varepsilon)^2 P^{0^2}}{(n_{\text{CO}} + \varepsilon) n_{\text{H}_2}^2 P^2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta_r G' - \Delta_r G = \Delta_r G' = RT \log \left(\frac{n + \varepsilon}{n} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{n_{\text{CO}} + \varepsilon}{n_{\text{CO}}} \right)};$$

$$\Delta_r G' = RT \left(\ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{n} \right)^2 - \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{n_{\text{CO}}} \right) \right) = RT \left[2 \frac{\varepsilon}{n} - \frac{\varepsilon}{n_{\text{CO}}} \right] = \frac{\varepsilon RT}{n n_{\text{CO}}} (2 n_{\text{CO}} - n).$$

$\Delta_r G' < 0$ évolution sens 1 si $n_{\text{CO}} < \frac{n}{2}$ soit $X_{\text{CO}} < 0,5$; cf. 2., 3.

$\Delta_r G' > 0$ évolution sens 2 si $n_{\text{CO}} > \frac{n}{2}$ soit $X_{\text{CO}} > 0,5$

3.1.6. Préparation industrielle du SO₃

Il sera tenu compte de la présentation des résultats. Les notations de l'énoncé sont impératives.

La réaction $2\text{SO}_{2(g)} + \text{O}_{2(g)} \rightleftharpoons 2\text{SO}_{3(g)}$ est réalisée en phase vapeur et tous les gaz sont supposés parfaits.

I.1. En utilisant les valeurs des grandeurs thermodynamiques, calculer pour la réaction la variation d'enthalpie libre $\Delta_r G^0 = A + BT$ (A et B constantes).

Corps	enthalpie molaire h^0 en kJ.mol ⁻¹ (supposée indépendante de la température).	entropie molaire s^0 en kJ.mol ⁻¹ (supposée indépendante de la température).
O ₂	0	204,8
SO ₂	- 295,8	248,3
SO ₃	- 394,8	256,0

2. Définir et calculer la température d'inversion pour l'équilibre.

3. Définir et calculer la variance de l'équilibre.

4. Etudier sans calculs l'influence de la température T et de la pression totale P sur l'équilibre.

• déplacements d'équilibre, perturbation de l'équilibre, température d'inversion, variance

II.1. Calculer la constante d'équilibre dimensionnée k_p en fonction de T .

2. On part d'un mélange stœchiométrique (1 mole de dioxyde de soufre et 0,5 mole d'oxygène). Soit α le coefficient d'avancement de la réaction à l'équilibre. Donner la relation entre k_p , P et α . Calculer k_p à $T = 700$ K.

Retrouver par ce calcul les résultats de **I.4.**

3. Application : calculer α dans les deux cas suivants :

a. $P = 1$ bar $T = 700$ K.

b. $P = 10$ bar $T = 700$ K.

(L'équation obtenue de degré 3 se résout facilement en examinant les 2 valeurs limites possibles pour α).

4. On part d'un mélange d'air et de dioxyde de soufre tel que a soit la fraction molaire de dioxyde de soufre dans le mélange.

a. Si on choisit le nombre de moles de dioxyde de soufre tel que $N_{\text{SO}_2} = a$, calculer N_{O_2} (nombre de moles d'oxygène) et N_{N_2} (nombre de moles d'azote dans le mélange initial). (On sait que l'air contient 1 mole d'oxygène pour 4 moles d'azote).

b. En appelant α' le coefficient d'avancement de la réaction à l'équilibre (par rapport à SO_2), donner la relation entre k_p , P , α' et a .

c. Application : on choisit pour le mélange initial les proportions stœchiométriques (le nombre de moles de dioxyde de soufre est le double de l'oxygène).

Calculer a . En déduire, pour $P = 1$ bar et $T = 700$ K la valeur de α' . (même remarque que pour **II.3.**)

d. Conclusion : comparer **II.3.a.** et **II.4.c.**

Autres concours ; Durée : 2h

Corrigé

$$\text{I.1. } \Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 = (2h_{\text{SO}_3}^0 - 2h_{\text{SO}_2}^0 - h_{\text{O}_2}^0) - T(2s_{\text{SO}_3}^0 - 2s_{\text{SO}_2}^0 - s_{\text{O}_2}^0).$$

$$\Delta_r G^0 = -198.10^3 + 189,4T \text{ en kJ.mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow A = \Delta_r H^0 = -198 \text{ kJ.mol}^{-1} ; B = -\Delta_r S^0 = +189 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

$$\text{2. } T_i \text{ tel que } \Delta_r G^0 = 0 \Rightarrow T_i = -\frac{A}{B} ; \text{A.N. : } T_i = 1045 \text{ K.}$$

3.a. La variance est le nombre de paramètres intensifs indépendants d'un état d'équilibre quelconque.

b. En appliquant la formule $v = n - r + 2 - \phi$ on trouve $v = 3 - 1 + 2 - 1 = 3$.

On peut fixer par exemple P , T et X_{O_2} .

4.a. L'oxydation exothermique est favorisée thermodynamiquement (mais non pas habituellement cinétiquement) par une diminution de température (loi de Van't Hoff).

b. L'oxydation entraînant une diminution du nombre de moles des constituants gazeux est favorisée par une augmentation de pression P totale (Loi de Le Chatelier).

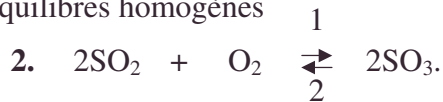
II.1. $k = k_p \cdot P_0$ avec k_p en bar^{-1} .

$$k_p = \frac{1}{P_0} \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right), \text{ soit } k_p = \frac{1}{P_0} \exp\left(-\frac{B}{R}\right) \exp\left(-\frac{A}{RT}\right).$$

$$k_p = 1,264.10^{-10} \exp\left(\frac{23830}{T}\right) \text{ bar}^{-1}. \text{ A.N. : } T = 700 \text{ K ; } k_p = 76980 \text{ bar}^{-1}.$$

• air, coefficient d'avancement, constante d'équilibre dimensionnée, dioxyde de soufre, exothermique, proportions stœchiométriques, résolution numérique, variance

Equilibres homogènes



$$\begin{array}{ccc} t=0 & 1 & 0,5 & 0 \\ t_{\text{éq}} & 1-2\alpha & 0,5-\alpha & 2\alpha \end{array} \quad n_{\text{T(g)}} = 1,5 - \alpha > 0.$$

$$\text{a. } P_{\text{SO}_2} = 2 \frac{(1-2\alpha)}{3-2\alpha} P_T ; P_{\text{O}_2} = \frac{1-2\alpha}{3-2\alpha} P_T ; P_{\text{SO}_3} = \frac{4\alpha}{3-2\alpha} P_T.$$

$$k_p = 4 \frac{\alpha^2 (3-2\alpha)}{(1-2\alpha)^2 P_T}.$$

$$\text{b. } \ln k_p = \ln 4 + 2 \ln \alpha + \ln (3-2\alpha) - 3 \ln (1-2\alpha) - \ln P_T.$$

 α . A T constante,

$$d \ln k_p = 0 \Rightarrow \frac{dP_T}{P_T} = d\alpha \left[\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{3-2\alpha} + \frac{6}{1-2\alpha} \right] = 6 \frac{d\alpha}{\alpha(3-2\alpha)(1-2\alpha)}.$$

 $dP_T > 0 \Rightarrow d\alpha > 0$, soit le sens de l'oxydation, le sens 1. β . A P constante, la loi de l'isobare de Van't Hoff donne :

$$d \ln k_p = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} dT = \frac{6d\alpha}{\alpha(3-2\alpha)(1-2\alpha)}.$$

Vu $\Delta_r H < 0$ et le dénominateur < 0 , $dT > 0 \Rightarrow d\alpha < 0$ soit le sens de la décomposition de SO_3 . On a retrouvé les résultats qualitatifs de **I.4**.

3. Pour éviter la résolution complète, suivons l'énoncé :Valeurs limites possibles : $\alpha = 0$; $\alpha = 0,5$; ($\alpha = 1,5$ impossible).

• Voisinage de $\alpha = 0$; $k_p \sim 12 \frac{\alpha^2}{P_T}$ or $k_p = 7,7 \cdot 10^4 \text{ bar}^{-1}$; impossible vu les A.N.

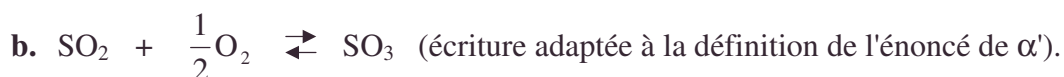
• Voisinage de 0,5 : posons $\varepsilon = 1-2\alpha$; $k_p = \frac{2}{\varepsilon^3 P_T} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{2}{k_p P_T}}$ et $\alpha = 0,5 - \sqrt[3]{\frac{2}{k_p P_T}}$;

AN : **a.** $P = 1 \text{ bar}$; $\alpha = 0,485$.**b.** $P = 10 \text{ bar}$; $\alpha = 0,499$. Le coût de cette pression n'est pas rentable vu $\Delta\alpha$.**4.a.** Initialement, on a SO_2 , N_2 , O_2 en quantité N_{SO_2} , N_{N_2} , N_{O_2} .

$$\text{Alors, } N_{\text{N}_2} = 4 N_{\text{O}_2} ; \frac{N_{\text{SO}_2}}{n_T} + \frac{N_{\text{N}_2}}{n_T} + \frac{N_{\text{O}_2}}{n_T} = 1,$$

$$\text{avec } a = \frac{N_{\text{SO}_2}}{n_T} \text{ et } a = N_{\text{SO}_2} \text{ soit } n_T = 1.$$

$$a + N_{\text{N}_2} + N_{\text{O}_2} = 1 \Rightarrow a + 5 N_{\text{O}_2} = 1 \text{ soit } N_{\text{O}_2} = \frac{1-a}{5} \text{ et } N_{\text{N}_2} = \frac{4}{5}(1-a).$$



$$\begin{array}{ccc} t=0 & a & \frac{1-a}{5} & 0 \\ & a-\alpha' & \frac{1-a}{5} - \frac{\alpha'}{2} & \alpha' \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} n_T^{\text{gaz}} = 1 \\ n_T = a - \alpha' + \frac{1-a}{5} + \frac{4}{5}(1-a) - \frac{\alpha'}{2} + \alpha' = 1 - \frac{\alpha'}{2} \end{array} \right.$$

Vu l'écriture de k_p en **II.2.**,

$$k_p' = k_p^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha' \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{(a - \alpha') \left[\frac{1-a}{5} - \frac{\alpha'}{2}\right]^{\frac{1}{2}} P_T^{\frac{1}{2}}}; k_p = 10 \frac{\alpha'^2 \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right)}{P_T (a - \alpha')^2 (2 - 2a - 5\alpha')}$$

c. Les proportions stoechiométriques énoncées donnent :

$$a = 2 \left(1 - \frac{a}{5}\right) \Rightarrow a = 0,285. \text{ La valeur limite intéressante pour } \alpha' \text{ est } a.$$

Posons $\varepsilon' = 0,285 - \alpha'$.

$$k_p = \frac{0,138}{\varepsilon'^3 P_T} \Rightarrow \varepsilon' = \sqrt[3]{\frac{0,138}{k_p P_T}}; \text{ A.N. : } \varepsilon' = 0,012 \Rightarrow \alpha' = 0,285 - \varepsilon = 0,273.$$

d. Comparons les coefficients de dissociation 2α et $\frac{\alpha'}{a}$ sous 1 bar à 700 K :

$$2\alpha = 0,97; \frac{\alpha'}{a} = 0,96 \text{ soit } \frac{\alpha'}{a} < 2\alpha \text{ mais l'écart est faible : on travaille avec de l'air en}$$

respectant les proportions utiles.

Dans l'étude des déplacements d'équilibre, on retrouve qu'une dilution à pression constante revient à diminuer les pressions partielles et a donc même effet qu'une diminution de pression totale.

3.1.7. Préparation industrielle de NH_3

L'azote, l'hydrogène et l'ammoniac peuvent donner l'équilibre en phase gazeuse :



On peut ici considérer les trois gaz comme parfaits. On dispose des valeurs numériques, à 298 K, dans l'état standard, de l'enthalpie molaire de formation de NH_3 , $\Delta_f H^0$, des entropies molaires, s^0 , et des capacités calorifiques molaires sous pression constante, C_p^0 dont on suppose qu'elles ne dépendent pas de la température, dans l'intervalle considéré.

	$\Delta_f H^0 (\text{kJ.mol}^{-1})$	$s^0 (\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1})$	$C_p^0 (\text{J mol}^{-1}.\text{K}^{-1})$
N_2	0	191,5	29,0
H_2	0	130,6	29,0
NH_3	-46,19	192,5	36,0

$R = 8,314 \text{ J mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (Utiliser impérativement cette valeur avec ses 4 chiffres significatifs).

1. Trouver pour l'équilibre considéré, la valeur numérique à 298 K de la constante d'équilibre relative aux pressions partielles, K_p .

2. Bien que cette valeur de K_p soit élevée, dans la pratique industrielle on ne réalise pas la synthèse de NH_3 au voisinage de 298 K.

a. Pour quelle raison ?

b. Indiquer sommairement les paramètres sur lesquels on peut agir pour réaliser au mieux la synthèse de NH_3 .

3.a. Ecrire la loi, du type $\Delta_r H^0(T) = a + bT$, où a et b sont des coefficients numériques dont on précisera la valeur, donnant la variation avec la température T de l'enthalpie standard de la réaction.

b. Rappeler, sans la démontrer, la loi générale de variation de K_p avec T .

En déduire celle, du type $\ln K_p = \frac{\alpha}{T} + \beta \ln T + \gamma$, où α , β et γ sont des coefficients numériques, dont on précisera la valeur, donnant la variation de température T de la constante K_p . Quelle est sa valeur à 673 K ?

Quelle est celle de l'enthalpie libre standard de la réaction à 673 K, $\Delta_r G_{673}^0$?

4.a. μ_i désignant le potentiel chimique du constituant i , $\Delta_r G(T)$ l'enthalpie libre de la réaction, soit ici la fonction $\Delta_r G(T) = 2\mu_{\text{NH}_3} - \mu_{\text{N}_2} - 3\mu_{\text{H}_2}$, montrer que pour un état quelconque du système $\text{N}_2 / \text{H}_2 / \text{NH}_3$ en réaction, à une température T :

$$\Delta_r G(T) = \Delta_r G^0(T) + RT \ln \frac{P_{\text{NH}_3}^2}{P_{\text{N}_2} \cdot P_{\text{H}_2}^3}$$

soit encore $\Delta_r G(T) = \Delta_r G^0(T) + RT \ln \pi$, où $\pi = \frac{P_{\text{NH}_3}^2}{P_{\text{N}_2} \cdot P_{\text{H}_2}^3}$.

b. Que devient cette relation quand le système est en équilibre ?

5.a. On mélange initialement une mole de N_2 et trois de H_2 .

L'avancement de la réaction, ξ , étant défini par $\xi = n_{0,\text{N}_2} - n_{\text{N}_2}$ où n_{N_2} est le nombre de moles d'azote et n_{0,N_2} son nombre initial, trouver l'expression numérique donnant, à 673 K, $\Delta_r G_{673}$ en fonction de ξ sous la pression totale $P = 1$ bar.

b. Compléter le tableau ci-dessous par les valeurs numériques de $\Delta_r G_{673}$ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$:

ξ	0,007	0,008	0,009	0,010
$\Delta_r G_{673}(\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$				

Tracer le graphe de la fonction $\Delta G = f(\xi)$, dans le domaine défini par le tableau ci-dessus, sur lequel seront précisées les échelles pour $\Delta_r G$ et pour ξ .

c. En déduire la valeur numérique de l'avancement à l'équilibre ξ_e . Vérifier que la valeur trouvée est compatible avec celle de $K_{p,673}$.

6.a. Trouver l'expression en fonction de ξ de l'enthalpie libre du système, à température et pression constantes, $G = \sum n_i \mu_i$ où n_i est le nombre de moles du constituant i .

Montrer qu'elle peut s'écrire $G = g(T) + \xi \Delta_r G^0 + RT h(\xi)$ où $g(T)$ est une fonction de T seul et $h(\xi)$ de ξ seul, $RTh(\xi)$ étant lui-même la somme de trois termes, A, B, C, chacun relatif à un seul constituant, qu'on explicitera.

b. On donne dans le tableau ci-dessous les valeurs numériques en kJ, de $G - g(T)$ à 673 K pour différentes valeurs de ξ .

ξ	0,007	0,008	0,009	0,010
$G - g(T)$ en kJ	-12,6784	-12,6796	-12,6794	-12,6778

Tracer le graphe de la fonction $G - g(T)$ sur la même feuille que précédemment où les échelles seront précisées.

c. Quelle relation y-a-t-il entre les deux fonctions $\Delta_r G_{673}$ et $[G - g(T)]_{673}$ à 673 K ?

d. Le nouveau graphe permet-il de déterminer l'avancement à l'équilibre ξ_e ?

CCP ; Durée : 1h30

Corrigé

1. $\Delta_r H^0 = 2\Delta_f H^0(\text{NH}_3) - \Delta_f H^0(\text{N}_2) - 3\Delta_f H^0(\text{H}_2)$; AN : $\Delta_r H^0 = -92,38 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

$\Delta_r S^0 = 2s_{(\text{NH}_3)}^0 - s_{(\text{N}_2)}^0 - 3s_{(\text{H}_2)}^0$; AN : $\Delta_r S^0 = -198,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

• *avancement, constante d'équilibre, enthalpie libre, enthalpie libre standard de la réaction, graphe, potentiel chimique, tableau*

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 = -RT \ln K ;$$

$$K = \exp \frac{-(\Delta_r H^0 - T_{298} \Delta_r S^0)}{RT_{298}} ;$$

$$K_p = \frac{P_{\text{NH}_3}^2}{P_{\text{N}_2} P_{\text{H}_2}^3} = \frac{K}{P_0^2} .$$

$$\text{A.N. : } \Delta_r G^0 = -33,3 \text{ kJ.mol}^{-1} ; K = 6,836.10^5 ; K_p = 6,836.10^5 \text{ bar}^{-2} .$$

2.a. La vitesse de réaction est nulle à cette température.

b. – élévation de T pour augmenter la vitesse.

– Choix d'un catalyseur industriel Fe pour augmenter la vitesse.

– Elever P : cf. loi sur le déplacement d'équilibre de Le Chatelier.

– Choix de proportions initiales stœchiométriques pour augmenter la fraction molaire de NH_3 .

– A la fin, on isole NH_3 et on recycle N_2 et H_2 (raisons économiques).

$$\text{3.a. } \frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \Rightarrow \Delta_r H^0(T) - \Delta_r H^0(T_0) = (T - T_0) \Delta_r C_p^0 ,$$

$$\text{avec } \Delta_r C_p^0 = 2C_p^0(\text{NH}_3) - C_p^0(\text{N}_2) - 3C_p^0(\text{H}_2) .$$

$$\Delta_r H^0(T) = \Delta H^0(298) + (T - 298)(2C_p^0(\text{NH}_3) - C_p^0(\text{N}_2) - 3C_p^0(\text{H}_2)) = a + bT .$$

$$\text{avec } a = \Delta_r H^0(298) - 298 \Delta_r C_p^0 ; b = \Delta_r C_p^0 ;$$

$$\text{A.N. : } \Delta_r H^0 = -92,38 \text{ kJ.mol}^{-1} + (T - 298)(-44,0 \text{ J.mol}^{-1} . \text{K}^{-1})$$

$$\text{soit } a = -79,268 \text{ kJ.mol}^{-1} ; b = -44,0 \text{ J.mol}^{-1} . \text{K}^{-1}$$

$$\text{b.}\alpha. \frac{d \ln K_p}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} \Rightarrow \ln K_p = \int \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} dT \text{ à une constante près à préciser.}$$

$$\beta. \ln K_p = -\frac{a}{RT} + \frac{b}{R} \ln T + \ln K_p(298) + \frac{a}{RT_{298}} - \frac{b}{R} \ln T_{298} .$$

$$\alpha = -\frac{a}{R} ; \beta = \frac{b}{R} ; \gamma = \ln K_p(298) + \frac{a}{RT_{298}} - \frac{b}{R} \ln T_{298} ; .$$

$$\text{AN : } \alpha = 9534 \text{ K} ; \text{AN : } \beta = -5,292 ; \text{AN : } \gamma = 11,59$$

$$\gamma. K_p = 1,659.10^{-4} \text{ bar}^{-2} \text{ à } T = 673 \text{ K} ,$$

ordre de grandeur très inférieur à celui de $K_{p, 298}$.

$$\delta. \Delta_r G^0 = -RT \ln K ; \text{AN : } \Delta_r G^0(673) = 48,70 \text{ kJ.mol}^{-1} .$$

$$\text{4.a. } \forall i \mu_i = \mu_i^0 + RT \ln \frac{P_i}{P^0} ; \Delta_r G = (2\mu_{\text{NH}_3}^0 - \mu_{\text{N}_2}^0 - 3\mu_{\text{H}_2}^0) + RT \ln \frac{\frac{P_{\text{NH}_3}^2}{P_{\text{N}_2} P_{\text{H}_2}^3}}{\frac{P^0}{P^0} \cdot \frac{P_{\text{N}_2}^3}{P^0^3}}$$

$$\Delta_r G = \Delta_r G^0 + RT \ln \frac{P_{\text{NH}_3}^2}{P_{\text{N}_2} P_{\text{H}_2}^3} + RT \ln 1, \text{ car } P^0 = 1 \text{ bar. On retrouve l'expression du}$$

quotient π dimensionné.

$$\text{b. } \Delta_r G = 0 \Rightarrow \Delta_r G^0(T) = -RT \ln K_p .$$

$$\text{5.a. } \text{N}_{2(g)} + 3\text{H}_{2(g)} \rightleftharpoons 2\text{NH}_{3(g)} \text{ de bilan molaire :}$$

$$t = 0 \quad 1 \quad 3 \quad 0$$

$$t \infty \quad 1 - \xi \quad 3(1 - \xi) \quad 2\xi ; \quad n_T = 2(2 - \xi) .$$

• catalyse, fraction molaire, graphe, isoler, lois de déplacement des équilibres chimiques, ordre de grandeur, recycler

$$P_{\text{NH}_3} = \frac{\xi}{2-\xi} P ; P_{\text{N}_2} = \frac{1-\xi}{4-2\xi} P ; P_{\text{H}_2} = \frac{3(1-\xi)}{4-2\xi} P.$$

$$\Delta_r G = \Delta_r G^0(T) + RT \ln \left[\frac{16\xi^2(2-\xi)^2}{27(1-\xi)^4 4P^2} \right] ; T = 673 \text{ K} ; \Delta_r G = 45,77 + 11,19 \ln \frac{\xi(2-\xi)}{(1-\xi)^2}.$$

b. $\Delta_r G = 45,77 + 11,19 \ln \frac{\xi(2-\xi)}{(1-\xi)^2}.$

en mol	ξ	0,007	0,008	0,009	0,010
en k.J.mol ⁻¹	$\Delta_r G_{673}$	-1,878	-0,3676	0,9673	2,163

Voir courbes.

c. ξ est tel que $\Delta_r G = 0$; on lit : $\xi_e = 0,00825 \text{ mol}.$

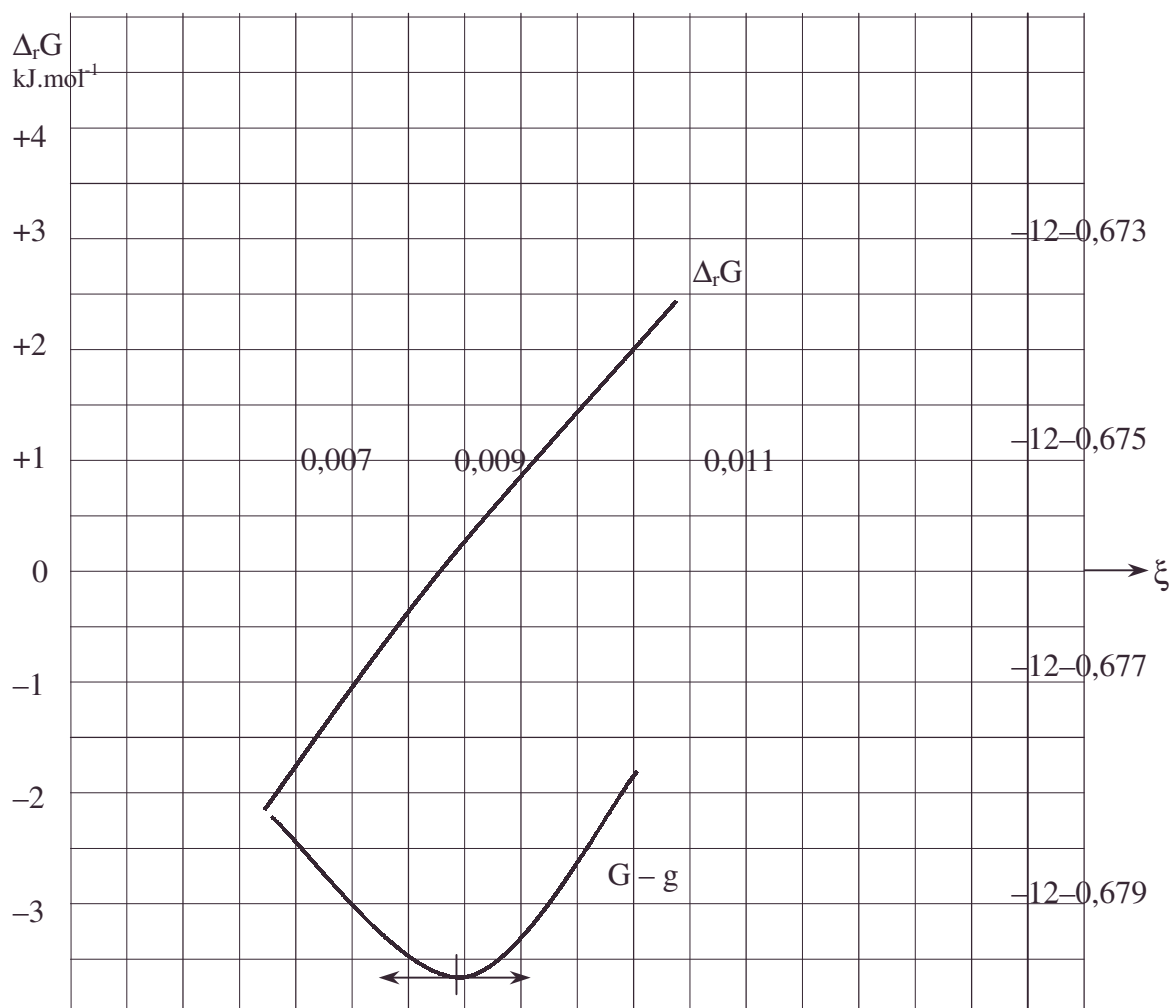
On vérifie que $K_p = \frac{16 \xi^2 (2-\xi)^2}{27 (1-\xi)^4}$; A.N. : $K_p = 1,654.10^{+4} \text{ bar}^{-2}$, valeur compatible

avec $K_{p,673}$.

6.a.α. On remplace n_i par sa valeur en fonction de ξ , cf. **5.a.**

$$G = (\mu_{\text{N}_2}^0 + 3\mu_{\text{H}_2}^0) + \xi(2\mu_{\text{NH}_3}^0 - \mu_{\text{N}_2}^0 - 3\mu_{\text{H}_2}^0)...$$

$$+ RT \left[\left(\ln \frac{P_{\text{N}_2}}{P^0} \right) (1-\xi) + 3(1-\xi) \ln \frac{P_{\text{H}_2}}{P^0} + 2\xi \ln \frac{P_{\text{NH}_3}}{P^0} \right] \quad G - g \text{ kJ}$$



β. De même pour les P_i .

Ainsi, $G = g(T) + \xi \Delta_r G^0 + RT \ln(\xi)$ avec $\begin{cases} g(T) = \mu_{N_2}^0 + 3\mu_{H_2}^0 \text{ cf. réactifs} \\ \Delta_r G^0 = 2\mu_{NH_3}^0 - \mu_{N_2}^0 - 3\mu_{H_2}^0 \end{cases}$

$$h(\xi) = \underbrace{(1-\xi) \ln \frac{(1-\xi)P}{2(2-\xi)P_0}}_A + \underbrace{3(1-\xi) \ln \frac{3(1-\xi)P}{2(2-\xi)P_0}}_B + \underbrace{2\xi \ln \frac{\xi P}{2-\xi P_0}}_C$$

Relatif à N_2 relatif à H_2 relatif à NH_3

b. Voir courbes page précédente.

c. Vérifions $\Delta_r G = \left(\frac{\partial (G - g)}{\partial \xi} \right)_{673}$ cf. définition de $\Delta_r G$.

d. Le minimum de $G - g$ permet de retrouver $\Delta_r G = 0$ à l'équilibre et donc $\xi_e = 0,0084$; cette détermination est moins précise que précédemment.

3.1.8. Génie chimique d'une unité de production d'ammoniac

Données thermodynamiques

gaz	CO	CO ₂	CH ₄	H ₂	O ₂	H ₂ O _{vapeur}	N ₂	NH ₃
$\Delta_f H^0$ (kJ.mol ⁻¹)	-110	-393	-75	0	0	-242	0	-46
s^0 (J.mol ⁻¹)	198	214	186	131	205	189	191	193

On rappelle que $\Delta_f H^0$ représente l'enthalpie de la réaction standard de formation à partir des corps simples.

On utilisera l'approximation d'ELLINGHAM : $\Delta_f H^0$ et s^0 sont supposés indépendants de la température.

Equilibre liquide – vapeur pour l'ammoniac à 20° Celcius

- Pression de vapeur saturante $P_{\text{sat}} = 8,6$ bar.
- Enthalpie molaire de vaporisation : $L_v = 20$ kJ.mol⁻¹.

On rappelle que 1 bar = 10⁵ Pa = P_0 .

Equilibre liquide – vapeur pour l'eau sous une pression de 50 bars

- Température d'équilibre : $\theta_{\text{eb}} = 264^\circ\text{C}$.
- Enthalpie massique de vaporisation : $\ell_v = 1,64.10^3$ kJ.kg⁻¹.

Equilibre liquide – vapeur pour l'eau sous une pression de 1 bar

- Température d'équilibre : $\theta_{\text{eb}} = 100^\circ\text{C}$.
- Enthalpie massique de vaporisation : $\ell_v = 2,26.10^3$ kJ.kg⁻¹.

Masses atomiques en g.mol⁻¹ : H : 1 ; C : 12 ; N : 14 ; O : 16.

L'eau liquide est supposée incompressible.

Sa capacité thermique est : $c = 4,2$ kJ.K⁻¹.kg⁻¹.

Pour simplifier les calculs, nous considérerons que :

- La température de 0°C correspond à 273 K.
- Tous les gaz sont parfaits . $R = 8,31$ J.K⁻¹ mol⁻¹.
- Tous les gaz ont, à toute température, la même capacité thermique molaire à pression constante : $C_p = 30$ J.mol⁻¹.K⁻¹.

- Pour tous les gaz, le rapport des capacités thermiques $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est égal à 1,4.

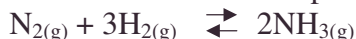
Lorsqu'il est demandé de calculer une grandeur, une réponse numérique est demandée.

- *approximation d'Ellingham, génie chimique, système diphasé, tables thermodynamiques partielles*

Equilibres homogènes

1. Réaction de synthèse

La synthèse de l'ammoniac se fait selon la réaction en phase gazeuse :



1. Examiner l'influence de la pression et de la température sur la proportion de NH_3 dans le mélange à l'équilibre. Justifier votre réponse en énonçant une loi de modération.

2. On choisit d'opérer sous 400 bars et à une température de 450°C.

Quelles considérations ont pu motiver ces choix ?

3. Calculer la constante d'équilibre à 450°C.

4. Notons x_1 , x_2 et x_3 les titres molaires respectifs en N_2 , H_2 et NH_3 ; on suppose qu'aucun constituant inerte ne figure dans le mélange. La température T et la pression P sont fixées et le système est en équilibre.

a. Ecrire deux relations vérifiées par x_1 , x_2 et x_3 .

b. Lorsque les proportions initiales subissent une modification infinitésimale, x_1 varie de dx_1 , x_2 varie de dx_2 et x_3 de dx_3 . Quelle relation doivent vérifier x_1 et x_2 pour que le titre en ammoniac x_3 soit maximal (soit $dx_3 = 0$) ? Dans quelles proportions les réactifs doivent-ils être introduits dans le réacteur ?

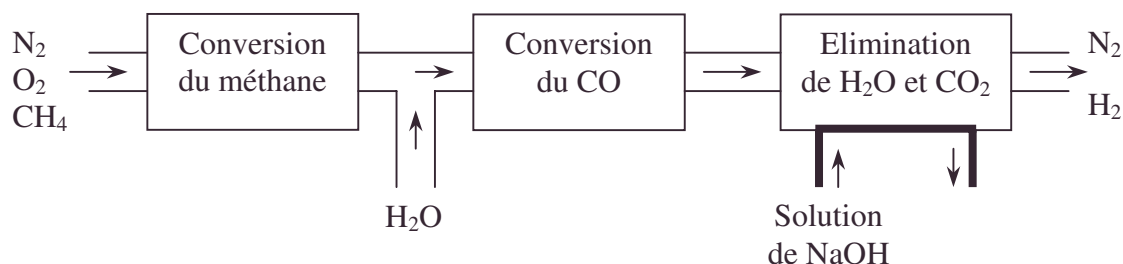
5. Partant d'un mélange de H_2 et N_2 dans les proportions stœchiométriques déterminer le taux de conversion α pour le dihydrogène lorsque l'équilibre est atteint à 450°C et sous 400 bars ; rappelons que α est égal à la quantité de N_2 qui a réagi divisée par la quantité initiale de N_2 .

6. Peut-on améliorer ce taux de conversion en utilisant un catalyseur approprié ?

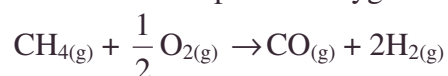
7. Dans le réacteur réel fonctionnant en continu le taux de conversion n'est que de 20% ? Pourquoi ?

2. Préparation des réactifs

Le dihydrogène est obtenu par conversion du méthane, et le diazote provient de l'air.



1. La réaction de conversion du méthane par le dioxygène est :



On opère à 800°C en présence de nickel.

Peut-on considérer la réaction comme totale ? Quel est le rôle du nickel ?

2. Pour éliminer le monoxyde de carbone, on opère la réaction de conversion à la vapeur d'eau à 500°C.



Quelle quantité d'eau faut-il introduire par mole de CO pour obtenir un taux de conversion de 0,99% pour le monoxyde de carbone ?

3. Le dioxyde de carbone produit par la réaction de conversion est éliminé par barbotage dans une solution aqueuse de soude.

Le dioxyde de carbone en solution $\text{CO}_{2(\text{aq})}$ est un diacide faible ; les deux constantes d'acidité sont telles que : $\text{p}K_{\text{A}1} = 6,4$ et $\text{p}K_{\text{A}2} = 10,3$.

La pression d'équilibre entre le gaz CO_2 et une solution de CO_2 est telle que :

$$\frac{P_{\text{CO}_2}}{P^0} = 4 \frac{(\text{CO}_{2(\text{aq})})}{c^0} \text{ avec } P^0 = 1 \text{ bar et } c^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}.$$

A sa sortie, le pH de la solution est égal à 14 et la concentration en carbonate y est égale à 1 mol.L^{-1} .

Déterminer la pression partielle de CO_2 dans le mélange gazeux après le passage dans la solution de soude. Conclure.

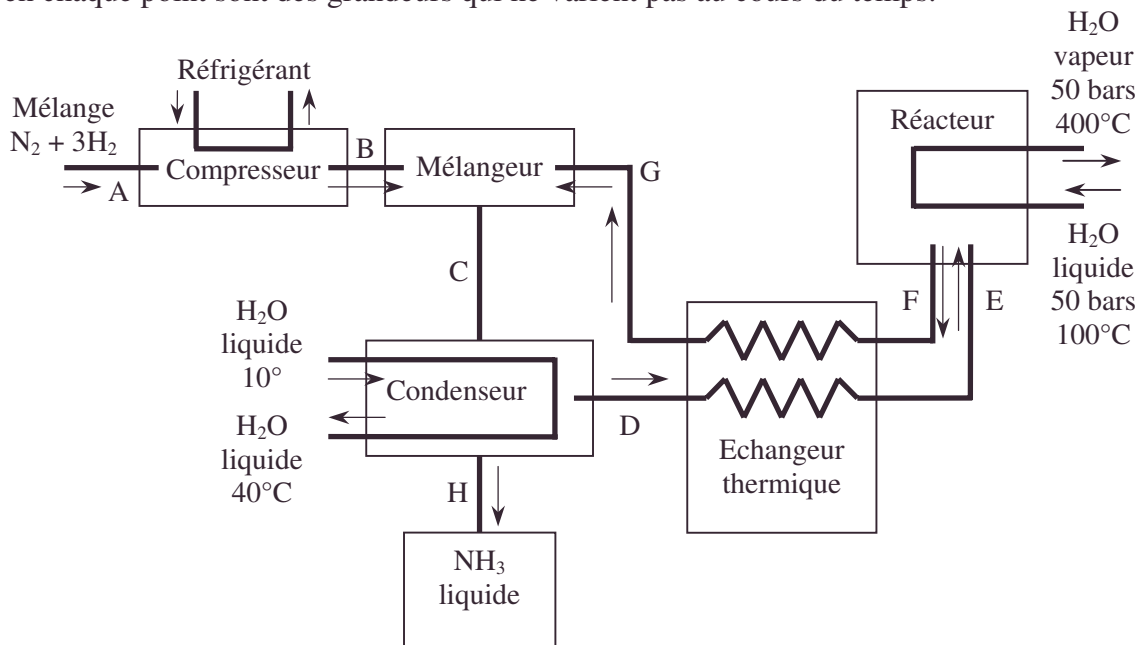
4. Calculer la quantité de soude consommée par mole de dihydrogène sortant du réacteur.

5. Comment la vapeur d'eau est-elle éliminée ?

6. Le mélange gazeux obtenu est pratiquement composé de 1 volume de diazote pour 3 volumes de dihydrogène. Déterminer la composition molaire du mélange de diazote, dioxygène et méthane à l'entrée du système. Doit-on utiliser de l'air pur ?

3. Fonctionnement de l'unité de synthèse

Le schéma de fonctionnement de l'unité de synthèse est représenté sur la figure. Le régime permanent étant atteint, la composition du mélange, la température et la pression en chaque point sont des grandeurs qui ne varient pas au cours du temps.



Températures connues : $T_A = 27^\circ\text{C}$; $T_B = 100^\circ\text{C}$; $T_D = 20^\circ\text{C}$; $T_E = 370^\circ\text{C}$; $T_F = 450^\circ\text{C}$
 Tout le circuit en aval du compresseur est à la pression $P_1 = 400 \text{ bars}$.

Les parois externes de l'échangeur, du condenseur et du réacteur sont supposées adiabatiques. On néglige les pertes dans les canalisations.

Soit D_0 la masse d'ammoniac produit en H par unité de temps. $D_0 = 1000$ tonnes par jour.

La réaction étant catalysée par le fer, les tubulures du réacteur sont en fer.

Le taux de conversion (dans le réacteur) est : $\alpha = 0,20$.

1. La réaction de synthèse ne s'effectue pratiquement que dans le réacteur. Pourquoi ?

2. En D, l'ammoniac vapeur est en équilibre avec l'ammoniac liquide.

Calculer la pression partielle en ammoniac au point D.

Calculer les titres molaires x_{1E} , x_{2E} et x_{3E} de N_2 , H_2 et NH_3 à l'entrée du réacteur en E.

3. Pendant une durée τ , une mole d'ammoniac liquide est récupérée après le passage par le condenseur.

- barbotage du dioxyde de carbone dans une solution aqueuse de soude, conversion à la vapeur d'eau, élimination industrielle de la vapeur d'eau, éliminer le monoxyde de carbone, loi de Henry, nickel, régime permanent, utilisation d'air pur

- a. Calculer τ .
- b. Pendant la durée τ , il rentre en E :
0,22 mole de NH_3 , 2,5 moles de N_2 et 7,5 moles de H_2 .
Justifier complètement ces valeurs à partir des données et des résultats précédents.
- c. Calculer les quantités de N_2 , H_2 et NH_3 qui sortent du réacteur en F pendant la durée τ .
- d. Calculer la température T_G en effectuant un bilan énergétique.
- e. Calculer les quantités de N_2 , H_2 qui entrent en B dans le mélangeur pendant la durée τ .
- f. Calculer la température T_C .

4. Calculer (en litres par seconde) le débit D_1 d'eau à travers le condenseur.

4. Etude thermodynamique du réacteur

1. La température T_E étant toujours de 370°C quelle serait la température de sortie T'_F si le circuit d'eau n'existait pas ? Pour ce calcul, on supposera que le taux de conversion est inchangé ; est-ce acceptable ?

2. Pendant la durée τ définie à la question 3.3., une masse d'eau m entre dans le réacteur, et une même masse en sort. Calculer m , puis le débit d'eau à travers le réacteur.

5. Fonctionnement du compresseur

A l'entrée du compresseur, en A, le mélange $\text{N}_2 + 3\text{H}_2$ est dans les conditions :

$$P_A = 1 \text{ bar} ; T_A = 300\text{K}.$$

Lorsque 1 mole de gaz traverse le compresseur, le moteur fournit un travail mécanique $W_{u \text{ mol}}$ et le gaz reçoit une énergie Q_{mol} sous forme d'échange thermique ; on admet que l'énergie cinétique reste négligeable.

1. Si ΔH_{mol} est la variation d'enthalpie molaire du mélange entre A et B, écrire la relation reliant ΔH_{mol} et Q_{mol} .

2. Nous supposons dans cette question que le compresseur n'est pas refroidi, et que le gaz y subit une transformation isentropique. Quelle serait alors la température T'_B ? Quelle serait la valeur de $W_{u \text{ mol}}$? Commenter ce résultat.

3. La température T_B est effectivement égale à 100°C . Le compresseur est refroidi et la puissance P_u du moteur est égale à 15.10^3 kW .

Effectuer un bilan énergétique pendant la durée τ définie à la question 3.3., et exprimer en fonction de M (masse molaire de NH_3), D_0 , P_u , C_p , T_A et T_B la puissance P_{Th} évacuée par le réfrigérant. Faire l'application numérique.

6. Moteur thermique

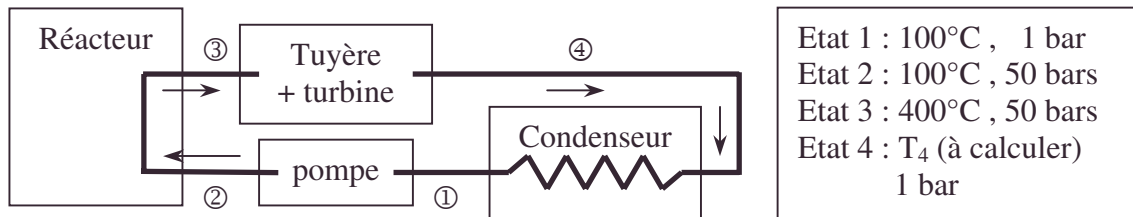
En raison des pertes mécaniques dues à la viscosité, le fonctionnement de l'unité nécessite en plus un certain nombre de pompes de circulation qui ne sont pas représentées sur la figure. La puissance mécanique utilisée par ces pompes est fournie par un moteur thermique qui utilise la vapeur produite au niveau du réacteur.

1. Quel serait le rendement maximal d'une machine thermique ditherme qui utiliserait une source chaude à la température $T_1 = 400^\circ\text{C}$ et une source froide à la température $T_2 = 100^\circ\text{C}$?

2. En supposant le rendement idéal, exprimer la puissance de ce moteur en fonction de la durée τ , de l'enthalpie $\Delta_r H$ de la réaction de synthèse et des températures T_1 et T_2 . Calculer numériquement cette puissance.

3. La vapeur qui sort du réacteur dans l'état 3 subit une détente dans une tuyère et entraîne une turbine. On suppose que son évolution est adiabatique et isentropique. Dans l'état final 4, la pression est $P_4 = 1 \text{ bar}$ et la vitesse du fluide négligeable.

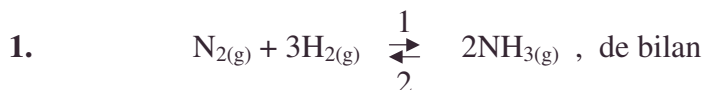
• circuit en aval du compresseur, compresseur, condenseur, débit d'eau passant à travers le réacteur de production d'ammoniac, durée de transit réactionnel, énergie cinétique négligeable en génie chimique classique, puissance évacuée par le réfrigérant, réacteur



- Montrer que l'eau dans l'état 4 se présente sous la forme d'un mélange de liquide et de vapeur. En déduire la température T₄.
- Exprimer en fonction de C_p, R, T₃, T₄, P₂ et P₄ la variation d'entropie de 1 mole de gaz (parfait) passant des conditions (P₃, T₃) à (P₄, T₄) ; en déduire la variation Δs₀ de l'entropie massique de la vapeur d'eau entre les mêmes états.
- Calculer le titre en vapeur dans l'état 4.
- Calculer la variation d'enthalpie pour une mole d'eau entre les états 3 et 4.
- Calculer la puissance fournie à la turbine.
- On néglige la puissance fournie par la pompe entre les états 1 et 2. Pourquoi ?

Autres concours ; Durée : 3h00

Correction



$$\begin{array}{llll} t = 0 & n_1^0 & n_2^0 & n_3^0 \\ t = \infty & n_1^0 - \xi & n_2^0 - 3\xi & n_3^0 + 2\xi \end{array}$$

avec ξ l'avancement Nombre total de moles : $n_1^0 + n_2^0 + n_3^0 - 2\xi$.

1.a. Le sens 1 s'accompagne d'une diminution du nombre total de moles de gaz. Une augmentation de pression fait évoluer selon le sens 1.

b. Le sens 1 est exothermique $\Delta_r H^0 = -92 \text{ kJ.mol}^{-1}$. Une augmentation de température fait évoluer selon le sens 2.

2. Les circonstances choisies ici sont un compromis entre cinétique et thermodynamique pour la production de NH₃.

La thermodynamique exige :

- de hautes pressions : 400 bars coûte moins cher que 1000 bars ;
- de basses températures où la vitesse de production est trop basse : 450° est un bon compromis.

3. $K = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right)$ avec $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T\Delta_r S^0$

$\Delta_r H^0 = 2\Delta_r H^0(\text{NH}_3) - 0$; A.N. : $\Delta_r H^0 = -92 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

$\Delta_r S^0 = 2s_{\text{NH}_3}^0 - s_{\text{N}_2}^0 - 3s_{\text{H}_2}^0$; A.N. : $\Delta_r S^0 = -198 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

A.N. : $\Delta_r G^0(450 + 273) = 51,15 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $K = 2,01.10^{-4}$

4.a.α. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

β. $K_{(T)} = \frac{P_{\text{NH}_3}^2 P_0^2}{P_{\text{N}_2} P_{\text{H}_2}^3} = \frac{x_3^2 P_0^2}{x_1 x_3^3 P^2}$.

b.α. $dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$.

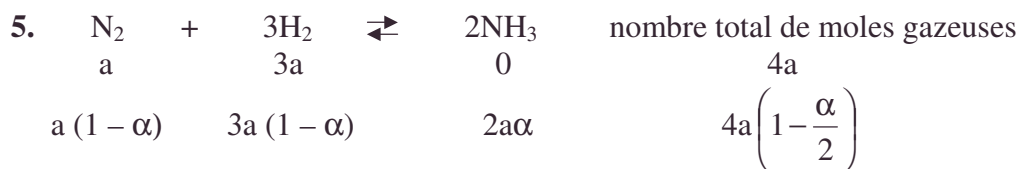
β. $0 = 2\frac{dx_3}{x_3} - \frac{dx_1}{x_1} - 3\frac{dx_2}{x_3}$ par différentiation logarithmique.

• *avancement, compromis entre cinétique et thermodynamique, détente dans une tuyère, pompes de circulation, puissance fournie à la turbine, puissance fournie par la pompe, système diphasé, titre en vapeur, turbine, variation*

γ. si x_3 maximal : $dx_3 = 0$; $dx_1 = -dx_2$.

$$\frac{dx_1}{x_1} = 3 \frac{dx_2}{x_2} \Rightarrow x_2 = 3x_1 \Rightarrow \frac{n_2^0 - 3\xi}{n_1^0 + n_2^0 + n_3^0 - 2\xi} = \frac{3n_1^0 - 3\xi}{n_1^0 + n_2^0 + n_3^0 - 2\xi},$$

ξ étant l'avancement $\Rightarrow n_2^0 = 3n_1^0$: les proportions initiales sont stœchiométriques.



$$P_{N_2} = \frac{1-\alpha}{4\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} P ; P_{H_2} = \frac{3(1-\alpha)}{4\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} P ; P_{NH_3} = \frac{1\alpha}{4\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} P .$$

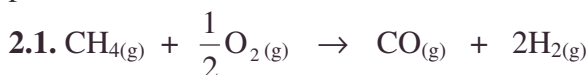
$$K = \frac{16\alpha^2(2-\alpha)}{27(1-\alpha)^4} \left(\frac{P_0}{P}\right)^2 .$$

A.N. : $T = 723 \text{ K}$; $K = 2,01 \cdot 10^{-4}$; $\frac{P}{P_0} = 400$; $\alpha = 0,654$.

6. α le facteur thermodynamique idéal n'est pas fonction d'un catalyseur, agent cinétique.

Le coefficient α effectif peut être amélioré par un catalyseur : on utilise de la poudre de fer associée à des promoteurs de texture dans l'industrie.

7. On n'attend pas l'établissement de l'équilibre thermodynamique. On optimise la production horaire du réacteur.



$$K' = \exp - \frac{\Delta_r G'^0}{RT} \text{ avec } \Delta_r G'^0 = \Delta_r H'^0 - T\Delta_r S'^0 .$$

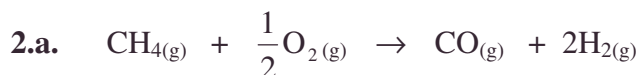
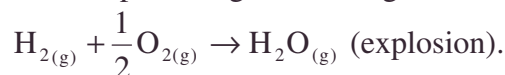
$$\Delta_r H'^0 = \Delta_f H_{CO}^0 - \Delta_f H_{CH_4}^0 \quad \text{A.N. : } \Delta_r H'^0 = -35 \text{ kJ.mol}^{-1} .$$

$$\Delta_r S'^0 = s_{CO}^0 + 2s_{H_2}^0 - s_{CH_4}^0 - \frac{1}{2}s_{O_2}^0 \quad \text{A.N. : } \Delta_r S'^0 = 171,5 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} .$$

$$\Delta_r G'^0(1073) = -219,0 \text{ kJ.mol}^{-1} ; K = 4,65 \cdot 10^{10} .$$

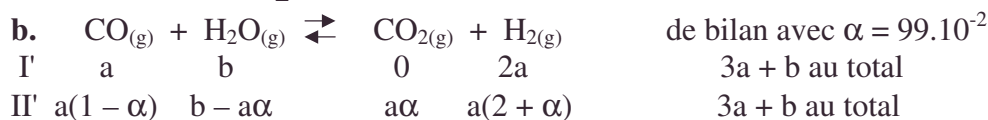
On peut considérer la réaction comme totale .

Le nickel peut servir de catalyseur notamment par sa porosité et sa grande surface de contact par kilogramme augmentant les facteurs de vitesse utiles ; il faut éviter



I	a	a'	0	0
---	-----	------	-----	-----

II	0	$a' - \frac{a}{2}$	a	$2a$	cf. question 2.6.
----	-----	--------------------	-----	------	-------------------



• optimisation de la production horaire du réacteur

$$P_{\text{CO}} = \frac{a(1-\alpha)}{3a+b}P; P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{b-a\alpha}{3a+b}P; P_{\text{CO}_2} = \frac{a\alpha}{3a+b}P; P_{\text{H}_2} = \frac{a(2+\alpha)}{3a+b}P;$$

$$K' = \frac{\alpha(2+\alpha)}{\left(\frac{b}{a}-\alpha\right)(1-\alpha)}. \text{ A.N. : } K' = 3,8; \alpha = 0,99 \Rightarrow \frac{b}{a} = 78,95.$$

La proportion initiale de l'eau est très grande.



La réaction est quasi totale en effet, vu la définition des K_A

$$(\text{CO}_{2(\text{aq})}) = \frac{(\text{H}^+)^2 (\text{CO}_3^{2-})}{K_{A1} K_{A2}}; \text{ A.N. : } (\text{CO}_3^{2-}) = 1 \text{ mol.L}^{-1}; (\text{CO}_{2(\text{aq})}) = 10^{-11,3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

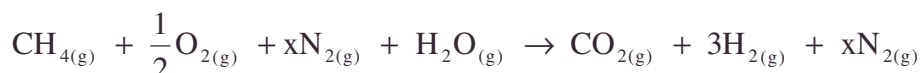
$P_{\text{CO}_2} = 4.10^{-11,3} \text{ bar}$. Conclusion : l'élimination de $\text{CO}_{2(\text{g})}$ est totale.

4. Quand on utilise 2 moles de soude ou d'ion hydroxyde, on a produit précédemment 1 mole de CO_2 et à 0,01 mole près produit 3 moles de H_2 .

On peut résumer : il y a 0,67 mole de soude consommée par mole de H_2 sortant du réacteur.

5. La vapeur d'eau se condense dans l'eau liquide de la réaction **2.3.** car on ne sépare pas H_2 , CO_2 et H_2O ultramajoritaire dans **2.2.** Il reste $\text{H}_{2(\text{g})}$ et $\text{N}_{2(\text{g})}$ très peu solubles.

6. On a en additionnant **2.2.a.** et **2.2.b.**



On observe $x = 1$ au lieu d'un état naturel $x = 2$ si on partait d'air (4 volumes N_2 pour 1 volume de O_2).

La proportion de O_2 étant plus forte que dans l'air pur, il faut ajouter O_2 à l'air en dépit des risques d'explosion $\text{H}_{2(\text{g})} + \frac{1}{2}\text{O}_{2(\text{g})} \rightarrow \text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$.

Le mélange initial contient

- 1 mole de N_2
- 0,5 mole de O_2
- 1 mole de CH_4 .

soit au départ de **2.2.a.** :

- 40% N_2
- 20% O_2
- 40% CH_4 .

3.1. Le réacteur est le seul lieu où catalyseur et température, facteurs cinétiques, favorisent la réaction.

2.a. A la sortie du condenseur, vu la vapeur saturante, $P_{\text{NH}_3} = 8,6 \text{ bar}$;

b. Vu $P_i = x_i P$: $x_{3E} = \frac{8,6}{400} = 0,0215$;

or $P_{\text{H}_2} = 3P_{\text{N}_2} \Rightarrow x_{2E} = 3x_{1E}$; vu $\sum x_i = 1$: $0,021 + 4x_{1E} = 1$.

$x_{1E} = 0,245$; $x_{2E} = 0,734$.

3.a. 1 mole de NH_3 représente une masse M de 17g de NH_3 (pendant τ).

$D_0 = 1000 t_{\text{NH}_3} \text{ par jour}$; $\tau = \frac{M}{D_0}$; A.N. : $\tau = 1,47 \text{ ms}$.

b. Pendant la durée τ , il se produit une quantité M de NH_3 . A l'entrée du réacteur à partir de 0,22 mole de NH_3 , 2,5 moles de N_2 , 7,5 moles de H_2 avec un taux de conversion de 0,2. Il se produit 0,5.2 moles de NH_3 soit une mole de NH_3 sur un total de 12,22 moles.

• ajouter de l'oxygène à l'air pour optimiser la conversion du méthane, élimination de la vapeur d'eau qui se condense dans l'eau liquide, élimination totale du dioxyde de carbone par la soude, excès initial de l'eau, risques d'explosion

(On aura 0,22 mole qui ne seront pas récupérées sous forme liquide et qui se retrouvera à l'entrée ultérieurement).

Dans la phase gazeuse à l'entrée du réacteur, on retrouve les valeurs :

$$x_{3E} = \frac{0,22}{10,22} = 0,0215 ; x_{2E} = 3x_{1E} = \frac{7,5}{10,22} = 0,734 ; x_{1E} = 0,245.$$

c. Ressortent du réacteur pendant la durée τ où $\alpha = 0,2$:

2,5(1 - α) moles de $N_2 = 2$ moles de N_2

7,5(1 - α) moles de $H_2 = 6$ moles de H_2

1,22 moles de NH_3 car 1,22 = 1 + 0,22 soit au total 9,22 moles de gaz.

d. Pendant τ , 10,22 moles entrent en E

9,22 moles sortent en F et passent en G.

Dans l'échangeur, il y a échauffement à l'entrée entre D et E ; il y a refroidissement à la sortie entre F et G. : $Q = 10,22(T_E - T_D) = 9,22(T_F - T_G)$; A.N. : $T_G = 335 \text{ K} = 62^\circ\text{C}$.

e. Pendant τ ,

$$n_{H_{2C}} = n_{H_{2B}} + n_{H_{2F}} \Rightarrow n_{H_{2B}} = n_{H_{2C}} - n_{H_{2F}} ; \text{ A.N. : } n_{H_{2B}} = 2,5 - 2 = 0,5 \text{ mole.}$$

$$n_{N_{2C}} = n_{N_{2B}} + n_{N_{2F}} \Rightarrow n_{N_{2B}} = n_{N_{2C}} - n_{N_{2F}} ; \text{ A.N. : } n_{N_{2B}} = 7,5 - 6 = 1,5 \text{ mole.}$$

f. Pendant τ , on mélange 2 moles de gaz à $T_B = 100^\circ\text{C}$ avec 9,22 moles de gaz à $T_G = 62^\circ\text{C}$. Cela donne 11,22 moles à T_C .

La conservation de la chaleur échangée s'écrit :

$$2C_p(T_B - T_C) = 9,22C_p(T_C - T_G) \Rightarrow T_C = \frac{2T_B + 9,22T_G}{11,22} ; \text{ A.N. : } T_C = 68,8^\circ\text{C}.$$

4. Pendant τ , 11,22 moles de gaz passent de T_C à T_D et cèdent :

$$11,22 C_p(T_C - T_D) = 16500 \text{ J.}$$

Une mole de NH_3 se condense et cède $L_v = 20 \text{ kJ}$.

Le réfrigérant récupère $11,22C_p(T_C - T_D) + L_v = cD_1\tau(40 - 10)$ pendant τ ,

$$\text{d'où } D_1' = \frac{36500}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 30,1 \cdot 47 \cdot 10^{-3}} = 2001 \text{ s}^{-1} \text{ ce qui est d'un ordre de grandeur tout-à-fait industriel.}$$

4.1. En absence de réfrigérant dans le réacteur, la chaleur produite par la réaction à T_E à raison de $\frac{\Delta_r H^0}{2}$ par mole de NH_3 sert à échauffer les gaz formés de T_E à T'_F .

$$\frac{\Delta_r H^0}{2} + 9,22C_p(T'_F - T_E) = 0 \Rightarrow T'_F = 536,3^\circ\text{C}.$$

Quand une différence de température intervient il n'est pas nécessaire de convertir les températures en K. $\alpha(T)$ change avec la température, mais la réponse constitue une approximation acceptable car 450 et 536° sont des températures voisines.

2. Faisons le bilan en faisant intervenir le réfrigérant de débit D_2 , qui prélève

$$\text{pendant } \tau : D_2\tau \left(c(264 - 100) + \lambda_v + \frac{1000C_p}{M}(400 - 264) \right) = 2,55 \cdot 10^6 \cdot D_2\tau, \text{ avec}$$

$m = D_2\tau$; le nouveau bilan s'écrit :

$$\frac{\Delta_r H}{2} + 9,22C_p(T_F - T_E) + 2,55 \cdot 10^6 \cdot D_2\tau ; \text{ A.N. : } D_2 = 6,37 \text{ kg.s}^{-1}. m = 9,36 \text{ g.}$$

5.1. Pour un système ouvert : $\Delta H_{\text{mol}} = W_{\text{u mol}} + Q_{\text{mol}}$ pour une mole.

2.a. La formule des transformations isentropiques de gaz parfaits donne :

$$T'_B = T_A \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ A.N. : } P_B = 400 \text{ bar ; } T'_B = 1662 \text{ K.}$$

b. Si $Q_{\text{mol}} = 0$, $W_{\text{u mol}} = C_p (T'_B - T_A)$; A.N. : $W_{\text{u mol}} = 40,9 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

Les valeurs numériques sont élevées.

3. Le bilan pour le compresseur s'écrit, pendant la durée τ , sachant que 2 moles gazeuses en sortent alors que se produit 1 mole de NH_3 dans l'installation :

$$2C_p (T_B - T_A) = P_u \tau - P_{\text{th}} \tau \Rightarrow P_{\text{th}} = P_u - \frac{2C_p D_0}{M} (T_B - T_A) ; \text{ A.N. : } P_{\text{th}} = 12,02 \cdot 10^3 \text{ kW.}$$

6.1. La formule des moteurs dithermes donne : $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ A.N. : $\eta = 0,446$.

2. $\eta = \frac{P_{\text{moteur}}}{\dot{Q}_{\text{réfrigérant réacteur}}}$ avec $\tau \dot{Q}_{\text{réfrigérant réacteur}} = -\frac{1}{2} \Delta_r H^0 - 9,22 C_p (T_F - T_E) = 2,55 \cdot 10^6 \cdot D_2 \tau$.

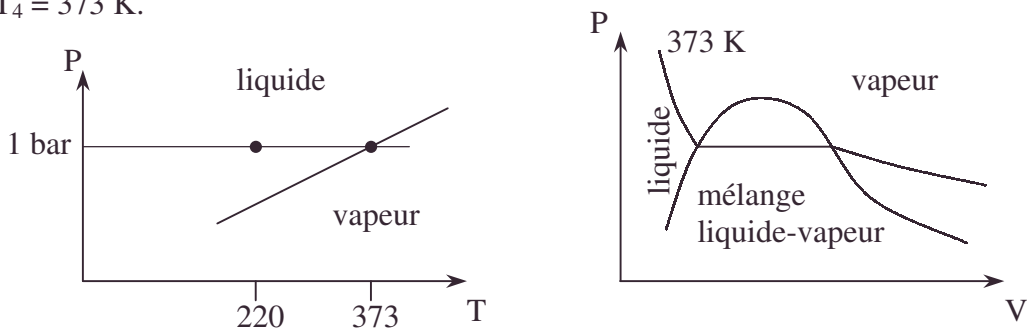
$$\Rightarrow P_{\text{moteur}} = 2,55 \cdot 10^6 D_2 \eta ; \text{ A.N. : } P_{\text{moteur}} = 7,25 \text{ MW.}$$

3.a. Si on suppose la vapeur sèche : $T_4 = T_3 \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ vu la détente isentropique.

A.N. : $T_4 = 220 \text{ K}$; $T_4 < 373 \text{ K}$.

On n'est pas dans le domaine de la vapeur mais avec un mélange liquide vapeur car l'état entièrement liquide est impossible (non occupation du volume). cf. figures

$$\Rightarrow T_4 = 373 \text{ K.}$$



b. Pour une mole de gaz parfait : $dQ = C_p dT - V dP$.

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \Rightarrow \Delta s_{\text{mol}} = C_p \ln \frac{T_4}{T_3} - R \ln \frac{P_4}{P_3} ; \text{ A.N. : } \Delta s_{\text{mol}} = 14,8 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Pour 1 kg de vapeur d'eau sèche : $\Delta s_0 = \frac{\Delta s_{\text{mol}}}{M}$; A.N. : $\Delta s_0 = 822,2 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$,

avec : $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$.

c. On part d'un kilogramme de vapeur à T_3, P_2 . On la fait passer de T_3, P_3 à T_4, P_4 soit un bilan entropique de Δs_0 .

si x est le titre massique de vapeur, $(1 - x) \text{ kg}$ est liquéfié à la température $T_4 = 373 \text{ K}$

sous 1 bar, le bilan entropique est $-\frac{\lambda_v}{T_4} (1 - x)$.

L'ensemble subit une transformation isentropique (adiabatique réversible) :

$$\Delta S = 0 = \Delta s_0 - \frac{\lambda_v (1 - x)}{T_4} \Rightarrow x = 1 - \frac{T_4 \Delta s_0}{\lambda_v} ; \text{ A.N. : } x = 0,864.$$

d. 1 mole de vapeur d'eau va passer de T_3, P_3 à T_4, P_4 .

• puissance de moteur industriel, puissance thermique industrielle, système diphasé

Le bilan enthalpique est $C_p(T_4 - T_3)$.

$(1 - x)$ mole est liquéfiée, le bilan enthalpique est $-\lambda_v(1 - x)M_{H_2O}$.

$h_4 - h_3 = C_p(T_4 - T_3) - \lambda_v(1 - x)M_{H_2O}$; A.N. : $h_4 - h_3 = -14,55 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

e. $\frac{D_2}{M_{H_2O}}(h_4 - h_3) = \mathcal{P}_{\text{turbine}} + 0$; A.N. : $\mathcal{P}_{\text{turbine}} = 5,142 \text{ kW}$.

f. Comme on néglige les énergies cinétiques $\frac{D_2}{M_{H_2O}}(h_2 - h_1) = \mathcal{P}_{\text{pompe}}$.

En considérant le liquide incompressible, d'enthalpie indépendante de la pression :

$$D_2 \frac{h_2 - h_1}{M_{H_2O}} = D_2 c(T_2 - T_1) = 0 = \mathcal{P}_{\text{pompe}}.$$

3.1.9. Thermodynamique de la déshydrogénation du propane

Voir page 1720.

3.1.10. Obtention industrielle du MTBE, antidétonant non polluant

Voir page 1741.

3.

1.11. Comparaison thermodynamique d'acides carboxyliques

Voir page 1785.

3.2. Equilibres hétérogènes

3.2.1. Obtention d'un solide à partir de deux gaz

Par action d'un volume de H_2S gazeux sur un volume égal de NH_3 gazeux, mesuré dans les mêmes conditions de température et de pression, on obtient le sel cristallisé NH_4HS .

a. Ce sel, placé dans un récipient initialement vide, subit une dissociation partielle en H_2S et NH_3 , qui conduit à un équilibre. On observe à 14°C une pression de 25 mm de mercure et à 24°C une pression de 42 mm de mercure. Calculer la variation d'enthalpie correspondant à la réaction de l'ammoniac sur le sulfure d'hydrogène, ces deux réactifs étant pris à l'état gazeux.

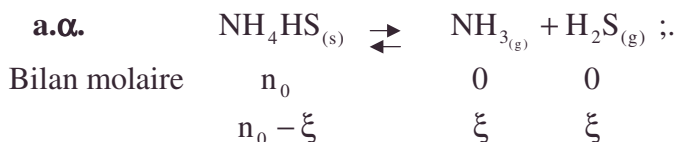
Pour quelles raisons cette variation d'enthalpie n'a-t-elle pas la même valeur que celle qui correspond à la réaction d'une mole de NH_3 en solution aqueuse sur une mole de H_2S en solution aqueuse ?

b. A la température de 24°C , on mélange dans un récipient vide un volume v de H_2S et un volume v' de NH_3 mesurés dans les mêmes conditions ($v > v'$). La pression finale est de 50 mm de mercure. Déterminer la composition en volumes du mélange gazeux en équilibre.

Dans quelles proportions faudrait-il mélanger H_2S et NH_3 pour avoir une pression minimale à cette température ? On précisera la valeur de cette pression.

CCP

Corrigé



Le bilan molaire permet d'écrire : $P_{\text{NH}_3} = P_{\text{H}_2\text{S}} = \frac{p}{2}$; $K_p = P_{\text{NH}_3} \cdot P_{\text{H}_2\text{S}}$;

$\Rightarrow K_p = \frac{p^2}{4}$ constante d'équilibre dimensionnée.

A.N. : $K_p = 441 \text{ mm}^2 \text{ Hg}$ à 24°C

La loi de Van't Hoff $\frac{d \ln K}{dt} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$ permet de trouver $\Delta_r H^0$ supposée constant :

$$\Delta_r H^0 = \frac{2RT_1T_2 \ln \frac{p_2}{p_1}}{T_2 - T_1} ; \text{AN : } \Delta_r H^0 = 73,6 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

β.. $\text{NH}_{3(d)} + \text{H}_{2\text{S}(d)} \rightleftharpoons \text{NH}_{4(aq)}^+ + \text{HS}_{(aq)}^-$ n'a pas de caractéristiques communes car les ions sont solvatés dans l'eau, ce qui n'est pas dans le solide. La dissolution des gaz fait intervenir des équilibres de dissolution, le passage à l'état gazeux des ions du cristal fait intervenir l'énergie réticulaire du cristal.

$$\mathbf{b. \alpha.} \quad P = P_{\text{NH}_3} + P_{\text{H}_2\text{S}} ; K_p = P_{\text{NH}_3} \cdot P_{\text{H}_2\text{S}}$$

Réolvons en $P_{\text{H}_2\text{S}}$: On obtient $P_{\text{H}_2\text{S}}^2 - P_{\text{H}_2\text{S}} + K_p = 0$.

$$P_{\text{H}_2\text{S}} = \frac{P + \varepsilon \sqrt{P^2 - 4K_p}}{2} \Rightarrow P_{\text{NH}_3} = \frac{P - \varepsilon \sqrt{P^2 - 4K_p}}{2} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1$$

Or initialement vu $v' > v$, on a : $P_{\text{H}_2\text{S}_0} > P_{\text{NH}_3_0} \Rightarrow \varepsilon = +1$. Ecrivons $n_i = \frac{P_i v}{RT}$.

$$\frac{n_{\text{H}_2\text{S}}}{n_{\text{NH}_3}} = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4K_p}}{P - \sqrt{P^2 - 4K_p}} ; \text{AN : } \frac{n_{\text{H}_2\text{S}}}{n_{\text{NH}_3}} = 3,372 = \frac{v_{\text{H}_2\text{S}}}{v_{\text{NH}_3}} \text{ les gaz étant supposés séparés sous}$$

même pression et température ; si on prend $\bar{V}_{\text{H}_2\text{S}} + \bar{V}_{\text{NH}_3} = 100$ la composition en % du volume est : $\bar{V}_{\text{NH}_3} = 22,87\%$; $\bar{V}_{\text{H}_2\text{S}} = 77,13\%$.

$\mathbf{\beta.}$ La pression totale est la somme de 2 nombres dont le produit est constant ; elle est minimale pour l'égalité des 2 nombres.

$$P_{\text{H}_2\text{S}} = P_{\text{NH}_3} = \sqrt{K_p} ; P = 2\sqrt{K_p} ; \text{AN : } P = 42 \text{ mm Hg.}$$



$$\begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & 0 \\ n_1 - \xi & n_2 - \xi & \xi \end{array}$$

$P_{\text{H}_2\text{S}} = P_{\text{NH}_3} \Rightarrow n_1 - \xi = n_2 - \xi \Rightarrow n_1 = n_2$; les proportions initiales sont équimolaires.

3.2.2. Equilibre de Boudouard 1

La réaction $\text{CO}_{2(g)} + \text{C}_{(s)} \xrightleftharpoons[2]{1} 2\text{CO}_{(g)}$ est effectuée à la pression $P = 1$ bar.

Le tableau ci-dessous donne la valeur de la constante d'équilibre dimensionnée K_p en fonction de la température en degré Celsius.

Température (degré C)	800	1000	1200
K_p (bar)	0,011	1,52	57,1

1. La réaction est-elle exothermique dans le sens 1 ? Justifier votre réponse.
2. Si l'enthalpie de réaction (dans le sens 1) est constante dans l'intervalle de température considéré, calculez sa valeur. (Une solution graphique est souhaitée).
On veut convertir du dioxyde de carbone en monoxyde par passage sur du carbone à $P^0 = 1$ bar avec un taux de conversion de 85 %.
3. Montrer, en appliquant la règle des phases, que si l'on admet que l'équilibre est atteint dans le réacteur, la température de celui-ci est déterminée. Précisez clairement les notations adoptées.
4. Quelle est cette température ?
5. Si le gaz à convertir est un gaz de fumée de composition : dioxyde de carbone 20%, azote 80% (pourcentage molaire), quel sera le taux de conversion à 1000° C ?
Rappel : on pourra définir le taux de conversion par le rapport du nombre de moles de dioxyde de carbone transformées au nombre de moles de dioxyde de carbone initial.

CCP

- composition en volume, constante d'équilibre, équilibre de Boudouard, exothermique, gaz de fumée, graphe, réacteur, règle des phases, taux de conversion

Corrigé

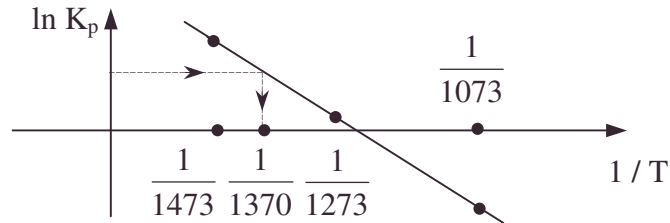
1. La formule de Van't Hoff donne $\Delta_r H^0 = RT^2 \frac{d}{dT}(\ln K_p)$. K_p est croissant avec T , $\ln K_p$ aussi $\Rightarrow \Delta_r H^0 > 0$. La réaction n'est pas exothermique mais endothermique.

2. L'intégration de la formule de Van't Hoff avec $\Delta_r H^0$ constant donne :

$$\ln K_p = -\frac{\Delta_r H^0}{RT} + C$$

et graphiquement, on déduit la mesure de la pente :

$$\Delta_r H^0 = 282 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

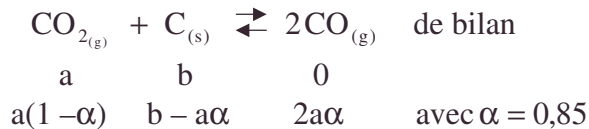


3.a. La formule de Gibbs $v = c - r + 2 - \phi$ (ou règle des phases) donne :

$v = 3 - 1 + 2 - 2 = 2$. Soit T et P ces paramètres intensifs indépendants.

b.α. La variance pratique diminue d'une unité quand on impose $P = P^0$.

β. La variance pratique diminue d'une unité quand on impose une relation aux paramètres intensifs :



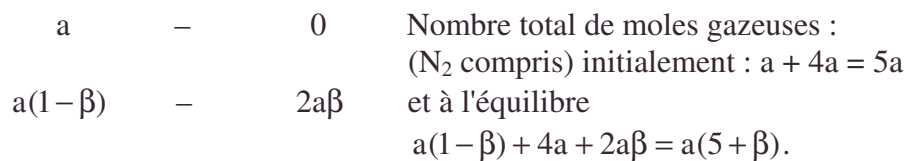
$$\text{soit } \frac{P_{\text{CO}}}{2\alpha} = \frac{P_{\text{CO}_2}}{1-\alpha} = \frac{P}{1+\alpha}$$

Conclusion : la variance tombe à 0 : tous les paramètres intensifs sont déterminés en particulier T .

$$4. P_{\text{CO}} + P_{\text{CO}_2} = P^0 ; \frac{P_{\text{CO}}}{2\alpha} = \frac{P_{\text{CO}_2}}{1-\alpha} = \frac{P^0}{1+\alpha} \Rightarrow K_p = \frac{P_{\text{CO}}^2}{P^0 P_{\text{CO}_2}} = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2} ; \text{A.N. : } K_p = 10,4 \text{ bar}$$

Le graphe $\ln K_p = f\left(\frac{1}{T}\right)$ permet de trouver $T = 1370 \text{ K}$.

5. Bilan molaire : $\text{CO}_{2(g)} + \text{C}_{(s)} \rightleftharpoons 2\text{CO}_{(g)}$; le taux de conversion est ici β .



$$\frac{RT}{V} = \frac{P_{\text{CO}_2}}{a(1-\beta)} = \frac{P_{\text{CO}}}{2a\beta} = \frac{P_{\text{N}_2}}{4a} = \frac{P^0}{a(5+\beta)}, \text{ d'où :}$$

$$P_{\text{N}_2} = \frac{4P^0}{5+\beta} ; P_{\text{CO}_2} = \frac{1-\beta}{5+\beta} P^0 ; P_{\text{CO}} = \frac{2\beta}{5+\beta} P^0 ;$$

$$K_p = \frac{P_{\text{CO}}^2}{P^0 P_{\text{CO}_2}} = \frac{1}{(5+\beta)} \cdot \frac{4\beta^2}{(1-\beta)} ; \beta = \frac{-2K_p + \sqrt{9K_p^2 + 20K_p}}{4 + K_p} ;$$

l'influence de N_2 intervient par 5 au lieu de 1 dans le nombre total de moles gazeuses puis par 4, dans l'expression de β . AN : à 1000° C : $K_p = 1,52$; $\beta = 0,745$.

On rappelle qu'à plus haute température, $\beta \rightarrow 1$.

3.2.3. Equilibre de Boudouard 2

Le système (carbone solide, dioxyde de carbone gazeux et monoxyde de carbone gazeux) est caractérisé par un équilibre chimique décrit par le schéma réactionnel suivant : $C_{(s)} + CO_{2(g)} \rightleftharpoons 2CO_{(g)}$.

Les diverses espèces gazeuses se comportent comme des gaz parfaits de constante molaire $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$. La pression de référence des espèces gazeuses pour le calcul des grandeurs thermodynamiques est égale à 1 bar. L'activité du carbone solide est égale à 1.

L'enthalpie libre réactionnelle standard de la réaction étudiée est donnée en fonction de la température par la relation : $\Delta_r G^0(T) = 170670 - 174,5T$ ($\Delta_r G^0$ en joules et T en kelvins).

1. Pour la température de 600° C, établir la relation $P(x^*)$ entre la pression totale P et le titre molaire (ou fraction molaire) x^* du monoxyde de carbone dans la phase gazeuse à l'équilibre. Dresser un tableau des valeurs de P exprimées en bars pour les valeurs de x^* variant par incréments de 0,1 à partir de zéro.

2. Dans un réacteur à volume constant, on introduit un mélange de monoxyde de carbone et de dioxyde de carbone de pression initiale totale égale à P et de titre molaire initial en monoxyde de carbone égal à X_0 . La température du milieu réactionnel est maintenue à 600° C.

Etablir la relation $P(X)$ entre la pression totale P et le titre molaire en monoxyde de carbone X, décrivant le trajet réactionnel au cours de l'évolution à température constante du système vers son état d'équilibre. On admettra que la quantité de carbone présente est suffisante pour ne pas limiter l'évolution du système.

3. On étudie à 600° C, deux mélanges gazeux A et B dont les caractéristiques initiales sont les suivantes : Mélange A : $P_0 = 1,5$ bar ; $X_0 = 0,8$

Mélange B : $P_0 = 0,6$ bar ; $X_0 = 0,1$.

La quantité de carbone solide présente est suffisante pour ne pas limiter l'évolution du système.

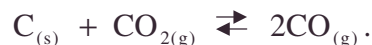
a. Pour chaque cas, expliciter la relation $P(X)$ décrivant le trajet réactionnel et dresser un tableau des valeurs de P exprimées en bars pour les valeurs de X variant par incréments de 0,1 à partir de zéro.

b. Représenter graphiquement les deux trajets réactionnels pour les mélanges A et B.

c. En déduire les valeurs de P et x^* à l'équilibre.

ENSAM ; Durée : 1h00

Corrigé



1. $P_{CO_2} = X_{CO_2} P$; $P_{CO} = X_{CO} P$; $X_{CO} + X_{CO_2} = 1$. $x^* = X_{CO}$.

$$K = \frac{P_{CO}^2}{P_{CO_2} P^0} = \frac{x^{*2} P^2}{(1-x^*) P P^0} = \frac{x^{*2}}{(1-x^*) P^0} P \Rightarrow P = \frac{1-x^*}{x^{*2}} K P^0 \text{ relation tenant compte de}$$

la thermodynamique.

$$\Delta_r G^0 = 170670 - 174,5.(600 + 273) = 18331,5 J.mol^{-1} ; \text{ or } \ln K = \frac{-\Delta_r G^0}{RT} ; K = 8,00.10^{-2}$$

• activité, enthalpie libre standard de la réaction, équilibre de Boudouard, gaz parfait, graphe, réacteur à volume constant, tableau, titre molaire

Un programme permet d'obtenir :

x^*	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
P_{bar}	7,20	1,60	0,62	0,30	0,16	0,089	0,049	0,025	0,010



- $n_{\text{CO}_2} \quad n_{\text{CO}} : n_{\text{CO}_2} + n_{\text{CO}} = n_{T^0}.$

- $n_{\text{CO}_2} - \xi \quad n_{\text{CO}} + 2\xi : n_{\text{CO}_2} + n_{\text{CO}} + \xi = n_T$ pour la phase gazeuse globale.

$$P = n \frac{RT}{V_0} = (n_{T^0} + \xi) \frac{RT}{V_0} = P_0 + \frac{\xi}{n_{T^0}} P_0. \text{ Or } X_0 = \frac{n_{\text{CO}}}{n_{T^0}}$$

$$X = \frac{n_{\text{CO}} + 2\xi}{n_{T^0} + \xi} = \frac{X_0 + 2\frac{\xi}{n_{T^0}}}{1 + \frac{\xi}{n_{T^0}}}, \text{ d'où } \frac{\xi}{n_{T^0}} = \frac{X - X_0}{2 - X} ; P = P_0 \frac{2 - X_0}{2 - X}, \text{ relation tenant}$$

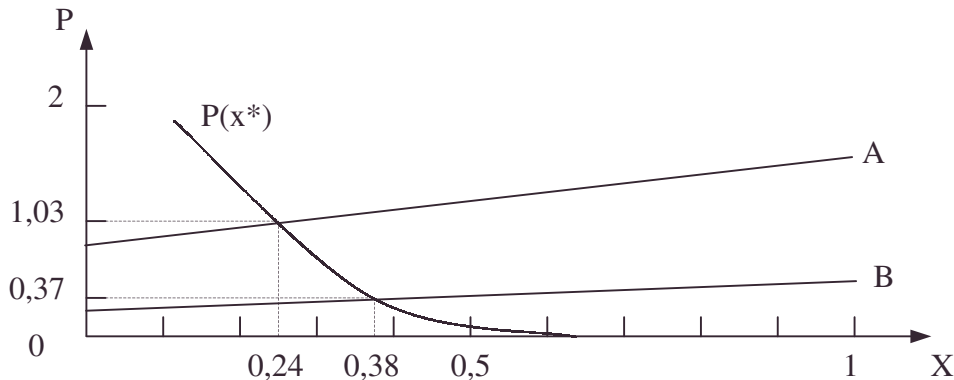
compte de la conservation de la matière.

3.a. $P_A(X) = \frac{1,8}{2 - X} ; P_B(X) = \frac{0,57}{2 - X}$ vu 2.:

Un programme donne :

X	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
P_A bar	0,900	0,947	1,000	1,059	1,125	1,200	1,286	1,385	1,500	1,636	1,800
P_B bar	0,285	0,300	0,317	0,335	0,356	0,380	0,407	0,438	0,475	0,518	0,570

b.



c. En tenant compte de la thermodynamique et de la conservation de la matière, on

note les intersections de $P_0 \frac{2 - X_0}{2 - X} = \frac{1 - X}{X^2} K$, on résout :

A. $x^* = 0,243 ; P = 1,024 \text{ bar}.$

B. $x^* = 0,3768 ; P = 0,351 \text{ bar}.$

On voit l'influence des conditions initiales sur X_{CO} .

3.2.4. Fours à chaux Déplacements par ajout

On considère la dissociation thermique du carbonate de calcium :



Les enthalpies et enthalpies libres de formation standards des composés en cause sont données dans le tableau suivant. On les supposera indépendantes de la température.

Composé	$\Delta_f H^0 / (\text{kJ.mol}^{-1})$	$\Delta_f G^0 / (\text{kJ.mol}^{-1})$
$\text{CO}_{2(g)}$	-393,0	-394,2
$\text{CaO}_{(s)}$	-635,0	-603,6
$\text{CaCO}_{3(s)}$	-1208	-1128

a. Comment s'appelle le composant CaO en nomenclature officielle et en pratique industrielle ?

b. Calculer l'enthalpie standard de la réaction de dissociation du carbonate de calcium. S'agit-il d'une réaction endo ou exothermique ? La dissociation est-elle favorisée par une élévation ou une diminution de la température ?

c. Calculer la constante de l'équilibre de dissociation à 25° C ($R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$).

d. Dans un récipient de volume constant, que se passe-t-il si l'on introduit, une fois l'équilibre précédent atteint :

α. du dioxyde de carbone ;

β. une petite quantité de $\text{CaO}_{(s)}$;

γ. de l'argon, gaz inerte vis-à-vis de tous les constituants présents

Capes

Corrigé

a. L'oxyde de calcium, encore appelé chaux vive.

b.

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}_2, g) + \Delta_f H^0(\text{CaO}, s) - \Delta_f H^0(\text{CaCO}_3, s); \text{A.N.: } \Delta_r H^0 = 180 \text{ kJ.mol}^{-1};$$

la réaction est endothermique, elle est donc favorisée par une élévation de température (cf. loi de Van't Hoff).

$$\text{c. } \ln K = -\frac{\Delta_r G^0}{RT} \text{ avec } \Delta_r G^0 = \Delta_f G^0(\text{CO}_2, g) + \Delta_f G^0(\text{CaO}, s) - \Delta_f G^0(\text{CaCO}_3, s);$$

$$P_{\text{CO}_2} = P_0 K(T).$$

$$\text{A.N.: } K = 1,50.10^{-23}.$$

$$\text{d. } \mathcal{A} = RT \ln \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}_2 \text{ éq}}}$$

α. On favorise la formation de $\text{CaCO}_{3(s)}$ car il faut éliminer le dioxyde de carbone introduit à cette température pour retrouver $P_{\text{CO}_2 \text{ éq}}$.

β. On ne favorise aucune transformation car $P_{\text{CO}_2} = K(T)$ cf. $\mathcal{A} = 0$.

γ. De même car la pression partielle de CO_2 ne dépend pas de n_A .

3.2.5. Four à chaux en présence de coke

Soient deux récipients A et B de même volume V, indilatables, maintenus à la même température T, séparés par une paroi escamotable. Dans A on introduit du carbonate de calcium en quantité suffisante pour que l'équilibre (a), de constante K_a , s'établisse

$$\text{CaCO}_{3(s)} \rightleftharpoons \text{CaO}_{(s)} + \text{CO}_{2(g)} \quad (\text{a})$$

Dans B du monoxyde de carbone a été introduit et l'équilibre (b), de constante K_b , s'est établi :

$$2\text{CO}_{(g)} \rightleftharpoons \text{C}_{(s)} + \text{CO}_{2(g)} \quad (\text{b})$$

1. Calculer la variance dans chacune des deux enceintes.

• argon, carbonate de calcium, chaux vive, constante d'équilibre, déplacement par ajout, endothermique, four à chaux, gaz inerte, lois de déplacement des équilibres chimiques, oxyde de calcium, tables thermodynamiques partielles

2. La paroi est escamotée. On admettra que les conditions expérimentales $T, V \dots$ ont été choisies de telle sorte que les équilibres précédents coexistent.

a. Calculer la nouvelle variance. Quelle conséquence tirez-vous de la valeur trouvée ?

b. En envisageant successivement les quatre modifications suivantes :

- ajout de carbone,
- injection de CO_2 ,
- injection de CO ,
- injection de N_2 ,

décrire l'évolution du système chimique.

Centrale

Corrigé

1.a. Dans A : variance théorique : $v = c - r + 2 - \phi$.

$$v_{\text{théorique}} = 3 - 1 + 2 - 3 = 1$$

$$v_{\text{pratique}} = 3 - 1 + 1 - 3 = 0 \text{ car } T \text{ est fixée.}$$

b. Dans B : $v_{\text{théorique}} = 3 - 1 + 2 - 2 = 2$

$$v_{\text{pratique}} = 3 - 1 + 1 - 2 = 1 \text{ car } T \text{ est fixée.}$$

2.a.α. $v_{\text{théorique}} = 5 - 2 + 2 - 4 = 1$

$$v_{\text{pratique}} = 5 - 2 + 1 - 4 = 0 \text{ à } T \text{ fixée.}$$

β. T étant fixée, tous les paramètres intensifs sont déterminés : $P_{\text{CO}}^0, P_{\text{CO}_2}^0$.

$$P_{\text{CO}_2} = P^0 K_a; P^0 \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}^2} = K_b \Rightarrow P_{\text{CO}} = P^0 \left(\frac{K_a}{K_b} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

b.α. Ajout de C (en petite quantité) : aucune modification car on suppose que la variation faible de volume n'a pas de conséquence sensible sur T et donc sur P_{CO_2} .

β. Ajout de CO_2 : la réaction évolue dans le sens de formation de $\text{CaCO}_{3(s)}$ et maintient P_{CO_2} constant puisque P_{CO_2} est fixée à condition qu'il reste $\text{CaO}_{(s)}$.

La réaction b n'évolue pas car P_{CO} reste fixée.

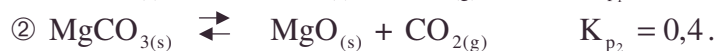
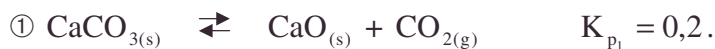
γ. Injection de CO : la réaction b évolue dans le sens de formation de C ; la réaction a transformé le supplément de CO_2 en $\text{CaCO}_{3(s)}$ car P_{CO_2} reste constant à condition que CaO soit en quantité suffisante.

δ. Injection de N_2 : aucune influence car ne perturbe en rien les autres pressions partielles.

3.2.6. Ennui d'un four à chaux

Le problème vient de la proximité d'aspect de 2 carbonates à l'état naturel et de la différence de propriété des oxydes correspondants pour la fabrication de ciment.

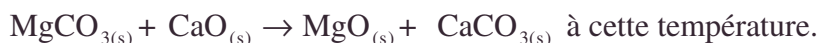
A $t = 20^\circ \text{C}$ on donne :



Constantes d'équilibre sans dimensions.

- coke, constante d'équilibre, four à chaux, injection, paramètre intensif, variance, variance théorique

1. Calculer l'affinité chimique \mathcal{A} de la réaction :



2. On introduit, à 820° C, 3 mol de MgCO_3 , 1 mol de MgO , 3 mol de CaCO_3 et 1 mol de CaO dans un récipient de volume $V = 50 \text{ L}$. Quelle est la composition du système à l'état final ? $R = 8,31 \text{ K.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Les solides ne sont pas miscibles.

Autres concours

Corrigé

1. Soit $\text{MgCO}_{3(s)} + \text{CaO}_{(s)} \rightarrow \text{CaCO}_{3(s)} + \text{MgO}_{(s)} \quad (3)$.

$$-\mathcal{A} = \Delta_r G_3 = \mu_{\text{CaCO}_3} + \mu_{\text{MgO}} - \mu_{\text{CaO}} - \mu_{\text{MgCO}_3}.$$

Les solides sont non miscibles en général.

$$a_{\text{solide}} = X_{\text{phase solide pure}} = 1 \text{ et } \mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i \Rightarrow \mu_{\text{solide}_i} = \mu_{\text{solide}_i}^0.$$

$$\Delta_r G_3 = \mu_{\text{CaCO}_3}^0 + \mu_{\text{MgO}}^0 - \mu_{\text{CaO}}^0 - \mu_{\text{MgCO}_3}^0.$$

Additionnons $+\mu_{\text{CO}_2}^0$ et $-\mu_{\text{CO}_2}^0$ à cela :

$$\Delta_r G_3 = \Delta_r G_2^0 - \Delta_r G_1^0 = -RT \ln K_{p_2} + RT \ln K_{p_1} = -RT \ln \frac{K_{p_2}}{K_{p_1}} < 0.$$

Or vu le cours, $dG_3 = \Delta_r G_3 d\xi \leq 0 \Rightarrow d\xi > 0$ sens 1 total.
à T et P constant

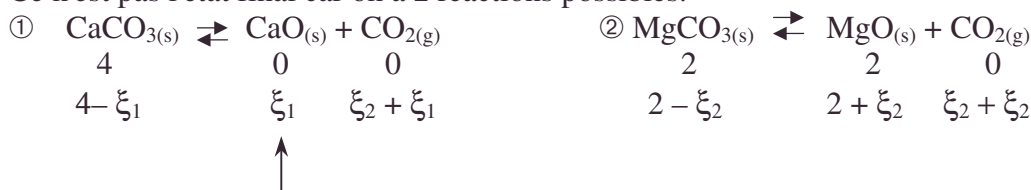
Il n'existe pas en effet d'équilibre pour (3) car $\mathcal{A} \neq 0 \forall \xi$.

$$\mathcal{A} = RT \ln \frac{K_{p_2}}{K_{p_1}} \text{ A.N. : } \mathcal{A} = 6,3 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

2. ① $\text{MgCO}_{3(s)} + \text{CaO}_{(s)} \rightarrow \text{CaCO}_{3(s)} + \text{MgO}_{(s)}$ réaction totale

bilan EI	3	1	3	1
EF	2	0	4	2

Ce n'est pas l'état final car on a 2 réactions possibles.



$\xi_1 \neq 0$ est impossible car (3) est totale.

Il ne peut exister de CaO : $\xi_1 = 0$; $\xi_2 \frac{RT}{V} = K_{p_1} P^0$

A.N. : $P_{\text{CO}_2} = 0,4 \text{ bar}$; $\xi_2 = 0,22$;

$$n_{\text{MgCO}_3} = 1,78 \text{ mol} ; n_{\text{MgO}} = 2,22 \text{ mol} ;$$

$$n_{\text{CaCO}_3} = 4 ; n_{\text{CaO}} = 0.$$

3.2.7. Biochimie du sang

La concentration ($\text{O}_{2(d)}$) de l'oxygène dissous $\text{O}_{2(d)}$ dans le sang est proportionnelle à la pression $p(\text{O}_2)$ de l'oxygène gazeux en équilibre avec le sang : $(\text{O}_{2(d)}) = kp(\text{O}_2)$.

- affinité thermodynamique, non miscibilité, potentiel chimique

a. Comment s'appelle la loi dont on a fait ici application pour écrire la relation précédente ? Pensez-vous qu'elle soit valable quelle que soit la concentration en oxygène ?

b. L'oxygène dissous se combine à l'hémoglobine Hb des globules rouges pour donner l'oxyhémoglobine HbO₂ suivant la réaction équilibrée $\text{Hb} + \text{O}_{2(d)} \rightleftharpoons \text{HbO}_2$ [1], dont la constante d'équilibre à 37° C sera symbolisée par K_{C_1} .

Exprimer l'avancement sans dimension ξ_{eq} de la réaction à l'équilibre à 37° C, en fonction de la pression d'oxygène en équilibre avec le sang. Tracer sommairement le graphe ξ_{eq} en fonction de $p(\text{O}_2)$. On appellera n_1 la quantité d'hémoglobine présente dans le sang avant équilibre avec l'oxygène et par conséquent n_1 / V la concentration en hémoglobine dans un volume V de sang.

Vérifier que la quantité d'oxyhémoglobine formée est une quantité continûment croissante de la pression d'oxygène.

On admettra qu'à 37° C l'hémoglobine est pratiquement totalement transformée en oxyhémoglobine lorsque $p(\text{O}_2) = 0,2$ bar.

c. Le monoxyde de carbone dissous $\text{CO}_{(d)}$ se combine à l'hémoglobine des globules rouges suivant la réaction équilibrée $\text{Hb} + \text{CO}_{(d)} \rightleftharpoons \text{HbCO}$ [2] à laquelle correspond une constante d'équilibre K_{C_2} à 37° C. Nommer HbCO.

d. Calculer à 37° C la constante K de l'équilibre $\text{HbO}_2 + \text{CO}_{(d)} \rightleftharpoons \text{HbCO} + \text{O}_{2(d)}$ en fonction de K_{C_1} et K_{C_2} .

e. On donne $K = 210$ et l'on admettra que la concentration du monoxyde de carbone dissous ($\text{CO}_{(d)}$) est proportionnelle à la pression $p(\text{CO})$ du monoxyde de carbone gazeux en équilibre avec le sang, $(\text{CO}_{(d)}) = kp(\text{CO})$ avec le même coefficient de proportionnalité k que pour l'oxygène dissous pour ne pas compliquer le modèle.

La pression partielle de l'oxygène étant égale à 0,2 bar, calculer la pression partielle en monoxyde de carbone $p(\text{CO})$ qui conduit à une diminution de 50 % de la concentration en oxyhémoglobine du sang.

Capes

Corrigé

a. Il s'agit de la loi de Henry, valable pour les faibles concentrations en oxygène.

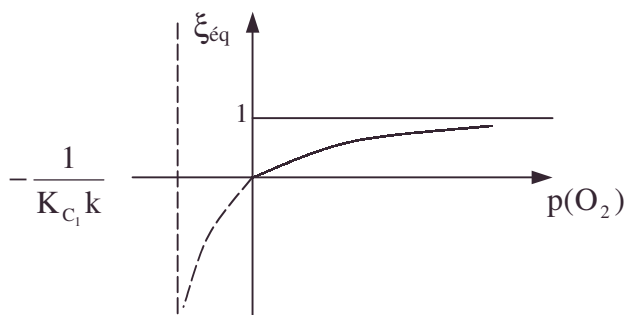
b. $\text{Hb} + \text{O}_{2(d)} \rightleftharpoons \text{HbO}_2$; le bilan molaire est ;

$$\begin{array}{ccc} c & 0 & \text{avec } c = \frac{n_i}{V} \\ c(1 - \xi_{\text{eq}}) & (\text{O}_{2(d)})_{\text{eq}} & c\xi_{\text{eq}} \end{array}$$

Cette écriture définira ainsi ξ_{eq} avancement sans dimension.

$$\text{On a : } K_{C_1} = \frac{(\text{HbO}_2)}{(\text{Hb})(\text{O}_{2(d)})} \text{ soit } K_{C_1} = \frac{\xi_{\text{eq}}}{(1 - \xi_{\text{eq}})kp(\text{O}_2)} ;$$

$$\text{d'où : } \xi_{\text{eq}} = \frac{K_{C_1} kp(\text{O}_2)}{1 + K_{C_1} kp(\text{O}_2)} < 1.$$



Le graphe est une hyperbole croissante car $\frac{d\xi}{dp(O_2)} > 0$ pour

$P(O_2) > 0$.

Pour $P(O_2) = 0,2 \text{ bar}$, $\xi_{\text{aq}} = 1$.

$(\text{HbO}_2) = (\text{Hb})_0$.

c. HbCO est la carboxyhémoglobine.

$$\text{d. } K = \frac{(\text{HbCO})(O_{2(d)})}{(\text{HbO}_2)(\text{CO}_{(d)})}; K_{c_2} = \frac{(\text{HbCO})}{(\text{Hb})(\text{CO}_{(d)})} \Rightarrow K = \frac{K_{c_2}}{K_{c_1}}.$$

$$\text{e. } K = \frac{(\text{HbCO})kp(O_2)}{(\text{HbO}_2)kp(\text{CO})} \text{ or } (\text{HbCO}) + (\text{HbO}_2) = (\text{Hb})_0.$$

$$\text{On veut : } (\text{HbO}_2) = \frac{(\text{Hb})_0}{2} = (\text{HbCO}).$$

$$K = \frac{(O_{2(d)})}{(\text{CO}_{(d)})} = \frac{p(O_2)}{p(\text{CO})} \text{ d'où } p(\text{CO}) = \frac{p(O_2)}{K} = 0,00095 \text{ bar}.$$

Une faible pression de CO entraîne une forte diminution de l'oxyhémoglobine du sang. On voit ici un aspect de la toxicité de CO.

3.2.8. Action du dichlore sur le cuivre

On étudie les deux réactions équilibrées :



a. Quelle est la variance de chacun des équilibres précédents, sachant que les solides considérés ne sont pas miscibles ?

Quelle conclusion relative aux paramètres intensifs en tire-t-on ?

b. Etablir, pour les deux réactions ci-dessus l'expression de leur affinité standard en fonction de la température. Tracer les graphes correspondants. On se limitera à l'intervalle $[0 - 400^\circ\text{C}]$.

c. Quel est le sens physique des différents domaines et droites du plan ainsi déterminé ? Justifier votre réponse.

d. Du dichlore, sous la pression constante de 0,03 bar circule dans une canalisation en cuivre, la température est de 80°C . Le métal est-il attaqué ? Si oui, quels sont les produits formés ?

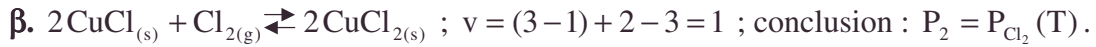
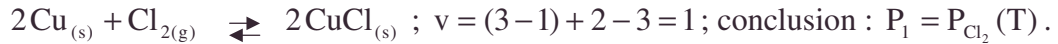
Grandeurs thermodynamiques standard considérées comme constantes dans l'intervalle $[0 - 400^\circ\text{C}]$. On rappelle $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

	$\text{Cu}_{(s)}$	$\text{CuCl}_{(s)}$	$\text{CuCl}_{2(s)}$	$\text{Cl}_{2(g)}$
$h^0 \text{ kJ mol}^{-1}$	0	-134,8	-205,9	0
$s^0 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	33,5	87,0	113	221,8

AIR ; Durée : 1h00

Corrigé

1.a.α. Rappelons la formule de Gibbs pour la variance : $v = c - r + 2 - \phi$



Remarque : $P_1(T) \neq P_2(T)$ permet d'exclure de l'étude la coexistence des 2 équilibres dans la question **2.b.**

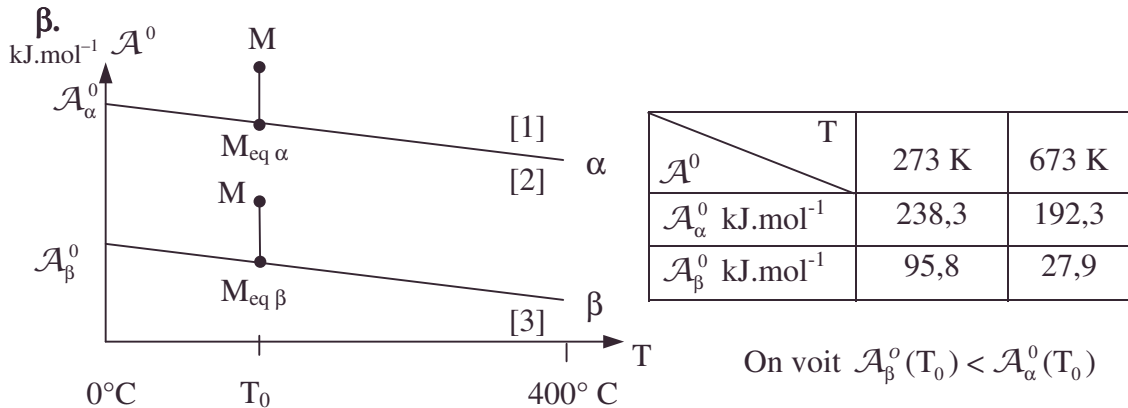
$$\mathbf{b.α.} \quad \mathcal{A}^0 = -\Delta_r G^0 = -\Delta_r H^0 + T\Delta_r S^0.$$

$$\mathcal{A}_\alpha^0 = -(2h_{\text{CuCl}_{(s)}}^0 - 0) + T(2s_{\text{CuCl}_{(s)}}^0 - 2s_{\text{Cu}_{(s)}}^0 - s_{\text{Cl}_{2(g)}}^0);$$

$$\text{A.N. : } \mathcal{A}_\alpha^0 = 296,6 \cdot 10^3 - 114,8T \text{ (en J.mol}^{-1}\text{)};$$

$$\mathcal{A}_\beta^0 = -(2h_{\text{CuCl}_{2(s)}}^0 - 2h_{\text{CuCl}_{(s)}}^0) + T(2s_{\text{CuCl}_{2(s)}}^0 - 2s_{\text{CuCl}_{(s)}}^0 - s_{\text{Cl}_{2(g)}}^0);$$

$$\mathcal{A}_\beta^0 = 142,2 \cdot 10^3 - 169,8T \text{ (en J.mol}^{-1}\text{)}.$$



c.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}^0 + RT \ln \frac{P_{\text{Cl}_2}}{P^0} \\ \text{A l'équilibre } \mathcal{A} &= 0 = \mathcal{A}^0 + RT \ln \frac{P_{\text{Cl}_2, \text{eq}}}{P^0} \end{aligned} \right\} \mathcal{A} = RT \ln \frac{P_{\text{Cl}_2}}{P_{\text{Cl}_2, \text{eq}}} \Rightarrow P_{\text{Cl}_2} = P_{\text{Cl}_2, \text{eq}} \exp\left(\frac{\mathcal{A}}{RT}\right).$$

• Chaque point M_0 des droites correspond à un équilibre, où $P_{\text{Cl}_2, \text{eq}} = P^0 \exp\left(\frac{-\mathcal{A}_0}{RT}\right)$ donc $\mathcal{A}_\beta^0 < \mathcal{A}_\alpha^0 \Rightarrow P_{\text{Cl}_2, \text{eq } \alpha} < P_{\text{Cl}_2, \text{eq } \beta}$.

Remarque : pour $0 < t < 400^\circ\text{C}$, $\mathcal{A}^0 > 0 \Rightarrow P_{\text{Cl}_2, \text{eq}} < P^0$.

• A T_0 donnée, si $P_{\text{Cl}_2} < P_{\text{Cl}_2, \text{eq}} < P^0$; $\mathcal{A} < 0$; l'équilibre est totalement déplacé dans le sens 2 (de droite à gauche).

Pour l'équilibre α , les points $M \in [1]$ sont en correspondance avec les point M_0 à T_0 constant, \mathcal{A}^0 variant formellement si on change T_0 ; en imaginant cet état grâce à un paramètre "caché".

$$\text{on a prolongation en M de la formule } P_{\text{Cl}_2} = P^0 \exp\left(-\frac{\mathcal{A}_\alpha^0}{RT}\right) \Rightarrow P_{\text{Cl}_2}(T) < P_{\text{Cl}_2, \text{eq } \alpha}(T)$$

(cf. figure), $\mathcal{A}_\alpha < 0$; donc en $M \in [1]$, il n'y a plus $\text{CuCl}_{(s)}$.

[1] est le domaine de $\text{Cu}_{(s)}$ en présence de $\text{Cl}_{2(g)}$.

• *affinité thermodynamique, formule de Gibbs, régionnement, variance*

Equilibres hétérogènes

De même pour l'équilibre β ; les points $M \in [2]$ sont des points où coexistent $\text{CuCl}_{(s)}$ et $\text{Cl}_{2(g)}$ car l'équilibre β est totalement déplacé dans le sens 2 quand $P_{\text{Cl}_2}(T) < P_{\text{Cl}_{2\text{eq}\beta}}(T)$.

De manière complémentaire, en raisonnant sur $\mathcal{A} > 0$, l'équilibre est totalement déplacé dans le sens 1.

- Pour α , [2] est le domaine de $\text{CuCl}_{(s)}$ (en présence de $\text{Cl}_{2(g)}$). (Recouvrement entre les raisonnements relatifs à α et β).

- Pour β , [3] est le domaine de $\text{CuCl}_{2(s)}$ coexistant avec $\text{Cl}_{2(g)}$.

d. A $T_1=353 \text{ K}$, $A_{0\alpha} = 229075,6 \text{ Jmol}^{-1}$; $P_{\text{Cl}_{2\text{eq}\alpha}} = 1,26 \cdot 10^{-13} \text{ bar}$;

$A_{0\beta} = 82260,6 \text{ Jmol}^{-1}$; $P_{\text{Cl}_{2\text{eq}\beta}} = 1,34 \cdot 10^{-34} \text{ bar}$.

On est donc dans la situation $P_{\text{Cl}_{2\text{eq}\alpha}} < P_{\text{Cl}_{2\text{eq}\beta}} < P_{\text{Cl}_2} < P_0$.

On n'est pas dans le domaine [1] pour α , ni [2] pour β . On est donc dans le domaine [3], où le dichlore reste en présence de $\text{CuCl}_{2(s)}$ dans un état non évolutif. Préalablement, dans ces conditions, le cuivre est attaqué en consommant totalement les 3,03 bar de chlore tant qu'il reste en contact avec $\text{Cl}_{2(g)}$ donnant $\text{CuCl}_{(g)(s)}$ puis $\text{CuCl}_{2(s)}$ de la même manière tant que le contact de $\text{CuCl}_{(s)}$ est assuré avec $\text{Cl}_{2(g)}$.

3.3. Equilibres hétérogènes de la métallurgie n'appartient pas explicitement au programme de BCPST2

3.3.1. Réduction d'oxyde de fer dans un haut-fourneau

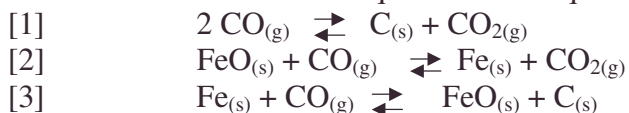
La constante des gaz parfaits sera prise égale à $8,3144 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

On donne à trois températures différentes 900 K, 1000 K et 1100 K, les enthalpies libres molaires standard de formation $\Delta_f G^0$ des oxydes $\text{CO}_{(g)}$, $\text{CO}_{2(g)}$ et $\text{FeO}_{(s)}$ en kilojoules.mole⁻¹.

Ces valeurs sont données à $\Delta\Delta_f G^0 = 0,01 \text{ kJ.mol}^{-1}$ près.

	900 K	1000 K	1100 K
$\Delta_f G^0(\text{CO})$	- 191,39	- 200,24	- 209,04
$\Delta_f G^0(\text{CO}_2)$	- 395,79	- 395,92	- 396,05
$\Delta_f G^0(\text{FeO})$	- 205,86	- 199,52	- 193,05

Entre ces oxydes et le fer s'établissent les équilibres classiques :



On désignera par P_{CO} , P_{CO_2} et P respectivement les pressions partielles de CO et CO_2 et la pression totale de la phase gazeuse.

I.1. Calculer la variance de ces équilibres en supposant que l'oxyde FeO est un composé stœchiométrique et indiquer les conséquences de la valeur trouvée.

2. Faut-il modifier ou simplement compléter ces résultats si on tient compte du fait que l'oxyde FeO présente en fait des écarts à la stœchiométrie entre les limites Fe_{1-x}O et FeO ?

3.a. Calculer à partir des valeurs données dans le tableau ci-dessus les enthalpies libres $\Delta_r G_1^0$, $\Delta_r G_2^0$ et $\Delta_r G_3^0$ des réactions [1],[2] et [3] aux trois températures indiquées.

b. En déduire les logarithmes décimaux des constantes d'équilibre correspondantes K_1 , K_2 et K_3 à ces températures.

c. Estimer la précision de ces résultats et en déduire que les valeurs des logarithmes décimaux des constantes K_i peuvent être données avec 3 décimales.

Les résultats des questions **a.** et **b.** seront rassemblés dans un seul tableau pour les 3 températures considérées.

4. Quelle relation existe-t-il entre K_1 , K_2 et K_3 ?

II.1. Calculer, aux trois températures envisagées :

a. les pressions partielles de CO à l'équilibre correspondant aux réactions [1] et [2] sous une pression totale $P = 1 \text{ bar}$.

b. la pression d'équilibre correspond à la réaction [3].

2.a. dans un diagramme $P_{\text{CO}} = f(T)$ à pression totale constante de 1 bar, placer les points relatifs aux réactions [1] et [2] et en déduire l'allure des courbes $P_{\text{CO}} = f(T)$ correspondantes ; les échelles des coordonnées seront choisies de façon à couvrir l'intervalle 870 – 1130 K pour les abscisses et 0 – 1,5 bar pour les ordonnées.

b. Ces courbes découpent le plan en quatre régions. Quelle est la nature de la ou des phases condensées dans chaque domaine ? Justifier la réponse donnée à partir des lois du déplacement de l'équilibre. Préciser notamment par des hachures le domaine où le

mélange CO – CO₂ à 1 bar est sans action sur le fer et ne conduit pas à un dépôt de carbone.

3.a. Tracer sur le même diagramme la courbe (non isobare) $P_{CO} = f(T)$ pour l'équilibre [3].

b. Montrer que cette courbe passe nécessairement par le point d'intersection des deux autres.

Quelle est la variance du système Fe – FeO – C – CO – CO₂ en ce point ? Commenter.

c. Cette courbe intervient-elle pour délimiter de nouveaux domaines dans le plan $P_{CO} - T$?

III. On considère maintenant les mêmes systèmes [1], [2] et [3] mais en présence d'un gaz inerte dont on désignera la pression partielle à l'équilibre par P_i , la pression totale P restant fixée à 1 bar.

1. Donner l'expression en fonction de P_i et de la constante K_1 ou K_2 , des pressions partielles à l'équilibre P_{CO} correspondant respectivement aux réactions [1] et [2].

2. Reconnaître la nature géométrique de la courbe $P_{CO} = f(P_i)$ relative à la réaction [1] et vérifier que, quelle que soit la température, toutes les courbes [1] $P_{CO} = f(P_i)$ ont un point commun et une tangente commune en ce point.

3. On fera varier P_i de 0 à 1 atm. Représenter sur deux diagrammes différents à 900 K et 1100 K l'allure des courbes $P_{CO} = f(P_i)$ pour les réactions [1] et [2]. Indiquer en justifiant la réponse la nature de la ou des phases solides présentes dans chaque région du plan.

On précisera encore par des hachures la zone où un mélange CO – CO₂ – gaz inerte n'oxyde pas le fer et ne donne pas de dépôt de carbone.

IV. A 900 K on met en contact de l'air avec du carbone en excès jusqu'à réalisation de l'équilibre. Le mélange gazeux obtenu est maintenu à la pression totale de 1 bar.

1. En admettant que l'air a la composition 1 O₂ pour 4 N₂, calculer les pressions partielles $x = P_{CO}$, $y = P_{CO_2}$ et $z = P_{N_2}$ dans ce mélange.

2. On envoie ce mélange sur du fer à 1100 K. En admettant que le gaz atteint cette température assez rapidement pour que sa composition ne varie pas entre-temps, déduire des diagrammes précédents la ou les réactions que l'on va observer.

CCP ; Durée : 2h

Corrigé

I.1.a. Variance du système total :

$v_{Gibbs} = n - r + 2 - \phi$ avec $n = 5$; $r = 2$ (car on peut considérer [3] comme résultat de [1] et [2]) ; $\phi = 4$; (les solides sont non miscibles, à la différence des gaz).

$v_{Gibbs} = 1$.

b. Si on choisit un paramètre intensif (P ou T par exemple), les autres paramètres intensifs sont déterminés par ce choix.

2. L'intervention de Fe_{1-x}O se substitue à celle de FeO, seuls les coefficients stœchiométriques changent. Les paramètres intensifs ne varient pas en nombre ;

$v_{Gibbs} = 1$.

3.a. $\Delta_r G_1^0 = \Delta_f G_{(CO_2)}^0 - 2\Delta_f G_{(CO)}^0$; $\Delta_r G_2^0 = \Delta_f G_{(CO_2)}^0 - \Delta_f G_{(CO)}^0 - \Delta_f G_{(FeO)}^0$

$\Delta_r G_3^0 = \Delta_f G_{(FeO)}^0 - \Delta_f G_{(CO)}^0$.

b. $\ln K_i = \frac{-\Delta_r G_i^0}{RT}$; $\log K_i = -\frac{\Delta_r G_i^0}{RT \ln 10}$ avec $\ln 10 = 2,30258$.

A.N. : voir tableau en **3.c.**

c. $\Delta_r G_i^0 = -RT \ln 10 \log K_i$.

On supposera connus exactement R, T, $\ln 10 \Rightarrow \Delta \Delta_r G_i^0 = RT \ln 10 \Delta \log K_i$.

$$\Delta \Delta_r G_1^0 = 3 \Delta \Delta_r G^0 ; \text{A.N.: } \Delta \Delta_r G_1^0 = 30 \text{ J.mol}^{-1}.$$

$$\Delta \Delta_r G_2^0 = 3 \Delta \Delta_r G^0 ; \text{A.N.: } \Delta \Delta_r G_2^0 = 30 \text{ J.mol}^{-1}.$$

$$\Delta \Delta_r G_3^0 = 2 \Delta \Delta_r G^0 ; \text{A.N.: } \Delta \Delta_r G_3^0 = 20 \text{ J.mol}^{-1}.$$

$$\Delta \log K_i = \frac{\Delta \Delta_r G_i^0}{RT \ln 10} ; \text{A.N.: } \Delta \log K_1 = 2.10^{-3} ; \Delta \log K_2 = 2.10^{-3} ; \Delta \log K_3 = 10^{-3}.$$

On peut donner $\log K_i$ avec 3 décimales.

A.N. :

kJ.mol ⁻¹ {	T	900 K	1000 K	1100 K
	$\Delta_r G_1^0$	-13,01	4,56	22,03
	$\Delta_r G_2^0$	1,46	3,84	6,04
	$\Delta_r G_3^0$	-14,47	0,72	15,99
	$\log K_1$	0,755	-0,238	-1,046
	$\log K_2$	-0,085	-0,201	-0,287
	$\log K_3$	0,840	-0,038	-0,759

4. $K_1 = \frac{P_{\text{CO}_2} P^0}{P_{\text{CO}}^2}$; $K_2 = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}}$; $K_3 = \frac{P^0}{P_{\text{CO}}}$; $K_3 = \frac{K_1}{K_2}$.

On peut dire que $[3] = [1] - [2]$.

II.1.a. $P = P_{\text{CO}} + P_{\text{CO}_2}$.

α. $\frac{P_{\text{CO}_2} P^0}{P_{\text{CO}_2}} = K_1 \Rightarrow (P - P_{\text{CO}}) P^0 = K_1 P_{\text{CO}_2} \Rightarrow K_1 P_{\text{CO}}^2 + P^0 P_{\text{CO}} - P P^0 = 0$.

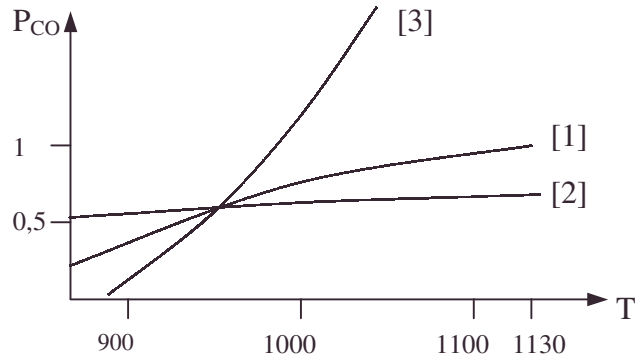
$$P_{\text{CO}} = \frac{-P^0 \pm \sqrt{P^{02} - 4K_1 P P^0}}{2K_1} . \text{ A.N. : voir tableau 2}^{\text{ème}} \text{ ligne.}$$

β. $\frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = K_2$; or $P_{\text{CO}_2} = P - P_{\text{CO}} \Rightarrow P_{\text{CO}} = \frac{P}{1 + K_2}$. A.N. : voir tableau 3^{ème} ligne.

b. $P = P_{\text{CO}} = \frac{P^0}{K_3}$; A.N. : voir tableau.

Unité : bar {	T	900 K	1000 K	1100 K
	$P_{\text{CO}} [1]$	0,340	0,709	0,923
	$P_{\text{CO}} [2]$	0,548	0,614	0,659
	$P [3]$	0,145	1,916	5,741

2.a.



b. Chaque équilibre est divariant, P et T déterminent tout.
A P constante, chaque équilibre est monovariant $P_{CO} = f(T)$.
En dehors des courbes, il n'y a pas d'équilibre chimique.

Equilibre [1]

(α). $P_{CO} > P_{CO_{eq}}$.

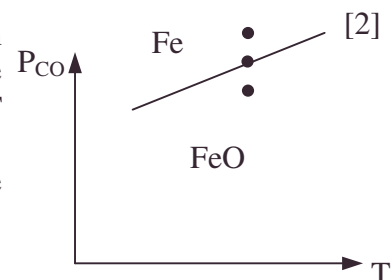
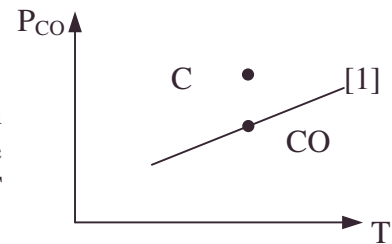
Cela ne peut être que le domaine de C sans CO_2 car en présence d'un peu de CO_2 , la réaction hors équilibre tendrait à la reconstitution d'un équilibre à $P_{CO_{eq}}$ (à T constant).

(β). $P_{CO} < P_{CO_{eq}}$; aller vers l'équilibre n'est pas possible, P_{CO} ne peut augmenter ; CO reste inactif.

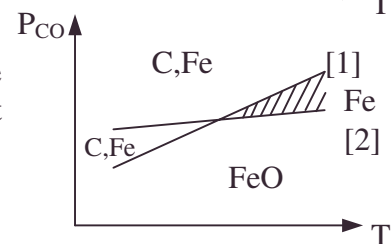
Equilibre [2] : $P_{CO} > P_{CO_{eq}}$.

Cela ne peut être que le domaine de Fe sans FeO car en présence d'un peu de FeO, la réaction hors-équilibre tendrait à la reconstitution d'un équilibre $P_{CO_{eq}}$ (à T constant) ;

La zone complémentaire est donc celle de FeO sans Fe car à $P_{CO} < P_{CO_{eq}}$ aucune réaction totale n'est possible



Par superposition et intersection des zones, la zone hachurée est la seule région où Fe est stable sans dépôt de carbone.



3.a. Voir 2.a.

b.α. (3) n'est pas indépendant de (2) et (1) : si $P_{CO(1)} = P_{CO(2)}$ à une température particulière, cette caractéristique devient celle de (3) et le point d'intersection est commun aux 3 courbes.

β. $v = n - r + 2 - \phi$; $n = 5$; $\phi = 4$; $r = 2$; $v_{Gibbs} = 1$.

Si on fixe P, tous les paramètres intensifs T, P_{CO} et P_{CO_2} sont déterminés :

c. Cette courbe n'intervient pas car elle est dépendante des deux autres.

III.1. $P_{CO_2} + P_{CO} + P_i = P$.

a. Equilibre [1]

$$K_1 = \frac{P^0 P_{CO_2}}{P_{CO}^2} = \frac{P^0 (P - P_i - P_{CO})}{P_{CO}^2} ;$$

• courbe, paramètre intensif, régionnement

$K_1 P_{CO}^2 + P^0 P_{CO} - P^0 (P - P_i) = 0$; on choisit la solution positive.

$$\Rightarrow P_{CO} = \frac{-P^0 + \sqrt{P^0 (P^0 + 4K_1 (P - P_i))}}{2K_1}.$$

A.N. pour **III.3.**

Tracé : $P_i = 0$;

$T = 900 \text{ K}$, $P_{CO} = 0,340 \text{ bar}$.

$T = 1100 \text{ K}$, $P_{CO} = 0,923 \text{ bar}$

b. Equilibre [2]

$$K_2 = \frac{P_{CO_2}}{P_{CO}} = \frac{P - P_i - P_{CO}}{P_{CO}};$$

$$K_2 P_{CO} + P_{CO} = (P - P_i); P_{CO} = \frac{P - P_i}{1 + K_2}.$$

A.N. pour **III.3.**

Tracé : $P_i = 0$.

$T = 900 \text{ K}$, $P_{CO} = 0,548 \text{ bar}$.

$T = 1100 \text{ K}$, $P_{CO} = 0,659 \text{ bar}$.

2.a. [1] exprime : $-P_i = K_1 \frac{P_{CO}^2}{P^0} + P_{CO} - P$: la courbe est une parabole d'axe parallèle

à l'axe des abscisses cf. **III.3.a.**

b. $\forall T$, si $P_{CO} = 0$, $P_i = P$; le point $(0, P)$ est donc commun à toutes les courbes **[1]**.

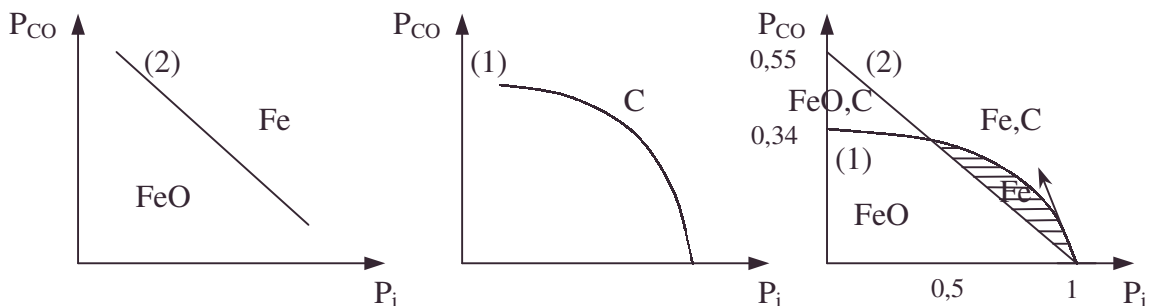
c. $-\frac{dP_i}{dP_{CO}} = \frac{2K_1}{P^0} P_{CO} + 1 \quad \forall T$, si $P_{CO} = 0$; $\frac{dP_i}{dP_{CO}} = -1$. La tangente est parallèle à la

2^{ème} bissectrice.

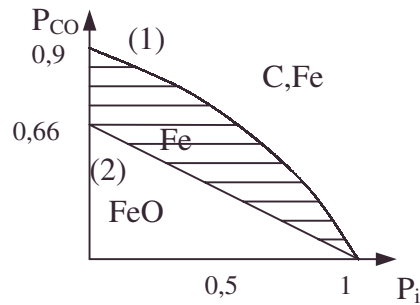
Conclusion : toutes les courbes $P_{CO} = f(P_i)$ ont un point commun et une tangente commune en ce point, quel que soit T .

3.a. $T = 900 \text{ K}$; $P = 1 \text{ bar}$.

Même raisonnement pour le régionnement que en **II.2.b.** pour chaque courbe et pour la superposition des domaines. La zone hachurée est la seule à être sans C et sans FeO, soit Fe pur non attaqué.



b. $T = 1100 \text{ K}$; $P = 1 \text{ bar}$



IV.1. Supposons que tout O_2 se retrouve sous forme de CO_2 dans un état hors d'équilibre ; hypothèse simplificatrice des calculs qui ne change pas l'état final thermodynamique. Il y a eu une consommation de O_2 égale à la quantité de CO_2 produite ; la quantité d'azote restante est donc quadruple de la quantité de CO_2 produite.



1

0

$1 - \alpha$

2α

$$n_T = 4 + 1 - \alpha + 2\alpha = 5 + \alpha \Rightarrow P_{CO} = \frac{2\alpha P}{5 + \alpha} ; \quad P_{CO_2} = \frac{1 - \alpha}{5 + \alpha} P.$$

$$P_{CO_2} + P_{CO} + P_{N_2} = P ; \quad \frac{P_O P_{CO_2}}{P_{CO}^2} = K_1 ;$$

$$\text{écrivons la conservation de } O_2 : \frac{1}{2} n_{CO} + n_{CO_2} = \frac{n_{N_2}}{4} \text{ soit } \frac{P_{CO}}{2} + P_{CO_2} = \frac{P_{N_2}}{4}.$$

$$\text{On tire :} \quad P_{N_2} = \frac{2}{5}(2P - P_{CO}) ; \quad P_{CO_2} = \frac{P}{5} - \frac{3P_{CO}}{5}.$$

$$\text{On élimine } P_{N_2} \text{ et } P_{CO_2} : K_1 P_{CO}^2 + \frac{3}{5} P^0 P_{CO} - \frac{PP^0}{5} = 0.$$

$$x = P_{CO} = 0,142 \text{ bar} ; z = P_{N_2} = 0,743 \text{ bar} ; y = P_{CO_2} = 0,115 \text{ bar}.$$

2. Vu $P_i = P_{N_2} = z$, et vu le diagramme **III.3.a.** où on lit :

$P_{CO(2)} = 0,169 \text{ bar}$ et $P_{CO(1)} = 0,25 \text{ bar}$, l'évolution se fait vers l'état [2] selon $Fe_{(s)} + CO_{2(g)} \rightleftharpoons FeO_{(s)} + CO_{(g)}$ jusqu'à obtenir $P_{CO} = 0,169 \text{ bar}$ valeur la plus proche de x où on observe l'équilibre [2] stable avec $P_{CO_2} = 0,088 \text{ bar}$.

Il n'y a pas de formation de carbone (ni bien sûr de variation de P_{N_2}).

Pour observer l'équilibre [1] il faudrait $P_{CO} = 0,25 \text{ bar}$ et déplacer [2] par ajout de CO_2 .

3.3.2. Métallurgie du zinc en présence de coke

1. Pour obtenir le zinc, à partir de ZnS , on effectue dans un premier temps un grillage de ZnS selon la réaction totale : $2\text{ZnS}_{(s)} + 3\text{O}_{2(g)} \rightarrow 2\text{ZnO}_{(s)} + 2\text{SO}_{2(g)}$.

A partir des enthalpies standard de formation relevées dans les tables :

	$\text{ZnS}_{(s)}$	$\text{ZnO}_{(s)}$	SO_2
ΔH_f^0 en kJ.mol^{-1}	-200	-348	-297

Calculer la quantité de chaleur libérée par le grillage de 1 kg de ZnS (réaction supposée effectuée à pression constante dans les conditions standard).

On donne les masses molaires exprimées en g.mol^{-1} : $\text{Zn} = 65.4$; $\text{S} = 32$; $\text{O} = 16$.

2. L'oxyde ZnO est ensuite réduit en Zn gazeux par le monoxyde de carbone CO selon la réaction équilibrée : $[\text{1}] \text{ZnO}_{(s)} + \text{CO}_{(g)} \rightleftharpoons \text{Zn}_{(g)} + \text{CO}_{2(g)}$.

Cet équilibre est réalisé à 1000°C (1273 K) à partir d'un excès de ZnO , traité par du monoxyde de carbone.

A cette température la constante d'équilibre est $K_{p1} = 3.10^{-2}$.

- Quelle est l'influence de la pression totale sur cet équilibre ?
- Quelles seront les pressions partielles d'équilibre ainsi que la valeur du rapport $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}}$ si l'expérience est réalisée sous une pression totale constante égale à la pression $P^0 = 1 \text{ bar}$.

3. Pour récupérer le zinc sous forme liquide ou solide il faut refroidir préalablement le système. La variation d'enthalpie $\Delta_r H_1^0 = 195 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

- Quelle est l'influence de la température sur l'équilibre [1] ?
- On refroidit progressivement jusqu'à 800°C (1073 K). Dans les conditions de l'expérience, Zn reste à l'état gazeux.
 - Calculer la valeur de la constante d'équilibre [1] à cette température.
 - A quelle valeur doit-on alors maintenir le rapport $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}}$ si on veut obtenir une pression partielle d'équilibre $P_{\text{Zn}} = 0,15 \text{ bar}$?

4. Afin de favoriser l'obtention de Zn , on peut augmenter la valeur du rapport $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}}$.

On se place à nouveau à 1000°C et on introduit alors du carbone dans le récipient.

A cette température d'équilibre $[\text{2}] \text{C}_{(s)} + \text{CO}_{2(g)} \rightleftharpoons 2\text{CO}_{(g)}$ présente une constante $K_{p2} = 10^4$ (constante relative aux pressions partielles exprimées en bar).

- Justifier l'intérêt du procédé.
- Dans un récipient de volume constant, maintenu à 1000°C , on introduit un excès des deux solides (ZnO et C) et une faible quantité de CO (par exemple, $P_{\text{CO}} = 10^{-2} \text{ bar}$ à l'état initial). Calculer les valeurs des pressions partielles et de la pression totale à l'équilibre.
- Que se passerait-il si le récipient était de volume variable mais maintenu cette fois à la pression totale constante égale à la pression P^0 ?

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

1. $\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{ZnO}) + \Delta_f H^0(\text{SO}_2) - \Delta_f H^0(\text{ZnS})$; AN : $\Delta_r H^0 = -445 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

$$Q = \frac{1000}{M_{\text{ZnS}}} \Delta_r H^0 ; Q = -4,57.10^6 \text{ J.kg}^{-1}.$$

2.a. Le sens 1 est favorisé par une diminution de pression (cf. loi de Le Chatelier).

b. On a les relations : $K_{p_1} = \frac{P_{\text{Zn}} P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}} P^0}$; $P_{\text{Zn}} = P_{\text{CO}_2}$; $P_{\text{Zn}} + P_{\text{CO}} + P_{\text{CO}_2} = P^0$.

La résolution donne les applications numériques suivantes :

$$P_{\text{CO}} = 0,71 \text{ bar} ; P_{\text{Zn}} = P_{\text{CO}_2} = 0,15 \text{ bar} ; \frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} = 4,85 . \text{ La vérification est aisée.}$$

3.a. Une augmentation de température favorise le sens 1 endothermique ;

(cf. loi de Van't Hoff : $\frac{d \ln K_p}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$).

b. $\alpha. \ln K'_{p_1} = \ln K_{p_1} + \frac{\Delta_r H^0}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_1'} \right)$; AN : $K'_{p_1} = 9,7.10^{-4}$.

$\beta. \frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} = \frac{P_{\text{Zn}}}{K'_{p_1}}$; AN : $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} = 155$.

4.a. Vu K_{p_2} élevé, CO_2 est transformé quasi intégralement en CO.

$\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}}$ élevé permet d'élever P_{Zn} (cf. 3.b.β.).

b. Les deux équilibres existent : $K_{p_1} = \frac{P_{\text{Zn}}}{P^0} \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}}$; $K_{p_2} = \frac{P_{\text{CO}}^2}{P_{\text{CO}_2} P^0} \Rightarrow \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = \frac{P_{\text{CO}}}{P^0 K_{p_2}}$.

$$P_{\text{Zn}} = K_{p_1} P^0 \frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} = \frac{K_{p_1} K_{p_2}}{P_{\text{CO}}} P^0.$$

• De plus on peut écrire $\text{ZnO}_{(s)} + \text{C}_{(s)} \rightleftharpoons \text{Zn}_{(g)} + \text{CO}_{(g)}$ comme combinaison de 2 équilibres : $\text{ZnO}_{(s)} + \text{CO}_{(g)} \rightleftharpoons \text{Zn}_{(g)} + \text{CO}_{2(g)}$
 $\text{C}_{(s)} + \text{CO}_{2(g)} \rightleftharpoons 2 \text{CO}_{(g)}$

Simplification : P_{CO_2} étant faible (cf. K_{p_2}), $P_{\text{Zn}} = P_{\text{CO}}$; $P_{\text{Zn}} = P^0 \sqrt{K_{p_1} K_{p_2}} = P_{\text{CO}}$.

A.N. : $P_{\text{Zn}} = P_{\text{CO}} = 17,3 \text{ bar}$; $P_{\text{CO}_2} = 3.10^{-2} \text{ bar}$ (vérification)

d. Les deux équilibres ne peuvent coexister sous $P = P^0$.

Vu $P_{\text{Zn}} P_{\text{CO}} = 300 P^0$ or $P_{\text{Zn}} < P^0$ et $P_{\text{CO}} < P^0$.

• Considérons seulement l'équilibre certain à cette température :

$\text{ZnO}_{(s)} + \text{C}_{(s)} \rightleftharpoons \text{Zn}_{(g)} + \text{CO}_{(g)}$ ce qui revient à l'abandon de l'équilibre de Boudouard.

$$P_{\text{Zn}} = P_{\text{CO}}$$

$$P_{\text{Zn}} + P_{\text{CO}} = P^0$$

$$P_{\text{Zn}} = P_{\text{CO}} = 5,5 \text{ bar.}$$

• $n_{\text{Zn}} = \frac{P_{\text{Zn}}}{RT} V$ croît avec V .

On peut ainsi transformer tout ZnO en Zn en augmentant V .

3.3.3. Utilisation du diagramme d'Ellingham pour la métallurgie du fer

A. On donne ci-dessous un extrait d'une table de données thermodynamiques, dont on pourra tirer les éléments nécessaires à la résolution des questions A₁ et A₂.

La table est établie avec les conventions suivantes :

Etat standard 25° C, 1 bar, activité égale à 1.

Pour les corps simples (variété stable dans ces conditions) l'enthalpie molaire est nulle, le potentiel chimique est nul, l'entropie est l'entropie absolue.

	h^0 en kJ.mol ⁻¹	μ^0 en kJ.mol ⁻¹	s^0 en J.K ⁻¹ .mol ⁻¹	C_p^0 en J.K ⁻¹ .mol ⁻¹
C graphite	0	0	5,695	11,17
CO _(g)	- 110,6	- 137,3	198,0	27,62
CO _{2(g)}	- 393,6	- 394,5	213,7	43,27
O _{2(g)}	0	0	205,1	34,61

1. On considère la réaction $\text{CO}_{(g)} + \frac{1}{2}\text{O}_{2(g)} \rightleftharpoons \text{CO}_{2(g)}$.

Définir et calculer de deux façons différentes l'enthalpie libre réactionnelle standard $\Delta_r G^0$ (298).

2. En supposant C_p^0 indépendant de T, exprimer l'enthalpie libre réactionnelle standard $\Delta_r G^0(T)$. Calculer $\Delta_r G^0$ (1000) (T est la température Kelvin).

Dans la suite du problème on utilisera l'approximation affine suivante :



On donne par ailleurs :



Le fer et ses oxydes sont des solides non miscibles.

B.1. Ecrire l'équilibre de dismutation de l'oxyde ferreux en fer et oxyde magnétique. Définir et calculer sa variance. Conséquence ?

Calculer l'enthalpie libre réactionnelle $\Delta_r G(T)$, calculer la température d'équilibre et retrouver le résultat précédent concernant la variance.

2. Ecrire en les ramenant à 1 mole de CO et 1 mole de CO₂ les équilibres chimiques de réduction des oxydes de fer par le monoxyde de carbone et calculer les enthalpies libres standard réactionnelles, pour les transformations suivantes :



3. Etude de la réaction du monoxyde de carbone sur l'oxyde ferrique.

a. Exprimer la variation d'enthalpie libre réactionnelle $\Delta_r G_a(T)$ en fonction de $\Delta_r G_a^0(T)$, P_{CO_2} et P_{CO} . Calculer la constante d'équilibre à 1000 K et conclure. On prendra $R = 8,32 \text{ J K}^{-1}\text{mol}^{-1}$.

• *dismutation, enthalpie libre réactionnelle, non miscibilité, oxyde ferreux, oxyde magnétique, régionnement, variance*

b. Un récipient de volume constant maintenu à 1000 K contient 1 mole d'oxyde ferrique Fe_2O_3 . On introduit progressivement du monoxyde de carbone ; quel est l'état du système (composition de la phase gaz, nombre de moles de chaque phase solide) lorsqu'on a introduit $n = 0,1$ mole de monoxyde de carbone ?

Combien faut-il introduire de mole de monoxyde de carbone pour que la réduction en oxyde magnétique soit totale ?

4. Réduction de l'oxyde magnétique Fe_3O_4 et de l'oxyde ferreux FeO .

a. Tracer sur un même graphe les droites $\Delta_r G_b^0(T)$, $\Delta_r G_c^0(T)$, $\Delta_r G_d^0(T)$.

Les trois droites déterminent 6 domaines du plan que l'on numérote de 1 à 6 dans le sens des aiguilles d'une montre, le domaine du haut contenant midi sera numéroté (1).

b. Pour chacun des systèmes de type b, c, d en contact avec un mélange CO , CO_2 exprimer $\Delta_r G(T)$ en fonction de $\Delta_r G^0(T)$, P_{CO} et P_{CO_2} . Que vaut $\Delta_r G(T)$ pour les systèmes en équilibre ?

c. Sur le graphe précédent on porte en ordonnée la quantité $RT \ln \frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}}$.

Tracer en pointillé les droites correspondant à $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} = 0,1$ et $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} = 10$. Un point du plan

représente donc un mélange réducteur pour lequel le rapport $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}}$ est fixé.

Graduer logarithmiquement l'axe vertical correspondant à $T = 1000 \text{ K}$ en $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}}$ et

expliquer comment pour un point quelconque du plan on obtiendra la composition du mélange gazeux qu'il représente.

d. Soit un mélange gazeux dont le point représentatif est dans le domaine (1) en contact avec de l'oxyde magnétique.

Que se produit-il ? Même question si le point est dans le domaine (4) ?

e. Conclure que le plan n'est en réalité divisé qu'en 3 domaines dans lequel l'une et l'une seulement des trois phases solides (Fe , FeO , Fe_3O_4) est en équilibre avec les mélanges gazeux représentés par ce domaine.

Préciser ces domaines à l'aide de la numérotation du paragraphe **B.4.a**.

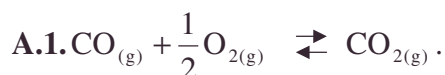
5. On reprend le système décrit en **B.3.b.** ($T = 1000 \text{ K}$). Après disparition de Fe_2O_3 on poursuit l'introduction de CO . Soit n le nombre total de moles de CO introduit depuis

le début de l'opération. représenter sur un graphe $\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} = f(n)$. Montrer en particulier

que la courbe est formée de segments de droites comprenant des paliers horizontaux dont on précisera les ordonnées.

Autres concours ; Durée : 2h30

Corrigé



a. $\Delta_r G_{298}^0 = \mu_{\text{CO}_2}^0(298) - \mu_{\text{CO}}^0(298) - \frac{1}{2} \mu_{\text{O}_2}^0(298)$; AN : $\Delta_r G_{298}^0 = -257,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

$$\text{b. } \Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 \text{ avec } \Delta_r H^0 = h_{\text{CO}_2}^0 - h_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{2} h_{\text{O}_2}^0.$$

$$\text{AN : } \Delta_r H_{298}^0 = -283,0 \text{ kJ.mol}^{-1},$$

$$\text{et } \Delta_r S^0 = s_{\text{CO}_2}^0 - s_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{2} s_{\text{O}_2}^0 ; \text{ AN : } \Delta_r S^0 = -86,85 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

$$\Delta_r G_{298}^0 = -283,0 + 298.86,85.10^{-3} = -257,1 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

$$\text{2.a. } \frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta C_p^0 = C_{p_{\text{CO}_2}}^0 - C_{p_{\text{CO}}}^0 - \frac{1}{2} C_{p_{\text{O}_2}}^0 ;$$

$$\Rightarrow \Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(298) + \int_{298}^T (C_{p_{\text{CO}_2}}^0 - C_{p_{\text{CO}}}^0 - \frac{1}{2} C_{p_{\text{O}_2}}^0) dT.$$

$$\text{AN : } \Delta_r H^0(T) = -283.10^3 - 1,655(T - 298) = -282507 - 1,655T.$$

$$\text{b. } \frac{d\Delta_r S^0}{dT} = \frac{\Delta C_p^0}{T} = \frac{C_{p_{\text{CO}_2}}^0 - C_{p_{\text{CO}}}^0 - \frac{1}{2} C_{p_{\text{O}_2}}^0}{T} ;$$

$$\Rightarrow \Delta_r S^0(T) = \Delta_r S^0(298) + \int_{298}^T (C_{p_{\text{CO}_2}}^0 - C_{p_{\text{CO}}}^0 - \frac{1}{2} C_{p_{\text{O}_2}}^0) \frac{dT}{T}.$$

$$\text{AN : } \Delta_r S^0(T) = -86,65 - 1,655 \ln \frac{T}{298} = -77,42 - 1,655 \ln T.$$

$$\text{c. } \Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0(T) - T \Delta_r S^0(T) ;$$

$$\Delta_r G^0(T) = -282507 + 75,76T + 1,655T \ln T ; \text{ AN : } \Delta_r G^0(1000) = -195,3 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$



b. Définition : la variance est le nombre de paramètres intensifs indépendants définissant un état quelconque de l'équilibre.

c. $v_{\text{théorique}} = n - r + 2 - \phi = 3 - 1 + 2 - 3 = 1$ ($\phi = 3$ car 3 phases solides) en fait la pression n'agit pas sur cet équilibre : $v = n - r + 1 - \phi = 0$.

d. Conséquence : aucun choix n'est possible parmi les paramètres intensifs ; en particulier, T est déterminée.

e. Pour un solide pur, $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln 1 = \mu_i^0$.

$$\Delta_r G = \sum v_i \mu_i = \sum v_i \mu_i^0 = \Delta_r G^0 = \mu_{\text{Fe}}^0 + \mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0 - 4\mu_{\text{FeO}}^0.$$

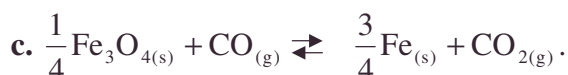
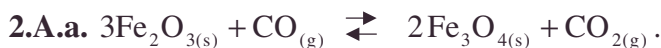
On vérifiera l'écriture heuristique.

$$\Delta_r G = (\mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0 - 3\mu_{\text{Fe}}^0 - 2\mu_{\text{O}_2}^0) - 2(2\mu_{\text{FeO}}^0 - 2\mu_{\text{Fe}}^0 - \mu_{\text{O}_2}^0) = \Delta_r G_3^0 - 2\Delta_r G_2^0.$$

$$\Delta_r G(T) = -5,6.10^4 + 66T \text{ (en J.mol}^{-1}\text{)}.$$

$$\text{A l'équilibre } \Delta_r G(T) = 0 \Rightarrow T = 848,5 \text{ K} ;$$

aucun paramètre intensif ne peut être choisi parmi T, a_{FeO} , a_{Fe} , $a_{\text{Fe}_3\text{O}_4}$: $v = 0$;



B.a. $\Delta_r G_a^0(T) = 2\mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0 + \mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - 3\mu_{\text{Fe}_2\text{O}_3}^0$; organisons l'écriture :

$$\Delta_r G_a^0(T) = 2(\mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0 - 2\mu_{\text{O}_2}^0 - 3\mu_{\text{Fe}}^0) - \frac{3}{2}(2\mu_{\text{Fe}_2\text{O}_3}^0 - 3\mu_{\text{O}_2}^0 - 4\mu_{\text{Fe}}^0) + (\mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{2}\mu_{\text{O}_2}^0)$$

$$\Delta_r G_a^0(T) = 2\Delta_r G_3^0 + \Delta_r G_1^0 - \frac{3}{2}\Delta_r G_4^0 ; \text{AN : } \Delta_r G_a^0 = -5,2 \cdot 10^4 - 43,5 T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}.$$

$$\text{b. } \Delta_r G_b^0(T) = 3\mu_{\text{FeO}}^0 + \mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - \mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0.$$

$$\Delta_r G_b^0(T) = \frac{3}{2}(2\mu_{\text{FeO}}^0 - \mu_{\text{O}_2}^0 - \mu_{\text{Fe}}^0) - (\mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0 - 2\mu_{\text{O}_2}^0 - 3\mu_{\text{Fe}}^0) + (\mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{2}\mu_{\text{O}_2}^0).$$

$$\Delta_r G_b^0(T) = \frac{3}{2}\Delta_r G_2^0 + \Delta_r G_1^0 - \Delta_r G_3^0 ; \text{AN : } \Delta_r G_b^0 = 3,65 \cdot 10^4 - 42 T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}.$$

$$\text{c. } \Delta_r G_c^0(T) = \frac{3}{4}\mu_{\text{Fe}}^0 + \mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{4}\mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0.$$

$$\Delta_r G_c^0(T) = (\mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{2}\mu_{\text{O}_2}^0) - \frac{1}{4}(\mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0 - 2\mu_{\text{O}_2}^0 - 3\mu_{\text{Fe}}^0).$$

$$\Delta_r G_c^0(T) = \Delta_r G_1^0 - \frac{1}{4}\Delta_r G_3^0 ; \text{AN : } \Delta_r G_c^0 = -5,5 \cdot 10^3 + 7,5 T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}.$$

$$\text{d. } \Delta_r G_d^0(T) = \mu_{\text{Fe}}^0 + \mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - \mu_{\text{FeO}}^0$$

$$\Delta_r G_d^0(T) = \left(\mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CO}}^0 - \frac{1}{2}\mu_{\text{O}_2}^0 \right) - \frac{1}{2}(2\mu_{\text{FeO}}^0 - \mu_{\text{O}_2}^0 - 2\mu_{\text{Fe}}^0) = \Delta_r G_1^0 - \frac{1}{2}\Delta_r G_2^0.$$

$$\text{A.N. : } \Delta_r G_d^0 = -1,95 \cdot 10^4 + 24 T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}.$$



Pour les gaz $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln \frac{p_i}{p^0}$; pour les solides $\mu_i = \mu_i^0$.

$$\Delta_r G_a(T) = 2\mu_{\text{Fe}_3\text{O}_4}^0 + \mu_{\text{CO}_2}^0 + RT \ln \frac{p_{\text{CO}_2}}{p^0} - \mu_{\text{CO}}^0 - RT \ln \frac{p_{\text{CO}}}{p^0} - 3\mu_{\text{Fe}_2\text{O}_3}^0 = \Delta_r G_a^0 + RT \ln \frac{p_{\text{CO}_2}}{p_{\text{CO}}}$$

$$\bullet \text{ A l'équilibre à } T = 1000^\circ \text{ K, } \Delta_r G_a(T) = 0 \Rightarrow K = e^{-\Delta_r G_a^0 / RT}.$$

$$K = e^{\left(\frac{\frac{3}{2}\Delta_r G_4^0 - \Delta_r G_1^0 - 2\Delta_r G_3^0}{RT} \right)} ; \text{AN : } K = 9,66 \cdot 10^4.$$

La réaction de gauche à droite est quasi totale.



$t = 0$ 1 n 0 0 nombre de moles gazeuses

t_{eq} 1-3ξ n-ξ 2ξ ξ n invariant

α. $n < 1$ $K \xi \infty \Rightarrow n - \xi = 0$ soit un bilan pour les corps précédents, tant que $\xi < 0,33$

t_{eq} 1-3n 0 2n n

AN : $n_{\text{Fe}_2\text{O}_3} = 0,7 \text{ mol}$; $n_{\text{Fe}_3\text{O}_4} = 0,2 \text{ mol}$; $n_{\text{CO}_2} = 0,1 \text{ mol}$; $n_{\text{CO}} = 0 \text{ mol}$: phase gazeuse à 100 % CO_2 .

β. Pour que la réduction soit totale, il ne doit pas rester de Fe_2O_3 :

Soit $1 - 3\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0,33$; il faut introduire $n \geq 0,33 \text{ mol}$.

4.a. Détermination du point d'intersection commun à $\Delta_r G_b^0$; $\Delta_r G_c^0$; $\Delta_r G_d^0$.

$$\Delta_r G_b^0 = \Delta_r G_c^0 \text{ soit } 3,65 \cdot 10^4 - 42 T = -5,5 \cdot 10^3 + 7,5 T ;$$

d'où $T = 848 \text{ K}$ cf. point triple de **B.1.e**.

b. Comme pour a. $\Delta_r G_\alpha = \Delta_r G_\alpha^0 + RT \ln \frac{p_{\text{CO}_2}}{p_{\text{CO}}}$ avec $\alpha \in \{b, c, d\}$.

A l'équilibre correspondant $\Delta_r G_\alpha = 0$.

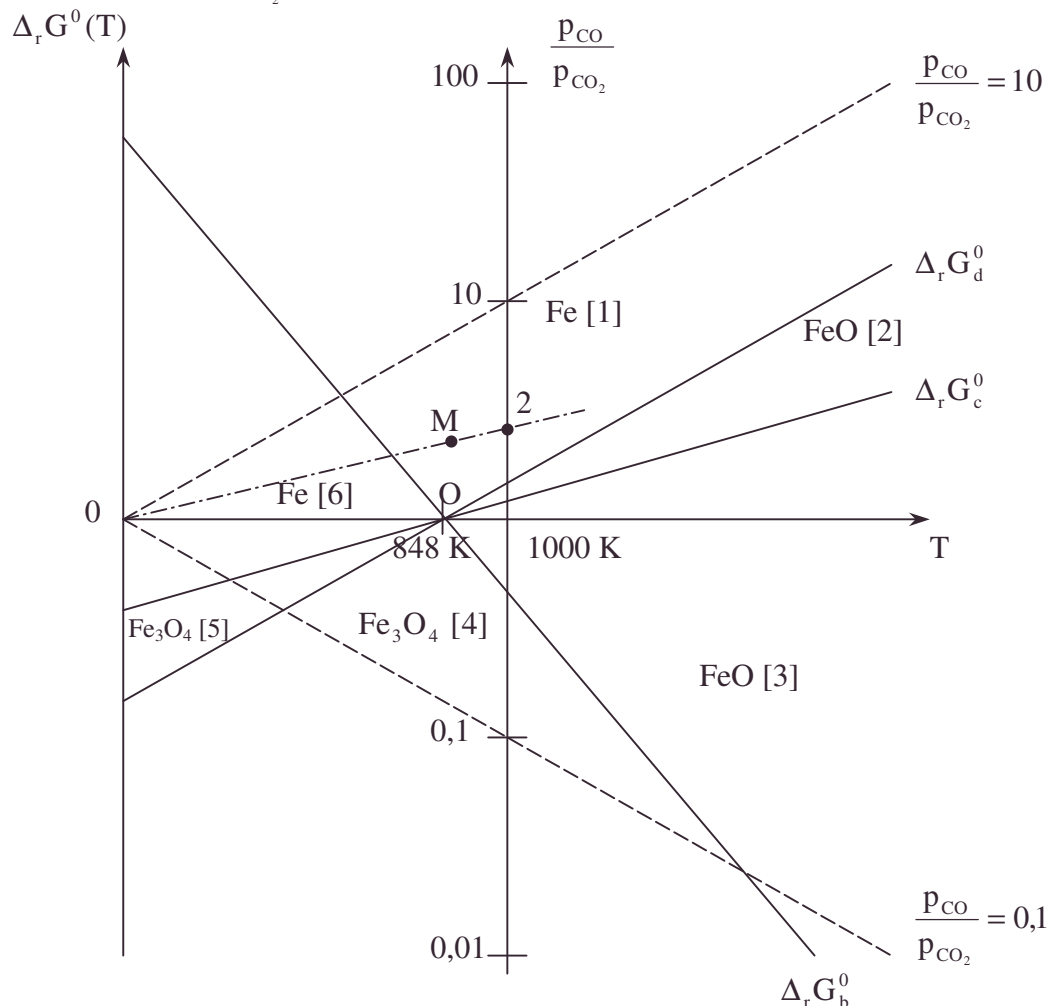
c. La droite $y = RT \ln \frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}}$ pour $\left(\frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}} \right)$ donné (p.e. 10 ou 0,1) passe par 0 pour $T = 0$ et par le point correspondant à $\left(\frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}} \right)$ donné soit ici 10 ou 0,1 à $T = 1000 \text{ K}$, sur l'axe gradué logarithmiquement en $RT \ln \frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}}$.

Ce qui est valable pour ces valeurs particulières de $\frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}}$ est valable pour toute valeur ;

Pour un point M quelconque, le tracé de la droite OM (en pointillé alterné) coupera l'axe gradué en $T = 1000 \text{ K}$ en un point de même $\left(\frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}} \right)$.

On lit la composition du mélange gazeux en M en lisant la graduation de l'intersection de OM avec l'axe gradué logarithmiquement car $\frac{X_{\text{CO}}}{X_{\text{CO}_2}} = \frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}}$ et $X_{\text{CO}_2} + X_{\text{CO}} = 1$.

Sur la figure, $\frac{p_{\text{CO}}}{p_{\text{CO}_2}} = 2 \Rightarrow X_{\text{CO}} = 0,67$; $X_{\text{CO}_2} = 0,33$.



d. Vu les réactions (a), (b), (c), (d), $\Delta_r G_\alpha(T) = \Delta_r G_\alpha^0 - RT \ln \frac{p_{CO}}{p_{CO_2}}$; $\alpha \in \{a, b, c, d\}$

• Si $\Delta_r G_\alpha < 0$, réaction de gauche à droite : c'est le cas si $\Delta_r G_\alpha^0 < RT \ln \frac{p_{CO}}{p_{CO_2}}$

soit si OM est au-dessus de la droite représentative de $\Delta_r G_\alpha^0(T)$.

• Si $\Delta_r G_\alpha > 0$, réaction de droite à gauche : c'est le cas si $\Delta_r G_\alpha^0 > RT \ln \frac{p_{CO}}{p_{CO_2}}$

soit si OM est en-dessous de la droite représentative de $\Delta_r G_\alpha^0(T)$.

1. Si $M \in [1]$, OM est au-dessus de la droite représentative de $\Delta_r G_c^0$ et de la droite $\Delta_r G_b^0$ les 2 réactions de gauche à droite sont possibles : on va transformer Fe_3O_4 en Fe et en FeO, mais avec $\alpha = d$: $FeO_{(s)} + CO_{(g)} \rightleftharpoons CO_{2(g)} + Fe_{(s)}$;

OM est au-dessus de la droite $\Delta_r G_d^0$; la réaction totale de gauche à droite transforme le $FeO_{(s)}$ formé en Fe seul solide.

2. Si $M \in [4]$, OM est en-dessous de $\Delta_r G_c^0$ et de la droite de $\Delta_r G_b^0$ la réaction de droite à gauche manque de réactifs (FeO ou Fe) et le Fe_3O_4 initial demeure en présence de CO_2 et CO sans réagir.

e. • Si $M \in [2]$, la droite OM est au-dessous de $\Delta_r G_d^0$ et au-dessus de $\Delta_r G_c^0$; $Fe \zeta FeO$; $Fe_3O_4 \zeta FeO$; $Fe_3O_4 \zeta Fe$ tout est finalement transformé en FeO, seul solide stable.

• Si $M \in [3]$, la droite OM est en-dessous de $\Delta_r G_d^0$ et de $\Delta_r G_c^0$ et au-dessus de $\Delta_r G_b^0$; $Fe \zeta FeO$; $Fe_3O_4 \zeta FeO$; $Fe \zeta Fe_3O_4$; tout est finalement transformé en FeO, seul solide.

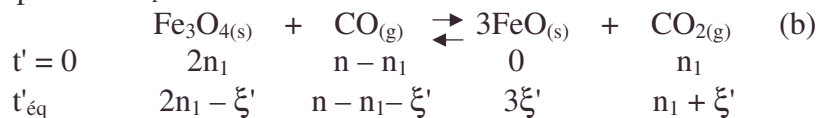
• Si $M \in [5]$, la droite OM est en-dessous de $\Delta_r G_c^0$ et $\Delta_r G_b^0$ et au-dessus de $\Delta_r G_d^0$; $Fe \zeta Fe_3O_4$; $FeO \zeta Fe_3O_4$; $FeO \zeta Fe$ tout est finalement transformé en Fe_3O_4 .

• Si $M \in [6]$, la droite OM est en-dessous de $\Delta_r G_b^0$ et au-dessus de $\Delta_r G_c^0$ et $\Delta_r G_d^0$; $FeO \zeta Fe_3O_4$; $Fe_3O_4 \zeta Fe$; $FeO \zeta Fe$ tout est finalement transformé en Fe.

Les domaines sont précisés sur le graphe ; les 6 domaines se divisent en 3 ensembles de 2 domaines jointifs de même nature : on obtient donc seulement 3 domaines : Fe ([1] + [6]) ; FeO ([2] + [3]) ; Fe_3O_4 ([4] + [5]).

5. $\Delta_r G_a^0$ est en-dessous des droites $\Delta_r G_b^0, \Delta_r G_c^0, \Delta_r G_d^0$ à 1000 K. Ainsi il y a possibilité de transformer : $Fe_2O_3 \zeta Fe_3O_4$; $Fe_3O_4 \zeta FeO$; $FeO \zeta Fe$.

On a vu en **B.3.b.** la transformation totale de FeO_3 par CO pour $n < n_1$ avec $n_1 = 0,33$, ensuite pour $n > n_1$:



Cet équilibre à 1000 K a pour constante d'équilibre inverse $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}}$ de valeur :

$$\ln \left(\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} \right) = \frac{\Delta_r G_b^0}{RT} ; AN : \frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = 0,516.$$

- Pour $\xi' = 0$ $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = \frac{n - n_1}{n_1}$ (pente : 3); au début quand $n \neq n_1$, $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} < 0,516$;

l'équilibre ne peut être établi et $\xi' = 0$ tant que $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} < 0,516$.

AN : au début de l'équilibre $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = \frac{n - 0,33}{0,33} = 0,516$; $n = 0,33 + 0,33 \cdot 0,516 = 0,50$.

- L'équilibre stable se déplacera en maintenant $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = 0,516$ autant qu'il se pourra,

ξ' variant de 0 à $2n_1 = 0,67$.

A la limite de l'équilibre : $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = \frac{n - 3n_1}{3n_1} = 0,516$ soit $n = 1 + 3 \cdot 0,33 \cdot 0,516 = 1,51$.

soit :
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}_3\text{O}_{4(s)} & + & \text{CO}_{(g)} & \rightleftharpoons & 3\text{FeO}_{(s)} & + & \text{CO}_{2(g)} \\ 0 & & n - 3n_1 & & 6n_1 & & 3n_1 \end{array}$$

- Peut alors être envisagé :
$$\begin{array}{ccccccc} \text{FeO}_{(s)} & + & \text{CO}_{(g)} & \rightleftharpoons & \text{CO}_{2(g)} & + & \text{Fe}_{(s)} \\ t'' = 0 & & 6n_1 & & n - 3n_1 & & 3n_1 \\ t''_{eq} & & 6n_1 - \xi'' & & n - 3n_1 - \xi'' & & 3n_1 + \xi'' \end{array}$$

Cet équilibre à 1000° K a pour constante d'équilibre inverse $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}}$ de valeur :

$$\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = e^{\frac{\Delta_r G_d}{RT}} ; \text{AN : } \frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = 1,72.$$

- Pour $\xi'' = 0$ $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = \frac{n - 3n_1}{3n_1}$ (pente : 1) ; au début $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} < 1,72$; l'équilibre ne

peut être établi et ξ'' reste à 0 tant que $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} < 1,72$; AN : $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = \frac{n - 3n_1}{3n_1} = 1,72$; le

nouvel équilibre s'établira pour $n = 3n_1 + 3n_1 \cdot 1,72 = 2,72$.

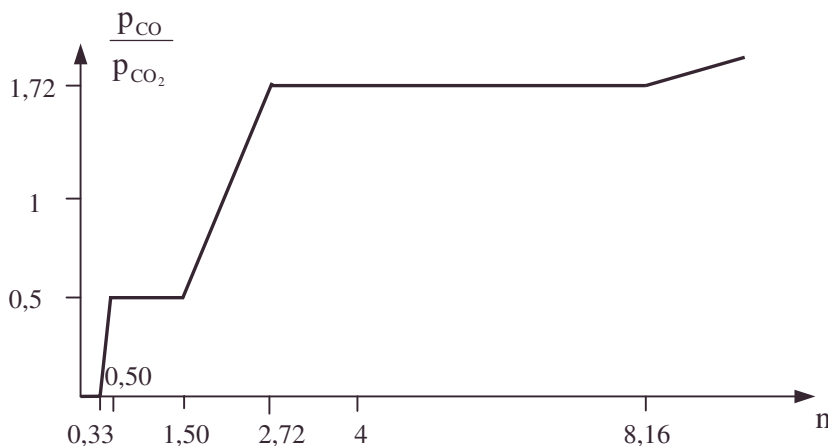
- L'équilibre stable se déplacera en maintenant $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = 1,72$ autant qu'il se pourra,

ξ'' variant de 0 à $6n_1$.

- A la limite de l'équilibre
$$\begin{array}{ccccccc} \text{FeO}_{(s)} & + & \text{CO}_{(g)} & \rightleftharpoons & \text{CO}_{2(g)} & + & \text{Fe}_{(s)} \\ 0 & & n - 9n_1 & & 9n_1 & & 9n_1 \end{array}$$

A.N. : $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = \frac{n - 9n_1}{9n_1} = 1,72$ soit $n = 9n_1 + 9n_1 \cdot 1,72 = 8,16$.

- Après la rupture de ce dernier équilibre, le bilan molaire reste formellement le même et $\frac{p_{CO}}{p_{CO_2}} = \frac{n - 9n_1}{9n_1}$.(pente : 0,33).



3.3.4. Utilisation de diagramme pour les ennuis métallurgiques de l'aluminium en présence de coke

Le tableau ci-dessous contient les valeurs suivantes :

$\Delta_f H^0$, enthalpie de formation en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ (valeur standard) ;

s^0 , entropie absolue standard en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On admettra que ces valeurs numériques sont constantes dans l'intervalle de température étudié. La constante des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Composé	Al	Al	Al_2O_3	Al_4C_3	C(graphite)	CO	CO_2	O_2
Etat physique	sol.	liq.	sol.	sol.	sol.	gaz	gaz	gaz
$\Delta_f H^0$	0	10,9	- 1674	- 129	0	- 110	- 393	0
s^0	28	40	51	105	6	197	213	205

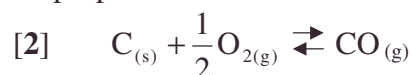
On rappelle que l'aluminium fond à 660°C . Par souci de simplification, on ne tiendra pas compte de l'aluminium à l'état gazeux.

A.1. Action de l'oxygène sur l'aluminium

a. Ecrire l'équation [1] de la réaction de l'oxygène sur l'aluminium.

b. $\Delta_r G_1^0(T)$ est la variation d'enthalpie libre standard de formation de l'oxyde d'aluminium pour une réaction faisant intervenir une demi-môle de molécules d'oxygène. A l'aide des valeurs numériques contenues dans le tableau, étudier $\Delta_r G_1^0(T)$ en fonction de T pour T compris entre 300 K et 2500 K.

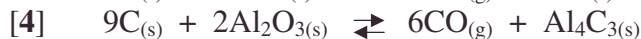
2. Reprendre l'étude du 1.b. à propos de la réaction dont l'équation chimique s'écrit :



Etudier $\Delta_r G_2^0(T) = f(T)$ pour T compris entre 300 K et 2500 K, où $\Delta_r G_2^0(T)$ est la variation d'enthalpie libre standard de la réaction [2].

3. Le carbone peut-il réagir sur l'oxyde d'aluminium ? Si oui, à partir de quelle température la réduction de l'oxyde d'aluminium sera-t-elle favorisée ?

B. En réalité, le problème de l'action du carbone sur l'oxyde d'aluminium est plus complexe car il peut se former un autre corps : le carbure d'aluminium de formule Al_4C_3 . On peut montrer que, selon les conditions expérimentales, le système est le siège des deux réactions suivantes :



1. A l'aide des valeurs contenues dans le tableau, donner les expressions de $\ln P_{\text{CO}}$ (P_{CO} en bar) en fonction de $1/T$ pour les équilibres [3] et [4] pour T compris entre 1000 K et 2500 K.

2. Chacune des droites [3] et [4] obtenues dans la question précédente partage le plan $\left(\frac{1}{T}, \ln P_{\text{CO}}\right)$ en deux régions. Indiquer de part et d'autre de chacune de ces droites, quelle est l'espèce stable qui contient l'élément Al ; justifier la réponse.

3. Etude du point triple

a. Les deux droites [3] et [4] se coupent à une température notée T_0 . calculer la variance du système à l'équilibre en ce point. Qu'en conclure ?

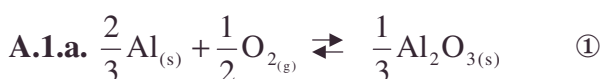
Montrer qu'à cette température il existe un troisième équilibre [5] non indépendant des deux précédents, [3] et [4], et qui ne fait intervenir que des phases condensées.

b. Calculer $\Delta_r G_5^0$ pour l'équilibre [5]. En déduite T_0 . Comment peut-on représenter, par une droite du plan $\left(\frac{1}{T}, \ln P_{\text{CO}}\right)$, l'équilibre [5] réalisé en présence de monoxyde de carbone ?

c. Dans le plan $\left(\frac{1}{T}, \ln P_{\text{CO}}\right)$, tracer le diagramme complet mettant en évidence les domaines d'existence de Al, Al_2O_3 et Al_4C_3 . En déduire les conditions qui permettent d'obtenir l'aluminium par réduction de l'alumine par le carbone.

Centrale ; Durée : 1h30

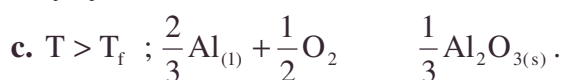
Corrigé



écriture valable pour : $T < T_f(\text{Al})$ soit $T < 933 \text{ K}$.

$$\text{b. } \Delta_r G_1^0(T) = \frac{1}{3} \Delta_f H^0(\text{Al}_2\text{O}_{3(s)}) - T \left(\frac{1}{3} s^0(\text{Al}_2\text{O}_{3(s)}) - \frac{1}{2} s^0(\text{O}_2) - \frac{2}{3} s^0(\text{Al}_{(s)}) \right)$$

AN : $\Delta_r G_1(T) = -558.10^3 + 104,2 T \text{ (en J.mol}^{-1}\text{)}$;



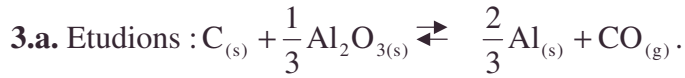
$$\Delta_r G_1^0(T) = \left(\frac{1}{3} \Delta_f H^0(\text{Al}_2\text{O}_{3(s)}) - \frac{2}{3} \Delta_f H^0(\text{Al}_{(l)}) \right) - T \left(\frac{1}{3} s^0(\text{Al}_2\text{O}_{3(s)}) - \frac{1}{2} s^0(\text{O}_2) - \frac{2}{3} s^0(\text{Al}_{(l)}) \right)$$

soit A.N. : $\Delta_r G_1^0(T) = -565,3.10^3 + 112,2 T \text{ (en J.mol}^{-1}\text{)}$.



$$\Delta_r G_2^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}) - T(s^0(\text{CO}) - s^0(\text{C}) - \frac{1}{2}s^0(\text{O}_2)),$$

soit $\Delta_r G_2^0 = -110.10^3 - 88,5T$ (en J.mol^{-1}).



$$\Delta_r G^0 = \Delta_r G_2^0 - \Delta_r G_1^0 = 448.10^3 - 192,7T \quad (\text{en } \text{J.mol}^{-1}) \quad \Delta_r G^0 > 0 \text{ si } T < 933 \text{ K}.$$

La réaction est très peu déplacée (cf. $K = e^{-\frac{\Delta_r G^0}{RT}} = \frac{P_{\text{CO}}}{P^0}$).



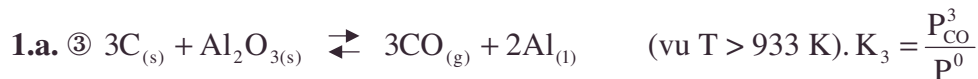
$$\Delta_r G'^0 = \Delta_r G_2^0 - \Delta_r G_1'^0 = 455.10^3 - 200,7T ;$$

$$\Delta_r G'^0 > 0 \text{ si } T < 2269 \text{ K}, \Rightarrow \text{réaction peu déplacée (cf. } K \ll 1).$$

$T = 2269 \text{ K}$ est la température d'inversion de cet équilibre.

$\Delta_r G'^0 < 0$ si $T > 2269 \text{ K}$: le carbone peut réagir davantage sur $\text{Al}_2\text{O}_{3(s)}$; il faut $T > 2269 \text{ K}$, c'est une température élevée en métallurgie.

B. Réactions parasites



$$\Delta_r G_3^0 = 3\Delta_r G'^0 = 3\Delta_r G_2^0 - 3\Delta_r G_1'^0 \text{ et } \Delta_r G_3^0 = -RT \ln K_3 ;$$

$$\text{A.N. : } \Delta_r G_3^0 = 1366.10^3 - 602,1T \text{ (J.mol}^{-1}) ; \ln \frac{P_{\text{CO}}}{P^0} = \frac{-5,48.10^4}{T} + 24,15.$$



$$\Delta_r G_4^0 = (\Delta_f H^0(\text{Al}_4\text{C}_3) + 6\Delta_f H^0(\text{CO}) - 2\Delta_f H^0(\text{Al}_2\text{O}_3)) - T(s^0(\text{Al}_4\text{C}_3) + 6s^0(\text{CO}) - 9s^0(\text{C}) - 2s^0(\text{Al}_2\text{O}_3)).$$

$$\Delta_r G_4^0 = -RT \ln K_4 \Rightarrow \text{A.N. : } \Delta_r G_4^0 = 2559.10^3 - 1131T \text{ (J.mol}^{-1}).$$

$$\ln \frac{P_{\text{CO}}}{P^0} = \frac{-5,13.10^4}{T} + 22,68.$$

2. Récapitulons les 2 études :

$$\Delta_r G = \Delta_r G^0 + RT \ln \left(\frac{P_{\text{CO}}}{P^0} \right)^n$$

avec $n = 3$ ou 6 ;

$$0 = RT \ln \left(\frac{P_{\text{COeq}}}{P^0} \right)^n + \Delta_r G ;$$

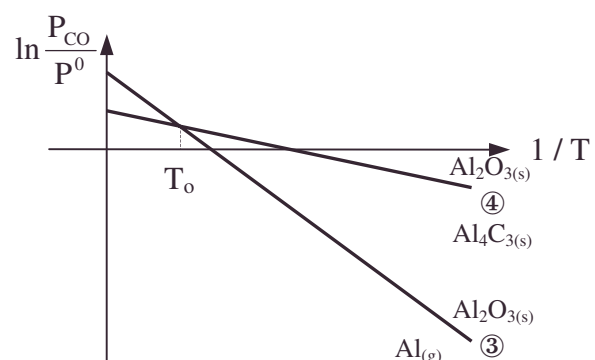
$$\Delta_r G = RT \ln \left(\frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{COeq}}} \right)^n.$$

si $P_{\text{CO}} > P_{\text{COeq}}$; $\Delta_r G > 0$, la réaction n'évolue pas dans le sens 2.

Pour ③, on a : $\text{CO}_{(g)}$ et $\text{Al}_2\text{O}_{3(s)}$ stable au-dessus de ③ (et non $\text{Al}_{(s)}$ réagissant avec $\text{CO}_{(g)}$, vu $\Delta_r G$).

Pour ④, on a : $\text{CO}_{(g)}$ et $\text{Al}_2\text{O}_{3(s)}$ stable au-dessus de ④ (et non $\text{Al}_4\text{C}_{3(s)}$ réagissant avec CO vu $\Delta_r G$).

• *régionnement*



3.4. Mélanges binaires

n'appartient pas explicitement au programme de BCPST2o

3.4.1. Azéotrope de HNO_3

Le diagramme isobare (sous une pression de 1 bar) liquide-vapeur du binaire H_2O - HNO_3 est représenté figure 1.

Le tableau ci-dessous complète les données, en précisant les abscisses de quelques points.

Point	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	γ_1	γ_2	γ_3	δ_1	δ_2	δ_3
Titre massique en $\text{HNO}_3 : x$	0,07	0,15	0,30	0,30	0,43	0,53	0,80	0,77	0,74	0,89	0,85	0,80

A. Préliminaire

Indiquer le nombre et la nature des phases des différents systèmes correspondant aux zones ①, ②, ③ et ④ du diagramme. Situer les courbes d'ébullition et de rosée.

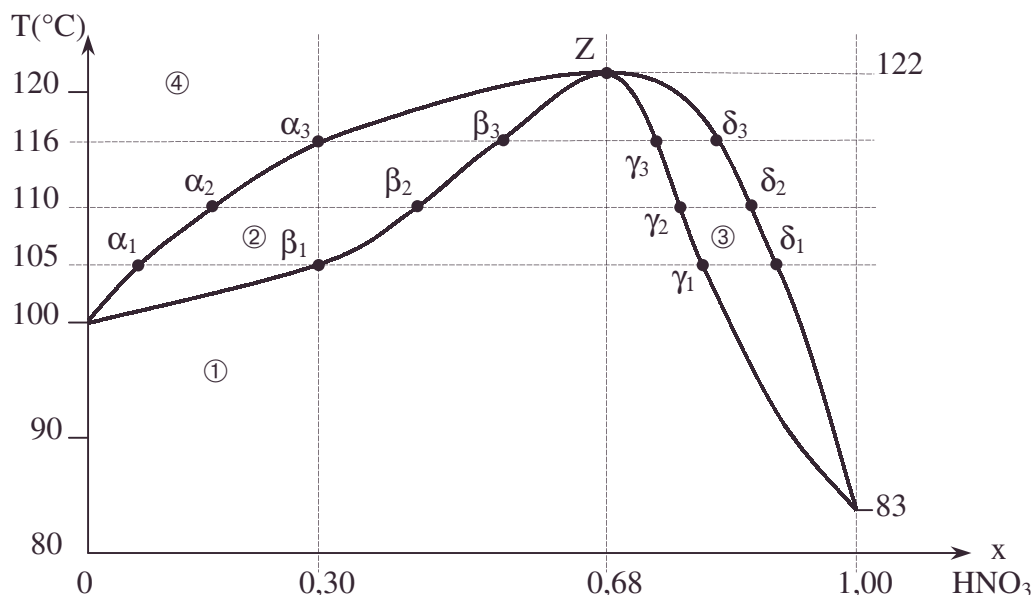


Figure 1.

B. Refroidissement isobare d'un mélange

Le système étant fermé, on refroidit un mélange de titre massique 0,30 en HNO_3 , initialement pris à 130°C .

1. A quelle température observe-t-on un changement de phase ?

Quel point du diagramme indique la composition de la nouvelle phase formée ?

2. Donner ou calculer à 110°C :

- Les natures des phases en présence ;
- Leurs compositions massiques ;
- Leur rapport massique.

C. Echauffement isobare d'un mélange

On chauffe maintenant, toujours en système fermé, un mélange de titre massique 0,68 en HNO_3 de 80°C à 130°C .

1. Décrire de façon concise les phénomènes observés.

2. Comment s'appelle le point Z ? Calculer la variance du système en ce point.

En déduire les analogies et différences de comportement du mélange correspondant avec le corps pur.

• azéotropie, courbe de rosée, courbe d'ébullition, diagramme isobare liquide-vapeur, mélange binaire, tableau, titre massique, variance

D. Aspect industriel

On produit industriellement un acide nitrique dilué, de teneur massique voisine de 57%. Quelle(s) méthode(s) doit-on mettre en œuvre pour le concentrer jusqu'à obtenir un acide pratiquement pur ? Justifier votre réponse à l'aide de la figure 1.

Centrale**Corrigé**

A.a.①. 1 phase liquide contenant HNO_3 et H_2O .

②. 2 phases : 1 liquide et 1 vapeur contenant HNO_3 et H_2O .

③. de même.

④. 1 phase vapeur contenant HNO_3 et H_2O .

b. La courbe de rosée, c'est-à-dire le lieu d'apparition de gouttelettes obtenues en abaissant la température de la phase vapeur est la courbe $\alpha Z\delta$.

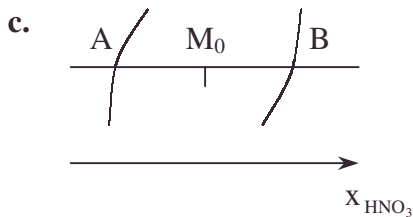
La courbe d'ébullition, c'est-à-dire le lieu d'apparition de bulles gazeuses par élévation de température de la phase liquide, est la courbe $\beta Z\gamma$.

B.1. A 116°C apparaît une phase liquide dont le titre massique en HNO_3 est l'abscisse de β_3 soit 0,53, en tenant compte de l'échelle des abscisses.

2. A 110°C , le mélange à $x = 0,30$ contient :

a.b. Une phase liquide de titre massique en HNO_3 ; $x_{\beta_2} = 0,43$.

Une phase vapeur de titre massique en HNO_3 ; $x_{\alpha_2} = 0,15$.



La conservation de la masse de HNO_3 s'écrit :

$$m_0 x_{\text{HNO}_3 M_0} = m_{\text{liq}} x_{\text{HNO}_3 A} + m_{\text{vap}} x_{\text{HNO}_3 B}$$

$$x_{\text{HNO}_3 B} m_{\text{liq}} + x_{\text{HNO}_3 A} m_{\text{vap}}, \text{ avec } m_0 = m_{\text{liq}} + m_{\text{vap}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{liq}} (x_B - x_M) = m_{\text{vap}} (x_M - x_A),$$

$$\text{d'où le théorème des moments : } \frac{m_{\text{liq}}}{m_{\text{vap}}} = \frac{AM}{BM} ; \text{ AN : } \frac{m_{\text{liq}}}{m_{\text{vap}}} = \frac{0,15}{0,13} = 1,15.$$

C.1. On passe d'une phase liquide homogène à 80° à une phase vapeur homogène de même composition à 130° sans connaître un passage par 2 phases ; tout se passe sous la pression de 1 bar, comme pour un corps pur.

2.a. Z s'appelle point d'azéotropie.

b. 6 paramètres intensifs : $P, T, x_{\text{HNO}_3}, x_{\text{H}_2\text{O}}, x_{\text{vHNO}_3}, x_{\text{vH}_2\text{O}}$.

$$2 \text{ équilibres physiques : } \begin{cases} \mu_{\text{HNO}_3 \text{ l}} = \mu_{\text{HNO}_3 \text{ v}} \\ \mu_{\text{H}_2\text{O l}} = \mu_{\text{H}_2\text{O v}} \end{cases}$$

$$2 \text{ relations de conservation : } \begin{cases} x_{\text{HNO}_3 \text{ l}} + x_{\text{HNO}_3 \text{ v}} = 1 \\ x_{\text{H}_2\text{O l}} + x_{\text{H}_2\text{O v}} = 1 \end{cases}$$

Pression P imposée.

Le nombre de paramètres intensifs libre est $V = 6 - 5 = 1$ en un point des zones 2 et 3 mais quand on est en Z, $x_{\text{HNO}_3 \text{ l}} = x_{\text{HNO}_3 \text{ v}} \Rightarrow V = 0$.

c. On voit le comportement analogue au corps pur pour le changement d'état sous 1 bar, mais cela ne se reproduit pas à une autre pression.

D.a. La théorie des colonnes à plateaux prédit qu'en partant de $x_{\text{HNO}_3} = 0,57$, on pourra obtenir par distillation fractionnée jusqu'à $x_{\text{HNO}_3} = 0,68$ (cf. convergence d'une suite d'états).

b. Pour passer au delà de Z, il faut augmenter x_{HNO_3} :

α. En rajoutant HNO_3 à un titre supérieur à 0,68 obtenu préalablement.

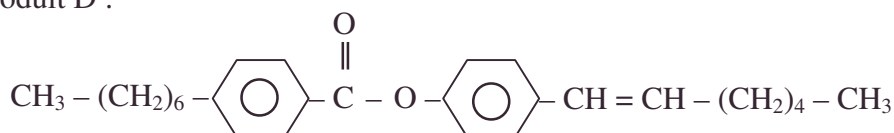
β. En enlevant H_2O par un déshydratant.

γ. En changeant la pression de sorte qu'on soit à droite du nouveau point d'azéotropie.

On continue ensuite la distillation fractionnée dans l'intervalle $T_Z - T_{\text{HNO}_3}$ pour obtenir HNO_3 pur (cf. convergence d'une suite d'états).

3.4.2. Diagramme binaire de cristaux liquides

Un produit D :



présente des propriétés de "cristal liquide" entre 35° et 82°C .

Quand on chauffe un composé présentant les propriétés de "cristal liquide" comme D, on observe deux transitions de phase :

1. Passage du solide cristallisé à la phase "cristal liquide" ou état mésomorphe à une température θ_f que nous appellerons température de fusion.

2. Passage de la phase "cristal liquide" à la phase "liquide classique" (isotrope) à une température θ_c que nous appellerons température de clarification.

(Le domaine d'existence de la phase "cristal liquide" s'étend donc de θ_f à θ_c).

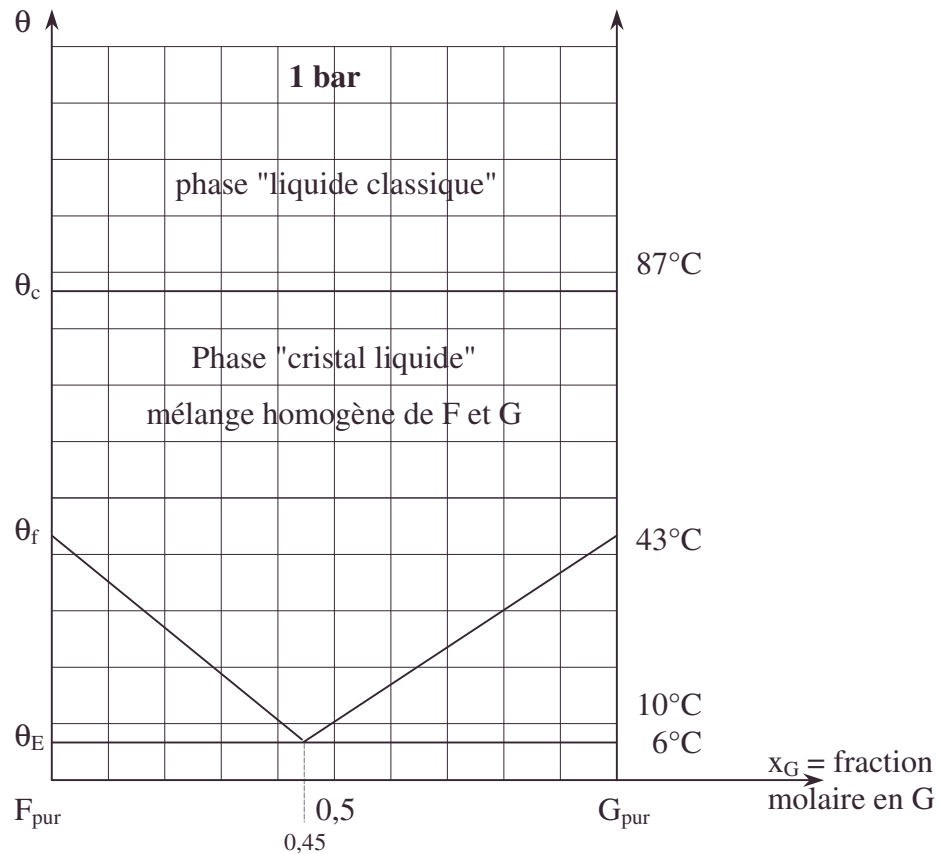
On considère dans cette question deux composés F et G pouvant présenter, chacun, des propriétés de "cristal liquide". Ces composés F et G (purs) présentent :

- la même température de fusion $\theta_f = 43^\circ \text{C}$.

- pratiquement la même température de clarification : $\theta_c = 87^\circ \text{C}$.

A l'état solide cristallisé F et G sont non miscibles, tandis qu'à l'état liquide ou "cristal liquide", ils sont totalement miscibles.

Le diagramme binaire de cristallisation du mélange F + G, sous 1 bar, est donné ci-après. L'horizontale à 87°C correspond au passage du domaine "cristal liquide" (mélange homogène de F et G) au domaine phase "liquide classique" (isotrope). On admet donc que la température de clarification est indépendante des proportions du mélange en F et G. E est l'eutectique dont les coordonnées se trouvent sur le diagramme ($x_G = 0,45$; $\theta_E = 6^\circ \text{C}$).



a. Quel intérêt pratique voyez-vous à l'utilisation du mélange de F et G à 45% de G à la place de F pur ou G pur pour les applications à cristaux liquides ?

b. Tracer les courbes de refroidissement, sous 1 bar, d'un système pris à 50°C pour les compositions initiales, traduites par les valeurs de x_G : $x_1 = 0,45$; $x_2 = 0,50$.

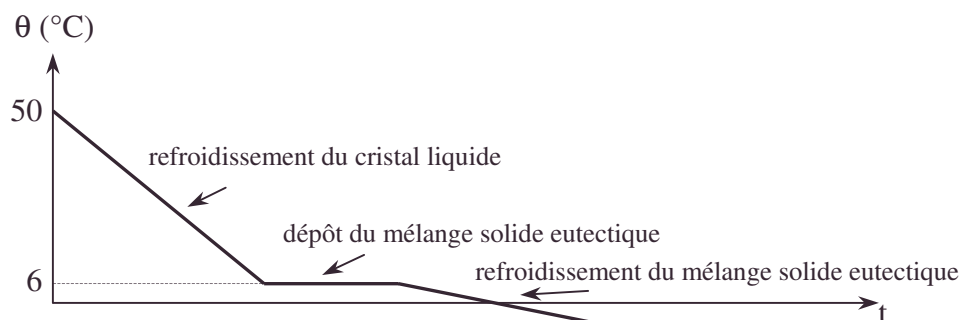
Préciser la température des points remarquables et indiquer ce qui se produit en ces points. Justifier, par le calcul de la variance, la présence d'un palier sur ces courbes de refroidissement.

CCP

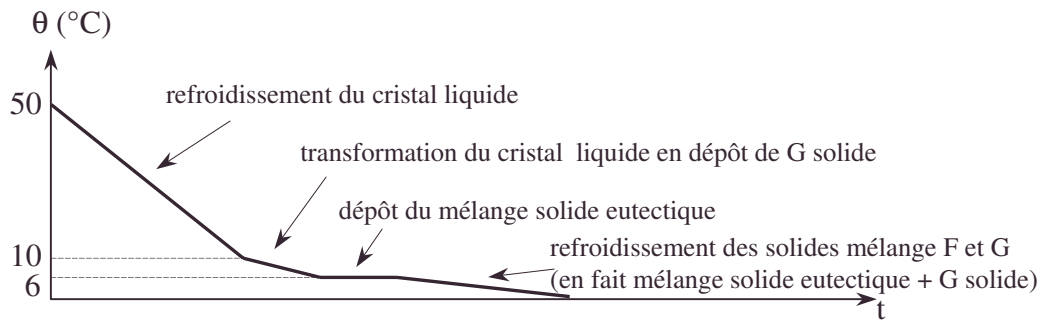
Corrigé

a. On voit que l'intervalle de températures d'existence du cristal liquide noté cl en indice est augmenté. On passe de $\theta_c - \theta_f$ jusqu'à la limite $\theta_c - \theta_E$.

b.α. $x_1 = 0,45$, proportion de l'eutectique. On suppose une réfrigération à puissance constante.



β. $x_2 = 0,50$.



γ. Pour l'étude de la solidification d'un cristal liquide :

On a les 6 paramètres intensifs : $T, P, x_{F_{cl}}, x_{F_s}, x_{G_{cl}}, x_{G_s}$ liés par les 4 relations (d'équilibre) : $\mu_{F_{cl}} = \mu_{F_s}$; $\mu_{G_{cl}} = \mu_{G_s}$; $x_{F_{cl}} + x_{G_{cl}} = 1$; $x_{F_s} + x_{G_s} = 1$; or $P = 1$ bar.

On a donc une variance théorique de $6 - 4 - 1 = 1$, ce qui est cohérent car on observe sur le diagramme binaire et sur la courbe de refroidissement à $x \neq 0,45$ que θ_f varie avec $x_{G_{cl}}$.

Quand $x_{G_{cl}} \rightarrow x_{G_E}$, $\theta \rightarrow \theta_E$ tout est fixé, la variance est nulle à l'eutectique.

On a un palier eutectique à $\theta = 6^\circ\text{C}$.

3.4.3. Diagramme binaire Al-Ce

La figure 1 représente une partie du diagramme de phase solide-liquide du système binaire aluminium-cérium.

a. Trois composés définis peuvent être repérés sur ce diagramme.

Ecrire leurs formules.

b. Indiquer la composition des domaines a, b, c, d, e, f, g et h de ce diagramme.

Que représente le point J ?

c. Donner l'allure de la courbe de refroidissement (température en fonction du temps) à partir de 1500°C d'un mélange de cérium et d'aluminium dont la fraction molaire de cérium est 0,40. Pour chaque portion de la courbe, préciser la nature de la ou des phases constituant le système. Même question dans le cas d'un mélange de cérium et d'aluminium ayant la composition du point J.

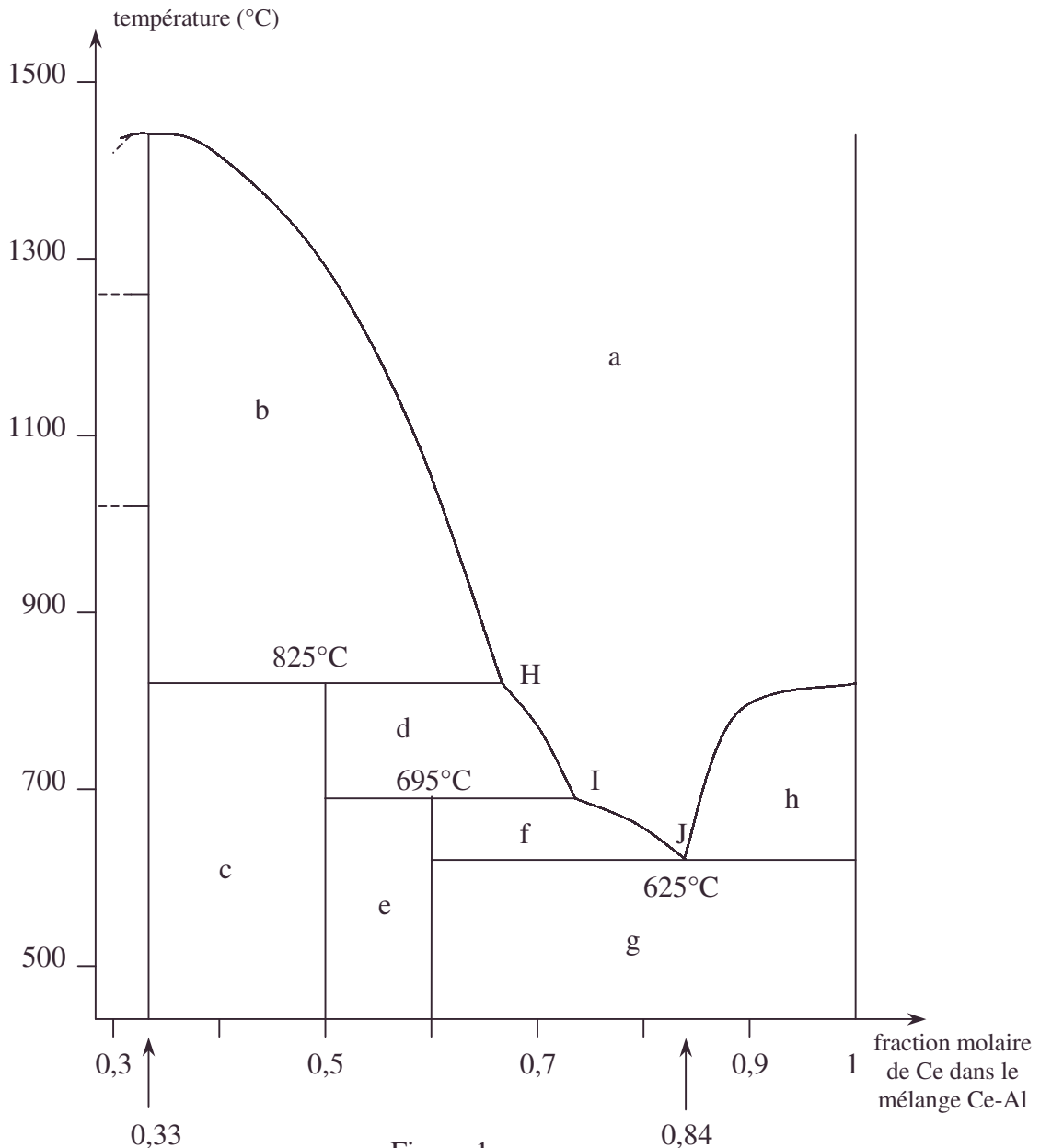
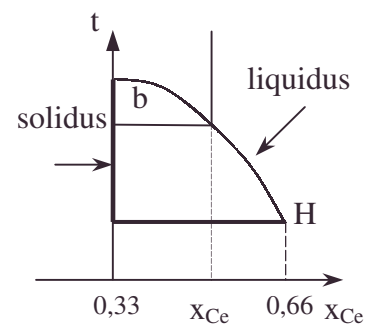


Figure 1

CCP**Corrigé**

a.α. Partons du refroidissement d'un liquide tel que $0,33 < x_{\text{Ce}} < 0,66$, on obtient un premier microcristal dont la composition est donnée par le solidus vertical $x_{\text{Ce}} = 0,33$ (cas des solides non miscibles). La composition de la phase liquide se lit sur le liquidus et varie avec T jusqu'au point H.

Nous décrivons par la même la zone b, où coexistent liquide et solide ; le solide correspond à un composé de formule brute CeAl_2 (pour lequel $x_{\text{Ce}} = 0,33$) dit composé défini sous la pression de travail.



β. Les autres solidus définissant par analogie des composées définis sont :

$x_{\text{Ce}} = 0,5$, correspondant à la formule brute CeAl

$x_{\text{Ce}} = 0,6$, correspondant à la formule brute Ce_3Al_2 .

γ. La règle des moments permet d'obtenir en $x_{\text{Ce}} = 0,33$ (où la tangente est horizontale) un solide défini pur sans coexistence de liquide ; cela n'est pas possible pour les 2 autres qui n'existent pas sans liquide sous la pression d'étude car on ne peut observer de tangente horizontale au liquidus en ces points.

b. La connaissance de la lecture des diagrammes binaires permet de dire qu'il y a :
a correspond à un liquide homogène.

- mélanges liquide-solide

b correspond à un liquide et à un solide de formule brute CeAl_2 .

d correspond de même à un liquide et à un solide de formule brute CeAl .

f correspond de même à un liquide et à un solide de formule brute Ce_3Al_3 .

h correspond de même à un liquide et à un solide Ce pur.

- mélange de 2 solides

La règle des moment permet de dire :

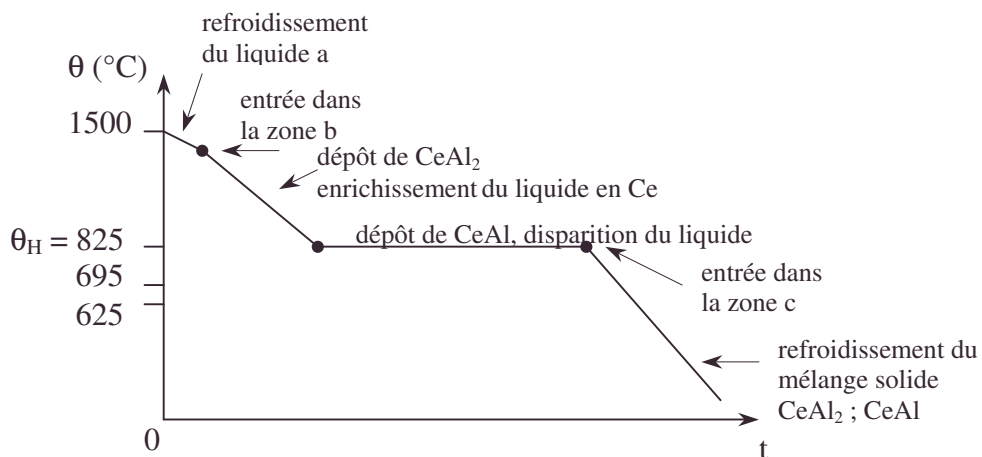
en c, on a un mélange de 2 solides ; certains cristaux de formule brute CeAl_2 , les autres de formule brute CeAl ;

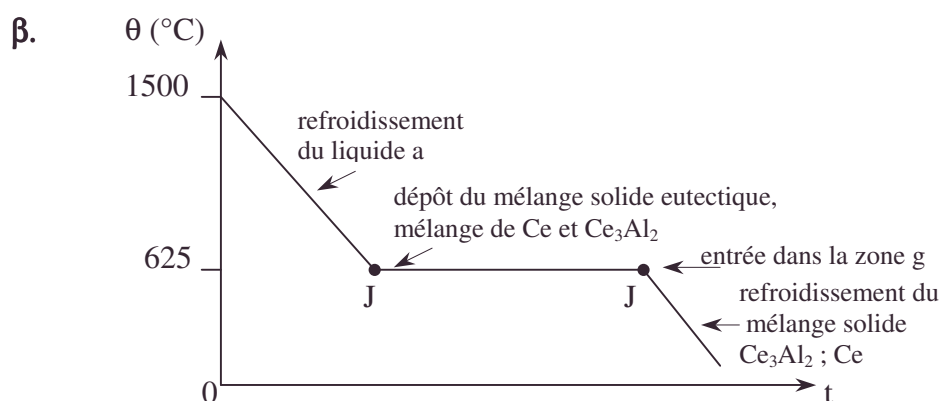
en e, on a un mélange de 2 solides ; certains cristaux de formule brute CeAl , les autres de formule brute Ce_3Al_2 ;

en g, on a un mélange de 2 solides ; certains cristaux de formule brute Ce_3Al_2 , les autres de formule Ce .

J est un point eutectique ; la congélation du mélange eutectique nous conduit en g à un mélange de solides de formules Ce et Ce_3Al_2 .

c.α. On a un intervalle de température où se déposent des cristaux de CeAl_2 à partir de l'entrée dans la zone b alors que CeAl se dépose à la seule température de H comme s'il s'agissait d'un corps pur .

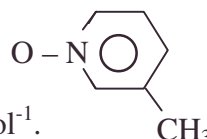




Comme pour un corps pur il y a dépôt de cristaux à la seule température du changement d'état, ici à 625° pour la pression de travail.

3.4.4. Grandeurs molaires partielles du POM

On donne la formule du
POM 3-méthyl-pyridine-N-oxyde
Données numériques



Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Masses atomiques (g.mol^{-1}) : $m_H = 1$; $m_C = 12$; $m_N = 14$; $m_O = 16$.

Masse molaire du POM : 154 g.mol^{-1} .

Notation	ACN	DCE	ADM
Formule	$\text{CH}_3 - \text{C} \equiv \text{N}$	$\text{ClCH}_2 - \text{CH}_2\text{Cl}$	$\text{CH}_3 - \text{CO}_2\text{CH}_3$
Masse volumique (g.cm^{-3})	0,772	1,234	0,914

Le POM est un solide à la température ordinaire. On se propose d'étudier sa solubilité dans trois solvants : l'acétonitrile (noté ACN), le 1,2-dichloroéthane (DCE) ; l'acétate de méthyle (ADM) et d'en tirer des renseignements sur les interactions soluté-solvant correspondantes. Dans les trois cas, les deux constituants du mélange liquide, qui est homogène, seront affectés respectivement des indices 1 pour les solvants et 2 pour le soluté ; leur miscibilité à l'état solide sera supposée nulle.

Dans tout le problème on suppose que la pression est constante.

I. On s'intéresse d'abord au mélange liquide homogène de 1 et 2 pris à la température T . Pour chaque constituant ($i = 1, 2$) la quantité de matière, mesurée en moles, sera notée n_i , la fraction molaire x_i et l'activité $a_i = \gamma_i x_i$, où γ_i est le coefficient d'activité.

1. soit une grandeur extensive J . Rappeler la définition de la grandeur molaire partielle \bar{J}_i associée à J pour le constituant i .

2. Soit G l'enthalpie libre de la solution réelle, G_0 celle d'une solution fictive contenant les mêmes quantités de matière mais dont les constituants se comporteraient comme s'ils étaient chacun à l'état pur.

On appelle enthalpie libre de mélange la quantité $\Delta G_m = G - G_0$.

Exprimer ΔG_m en fonction de n_1, n_2, a_1, a_2 et T dans le cas général ; donner la valeur ΔG_m^* de ΔG_m pour une solution idéale et en déduire l'écart $\Delta G_e = \Delta G_m - \Delta G_m^*$ appelé enthalpie libre d'excès.

Donner l'expression des grandeurs molaires partielles associées à $J = \Delta G_e$.

• 3-méthylpyridine-N-oxyde, acétonitrile, ACN, ADM, DCE, 1,2-dichloroéthane, gaz parfait, grandeurs molaires partielles, solubilité, soluté, solvant

3. Exprimer de même l'enthalpie de mélange ΔH_m , l'enthalpie d'excès ΔH_e , l'entropie de mélange ΔS_m et l'entropie d'excès ΔS_e . Comparer ΔH_m à ΔH_e .

Donner l'expression des grandeurs molaires partielles associées à ΔH_e et à ΔS_e .

4. Une solution est dite régulière si l'entropie d'excès ΔS_e est nulle pour toute composition (à température et pression fixées). Montrer que le coefficient d'activité γ_i de chaque constituant vérifie dans ce cas la relation $RT \ln \gamma_i = K_i(x_1, x_2)$, où $K_i(x_1, x_2)$ est indépendant de T.

5. Un cas particulièrement simple de solution régulière est celui où :

$$K_1(x_1, x_2) = W_1 x_2^2, \quad K_2(x_1, x_2) = W_2 x_1^2 \quad (W_1, W_2 \text{ constants}).$$

a. Montrer que dans ce cas l'état de référence choisi pour exprimer le coefficient d'activité γ_i est celui qui correspond au constituant i pur.

b. Etablir que $W_1 = W_2$ et que leur valeur commune W a la dimension d'une énergie par mole.

c. Exprimer l'enthalpie d'excès ΔH_e en fonction de n_1 , n_2 et W.

d. Quel phénomène physico-chimique la grandeur W permet-elle de caractériser, en valeur absolue et en signe ?

II. Les solubilités s_2 , en grammes par litre de solvant, du POM dans l'ACN, dans le DCE et dans l'ADM sont respectivement de 71,7, 68,4 et 9,3 à 302,8 K à la pression standard.

1. A l'aide des données numériques, calculer les fractions molaires x_2 correspondantes.

2. Ecrire dans le cas général en termes de potentiels chimiques la condition d'équilibre hétérogène entre le POM solide et la solution saturée.

3. En introduisant la chaleur latente molaire de fusion L_f (supposée constante) du POM et sa température de fusion T_f , montrer qu'il existe une relation simple entre la température d'équilibre hétérogène et l'activité a_2 du POM dans la phase liquide saturée.

4. En solution saturée dans le DCE, on détermine pour le POM $\gamma_2 = 8,59 \cdot 10^{-3}$.

a. En déduire la valeur de ce coefficient pour les solutions saturées du POM dans l'ACN et dans l'ADM à la même température.

b. Supposant toujours valable le modèle simple de solution régulière étudié en I.5., déterminer les valeurs de l'énergie W dans les mélanges POM-ACN, POM-DCE et POM-ADM.

Ecole Polytechnique ; Durée 1h30

Corrigé

$$\text{I.1. } \bar{J}_i = \left(\frac{\partial J}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j \neq n_i}; \text{ exemple du potentiel chimique } \mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j \neq n_i}.$$

en considérant comme variables indépendantes T, P, n_1 , $n_2 \dots$

$$\text{2.a. } G = n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2; \quad G = (n_1 \mu_1^0 + n_2 \mu_2^0) + RT(n_1 \ln a_1 + n_2 \ln a_2).$$

Pour des corps qui seraient purs : $a_i = 1 \Rightarrow G_0 = n_1 \mu_1^0 + n_2 \mu_2^0$.

$$\Delta G_m = G - G_0 = RT(n_1 \ln a_1 + n_2 \ln a_2).$$

b. Si la solution est idéale : $\gamma_i = 1$. $\Delta G_m^* = RT(n_1 \ln x_1 + n_2 \ln x_2)$.

Remarquons que $\frac{\Delta G_m^*}{T} = R(n_1 \ln x_1 + n_2 \ln x_2)$ expression indépendante de T.

$$\text{c. } \Delta G_e = \Delta G_m - \Delta G_m^* = RT(n_1 \ln \gamma_1 + n_2 \ln \gamma_2).$$

$$\begin{aligned} \text{d. } J = \Delta G_e \Rightarrow \bar{J}_1 = \overline{\Delta G}_{e_1} &= \left(\frac{\partial \Delta G_e}{\partial n_1} \right)_{T,P,n_2} = RT \left[\ln \gamma_1 + n_1 \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial n_1} + n_2 \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial n_1} \right] \\ \bar{J}_2 = \overline{\Delta G}_{e_2} &= \left(\frac{\partial \Delta G_e}{\partial n_2} \right)_{T,P,n_1} = RT \left[\ln \gamma_2 + n_1 \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial n_2} + n_2 \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial n_2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{3.a. Rappelons la formule de Gibbs Helmholtz : } \frac{H}{T^2} = - \left[\frac{\partial \left[\frac{G}{T} \right]}{\partial T} \right]_P.$$

En utilisant la formule pour les réactifs 1 et 2 mélangés et purs et en soustrayant

$$\Delta H_m = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Delta G_m}{T} \right) \Rightarrow \Delta H_m = -RT^2 \left[n_1 \frac{\partial \ln a_1}{\partial T} + n_2 \frac{\partial \ln a_2}{\partial T} \right].$$

b. En considérant l'opérateur linéaire qui fait obtenir ΔH_e , la loi de Gibbs Helmholtz s'écrit : $\Delta H_e = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial \Delta G_e}{T} \right] \Rightarrow \Delta H_e = -RT^2 \left[n_1 \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial T} + n_2 \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial T} \right].$

c. On a aussi $S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,n_j}$; en procédant pour 1 et 2 mélangés et purs et en

soustrayant :

$$\begin{aligned} \Delta S_m &= - \frac{\partial \Delta G_m}{\partial T} \Rightarrow \Delta S_m = -R \left[n_1 \ln a_1 + n_2 \ln a_2 + T n_1 \frac{\partial \ln a_1}{\partial T} + T n_2 \frac{\partial \ln a_2}{\partial T} \right]; \\ \Delta S_m &= -R n_1 \left[\ln a_1 + T \frac{\partial \ln a_1}{\partial T} \right] - R n_2 \left[\ln a_2 + T \frac{\partial \ln a_2}{\partial T} \right]. \end{aligned}$$

d. Par l'opérateur linéaire qui permet de passer à ΔS_e :

$$\Delta S_e = - \frac{\partial \Delta G_e}{\partial T} \Rightarrow \Delta S_e = -R n_1 \left[\ln \gamma_1 + T \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial T} \right] - R n_2 \left[\ln \gamma_2 + T \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial T} \right].$$

$$\text{e. } x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} ; x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \text{ indépendants de } T ; \Delta H_m^* = -T^2 \left(\frac{\partial \frac{\Delta G_m^*}{T}}{\partial T} \right) = 0 ;$$

$$\Rightarrow \Delta H_e = \Delta H_m - \Delta H_m^* = \Delta H_m.$$

f.α.

ΔH_e donne

$$\begin{aligned} \overline{\Delta H}_{e_1} &= \left(\frac{\partial \Delta H_e}{\partial n_1} \right)_{T,P,n_2} = -RT^2 \left[\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial T} + n_1 \frac{\partial^2 \ln \gamma_1}{\partial n_1 \partial T} + n_2 \frac{\partial^2 \ln \gamma_2}{\partial n_1 \partial T} \right]; \\ \overline{\Delta H}_{e_2} &= \left(\frac{\partial \Delta H_e}{\partial n_2} \right)_{T,P,n_1} = -RT^2 \left[\frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial T} + n_1 \frac{\partial^2 \ln \gamma_1}{\partial n_2 \partial T} + n_2 \frac{\partial^2 \ln \gamma_2}{\partial n_2 \partial T} \right]. \end{aligned}$$

β. ΔS_e donne : $\overline{\Delta S}_{e_1} = \frac{\partial \Delta S_e}{\partial n_1}$

$$\frac{\partial \Delta S_e}{\partial n_1} = -R \left[\ln \gamma_1 + T \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial T} + n_1 \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial n_1} + n_1 T \frac{\partial^2 \ln \gamma_1}{\partial n_1 \partial T} \right] - R n_2 \left[\frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial n_1} + T \frac{\partial^2 \ln \gamma_2}{\partial n_1 \partial T} \right];$$

Mélanges binaires

$$\overline{\Delta S_{e_2}} = \frac{\partial \Delta S_e}{\partial n_2}$$

$$\frac{\partial \Delta S_e}{\partial n_2} = -Rn_1 \left[\frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial n_2} + T \frac{\partial^2 \ln \gamma_1}{\partial n_2 \partial T} \right] - R \left[\ln \gamma_2 + T \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial T} + n_2 \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial n_2} + n_2 T \frac{\partial^2 \ln \gamma_2}{\partial n_2 \partial T} \right].$$

4. $\Delta S_e = 0$. Vu 3.d. pour avoir une identité indépendante de n_1, n_2 , il faut satisfaire à :

$$\begin{cases} R \ln \gamma_1 + RT \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial T} (RT \ln \gamma_1) = 0 \Rightarrow RT \ln \gamma_1 = f_1(n_1, n_2) = K_1(x_1, x_2). \\ R \ln \gamma_2 + RT \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial T} (RT \ln \gamma_2) = 0 \Rightarrow RT \ln \gamma_2 = f_2(n_1, n_2) = K_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

soit la relation donnée.

$$5.a.\alpha. \ln \gamma_1 = W_1 \frac{x_2^2}{RT};$$

la référence de γ_1 est $\gamma_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$. C'est ① pur.

$$\beta. \ln \gamma_2 = W_2 \frac{x_1^2}{RT} : \gamma_2 = 1 \text{ référence pour } \gamma_2 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1, \text{ soit } \textcircled{2} \text{ pur.}$$

$$b.\alpha. \begin{cases} \mu_1 = \mu_1^0 + RT \ln \gamma_1 x_1 = \mu_1^0 + RT \ln x_1 + W_1 x_2^2 \\ \mu_2 = \mu_2^0 + RT \ln \gamma_2 x_2 = \mu_2^0 + RT \ln x_2 + W_2 x_1^2 \end{cases}$$

or, $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow dx_1 + dx_2 = 0$.

Utilisons la relation de Gibbs-Duhem à T, P constants, c'est-à-dire $n_1 d\mu_1 + n_2 d\mu_2 = 0$,

$$\text{soit encore } 0 = x_1 \left(d\mu_1^0 + RT \frac{dx_1}{x_1} + W_1 2x_2 dx_2 \right) + x_2 \left(d\mu_2^0 + RT \frac{dx_2}{x_2} + 2W_2 dx_2 x_2 \right).$$

$$RT(dx_1 + dx_2) + 2x_1 x_2 (W_1 dx_2 + W_2 dx_1) = 0 ;$$

il reste : $(W_1 - W_2) dx_2 = 0 \Rightarrow W_1 - W_2 = 0$ ce qui est évident en échangeant 1 et 2.

β . Dans $\mu_1 = \mu_1^0 + RT \ln x_1 + W_1 x_2^2$, x_2 est sans dimension et W_1 a la dimension de RT et de μ_1 soit des joules.mole⁻¹.

$$c. \frac{\partial \ln \gamma_1}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{W x_2^2}{RT} \right) = -\frac{W x_2^2}{RT^2} \text{ de même } \frac{\partial \ln \gamma_2}{\partial T} = -\frac{W x_1^2}{RT^2} \text{ car } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont}$$

indépendants de T.

$$\Delta H_e = W (n_1 x_2^2 + n_2 x_1^2) = W \left(\frac{n_1 n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} + \frac{n_2 n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} \right) = \frac{W n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

On a symétrie des rôles de n_1 et n_2 .

$$d. \Delta H_e = \Delta H_m = W \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} ;$$

W caractérise le bilan enthalpique de l'opération de mélange.

α . Cas particulier : $n_1 = n_2 = 1$ mole.

$$\Delta H_m = \frac{W}{2} \Rightarrow W = 2\Delta H_m \text{ si } n_1 = n_2 = 1.$$

β . Les signes de W et de ΔH_m sont identiques $\forall n_1, n_2$.

γ . Dans le cas idéal $\Delta H_m^* = 0 = \frac{W}{2}$, bien évidemment.

$$\text{II.1.} \quad x_2 = \frac{\frac{s_2}{M_{\text{POM}}}}{\frac{s_2}{M_{\text{POM}}} + \frac{\rho_{\text{solvant}}}{M_{\text{solvant}}}}.$$

A.N. :

solvant	ACN	DCE	ADM
$M_{\text{solvant}} \text{ en g.mol}^{-1}$	41	99	74
x_2	0,024	0,034	0,0048

2.α. La réaction équilibrée $\text{POM}_{(s)} \rightleftharpoons \text{POM}_{(\text{solvat  })}$ satisfait    :

$$\Delta_f G = 0 = \mu_{\text{POM}_{(\text{solv})}} - \mu_{\text{POM}_{(s)}} = (\mu_{\text{POM}_{(\text{solv})}}^0 - \mu_{\text{POM}_{(s)}}^0) + RT \ln a_2.$$

  . Dans le cas particulier o   $x_1 = 0$, $a_2 = 1$ cf. **I.5.a.**, on a acc  s aux grandeurs standards.

$$\mu_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0(T_f) - \mu_{\text{POM}_{(s)}}^0(T_f) = 0 = h_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0(T_f) - h_{\text{POM}_{(s)}}^0(T_f) - T_f (s_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0(T_f) - s_{\text{POM}_{(s)}}^0(T_f)),$$

ce qui est v  rifi   car $h_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0(T_f) - h_{\text{POM}_{(s)}}^0(T_f) = L_f$.

$$s_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0(T_f) - s_{\text{POM}_{(s)}}^0(T_f) = \frac{L_f}{T_f}.$$

$$\text{3.} \quad \ln a_2 = \frac{\mu_{\text{POM}_{(s)}}^0(T) - \mu_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0(T)}{RT} = \frac{h_{\text{POM}_{(s)}}^0 - h_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0}{RT} - \frac{T}{RT} (s_{\text{POM}_{(s)}}^0 - s_{\text{POM}_{(\text{sol})}}^0).$$

En supposant constantes les variations de h^0 et de s^0 sur un voisinage de T_f ,

$$\ln a_2 = \frac{L_f}{R} \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T} \right).$$

4.a.    T donn  , on en d  duit $a_2 = \gamma_2 x_2$ constant, ind  pendant du solvant.

cf. **I.5.a.** et **II.2.b.**

$$\gamma_{2_{\text{ACN}}} x_{2_{\text{ACN}}} = \gamma_{2_{\text{DCE}}} x_{2_{\text{DCE}}} = \gamma_{2_{\text{ADM}}} x_{2_{\text{ADM}}}.$$

$$\gamma_{2_{\text{ACN}}} = \gamma_{2_{\text{DCE}}} \frac{x_{2_{\text{DCE}}}}{x_{2_{\text{ACN}}}}; \text{AN : } \gamma_{2_{\text{ACN}}} = 1,217.10^{-2}.$$

$$\gamma_{2_{\text{ADM}}} = \gamma_{2_{\text{DCE}}} \frac{x_{2_{\text{DCE}}}}{x_{2_{\text{ADM}}}}; \text{AN : } \gamma_{2_{\text{ADM}}} = 6,083.10^{-2}.$$

$$\text{b.} \quad W = \frac{RT \ln \gamma_2}{x_1^2}; \text{ or } x_1 = 1 - x_2 \Rightarrow W = \frac{RT \ln \gamma_2}{(1 - x_2)^2}. \quad x_2 \text{ est exprim   en II.1.}$$

On peut comparer les interactions solvant-solut  .

$$\alpha. \text{ ACN - POM} \quad W = -11652 \text{ J.mol}^{-1}.$$

$$\beta. \text{ DCE - POM} \quad W = -12834 \text{ J.mol}^{-1}.$$

$$\gamma. \text{ ADM - POM} \quad W = -7111 \text{ J.mol}^{-1}.$$

3.4.5. Thermodynamique de compos  s interstitiels fer carbone

Dans l'intervalle de temp  rature [1185 K – 1667 K], le fer a une structure cristalline cubique    faces centr  es (CFC). Cette vari  t   allotropique du fer est d  sign  e par Fe  .

• bilan enthalpique, potentiel chimique, solvant

A la température de 1200 K, le paramètre de la maille élémentaire de Fe γ est égal à 0,3647 nm.

Le carbone de rayon atomique $r_C = 0,077$ nm peut entrer en solution dans Fe γ en occupant les sites interstitiels octaédriques de la structure CFC.

La teneur en carbone des solutions solides obtenues peut être exprimée :

- soit par le rapport atomique $y_C = \frac{n_C}{n_{Fe}}$ où n_C et n_{Fe} sont respectivement le nombre

d'atomes de carbone et le nombre d'atomes de fer dans la phase étudiée.

- soit par le pourcentage en masse de carbone X_C dans la phase étudiée.

1. Vérifier que : $X_C = \frac{100 y_C}{4,654 + y_C}$.

Masses molaires des éléments en kg.kmol⁻¹ : $M_{Fe} = 55,85$; $M_C = 12$.

2. Calculer la valeur maximale du rayon de la sphère inscriptible dans un site interstitiel octaédrique du Fe γ et la comparer à la valeur de r_C .

3. Si tous les sites interstitiels octaédriques du Fe γ étaient occupés par un atome de carbone, quels seraient le rapport atomique théorique $(y_C)_t$ et le pourcentage en masse théorique $(X_C)_t$ du carbone dans la solution solide correspondante ?

4. Le potentiel chimique μ_C du carbone en solution dans le Fe γ s'exprime par la relation générale : $\mu_C = \mu_C^0 + RT \ln a_C$, où a_C est l'activité du carbone dans sa phase.

En choisissant comme état d'activité unité ($a_C = 1$) le carbone pur (graphite) on a établi la relation expérimentale suivante reliant a_C à la température absolue T et au rapport atomique y_C du carbone en solution :

$$\log a_C = \frac{2300}{T} - 0,920 + 3860 \frac{y_C}{T} + \log \frac{y_C}{1 - y_C}.$$

1. Donner la relation existant entre les potentiels chimiques d'un même élément présent dans deux phases différentes en équilibre thermodynamique.

2. En déduire la limite de solubilité du carbone dans Fe γ à la température de 1200 K (solution solide saturée en présence de graphite). Comparer les valeurs $(y_C)_1$ et $(X_C)_1$ obtenues aux valeurs théoriques $(y_C)_t$ et $(X_C)_t$; donner une interprétation sommaire des différences constatées.

II. Le traitement de cémentation par le carbone est appliqué techniquement aux alliages ferreux afin d'augmenter la teneur en carbone de la zone superficielle des pièces préalablement à un traitement thermique de durcissement. Cet apport de carbone peut être obtenu à partir d'une atmosphère gazeuse convenable.

Un échantillon de fer est mis en contact avec une atmosphère gazeuse cémentante à la température $T = 1200$ K. Cette atmosphère contient essentiellement du monoxyde de carbone, du dioxyde de carbone, de l'eau, de l'hydrogène et de l'azote, tous à l'état gazeux.

Dans le cas étudié la pression totale est égale à 1 bar, la pression partielle du monoxyde de carbone est égale à 0,2 bar et la pression partielle de l'hydrogène est égale à 0,4 bar. Ces valeurs sont maintenues valables pour toutes les questions suivantes.

Les principaux équilibres mis en jeu sont les suivants :



Le schéma réactionnel ① décrit un équilibre hétérogène solide-gaz, dans lequel C* représente le carbone en solution dans Feγ à la surface de l'échantillon. Les schémas réactionnels ② et ③ décrivent des équilibres homogènes en phase gazeuse.

1. Les potentiels chimiques de référence sont donnés en J.mol^{-1} par les approximations polynomiales suivantes valables dans l'intervalle de température [1000 K , 1400 K].

La pression de référence pour les gaz est égale à 1 bar.

$$\mu_{\text{CO}}^0 = -110217 - 92,150T + 0,002100T^2$$

$$\mu_{\text{CO}_2}^0 = -394165 - 2,400T + 0,000625T^2$$

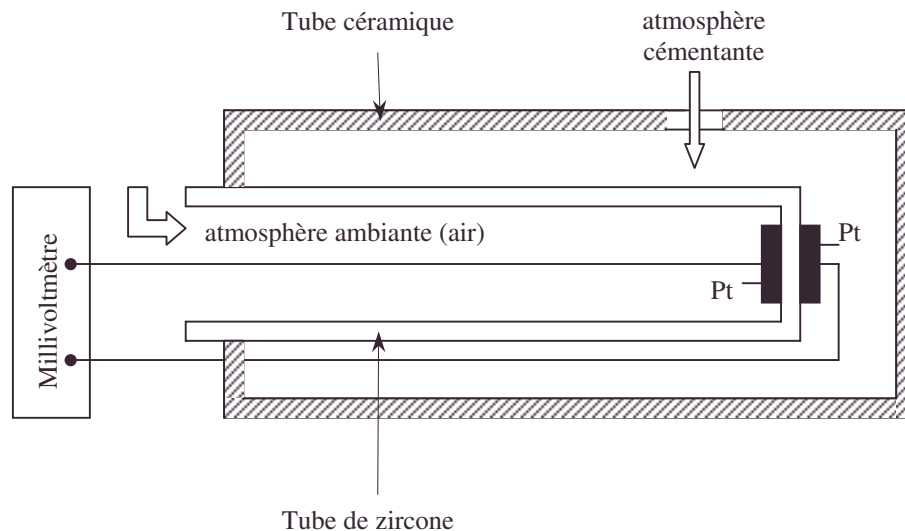
$$\mu_{\text{H}_2\text{O}}^0 = -246582 + 52,255T + 0,001675T^2$$

$$\mu_{\text{H}_2}^0 = \mu_{\text{O}_2}^0 = \mu_{\text{C}}^0 = 0 \quad \forall T.$$

Exprimer les constantes d'équilibre K_1 , K_2 et K_3 des trois équilibres ①, ② et ③ en fonction des pressions partielles des espèces gazeuse et éventuellement de l'activité du carbone en solution dans Feγ. Calculer leurs valeurs numériques respectives à la température de 1200 K.

2. Calculer les pressions partielles du dioxyde de carbone, de l'oxygène et de la vapeur d'eau correspondant à une teneur $X_{\text{C}} = 1\%$ de la solution solide de carbone dans Feγ, en surface de l'échantillon, en équilibre avec l'atmosphère cimentante à la température de 1200 K. Montrer que, de manière générale, il est possible de contrôler la valeur de X_{C} en effectuant la mesure de l'une quelconque de ces pressions partielles.

3. En particulier on peut contrôler la valeur de X_{C} en mesurant la pression partielle d'oxygène dans l'atmosphère cimentante. On utilise pour cela une "sonde à oxygène" dont le schéma simplifié est donné ci-dessous.



Elle est constituée essentiellement par deux électrodes de platine séparées par une paroi de zircone (ZrO_2). L'une des électrodes est en contact avec l'air ambiant ($P_{\text{O}_2} = 0,2 \text{ bar}$) et l'autre avec l'atmosphère cimentante ; la zircone est un conducteur ionique au-dessus de 950 K, grâce à la mobilité importante des ions O^{2-} à partir de cette température.

1. Montrer que ce montage est assimilable à une pile électrochimique de concentration.

2. Exprimer et calculer la tension E aux bornes de cette pile à la température de 1200 K et pour $X_{\text{C}} = 1 \%$.

Données :

$$\text{Constante molaire des gaz : } R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

• *activité, contrôle, potentiels chimiques standards, sonde à oxygène*

Valeur du faraday : $F = 96485 \text{ C.mol}^{-1}$.

3. Calculer la variation ΔE de la tension aux bornes de cette pile de mesure, pour une variation $\Delta X_C = + 0,05\%$ de la teneur d'équilibre de la solution de carbone dans $\text{Fe}\gamma$, la température étant maintenue à 1200 K.

Conclusions.

ENSAM ; Durée : 2h00

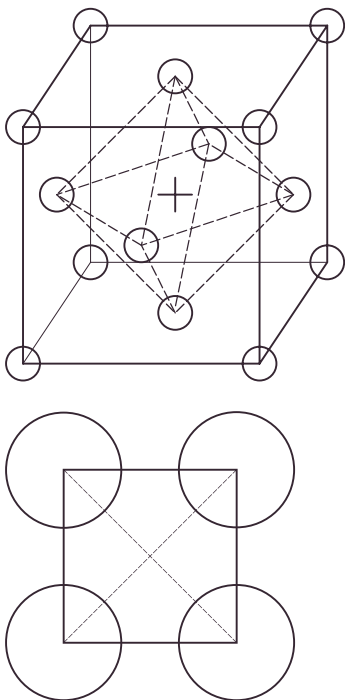
Corrigé

$$\text{I.1. } X_C = 100 \frac{m_C}{m_C + m_{\text{Fe}}} = 100 \frac{n_C \frac{M_C}{N_A \cdot 10^3}}{n_C \frac{M_C}{N_A \cdot 10^3} + n_{\text{Fe}} \frac{M_{\text{Fe}}}{N_A \cdot 10^3}}.$$

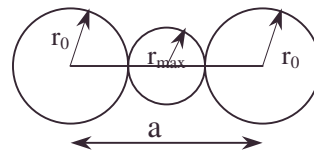
Divisons numérateur et dénominateur par $\frac{n_{\text{Fe}} M_C}{N_A \cdot 10^3}$:

$$X_C = 100 \frac{y_C}{y_C + \frac{M_{\text{Fe}}}{M_C}} = 100 \frac{y_C}{y_C + 4,654}.$$

2. Considérons le site octaédrique le plus simple à voir : le centre du cube de la maille CFC.



Selon les six directions principales de l'octaèdre, nous avons : $2 r_{\text{max}} + 2 r_{\text{Fe}} = a$



b. Les atomes de fer sont tangents sur chaque face du cube : $4r_{\text{Fe}} = a\sqrt{2}$, d'où :

$$r_{\text{max}} = \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

A.N. : $r_{\text{max}} = 00534 \text{ nm}$.

On voit $r_C > r_{\text{max}}$; On peut envisager :

- une augmentation de a ;
- des contraintes modifiant les rayons r_C d'où une modification des propriétés physicochimiques du cristal initial.

3.a. Vu 8 atomes aux sommets, partagés entre 8 cubes,
6 atomes aux centres des faces partagés entre 2 cubes,

nombre d'atomes de fer appartenant en propre à la maille CFC : $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$.

b. Nombre de sites octaédriques :

1 au centre du cube,

12 au centre de chaque arête partagés entre 4 cubes.

$$1 + \frac{12}{4} = 4 \Rightarrow (y_C)_t = 1 ; \text{ A.N. : } (x_C)_t = \frac{100}{5,654} = 17,7.$$

4.1. Il s'agit d'un équilibre de changement d'état : $C_1 \rightleftharpoons C_2^*$

$$\Delta_r G = 0 = \mu_2 - \mu_1.$$

La forme C_1 est le graphite pur, la forme C_2 (ou cf. **II.**) est la situation d'insertion dans le Fe γ .

$$\mu_2^0 + RT \ln a_{C_2} = \mu_1^0 \text{ avec } \mu_2^0 = \mu_1^0 \text{ d'après l'énoncé. Il reste } a_{C_2} = 1.$$

$$\text{2. Donc } 3860 \frac{y_C}{T} - 0,920 + \frac{2300}{T} = \log \frac{1 - y_C}{y_C}.$$

à $T = 1200$ K, on résoud graphiquement et on trouve $y_{C_1} = 0,061 \Rightarrow X_{C_1} = 1,3$.

$$\text{On a } X_{C_1} \ll (X_C)_t \text{ car } \frac{1,3}{17,7} = 7.10^{-2}.$$

L'insertion n'est pas totale et doit se limiter au voisinage de la surface du cristal de par la difficulté de la diffusion avec $r_c > r_{\max}$.

$$\text{II.1.a.①. } C^* + CO_{2(g)} \rightleftharpoons 2 CO_{(g)} ; K_1 = \frac{P_{CO}^2}{P^0 P_{CO_2} a_C} \text{ avec } \Delta_r G_1^0 = -RT \ln K_1.$$

$$\Delta_r G_1^0 = 2\mu_{CO}^0 - \mu_{CO_2}^0 - \mu_{C^*}^0 \text{ or } \mu_{C^*}^0 = \mu_{\text{graphite}}^0 = 0 \text{ vu I.4.1.}$$

$$K_1 = \exp \left[\frac{\mu_{CO_2}^0 - 2\mu_{CO}^0}{RT} \right] ; \text{ A.N. : } K_1 = 52.$$

$$\text{b.②. } CO_{(g)} + H_2O_{(g)} \rightleftharpoons CO_{2(g)} + H_{2(g)} ;$$

$$K_2 = \frac{P_{H_2} P_{CO_2}}{P_{H_2O} P_{CO}} \text{ avec } \Delta_r G_2^0 = -RT \ln K_2.$$

$$\Delta_r G_2^0 = \mu_{CO_2}^0 + \mu_{H_2}^0 - \mu_{CO}^0 - \mu_{H_2O}^0 \text{ or } \mu_{H_2}^0 = 0 ;$$

$$K_2 = \exp \left[\frac{\mu_{CO}^0 + \mu_{H_2O}^0 - \mu_{CO_2}^0}{RT} \right] ; \text{ A.N. : } K_2 = 0,74.$$

$$\text{c.③. } 2 CO + O_2 \rightleftharpoons 2 CO_2 ;$$

$$K_3 = \frac{P_{CO_2}^2 P^0}{P_{CO}^2 P_{O_2}} \text{ avec } \Delta_r G_3^0 = -RT \ln K_3.$$

$$\Delta_r G_3^0 = 2\mu_{CO_2}^0 - 2\mu_{CO}^0 - \mu_{O_2}^0 \text{ or } \mu_{O_2}^0 = 0.$$

$$K_3 = \exp \left[\frac{2(\mu_{CO}^0 - \mu_{CO_2}^0)}{RT} \right] ; \text{ A.N. : } K_3 = 3,4.10^{15}.$$

2.a. Vu sa définition, on écrit : $X_C = 1$ or $y_C = \frac{X_C \cdot 4,654}{100 + X_C}$; A.N.: $y_C = 0,047$.

$\Rightarrow a_C = 0,694$; or dans l'atmosphère cémentante $P_{CO} = 0,2$ bar ;

$$\textcircled{1} \Rightarrow P_{CO_2} = \frac{P_{CO}^2}{a_C P^0 K_1} ; \text{A.N.: } P_{CO_2} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ bar} .$$

Or dans l'atmosphère cémentante, $P_{H_2} = 0,4$ bar.

$$\textcircled{2} \Rightarrow P_{H_2O} = \frac{P_{H_2} P_{CO_2}}{K_2 P_{CO}} ; \text{A.N.: } P_{H_2O} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ bar} .$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow P_{O_2} = \frac{P^0 P_{CO_2}^2}{P_{CO}^2 K_3} = \frac{P_{CO}^2}{a_C^2 P^0 K_1 K_3} ; \text{A.N.: } P_{O_2} = 9 \cdot 10^{-21} \text{ bar} .$$

On en déduira pour **3.3.** : $\frac{\Delta P_{O_2}}{P_{O_2}} = \frac{2 \Delta a_C}{a_C} .$

On ne mentionne pas O_2 dans la composition de l'atmosphère cémentante vu la valeur de P_{O_2} .

b. Inversement dans l'atmosphère cémentante où $P_{H_2} = 0,4$ bar et $P_{CO} = 0,2$ bar , la mesure de P_{CO_2} fournit $a_C = \frac{P_{CO}^2}{P^0 P_{CO_2} K_1} \Rightarrow y_C \Rightarrow X_C$.

La mesure de P_{H_2O} fournit $P_{CO_2} = \frac{K_2 P_{CO} P_{H_2O}}{P_{H_2}} \Rightarrow a_C = \frac{P_{CO} P_{H_2}}{P^0 K_2 P_{H_2O} K_1} \Rightarrow y_C \Rightarrow x_C$.

La mesure de P_{O_2} fournit $P_{CO_2} = P_{CO} \left(\frac{K_3 P_{O_2}}{P^0} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_C = \frac{P_{CO}}{K_1 K_3^{\frac{1}{2}} (P^0 P_{O_2})^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y_C \Rightarrow x_C$.

3.1. La zircone est le milieu ionique fournisseur ou receveur à chaud d'ion O^{2-} du couple redox $O_{2(g)} + 4e^- \rightleftharpoons 2 O^{2-}$ sur sa surface, elle est en contact électrique avec

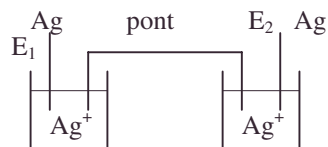
les électrodes de platine de potentiel $\pi = \pi^0 + \frac{RT}{4F} \ln \frac{P_{O_2}}{P^0 a_{O^{2-}}^2}$ or $a_{O^{2-}}$ dans la zircone est

la même pour les 2 électrodes en contact avec la zircone :

$$E = \pi_{\text{int}} - \pi_{\text{ext}} = \frac{RT}{4F} \ln \frac{P_{O_2 \text{ int}}}{P_{O_2 \text{ ext}}} ;$$

Rappelons une pile de concentration :

$$\pi_2 - \pi_1 = \frac{RT}{F} \ln \frac{(Ag^+)_2}{(Ag^+)_1} .$$



On a une méthode analogue mais en phase gazeuse, adaptée aux ordres de grandeur.

2. A.N. : $P_{O_2 \text{ ext}} = 0,2$ bar ; $P_{O_2 \text{ int}} = 9 \cdot 10^{-21}$ bar ; $E = 1,152$ mV ;

$$\textbf{3. } \Delta E = \frac{RT}{4F} \frac{\Delta P_{O_2 \text{ ext}}}{P_{O_2 \text{ ext}}} ; \text{ or } \frac{\Delta P_{O_2}}{P_{O_2}} = 2 \frac{\Delta a_C}{a_C} \text{ vu II.2.}$$

or, vu l'énoncé, $\frac{da_C}{a_C} = \frac{33.3860}{T} dy_C + \frac{dy_C}{y_C} + \frac{dy_C}{1 - y_C}$ or $T = 1200$ K ;

$$\Rightarrow \frac{\Delta a_c}{a_c} = \left(7,4 + \frac{1}{y_c(1-y_c)} \right) \Delta y_c = \frac{\Delta y_c}{y_c(1-y_c)} (1 + 7,4 y_c - 7,4 y_c^2).$$

Or, vu y_c dans **II.2.**, $\frac{dy_c}{y_c} = \frac{dX_c}{X_c} + \frac{dX_c}{100 + X_c} \Rightarrow \frac{\Delta y_c}{y_c} = \frac{\Delta X_c}{X_c} \frac{(100 + 2 X_c)}{(100 + X_c)}.$

$$\Delta E = \frac{RT}{2F} \frac{(1 + 7,4 y_c - 7,4 y_c^2)(100 + 2 X_c)}{(1 - y_c)(100 + X_c)} \frac{\Delta X_c}{X_c};$$

A.N. : $X_c = 1$; $y_c = 0,047$; $\Delta X_c = 0,05$; $\Delta E = 3,6.10^{-6}$ V.

La précision $\frac{\Delta E}{E} = 3.10^{-3}$ est dans le domaine du possible acceptable et justifie la méthode de mesure.

Chapitre 4 : Solutions aqueuses
appartient aux programmes de MPSI, PCSI(PC et PSI), TPC1

4.1. Equilibres acidobasiques

appartient aux programmes de BCPST1

4.1.1. Premiers pas

1. Soit un litre de solution aqueuse de sulfate de dihydrogène H_2SO_4 de fraction massique égale à 0,86. La masse volumique de la solution est $\rho = 1,78 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.

a. Quelle est la concentration massique en H_2SO_4 ?

b. Quelle est sa concentration molaire ?

Les masses atomiques molaires relatives sont respectivement égales à 32, 16, 1 pour le soufre, l'oxygène, l'hydrogène.

c. Quels volumes de cette solution et d'eau faut-il utiliser pour préparer un litre d'acide sulfurique à $6 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$?

2. Donner avec un chiffre significatif le pH d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique de concentration C dans les trois cas suivants, pour une température de 25°C : $C = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $C = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $C = 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

3. Calculer rapidement :

a. Le pH d'une solution aqueuse d'un litre contenant 0,05 mole d'ammoniac et 0,1 mole d'acide monochloracétique.

b. Le pH d'une solution aqueuse contenant 0,05 mole d'acide chlorhydrique, 0,05 mole de monochloracétate de sodium et 0,10 mole d'ammoniac.

On donne : pour $\text{CH}_2\text{ClCOOH} / \text{CH}_2\text{ClCOO}^-$, $\text{pK}_a = 3,75$.

pour $\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3$, $\text{pK}_a = 9,25$.

4. On verse $13,4 \text{ cm}^3$ de soude à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans 10 cm^3 d'une solution aqueuse d'acide acétique avant d'obtenir le virage de la phénolphthaléine.

a. Quelle est la concentration molaire de la solution initiale d'acide acétique ?

b. Préciser les couleurs des formes acide et basique de la phénolphthaléine.

c. Justifier l'emploi de la phénolphthaléine préférentiellement à celui de l'hélianthine, qualitativement.

5. A 25°C , une solution aqueuse de méthylamine à $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est ionisée à 22,4 %. Calculer le pK_a du couple méthylammonium / méthylamine.

6. On définit le pH : dans l'eau par la relation $\text{pH} = -\log_{10}(\text{H}_3\text{O}^+)$;

dans l'ammoniac liquide par $\text{pH} = -\log_{10}(\text{NH}_4^+)$.

Comment définirait-on le pH dans l'acétate d'hydrogène CH_3COOH ?

Capes

Corrigé

1.a. $(m) = \rho X_m$; A.N. : $(m) = 1,531 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.

b. $(\text{H}_2\text{SO}_4) = \frac{m}{M} \Rightarrow \text{A.N.} : (\text{H}_2\text{SO}_4) = 15,6 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

c. Si on note v_1 le volume d'eau et v_2 le volume de la solution initiale, volumes exprimés en litre, on a :

$$v_1 + v_2 = 1 \text{ et } \frac{v_2}{v_1 + v_2} (\text{H}_2\text{SO}_4) = 6.$$

• *acide monochloracétique, ammoniac liquide, concentration massique, concentration molaire, équilibre acidobasique, fraction massique, méthylamine, méthylammonium, monochloracétate de sodium, pH, phénolphthaléine, solution aqueuse, soufre*

On trouve : $v_1 = 0,62 \text{ dm}^3$; $v_2 = 0,38 \text{ dm}^3$. On supposera la conservation des volumes.

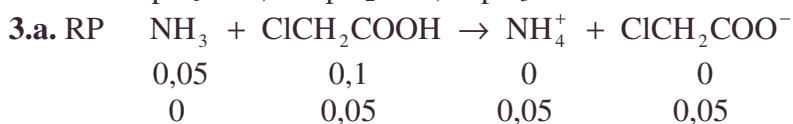
2. • Quand $c \gg 10^{-7}$, l'acidité de l'acide s'impose;

$\text{pH} = -\log c$ c'est le cas en **a.** et **b.**

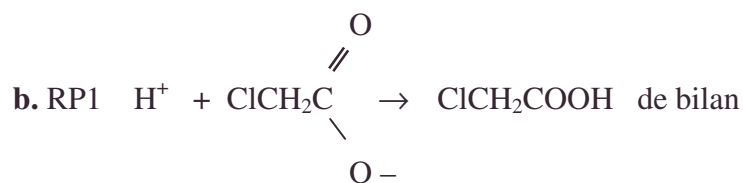
• Quand $c \ll 10^{-7}$, l'acidité de l'eau s'impose.

$\text{pH} = 7$; c'est le cas **c.**

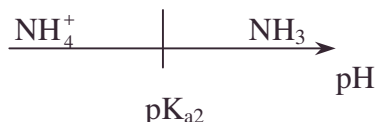
A.N. : **a.** $\text{pH}_1 = 1$; **b.** $\text{pH}_2 = 4$; **c.** $\text{pH}_3 = 7$.



On a une solution tampon : $\text{pH} = \text{pK}_{a1} (\text{ClCH}_2\text{CO}_2\text{H} / \text{ClCH}_2\text{CO}_2^-)$; A.N. : $\text{pH} = 3,75$.



I	0,05	0,05	0
II	0	0	0,05



Il s'agit d'une autre solution tampon : $\text{pH} = \text{pK}_{a2} (\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3)$; A.N. : $\text{pH} = 9,25$.

4.a. On a donc fait le dosage : on a versé autant de OH^- que de H^+ :

$$c_1 = \frac{c_2 v_2}{v_1} ; \text{A.N. } c_1 = 0,134 \text{ mol.l}^{-1}.$$

b. Pour simplifier, la forme acide est incolore ; la forme basique est violette. Le changement de couleur se fait dans l'intervalle $\text{pK} < \text{pH} < \text{pK} + 1$.

c. Le pH à l'équivalence, est ici basique. Le volume versé lors du virage (pH voisin de 9) est beaucoup plus voisin du volume nécessaire à l'équivalence que le volume versé lors du virage de l'hélianthine (pH voisin de 3,5) si on l'utilisait.



bilan	c	0	0
	$c(1-\alpha)$	$c\alpha$	$c\alpha$

$$K_a = \frac{(\text{CH}_3\text{NH}_2)(\text{H}_3\text{O}^+)}{(\text{CH}_3\text{NH}_3^+)} = \frac{(\text{CH}_3\text{NH}_2)}{(\text{CH}_3\text{NH}_3^+)} \frac{K_i}{(\text{OH}^-)} = \frac{1-\alpha}{c\alpha^2} K_i ; \text{A.N.: } \text{pK}_a = 10,81.$$

6. Par analogie formelle avec $\text{H}_2\text{O}_{(l)} + \text{H}^+ \rightarrow \text{H}_3\text{O}^+$, $\text{pH} = -\log(\text{H}_3\text{O}^+)$

• acide borique, acide fluorhydrique, acidité de l'eau, dosage, électrolyte fort, hélianthine, RP, solution tampon, sulfure de sodium

ou $\text{NH}_3(\text{l}) + \text{H}^+ \rightarrow \text{NH}_4^+$, $\text{Ph} = -\log(\text{NH}_4^+)$;

$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}(\text{l}) + \text{H}^+ \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}_2^+$; $\text{pH} = -\log_{10}(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}_2^+)$.

4.1.2. pH d'un mélange Méthode RP

Soit le mélange suivant :

HF (acide fluorhydrique : $\text{pK}_1 = 3,2$) à $0,2 \text{ mol.dm}^{-3}$.

HBO_2 (acide borique : $\text{pK}_2 = 9,15$) à $0,1 \text{ mol.dm}^{-3}$.

Na_2S (sulfure de sodium électrolyte fort donnant les ions Na^+ et S^{2-}) à $0,3 \text{ mol.dm}^{-3}$.
 S^{2-} est une dibase faible : $\text{pK}_3 = 7,0$ et $\text{pK}_4 = 13$.

Les concentrations données sont celles obtenues après mélange.

Calculer le pH du mélange.

Les ions Na^+ sans effet sur l'eau ne figureront pas dans l'analyse.

Autres concours

Corrigé

H_2O		H_3O^+
F^-	3,2	<u>HF</u>
HS^-	7	H_2S
BO_2^-	9,15	<u>HBO_2</u>
<u>S^{2-}</u>	13	HS^-
OH^-		H_2O
	\downarrow	
	pK	

<u>F^-</u>	3,2	<u>HF</u>
<u>HS^-</u>	7	H_2S
BO_2^-	9,15	<u>HBO_2</u>
<u>S^{2-}</u>	13	HS^-
OH^-		H_2O
	\downarrow	
	pK	

1. Soulignons d'un trait les espèces présentes lors de la première analyse en utilisant la méthode de la R.P.

L'acide le plus fort réagit totalement sur la base la plus forte (si $\Delta\text{pK} > 2,5$).

$\text{HF} + \text{S}^{2-} \rightarrow \text{HS}^- + \text{F}^-$ RP1 de bilan

0,2	0,3	0	0
0	0,1	0,2	0,2

2. Soulignons de 2 traits les espèces présentes lors de la 2^{ème} analyse.

L'acide le plus fort réagit totalement sur la base la plus forte (si $\Delta\text{pK} > 2,5$).

$\text{HBO}_2 + \text{S}^{2-} \rightarrow \text{BO}_2^- + \text{HS}^-$ RP2

0,1	0,1	0	0,2
ε	ε	0,1	0,3

$$K'_2 = \frac{(\text{HS}^-)}{(\text{S}^{2-})(\text{H}^+)} \frac{(\text{BO}_2^-)(\text{H}^+)}{(\text{HBO}_2)} = \frac{K_2}{K_3};$$

$$\text{A.N. : } K'_2 = 10^{+13-9,15} = 10^{3,75}$$

$$K'_2 = \frac{0,1 \cdot 0,3}{\varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon = 2,3 \cdot 10^{-3}; \quad \text{la réaction peut être}$$

considérée comme totale.

3. Réactions concurrentes à considérer vu la grande quantité d'eau :



$$K_2'' = \frac{K_e''}{K_2}; \quad \text{A.N. : } K_2'' = 10^{-14+9,15} = 10^{-4,75}; \quad \text{réaction peu déplacée.}$$



$$K_2''' = \frac{K_e'''}{K_3} \quad \text{A.N. : } K_2''' = 10^{-7}, \quad \text{réaction encore moins déplacée.}$$

Le mélange $\text{BO}_2^- + \text{HS}^-$ est stabilisé, rappelant une solution tampon (mélange d'acide et de base au voisinage de l'équimolarité a,a).

$$K_2 K_4 = \frac{(\text{BO}_2^-)(\text{H}^+)}{(\text{HBO}_2)} \cdot \frac{(\text{S}^{2-})(\text{H}^+)}{(\text{HS}^-)} = \frac{0,1}{0,3} (\text{H}^+)^2.$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_1 + \text{pK}_4) + \frac{1}{2} \log \frac{0,1}{0,3};$$

cf. $\text{pH} = \text{pK} + \log \frac{(\text{base})}{(\text{acide})}$ qui ressemble au coefficient 2 près.

$$\text{A.N. : pH} = 11,075 - 0,238 = 10,84.$$

4.1.3. Dosage de l'acide monochloracétique

On dispose d'une solution A d'acide monochloroéthanoïque de concentration molaire $1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Pour l'acide monochloroéthanoïque, de formule ClCH_2COOH , on donne $\text{pK}_A = 2,9$.

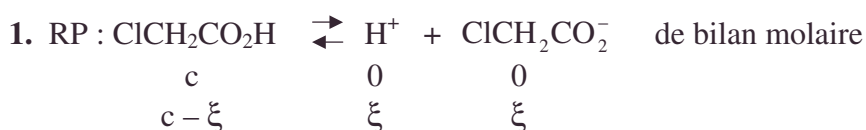
1. Calculer le pH de la solution A.

2. On ajoute 25 cm^3 d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $2,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ à 100 cm^3 de solution A. Calculer le pH du mélange obtenu.

3. Donner une méthode simple qui permet, à partir de la courbe de dosage pH-métrique, de déterminer le pK_A d'un acide faible. Compte tenu des résultats des questions précédentes, peut-on appliquer cette méthode sans précaution au cas de l'acide monochloroéthanoïque ? Pour obtenir une détermination expérimentale simple et précise du pK_A de l'acide étudié, faut-il augmenter ou diminuer la concentration de la solution A ? Justifier la réponse.

Centrale

Corrigé



$$K_A = \frac{(\text{H}^+)(\text{ClCH}_2\text{CO}_2^-)}{(\text{ClCH}_2\text{CO}_2\text{H})} = \frac{(\text{H}^+)^2}{C - (\text{H}^+)}$$

$$\text{A.N. : } (\text{H}^+) = 2,97 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \quad \text{pH} = 2,53.$$

2.a.



$$t = 0 \quad v_1 c_1 = 10^{-3} \quad v_2 c_2 = 5 \cdot 10^{-4} \quad - \quad 0 \quad \text{avec } v_2 c_2 = \frac{v_1 c_1}{2}$$

$$t_f \quad \frac{v_1 c_1}{2} \quad 0 \quad - \quad \frac{v_1 c_1}{2}$$

$$(\text{H}^+) = K_A \frac{(\text{ClCH}_2\text{CO}_2\text{H})}{(\text{ClCH}_2\text{CO}_2^-)} = K_A; \text{A.N. : pH} = \text{pK}_A = 2,9.$$

On peut améliorer le résultat en considérant la RP secondaire et voir l'écart d'estimation pour un acide moyen.



$$c'_0 = \frac{v_1 c_1}{2(v_1 + v_2)} \quad K_A = \frac{v_1 c_1}{2(v_1 + v_2)}$$

$$c'_0 - \xi = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{0,125} - \xi \quad K_A + \xi \quad c'_0 + \xi \Rightarrow K_A = \frac{(K_A + \xi)(c'_0 + \xi)}{(c'_0 - \xi)}$$

avec

$$c'_0 = 4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \text{A.N.} : \xi = 1,12 \cdot 10^{-3} \Rightarrow (\text{H}^+) = 2,485 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \text{pH} = 2,60.$$

3.a. Habituellement on détermine le pH à la demi équivalence. On détermine l'équivalence par le maximum de $\frac{\Delta \text{pH}}{\Delta x}(x)$ à l'aide de l'outil informatique.

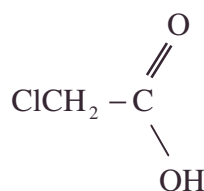
cf : point d'inflexion de $\text{pH} = \text{pH}(x)$.

b. On ne peut le faire avec $\text{ClCH}_2\text{CO}_2\text{H}$ car $2,60 \neq 2,9$; la dissociation de cet acide est trop importante, l'acide n'est pas faible

c. On a $(\text{H}_3\text{O}^+) = K_A$ quand $c'_0 \gg K_A$ car alors ξ est négligeable, soit quand c'_0 augmente tout en restant dans le cadre des solutions diluées.

4.1.4. Dissociation de l'acide monochloroacétique en fonction du pH

I. On dissout 1 mole d'acide monochloroacétique ClCH_2COOH ($\text{pK} = 3$) dans 1 litre d'une eau dont le pH est initialement fixé grâce à l'addition convenable d'ions (les autres ions qui accompagnent nécessairement H^+ et OH^- sont supposés sans action sur l'eau, sur les molécules entières d'acide et sur l'ion $\text{CH}_2\text{ClCO}_2^-$ ci-contre que l'on pourra désigner par A^- , l'acide s'écrit alors AH).



On écrira donc $\text{AH} \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}^+$. Pour les diverses valeurs entières impaires du pH final comprises entre 0 et 7, calculer : $y = (\text{AH})$; $z = (\text{A}^-)$; $\alpha = \frac{(\text{A}^-)}{(\text{AH})}$.

On résumera les résultats dans un tableau et l'on posera $(\text{H}_3\text{O}) = x$.

Quelques commentaires sur les résultats obtenus seraient particulièrement appréciés.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

I.A. Etude du déplacement de $\text{AH} \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}^+$.

α. Bilan molaire $t = 0 \quad 1 \quad 0 \quad ?$
 $t_{\text{éq}} \quad y \quad z = 1 - y \quad x$

β. Ecriture de K_A : $K_A = \frac{(\text{H}^+)(\text{A}^-)}{(\text{AH})} = \frac{x z}{y} = \frac{x(1-y)}{y}$.

γ. Expressions littérales : $x = 10^{-\text{pH}}$; vu K_A , $y = \frac{x}{K_A + x} = \frac{1}{1 + \frac{K_A}{10^{-\text{pH}}}}$;

$$z = 1 - y = \frac{K_A}{K_A + x} = \frac{K_A}{K_A + 10^{-\text{pH}}} ; \alpha = \frac{K_A}{x} = K_A 10^{-\text{pH}}.$$

δ.

pH	1	3	5	7
y	0,9900	0,5000	0,0099	0,0001
z	0,0099	0,5000	0,9900	0,9999
α	0,0100	1,0000	100,00	10000
log α	-2	0	2	4

B. Commentaires pour un acide moyen

a. La droite de Hendersen : $\text{pH} = \text{p}K_A + \log \alpha$ soit $\frac{\Delta \text{pH}}{\Delta \log \alpha} = 1$ est vérifiée ici de

$\alpha = 10^{-2}$ à 10^4 .

b. Un acide moyen de $\text{p}K_A = 3$ est peu dissocié en présence d'acide fort imposant $\text{pH} = 1$ alors qu'il est totalement dissocié à $\text{pH} = 5$.

4.1.5. Dosage de l'acide méthoxyacétique

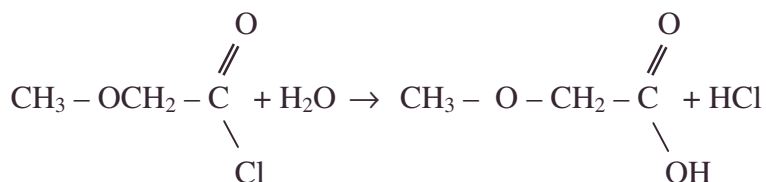
On dispose d'une solution d'acide méthoxyacétique : $\text{CH}_3 - \text{O} - \text{CH}_2 - \text{C} \begin{array}{l} \text{O} \\ \parallel \\ \text{OH} \end{array}$

de concentration $c = 0,1 \text{ mole.L}^{-1}$ et la constante d'acidité de cet acide est $K_A = 3,3 \cdot 10^{-4}$.

1. Calculer le pH de cette solution.

2. On la neutralise par une solution concentrée d'hydroxyde de sodium (le volume de réactif ajouté est négligeable). Calculer le pH du point d'équivalence.

3. On étudie ensuite le chlorure du même acide qui s'hydrolyse totalement dans l'eau selon la réaction :



On en met 10^{-1} mole dans un litre d'eau.

Calculer le pH de la solution.

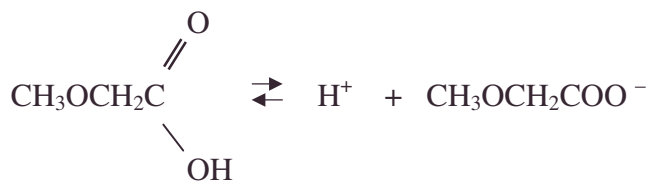
4. On effectue un dosage de cette solution par une base concentrée forte jusqu'à $\text{pH} = 7$. On demande si le résultat obtenu permet de connaître la quantité de chlorure d'acide hydrolysé dans l'eau et d'évaluer l'erreur relative commise.

On devra justifier toutes les expressions littérales utilisées et les approximations effectuées.

CCP ; Durée : 1h

Corrigé

1. On a le diagramme de prédominance : $\frac{\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{COOH}}{\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{COO}^-} \xrightarrow{\text{pH}} \text{pH}$
 $\text{p}K_A = 3,48$

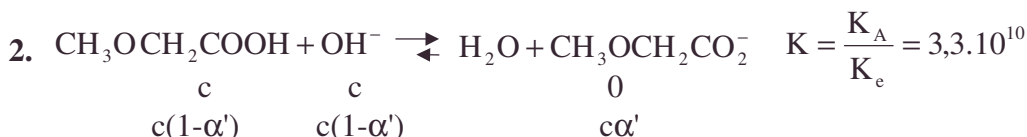


Bilan : $c = 0,1$ ε 0 ; $K_A = \frac{(c\alpha)(c\alpha + \varepsilon)}{c(1 + \alpha)}$

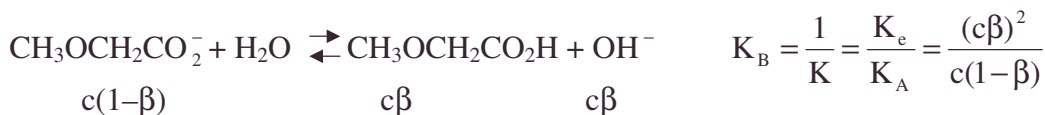
En négligeant l'acidité de l'eau $\varepsilon \ll c\alpha$. Vu la faiblesse de K_A : $\alpha \ll 1$, il reste :

$$K_A = \frac{(\text{H}^+)^2}{c} ; \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_A + \text{pc}) ; \text{AN} : \text{pH} = 2,24.$$

Justification : $\text{pH} < \text{p}K_A - 1$ avec $\text{p}K_A = 3,48$. On a bien $\alpha \ll 1$.



On reconnaît le problème du pH de $\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CO}_2^-$ de coefficient de dissociation $\beta = 1 - \alpha' \neq 0$.



On a négligé la basicité de l'eau. Vu la faible valeur de K_B , $\beta \ll 1$ $K_B = \frac{(\text{OH}^-)^2}{c}$.

$$\text{pOH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_B + \text{pc}) \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_e + \text{p}K_A - \text{pc}) ; \text{AN} : \text{pH} = 8,24.$$

Justification : $\text{pH} > \text{p}K_A + 1$. On a bien $\beta \ll 1$.

3. On a un mélange équimolaire d'acide fort et d'acide faible, l'acide fort impose son pH (la dissociation de l'acide faible régresse). $\text{pH} = \text{pc}$ AN : $\text{pH} = 1$.

L'apport de (H^+) venant de $\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CO}_2\text{H}$ vaut $(\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CO}_2^-)$;

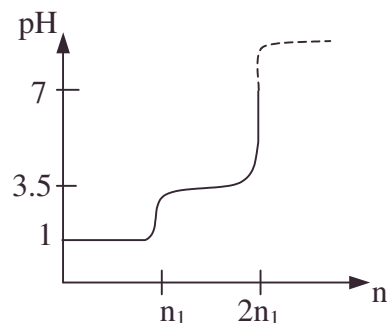
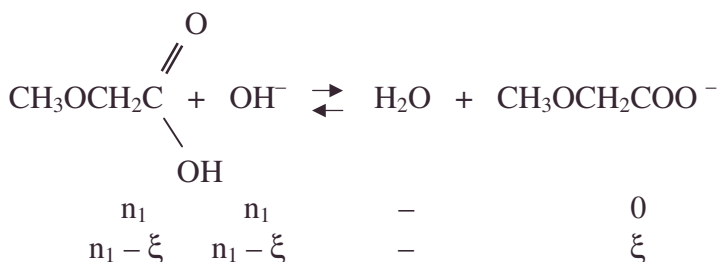
$$(\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CO}_2^-) = (\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CO}_2\text{H}) \frac{K_A}{(\text{H}^+)}.$$

$$\text{AN} : (\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CO}_2^-) = \frac{10^{-1} \cdot 3,3 \cdot 10^{-4}}{10^{-1}} = 3,3 \cdot 10^{-4}. \text{ On a négligé } 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ devant } 10^{-1}.$$

4. On a l'allure de la courbe de titrage pour n_1 mole hydrolysée de $\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{COCl}$ par litre.

On titre d'abord HCl puis $\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{COOH}$.

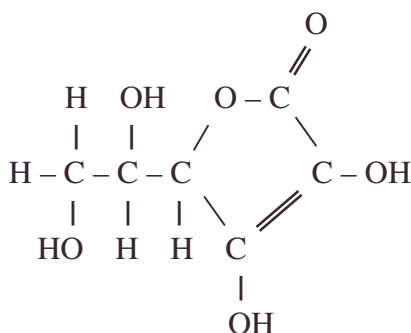
$\text{pH} = 7$ appartient au front de la 2^e neutralisation, celle de $\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CO}_2\text{H}$ dont le saut est plus grand et facile à détecter



à pH = 7, on a : $n_1 - \xi = 10^{-7}$; $\xi \# n_1 = 0,1$.

On a une erreur relative $\frac{n_1 - \xi}{n_1} = \frac{(\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{COOH})}{(\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{COO}^-)} = \frac{(\text{H}^+)}{K_A} = \frac{10^{-7}}{3,3 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 10^{-4}$.

4.1.6. Dosage de l'acide ascorbique



Le vitascorbol est un médicament, vendu sous forme de comprimés, contenant de la vitamine C. Celle-ci est un composé organique, l'acide ascorbique, de formule ci-contre :

L'objet du problème est d'étudier les propriétés acido-basiques de l'acide ascorbique.

Etude des propriétés acido-basiques de la solution aqueuse d'acide ascorbique

L'acide ascorbique peut être considéré comme un monoacide faible, symbolisé par HA, de force comparable à celle de l'acide acétique. Le produit ionique de l'eau est désigné par K_e , avec $pK_e = 14$, dans les conditions de l'expérience.

On écrase un comprimé de vitascorbol 500, on le place dans une fiole jaugée de 100 cm^3 et on y ajoute de l'eau distillée jusqu'au trait de repère.

L'acide ascorbique se dissout ; il reste en suspension quelques particules solides constituant l'excipient du comprimé ; ce résidu insoluble ne présente aucun inconvénient pour l'expérience. La solution obtenue sera désormais désignée par S, sa molarité en acide ascorbique sera notée C_1 . On ajoute au volume $V_1 = 100 \text{ cm}^3$ de S quelques gouttes d'un indicateur coloré : le rouge de crésol. On suit enfin, à l'aide d'un pH-mètre, l'évolution du pH lorsqu'on verse progressivement dans S une solution aqueuse de soude de molarité $C_2 = 0,33 \text{ mol.L}^{-1}$. On appelle V le volume de solution de soude versé.

1. Le virage, du jaune au rouge, du rouge de crésol, qui permet de repérer le point d'équivalence, se produit pour un volume versé $V = V_e = 8,6 \text{ cm}^3$.

En déduire le nombre de moles n et la masse m d'acide ascorbique contenus dans un comprimé. La masse molaire de l'acide ascorbique est $M = 176,13 \text{ g.mol}^{-1}$.

2. On note au cours de la manipulation les relevés suivants :

V cm^3	3	3,5	4	4,5	5	5,5
pH	3,82	3,93	4,03	4,14	4,24	4,35

La résolution en pH est 0,02 unité pH.

Déduire des données précédentes, en expliquant la démarche suivie et en justifiant à posteriori d'éventuelles approximations faites a priori, la valeur expérimentale du pK_A de l'acide ascorbique.

Dans la suite du problème, on utilisera en fait la valeur $pK_A = 4,10$.

3. Ecrire l'équation bilan de la réaction de dosage de l'acide ascorbique par la soude. Calculer la valeur numérique de la constante de cette réaction. Conclusion.

4. Retrouver, par une approche théorique, les valeurs que l'on a dû lire sur le pH-mètre au cours du dosage pour les valeurs suivantes de V (cm^3) :

a. $V = 0$;

b. $V = 1$; $V = 2$; $V = 7$; $V = 8$;

c. $V = V_e = 8,6$;

d. $V = 9,5$; $V = 11$; $V = 13$.

5. Tracer le graphe complet de la courbe $\text{pH} = f(V)$.

6. Justifier le choix de l'indicateur coloré utilisé si l'on admet que sa zone de virage est $(7,2 - 8,8)$.

7. On substitue au comprimé de vitascorbol 500 un cachet de vitascorbol 500 tamponné. Chaque cachet contient 247,2 mg d'acide ascorbique et 284,4 mg d'ascorbate de sodium dont la masse molaire est de $M' = 198,11 \text{ g.mol}^{-1}$.

a. Quel est le pH de la solution S' obtenue en dissolvant un cachet de vitascorbol 500 tamponné dans 100 cm^3 d'eau distillée ? (On ne se contentera pas d'une affirmation).

b. Rapprocher l'état de la solution S' d'un état particulier de la solution S au cours du dosage.

c. Qu'appelle-t-on solution tampon ?

d. Evaluer par lectures directes sur le graphe de la courbe $\text{pH} = f(V)$ puis par calcul la quantité $\left(\frac{d\text{pH}}{dV} \right)_{V=\frac{V_e}{2}}$.

Centrale ; Durée 1h

Corrigé

1. $n_{\text{HA}}^0 = C_2 V_2 = 2,87 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$; $m_{\text{HA}} = M_{\text{HA}}^0 = 0,504 \text{ g}$.

La formule du dosage d'acide par base mole à mole est : $C_1 V_1 = C_2 V_2$.

On en déduit $C_1 = 0,0287 \text{ mol.L}^{-1}$.

2.a. On trouve par interpolation pour $V_{1/2\text{eq}} = \frac{V_e}{2}$; AN : $V = 4,3 \text{ cm}^3$

d'où par interpolation linéaire, $\text{pK}_1 = \text{pH}_{4\text{cm}^3} + \text{pH}_{4,5\text{cm}^3} - \text{pH}_{4,3\text{cm}^3}$;

$\text{dpK}_1 = \frac{2}{5} \text{dpH}_{4\text{cm}^3} + \frac{3}{5} \text{dpH}_{4,5\text{cm}^3}$; $\Delta \text{pK}_1 = \Delta \text{pH}$;

A.N. : $\text{pH} = \text{pK}_1 = 4,10$ à $0,02$ près.

b. Approximations : HA acide plus fort que H_2O mais néanmoins faible ce qui est justifié par le calcul précédent et par l'analogie avec $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$.



$K = \frac{(\text{A}^-)}{(\text{OH}^-)(\text{HA})} = \frac{K_A}{K_e}$; AN : $K = 7,94 \cdot 10^9$; la réaction est quasi totale (RPQ).



$\begin{array}{ccc} C_1 - \xi & \xi & \xi \end{array} \quad K_A = \frac{(\text{H}^+)^2}{C_1} \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_A + \text{pC}_1)$;

A.N. : $\text{pH} = 2,82$.



or $\text{pH} = \text{pK}_A + \log \frac{(\text{A}^-)}{(\text{HA})}$; $\text{pH} = \text{pK}_A + \log \frac{C_2 V}{C_1 V_1 - C_2 V}$;

• base faible, base forte, interpolation

A.N. :

V	1	2	7	8
pH	3,22	3,58	4,74	5,22

c. $V = V_e$; c'est le pH d'une solution de la base faible A^- .

$$A^- + H_2O \rightleftharpoons AH + OH^-$$

C_2V_2	–	0	0
$C_eV_e - \xi$	–	ξ	ξ

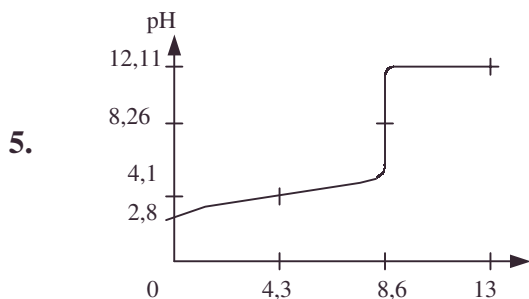
$$K = \frac{(OH^-)(H^+)(AH)}{(A^-)(H^+)} = \frac{K_e}{K_A} = \frac{K_e^2}{(H^+)^2(A^-)} \text{ en remplaçant } (OH^-) \text{ et } (AH) ;$$

$$\Rightarrow pH = \frac{1}{2}(pK_e + pK_A + \log(A^-)) \text{ avec } (A^-) = \frac{C_2V_e}{(V_1 + V_e)} ; ;$$

AN : $(A^-) = 2,64 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$; $pH = 8,26$.d. $V > V_e$; on a une solution de base forte de concentration où il reste

$$(OH^-) = \frac{C_2V - C_2V_e}{V_1 + V}.$$

$$(\text{on néglige } A^- \text{ base plus faible}). \quad (H^+) = \frac{K_e}{(OH^-)} \Rightarrow pH = pK_e + \log \frac{C_2V - C_2V_e}{V + V_1}$$



V	9,5	11	13
pH	11,43	11,86	12,11

6. Le rouge de crésol convient donc sans ambiguïté car le pH de l'équivalence appartient au domaine de son changement de couleur.

$$7.a. n_i = \frac{m_i}{M_i} ; n'_{HA_0} = 1,404 \cdot 10^{-3} \text{ mol} ; n'_{A_0^-} = 1,436 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

On a une solution tampon, les concentrations se conservent.

$$pH = pK_A + \log \frac{n'_{A_0^-}}{n'_{HA_0}} ; \text{A.N. : } pH = 4,11.$$

b. C'est l'état à la demi équivalence.

c. Une solution tampon est une solution dont le pH varie peu pour un ajout faible d'eau, de base ou d'acide.

$$d. \text{Lecture directe : } \frac{\Delta pH}{\Delta V} = \frac{(4,35 - 3,82)}{5,5 - 3} = 0,21 \text{ cm}^{-3}.$$

$$\frac{dpH}{dV} = \frac{C_1V_1}{2,3V(C_1V_1 - C_2V)} ; \left(\frac{dpH}{dV} \right)_{\frac{V_e}{2}} = \frac{4}{2,3V_e} ; \text{AN : } \left(\frac{dpH}{dV} \right)_{\frac{V_e}{2}} = 0,20 \text{ cm}^{-3}.$$

A 5% près, les deux estimations concordent.

4.1.7. Dosage d'un mélange de deux acides faibles

Il est demandé à l'étudiant d'établir toutes les formules nécessaires.

On considère l'acide acétique CH_3COOH (I), l'acide chloroacétique ClCH_2COOH (II) et l'acide formique HCOOH (III).

Les constantes d'acidité sont : $K_1 = 1,8 \cdot 10^{-5}$, $K_2 = 1,4 \cdot 10^{-3}$ et $K_3 = 1,8 \cdot 10^{-4}$ respectivement.

1. Calculer et tracer la courbe de neutralisation obtenue quand on ajoute une solution $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ de soude à 40 cm^3 d'une solution à $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ d'acide (I) (pH initial, pH au point équivalent, pH correspondant à différents volumes ajoutés).

2. Quel est le coefficient de dissociation de l'acide (I) à une concentration de $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$? Même question pour l'acide (II) à une concentration $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et pour l'acide (III) à une concentration $5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

3. On mélange les deux acides (I) et (III) pour obtenir une concentration $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ en acide (I) et $5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ en acide (III).

a. Quel est le pH obtenu ?

b. Que deviennent les coefficients de dissociation des deux acides ?

c. Pouvez-vous vérifier la valeur de pH trouvée à la question 3.a. ?

4. On considère une solution $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ en acide acétique et $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ en acétate de sodium.

a. Quel est le pH de la solution ?

b. On ajoute 10 cm^3 d'une solution de soude $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ à 40 cm^3 de la solution précédente. Quelle est la nouvelle valeur du pH ?

5. Quel est le pH d'une solution $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ d'acétate d'ammonium ? La constante d'acidité de NH_4^+ est de 10^{-9} .

CCP ; Durée : 1h30

Corrigé

On a le bilan molaire :

CH_3COOH	+	OH^-	\rightleftharpoons	H_2O	+	CH_3COO^-
4.10 ⁻⁴		V 10 ⁻⁵		-		0
V < 40		EF 10 ⁻⁵ (40 - V)		0		- V 10 ⁻⁵

avec $K_1 = \frac{(\text{H}^+)(\text{CH}_3\text{COO}^-)}{(\text{CH}_3\text{COOH})}$.

1.a. $V = 0 \text{ cm}^3$.

CH_3COOH	\rightleftharpoons	H^+	+	CH_3COO^-	RP
4.10 ⁻⁴		-		-	

4.10 ⁻⁴ - ξ	ξ	ξ	$K = \frac{\xi^2}{c}$ avec $c = 4 \cdot 10^{-4}$.
----------------------------	-------	-------	--

On a une solution d'acide faible : $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}c)$ A.N. : $\text{pH} = 3,4$.

$0 < V < 40$ $\text{pH} = \text{p}K_1 + \log \frac{V}{40 - V}$

b. $V = 10 \text{ cm}^3$

A.N. : $\text{pH} = 4,2$.

c. $V = 20 \text{ cm}^3$

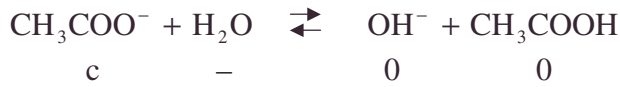
$\text{pH} = \text{p}K_1$

A.N. : $\text{pH} = 4,7$.

d. $V = 30 \text{ cm}^3$

e. $V = 40 \text{ cm}^3$.

A.N. : $\text{pH} = 5,2$.



$$\begin{array}{ccc} c & - & 0 \\ c - \xi_1 & - & \xi_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \xi_1 & & \xi_1 \end{array}$$

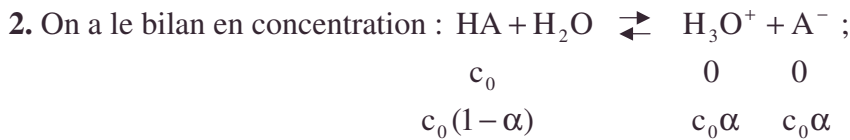
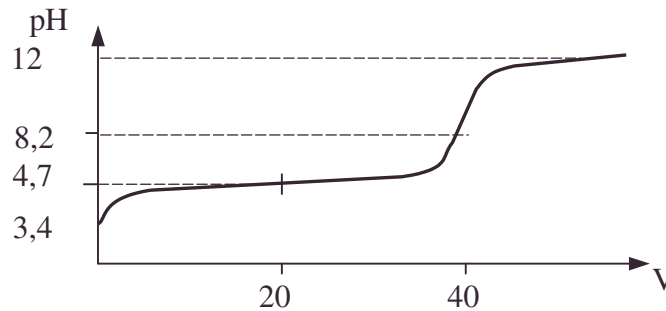
$$K = \frac{K_e}{K_1} = \frac{\xi_1^2}{c}$$

On a une solution de base faible CH_3COO^-

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_e + \text{p}K_1 - \text{pc}) \quad \text{A.N. : } \text{pH} = 8,2.$$

f. $V = 80 \text{ cm}^3$. On a le pH imposé par la concentration de OH^- base forte prépondérante devant CH_3COO^- ; $(\text{H}^+) = \frac{K_e}{(\text{OH}^-)}$ avec $(\text{OH}^-) = 10^{-5} \frac{(V-40)}{(V+40)}$.

$$\text{pH} = \text{p}K_e - \log \frac{V-40}{40+V} \quad \text{A.N. : } \text{pH} = 11,5.$$



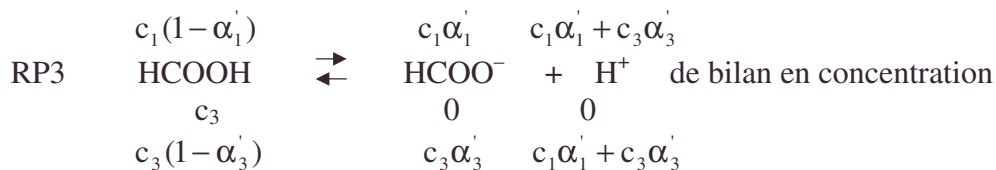
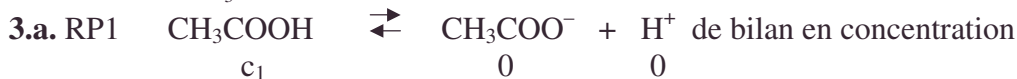
$$K_A = \frac{(\text{H}_3\text{O}^+)(\text{A}^-)}{(\text{HA})} = \frac{c_0\alpha^2}{1-\alpha} \quad \text{or } \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-K_A + \sqrt{K_A^2 + 4K_A c}}{2c}$$

A.N. : I $\alpha_1 = 4,15 \cdot 10^{-2}$.

II $\alpha_2 = 3,11 \cdot 10^{-1}$.

III $\alpha_3 = 1,73 \cdot 10^{-1}$.



Posons $h = (\text{H}_3\text{O}^+)$:

α . Méthode avec approximation

On a des acides faibles : $\alpha'_1 \ll 1$; $\alpha'_3 \ll 1$.

$$h = c_1 \alpha'_1 + c_3 \alpha'_3 = (\text{CH}_3\text{COO}^-) + (\text{HCOO}^-) = \frac{K_1 c_1}{(H^+)} + \frac{K_3 c_3}{(H^+)} \text{ car } (\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}) = c_1$$

et $(\text{HCCOOH}) = c_3$.

$$\Rightarrow h^2 = K_1 c_1 + K_3 c_3 ; \text{pH} = -\frac{1}{2} \log(K_1 c_1 + K_3 c_3) ; \text{A.N. : pH} = 2,98.$$

β. Méthode moins approximative
Conservation des éléments.

- $c_1 = (\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}) + (\text{CH}_3\text{CO}_2^-) ; K_1 = \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)h}{c_1 - (\text{CH}_3\text{CO}_2^-)} \Rightarrow (\text{CH}_3\text{CO}_2^-) = \frac{K_1 c_1}{K_1 + h}.$
- $c_3 = (\text{HCO}_2\text{H}) + (\text{HCO}_2^-) ; K_3 = \frac{(\text{HCO}_2^-)h}{c_3 - (\text{HCO}_2^-)} \Rightarrow (\text{HCO}_2^-) = \frac{K_3 c_3}{K_3 + h}.$

Ecrivons l'électroneutralité de la solution :

$$(\text{OH}^-) + (\text{HCO}_2^-) + (\text{CH}_3\text{CO}_2^-) = (\text{H}_3\text{O}^+) \Rightarrow \cancel{\frac{K_e}{h}} + \frac{K_1 c_1}{K_1 + h} + \frac{K_3 c_3}{K_3 + h} = h \text{ car } (\text{OH}^-) \ll h$$

en milieu acide. On ne néglige plus de fait K_1 et K_3 devant h .

$$\frac{K_3 c_3}{K_3 + h} + \frac{K_1 c_1}{K_1 + h} = h \Rightarrow h = 9,7 \cdot 10^{-4} ; \text{pH} = 3,02.$$

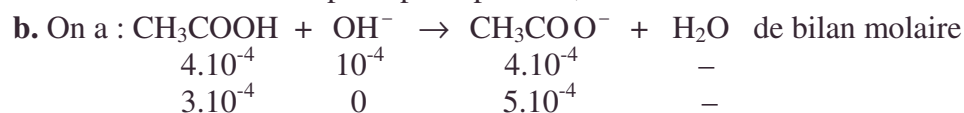
On tient surtout compte de la dilution et donc de la dissociation plus grande de l'acide le plus faible III ce qui a un petit effet.

b. $(\text{CH}_3\text{COO}^-) = c_1 \alpha'_1 = \frac{K_1 c_1}{K_1 + h} \Rightarrow \alpha'_1 = \frac{K_1}{h + K_1} ; \text{A.N. : } \alpha'_1 = 1,82 \cdot 10^{-2}.$

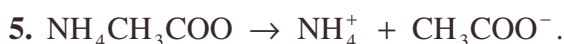
$$(\text{HCOO}^-) = c_3 \alpha'_3 = \frac{K_3 c_3}{K_3 + h} \Rightarrow \alpha'_3 = \frac{K_3}{h + K_3} ; \text{A.N. : } \alpha'_3 = 1,56 \cdot 10^{-1}.$$

c. $h = (\text{HCO}_2^-) + (\text{CH}_3\text{CO}_2^-) = c_3 \alpha'_3 + c_1 \alpha'_1 = 9,62 \cdot 10^{-4} ; \text{pH} = 3,02.$ Vérification plus simple.

4.a. On a une solution tampon : $\text{pH} = \text{p}K_1 = 4,74.$

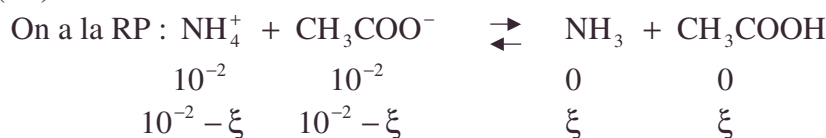


Au voisinage de l'équimolarité : $\text{pH} = \text{p}K_1 + \log \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)}{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})} ; \text{pH} = 4,96.$



Les sels d'ammonium sont très solubles ce qui explique l'absence du $\text{p}K_s$ dans un énoncé où les solutions sont diluées.

(H^+) est minoritaire.



$$K_1 K_{\text{NH}_4^+/\text{NH}_3} = \frac{(\text{H}^+)(\text{NH}_3)(\text{H}^+)(\text{CH}_3\text{COO}^-)}{(\text{NH}_4^+)(\text{CH}_3\text{COOH})} = (\text{H}^+)^2$$

$$\Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_1 + \text{p}K_{\text{NH}_4^+/\text{NH}_3}) ; \text{A.N. : pH} = 6,87$$

• *acide bicarboxylique, équimolarité, minoritaire, solution tampon*

4.1.8. Acide bicarboxylique 1

dont les deux fonctions sont totalement indépendantes

1. Soit un diacide AH_2 de constantes d'acidité K_1 et K_2 telles que $K_1 = 4K_2 = 10^{-4.2}$.



On neutralise une solution à $c \text{ mol.L}^{-1}$ de ce diacide par une soude très concentrée et on désigne par $2cx$ le nombre de moles de soude introduit par litre de solution initiale.

On pose : $K = 2K_2 = \frac{K_1}{2}$; $[\text{H}^+] = h$; $[\text{OH}^-] = oh$.

Montrer sans approximation qu'au cours du dosage x est lié à h par une relation que l'on

mettra sous la forme $x = f\left(\frac{h}{K}\right) + \frac{oh - h}{2c}$.

2. Soit un monoacide BH de constante d'acidité $K = 10^{-4.5}$. On neutralise une solution à $2c \text{ mol.L}^{-1}$ de ce monoacide par une soude très concentrée et on désigne par $2cx$ le nombre de moles de soude introduit par litre de solution initiale.

Déterminer comme ci-dessus la relation liant x , h et oh .

Conclure.

3. La condition $K_1 = 4K_2$ est réalisée avec les diacides carboxyliques symétriques à chaîne assez longue pour que la deuxième ionisation ne soit pas influencée par la première. Démontrer ce résultat. On propose la démarche suivante.

Imaginons que l'on puisse distinguer les deux sites portant les hydrogènes acides.

On pose : $\text{HAH} \rightleftharpoons \text{HA}^- + \text{H}^+$, de constante K



Relier K_1 et K . Reprendre le raisonnement avec A^{2-} et conclure.

4. Calculer $\Delta_r S_1^0 - \Delta_r S_2^0$, différence entre les entropies standards des réactions 1 et 2 de la question 1.

Autres concours ; Durée : 1h30

Corrigé

1. On a les relations :

$$\bullet K_1 = \frac{(\text{AH}^-)(\text{H}^+)}{(\text{AH}_2)} \Rightarrow (\text{AH}^-) = 2(\text{AH}_2) \frac{K}{h}.$$

$$\bullet K_2 = \frac{(\text{A}^{2-})(\text{H}^+)}{(\text{AH}^-)} \Rightarrow (\text{A}^{2-}) = \frac{K}{2h} (\text{AH}^-) \Rightarrow (\text{A}^{2-}) = (\text{AH}_2) \left(\frac{K}{h}\right)^2.$$

$$\bullet \text{Electroneutralité : } (\text{AH}^-) + 2(\text{A}^{2-}) + (\text{OH}^-) = (\text{H}^+) + (\text{Na}^+)$$

• Conservations des éléments :

$$\alpha. (\text{Na}^+) = 2cx.$$

$$\beta. c = (\text{AH}_2) + (\text{AH}^-) + (\text{A}^{2-}) = (\text{AH}_2) \left(1 + 2\frac{K}{h} + \frac{K^2}{h^2}\right) \text{ et on tire de } \beta :$$

$$\Rightarrow (AH_2) = \frac{c}{1 + 2\frac{K}{h} + \frac{K^2}{h^2}} = \frac{c\left(\frac{h}{K}\right)^2}{\left(\frac{h}{K}\right)^2 + 2\frac{h}{K} + 1} \text{ d'où par } K_1 : (AH^-) = \frac{2c\frac{h}{K}}{1 + 2\frac{h}{K} + \left(\frac{h}{K}\right)^2},$$

$$\text{et par } K_2 : (A^{2-}) = \frac{c}{1 + 2\frac{h}{K} + \left(\frac{h}{K}\right)^2};$$

$$\text{l'électroneutralité permet de tirer : } x = \frac{oh - h}{2c} + \frac{1}{1 + \frac{h}{K}}.$$

Conclusion : $f(z) = \frac{1}{1+z}$ avec $z = \frac{h}{K}$ sans aucune approximation.

$$2. BH \rightleftharpoons H^+ + B^- ; \text{ on a les relations : } K = \frac{(H^+)(B^-)}{(BH)} \Rightarrow (B^-) = (BH) \frac{K}{h}.$$

• Conservations :

$$\alpha. (Na^+) = 2cx ;$$

$$\beta. 2c = (B^-) + (BH) \Rightarrow (BH) = \frac{2c}{1 + \frac{K}{h}}.$$

• Electroneutralité : $(OH^-) + (B^-) = (H^+) + (Na^+).$

$$\text{On tire : } x = \frac{oh - h}{2c} + \frac{1}{1 + \frac{h}{K}}.$$

Conclusion : vu l'identité trouvée, le diacide se comporte comme un monoacide BH pendant le titrage.

$$3.a. HAH \rightleftharpoons HA^- + H^+ ; K = \frac{(HA^-)(H^+)}{(AH_2)}.$$

$$HAH \rightleftharpoons AH^- + H^+ ; K' = \frac{(AH^-)(H^+)}{(AH_2)}.$$

Comme on ne peut distinguer HA^- de AH^- thermodynamiquement,

$$\Rightarrow (HA^-) = (AH^-) \Rightarrow K = K',$$

$$\text{et } (HA^-)_{\text{total}} = (HA^-) + (AH^-) = K \frac{(AH_2)}{h} + K' \frac{(AH_2)}{h} = \frac{K_1}{h} (AH_2)$$

$$\Rightarrow K_1 = K + K' = 2K.$$

b. De même pour la deuxième ionisation,

$$AH^- \rightleftharpoons A^{2-} + H^+ ; K'' = \frac{(A^{2-})(H^+)}{(AH^-)}.$$

$$HA^- \rightleftharpoons A^{2-} + H^+ ; K''' = \frac{(A^{2-})(H^+)}{(HA^-)}.$$

Vu l'indiscernabilité thermodynamique : $K'' = K'''$, et vu l'indépendance des ionisations, $K'' = K$, on a même bilan thermodynamique (cf. même disponibilité en H^+).

• *électroneutralité, indiscernabilité, sans approximation*

$$(\text{HA}^-)_{\text{total}} = (\text{HA}^-) + (\text{A}^{2-}) = (\text{A}^{2-}) \frac{h}{K} + (\text{A}^{2-}) = \frac{h}{K} = 2(\text{A}^{2-}) \frac{h}{K^2} \Rightarrow K_2 = \frac{K}{2} \text{ (cf. 1.)}$$

c. Conclusion : $K_1 = 4K_2 \quad \forall T$.

$$4. \Delta_r S^0 = -\frac{d}{dT} \Delta_r G^0 ; \Delta_r G^0 = -RT \ln K ; \Delta_r S_1^0 - \Delta_r S_2^0 = \frac{d}{dT} [RT(\ln K_1 - \ln K_2)] ;$$

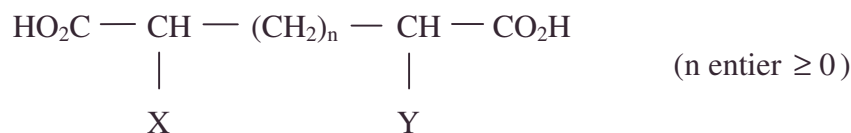
$$\Delta_r S_1^0 - \Delta_r S_2^0 = \frac{d}{dT} [RT \ln 4] = R \ln 4 ; \text{AN : } \Delta_r S_1^0 - \Delta_r S_2^0 = 11,52 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

On voit la part plus importante dans l'équilibre de la 1^{ère} acidité.

4.1.9. Acide bicarboxylique 2

I. Le groupe carboxyle $-\text{CO}_2\text{H}$ peut se déprotoner en solution aqueuse selon le schéma général E_1 ci-dessous : $\text{R}-\text{CO}_2\text{H} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{R}-\text{CO}_2^- + \text{H}_3\text{O}^+$, ce qui lui confère des propriétés d'acide plus ou moins fort.

Le composé A, de formule semi-développée :



où X et Y sont des substituants différents ou non, est donc un diacide, dont on abrégera la formule en $\text{HBB}'\text{H}$, l'accent du second B traduisant la dissymétrie éventuelle des extrémités de A. Ce diacide peut fournir deux monoanions $^-\text{BB}'\text{H}$ et HBB'^- et un dianion $^- \text{BB}'^-$ selon le schéma E_2 suivant, où k_1 , k_2 , k'_1 et k'_2 sont des constantes d'équilibre (ou constantes d'acidité).

les indices 1 et 2 concernent respectivement la première et la seconde acidité ; l'accent est relatif au carboxyle de droite.

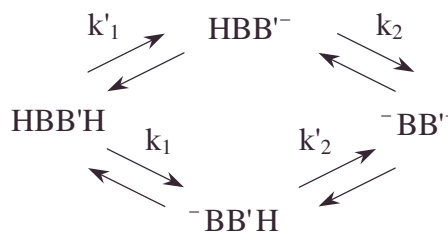


schéma E_2

1. Expérimentalement, on détermine seulement une constante globale K_1 pour la première acidité et une constante globale K_2 pour la seconde.

Donner de K_1 et de K_2 des expressions de définition faisant intervenir pour les monoanions une concentration totale $(^-\text{BB}'\text{H}) + (\text{HBB}'^-)$.

Dans tout le problème on négligera les corrections d'activité.

2.a. Relier les constantes K_1 et K_2 aux constantes k_1 , k_2 , k'_1 et k'_2 .

b. Indiquer d'autres relations simples entre les six constantes en cause.

c. Les diverses relations obtenues en 2.a. et 2.b. sont-elles indépendantes ?

Parmi les six constantes en cause, combien sont indépendantes ?

3. On étudie le cas où l'entier n est grand : dans la molécule A, et dans les anions qui en dérivent, les groupes fonctionnels terminaux sont alors assez éloignés pour qu'on puisse négliger leur influence mutuelle.

a. Quelles relations supplémentaires cette hypothèse entraîne-t-elle pour les constantes k_1 , k_2 , k'_1 , k'_2 ?

b. Montrer que dans ces conditions, la valeur du rapport k'_1/k_1 , qui compare les acidités des deux carboxyles, détermine celle du rapport K_1/K_2 .

c. Représenter graphiquement les variations de K_1/K_2 en fonction de k'_1/k_1 .

• *activité, carboxyle, déprotonation, dianion, graphe, seuil*

d. Commenter les situations correspondant aux valeurs maximale et minimale de K_1/K_2 .

4. On étudie maintenant le cas d'un diacide A symétrique ($X = Y$), la chaîne carbonée ayant une longueur quelconque : dans ces conditions, l'influence mutuelle des groupes fonctionnels terminaux peut ne plus être négligeable.

a. Quelles relations entre les constantes k_1, k'_1, k_2, k'_2 s'ajoutent-elles à celles obtenues en I.2. pour remplacer celles obtenues en I.3.a. ?

b. Exprimer K_1/K_2 en fonction de k_1/k_2 . Dans le cas d'un acide à chaîne très longue, (n grand), vérifier l'accord du résultat obtenu avec celui que la réponse à I.3.c. fournit dans les mêmes conditions.

c. L'expérience fournit les valeurs suivantes :

- Pour l'acide butanedioïque $\text{HO}_2\text{C}-(\text{CH}_2)_2-\text{CO}_2\text{H}$, $\text{p}K_1 = 4,2$; $\text{p}K_2 = 5,6$;
- Pour l'acide octanedioïque $\text{HO}_2\text{C}-(\text{CH}_2)_6-\text{CO}_2\text{H}$, $\text{p}K_1 = 4,5$; $\text{p}K_2 = 5,4$.

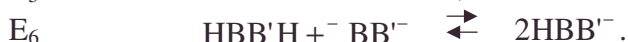
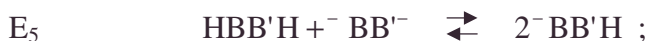
En outre, pour l'acide oxalique $\text{HO}_2\text{C}-\text{CO}_2\text{H}$, on trouve $\text{p}K_1 = 1,2$ et $\text{p}K_2 = 4,1$.

Comment ces données expérimentales illustrent-elles les résultats précédents ?

II. On considère encore le diacide A et le schéma de déprotonation E_2 .

1. Des équilibres figurés en E_2 vu I. résulte en particulier l'équilibre E_3 entre monoanions : ${}^-\text{BB}'\text{H} \rightleftharpoons \text{HBB}'^-$. Exprimer la constante K_3 de cet équilibre en fonction des constantes d'acidité appropriées. Le rapport des concentrations des monoanions dépend-il de la concentration en diacide A ? Dépend-il du pH ?

2. Parmi les équilibres résultant du schéma E_2 , il y a aussi :



Exprimer les constantes respectives K_4, K_5 et K_6 de ces équilibres en fonction des constantes d'acidité appropriées.

3. On forme la quantité : $K = \frac{(({}^-\text{BB}'\text{H}) + (\text{HBB}'^-))^2}{(\text{HBB}'\text{H})({}^-\text{BB}'^-)}$ où figure la concentration

globale en monoanions déjà envisagée en I.1.

Montrer que K est liée de façon très simple à K_1 et K_2 .

4. On considère à nouveau le cas d'un diacide A à la fois très long (n grand) et symétrique ($X = Y$) et on étudie l'équilibre E_7 : diacide + dianion \rightleftharpoons 2 monoanion.

a. A partir des relations établies en II.2. et II.3., on obtient pour la constante K_7 de cet équilibre deux valeurs différentes. Quelle est la valeur correcte ?

Où se situe l'erreur qui conduit à l'autre valeur ?

b. Pour la réaction associée à E_7 , donner les expressions de $\Delta_r G^0, \Delta_r H^0$ et $\Delta_r S^0$, puis calculer leurs valeurs à 25°C (On prendra $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$).

Ecole Polytechnique ; Durée : 2h

Corrigé

I.1. Expressions de définition : par analogie avec un diacide :

$$K_1 = \frac{(\text{H}^+)(({}^-\text{BB}'\text{H}) + (\text{HBB}'^-))}{(\text{HBB}'\text{H})} \quad \text{cf. } \text{H}_2\text{A} \rightleftharpoons \text{HA}^- + \text{H}^+ ;$$

$$K_2 = \frac{({}^-\text{BB}'^-)(\text{H}^+)}{(({}^-\text{BB}'\text{H}) + (\text{HBB}'^-))} . \quad \text{cf. } \text{HA}^- \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}^+ ;$$

• *acide butanedioïque, acide octanedioïque, acide oxalique, déprotonation, dianion*

$$2.a.\alpha. k'_1 = \frac{(H^+)(HBB'^-)}{(HBB'H)} ; k_1 = \frac{(H^+)(^-BB'H)}{(HBB'H)} ;$$

$$\beta. k_2 = \frac{(^-BB'^-)(H^+)}{(HBB'^-)} ; k'_2 = \frac{(^-BB'^-)(H^+)}{(^-BB'H)} ;$$

En formant l'expression $(^-BB'H) + (HBB'^-)$ on peut identifier.

$$K_1 = k'_1 + k_1 \quad ① ; \text{ de même, } \frac{1}{K_2} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k'_2} \quad ②.$$

$$b. K_1 K_2 = \frac{(H^+)^2 (^-BB'^-)}{(HBB'H)} ; \text{ on en déduit : } K_1 K_2 = k_1 k'_2 \quad ③, \text{ et } K_1 K_2 = k'_1 k_2 \quad ④$$

soit encore $k_1 k'_2 = k'_1 k_2$.

c. Supposons connues k_1, k'_1, k_2 ; on trouve sans utiliser ② $K_1 = k'_1 + k_1$;
 $k'_2 = \frac{k'_1 k_2}{k_1}$; $K_2 = \frac{k'_1 k_2}{k'_1 + k_1}$, on vérifie $\frac{1}{K_2} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k'_2}$. A partir de 6 variables et 3 relations on trouve 3 variables en fonction des 3 autres.

On vérifie ainsi qu'on a 3 constantes indépendantes et 3 relations indépendantes.

3.a. Les 2 groupements acides sont sans influence mutuelle : la perte du proton de gauche par HBB'^- est aussi facile que celle du même proton par $HBB'H$: $k_1 = k_2$.

De même pour l'autre proton : $k'_1 = k'_2$.

$$b. \frac{K_1}{K_2} = \frac{(k_1 + k'_1)^2}{k_1 k'_1} = 2 + \left(\frac{k'_1}{k_1} \right) + \frac{1}{\left(\frac{k'_1}{k_1} \right)} \text{ après avoir développé le carré.}$$

$$\frac{k'_1}{k_1} \text{ détermine } \frac{K_1}{K_2}.$$

$$c. d.\alpha. \frac{K_1}{K_2} \text{ minimal pour } \frac{k'_1}{k_1} = 1, \text{ soit } \frac{K_1}{K_2} = 4 ;$$

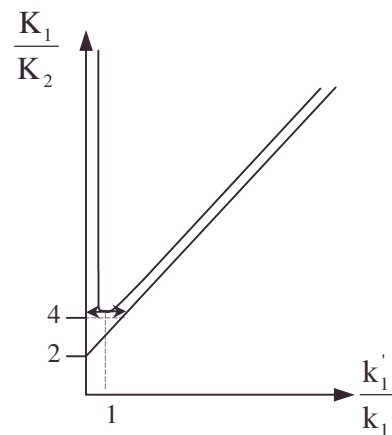
on a alors $k_1 = k'_1$, soit symétrie des deux fonctions pour $^-BB'H$ comme pour HBB'^- . On notera le faible écart des pK d'où un rapprochement formel avec un monoacide.

$\beta. \frac{K_1}{K_2}$ maximal pour $\frac{k'_1}{k_1} = 0$ ou ∞ ; une des acidités disparaît : $HBB'H$ se comporte comme un monoacide.

4.a. On a par la symétrie : $k_1 = k'_1$; $k_2 = k'_2$.

$$b.\alpha. K_1 = 2k_1 ; K_2 = \frac{2}{k_2} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = 4 \frac{k_1}{k_2}.$$

$\beta.$ Si n est grand on a $k_1 = k_2$ soit $\frac{K_1}{K_2} = 4$. On retrouve bien le minimum de la courbe I.3.c. qui correspond aux mêmes relations



c.

n	0	2	6
nom de l'acide	oxalique	butanedioïque	octanedioïque
$\frac{K_1}{K_2}$	794,3	25,11	7,94

On n'atteint pas la limite $\frac{K_1}{K_2} = 4$ mais on vérifie qu'on s'en rapproche quand n croît.

$$\text{II.1.}\alpha. \quad {}^-\text{BB'H} \rightleftharpoons \text{HBB}'^- ; K_3 = \frac{(\text{HBB}'^-)}{({}^-\text{BB'H})} = \frac{k_1'}{k_1}.$$

β . Le rapport des concentrations des monoanions ne dépend que de T et ne dépend ni de la concentration en diacide A ni du pH (cf. propriétés d'une constante d'équilibre).

$$2.\alpha. \quad K_4 = \frac{({}^-\text{BB'H})(\text{HBB}'^-)}{(\text{HBBH})({}^-\text{BB}'^-)} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_1'}{k_2'}.$$

$$\beta. \quad K_5 = \frac{({}^-\text{BB'H})^2}{({}^-\text{BB}'^-)(\text{HBB'H})} = \frac{k_1}{k_2}.$$

$$\gamma. \quad K_6 = \frac{(\text{HBB}'^-)^2}{({}^-\text{BB}'^-)(\text{HBB'H})} = \frac{k_1'}{k_2'}.$$

$$3. \text{ Pour éliminer } (\text{H}^+), \text{ formons : } \frac{K_1}{K_2} = \frac{(({}^-\text{BB'H}) + (\text{HBB}'^-))^2}{(\text{HBB'H})({}^-\text{BB}'^-)} = K.$$

4. Cas n grand ; X = Y

α . Pour un diacide symétrique de n grand $k_1 = k_1' = k_2 = k_2'$, les équilibres E_4 , E_5 , E_6 et E_7 sont identiques.

En utilisant **II.2.**, $K_7 = K_4 = 1$: en utilisant **II.3.**, $K = \frac{k_1}{k_2} = 4$; or on identifie K et K_7 vu

la réaction écrite et le sens de $({}^-\text{BB'H}) + (\text{HBB}'^-) \Rightarrow K_7 = 4$ soit 2 valeurs différentes.

β . La valeur à retenir est $K_7 = 4$; en effet un problème d'indiscernabilité de ${}^-\text{BBH}$ et de HBB^- rend inutile E_3 , E_4 , E_5 , E_6 qui produisent un arte fact. Seule la méthode générale donne la valeur de ce cas particulier.

γ . Le problème de la discernabilité en physique statistique n'empêche pas le nombre d'hydrogène acide de relever du cas général classique, les calculs de $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r S^0$ seront la traduction statistique de la thermodynamique.

$$\text{b.}\alpha. \quad \Delta_r G^0 = -RT \ln K_7 ; \text{ AN : } \Delta_r G^0 = -3,436 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

$$\beta. \quad \Delta_r H^0 = -\frac{T^2 d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^0}{T} \right) = 0 \text{ car } K_7 = 4 \quad \forall T.$$

$$\gamma. \quad \Delta_r S^0 = -\frac{d\Delta_r G^0}{dT} = R \ln K_7 ; \text{ AN : } \Delta_r S^0 = 11,52 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \text{ cf. 4.1.8.}$$

4.1.10. Dosage d'une solution tampon à l'hydroxylamine

L'hydroxylamine est la forme basique du couple $\text{NH}_3^+\text{OH} / \text{NH}_2\text{OH}$ de $\text{pK}_A = 8$.

Disposant de 100 cm^3 de solution tampon réalisée à l'aide de ce couple, un expérimentateur désire déterminer les nombres a de moles de NH_3OHCl et b de moles de NH_2OH introduites dans les 100 cm^3 d'eau. Il va pour cela réaliser successivement deux manipulations. Dans un premier temps il verse, tout en suivant le pH, x moles de soude dans 50 cm^3 de la solution (les variations de volume seront négligées).

Les résultats suivants sont obtenus :

x	0	5.10^{-3}	10^{-2}	3.10^{-2}	4.10^{-2}	$4,5.10^{-2}$	5.10^{-2}	$5,5.10^{-2}$	6.10^{-2}	7.10^{-2}	9.10^{-2}
pH	7,9	8,0	8,1	8,5	8,7	8,9	9,3	11,1	11,7	12,2	12,4

Dans un second temps, il verse y moles d'acide chlorhydrique dans 50 cm^3 de la solution tampon (les variations de volume seront négligées).

Le tableau suivant a été dressé :

y	0	5.10^{-3}	10^{-2}	3.10^{-2}	4.10^{-2}	$4,5.10^{-2}$	5.10^{-2}	$5,5.10^{-2}$	6.10^{-2}	7.10^{-2}
pH	7,9	7,8	7,7	7,2	6,7	3,8	2,3	2,0	1,8	1,5

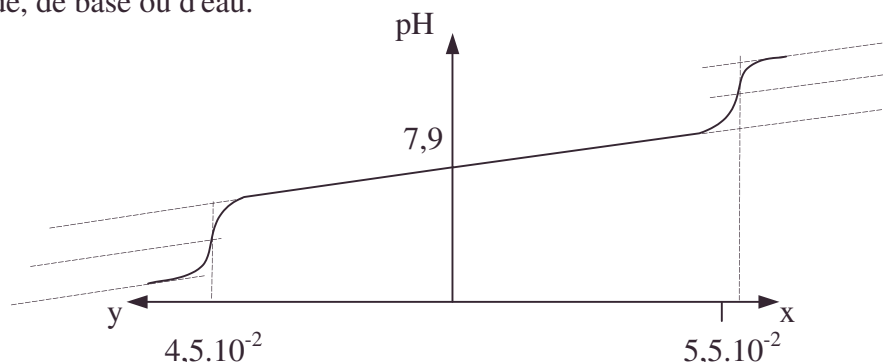
1. Quelles propriétés présentent une solution tampon acido-basique ?
2. En portant les pH en ordonnée, x en abscisse dans le sens positif, y en abscisse dans le sens négatif, tracer sur le même graphe $\text{pH} = f(x)$ et $\text{pH} = g(y)$.
3. Ecrire l'équation chimique rendant compte de la première expérience. Quelle constante d'équilibre peut-on lui associer ? Qu'en déduisez-vous ? Calculer a .
4. Ecrire l'équation chimique rendant compte de la deuxième expérience. Quelle constante d'équilibre peut-on lui associer ? Qu'en déduisez-vous ? Calculer b .
5. A l'aide des résultats précédents et en faisant les approximations usuelles, établir les expressions permettant le tracé théorique de $\text{pH} = f(x)$.
Calculer, pour ce dosage, le pH à l'équivalence ainsi que le pH à la demi équivalence.

Centrale ; Durée : 1 h.

Corrigé

1. Une solution tampon acidobasique a son pH qui varie peu par addition (légère) d'acide, de base ou d'eau.

2.



b. $K_1 = \frac{(\text{NH}_2\text{OH})}{(\text{OH}^-)(\text{NH}_3^+\text{OH})} = \frac{K_A}{K_e}; \text{AN} : K_1 = 10^6.$

c. La réaction est RPQ (quasi totale), le dosage est possible si la cinétique est rapide.

d. La détermination graphique de l'équivalence par exemple par la méthode des tangentes donne $x_{\text{eq}} = 5,3.10^{-2} \text{ mole};$

$n_{\text{OH}^-} = n_{0_{\text{NH}_3^+\text{OH}}} = 5,3.10^{-2} \text{ pour } 50 \text{ cm}^3 \text{ et pour } 100 \text{ cm}^3 \text{ } a = 2n_{0_{\text{NH}_3^+\text{OH}}} = 0,106 \text{ mol}.$



• cinétique, constante d'équilibre, demi-équivalence, graphe, méthode des tangentes, RPQ, solution tampon

b. $K_2 = \frac{(\text{NH}_3^+\text{OH})}{(\text{H}^+)(\text{NH}_2\text{OH})} = \frac{1}{K_A}$; AN : $K_2 = 10^8$.

c. La réaction est RPQ (quasi totale) et sauf ennui cinétique, le dosage est possible.

d. La détermination graphique de l'équivalence donne $y_{\text{eq}} = 4,4 \cdot 10^{-2}$ mole ;

$n_{\text{H}^+} = n_{0 \text{ NH}_2\text{OH}} = 4,4 \cdot 10^{-2}$ pour 50 cm^3 et pour 100 cm^3 , $b = 2n_{0 \text{ NH}_2\text{OH}} = 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$.

5.a. $x = 0$, on a une solution tampon $K_A = \frac{(\text{H}^+)(\text{NH}_2\text{OH})}{(\text{NH}_3^+\text{OH})}$;

$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{(\text{NH}_2\text{OH})}{(\text{NH}_3^+\text{OH})} = \text{p}K_A + \log \frac{b}{a}$; AN : $\text{pH} = 7,91$. cf. données.

b. $0 < x < x_{\text{eq}}$; $\text{NH}_3^+\text{OH} + \text{OH}^- \rightleftharpoons \text{NH}_2\text{OH} + \text{H}_2\text{O}$

• $t = 0$; $\frac{a}{2}$ x $\frac{b}{2}$

• équilibre $\frac{a}{2} - x$ 0 $\frac{b}{2} + x$

$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{\frac{b}{2} + x}{\frac{a}{2} - x}$. Droite de Hendersen du plan x , pH .

c. $x > x_{\text{eq}}$; on n'a plus consommation des OH^- au-delà des $\frac{a}{2}$ moles à consommer.

$(\text{OH}^-) = \frac{x - \frac{a}{2}}{V}$; $(\text{H}^+) = \frac{K_e}{(\text{OH}^-)} \Rightarrow \text{pH} = 14 + \log \frac{x - \frac{a}{2}}{V}$; $V = 50 \cdot 10^{-3} \text{ l}$.

d. $x = x_{\text{eq}}$; On a une solution de NH_2OH de concentration $c_1 = \frac{(a+b)}{2V}$.



Comme pour toute base faible, on a :

$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{(\text{NH}_2\text{OH})}{(\text{NH}_3^+\text{OH})} = \text{p}K_A + \log \frac{c_1}{K_e} (\text{H}^+) \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\text{p}K_A + \text{p}K_e + \log \frac{a+b}{2V} \right) = \text{pH}$.

AN : $\text{pH} = 11,28$.

Conclusion : on retrouve bien les valeurs données et le graphe $\text{pH} = f(x)$.

4.1.11. Dosage de CrO_3 par la soude

Dans l'industrie comme au laboratoire, les solutions d'anhydride chromique servent à réaliser de nombreuses oxydations. En solution aqueuse, l'anhydride chromique CrO_3 se comporte comme un acide fort, selon la réaction : $2\text{CrO}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 2\text{H}^+$.

1. Quel doit être le pH d'une solution obtenue par dissolution de 10^{-2} mole de CrO_3 dans un litre d'eau ?

2. Quel doit être le nombre de mole de NaOH juste nécessaire pour neutraliser un litre de la solution précédente ? Quel devrait être alors le pH de la solution ?

3. En fait, on constate que le pH de la solution après cette neutralisation est inférieur à la valeur calculée au 2. Ceci provient des propriétés acides des $5 \cdot 10^{-3}$ mole de $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ formées et caractérisées par la réaction équilibrée $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 2\text{CrO}_4^{2-} + 2\text{H}^+$.

La constante de cet équilibre est de $10^{-14,5}$. Calculer la valeur réelle du pH de la solution après neutralisation de l'acidité forte de CrO_3 .

4. Si l'on poursuit l'addition de soude, les ions OH^- neutraliseront les ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ selon



a. Calculer la constante de cet équilibre.

b. Quel nombre de mole de NaOH doit-on ajouter après la neutralisation de l'acidité forte de CrO_3 , pour avoir une concentration identique en CrO_4^{2-} et $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$?

c. En déduire le pH de la solution à ce moment.

ENSAM

Corrigé

1. On a un acide fort ; $\text{pH} = -\log c$; AN : $\text{pH} = 2$.

2.a. La formule du dosage s'écrit : $n = v_1 c_1 = v_2 c_2 = 10^{-2}$.

b. Le dosage $\text{H}^+ + \text{OH}^-$ donne : $\text{pH} = 7$.

3. $2\text{CrO}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 2\text{H}^+$ RP

$$\begin{array}{cccc} c = 10^{-2} & - & 0 & 0 \\ 0 & - & \frac{c}{2} & 10^{-2} \end{array}$$



$$\begin{array}{cccc} \frac{c}{2} & - & 0 & 0 \end{array} \quad \text{après le premier dosage de } \text{H}^+ \text{ jusqu'à } \text{pH} = 7.$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{c}{2} - \xi & - & 2\xi & 2\xi \end{array} \quad \text{avec } \xi \ll \frac{c}{2}.$$

$$\Rightarrow (\text{CrO}_4^{2-}) = (\text{H}^+).$$

$$\text{Donc } c \neq 2(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) \Rightarrow \text{équilibre : } K = (\text{H}^+)^2 \frac{(\text{Cr}_2\text{O}_4^{2-})^2}{(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-})} \Rightarrow (\text{H}^+)^4 = \frac{Kc}{2}.$$

$$\text{pH} = \frac{1}{4} \left(\text{pK} + \text{p} \left(\frac{c}{2} \right) \right); \text{A.N. : } \text{pH} = 4,20.$$

$$4.a. K' = \frac{(\text{CrO}_4^{2-})^2}{(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-})(\text{OH}^-)^2} = \frac{K}{K_e^2}; \text{AN : } K' = 3,16 \cdot 10^{13}.$$



$$\begin{array}{cccc} \frac{c}{2} & x & 0 & - \\ \frac{c}{2} - \frac{x}{2} & 0 & x & - \end{array}$$

$$(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) = (\text{CrO}_4^{2-}) \Rightarrow x = \frac{c}{3} \quad \text{AN : } x = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$c. K = (\text{H}^+)^2 \frac{c}{3}; \text{A.N. : } \text{pH} = 5,78.$$

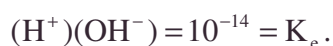
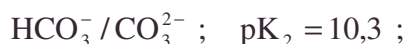
• EC, RP

4.1.12. Diagrammes logarithmiques

Partie A

On considère une solution aqueuse dont le pH est considéré dans cette partie comme une variable indépendante pouvant prendre toute valeur entre 0 et 14.

Données générales de couples acido-basiques : H_2CO_3 est ici une écriture systématique de $\text{CO}_{2(\text{aq})} + \text{H}_2\text{O}$.



On posera, pour simplifier, $(\text{H}_3\text{O}^+) = h$.

On se propose, dans cette partie, de tracer les courbes représentatives de :

$$-\log(\text{H}_2\text{CO}_3) = f_1(\text{pH}) \quad \text{courbe 1 ;}$$

$$-\log(\text{HCO}_3^-) = f_2(\text{pH}) \quad \text{courbe 2 ;}$$

$$-\log(\text{CO}_3^{2-}) = f_3(\text{pH}) \quad \text{courbe 3.}$$

1. Exprimer sans approximation (H_2CO_3) , (HCO_3^-) et (CO_3^{2-}) en fonction de h .

2. En faisant l'hypothèse que dans la somme de deux termes l'un peut être négligé s'il est inférieur à 10% de l'autre, montrer que l'on peut considérer trois domaines de pH : $(0, \text{pK}_1 - 1)$, $(\text{pK}_1 + 1, \text{pK}_2 - 1)$, $(\text{pK}_2 + 1, 14)$ dans lesquels les courbes 1, 2, et 3 sont des segments de droite dont on donnera les équations. Montrer que les supports de certains de ces segments passent par les points de coordonnées $(\text{pK}_1, -\log c)$ et $(\text{pK}_2, -\log c)$.

3. Montrer que les courbes 1 et 2 se rencontrent au point $I_1(\text{pK}_1, -\log c + 0,3)$ et que les courbes 2 et 3 se coupent en $I_2(\text{pK}_2, -\log c + 0,3)$.

4. On se place dans le cas où $c = 10^{-2} \text{ mol/L}$.

Tracer soigneusement sur un même graphique les courbes 1, 2 et 3 ainsi que les droites représentatives de :

$$-\log(\text{H}^+) = f_4(\text{pH}) ;$$

$$-\log(\text{OH}^-) = f_5(\text{pH}) .$$

On notera l'espèce considérée sur chaque courbe.

$-\log(X)$ sera l'axe des ordonnées orienté vers le bas.

Sur les intervalles de pH : $(\text{pK}_1 - 1, \text{pK}_1 + 1)$ et $(\text{pK}_2 - 1, \text{pK}_2 + 1)$ les courbes seront obtenues par un tracé continu joignant les segments de droite et passant par les points I_1 et I_2 .

Partie B

Dans cette partie, le diagramme logarithmique précédent sera utilisé pour la détermination des pH des solutions ci-dessous. On en déduira le point d'intersection de deux courbes dont l'abscisse est le pH cherché.

1. Solution 10^{-2} mol/L de Na_2CO_3 .

2. Solution 10^{-2} mol/L de NaHCO_3 .

3. Solution 10^{-2} mol/L de H_2CO_3 .

Partie C

A un litre de solution 10^{-2} mol/L de Na_2CO_3 , on ajoute n mole de chlorure d'hydrogène HCl sans qu'il y ait variation de volume.

• couple acido-basique, courbe, diagramme logarithmique, graphe

1.a. Montrer que pour $n = c$, le pH est le même que celui de la solution de NaHCO_3 .

b. Montrer que pour $n = 2c$, le pH est le même que celui de la solution de H_2CO_3 .

2.a. $0 < n < c$; justifier que (H_2CO_3) et (H^+) sont négligeables devant d'autres concentrations que l'on nommera. En déduire la relation : $\frac{n}{c} = \frac{1}{1 + \frac{K_2}{h}} - \frac{K_e}{h \cdot c} = x$.

b. $c < n < 2c$; montrer que $(\text{HCO}_3^-) = 2c - n$ en justifiant les approximations et donner le pH en fonction de n .

c. $n > 2c$; Montrer que $h = n - 2c$ en justifiant les approximations et donner le pH en fonction de n .

3. On pose $x = \frac{n}{c}$. Compléter le tableau suivant et tracer la courbe $\text{pH} = f(x)$.

x	0							1	1,01	1,05	1,1	1,5	1,9	1,95	1,99	2	2,01	2,05	2,1
pH		11,1	10,8	10,3	9,5	9	8,5												

4. Aux points équivalents, la courbe est assimilée à une droite de pente $\alpha = \frac{\Delta \text{pH}}{\Delta x}$.

Calculer α pour $x = 1$ et pour $x = 2$.

Le virage d'un indicateur coloré de pK_i se fait dans un domaine de pH allant de $\text{pK}_i - 1$ à $\text{pK}_i + 1$. Calculer la valeur minimale que doit avoir α pour que la détermination d'un point équivalent se fasse à 1% près sur x . Peut-on alors utiliser des indicateurs colorés pour déterminer à 1% près les deux points équivalents du titrage de NaCO_3 par HCl ?

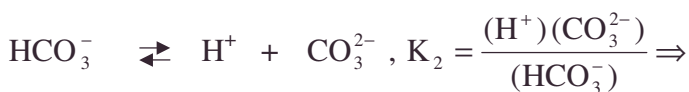
N.B. : H_2CO_3 se trouve parfois noté $\text{CO}_{2(\text{aq})}$.

CCP ; Durée : 2h

Corrigé



$$\text{on tire } (\text{HCO}_3^-) = \frac{K_1}{h} (\text{H}_2\text{CO}_3);$$

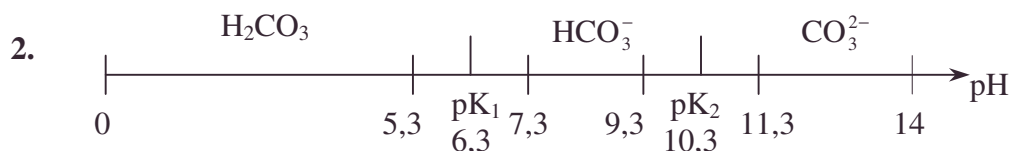


$$(\text{CO}_3^{2-}) = \frac{K_2}{h} (\text{HCO}_3^-) = \frac{K_1 K_2}{h^2} (\text{H}_2\text{CO}_3);$$

ou la conservation du carbone s'écrit :

$$C = (\text{H}_2\text{CO}_3) + (\text{HCO}_3^-) + (\text{CO}_3^{2-}) = (\text{H}_2\text{CO}_3) \left(1 + \frac{K_1}{h} + \frac{K_1 K_2}{h^2} \right);$$

$$(\text{H}_2\text{CO}_3) = \frac{c}{1 + \frac{K_1}{h} + \frac{K_1 K_2}{h^2}} \Rightarrow (\text{HCO}_3^-) = \frac{c}{1 + \frac{K_2}{h} + \frac{h}{K_1}} \Rightarrow (\text{CO}_3^{2-}) = \frac{c}{1 + \frac{h}{K_2} + \frac{h^2}{K_1 K_2}}.$$



Le distingo $pK \pm 1$ correspond à des rapports de concentrations acide base entre 10 et 0,1.

L'étude des diagrammes de prédominance donne :

a. $0 < pH < pK_1 - 1$; prédominance de H_2CO_3 ;

$$(H_2CO_3) = c \Rightarrow (HCO_3^-) = \frac{K_1 c}{h} \Rightarrow (CO_3^{2-}) = \frac{c K_1 K_2}{h^2}.$$

$$\textcircled{1} -\log(H_2CO_3) = -\log c ; \textcircled{2} -\log(HCO_3^-) = -pH - \log c + pK_1 ;$$

$$\textcircled{3} -\log(CO_3^{2-}) = -2pH - \log c + pK_1 + pK_2 ;$$

$$AN : c = 10^{-2} ; -\log c = 2 ; pK_1 - \log c = 8,3 ; pK_1 + pK_2 - \log c = 18,6 .$$

b. $pK_1 + 1 < pH < pK_2 - 1$; prédominance de HCO_3^- ;

$$(HCO_3^-) = c \Rightarrow (H_2CO_3) = \frac{hc}{K_1} \text{ et } (CO_3^{2-}) = \frac{K_2 c}{h}.$$

$$\textcircled{1} -\log(H_2CO_3) = -pK_1 - \log c + pH ; \textcircled{2} -\log(HCO_3^-) = -\log c ;$$

$$\textcircled{3} \log(CO_3^{2-}) = -pH + pK_2 - \log c ;$$

$$AN : -\log c = 2 ; -\log c - pK_1 = -4,3 ; pK_2 - \log c = 12,3 .$$

c. $pK_2 + 1 < pH < 14$; prédominance de CO_3^{2-} ;

$$(CO_3^{2-}) = c \Rightarrow (HCO_3^-) = \frac{hc}{K_2} \text{ et } (H_2CO_3) = \frac{h^2 c}{K_1 K_2}.$$

$$\textcircled{1} -\log(H_2CO_3) = -pK_1 - pK_2 - \log c + 2pH ;$$

$$\textcircled{2} -\log(HCO_3^-) = -pK_2 - \log c + pH ; \textcircled{3} -\log(CO_3^{2-}) = -\log c ;$$

$$AN : -pK_1 - pK_2 - \log c = -14,6 ; -pK_2 - \log c = -8,3 ; -\log c = 2 .$$

On a ainsi montré que les courbes 1, 2 et 3 sont des segments de droites dans les 3 domaines.

d. Soient : I' : (pK_1 , $-\log c$) ; I'' : (pK_2 , $-\log c$). On vérifie que I' et I'' appartiennent aux droites supports des segments étudiés.

3. Intersections réelles dans le cadre des diagrammes de prédominance

$$a. 1 \cap 2 \Leftrightarrow (H_2CO_3) = (HCO_3^-) = \frac{c}{2} \Rightarrow \log(H_2CO_3) = \log(HCO_3^-) = \log c - 0,3 ;$$

$$pH = pK_1 . \text{ Conclusion : } I_1 = 1 \cap 2 .$$

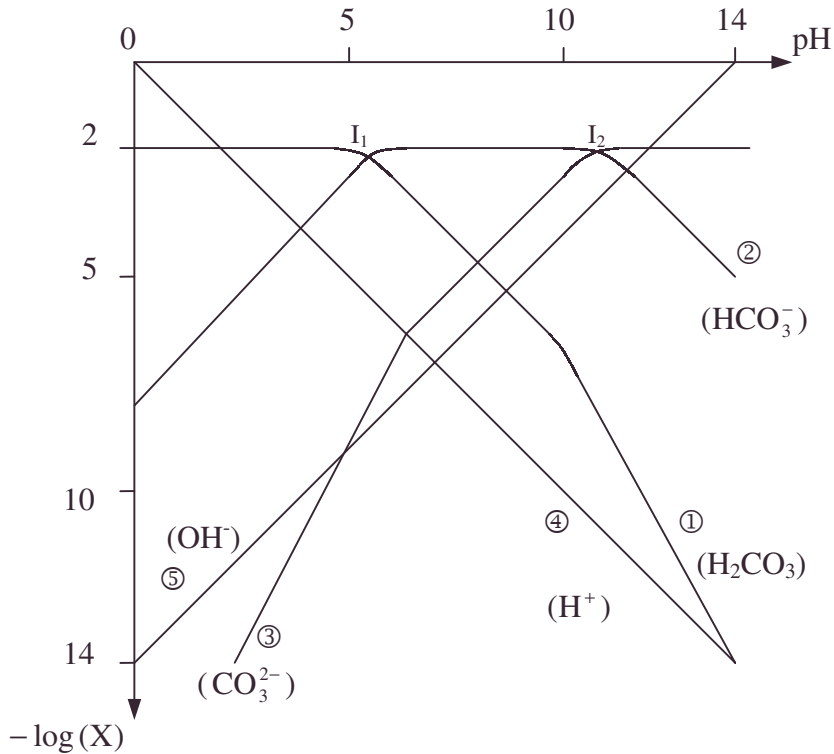
$$b. 2 \cap 3 \Leftrightarrow (HCO_3^-) = (CO_3^{2-}) = \frac{c}{2} \Rightarrow \log(H_2CO_3) = \log(CO_3^{2-}) = \log c - 0,3 ;$$

$$pH = pK_2 .$$

$$\text{Conclusion : } I_2 = 2 \cap 3 .$$

4. $-\log(H_3O^+) = pH$ courbe $\textcircled{4}$.

$$(OH^-) = \frac{K_e}{(H^+)} \Rightarrow -\log(OH^-) = 14 - pH \text{ courbe } \textcircled{5} .$$

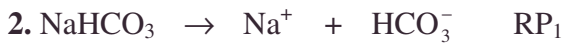


B. Dans le cadre des diagrammes de prédominance



on a une solution basique :

$(\text{HCO}_3^-) = (\text{OH}^-)$; on trouve $2 \cap 5 \Rightarrow \text{pH} = 11,2$ par lecture.



on a un composé HCO_3^- amphotère peu dilué.

$(\text{H}_2\text{CO}_3) = (\text{CO}_3^{2-})$; on trouve $1 \cap 3 \Rightarrow \text{pH} = 8,3$ par lecture.



on a une solution acide.

$(\text{HCO}_3^-) = (\text{H}_3\text{O}^+)$; on trouve $2 \cap 4 \Rightarrow \text{pH} = 4,2$ par lecture.



bilan :

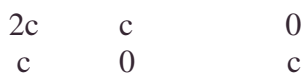
c	c	0
0	0	c

 même pH donc que celui issu de HCO_3^- issu de NaHCO_3 (cf. pH = 8,3).

La solution 1 est équivalente à HCO_3^- (SET).

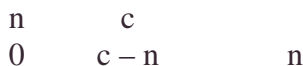
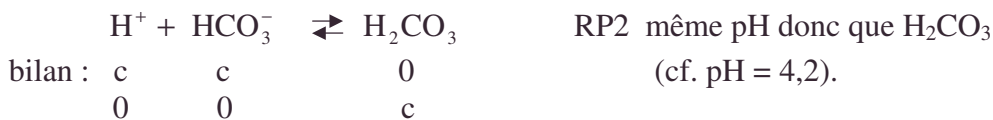


On remarquera que $K_1 K_2 = (\text{H}_3\text{O}^+)^2$; $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}K_2)$: A.N. : pH = 8,3 .

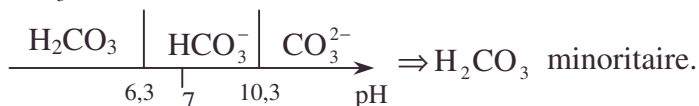


• amphotère, diagramme de prédominance, RP

Equilibres acido-basiques



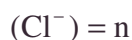
CO_3^{2-} est une base assez forte. Le milieu est basique : $(\text{H}^+) \ll (\text{OH}^-)$.



La coexistence de CO_3^{2-} et de HCO_3^- est dans un voisinage de $\text{pH} = \text{pK}_2$ éloigné du domaine de prédominance de H_2CO_3 .



$$\left\{ \begin{array}{l} [1] (\text{HCO}_3^-) + (\text{CO}_3^{2-}) = c = \frac{(\text{Na}^+)}{2} \quad \text{vu le bilan} \\ [2] (\text{HCO}_3^-) + 2(\text{CO}_3^{2-}) + (\text{OH}^-) + (\text{Cl}^-) = +(\cancel{\text{H}^+}) + (\text{Na}^+) = 2c \quad \text{vu l'électroneutralité.} \\ [3] K_2 = (\text{H}_3\text{O}^+) \frac{(\text{CO}_3^{2-})}{(\text{HCO}_3^-)} \\ [4] K_e = (\text{OH}^-)(\text{H}_3\text{O}^+) \end{array} \right.$$

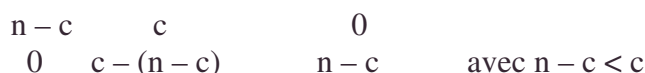


$$[3] \Rightarrow (\text{HCO}_3^-) = \frac{h(\text{CO}_3^{2-})}{K_2} \Rightarrow$$

$$[1] \Rightarrow (\text{CO}_3^{2-}) = \frac{c}{1 + \frac{h}{K_2}} \Rightarrow (\text{HCO}_3^-) = \frac{c}{1 + \frac{K_2}{h}}.$$

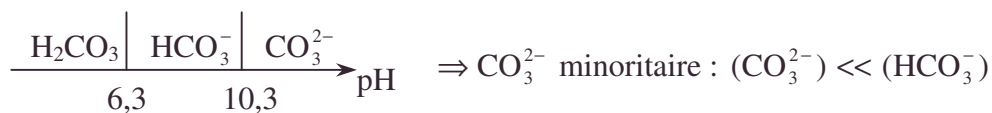
$$[2] \Rightarrow (\text{Cl}^-) = n = 2c - \frac{2c}{1 + \frac{h}{K_2}} - \frac{c}{1 + \frac{K_2}{h}} - (\text{OH}^-) \Rightarrow$$

$$n = \frac{c}{1 + \frac{K_2}{h}} - \frac{K_e}{h} \Rightarrow x = \frac{n}{c} = \frac{1}{1 + \frac{K_2}{h}} - \frac{K_e}{hc}.$$



$$\Rightarrow (\text{HCO}_3^-) = 2c - n$$

or $c < n < 2c$; $0 \leq (\text{HCO}_3^-) \leq c$; **C.1.a.b.** $\Rightarrow 4,2 < \text{pH} < 8,3 \Rightarrow (\text{OH}^-), (\text{H}_3\text{O}^+)$ sont des ions minoritaires.



$$K_1 = \frac{h(\text{HCO}_3^-)}{(\text{H}_2\text{CO}_3)} ;$$

$$\Rightarrow \text{pH} = \text{p}K_1 + \log \frac{(2c - n)}{(n - c)} = \text{p}K_1 + \log \frac{(2 - x)}{(x - 1)} \cdot (\text{cf II.3.}) \quad x = \frac{n}{c} ; 1 < x < 2.$$

c. $n > 2c$



il reste : H_2CO_3 , H_3O^+ , Cl^- , Na^+ ; $(\text{H}^+) = n - 2c$;

$$\text{pH} = -\log(n - 2c) = -\log(x - 2)c \cdot (\text{cf II.3.}) \quad x = \frac{n}{c} ; x > 2.$$

3.a. $x = 0$; on reconnaît la base de **B1** ;

On résoud **C.2.a.** ; AN : $\text{pH} = 11,15$.

b. $x = 1$; on reconnaît la solution amphotère de **B2** ;

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}K_2) ; \text{AN : } \text{pH} = 8,30.$$

c. $x = 2$; on reconnaît la solution acide de **B3** ;

AN: $\text{pH} = 4,15$.

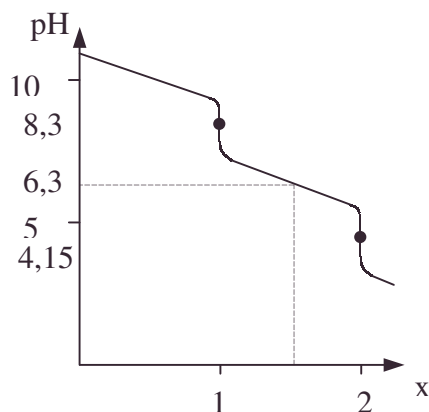
d. $0 < x < 1$ on calcule pH cf. **C.2.a.**

e. $1 < x < 2$ on calcule pH cf. **C.2.b.**

f. $x > 2$ on calcule pH cf. **C.2.c.**

x	0	$1,09 \cdot 10^{-2}$	0,177	0,480	0,860	0,951	0,984	1,00	1,01	1,05
pH	11,15	11,10	10,80	10,30	9,50	9,00	8,50	8,30	8,30	7,58

x	1,10	1,50	1,90	1,95	1,99	2,00	2,01	2,05	2,10
pH	7,25	6,30	5,35	5,02	4,30	4,15	4,00	3,30	3,00



• amphotère, RP, tableau

4.a. En faisant l'approximation linéaire proposée, en utilisant le tableau, on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{-0,2}{1,01 - 0,984} = -7,69 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \frac{-0,30}{0,02} = -15 \\ x = 2 \end{cases}$$

La pente en $x = 2$ est supérieure en valeur absolue à celle en $x = 1$

b. x connu à 1% suppose $\Delta x = 0,01$ au voisinage de $x = 1$;

$\Delta x = 0,02$ au voisinage de $x = 2$

Si l'incertitude de pH en utilisant un indicateur coloré est approximativement $\Delta \text{pH} = 1$,

il faut $\frac{\Delta \text{pH}}{\Delta x} = 100$ pour $x \neq 1$ et $\frac{\Delta \text{pH}}{\Delta x} = 50$ pour $x \neq 2$.

On ne peut réaliser le dosage à 1% à aucune équivalence.

4.1.12. EDTA

Voir page 1591.

4.1.13. DETA

Voir page 1602.

4.1.14. L'eau calcaire

Voir page 1625.

4.1.15. Dissolution du calcaire par la pluie

Voir page 1626.

4.1.16. Diverses mesures de la constante d'acidité k_a de l'acide acétique

Voir page 1630.

4.1.17. Acide chlorhydrique

Voir page 1634.

4.1.18. L'élément azote en chimie inorganique

Voir page 1636.

4.1.19. Sulfure de zinc

Voir page 1642.

4.1.20. Travaux pratiques de dosage

Voir page 1645.

4.1.21. Précipitations du cadmium II

Voir page 1666.

4.1.22. Méthode de l'équilibre de contrôle

Voir page 1671.

4.1.23. Comparaison thermodynamique d'acides carboxyliques

Voir page 1785.

4.1.24. Survol 5 (Acides aminés)

Voir page 1802.

4.1.25. Extraction par solvant - Dosage acidobasique diphasé

Voir page 1810.

4.2. Complexes

appartient aux programmes de BCPST1 et 2

4.2.1. Complexes du cuivre II

Le cuivre a pour numéro atomique $Z = 29$. L'ion cuivrique Cu^{2+} donne avec la molécule NH_3 un complexe tétracoordonné.

- a. Ecrire sa formule et donner son nom en nomenclature officielle.
- b. Donner sa structure géométrique, l'état d'hybridation du cuivre ou son symbole VSEPR.
- c. La constante de dissociation de ce complexe (en ions Cu^{2+} et molécules NH_3) vaut 10^{-12} à 25°C . Calculer rapidement la concentration en ions cuivriques restant dans une solution qui en contenait initialement $0,005 \text{ mol.l}^{-1}$ et à laquelle on ajoute 1 mole par litre d'ammoniac.
- d. Ecrire la formule du 1,2-diaminoéthane.
- e. Quels sont les atomes responsables du caractère bidentate de ce ligand ?
- f. Donner la formule du complexe de Cu^{2+} tétracoordonné par le 1,2-diaminoéthane.
- g. Ce complexe est-il plus stable que celui précédemment envisagé ?

Capes

Corrigé

- a. $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$ nommé tétramminecuivre (II).
- b. Le complexe a une structure plan carrée compatible avec l'hybridation dsp^2 , la théorie VSEPR le dénomme AX_4E_2 .

c. • La constante de dissociation : $K = 10^{-12} = \frac{(\text{Cu}^{2+})(\text{NH}_3)^4}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}$;



$$\begin{array}{ccc} 0,005 & 1 & 0 \\ 0,005-\xi & 1-4\xi & \xi \end{array} \quad \Rightarrow \xi = 0,005.$$

$$(\text{NH}_3) = 0,98 ; [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}] = 0,005 ; (\text{Cu}^{2+}) = \frac{K[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{(\text{NH}_3)_4}.$$

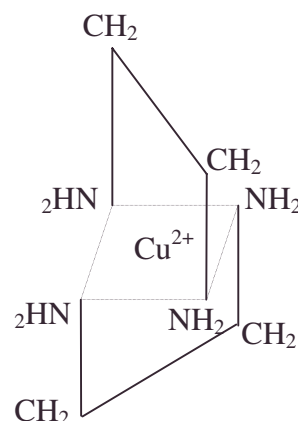
d. $\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{NH}_2$.

e. Les deux atomes d'azote assurent le caractère bidentate de ce ligand par leurs doublets(cf. base de Lewis).

f. $\text{Cu}(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{NH}_2)_2^{2+}$.

g. On peut concevoir dans 3 plans orthogonaux ;

Cette structuration de l'édifice empêche le départ à l'état libre de Cu^{2+} solvaté dans le 1,2-diaminoéthane. On dit avoir un effet de pince ou de séquestration. Ce dernier composé est plus stable.



• bidentate, constante de dissociation de complexe, diaminoéthane, effet de pince, état d'hybridation, excès, ligand, ligand bidentate, numéro atomique, structure géométrique, tétramminecuivre (II), VSEPR

4.2.2. Complexe : stabilité comparée Dosage complexométrique

I. Stabilité de l'ion FeSCN^{2+}

L'ion complexe, thiocyno-fer (III) est fortement coloré (rouge sang) ; sa coloration est perceptible dès que sa concentration atteint $10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$; on donne sa constante de dissociation $K_D = 1,0 \cdot 10^{-2}$.

a. Dans 500 cm^3 d'eau, on dissout 10^{-3} mole de chlorure de fer (III) et $5 \cdot 10^{-3}$ mole de thiocyanate de potassium (KSCN).

Calculer les concentrations des espèces suivantes : Fe^{3+} , SCN^- et FeSCN^{2+} ; la solution obtenue est-elle colorée ?

b. Dans la solution précédente, on introduit du fluorure de sodium solide (on suppose que le volume total ne varie pas). Les ions fluorure donnent avec les ions fer (III) un complexe de constante de formation β : $\text{Fe}^{3+} + \text{F}^- \rightleftharpoons \text{FeF}^{2+}$ $\beta = 1,0 \cdot 10^5$.

Quelle quantité de fluorure faut-il introduire dans la solution pour que la coloration rouge sang disparaisse ?

c. On part d'une solution contenant par litre $2 \cdot 10^{-3}$ mole de chlorure de fer (III), $1,0 \cdot 10^{-2}$ mole de thiocyanate de potassium et $2,0 \cdot 10^{-2}$ mole de fluorure de sodium ; on l'acidifie par un acide fort. A quel pH la coloration de l'ion complexe apparaît-elle ?

Données : HF est un acide faible de $\text{pK}_a = 3,2$; HSCN est un acide fort.

2. Titrage de l'ion argent

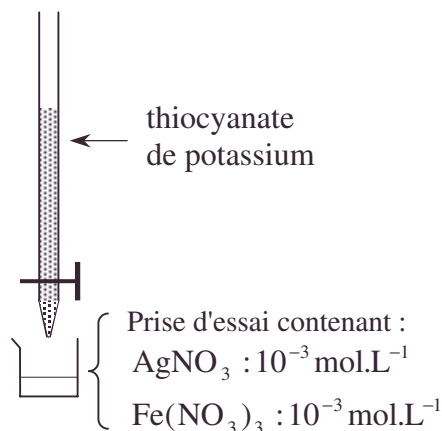
Le thiocyanate d'argent est un solide blanc peu soluble dans l'eau ; à 298 K son produit de solubilité K_s est tel que $\text{pK}_s = 12$.

a. Calculer la solubilité du thiocyanate d'argent en solution aqueuse.

b. On réalise la réaction avec le montage ci-contre. A une prise d'essai contenant par litre 10^{-3} mole de nitrate d'argent et 10^{-3} mole de nitrate de fer (III), on ajoute progressivement du thiocyanate de potassium.

Quelle est la concentration résiduelle en ions argent (I) lorsque la coloration rouge sang apparaît ? (On négligera les variations de volume).

c. De l'expérience précédente, déduire un protocole de titrage permettant de titrer une solution de nitrate d'argent par une solution de thiocyanate de potassium.



Centrale ; Durée : 1h

Corrigé



de bilan de concentration

$$\begin{array}{ccc} 2 \cdot 10^{-3} & 10^{-2} & 0 \\ 2 \cdot 10^{-3} - x & 10^{-2} - x & x \end{array}$$

$$K_D = \frac{(\text{Fe}^{3+})(\text{SCN}^-)}{(\text{FeSCN}^{2+})} ; K_D = 10^{-2} \text{ n'est pas assez petit pour considérer l'ion complexe}$$

comme ultra majoritaire.

• constante de dissociation de complexe, constante de formation de complexe, dosage complexométrique, fluorure, produit de solubilité, protocole, solubilité, stabilité comparée de complexes, thiocyanate, thiocyno-fer (III), titrage

soit $K_D = \frac{(2.10^{-3} - x)(10^{-2} - x)}{x}$. On résout l'équation du second degré : $x = 0,95.10^{-3}$.

$$\Rightarrow (Fe^{3+}) = 1,05.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}; (SCN^{-}) = 9,05.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1};$$

$$(FeSCN^{2+}) = 0,95.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

La solution est couleur rouge sang car $(FeSCN^{2+}) > 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.



bilan $2.10^{-3} \quad y \quad 0$

$$2.10^{-3} - z \quad y - z \quad z \quad \text{On sait que : } \beta = \frac{(FeF^{2+})}{(Fe^{3+})(F^{-})};$$

Quand la coloration disparaît : $(FeSCN^{2+}) = 10^{-5}$ or $(FeSCN^{2+}) + (SCN^{-}) = 10^{-2}$

donc $(SCN^{-}) = 10^{-2}$ et $(Fe^{3+}) = K_D \frac{(FeSCN^{2+})}{(SCN^{-})}$; A.N. : $(Fe^{3+}) = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$,

donc $2.10^{-3} - z = 10^{-5} \Rightarrow z = 2.10^{-3} \Rightarrow (F^{-}) = \frac{z}{(Fe^{3+})\beta}$; A.N. : $(F^{-}) = 2.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$,

d'où : $y = (y - z) + z = (F^{-}) + (FeF^{2+})$; A.N. : $y = 4.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.



$2.10^{-3} \quad 2.10^{-2} \quad 0$

$2.10^{-3} - \xi_1 - \xi_2 \quad 10^{-2} - \xi_1 \quad \xi_1$



$2.10^{-3} \quad 2.10^{-2} \quad 0$

$2.10^{-3} - \xi_2 - \xi_1 \quad 2.10^{-2} - \xi_2 - \xi_3 \quad \xi_2$



$2.10^{-2} \quad u$

$2.10^{-2} - \xi_2 - \xi_3 \quad u - \xi_3 \quad \xi_3$

La couleur apparaît pour $(FeSCN^{2+}) = \xi_1 = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

Or, $(FeSCN^{2+}) + (SCN^{-}) = 10^{-2} \Rightarrow (SCN^{-}) = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow (Fe^{3+}) = K_D \frac{(FeSCN^{2+})}{(SCN^{-})}$

A.N. : $(Fe^{3+}) = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

$(Fe^{3+}) = 10^{-5} = 2.10^{-3} - 10^{-5} - \xi_2 \Rightarrow \xi_2 = 1,98.10^{-3}$.

$(FeF^{2+}) = 1,98.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow (F^{-}) = \frac{(FeF^{2+})}{\beta(Fe^{3+})}$; A.N. : $(F^{-}) = 1,98.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

La conservation de l'élément fluor s'écrit :

$2.10^{-2} = (F^{-}) + (FeF^{2+}) + (HF) \Rightarrow (HF) = \xi_3 = 0,016 \text{ mol.L}^{-1}$.

$K_A = \frac{(H^{+})(F^{-})}{(HF)} \Rightarrow pH = pK_A - \log \frac{(HF)}{(F^{-})}$; A.N. : $pH = 2,29$.

2. Titrage de l'argent



● conservation de l'élément, ultra majoritaire

$$s = K_s^{\frac{1}{2}}; \text{AN : } s = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}.$$

b. La couleur apparaît pour $(\text{FeSCN}^{2+}) = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.



$$\begin{array}{ccc} c_0 = 10^{-3} & n & 0 \\ 10^{-3} - \xi & n - \xi & \xi \end{array}$$

$$K_D = \frac{(\text{Fe}^{3+})(\text{SCN}^{-})}{(\text{FeSCN}^{2+})} \text{ or } \xi = 10^{-5} \Rightarrow (\text{Fe}^{3+}) = 10^{-3} - 10^{-5} = 10^{-3}.$$

$$(\text{SCN}^{-}) = \frac{K_D \cdot 10^{-5}}{(\text{Fe}^{3+})} \Rightarrow (\text{Ag}^{+}) = \frac{K_s}{(\text{SCN}^{-})} = \frac{K_s c_0}{K_D \cdot 10^{-5}}.$$

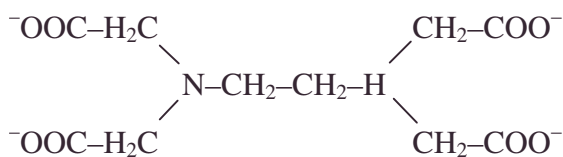
$$\text{AN : } (\text{Ag}^{+}) = 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}.$$

c. On procède à un dosage colorimétrique des ions Ag^{+} par le thiocyanate ; les ions ferriques servent d'indicateur coloré de fin de dosage.

4.2.3. E.D.T.A.

Toutes les données utiles à la résolution du problème sont rassemblées à la fin de l'énoncé. On remarquera que les réactifs titrants sont toujours utilisés à des concentrations suffisamment élevées pour que la dilution soit négligeable.

L'anion éthylènediaminetétraacétate (souvent désigné sous le sigle EDTA) :



donne des complexes très stables avec la quasi - totalité des cations métalliques, à l'exception des cations alcalins, Na^{+} et K^{+} notamment. Cette propriété est mise en œuvre dans de nombreuses applications, tant au plan industriel (la complexation par les ions aminopolycarboxylate remplace progressivement, dans de nombreux domaines, celle par les ions cyanure) qu'à l'échelle du laboratoire, où l'EDTA est utilisé pour le titrage des cations métalliques en solution aqueuse.

Deux problèmes se posent en pratique dans ce dernier cas :

- La préparation et l'étalonnage d'une solution aqueuse de ce réactif (solution titrée).
- Le contrôle de la pureté du réactif.

Ces deux aspects seront abordés successivement dans ce problème.

A. Préparation d'une solution titrée

L'anion éthylènediaminetétraacétate sera représenté, pour simplifier l'écriture, par Y^{4-} . Le produit commercial utilisé pour la préparation des solutions est le sel disodique $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$ de l'acide correspondant acide éthylènediaminetétraacétique, H_4Y .

Plusieurs méthodes peuvent être mises en œuvre pour l'étalonnage d'une telle solution.

1. Titrage acido-basique

1. Titrage direct par une base forte

Considérons le titrage de 100 ml d'une solution du sel disodique de l'EDTA ($\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$) de concentration $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ par une solution de soude 1 mol.L^{-1} . La courbe théorique de titrage, montrant la variation du pH en fonction du volume V de réactif titrant ajouté, est représentée sur la figure 1, de même que les courbes de variation du pourcentage des

• acide éthylènediaminetétraacétique, aminopolycarboxylate, base forte, contrôle, dilution négligeable, E.D.T.A., éthylènediaminetétraacétate, titrage acido-basique

différentes formes de l'EDTA* au cours du titrage (courbes obtenues par simulation sur micro-ordinateur).

* Le pourcentage d'une forme d'une espèce pouvant exister sous plusieurs formes en solution est défini par la fraction de la quantité totale de cette espèce présente sous la forme considérée :

$$\text{Ex. : } \% \text{H}_2\text{Y}^{2-} = \frac{\text{nombre de moles de l'espèce Y sous forme H}_2\text{Y}^{2-}}{\text{nombre total de moles de l'espèce Y introduit initialement}} \times 100.$$

a. Déterminer et justifier par le calcul la composition et le pH de la solution initiale (on admettra l'absence de complexation de Na^+ avec Y^{4-}).

b. Indiquer les réactions de titrage successivement mises en jeu et calculer le volume de réactif correspondant à chaque point d'équivalence.

c. Montrer que le pH aux points $V = 0,5 ; 1 ; 1,5$ et 2 ml est calculable a priori (on pourra utiliser les courbes de répartition pour justifier les approximations effectuées).

d. On note l'absence de saut net de pH autour de $V = 2$ ml. Calculer le pourcentage de Y^{4-} en ce point d'équivalence. Interpréter l'écart à la quantitativité.

e. Dans le cas où l'on ferait le titrage avec un indicateur coloré de pH de pK_A bien choisi et dont le domaine de virage s'étendrait sur 1,6 unités de pH, quel serait l'intervalle de volume de virage correspondant ? Quelle serait alors la précision du titrage ?

2. Titrage en présence d'ions Cd^{2+} en excès.

On préconise, pour améliorer la précision du titrage, d'opérer en présence d'ions Cd^{2+} , qui forment avec l'EDTA un complexe CdY^{2-} très stable. La courbe théorique de titrage par la soude, $\text{pH} = f(V)$, et les courbes de répartition, pour une solution contenant à la préparation $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$ et $3 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ de Cd^{2+} , sont représentées sur la figure 2.

a. Quelle est la réaction prédominante mise en jeu lors de l'addition de Cd^{2+} à la solution du sel disodique ? Quels seraient la composition et le pH de cette solution si la réaction était totale ?

b. Comment expliquez-vous la présence des espèces H_3Y^- et H_4Y en faible proportion ? Quelles réactions observe-t-on lors de l'addition de soude jusqu'au point anguleux P ? Pourquoi opère-t-on en présence d'ions Cd^{2+} en excès ?

c. Quelle est la réaction mise en jeu à partir du point P ? Justifier votre réponse par le calcul du pH en P. Pourquoi le pourcentage du Cd sous forme CdY^{2-} reste-t-il constant à partir du volume correspondant au point P ?

d. Justifier l'emploi de rouge de phénol (intervalle de virage en pH : 6,4 – 8,0) comme indicateur et expliciter le mode de dépouillement des résultats expérimentaux obtenus pour accéder à la concentration de la solution d'EDTA préparée (on désignera par V_{OH^-} le volume de soude titrée, de concentration C_{OH^-} , et par V_0 le volume de la prise d'essai de la solution de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$).

2. Titrage complexométrique

Une autre méthode d'étalonnage de la solution du sel disodique de l'EDTA consiste à l'utiliser pour le titrage d'une solution étalon d'un cation métallique, Cd^{2+} par exemple. Il faut alors disposer d'un indicateur coloré de concentration des ions Cd^{2+} libres, qui change brutalement de coloration autour d'une valeur donnée de pCd ($= -\log(\text{Cd}^{2+})$), et opérer en solution tampon de pH.

La figure 3 représente les courbes de variation de pCd et du pourcentage des formes du cadmium au cours du titrage par $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$ $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ de 10 ml d'une solution

Complexes

$\text{Cd}^{2+} 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ en présence d'un mélange équimolaire d'acide acétique et d'acétate de sodium, chacun à la concentration $5 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

a. Pourquoi le pH est-il imposé par le mélange $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{CH}_3\text{CO}_2^-$? Quelle en est la valeur ? Quelle est la forme prédominante ? (autre que CdY^{2-}) de l'espèce Y dans ces conditions ?

b. En déduire la réaction de titrage effectivement mise en jeu et montrer que le calcul de la constante d'équilibre correspondante permet de retrouver, par un calcul simple, la valeur de pCd au point d'équivalence. Calculer la valeur du pH en ce point.

c. La figure 4 montre les courbes observées dans les mêmes conditions, mais en l'absence de tampon acétate. Comment expliquez-vous l'absence de saut net de pCd au point d'équivalence théorique ? Prévoir comment évolue qualitativement le pH de la solution dans ce cas. Comparer avec le cas précédent.

B. Contrôle de la pureté du réactif**Détermination de la teneur en nitrilotriacétate NTA**

L'acide nitrilotriacétique N $\begin{array}{c} \diagup \text{CH}_2\text{COOH} \\ \text{---} \text{CH}_2\text{COOH} \\ \diagdown \text{CH}_2\text{COOH} \end{array}$ symbolisé ici par H_3Z , est une impureté

fréquemment rencontrée lors de la synthèse de l'EDTA. Le contrôle de fabrication requiert donc le titrage du mélange de ces deux composés, qui ont des propriétés similaires.

Une méthode consiste à titrer le mélange par une solution étalon d'ions ferriques, lesquels sont fortement complexés par l'un et l'autre des deux complexants.

On opère en milieu tampon acétate $0,2 \text{ mol.L}^{-1}$, à $\text{pH} = 4,7$, en présence d'un mélange d'ions Fe^{2+} et de phénantroline $-1,10$ (voir **données 6.**) dans des proportions 1/6 et à faible concentration, le titrage étant suivi par la mesure du potentiel redox E de la solution.

On demande :

a. d'identifier les formes prédominantes de chacun des deux complexants dans la solution au début du titrage et d'en déduire les réactions mises en jeu au cours de l'addition des ions Fe^{3+} ;

b. de justifier l'ordre des réactions précédentes et l'existence de deux sauts nets sur la courbe de titrage simulée $\text{pFe(III)} = f(V)$ (Figure 5) ;

c. d'expliquer pourquoi le fer (II) reste sélectivement à l'état de complexe avec la phénantroline $-1,10$ pendant tout le titrage dans les conditions de la figure 5 – on calculera, à titre de vérification, la concentration des ions Fe^{2+} libres ;

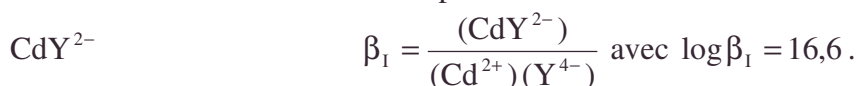
d. de montrer comment la mesure de E constitue, dans ces conditions, une mesure indirecte de $\text{pFe(III)} = -\log(\text{Fe}^{3+})$.

Données**1. Constantes d'équilibre de l'EDTA**

- Couples acide-base



- Constantes de formation de complexes



• acide nitrilotriacétique, constante d'équilibre, contrôle de fabrication, courbe, mélange équimolaire, pCd , pFe(III) , phénantroline, point d'équivalence, solution tampon, tampon

$$\text{FeY}^- \quad \beta_{\text{II}} = \frac{(\text{FeY}^-)}{(\text{Fe}^{3+})(\text{Y}^{4-})} \quad \text{avec } \log \beta_{\text{II}} = 25,1.$$

$$\text{FeY}^{2-} \quad \beta_{\text{III}} = \frac{(\text{FeY}^{2-})}{(\text{Fe}^{2+})(\text{Y}^{4-})} \quad \text{avec } \log \beta_{\text{III}} = 14,3.$$

2. Constantes d'équilibre du NTA

- Couples acide-base

$$\text{H}_3\text{Z} / \text{H}_2\text{Z}^- \quad \text{pK}_{3_z} = 1,9.$$

$$\text{H}_2\text{Z}^- / \text{HZ}^{2-} \quad \text{pK}_{2_z} = 2,5.$$

$$\text{HZ}^{2-} / \text{Z}^{3-} \quad \text{pK}_{3_z} = 9,7.$$

- Constantes de formation de complexes

$$\text{FeZ} \quad \beta_{\text{IV}} = \frac{(\text{FeZ})}{(\text{Fe}^{3+})(\text{Z}^{3-})} \quad \text{avec } \log \beta_{\text{IV}} = 15,9.$$

$$\text{FeZ}^- \quad \beta_{\text{V}} = \frac{(\text{FeZ})}{(\text{Fe}^{2+})(\text{Z}^{3-})} \quad \text{avec } \log \beta_{\text{V}} = 8,8.$$

3. Constante d'acidité de l'acide acétique

$$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} / \text{CH}_3\text{CO}_2^- \quad \text{pK}_A = 4,7$$

4. Produit de solubilité de l'hydroxyde de cadmium

$$K_s = (\text{Cd}^{2+})(\text{OH}^-)^2 = 5.10^{-14} ; \text{pK}_s = 13,3.$$

5. Produit ionique de l'eau

$$K_i = (\text{H}_3\text{O}^+)(\text{OH}^-) = 10^{-14} ; \quad \text{pK}_i = 14.$$

6. Constantes d'équilibre de la phénantroline –1, 10 (Phe).

$$\text{HPhe}^+ / \text{Phe} \quad \text{pK}_{A_{\text{Phe}}} = 5$$

$$\text{Fe(Phe)}_3^{2+} / 3\text{Phe} \quad \beta_{\text{VI}} = \frac{(\text{Fe(Phe)}_3^{2+})}{(\text{Fe}^{2+})(\text{Phe})^3} \quad \text{avec } \log \beta_{\text{VI}} = 21,3.$$

7. Potentiel normal du couple $\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}$

$$E^0 = 0,77 \text{ V} ; \text{ on prendra } \frac{2,3RT}{F} = 0,06 \text{ V}.$$

N.B. : la notation log désigne le logarithme décimal \log_{10} .

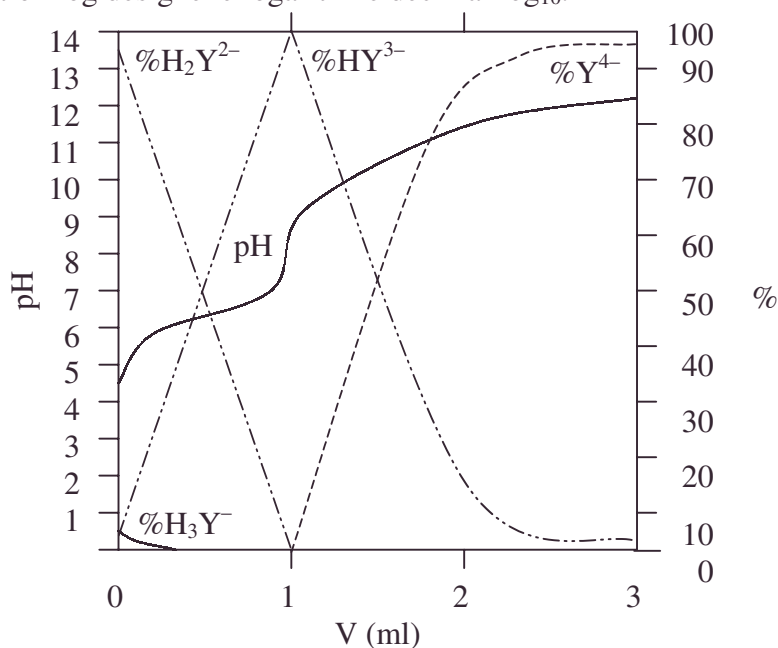


Figure 1 : titrage de 100 ml d'une solution de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y} \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ par une solution de soude 1 mol.L^{-1} . Courbes de variation du pH et des pourcentages des différentes formes de l'EDTA en fonction du volume de soude ajouté.

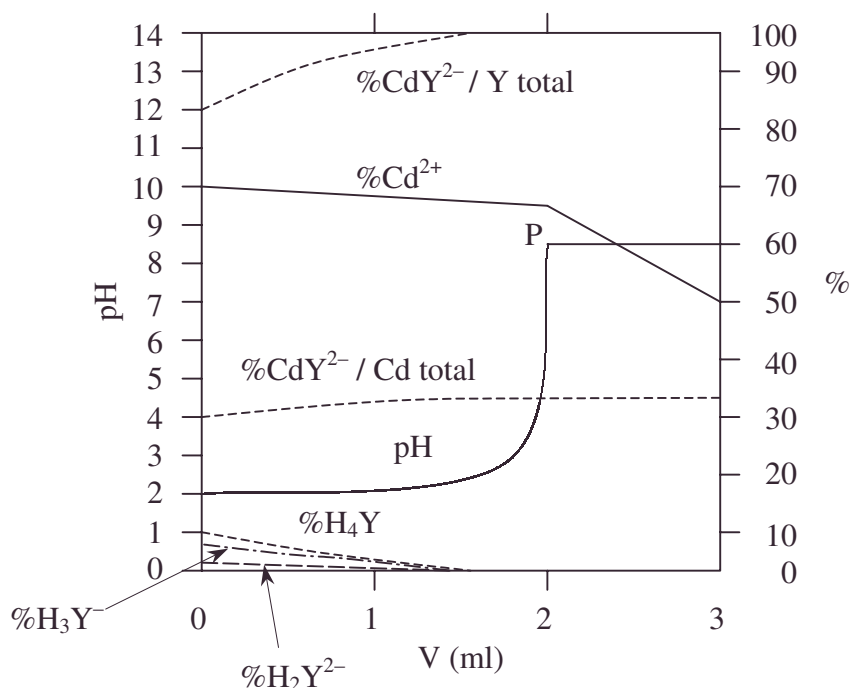


Figure 2 : titrage de 100 ml d'une solution contenant à la préparation $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$ et $3 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ d'ions de Cd^{2+} par une solution de soude 1 mol.L^{-1} : courbes de variation du pH et des pourcentages des différentes formes de l'EDTA et du cadmium en fonction du volume de soude ajouté.

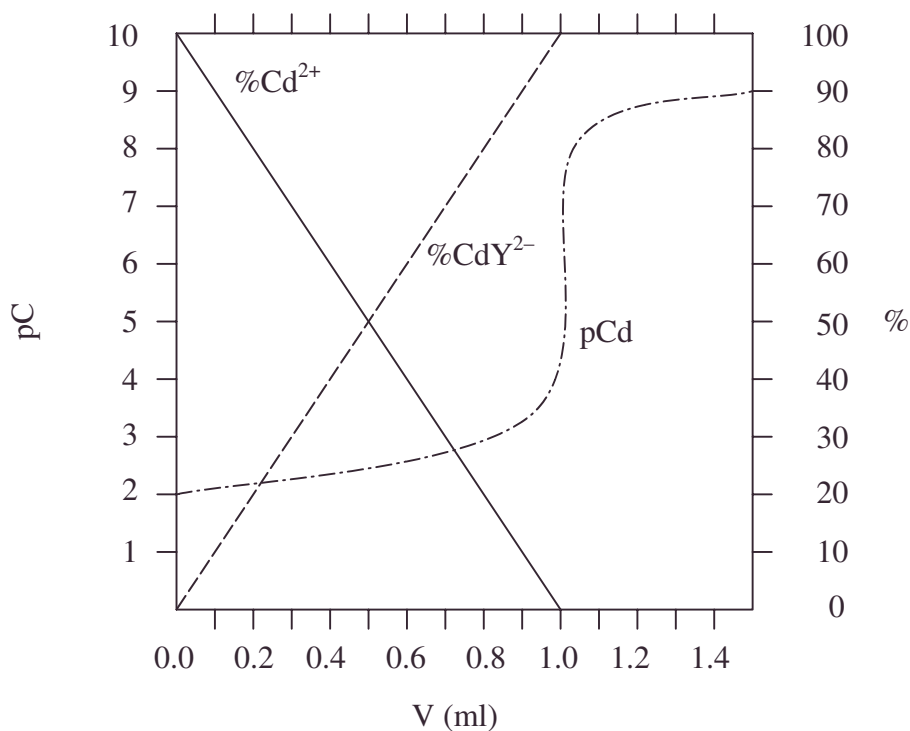


Figure 3 : titrage de 10 ml d'une solution d'ions Cd^{2+} $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, en présence d'acide acétique $5.10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ et d'acétate de sodium $5.10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, par une solution de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$ $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$: courbes de variation du pCd $[= -\log(\text{Cd}^{2+})]$ et des pourcentages des formes de cadmium en fonction du volume d'EDTA ajouté.

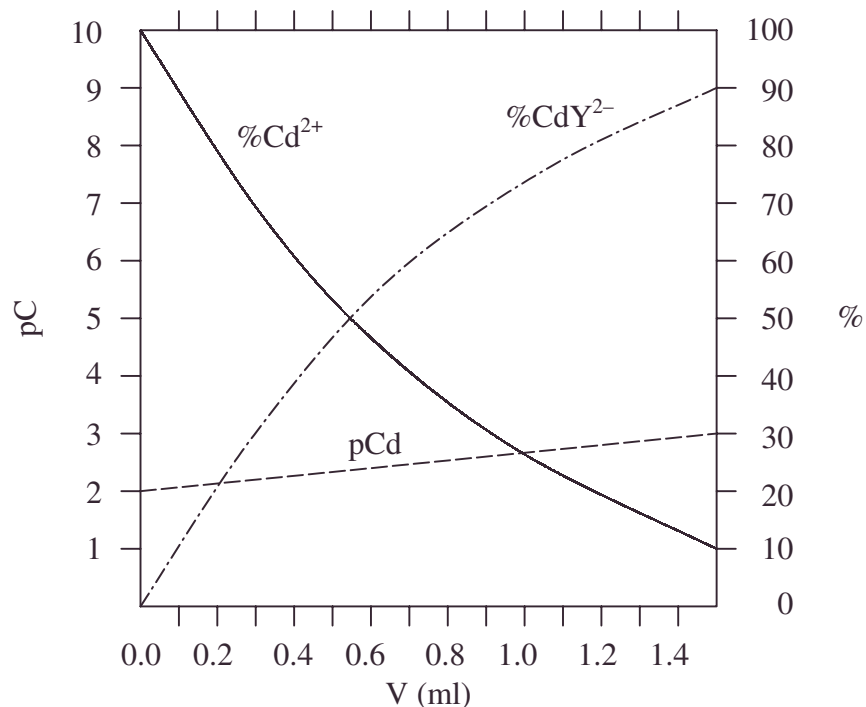


Figure 4 : titrage de 10 ml de $\text{Cd}^{2+} . 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ par $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$ $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ en l'absence de tampon acétate : courbes de variation du pCd $[= -\log(\text{Cd}^{2+})]$ et des pourcentages des formes de cadmium en fonction du volume d'EDTA ajouté.

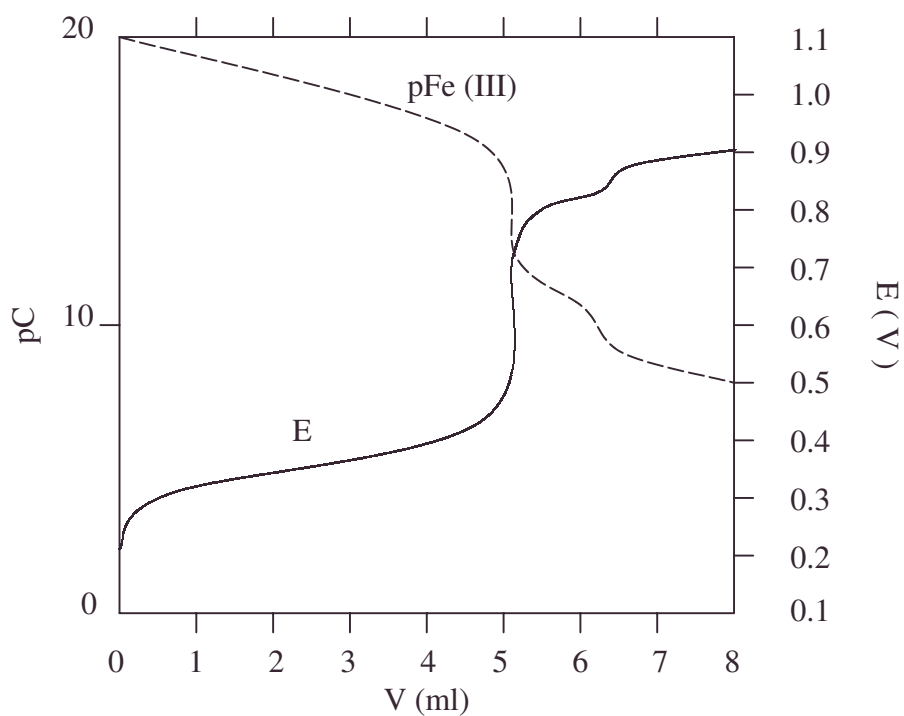


Figure 5 : titrage par une solution d'ions $\text{Fe}^{3+} 5.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ de 100 ml d'une solution contenant à la préparation $2,5.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ de H_4Y et $5.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ de H_3Z , en milieu acide acétique $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ + acétate de sodium $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, et en présence de $10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$ d'ions Fe^{2+} et de $6.10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$ phénantroline -1,10.

Courbes de variation du $\text{pFe (III)} (= -\log(\text{Fe}^{3+}))$ et du potentiel d'oxydo-réduction E en fonction du volume de fer (III) ajouté.

Remarque : il a été tenu compte, dans l'établissement de ces courbes de titrage, de la formation des complexes acétate du fer (III), laquelle a pour effet de repousser la précipitation de l'hydroxyde ferrique nettement au-delà du deuxième point d'équivalence.

ESPCI ; Durée : 2h

Corrigé

A.1.1.a. H_2Y^{2-} est ampholyte : $2\text{H}_2\text{Y}^{2-} \rightleftharpoons \text{HY}^{3-} + \text{H}_3\text{Y}^-$. E.C.

Faisons le bilan molaire :

$$\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ a(1 - \alpha) & \frac{a\alpha}{2} & \frac{a\alpha}{2} \end{array}$$

La constante d'équilibre $K = \frac{(\text{HY}^{3-})(\text{H}^+)(\text{H}_3\text{Y}^-)}{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})(\text{H}_2\text{Y}^{2-})(\text{H}^+)} = \frac{K_2}{K_3}$; A.N. : $K = 10^{-3,5}$.

On peut donc négliger l'acidité de l'eau :



$$K_2 K_3 = (\text{H}_3\text{O}^+) \frac{(\text{HY}^{3-})}{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})} \frac{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})}{(\text{H}_3\text{Y}^-)} = (\text{H}_3\text{O}^+)^2 \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_2 + \text{p}K_3) ; \text{A.N. : pH} = 4,45$$

$$K = \frac{K_2}{K_3} = \frac{\alpha^2}{4(1 - \alpha)^2} ; \text{on en déduit } \alpha = 3.10^{-2}.$$

$$(\text{H}_3\text{Y}^-) = (\text{HY}^{3-}) = 1,5.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} ; (\text{H}_2\text{Y}^{2-}) = 0,97.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

b.α. Premier titrage : $\text{H}_2\text{Y}^{2-} + \text{OH}^- \rightarrow \text{HY}^{3-} + \text{H}_2\text{O}$. RP

En appliquant la formule des dosages : $C_a V_a = C_b V_b$,

on trouve $V_{e1} = 10^{-2}.100.10^{-3} = 10^{-3} \text{ l} = 1 \text{ ml}$.

β. Deuxième titrage : $\text{HY}^{3-} + \text{OH}^- \rightarrow \text{Y}^{4-} + \text{H}_2\text{O}$. RP

On trouve $V_{e2} = 2.10^{-3} \text{ l} = 2 \text{ ml}$ vu la formule $C_b V_b = 2C_a V_a$ pour les diacides.

c.α. $V = 0,5 \text{ ml}$, on est à la première demi-équivalence (cf. pente de solution tampon sur la figure 1).

$$(\text{HY}^{3-}) = (\text{H}_2\text{Y}^{2-}) ; \text{pH} = \text{p}K_2 ; \text{A.N. : pH} = 6,2.$$

β. $V = 1 \text{ ml}$: on est à la première équivalence ; on a l'ampholyte HY^{3-} .

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}K_2) ; \text{A.N. : pH} = 8,25 ;$$

par analogie avec **1.1.a.**,

$$K' = \frac{K_1}{K_2} = 10^{-3,9} \text{ permet de négliger } \text{HY}^{3-} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{Y}^{4-} ; K_1 = 10^{-10,3}.$$

γ. $V = 1,5 \text{ ml}$: on est à la deuxième demi-équivalence (cf. pente de solution tampon sur la figure 1) ; $\text{pH} = \text{p}K_1$; A.N. ; $\text{pH} = 10,3$.

δ. $V = 2 \text{ ml}$: on est à la deuxième équivalence : on a l'ion Y^{4-} .

On a : $Y^{4-} + H_2O \rightleftharpoons HY^{3-} + OH^-$ E.C.

bilan molaire

a	0	0
$a(1 - \alpha')$	$a\alpha'$	$a\alpha'$

$$K'' = \frac{(HY^{3-})(H^+)(OH^-)}{(Y^{4-})(H^+)} = \frac{K_e}{K_1} ; K'' = \frac{OH^{-2}}{C - (OH^-)} \text{ avec } c = 0,1.$$

A.N. ; $K'' = 10^{-3,7} \Rightarrow (OH^-) = 10^{-2,9} \Rightarrow \text{pH} = 11,1$.

$$\text{d. } \frac{(Y^{4-})}{(HY^{3-})} = \frac{10^{-2,9}}{10^{-3,7}} = 10^{0,8} ; \%Y^{4-} = \frac{(Y^{4-})}{(Y^{4-}) + (HY^{3-})} = \frac{6}{1+6} = 85,7\%.$$

L'écart à la quantitativité : $100 - 85,7 = 14,3\%$ est dû à la réactivité acide non totale de l'eau sur Y^{4-} base.

e. Le saut de pH n'est notable que pour la 1^{ère} équivalence.

La méthode de l'indicateur coloré n'est valable que pour elle : vu $\text{pH} = 8,25$ on a l'intervalle de virage entre $\text{pH} = 7,45$ et $\text{pH} = 9,05$; en respectant son domaine de virage de 1,6 unité pH.

α. $\text{pH} = 7,45$ correspond à : $H_2Y^{2-} + OH^- \rightarrow HY^{3-} + H_2O$,

de bilan en concentration pour

10^{-2}	$\frac{v}{100}$	0	—
-----------	-----------------	---	---

un volume de 100 ml supposé constant

$10^{-2} - \frac{v}{100}$	0	$\frac{v}{100}$	—
---------------------------	---	-----------------	---

Or, $\frac{(HY^{3-})}{(H_2Y^{2-})} = \frac{K_2}{(H_3O^+)} = \frac{v}{1-v}$; A.N. ; $v = 0,946 \text{ ml}$.

β. $\text{pH} = 9,05$ correspond à $HY^{3-} + OH^- \rightarrow Y^{4-} + H_2O$

de bilan fait de même

10^{-2}	$\frac{v-1}{100}$	0	—
-----------	-------------------	---	---

$10^{-2} - \frac{v-1}{100}$	0	$\frac{v-1}{100}$	—
-----------------------------	---	-------------------	---

Or, $\frac{(Y^{4-})}{(HY^{3-})} = \frac{K_1}{(H_3O^+)} = \frac{v-1}{2-v}$; A.N. : $v = 1,054 \text{ ml}$.

$v \in [0,946 ; 1,054]$ (exprimé en ml).

$$\frac{\Delta v}{v_m}$$

γ. Précision : $\frac{2}{v_m} = 5,4\%$, ce qui n'est pas une bonne précision.

2.a. RP : $H_2Y^{2-} + Cd^{2+} \rightarrow 2H^+ + CdY^{2-}$ supposée totale.

de bilan en concentration :

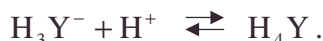
10^{-2}	$3 \cdot 10^{-2}$		
0	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}

$$\Rightarrow \text{pH} = -\log(2 \cdot 10^{-2}) = 1,7$$

b. La formation de H^+ induit minoritairement d'après l'énoncé :



• demi-équivalence, indicateur coloré, RP, solution tampon



Les proportions de H_3Y^- et H_4Y restent faibles car l'excès de Cd^{2+} favorise la réaction de **1.2.a.** soit la transformation de H_2Y^{2-} en H^+ et donc la diminution du réactif considéré.

L'addition de soude consomme les ions H^+ ; H_2Y^{2-} en présence de Cd^{2+} en excès se comporte comme un diacide fort et est dosé comme tel jusqu'à sa disparition en P.



c. A partir de P : $\text{Cd}^{2+} + 2\text{OH}^- \rightarrow \text{Cd}(\text{OH})_{2(s)}$

$$(\text{Cd}^{2+})_P = 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow (\text{OH}^-)^2 = \frac{K_s}{(\text{Cd}^{2+})_P} = \frac{K_e^2}{(\text{H}^+)^2} \Rightarrow \text{pH} = \text{pK}_e - \frac{1}{2}(\text{pK}_s - \text{pCd}_P);$$

Vu **I.2.a.**, A.N. : $\text{pH} = 8,2$. Après P, le pH reste constant d'après la figure 2 : les OH^- versés sont précipités. La réaction prépondérante est bien la fixation de OH^- par les Cd^{2+} libres ;

l'ion complexe très stable masque des Cd^{2+} aux ions OH^- et conserve le ligand Y^{4-} (cf. figure 2, les courbes $\text{CdY}^{2-} / \text{Y}_{\text{total}}$ et Cd^{2+}).

En effet, la réaction $\text{CdY}^{2-} + 2\text{OH}^- \rightleftharpoons \text{Cd}(\text{OH})_{2(s)} + \text{Y}^{4-}$ a une constante faible et n'est pas essentielle : A.N. : $K = 10^{-3,3}$.

$$K = \frac{(\text{Y}^{4-})(\text{Cd}^{2+})}{\text{CdY}^{2-}(\text{OH}^-)^2} = \frac{1}{K_s \beta_1}.$$

d. La zone de virage est entièrement en correspondance avec la partie verticale antérieure à P, d'où $v_{\text{OH}^-} = 2\text{ml}$. L'indicateur est bien adapté.

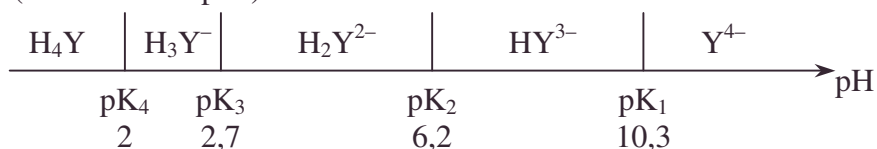
La formule des dosages est $v_{\text{OH}^-} C_{\text{OH}^-} = 2V_0 C_{\text{H}_2\text{Y}^{2-}}$, vu la double acidité dosée :

$C_{\text{H}_2\text{Y}^{2-}} = \frac{2}{200} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. L'incertitude est très réduite vu la verticalité finale de la courbe en P.

2. Titrage complexométrique

a.1.α. On a une solution tampon : $\text{pH} = \text{pK}_a$; A.N. : $\text{pH} = 4,7$ (peu perturbable).

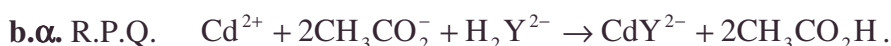
β. Soient les formes prédominantes contenant le motif Y (avec les réserves usuelles) (CdY^{2-} mis à part).



A $\text{pH} = 4,7$ (pH "éloigné" des frontières pK_3 et pK_2 de l'intervalle de prédominance de H_2Y^{2-}) l'espèce prédominante contenant le motif Y est H_2Y^{2-} (CdY^{2-} mis à part cf. énoncé).



On ne considérera pas la transformation $\text{H}_2\text{Y}^{2-} + \text{H}^+ \rightarrow \text{H}_3\text{Y}^-$, négligeable à $\text{pH} = 4,7$.

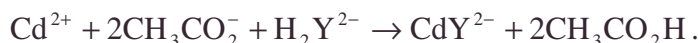


$$\beta. K = \frac{(\text{CdY}^{2-})(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})^2}{(\text{Cd}^{2+})(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)^2(\text{H}_2\text{Y}^{2-})} \text{ soit astucieusement écrit}$$

$$K = \frac{(\text{Cd}^{2+}\text{Y}^{2-})}{(\text{Cd}^{2+})(\text{Y}^{4-})} \cdot \frac{(\text{Y}^{4-})(\text{H}^+)}{(\text{HY}^{3-})} \cdot \frac{(\text{HY}^{3-})(\text{H}^+)}{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})} \left[\frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)(\text{H}^+)} \right]^2$$

$$K = \frac{\beta_1 K_1 K_2}{K_A^2}; \text{ A.N. ; } K = 10^{9,5} \text{ (justification thermodynamique du titrage quantitatif).}$$

γ. Faisons le bilan molaire :



t = 0	10 ⁻⁴	5.10 ⁻³	10 ⁻⁴	0	5.10 ⁻³
t _{éq}	0	4,8.10 ⁻³	0	10 ⁻⁴	5,2.10 ⁻³

on notera $(\text{Cd}^{2+}) = (\text{H}_2\text{Y}^{2-}) \forall t$

$$\mathbf{2.b.}\beta. \Rightarrow (\text{Cd}^{2+})^2 = \frac{1}{K} (\text{CdY}^{2-}) \left(\frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)} \right)^2 \Rightarrow \text{A.N. : } (\text{Cd}^{2+}) = \sqrt{\frac{10^{-4}}{11.10^{-2}} \left(\frac{5,2}{4,8} \right)^2},$$

en tenant compte de la dilution. $\text{pCd} = 5,70$.

δ.

$$K_A = \frac{(\text{H}^+)(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)}{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})} \Rightarrow (\text{H}^+) = K_A \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)}; \text{ A.N. : } (\text{H}^+) = 10^{-4,7} \left(\frac{5,2}{4,8} \right).$$

$\text{pH} = 4,67$ (avec $\text{pK}_A = 4,70$).

c. Les démarrages des 3 courbes sont identiques, mais le pH n'est pas stabilisé par un tampon. Au voisinage de $V = 1\text{ml}$, Cd^{2+} n'est pas préférentiellement consommé par H_2Y^{2-} . Au contraire, $\text{H}_2\text{Y}^{2-} + \text{H}^+ \rightarrow \text{H}_3\text{Y}^-$ est favorisé quand Cd^{2+} n'est plus en excès. La complexation de Cd^{2+} n'est plus quantitative (cf. % Cd^{2+} et % CdY^{2-}) au

voisinage du point d'équivalence théorique. Le rapport $\frac{(\text{H}_3\text{Y}^-)}{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})}$ augmentant, le pH diminue notablement ce qui était impossible dans le tampon acétique.

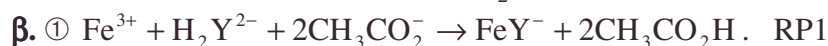


α. Les formes prédominantes de H_3Z sont grossomodo données par :

H_3Z	H_2Z^-	H Z^{2-}	Z^{3-}
1,9	2,5	9,7	

$\rightarrow \text{pH}$

En reprenant les domaines de prédominance de l'EDTA à $\text{pH} = 4,7$, les formes prédominantes sans métal sont H Z^{2-} et H_2Y^{2-} .



FeZ est un complexe neutre.

Le tampon acétique empêche $\text{H}_2\text{Y}^{2-} + \text{H}^+ \rightarrow \text{H}_3\text{Y}^-$ et $\text{HZ}^{2-} + \text{H}^+ \rightarrow \text{H}_2\text{Z}^-$.



$$K = \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)(\text{H}^+)} \cdot \frac{(\text{FeY}^-)}{(\text{Fe}^{3+})(\text{Y}^{4-})} \cdot \frac{(\text{Y}^{4-})(\text{H}^+)}{(\text{HY}^{3-})} \cdot \frac{(\text{HY}^{3-})(\text{H}^+)}{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})} \cdot \frac{(\text{Fe}^{3+})(\text{Z}^{3-})}{(\text{FeZ})} \cdot \frac{(\text{HZ}^{2-})}{(\text{Z}^{3-})(\text{H}^+)}.$$

Complexes

$$K = \frac{\beta_{II}}{K_A} \frac{K_{IY} K_{2Y}}{\beta_{IV} \cdot K_{Iz}} ; \text{A.N. : } K = 10^{10,1} ; \text{FeY}^- \text{ plus stable que FeZ à pH} = 4,7.$$

β. On ne fait pas intervenir Fe^{2+} et ses complexes vu **a.**

Conclusion : Fe^{3+} réagit d'abord avec H_2Y^{2-} et permet son titrage cf. **γ.**

Fe^{3+} réagit ensuite avec HZ^{2-} et permet son titrage cf. **γ.**

γ. Les constantes des titrages :

pour ①
$$K_1 = \frac{(\text{FeY}^-)}{(\text{Fe}^{3+})(\text{Y}^{4-})} \frac{(\text{Y}^{4-})(\text{H}^+)}{(\text{HY}^{3-})} \frac{(\text{HY}^{3-})(\text{H}^+)}{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})} \cdot \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})^2}{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)^2(\text{H}^+)^2}.$$

$$K_1 = \frac{\beta_{II} K_{IY} K_{2Y}}{K_A^2} ; \text{A.N. : } K_1 = 10^{18} \text{ dosage quantitatif d'où saut net sur la}$$

figure 5.

pour ②
$$K_2 = \frac{(\text{FeZ})}{(\text{Fe}^{3+})(\text{Z}^{3-})} \cdot \frac{(\text{Z}^{3-})(\text{H}^+)}{(\text{HZ}^{2-})} \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)(\text{H}^+)} = \frac{\beta_{IV} K_{Iz}}{K_A}.$$

A.N. : $K_2 = 10^{10,9}$ dosage quantitatif mais moins net que le précédent.

c. Envisageons l'action du ligand le plus actif disponible sur l'ion Fe^{2+} complexé (la démarche serait la même avec HZ^{2-}).



$$K = \frac{(\text{FeY}^{2-})}{(\text{Fe}^{2+})(\text{Y}^{4-})} \frac{(\text{Y}^{4-})(\text{H}^+)}{(\text{HY}^{3-})} \frac{(\text{HY}^{3-})(\text{H}^+)}{(\text{H}_2\text{Y}^{2-})} \cdot \frac{(\text{Phe})^3(\text{Fe}^{2+})}{\text{Fe}(\text{Phe})_3^{2+}} \left(\frac{(\text{HPhe}^+)}{(\text{Phe})(\text{H}^+)} \right)^3 \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)(\text{H}^+)}{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}$$

$$K = \frac{\beta_{III} K_{IY} K_{2Y}}{\beta_{VI} K_{A\text{Phe}}^3} K_A ; \text{A.N. : } K = 10^{-13,1}.$$

Remarque :

on pourrait prendre en compte sans profit que (Phe) est encore notable à pH = 4,7 vu les **données 6.** mais $\text{Fe}(\text{II})$ reste sélectivement à l'état de complexe avec Phe et non avec l'EDTA (ni NTA).

d. La formule de Nernst s'écrit : $E = E^0 + 0,06 \log \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} = E'_0 - 0,06 \text{pFe(III)}.$

$(\text{Fe}^{2+}) = \frac{(\text{Fe}(\text{Phe})_3^{2+})}{\beta_{VI} [\text{Phe}]^3}$ reste constant. Sa connaissance donne E'_0 et celle de E donne $\text{pFe(III)}.$

4.2.4. D.E.T.A.

I. Dans cette partie, consacrée à la détermination des constantes d'acidité de la diéthylène-triamine $\text{H}_2\text{N} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{NH} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{NH}_2$, désignée en abrégé par T, on considère les trois équilibres acido-basiques suivants, de constantes respectives K_1 , K_2 et K_3 .



On note (T) la concentration de diéthylènetriamine non protonée et on pose :

1.a. Montrer qu'on a nécessairement $n < 3$.

• complexe neutre, dosage, ligand, Nernst.

b. Exprimer $pK_1 = -\log K_1$ en fonction de n , K_2 , K_3 et $[H_3O^+]$ sous la forme :

$pK_1 = pH + \log(f(n, K_2, K_3, (H_3O^+)))$, où f est une fonction qu'on explicitera.

c. On suppose que $(H_3O^+) \gg K_2$ et $(H_3O^+) \gg K_3$.

Indiquer la signification chimique de ces inégalités et donner dans ce cas pour pK_1 une expression simplifiée de la forme $pK_1 = pH + \log(g(n))$, en explicitant la fonction g .

Montrer que, dans ces conditions, on a nécessairement $n > 2$.

2. On suppose dans cette question que $(H_3O^+)^2 \ll K_1 K_2$.

a. Montrer que n peut être exprimé en fonction de K_2 , K_3 et (H_3O^+) .

b. En déduire qu'on a nécessairement $n < 2$, et exprimer pK_2 sous la forme :

$pK_2 = pH - \log(h(n, K_3, (H_3O^+)))$, où h est une fonction qu'on explicitera.

Que devient cette égalité si $n = 1$?

c. Les valeurs numériques trouvées expérimentalement sont :

$$pK_1 = 4,78 ; pK_2 = 9,23 ; pK_3 = 9,94.$$

Vérifier l'exactitude de l'expression de pK_2 trouvée en **I.2.b.** sachant que $n = 1,301$ pour $pH = 9,30$. Quelles remarques vous suggèrent ces valeurs numériques ?

II. On étudie dans cette partie les propriétés complexantes de la diéthylènetriamine T avec les notations suivantes :

(T_T) : concentration totale de T, quelle que soit sa forme (libre, protonnée, complexée).

(T) : concentration de T non protonnée ni complexée.

(T_λ) : concentration de T libre, c'est-à-dire non complexée par le cation métallique.

(T_p) : concentration totale des protons fixés sur T non complexée par le cation métallique.

$$\alpha_T = \frac{(T)}{(T_\lambda)} ; n_T = \frac{(T_p)}{(T_\lambda)}.$$

K_1 , K_2 , K_3 sont des constantes d'acidité définies dans la partie **I**, dont on utilisera les valeurs numériques. Les concentrations sont données en mol.L^{-1} .

On suppose en fin que la diéthylènetriamine protonnée, même partiellement, ne se complexe pas sur un cation métallique.

1. Pourquoi la diéthylènetriamine possède-t-elle des propriétés complexantes ?

Combien de sites de coordination une molécule de diéthylènetriamine peut-elle occuper au maximum sur un cation métallique ?

2.a. Exprimer n_T en fonction de K_1 , K_2 , K_3 et (H_3O^+) .

b. Exprimer α_T en fonction de K_1 , K_2 , K_3 et (H_3O^+) .

c. Donner la relation qui lie (T) , α_T , n_T et (T_p) .

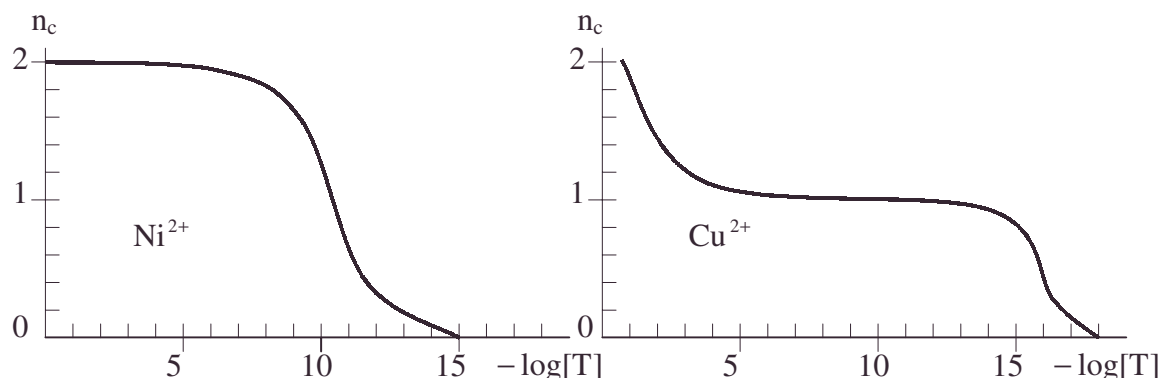
3. Expérimentalement, on mesure le pH de la solution en fonction de la concentration totale (T_T) de diéthylènetriamine pour une concentration donnée $(M)_0$ de cation métallique.

a. Calculer la valeur numérique de $-\log(T)$ pour $pH = 3,13$, $(T_T) = 0,0900$, $(T_p) = 0,0994$, et $(M)_0 = 0,1055$.

b. On pose $n_c = \frac{(T_T) - (T_\lambda)}{(M)_0}$. Quelle est la signification chimique de ce rapport ?

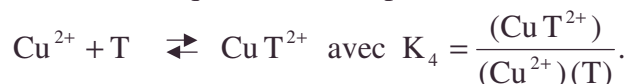
Calculer sa valeur numérique.

c. On représente n_c en fonction de $-\log(T)$ dans les deux cas de la complexation de la diéthylènetriamine sur les cations métalliques Ni^{2+} et Cu^{2+} .



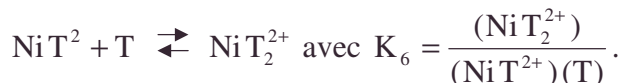
En examinant ces graphes, pouvez-vous indiquer le nombre maximal de molécules de diéthylènetriamine fixées d'une part sur Ni^{2+} , d'autre part sur Cu^{2+} .

4.a. On considère l'équilibre de complexation suivant :



Exprimer K_4 en fonction de n_c et de (T) et calculer sa valeur numérique pour $n_c = 0,3$ et $(T) = 10^{-16,50}$.

b. La complexation du cation Ni^{2+} par la diéthylènetriamine peut conduire aux équilibres suivants :



Dans des conditions où la dissociation du complexe NiT^{2+} est négligeable, exprimer K_6 en fonction de n_c et de (T) et calculer la valeur numérique de K_6 pour $n_c = 1,502$ et $(T) = 10^{-8,16}$.

c. La variation de $\log K_4$ lorsqu'on fait les mesures à $30^\circ C$ puis à $40^\circ C$ est de $-0,48$; celle de $\log K_6$ est de $-0,28$. Indiquer si thermodynamiquement une molécule de diéthylènetriamine se complexe plus facilement sur Cu^{2+} ou sur NiT^{2+} , lorsque les conditions de la question précédente sont assurées.

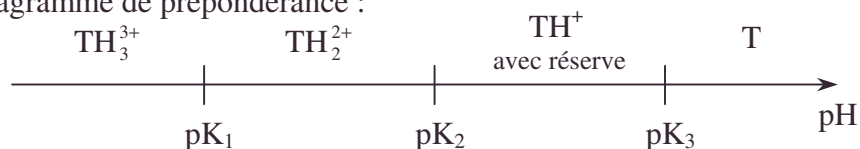
Ecole Polytechnique ; Durée : 2h30

Corrigé

$$I.1. K_1 = \frac{(TH_2^{2+})(H_3O^+)}{(TH_3^{3+})} ; K_2 = \frac{(TH^+)(H_3O^+)}{(TH_2^{2+})} ; K_3 = \frac{(T)(H_3O^+)}{(TH^+)}.$$

$$\text{On tire : } (TH^+) = \frac{(T)(H_3O^+)}{K_3} ; (TH_2^{2+}) = \frac{(T)(H_3O^+)^2}{K_2 K_3} ; (TH_3^{3+}) = \frac{(T)(H_3O^+)^3}{K_1 K_2 K_3}.$$

a.α. Diagramme de prépondérance :



En milieu très basique, seule la forme T existe $\Rightarrow n = 0$;

En milieu très acide, seule la forme TH_3^{3+} existe ;

or $(T)_0 = (T) + (\text{TH}^+) + (\text{TH}_2^{2+}) + (\text{TH}_3^{3+})$ (conservation de la structure de T)

$$\Rightarrow (\text{TH}_3^{3+}) = (T)_0 \Rightarrow n = \frac{3(T)_0}{(T)_0} = 3 \text{ par continuité entre ces cas extrêmes } 0 < n < 3.$$

β. Ecriture heuristique :

$$n = \frac{[(T) + (\text{TH}^+) + (\text{TH}_2^{2+}) + (\text{TH}_3^{3+})] - 3(T) - 2(\text{TH}^+) - (\text{TH}_2^{2+})}{(T) + (\text{TH}^+) + (\text{TH}_2^{2+}) + (\text{TH}_3^{3+})}$$

$$n = 3 - \frac{3(T) + 2(\text{TH}^+) + (\text{TH}_2^{2+})}{(T) + (\text{TH}^+) + (\text{TH}_2^{2+}) + (\text{TH}_3^{3+})} < 3.$$

b. En remplaçant (TH^+) , (TH_2^{2+}) , (TH_3^{3+}) et en simplifiant :

$$n = \frac{K_1 K_2 (\text{H}_3\text{O}^+) + 2 K_1 (\text{H}_3\text{O}^+)^2 + 3 (\text{H}_3\text{O}^+)^3}{K_1 K_2 K_3 + K_1 K_2 (\text{H}_3\text{O}^+) + K_1 (\text{H}_3\text{O}^+)^2 + (\text{H}_3\text{O}^+)^3} ;$$

$$\text{on en tire } K_1 = \frac{(3-n)(\text{H}_3\text{O}^+)^3}{n K_2 K_3 + (n-1) K_2 (\text{H}_3\text{O}^+) + (n-2)(\text{H}_3\text{O}^+)^2}.$$

L'astuce $(\text{H}_3\text{O}^+)^3 = (\text{H}_3\text{O}^+)(\text{H}_3\text{O}^+)^2$ donne :

$$\text{p}K_1 = \text{pH} + \log f \text{ avec } f = \frac{n K_2 K_3 + (n-1) K_2 (\text{H}_3\text{O}^+) + (n-2)(\text{H}_3\text{O}^+)^2}{(3-n)(\text{H}_3\text{O}^+)^2}.$$

c. Vu le diagramme de prédominance, $\frac{(\text{H}_3\text{O}^+)}{K_3} \gg 1 \Rightarrow (\text{TH}^+) \gg (T)$.

$$\frac{(\text{H}_3\text{O}^+)}{K_2} \gg 1 \Rightarrow (\text{TH}_2^{2+}) \gg (\text{TH}^+).$$

On est dans la zone : $\text{pH} < \text{p}K_2 - 1$.

α. Supprimons les termes correspondant à (TH^+) et (T) dans n :

$$n = \frac{2 K_1 (\text{H}_3\text{O}^+)^2 + 3 (\text{H}_3\text{O}^+)^3}{K_1 (\text{H}_2\text{O}^+)^2 + (\text{H}_3\text{O}^+)^3} = \frac{2 K_1 + 3 (\text{H}_3\text{O}^+)}{K_1 + (\text{H}_3\text{O}^+)} \Rightarrow K_1 = \frac{3-n}{n-2} (\text{H}_3\text{O}^+) > 0,$$

$$\Rightarrow \text{p}K_1 = \text{pH} + \log g \text{ avec } g = \frac{n-2}{3-n}.$$

$$\text{β. } K_1 > 0 \Rightarrow \frac{3-n}{n-2} > 0$$

n	2	3
3-n	+	+
n-2	-	+
$\frac{3-n}{n-2}$	-	-

$$\Rightarrow 2 < n < 3$$

$$2. \frac{K_1 K_2}{(\text{H}_3\text{O}^+)^2} = \frac{(\text{TH}^+)}{(\text{TH}_3^{3+})} \gg 1 \text{ soit } (\text{TH}^+) \gg (\text{TH}_3^{3+}).$$

a. Supprimons le terme correspondant à (TH_3^{3+}) dans n .

$$n = \frac{K_1 K_2 (\text{H}_3\text{O}^+) + 2 K_1 (\text{H}_3\text{O}^+)^2}{K_1 K_2 K_3 + K_1 K_2 (\text{H}_3\text{O}^+) + K_1 (\text{H}_3\text{O}^+)^2} = \frac{K_2 + 2 (\text{H}_3\text{O}^+) (\text{H}_3\text{O}^+)}{K_2 K_3 + K_2 (\text{H}_3\text{O}^+) + (\text{H}_3\text{O}^+)^2}.$$

On voit la suppression de l'intervention de K_1 .

b.α. Ecriture heuristique :

$$n = \frac{2[K_1(H_3O^+)^2 + K_1K_2(H_3O^+) + K_1K_2K_3] - 2K_1K_2K_3 - K_1K_2(H_3O^+)}{K_1(H_3O^+)^2 + K_1K_2(H_3O^+) + K_1K_2K_3}.$$

$$n = 2 - \frac{K_1K_2(2K_3 + (H_3O^+))}{K_1(H_3O^+)^2 + K_1K_2(H_3O^+) + K_1K_2K_3} \Rightarrow n < 2.$$

$$\beta. \text{ De 2.a. on tire : } K_2 = \frac{(2-n)(H_3O^+)^2}{nK_3 + (n-1)(H_3O^+)}.$$

L'astuce $(H_3O^+)^2 = (H_3O^+)(H_3O^+)$ donne :

$$pK_2 = pH + \log h \text{ avec } h = \frac{nK_3 + (n-1)(H_3O^+)}{(2-n)(H_3O^+)}.$$

$$\gamma. n = 1 ; \text{ la substitution donne : } pH = \frac{1}{2}(pK_1 + pK_3).$$

c.α. Pour $n = 1,301$, $pH = 9,30$; $pK_3 = 9,94$ ce qui permet de trouver $pK_2 = 9,233$.
Il y a accord complet entre cette théorie simplifiée et la valeur expérimentale.

β. Notons que l'intervalle $pK_3 - pK_2 < 1$ ne permet pas d'attribuer une zone de prédominance à l'espèce (TH^+) ; (cf. $pK_i \pm 1$) d'où la technique de l'énoncé.

II.1.a. Les doublets libres de 3 atomes d'azote peuvent susciter des liaisons covalentes datives avec des ions métalliques ayant des cases quantiques "périphériques" libres en ne parlant pas du champ cristallin, etc...

b. On peut imaginer 3 cases quantiques libres d'un même ion métallique occupées par 3 doublets de N (ligand tridentate).

2.a.

$$(T_p) = (TH^+) + 2(TH_2^{2+}) + 3(TH_3^{3+}) \quad n_T = \frac{(TH^+) + 2(TH_2^{2+}) + 3(TH_3^{3+})}{(T) + (TH^+) + (TH_2^{2+}) + (TH_3^{3+})}.$$

Remplaçons comme en **I.1.**, (TH^+) , (TH_2^{2+}) , (TH_3^{3+}) en fonction de (T) et (H_3O^+) :

n_T a la même expression que n du **I.**, soit :

$$n_T = \frac{K_1K_2(H_3O^+) + 2K_1(H_3O^+)^2 + 3(H_3O^+)^3}{K_1K_2K_3 + K_1K_2(H_3O^+) + K_1(H_3O^+)^2 + (H_3O^+)^3}.$$

$$\text{b. De même, } \alpha_T = \frac{(T)}{(T_\lambda)} = \frac{(T)}{(T) \frac{[K_1K_2K_3 + K_1K_2(H_3O^+) + K_1(H_3O^+)^2 + (H_3O^+)^3]}{K_1K_2K_3}}}$$

$$\alpha_T = \frac{K_1K_2K_3}{K_1K_2K_3 + K_1K_2(H_3O^+) + K_1(H_3O^+)^2 + (H_3O^+)^3}.$$

$$\text{c. } n_T = \frac{(T_p)}{(T_\lambda)} = \frac{(T_p)}{(T)} \frac{(T)}{(T_\lambda)} \Rightarrow n_T = \frac{(T_p)}{(T)} \alpha_T.$$

3.a. T_T et M ne servent pas car :

$$(T) = (T_p) \frac{\alpha_T}{n_T} = \frac{K_1K_2K_3 (T_p)}{K_1K_2(H_3O^+) + 2K_1(H_3O^+)^2 + 3(H_3O^+)^3} \text{ est connu si le pH et } (T_p)$$

sont connus.

$$-\log(T) = pK_1 + pK_2 + pK_3 - \log(T_p) + \log[10^{-(pK_1+pK_2+pH)} + 2.10^{-(pK_1+2pH)} + 3.10^{-3pH}].$$

AN : $-\log(T) = 16,0$; (T) est très petit.

b. $(T_T) - (T_\lambda)$ représente la quantité molaire par unité de volume de T participant à des complexes ; $(M)_0$ étant la concentration initiale d'ions métalliques. Ecrivons :

$$n_c = \frac{[(T_T) - (T_\lambda)]}{(M)_0 N_A V} \cdot N_A V ; N_A = \text{nombre d'Avogadro, } V \text{ le volume.}$$

n_c représente le nombre moyen de ligands par ion métallique

$$\text{Or, } (T_\lambda) = \frac{(T)}{K_1 K_2 K_3} \left[K_1 K_2 K_3 + K_1 K_2 (H_3 O^+) + K_1 (H_3 O^+)^2 + (H_3 O^+)^3 \right].$$

$$\text{Vu le pH, on a : } (T_\lambda) \neq \frac{(T)(H_3 O^+)^3}{K_1 K_2 K_3} ;$$

AN : pH = 3,13, $-\log(T) = 16$, $(T_T) = 0,0900$; $(T_\lambda) = 0,03637$; $n_c = 0,508$.

c.α. Ni^{2+} fixe au maximum deux molécules de diéthylènetriamine, ce cas est stable pour $(T) > 10^{-8}$.

β. Cu^{2+} a un complexe stable avec 1 molécule de ligand par ion, mais peut en avoir davantage pour $(T) \leq 0,1$ mol/L, sans qu'on puisse préciser d'après le graphe.

4.a. On est dans le domaine où le seul ion complexe à considérer est $(Cu T^{2+})$ cf. **3.c.β.**

$$n_c = \frac{(Cu T^{2+})}{(Cu^{2+})_0} ; \text{or } (Cu^{2+}) = (Cu^{2+})_0 - (Cu T^{2+}) = (Cu^{2+})_0 - n_c (Cu^{2+})_0.$$

$$K_4 = \frac{n_c (Cu^{2+})_0}{(Cu^{2+})(1 - n_c)(T)} = \frac{n_c}{(1 - n_c)(T)} ; \text{AN : } K_4 = 1,355 \cdot 10^{16}.$$

$$\text{b. } (T_T) - (T_\lambda) = (Ni T^{2+}) + 2(Ni T_2^{2+}) ; n_c = \frac{(Ni T^{2+})}{(Ni^{2+})_0} + 2 \frac{(Ni T_2^{2+})}{(Ni^{2+})_0}.$$

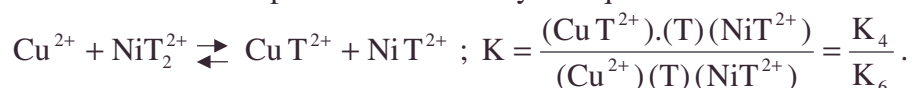
On a une complexation progressive d'abord à 1 ligand puis à 2 ligands.

La donnée $1 < n_c < 2$ signifie que tous les ions sont complexés par un ligand, une partie étant complexée par 2 ligands.

$$\text{Ainsi : } \frac{(Ni T^{2+})}{(Ni^{2+})_0} = 1 \Rightarrow \frac{2(Ni T_2^{2+})}{(Ni^{2+})_0} = n_c - 1.$$

$$K_6 = \frac{(n_c - 1)(Ni^{2+})_0}{2(T)(Ni^{2+})_0} = \frac{1}{2} \frac{(n_c - 1)}{(T)} ; \text{AN : } K_6 = 3,628 \cdot 10^7.$$

c. Etudions le déplacement thermodynamique de :



AN : $K = 3,734 \cdot 10^8$ à 298 K.

Cu^{2+} est plus facilement complexé par T que $Ni T^{2+}$ à T = 298 K.

Cela se conserve à T_{303} et T_{313} .

$$\ln \frac{K_{313}}{K_{303}} = \ln K_{313} - \ln K_{303} = \ln K_{4_{313}} - \ln K_{4_{303}} - (\ln K_{6_{313}} - \ln K_{6_{303}})$$

$$\ln \frac{K_{313}}{K_{303}} = 2,3 [\Delta \log K_4 - \Delta \log K_6].$$

Appliquons la formule de Van'tHoff avec $\Delta_r H^0$ constant sur ce faible intervalle de température:

• **graphe**

$$\textcircled{1} \ln \frac{K_{313}}{K_{303}} = \frac{\Delta_r H^0}{R} \frac{T_{313} - T_{303}}{T_{313} \cdot T_{303}} ; \textcircled{2} \ln \frac{K_{303}}{K_{298}} = \frac{\Delta_r H^0}{R} \frac{T_{303} - T_{298}}{T_{303} \cdot T_{298}} ;$$

$$\textcircled{3} \ln \frac{K_{313}}{K_{298}} = \frac{\Delta_r H^0}{R} \frac{T_{313} - T_{298}}{T_{313} \cdot T_{298}} .$$

$$\textcircled{1} \text{ donne } \frac{\Delta_r H^0}{R} = \frac{T_{313} T_{303}}{T_{313} - T_{303}} \cdot 2,3 (\Delta \log K_4 - \Delta \log K_6) \text{ que l'on remplace vu } \textcircled{2} \text{ et } \textcircled{3} :$$

$$K_{303} = K_{298} \exp \left[2,3 (\Delta \log K_4 - \Delta \log K_6) \frac{T_{313} \cdot T_{303}}{T_{313} - T_{303}} \cdot \frac{T_{303} - T_{298}}{T_{303} \cdot T_{298}} \right] \text{ AN : } K_{303} = 2,932 \cdot 10^8 .$$

$$K_{313} = K_{298} \exp \left[2,3 (\Delta \log K_4 - \Delta \log K_6) \frac{T_{313} \cdot T_{303}}{T_{313} - T_{303}} \cdot \frac{T_{313} - T_{298}}{T_{313} \cdot T_{298}} \right] \text{ AN : } K_{313} = 1,851 \cdot 10^8 .$$

$\forall t \in [30^\circ, 40^\circ]$, la réaction est déplacée, cela indique que le ligand complexe plus facilement Cu^{2+} que NiT^{2+} dans les conditions précisées.

4.2.5. L'élément azote en chimie inorganique

Voir page 1636.

4.2.6. Travaux pratiques de dosages

Voir page 1645.

4.2.7. Argentimétrie classique

Voir page 1660.

4.2.8. Méthode de l'équilibre de contrôle

Voir page 1671.

4.2.9. Polarographie : dosage des ions calcium en présence d' EDTA

Voir page 1685.

4.3. Introduction à la précipitation appartient aux programmes de BCPST1

4.3.1. Solubilité de l'orthophosphate de calcium (engrais insoluble)

On considère l'orthophosphate de calcium $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$.

a. Exprimer le produit de solubilité P_s en fonction des concentrations en solution aqueuse des ions Ca^{2+} et PO_4^{3-} : (Ca^{2+}) et (PO_4^{3-}) .

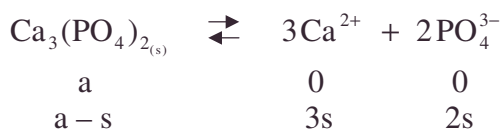
b. Exprimer la solubilité s en fonction des mêmes concentrations.

On donne $P_s = 10^{-26}$ à 25°C .

c. Calculer s .

Capes

Corrigé



a. $P_s = (\text{Ca}^{2+})^3 (\text{PO}_4^{3-})^2$.

b. $s = \frac{1}{2}(\text{PO}_4^{3-}) = \frac{1}{3}(\text{Ca}^{2+})$.

c. $P_s = 27.4s^5$; A.N.: $s = 2,47.10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

4.3.2. Acidité d'un ion dissous $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$

1. Montrer que le couple dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ / chromate CrO_4^{2-} constitue un couple acide base en solution aqueuse.

2. Le pK_A du couple $\frac{1}{2}\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{CrO}_4^{2-}$ étant égal à 7,1 calculer le pH d'une solution de dichromate de potassium initialement à $c = 2.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

3. On ajoute à un litre de la solution précédente, une mole de BaCl_2 qui est un composé soluble.

On donne : $\text{pK}_s(\text{BaCrO}_4) = 9,9$.

Calculer le nouveau pH de la solution.

Que peut-on dire du couple $\left(\frac{1}{2}\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{Ba}^{2+} \right) / \text{BaCrO}_{4(s)}$?

Autres concours

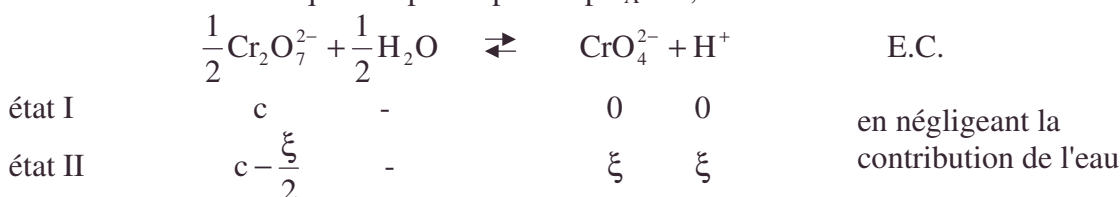
Corrigé



\uparrow
acide en solution aqueuse

\uparrow
base conjuguée en solution aqueuse vu l'apparition de H^+

2. Bilan molaire d'un équilibre peu déplacé : $pK_A = 7,1$.



L'équilibre étant peu déplacé, $\xi \ll c$:

$$(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) \approx c ; (\text{CrO}_4^{2-}) = (\text{H}^+) = \xi$$

$$K_A = \frac{(\text{CrO}_4^{2-})(\text{H}^+)}{(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-})^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\text{H}^+)^2}{c^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2} \left(pK_A + \frac{1}{2} pc \right).$$

A.N. : $\text{pH} = 4,0$. Remarque : $\text{pH} \neq \frac{1}{2}(pK_A + pc)$.

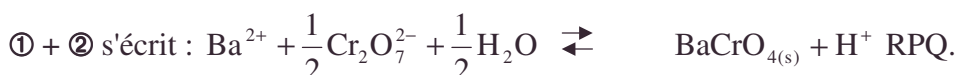
3. $\text{BaCl}_2 \rightarrow 2\text{Cl}^- + \text{Ba}^{2+}$ RP1 réaction totale



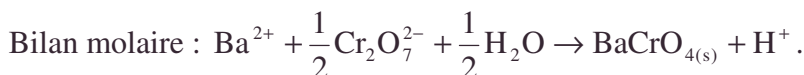
La réaction de précipitation est quasi totale.

② consomme CrO_4^{2-} et déplace ① totalement, vu l'excès de Ba^{2+} ;

éliminons l'intermédiaire minoritaire CrO_4^{2-} .



On peut s'assurer que la constante de cet équilibre est grande $K = \frac{K_A}{K_s} = 6.10^2$.



$\text{pH} = -\log 2c$; A.N. : $\text{pH} = 1,4$.

Ba^{2+} a transformé $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{H}_2\text{O}$ en acide fort par le biais thermodynamique de la précipitation de BaCrO_4 ; le couple $\frac{1}{2}\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{Ba}^{2+} / \text{BaCrO}_{4(s)}$ est celui d'un acide fort.

4.3.3. **Dissolution du calcaire par l'eau de pluie** - Voir page 1626.

4.3.4. **Diverses mesures de la constante d'acidité de l'acide acétique**

Voir page 1630.

4.3.5. **Acide chlorhydrique**

Voir page 1634.

4.3.6. **Précipitation simple de sulfure**

Voir page 1640.

4.3.7. **Sulfure de zinc**

Voir page 1642.

4.3.8. **Travaux pratiques de dosages**

Voir page 1645.

4.3.9. **Dosage argentimétrique**

Voir page 1658.

4.3.10. **Argentimétrie classique**

Voir page 1660.

4.3.11. **Précipitations du cadmium II**

Voir page 1666.

4.3.12. **Méthode de l'équilibre de contrôle**

Voir page 1671.

4.4. Oxydoréduction

appartient aux programmes de PTSI, MP, PSI, PC, BCPST2, TPC2,
sauf éventuellement les diagrammes potentiels pH

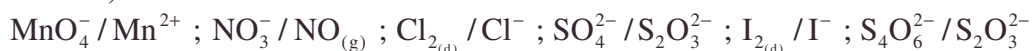
4.4.1. Premiers pas

1. Déterminer le degré d'oxydation de l'azote dans les composés suivants :



2. Quel est le degré d'oxydation de l'oxygène dans le peroxyde d'hydrogène $\text{H}-\text{O}-\text{O}-\text{H}$?

3.a. Ecrire les coefficients stœchiométriques des couples rédox suivants en milieu acide (d = dissous) :



b. Ecrire la formule de Nernst pour les deux premiers couples, sachant que :

$$\text{pour le premier, } E_1^0 = 1,50 \text{ V et pour le second, } E_2^0 = 0,96 \text{ V}.$$

4. Ecrire les réactions en solutions aqueuses :

a. Du dichlore dissous $\text{Cl}_{2(\text{d})}$ sur l'ion $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$,

b. Du diiode dissous $\text{I}_{2(\text{d})}$ sur l'ion $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$. Quel est le nom de l'indicateur colorimétrique utilisé pour détecter la fin de la réaction ?

Capes

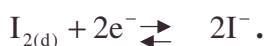
Corrigé

1. Le degré d'oxydation de O est -II, celui de H : +I ; pour assurer les échanges formels d'électrons assurant la charge totale de chaque édifice, il faut :

	NH_3	NH_4^+	NO	NO_2	HNO_2	HNO_3
DO	-III	-III	+II	+IV	+III	+V

2. La symétrie dans la répartition des électrons entre les deux oxygènes permet de trouver un DO = -I (exception des peroxydes).

3.a. $\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}.$



$$\text{b. } E_1 = 1,50 + \frac{0,059}{5} \log_{10} \frac{(\text{MnO}_4^-)(\text{H}^+)^8}{(\text{Mn}^{2+})}.$$

$$E_2 = 0,96 + \frac{0,059}{3} \log_{10} \frac{(\text{NO}_3^-)(\text{H}^+)^4}{P_{\text{NO}}}.$$

N.B. : l'activité de $\text{NO}_{(\text{g})}$ a la valeur de P_{NO} exprimée en bar.

4.a. $\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 4\text{Cl}_{2(\text{d})} + 5\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 8\text{Cl}^- + 2\text{SO}_4^{2-} + 10\text{H}^+$

car $\text{Cl}_{2(\text{s})}$ est plus oxydant que $\text{I}_{2(\text{d})}$.



Oxydoréduction

l'empois d'amidon est l'indicateur colorimétrique usuel pour détecter la fin de la réaction, devenant ou restant violet en présence de $I_{2(d)}$.

4.4.2. Oxydation du méthanoate par le brome

1. On considère une solution aqueuse contenant de l'acide méthanoïque de concentration molaire C_1 et de l'acide chlorhydrique de concentration C_2 .

L'acide méthanoïque est un acide faible de constante. $K_A = 1,77 \cdot 10^{-4}$.

Calculer la concentration molaire (HCO_2^-) des ions méthanoates à l'équilibre.

Application numérique : $C_1 = C_2 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

2. On considère maintenant la réaction d'oxydation de l'ion méthanoate par le dibrome en solution aqueuse. Ecrire les demi réactions d'oxydoréduction des couples $Br_{2(d)}/Br^-$ que l'on supposera totales. Le mélange réactionnel initial est réalisé à partir du mélange d'acide méthanoïque et d'acide chlorhydrique étudié ci-dessus auquel on ajoute du brome liquide.

On rappelle que HBr est un acide fort en solution aqueuse. Le gaz CO_2 est éliminé et ne joue aucun rôle, l'addition de brome liquide n'entraîne aucune variation du volume total. Comparer en début et en fin de réaction les concentrations des ions méthanoates.

Application numérique : $C_1 = C_2 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$; $(Br_2) = a = 0,003 \text{ mol.L}^{-1}$.

3. On plonge une électrode de référence et une électrode de platine dans la solution précédente suffisamment additionnée d'ions bromures (sans variation de volume).

Donner l'expression de la force électromotrice de la pile ainsi constituée faisant intervenir les concentrations ($Br_{2(d)}$) et (Br^-). Montrer que cette force électromotrice est une fonction affine du temps, si l'ordre partiel de la réaction par rapport à ($Br_{2(d)}$) est égal à un.

Air

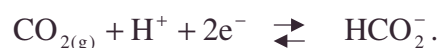
Corrigé

1. $C_1 = C_2$; on a un mélange équimolaire d'acides faible et fort. Le pH est imposé par l'acide fort ; $pH = -\log C_2$. A.N. : $pH = 1$.

La dissociation de l'acide faible est négligeable : $(HCO_2H) = C_1$ à $pH = 1$.

$$\text{Or, } K_A = \frac{(H^+)(HCO_2^-)}{(HCO_2H)} \Rightarrow (HCO_2^-) = \frac{C_1 K_A}{C_2} \Rightarrow (HCO_2^-) = 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

2.α. Les couples sont : $Br_{2(d)} + 2e^- \rightleftharpoons 2Br^-$. On ne soulèvera pas de difficulté dans cet exercice vu le manque de données sur le distingo $Br_{2(l)}, Br_{2(d)}$ d'une part, $CO_{2(aq)}, CO_{2(g)}$ d'autre part.



La réaction totale est : $Br_{2(l)} + HCO_2^- \rightleftharpoons CO_{2(g)} + H^+ + 2Br^-$.

β. Comme l'espèce majoritaire en milieu acide est HCO_2H , on écrira :



Bilan molaire : début :	a	c_1	0	c_2	b
fin :	$a - \xi$	$c_1 - \xi$	0	$c_2 + 2\xi$	$b + 2\xi$

avec $\xi = a$ car la réaction totale élimine le réactif minoritaire.

- acide méthanoïque, concentration molaire, électrode de platine, électrode de référence, empois d'amidon, force électromotrice de pile, mélange équimolaire, méthanoate, ordre partiel

Ainsi, (HCO_2H) varie de c_1 à $c_1 - a$ et (H^+) de c_2 à $c_2 + 2a$; or $(\text{HCO}_2^-) = \frac{(\text{HCO}_2\text{H})}{(\text{H}^+)} K_A$.

(HCO_2^-) varie de $(\text{HCO}_2^-)_{\text{début}} = K_A \frac{a}{c_1} = 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ à $(\text{HCO}_2^-)_{\text{fin}} = \frac{(c_1 - a)}{c_2 + 2a} K_A$;

AN : $(\text{HCO}_2^-)_{\text{fin}} = 1,62 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

$$\frac{(\text{HCO}_2^-)_{\text{fin}}}{(\text{HCO}_2^-)_{\text{début}}} = \frac{c_1 \left(1 - \frac{a}{c_1}\right)}{\frac{c_1}{c_2} c_2 \left(1 + \frac{2a}{c_2}\right)} = 1 - \frac{3a}{c} ; \text{AN : } \frac{(\text{HCO}_2^-)_{\text{fin}}}{(\text{HCO}_2^-)_{\text{début}}} = 0,915.$$

La production de H^+ n'est pas négligeable. Le pH final est 0,975.

3.α. $\text{Br}_{2(\text{d})} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons 2\text{Br}^-$.

$$E = E_{\text{Br}_2/\text{Br}^-}^0 + 0,03 \log_{10} \frac{(\text{Br}_{2(\text{d})})}{(\text{Br}^-)^2}.$$

$v = \frac{d\xi}{dt} = k(\text{Br}_2)(\text{HCO}_2\text{H})^\beta$ au début : on pourra écrire $(\text{HCO}_2\text{H}) \approx c_1$

$$\Rightarrow \frac{d(\text{Br}_2)}{dt} = -K(\text{Br}_2) \Rightarrow (\text{Br}_{2(\text{d})}) = a e^{-Kt}.$$

On suppose pouvoir pratiquer une démarche analogue en ayant introduit $(\text{Br}^-)_0 = b \gg 2\xi$ soit $(\text{Br}^-) = b + 2\xi \approx b$; .

$$(\text{Br}_{2(\text{d})}) = a e^{-Kt} \Rightarrow \log_{10}(\text{Br}_{2(\text{d})}) = \frac{\ln(a e^{-Kt})}{\ln 10} = \frac{-Kt}{\ln 10} + \log a ,$$

avec $\ln 10 = 2,30$;

$$\Rightarrow E = \left(E_{\text{Br}_2/\text{Br}^-}^0 + 0,03 \log \frac{a}{b^2} \right) - \frac{0,03 Kt}{\ln 10}, \text{ fonction affine du temps.}$$

4.4.3. Dosage des ions ferreux par les ions cériques

En milieu sulfurique (H_2SO_4 : $A \text{ mol.L}^{-1}$ avec $A > 1$) les potentiels normaux apparents expérimentaux des couples $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ et $\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$ sont respectivement 0,68 V et 1,44 V.

On se propose d'étudier la courbe de dosage d'une solution contenant 0,1 mole par litre d'ions ferreux Fe^{2+} par une solution contenant 0,1 mole par litre d'ions cériques Ce^{4+} .

Dans un récipient contenant $v_0 = 10 \text{ cm}^3$ de sel ferreux plonge une électrode de platine. Un pont salin relie la solution à une électrode de référence au calomel saturé (0,25 V. par rapport à l'électrode normale à hydrogène). Le circuit électrique est fermé par un voltmètre d'impédance infinie. On désigne par n le nombre de cm^3 de solution cérique introduite.

1. Calculer la constante d'équilibre K pour l'équilibre $\text{Fe}^{2+} + \text{Ce}^{4+} \rightleftharpoons \text{Fe}^{3+} + \text{Ce}^{3+}$.

2. Le dosage peut-il être considéré comme quantitatif ?

3. Calculer le potentiel E de la solution. On prendra $2,3 \frac{RT}{F} = 0,06$.

On donnera : $E = f(n)$ pour $0 < n < 10$
 $E = g(n)$ pour $10 < n$
 E pour $n = 10$

Pour cela on montrera que pour $n < 10$ les espèces qui prédominent sont Fe^{2+} , Fe^{3+} , Ce^{3+} et on cherchera quelles sont celles qui prédominent pour $n > 10$.

4. Dresser un tableau donnant l'indication U du voltmètre ainsi que le potentiel E par rapport à l'électrode normale à hydrogène pour les différentes valeurs de n :

$$n = 1 - 5 - 9 - 9,9 - 9,99 - 10 - 10,01 - 10,1 - 11 - 15 - 20$$

5. Justifier les approximations faites en 3. sur les exemples $n = 9,99$ et $n = 10,01$.

6. Tracer la courbe $U = f(n)$. Conclure.

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé



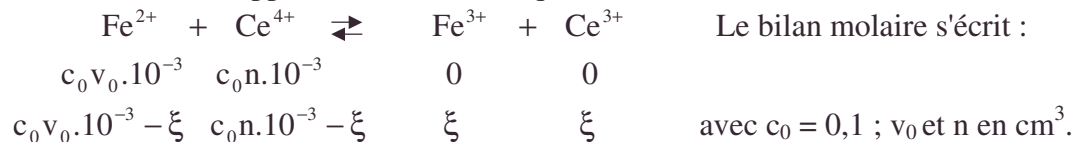
$$E_1 = E_1^0 + 0,06 \log \frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = E_2 = E_2^0 + 0,06 \log \frac{(\text{Ce}^{4+})}{(\text{Ce}^{3+})}.$$

$$\frac{E_2^0 - E_1^0}{0,06} = \log \frac{(\text{Fe}^{3+})(\text{Ce}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})(\text{Ce}^{4+})} \Rightarrow K = 10^{\frac{E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}^0 - E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0}{0,06}}. \text{ AN : } K = 4,64 \cdot 10^{12}.$$

2. L'équilibre sera totalement déplacé si la cinétique le permet.

Le dosage quantitatif est donc possible ; si la cinétique est rapide, le dosage quantitatif est pratique.

3. Dans le cadre supposé, la réaction est quasi totale :



a. $n < v_0$: Ce^{4+} disparaît totalement et $\xi = c_0 n \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}^{2+} & + & \text{Ce}^{4+} & \rightleftharpoons & \text{Fe}^{3+} & + & \text{Ce}^{3+} \\ t_{\text{eq}} & c_0 (v_0 - n) \cdot 10^{-3} & 0 & & c_0 n \cdot 10^{-3} & & c_0 n \cdot 10^{-3} \\ E = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 & + 0,06 \log \frac{c_0 n \cdot 10^{-3}}{c_0 (v_0 - n) 10^{-3}} & ; \text{ AN : } E = 0,68 + 0,06 \log \frac{n}{n_0 - n}. \end{array}$$

b. $n > v_0$: Fe^{2+} a disparu ; $\xi = c_0 v_0 \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}^{2+} & + & \text{Ce}^{4+} & \rightleftharpoons & \text{Fe}^{3+} & + & \text{Ce}^{3+} \\ t_{\text{eq}} & 0 & c_0 (n - v_0) \cdot 10^{-3} & & c_0 v_0 \cdot 10^{-3} & & c_0 v_0 \cdot 10^{-3} \\ E = E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}^0 & + 0,06 \log \frac{c_0 (n - v_0) \cdot 10^{-3}}{c_0 v_0 \cdot 10^{-3}} & ; \text{ AN : } E = 1,44 + 0,06 \log \frac{n - v_0}{v_0}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{c. } n = v_0 ; & \text{Fe}^{2+} & + & \text{Ce}^{4+} & \rightleftharpoons & \text{Fe}^{3+} & + & \text{Ce}^{3+} \\ & c_0 v_0 \cdot 10^{-3} & & c_0 v_0 \cdot 10^{-3} & & 0 & & 0 \\ & c_0 v_0 \cdot 10^{-3} - \xi & & c_0 v_0 \cdot 10^{-3} - \xi & & \xi & & \xi \\ E = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 & + 0,06 \log \frac{\xi}{c_0 v_0 \cdot 10^{-3} - \xi} = E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}^0 & + 0,06 \log \frac{c_0 v_0 \cdot 10^{-3} - \xi}{\xi}. \end{array}$$

• cinétique, courbe, dosage quantitatif, électrode normale à hydrogène, potentiel de la solution, tableau, voltmètre

$$2,0,06 \log \frac{\xi}{c_0 v_0 \cdot 10^{-3} - \xi} = E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}^0 - E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 \Rightarrow E = \frac{E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 + E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{2+}}^0}{2}.$$

A.N. : $E = 1,06 \text{ V}$.

4. $U = E - E_{\text{calomel}} = E - 0,25$.

n	1	5	9	9,9	9,99	10	10,01	10,1	11	15	20
E	0,62	0,68	0,74	0,80	0,86	1,06	1,26	1,32	1,38	1,42	1,44
U	0,37	0,43	0,49	0,55	0,61	0,81	1,01	1,07	1,13	1,17	1,19

5.a. $n = 9,99$; $\xi = c_0 v_0 \cdot 10^{-3}$ car $(\text{Ce}^{4+}) \neq 0$.

$$\xi = (\text{Fe}^{3+}) = (\text{Ce}^{3+}) ; \text{ or } K = \frac{(\text{Ce}^{3+})(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Ce}^{4+})(\text{Fe}^{2+})} \Rightarrow (\text{Ce}^{4+}) = \frac{(c_0 n \cdot 10^{-3})^2}{c_0 (v_0^2 - n^2) \cdot 10^{-3} K} \text{ (en tenant}$$

compte de la dilution).

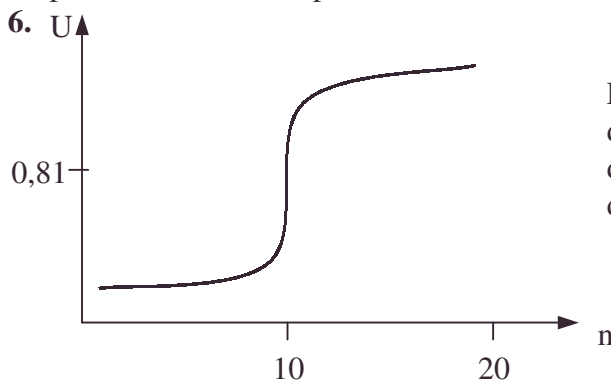
AN : $(\text{Ce}^{4+}) = 1,1 \cdot 10^{-14}$; cette cohérence constitue la vérification.

b. $n = 10,01$; $\xi = c_0 v_0 \cdot 10^{-3}$ car $(\text{Fe}^{2+}) \neq 0$.

$$\xi = (\text{Fe}^{3+}) = (\text{Ce}^{3+}) ; \text{ or } K = \frac{(\text{Ce}^{3+})(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Ce}^{4+})(\text{Fe}^{2+})} \Rightarrow (\text{Fe}^{2+}) = \frac{(c_0 v_0 \cdot 10^{-3})^2}{10^{-3} \cdot c_0 (n^2 - v_0^2) K}.$$

AN : $(\text{Fe}^{2+}) = 1,1 \cdot 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1}$; hypothèse vérifiée.

La pente entre les deux points est de 20 V/cm^3 .

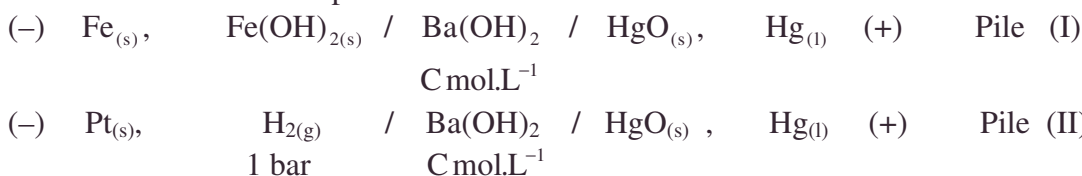


Le saut de potentiel (quasi discontinuité) permet la mesure de n et donc de doser Fe^{2+} indépendamment des valeurs expérimentales de tension.

4.4.4. Etude thermodynamique des piles

Données utiles : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; $\mathcal{F} = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$.

1. On considère les deux piles suivantes :



On précise que Fe, $\text{Fe}(\text{OH})_2$, HgO, Pt, Hg sont des espèces chimiques pures à l'état condensé ; l'hydroxyde de baryum $\text{Ba}(\text{OH})_2$ est un composé ionique dissous en solution aqueuse à une concentration donnée quelconque (C mol.L^{-1}) inférieure à la limite de précipitation.

A 298 K la force électromotrice (f.e.m.) de la pile (I) vaut $e_1 = 973 \text{ mV}$, celle de la pile (II) vaut $e_2 = 926 \text{ mV}$. En outre l'enthalpie libre standard de formation à 298 K d'une mole d'eau est de $-236,53 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

a. Montrer que les f.e.m. des piles (I) et (II) ne dépendent pas de C.

b. Déterminer l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^0$ correspondant à la formation d'une mole de $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$ à 298 K à partir de ces éléments.

2. La f.e.m. de la pile électrochimique suivante est $e_3 = 0,490$ Volt à 298 K :



Les espèces Pb, PbCl_2 , AgCl, Ag sont des solides purs en contact avec une solution aqueuse d'acide chlorhydrique ; on rappelle que PbCl_2 et AgCl sont des chlorures peu solubles dans l'eau.

La f.e.m. (E) de la pile considérée varie avec la température avec un coefficient de température valant : $-1,84 \cdot 10^{-4} \text{ V.K}^{-1}$; les tables thermodynamiques donnent à 298 K les entropies molaires standard suivantes exprimées en $\text{J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

	$\text{Pb}_{(s)}$	$\text{Ag}_{(s)}$	$\text{AgCl}_{(s)}$
s°	64,82	42,66	96,19

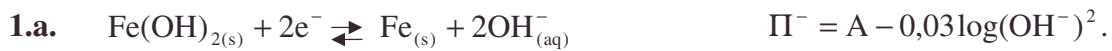
a. Montrer que la f.e.m. (E) de cette pile ne dépend pas de la concentration de l'acide chlorhydrique dissous.

b. Calculer la variation d'enthalpie libre de la réaction chimique qui a lieu dans la pile.

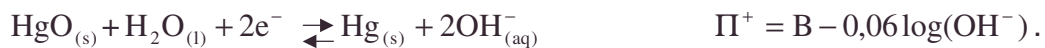
c. Déterminer l'entropie standard d'une mole de $\text{PbCl}_{2(s)}$ à 298 K.

Centrale ; Durée : 1h

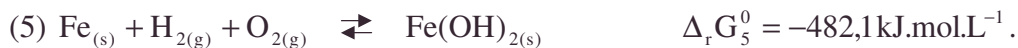
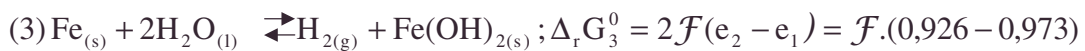
Corrigé



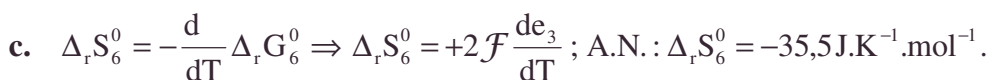
$e = \pi^+ - \pi^- = B - A$, indépendant de C, concentration de Ba^{2+} .



$e' = \Pi^+ - \Pi^- = B - D$ indépendant de C.



$e = \Pi^+ - \Pi^- = B_1 - A_1$ indépendant de la concentration de H^+ (cf. HCl).



• enthalpie libre standard de formation, entropie standard molaire, force électromotrice de pile, variation d'enthalpie libre de la réaction, variation d'enthalpie libre de la réaction

$$\text{or, } \Delta_r S_6^0 = s_{\text{PbCl}_2(s)}^0 + 2s_{\text{Ag(s)}}^0 - s_{\text{Pb(s)}}^0 - 2s_{\text{AgCl(s)}}^0 \\ \Rightarrow s_{\text{PbCl}_2}^0 = \Delta_r S_6^0 - 2s_{\text{Ag(s)}}^0 - s_{\text{AgCl(s)}}^0 + s_{\text{Pb(s)}}^0 ; \text{A.N.: } s_{\text{PbCl}_2}^0 = 136,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.$$

4.4.5. Diagramme potentiel-pH du plomb

Accu au plomb

n'appartient pas aux programmes des PTSI, TSI1

N.B. : Dans l'ensemble de l'épreuve, on recommande d'utiliser la notation simplifiée H^+ (au lieu de H_3O^+) pour désigner le proton en solution.

Dans ce problème, on se propose d'étudier certaines propriétés acido-basiques et oxydo-réductrices des composés du plomb et leur application à la théorie de l'accumulateur au plomb. Pour simplifier les calculs, on assimilera activités et concentrations.

La constante $\frac{RT}{F} \ln 10$ sera prise égale à 0,06 volt, le faraday \mathcal{F} à 96500 coulombs.mol⁻¹

et le produit ionique de l'eau à $K_i = 10^{-14}$.

On exprimera les potentiels en volts, en limitant la précision à la 2^{ème} décimale.

1. Le produit de solubilité de l'hydroxyde de plomb Pb(OH)_2 vaut $P_s = 4.10^{-15}$.

a. Exprimer la solubilité en mol.L⁻¹ de cet hydroxyde (c'est-à-dire la concentration de l'ion Pb^{2+} en équilibre avec Pb(OH)_2), en fonction de la concentration en H^+ .

b. Tracer la courbe $\log(\text{Pb}^{2+}) = f(\text{pH})$ entre pH = 0 et pH = 14.

c. En déduire le pH de précipitation de Pb(OH)_2 en solution de Pb^{2+} de concentration égale à 1 mol.L⁻¹.

2. On opère maintenant dans une solution contenant initialement de l'acide sulfurique, dont on fait varier le pH de -1 à 14. on désignera dans ce qui suit par soufre dissous, l'ensemble des espèces en solution dérivant de cet acide.

a. Les pK de l'acide sulfurique valent respectivement $\text{pK}_1 = -\infty$; $\text{pK}_2 = 1,9$.

Sous quelle forme prédominante se trouve le soufre dissous dans les domaines de pH à considérer ?

b. Le produit de solubilité du sulfate de plomb PbSO_4 vaut $P_s' = 10^{-8}$. Dans chacun des deux domaines définis ci-dessus et pour une solution contenant au total 4 moles par litre de soufre dissous, exprimer la solubilité en mol.L⁻¹ du sulfate de plomb (c'est-à-dire de la concentration de l'ion Pb^{2+} en équilibre avec PbSO_4) en fonction de la concentration en H^+ . On considérera que le soufre dissous se trouve uniquement sous la forme prédominante dans chaque domaine de pH.

c. Tracer la courbe $\log(\text{Pb}^{2+}) = f(\text{pH})$ correspondante entre pH = -1 et pH = 14.

d.1. En comparant cette dernière courbe à celle obtenue en 1.b. pour la solubilité de l'hydroxyde de plomb, montrer que dans une solution contenant 4 mol.L⁻¹ de soufre dissous, le sulfate de plomb est plus stable que l'hydroxyde au-dessous d'un certain pH que l'on calculera.

2. Ecrire l'équation de la réaction de transformation de PbSO_4 en Pb(OH)_2 au-dessus de ce pH (réaction ①).

3. Comment appelle-t-on ce type de réaction ?

3. On donne le potentiel normal du couple redox $\text{Pb}^{+2} / \text{Pb}$ soit -0,13 volt.

• activité, courbe, diagramme potentiel-pH, hydroxyde de plomb, plomb, précision, produit de solubilité, produit ionique, solubilité, soufre dissous

a. Ecrire les équations correspondant au couple redox $\text{PbSO}_{4(s)} / \text{Pb}_{(s)}$ dans les deux domaines de pH à considérer (équations ② et ②').

b. On suppose toujours la concentration en soufre dissous égale à 4 mol.l^{-1} . A partir de la valeur donnée ci-dessus pour le potentiel normal du couple $\text{Pb}_2^+ / \text{Pb}$, et de l'expression précédemment obtenue pour la solubilité du sulfate de plomb, calculer les potentiels redox E_2 et E'_2 des couples ② et ②' en fonction du pH.

4. Le plomb peut aussi former un dioxyde PbO_2 insoluble. Le potentiel normal du couple redox $\text{PbO}_2 / \text{Pb}^{2+}$ vaut 1,48 volt.

a. Ecrire les équations correspondant au couple redox $\text{PbO}_2 / \text{PbSO}_4$ dans les deux domaines de pH à considérer (équations ③ et ③').

b. Calculer les potentiels redox E_3 et E'_3 des couples ③ et ③' en fonction du pH dans les mêmes conditions que ci-dessus (concentration en soufre dissous = 4 mol.l^{-1}).

5.a. Placer sur un diagramme potentiel – pH les droites correspondant aux équations ②, ②', ③ et ③' ainsi qu'à l'équation ① de passage de PbSO_4 à Pb(OH)_2 (cf. **2.d.2.**). On fera varier le pH de -1 à 14 .

b. Quel est, sur ce diagramme, le domaine de prédominance de PbSO_4 ?

c. Au-delà du pH correspondant à la réaction ①, Pb(OH)_2 devient l'espèce prédominante.

1. Quels sont alors les deux nouveaux couples redox à considérer ?

2. Ecrire les équations correspondant à ces couples (équations ④ et ⑤).

3. Calculer les potentiels redox E_4 et E_5 des couples ④ et ⑤ en fonction du pH, à partir des valeurs des potentiels standards données ci-dessus pour les couples $\text{Pb}^{2+} / \text{Pb}$ ($-0,13\text{V}$) et $\text{PbO}_2 / \text{Pb}^{2+}$ ($1,48\text{V}$).

d. Placer les droites correspondantes sur le diagramme potentiel – pH construit en **5.a.**

e. Préciser l'espèce prédominante dans chaque zone du diagramme.

6. Un accumulateur au plomb chargé est constitué d'une électrode positive en PbO_2 et d'une électrode négative en plomb. L'électrolyte est une solution d'acide sulfurique de concentration $c = 4 \text{ mol.l}^{-1}$.

a. Quel est le pH de l'électrolyte et sous quelle forme prédominante se trouve le soufre en solution ?

b. En admettant que, pendant la décharge, PbO_2 au pôle positif et Pb au pôle négatif se transforment tous deux en PbSO_4 selon les équations écrites en **3.a.** et **4a.**, calculer la force électromotrice (f.é.m.) E à l'équilibre de l'accumulateur chargé.

c. Quelle est la réaction globale de décharge ?

d. Calculer l'enthalpie libre $\Delta_r G$ de cette réaction. On donnera naturellement ce résultat avec le nombre de chiffres significatifs correspondant à la précision demandée pour les valeurs des potentiels.

e. L'expérience montre que la f.é.m. varie de $+0,2 \text{ mV}$ par degré autour de 25°C .

1. En déduire l'entropie $\Delta_r S$ de la réaction globale.

2. Calculer l'enthalpie $\Delta_r H$ de cette réaction à $T = 298 \text{ K}$.

3. Comment tend à évoluer la température de l'accumulateur au cours d'une décharge réversible ?

CCP ; Durée 1h30.

Corrigé

$$\mathbf{1.a.} (\text{Pb}^{2+}) = \frac{P_s}{(\text{OH}^-)^2} = \frac{P_s}{K_i^2} (\text{H}^+)^2 \Rightarrow (\text{Pb}^{2+}) = 4.10^{13} (\text{H}^+)^2.$$

• accumulateur au plomb, diagramme potentiel-pH, domaine de prédominance, électrode en plomb, potentiel normal, précision, solubilité, soufre dissous, variation d'enthalpie libre de la réaction, variation d'entropie de la réaction

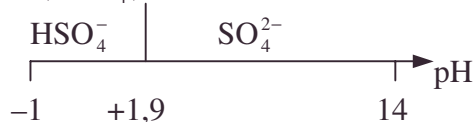
b. $\log_{10}(\text{Pb}^{2+}) = 13,60 - 2\text{pH}$.

c. $\log_{10}(\text{Pb}^{2+}) = 0 \Rightarrow \text{pH} = 6,80$.

2.a. H_2SO_4 est un acide fort



$K_2 = \frac{(\text{H}^+)(\text{SO}_4^{2-})}{(\text{HSO}_4^-)}$. On obtient le diagramme de prédominance :



A.N. : $\text{p}K_2 = 1,9$.

b.α. $-1 < \text{pH} < 1,9$; $(\text{HSO}_4^-) = 4 \Rightarrow (\text{SO}_4^{2-}) = K_2 \frac{(\text{HSO}_4^-)}{(\text{H}^+)}$.

$(\text{Pb}^{2+}) = \frac{P'_s}{(\text{SO}_4^{2-})} = \frac{P'_s}{K_2(\text{HSO}_4^-)}(\text{H}^+)$; A.N. : $\text{Pb}^{2+} = 1,98 \cdot 10^{-7}(\text{H}^+)$;

$\log(\text{Pb}^{2+}) = -6,70 - \text{pH}$.

β. $1,9 < \text{pH} < 14$; $P'_s = (\text{Pb}^{2+})(\text{SO}_4^{2-})$; $P_s = (\text{Pb}^{2+})(\text{OH}^-)^2$.

Les essais étant faits à différents pH avec $(\text{SO}_4^{2-}) = 4$ en introduisant juste ce qu'il faut de (Pb^{2+}) .

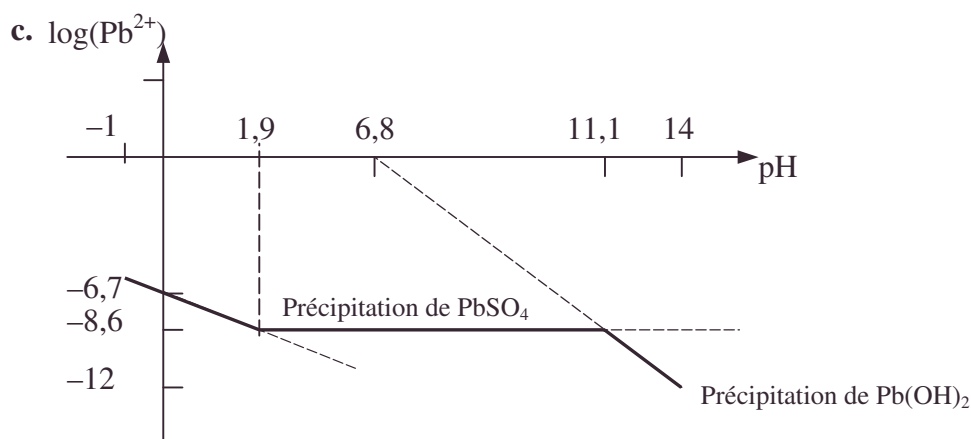
$(\text{Pb}^{2+}) = \frac{P'_s}{(\text{SO}_4^{2-})}$; A.N. : $(\text{Pb}^{2+}) = 0,25 \cdot 10^{-8}$ quand précipitation de PbSO_4 . (cf. 1.a.).

$(\text{Pb}^{2+}) = 4 \cdot 10^{13}(\text{H}^+)^2$ quand précipitation de $\text{Pb}(\text{OH})_2$.

- Comparons les solubilités des deux précipités.
- Précipitation des deux pour $4 \cdot 10^{13}(\text{H}^+)^2 = 0,25 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \text{pH} = 11,1$.
- $\text{pH} > 11,1$ $(\text{Pb}^{2+}) < 0,25 \cdot 10^{-8}$: PbSO_4 ne précipite pas, seul $\text{Pb}(\text{OH})_2$ précipite.

$1,9 < \text{pH} < 11,1$; $(\text{Pb}^{2+}) > 0,25 \cdot 10^{-8}$; PbSO_4 précipite.

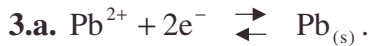
Remarque : $\text{Pb}(\text{OH})_2$ ne peut précipiter (cf. courbe), PbSO_4 est plus insoluble car nécessitant moins de Pb^{2+} pour obtenir la précipitation).



d.1. cf. 2.b.β. et 2.c. à $\text{pH} < 11,1$ PbSO_4 précipite et non $\text{Pb}(\text{OH})_2$: PbSO_4 est donc plus stable.

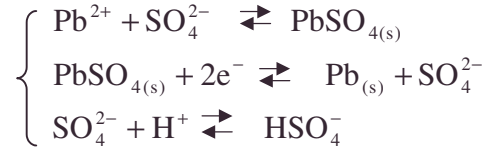


3. Réaction de déplacement de précipité.

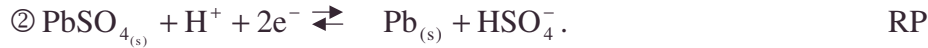


$-1 < \text{pH} < 1,9$: $\text{Pb}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Pb}_{(\text{s})}$; $E = -0,13 + 0,03 \log_{10}(\text{Pb}^{2+})$.

Éliminons Pb^{2+} et SO_4^{2-} minoritaires figurant dans :

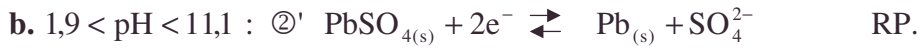


On peut adopter l'écriture ne laissant apparaître que les espèces prédominantes.

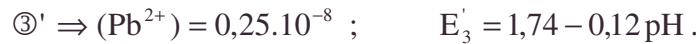
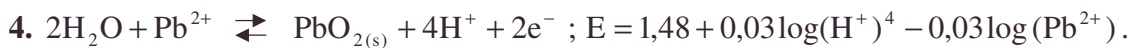


$$(\text{Pb}^{2+}) = \frac{P'_s(\text{H}^+)}{K_2(\text{HSO}_4^-)} ; \text{A.N.} : (\text{Pb}^{2+}) = 1,98 \cdot 10^{-7} (\text{H}^+) \Rightarrow E_2 = -0,33 - 0,03 \text{pH}$$

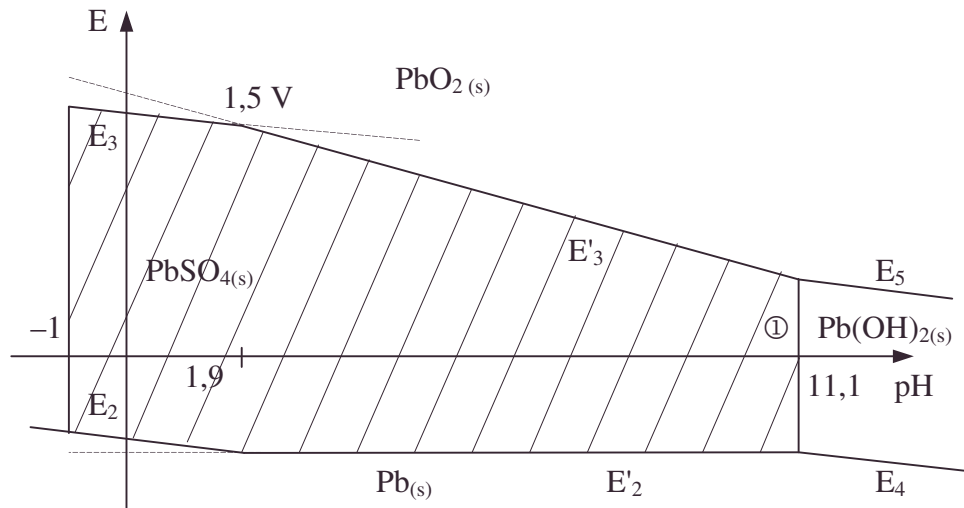
à $(\text{H}_2\text{SO}_4) = 4 \text{ mol.L}^{-1}$



$$(\text{Pb}^{2+}) = \frac{P'_s}{(\text{SO}_4^{2-})} ; \text{A.N.} : (\text{SO}_4^{2-}) = 4 \Rightarrow (\text{Pb}^{2+}) = 0,25 \cdot 10^{-8} \Rightarrow E'_2 = -0,39 \text{ V } \forall \text{pH.}$$

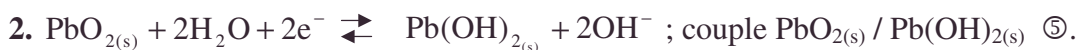
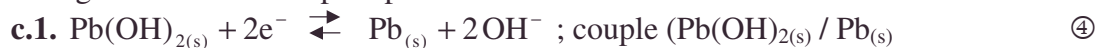


5.a.



b. Le domaine de prédominance de PbSO_4 est :

- au-dessus de E_2, E'_2 car PbSO_4 en est l'oxydant.
- au-dessous de E_3, E'_3 car PbSO_4 en est le réducteur.
- à gauche de ① vu la précipitation différentielle



$$3. (\text{Pb}^{2+}) = \frac{P_s}{(\text{OH}^-)^2} = \frac{P_s}{K_e^2} (\text{H}^+)^2 ; 3. \text{ donne } E_4 = 0,28 - 0,06 \text{ pH}.$$

$$4. \text{ donne } E_5 = 1,07 - 0,06 \text{ pH}.$$

d. cf. diagramme E, pH.

e.α. Zone de prédominance de $\text{Pb}(\text{OH})_{2(s)}$:

- à droite de ① vu la précipitation différentielle.
- au-dessus de E_4 car $\text{Pb}(\text{OH})_2$ en est l'oxydant.
- au-dessous de E_5 car $\text{Pb}(\text{OH})_2$ en est le réducteur.

β. Zone de prédominance de $\text{Pb}_{(s)}$:

C'est le réducteur intervenant dans ②, ②', ④ ; il est en-dessous des domaines de $\text{PbSO}_{4(s)}$ et $\text{Pb}(\text{OH})_2$.

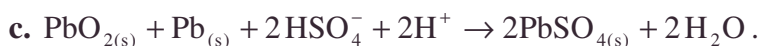
γ. Zone de prédominance de $\text{PbO}_{2(s)}$:

C'est l'oxydant intervenant dans ③, ③', ⑤ ; il est au-dessus des domaines de $\text{PbSO}_{4(s)}$ et $\text{Pb}(\text{OH})_{2(s)}$.

6.a. Négligeons la 2^{ème} acidité devant la plus forte : $\text{pH} = \text{pc} = \log 4 = -0,6 \Rightarrow \text{HSO}_4^-$ est prépondérant.

b. En absence de décharge, ou à sa limite ,

$$E = E_3 - E_2 = 2,01 - 0,06\text{pH} ; \text{A.N. : } E = 2,05 \text{ V}$$



d. $\Delta_r G = -2\mathcal{F}E$; A.N.: $\Delta_r G = -395 \text{ kJ.mol}^{-1}$. On va récupérer de l'énergie.

Remarque : quand on passe de 0,059 à 0,06, on passe E de 2,04 à 2,06 V, $\Delta_r G$ passe de $-394,68$ à $-395,65 \text{ kJ.mol}^{-1}$; on arrondira à -395 .

e. 1. $\Delta_r S = -\frac{d}{dT}(\Delta_r G) = 2\mathcal{F} \frac{dE}{dT}$; A.N. : $\Delta_r S = 38,6 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol.L}^{-1}$.

2. $\Delta_r H = -T^2 \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G}{T} \right)$, or $E = 2,05 + 0,2.10^{-3}(T - T_{298}) = 1,99 + 0,2.10^{-3} T$.

A.N. : $\Delta_r H = -2\mathcal{F}.1,99 = -384 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

3. La réaction est exothermique ; l'énergie disponible sera utilisée électriquement à l'extérieur de l'accumulateur ; la décharge supposée réversible ne provoquera en première approximation aucune dégénérescence d'énergie et (comme le laisse supposer notre étude à T constant), T n'évolue pas.

4.4.6. Diagramme potentiel-pH de l'azote : pollutions et connaissances scientifiques n'appartient pas aux programmes des PTSI, TSI1

Préambule : on connaît :

- ① le rôle des nitrates en tant qu'engrais soluble (nappes phréatiques)
- ② le rôle chimique de HNO_2 sur les fonctions amines
- ③ la toxicité de NO, NO_2 , etc sortant des pots d'échappement et contribuant aux pluies acides

Conclusion : le cycle de l'azote si important pour la vie macroscopique et microscopique est perturbé par les pollutions.

On donne : la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

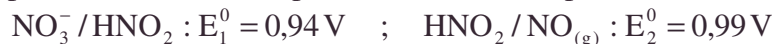
et à 25° C , $2,30 \frac{RT}{F} = 0,059 \text{ V}$, F représentant le faraday.

• acide nitreux, exothermique, gaz parfait, monoxyde d'azote, potentiel normal rédox à $\text{pH} = 0$, précipitation différentielle

I. On se propose dans un premier temps de tracer un diagramme potentiel-pH simplifié de l'azote en solution aqueuse, en se limitant aux trois substances : acide nitrique HNO_3 , acide nitreux HNO_2 , monoxyde d'azote $\text{NO}_{(\text{g})}$ ainsi qu'aux anions NO_3^- et NO_2^- .

Ce diagramme sera ensuite utilisé pour l'étude de quelques réactions chimiques.

On donne les potentiels normaux, à $\text{pH} = 0$, des deux couples redox suivants :



Pour l'acide nitreux, $\text{pK}_2 = 3,3$.

Le diagramme potentiel – pH du système sera d'abord tracé d'un point de vue théorique : la frontière qui sépare deux domaines de prédominance correspondra pour les espèces en solution à une concentration $c^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ et pour les gaz à la pression de référence P^0 . Ce diagramme théorique sera tracé pour $-2 < \text{pH} < 12$.

1. On étudie d'abord le domaine où $\text{pH} < 3,3$.

a. Justifier le choix de cette coupure.

b. Ecrire les demi équations redox des deux couples cités plus haut.

En déduire les espèces prédominantes dans ce domaine.

c. Ecrire les équations de Nernst associées aux deux couples considérés.

Donner les équations des droites D_1 et D_2 correspondantes ainsi que les coordonnées de leur point d'intersection A.

d. Tracer le diagramme potentiel – pH.

e. Etablir les domaines de prédominance des espèces.

Que peut-on en déduire pour la stabilité thermodynamique de l'une d'entre-elles ?

2. Reprendre une étude similaire pour le domaine où $\text{pH} > 3,3$ et compléter le diagramme.

3. A partir du diagramme théorique complet, représenter explicitement les frontières qui séparent les domaines de prédominance des espèces thermodynamiquement stables.

4.a. Pour des solutions rencontrées au laboratoire, quel est le domaine de pH accessible pratiquement ?

b. Sachant que le potentiel normal du couple $\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}_{(\text{s})}$ est égal à 0,34 V, prévoir le ou les résultats de l'action de l'acide nitrique sur le cuivre.

c. Dans une autre expérience, on prend une solution aqueuse molaire de nitrite de sodium, NaNO_2 que l'on acidifie progressivement par de l'acide sulfurique concentré. Qu'observe-t-on ?

II. On se propose de déterminer la composition d'un mélange gazeux de NO, NO_2 et N_2 stocké à 0°C dans des ampoules de volume $v_0 = 100 \text{ cm}^3$ sous une pression dite normale de $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. On appelle a, b, et c les volumes partiels respectifs en cm^3 de NO, NO_2 et N_2 et on admet que les trois gaz sont parfaits et ne réagissent pas les uns sur les autres.

1. En solution acide, le permanganate de potassium oxyde totalement les constituants NO et NO_2 du mélange précédent pour engendrer une même espèce azotée en solution, NO_3^- .

a. Sachant que l'ion permanganate est réduit en ion Mn^{2+} , écrire les équations des réactions correspondantes.

b. Exprimer en fonction de a, b et c le volume v exprimé en cm^3 de solution de permanganate de potassium de concentration $0,10 \text{ mol.L}^{-1}$ nécessaire pour doser le contenu d'une ampoule.

2. L'expérience précédente fournit $v = 11,61 \text{ cm}^3$, mais ne permet pas de déterminer complètement a, b et c. Dans une expérience complémentaire, on ajoute d'abord $V \text{ cm}^3$

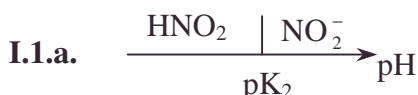
d'air à 0° C et sous la pression de $1,013 \cdot 10^5$ Pa à un volume $v_0 = 100 \text{ cm}^3$ du mélange gazeux initial. L'ensemble est maintenu à la pression constante de 1 bar ; seul le constituant NO du mélange réagit avec l'air pour donner NO_2 .

a. Calculer le volume V_f du gaz à l'issue de l'opération. Montrer que l'on doit distinguer deux cas et que, dans l'un d'eux, V_1 ne dépend que de v_0 et de V .

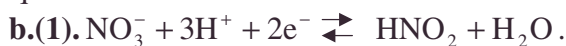
b. Pour $V = 100 \text{ cm}^3$, on trouve $V_f = 185 \text{ cm}^3$. En déduire a, b, c, puis le volume v' de permanganate de potassium de concentration $0,10 \text{ mol.l}^{-1}$ nécessaire pour doser le mélange gazeux après addition de l'air.

Ecole Polytechnique ; Durée : 2 h

Corrigé



$\text{pH} < 3,3$; c'est le domaine de prédominance de la forme acide HNO_2 et non de NO_2^- basique.



Les formes oxydantes prédominent au-dessus des frontières du plan pH, E, les formes réductrices en-dessous. HNO_2 pose un problème car sa dismutation est à envisager.

c.α. Pour (1) : $E_1 = E_1^0 + \frac{0,059}{2} \log \frac{(\text{NO}_3^-)(\text{H}^+)^3}{(\text{HNO}_2)}$, d'où la frontière D_1 pour

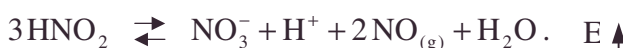
$(\text{NO}_3^-) = c^0 = (\text{HNO}_2)$. $E_1 = 0,94 - 0,0885 \text{ pH}$

β. Pour (2) : $E_2 = E_2^0 + 0,059 \log \frac{(\text{HNO}_2)(\text{H}^+)}{P_{\text{NO}}}$.

Pour $P_{\text{NO}} = P^0$ et $(\text{HNO}_2) = c^0$, on a la frontière D_2 : $E_2 = 0,99 - 0,059 \text{ pH}$.

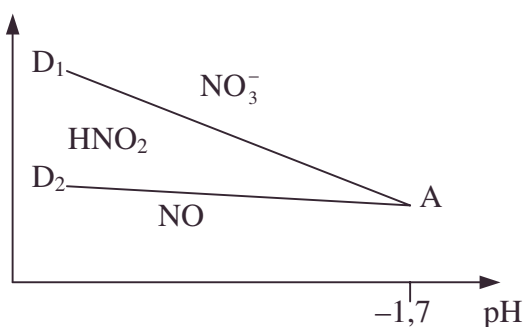
γ. L'intersection A de D_1 et D_2 a pour coordonnées : $\text{pH}_A = -1,7$, $E_A = 1,09 \text{ V}$.

d.e. On a la dismutation de HNO_2 pour $E_2 > E_1$ soit pour $-1,7 < \text{pH} < 3,3$;



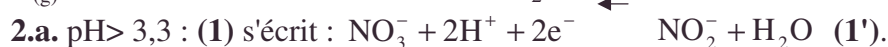
D_1 et D_2 concernant une espèce minoritaire à $\text{pH} > -1,7$ sont à supprimer pour $\text{pH} > -1,7$.

Le diagramme pour $-1,7 < \text{pH} < 3,3$ sera terminé en 2.b.



• HNO_2 n'est donc stable que si $\text{pH} < -1,7$ entre D_1 et D_2 . à $\text{pH} < -1,7$, NO_3^- oxydant est stable au-dessus de D_1 ;

$\text{NO}_{(\text{g})}$ réducteur est stable en-dessous de D_2 .



$E_1 = E_1^0 + \frac{0,059}{2} \log \frac{(\text{NO}_3^-)(\text{H}^+)^3}{(\text{HNO}_2)} = E_1^0 + \frac{0,059}{2} \log K_2 \frac{(\text{NO}_3^-)(\text{H}^+)^2}{(\text{NO}_2^-)}$.

• *dismutation, domaine de prédominance, frontière, majoritaire, minoritaire, oxydant, réducteur*

L'écriture d'un même couple est différente aussi bien pour la réaction que pour la formule de Nernst formellement. Mais la valeur du potentiel d'électrode ne dépend pas de l'écriture choisie.

Frontière obtenue avec $(\text{NO}_3^-) = c^0 = (\text{NO}_2^-)$; $D'_1 = E'_1 - \frac{0,059}{2} \text{pK}_2 - 0,059 \text{pH}$.

$$E'_1 = 0,843 - 0,059 \text{pH}.$$

(2) s'écrit en ne faisant intervenir que les espèces probablement majoritaires vu **1.c.β**.



La frontière $D'_2 : E'_2 = E_2^0 + 0,056 \text{pK}_2 - 0,118 \text{pH} = 1,185 - 0,118 \text{pH}$.

Intersection B de D'_1 et D'_2 : $\text{pH}_B = 5,8$, $E_B = 0,50 \text{V}$.

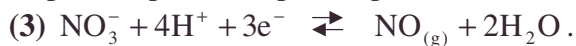
- On a la dismutation de NO_2^- quand $E'_2 > E'_1$, soit si $3,3 < \text{pH} < 5,8$ selon la réaction $3\text{NO}_2^- + 2\text{H}^+ \rightarrow \text{NO}_3^- + 2\text{NO}_{(\text{g})} + \text{H}_2\text{O}$; D'_1 et D'_2 sont à supprimer à $\text{pH} < 5,8$ car mettant en jeu un composé "inexistant".

- si $\text{pH} > 5,8$ NO_2^- stable entre D'_1 et D'_2 .

NO_3^- stable au-dessus de D'_1 .

$\text{NO}_{(\text{g})}$ stable au-dessous de D'_2 .

b. Frontière entre NO_3^- et $\text{NO}_{(\text{g})}$ dans le domaine de pH compris entre pH_A et pH_B .



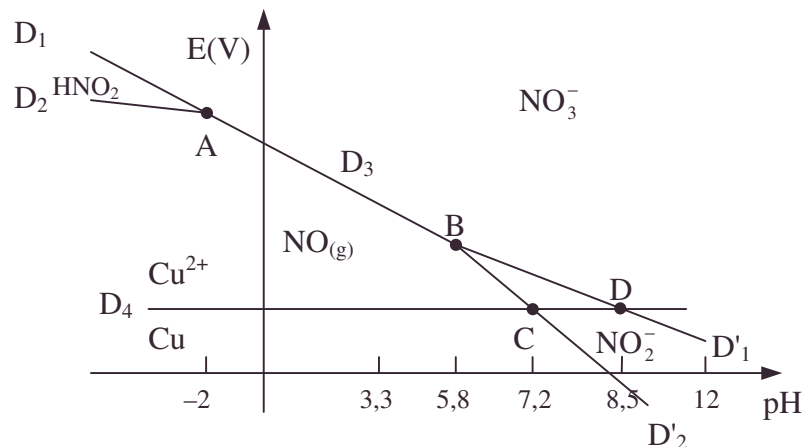
Constat thermodynamique : (3) = (2) + (1).

$$\mu_{\text{HO}_3^-} + 4\mu_{\text{H}^+} - \mu_{\text{NO}} - 2\mu_{\text{H}_2\text{O}} = (\mu_{\text{HO}_3^-} + 3\mu_{\text{H}^+} - \mu_{\text{HNO}_2} - \mu_{\text{H}_2\text{O}}) + (\mu_{\text{HNO}_2} + \mu_{\text{H}^+} - \mu_{\text{NO}} - \mu_{\text{H}_2\text{O}})$$

$$\text{Soit } 3\mathcal{F}E_3 = 2\mathcal{F}E_1 + \mathcal{F}E_2 \Rightarrow E_3^0 = \frac{2E_1^0 + E_2^0}{3} ; \text{AN : } E_3^0 = 0,957 \text{V}.$$

$$E_3 = E_3^0 + \frac{0,059}{3} \log \frac{(\text{NO}_3^-)(\text{H}^+)^4}{P_{\text{NO}}}, \text{ d'où } D_3 : E_3 = 0,957 - 0,0787 \text{pH}.$$

L'oxydant NO_3^- est au-dessus de D_3 ; le réducteur est en-dessous.



3. La cohérence des frontières confirme les domaines de stabilité indiqués.

4.a. Le domaine habituel de pH est 0 – 14.

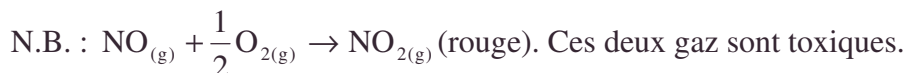
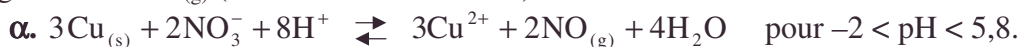


D_4 coupe D'_2 en C, $\text{pH}_C = 7,2$ et D'_1 en D, $\text{pH}_D = 8,5$.

- air, dismutation, frontière, potentiel chimique

On en déduit que les frontières mettant en cause l'oxydant NO_3^- sont au-dessus de D_4 pour $\text{pH} < 8,5$.

L'acide nitrique qui ne mérite son nom d'acide que si $\text{pH} < 7$ attaque Cu et produit un dégagement de $\text{NO}_{(\text{g})}$ (incolore à l'abri de l'air).



c. NO_2^- est une base stable à $\text{pH} > 5,8$.



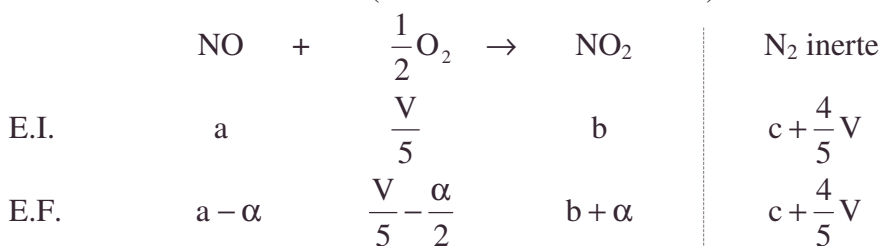
S'il se forme HNO_2 et si $-1,7 < \text{pH} < 3,3$, HNO_2 formé se dismute aussi :



$$\text{bilan molaire vu v, a, b en cm}^3 : \frac{0,1v}{10^{-3}} = \frac{3}{5} \frac{\text{Pa}}{\text{RT}} + \frac{1}{5} \frac{\text{Pb}}{\text{RT}} \Rightarrow v = 0,0893(b + 3a).$$

$$\text{2.a. } n = \frac{PV}{RT} \text{ ; à T et P donnés, n et V sont proportionnels à P et T fixés aussi..}$$

Faisons un bilan de volume (au lieu d'un bilan molaire).



$$V_{\text{final}} = V_f = c + \frac{4}{5}V + a - \alpha + \frac{V}{5} - \frac{\alpha}{2} + b + \alpha = v_0 + V - \frac{\alpha}{2} \text{ car } v_0 = a + b + c.$$

On distinguera deux cas :

- O_2 est en excès : NO disparaît complètement : $\alpha = a$; $V_f = v_0 + V - \frac{a}{2}$.

- NO est en excès : O_2 disparaît ; $\alpha = \frac{2}{5}V$; $V_f = v_0 + \frac{4}{5}V$: alors V_f ne dépendra

que de v_0 et V .

b. $v_0 = V \Rightarrow V_f = 180\text{cm}^3$ dans l'hypothèse NO en excès qui est à rejeter car l'incertitude est inférieure à 3% vu les 4 chiffres donnés pour les volumes.

$V_f = 185\text{cm}^3$: on adopte l'hypothèse complémentaire soit O_2 en excès.

$$2.a. \Rightarrow a = 2(V + v_0 - V_f); 1.b. \Rightarrow b = \frac{V}{0,0893} - 6(V + v_0 - V_1);$$

$$2.a. \Rightarrow c = v_0 - \frac{V}{0,0893} + 4(V + v_0 - V_1).$$

$$\text{AN : } a = 30 \text{ cm}^3; b = 40 \text{ cm}^3; c = 30 \text{ cm}^3.$$

Ecrivons le dosage de $\text{NO}_{2(g)}$ restant, $\alpha = a$; $n_{\text{NO}_2} = a + b$:

$$1.b. \Rightarrow \frac{0,1 v'}{10^{-3}} = \frac{P}{5RT} (a + b); v' = 6,25 \text{ cm}^3.$$

4.4.7. Cinétique d'oxydoréduction : BrO_3^- et Br^-

Voir page 1483.

4.4.8. Analyse qualitative

Voir page 1639.

4.4.9. Sulfure de zinc

Voir page 1642.

4.4.10. Travaux pratiques de dosages

Voir page 1645.

4.4.11. Dosage argentimétrique

Voir page 1658.

4.4.12. Argentimétrie classique

Voir page 1660.

4.4.13. Précipitations du cadmium II

Voir page 1666.

4.4.14. Courbes intensité-potentiel

Voir page 1682.

4.4.15. Préparation et dosage d'organomagnésiens

Voir page 1714.

4.4.16. Obtention d'un chlorure d'acide

Voir page 1770.

4.4.17. Survol 6

Voir page 1806.

4.5. Problèmes mixtes

4.5.1. L'eau calcaire

On considère 1 litre d'une eau initialement acide par dissolution d'un acide très fort HA. On y dissout du CaCO_3 pur à raison de n moles de carbonate de calcium. On admettra que cette eau peut dissoudre au maximum 1 litre de dioxyde de carbone CO_2 gazeux et que les molécules entières de $\text{CO}_{2(\text{g})}$ dissoutes sont toutes à l'état de $\text{CO}_{2(\text{d})}$. La mesure du pH montre que la solution est neutre après dissolution du carbonate de calcium CaCO_3 .

Connaissant : - le produit de solubilité du CaCO_3 : $P_s = 4,8 \cdot 10^{-9}$.

- les constantes d'ionisation des deux acidités de $\text{CO}_{2(\text{d})}$:

$$K_1 = 4,3 \cdot 10^{-7} ; K_2 = 4,7 \cdot 10^{-11} ;$$

on demande de : 1. calculer n ;

2. calculer les concentrations des ions CO_3^{2-} et HCO_3^- ;

3. calculer la concentration $[\text{CO}_{2(\text{d})}]$;

4. calculer le pH de la solution avant la dissolution de CaCO_3 .

On admettra pour cette dernière question que l'ion étranger A^- introduit pour rendre la solution acide est inactif sur l'eau et sur toutes les autres espèces chimiques présentes en solution.

$$M(\text{Ca}) = 40 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1} ; M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}.$$

Autres concours ; Durée : 1h

Corrigé

On regardera de suite le diagramme de prédominance de CO_3^{2-} en fin de page.

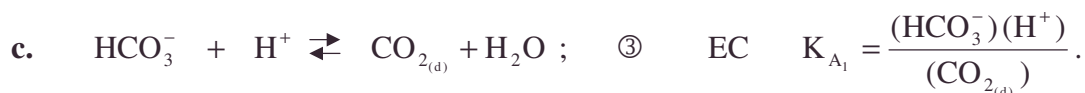
On ne fera pas de bilan en H^+ car on ignore la quantité de HA versée.



$$\begin{array}{cccc} t = 0 & n & 0 & 0 \\ t_{\text{éq}} & 0 & n & n - \xi_1 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} t = 0 & 0 & 0 \\ t_{\text{éq}} & n - \xi_1 & \xi_1 - \xi_2 \end{array}$$



$$\begin{array}{cccc} t = 0 & 0 & 0 & - \end{array}$$

$$t_{\text{éq}} \quad \xi_1 - \xi_2 \quad \text{faible} \quad \xi_2 \quad - \quad \text{d'où} \quad K_{A_1} K_{A_2} = \frac{(\text{H}^+)^2 (\text{CO}_3^{2-})}{(\text{CO}_{2(\text{d})})}.$$

Résolution

• Vu le diagramme de prédominance :
 $\text{pH} = 7 \Rightarrow \text{HCO}_3^-$ majoritaire.



On en déduit :

• Carbonate de calcium, diagramme de prédominance, majoritaire, pH, produit de solubilité.

$(n - \xi_1) \ll (\xi_1 - \xi_2) \Rightarrow \xi \# n$ et $\xi_2 < \xi_1 - \xi_2$ sans $\xi_2 \ll \xi_1 - \xi_2$.

$$\bullet \quad \xi_2 = \frac{(H^+)^2 (n - \xi_1)}{K_{A_1} K_{A_2}} = \frac{(H^+)^2 K_S}{n K_{A_1} K_{A_2}} ; \quad \xi_1 - \xi_2 = \frac{(H^+) (n - \xi_1)}{K_{A_2}} = \frac{(H^+) K_S}{n K_{A_2}}.$$

1. Utilisons les données thermodynamiques et le pH pour trouver n et les autres concentrations dans le volume de 1 litre.

$$n = \xi_1 = (\xi_1 - \xi_2) + \xi_2 = \frac{(H^+) K_S}{n K_{A_2}} + \frac{(H^+)^2 K_S}{n K_{A_1} K_{A_2}} \Rightarrow n = \frac{(H^+) K_S}{K_{A_2}} \left[1 + \frac{(H^+)}{K_{A_1}} \right].$$

On note la participation des deux équilibres.

$$\text{A.N. : } n = 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$2. (\text{HCO}_3^-) = \sqrt{\frac{(H^+) K_S}{K_{A_2} \left(1 + \frac{(H^+)}{K_{A_1}} \right)}} ; \quad \text{A.N. : } (\text{HCO}_3^-) = 0,288 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$(\text{CO}_3^{2-}) = \sqrt{\frac{K_S K_{A_2}}{(H^+) \left(1 + \frac{(H^+)}{K_{A_1}} \right)}} ; \quad \text{A.N. : } (\text{CO}_3^{2-}) = 1,352 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$3. (\text{CO}_{2(d)}) = \frac{(H^+)}{K_{A_1}} \sqrt{\frac{(H^+) K_S}{K_{A_2} \left(1 + \frac{(H^+)}{K_{A_1}} \right)}} ; \quad \text{A.N. : } (\text{CO}_{2(d)}) = 0,0669 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

On notera que $n = (\text{CO}_{2(d)}) + (\text{HCO}_3^-) + (\text{CO}_3^{2-})$ et que à 298 K et 10^5 Pa ,
 $V_{\text{CO}_{2(g)}} = \frac{nRT}{P} = 0,01661 < 11$. Il n'y a pas de dégagement gazeux car il n'y a pas
 dépassement de saturation.

4. Afin de faire intervenir A^- , écrivons l'électroneutralité :

$$(A^-) + (\text{OH}^-) + 2(\text{CO}_3^{2-}) + (\text{HCO}_3^-) = 2(\text{Ca}^{2+}) + (H^+).$$

$$\text{A pH} = 7, \text{ il reste } (A^-) = 2(\text{Ca}^{2+}) - 2(\text{CO}_3^{2-}) - (\text{HCO}_3^-).$$

$$(A^-) = \sqrt{\frac{(H^+) K_S}{K_{A_2}}} \left(2 \sqrt{1 + \frac{(H^+)}{K_{A_1}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(H^+)}{K_{A_1}}}} \right) ; \quad \text{A.N. : } (A^-) = 4,22 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} ;$$

$$(A^-) \gg 10^{-7} ; \text{ le pH d'un acide fort est } \text{pH} = -\log(A^-) ; \text{ A.N. : } \text{pH} = 2,37.$$

4.5.2. Dissolution du calcaire par l'eau de pluie

Le calcaire et la chaux

Données : $\text{pK}_{a_1} = 6,4$; $\text{pK}_{a_2} = 10,3$.

Masses atomiques (en grammes par mole) : Ca : 40 ; C : 12 ; O : 16.

Le produit de solubilité du carbonate de calcium CaCO_3 est $K_s = 10^{-8,3}$ (soit $\text{pK}_1 = 8,3$)
 CO_2 en solution aqueuse est un diacide, de constantes d'acidité K_{a1} et K_{a2} .

- Calcaire, chaux, élecroneutralité, pH, produit de solubilité, solution aqueuse,

Problèmes mixtes

Dans les conditions atmosphériques usuelles, la concentration maximale de CO_2 en solution aqueuse est de 0,04 mole par litre.

Solubilité du calcaire

- Déterminer la solubilité s_0 du carbonate de calcium (ou calcaire) dans l'eau pure. Commenter.
- Lorsque l'on verse une solution d'acide chlorhydrique sur un morceau de calcaire, on observe un dégagement gazeux.
 - Ecrire les réactions qui se produisent. Quel est le gaz qui se dégage ?
 - On introduit 2,5 grammes de CaCO_3 solide dans un bêcher contenant 100 ml d'une solution d'acide chlorhydrique dont le pH initial est égal à 0. Le solide disparaît entièrement.

Calculer pour l'état final :

- les concentrations en CO_2 dissous et en ions Ca^{2+} , CO_3^{2-} et HCO_3^- .
 - le pH
 - la quantité (en môle) de gaz dégagé.
- L'eau de pluie se charge en CO_2 provenant de l'atmosphère. Ecrire la réaction prépondérante qui se produit lors de la dissolution de CO_2 dans l'eau pure ; en déduire les concentrations en CO_2 et en HCO_3^- dans une eau de pluie dont le pH est égal à 5.
 - L'eau contenant du CO_2 dissout ruisselle sur une roche calcaire ; elle ressort avec un pH égal à 7,4 et une concentration en hydrogénocarbonate HCO_3^- égale à $2.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.
 - En partant d'un système initial constitué d'eau, de CO_2 en solution et de carbonate de calcium en excès, écrire les deux réactions qui se produisent lors de l'attaque du calcaire par CO_2 dissout.

Ces réactions ne font pas intervenir H_3O^+ et OH^- ; pourquoi peut-on les négliger ?

- On note c_0 la concentration initiale en CO_2 , x la concentration finale en ions Ca^{2+} et $2y$ la concentration finale en ions HCO_3^- .

Exprimer les concentrations en CO_3^{2-} et en CO_2 en fonction de c_0 , x et y .

- Quelles sont les concentrations finales en CO_2 , CO_3^{2-} et Ca^{2+} ?

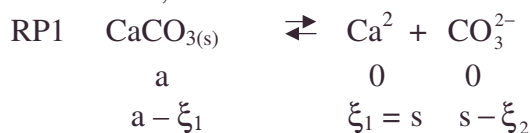
La réaction de dissolution du calcaire CaCO_3 atteint-elle l'équilibre ?

- On fait bouillir (jusqu'à disparition totale du liquide) 1 litre d'eau recueillie après le ruissellement.

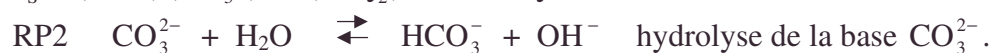
Déterminer la masse de calcaire qui s'est déposée sur les parois du récipient.

Autres concours ; Durée : 2h**Corrigé**

- Dans un litre, les bilans molaires s'écrivent :



$$\Rightarrow K_s = (\text{Ca}^{2+})(\text{CO}_3^{2-}) = s(s - \xi_2) \text{ avec } s = \xi_1 :$$



$$\begin{array}{ccccccc} s & - & 0 & 0 & & K_{b_2} = \frac{(\text{HCO}_3^-)(\text{OH}^-)}{(\text{CO}_3^{2-})} = \frac{\xi_2^2}{s - \xi_2} \\ s - \xi_2 & - & \xi_2 & \xi_2 & & & \end{array}$$

• acide chlorhydrique, becher, calcaire, eau de pluie, hydrogénocarbonate, réaction prépondérante, roche, RP, solubilité

$$\text{or } K_{b_2} = \frac{(\text{HCO}_3^-)(\text{H}^+)(\text{OH}^-)}{(\text{CO}_3^{2-})(\text{H}^+)} = \frac{K_e}{K_{a_2}}.$$

Eliminons ξ_2 à partir de K_S : $\xi_2 = \frac{s^2 - K_S}{s}$;

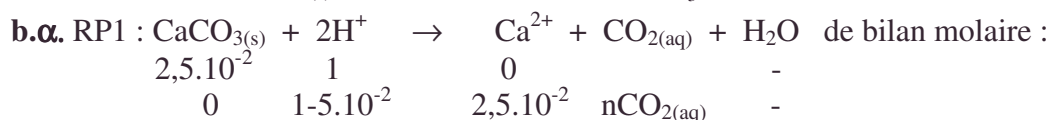
$$K_{b_2} = \frac{(s^2 - K_S)^2}{s^2 \left(s - \frac{s^2 - K_S}{s} \right)} = \frac{(s^2 - K_S)^2}{s K_S} \Rightarrow \text{A.N. : } s = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

N.B. : $s \neq K_S^{\frac{1}{2}}$ car $s K_S K_{a_2} = 1,3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-8,3} \cdot 10^{-3,7} = 1,3 \cdot 10^{-16}$ est de l'ordre de K_S^2 et empêche la simplification fréquente.

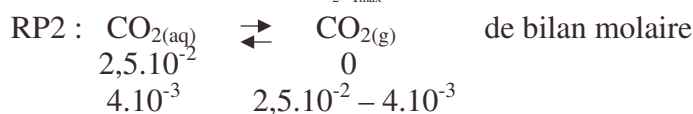


CO_2 est le gaz qui se dégage ; la saturation à $0,04 \text{ mol.L}^{-1}$ est atteinte ou la cinétique rapide n'attend pas la mise en équilibre.

Si H^+ est en défaut, $\text{CaCO}_{3(s)} + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + \text{HCO}_3^-$, CO_2 ne se manifeste pas.

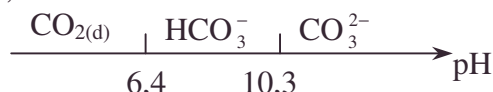


or $(\text{CO}_{2(aq)})_{\max} = 0,04$ soit $n_{\text{CO}_{2(aq)\max}} = 4 \cdot 10^{-3}$ qui est atteint car $\xi = 2,5 \cdot 10^{-2} > 4 \cdot 10^{-3}$.



Premier bilan : A.N. : $(\text{Ca}^{2+}) = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$
 $(\text{CO}_{2(aq)}) = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$
 $n_{\text{CO}_{2(g)}} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$
 $\text{pH} = -\log 0,95 = 0,12$.

β. Bilans secondaires demandés :



$$K_{A_1} = \frac{(\text{H}^+)(\text{HCO}_3^-)}{(\text{CO}_2)} \Rightarrow (\text{HCO}_3^-) = \frac{K_{A_1}}{(\text{H}^+)} (\text{CO}_{2(aq)}).$$

L'équilibre est très peu déplacé car $K_{A_1} = 10^{-6,4}$ et pH très acide.

$$\text{A.N. : } (\text{HCO}_3^-) = \frac{10^{-6,4} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{0,95} = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}, \text{ ce qui justifie la méthode.}$$

2. De même, pour la deuxième dissociation :



$$K_{A_2} = \frac{(\text{H}^+)(\text{CO}_3^{2-})}{(\text{HCO}_3^-)} \Rightarrow (\text{CO}_3^{2-}) = \frac{K_{A_2} (\text{HCO}_3^-)}{(\text{H}^+)} ;$$

$$\text{A.N. : } (\text{CO}_3^{2-}) = \frac{2,1 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-10,3}}{0,95} = 1,4 \cdot 10^{-18} \text{ mol.L}^{-1}.$$

Problèmes mixtes

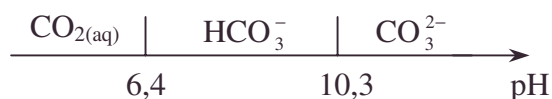
3. $\text{CO}_{2(g)} \rightleftharpoons \text{CO}_{2(aq)}$ impose, vu la coexistence des deux formes, $(\text{CO}_{2(aq)}) = 4.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ dans les conditions usuelles ; $\text{CO}_{2(aq)}$ est constant et la réaction prépondérante dans l'eau à $\text{pH} = 5$ où $\text{CO}_{2(d)}$ est majoritaire s'écrit :

$\text{CO}_{2(aq)} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HCO}_3^- + \text{H}^+$; H^+ n'ayant pas cette réaction comme source unique, car sinon $K_{a_1} = \frac{(\text{HCO}_3^-)(\text{H}^+)}{(\text{CO}_{2(aq)})} = \frac{(\text{H}^+)^2}{(\text{CO}_{2(aq)})}$ vaudrait $\frac{10^{-10}}{4.10^{-2}}$, ce qui n'est pas.

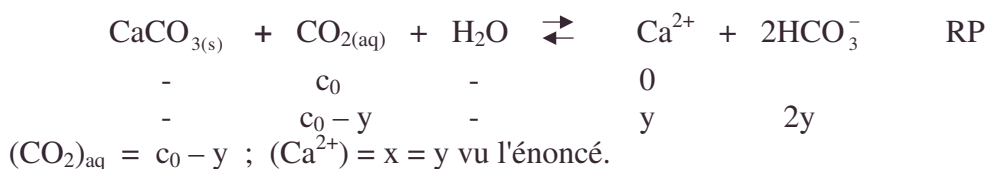
On en déduit : $(\text{HCO}_3^-) = \frac{K_{a_1}(\text{CO}_{2(aq)})}{(\text{H}^+)}$:

A.N. : $\text{pH} = 5$, $\text{CO}_{2(aq)} = 4.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$; $(\text{HCO}_3^-) = 1,6.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

4.a.b. Les zones de prépondérance des espèces issues de CO_2 sont :

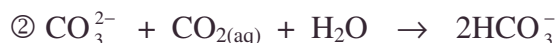


à $\text{pH} = 7,4$, on peut négliger la présence de CO_3^{2-} ; au voisinage de $\text{pH} = 7$, on peut négliger H_3O^+ , OH^- .



L'espèce minoritaire $(\text{CO}_3^{2-}) = \frac{K_s}{(\text{Ca}^{2+})} = \frac{K_s}{x} = \frac{K_s}{y}$.

La RP associe les réactions classiques faisant intervenir CO_3^{2-} minoritaire :



réaction quasi totale vu l'acidité de $\text{CO}_{2(aq)}$ et la basicité de CO_3^{2-} .

c. • $(\text{HCO}_3^-) = 2.10^{-3} \Rightarrow y = 10^{-3} = x \Rightarrow (\text{Ca}^{2+}) = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

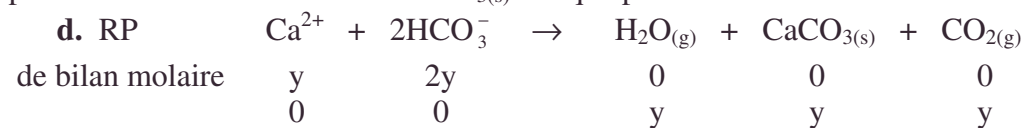
• Dans les conditions atmosphériques usuelles $c_0 = 4.10^{-2}$.
 $(\text{CO}_{2(aq)}) = 3,9.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ vu la perturbation du calcaire.

• $\text{pH} = 7,4 \Rightarrow (\text{H}^+) = 10^{-7,4}$; $(\text{OH}^-) = 10^{-6,6}$ effectivement négligeables devant les concentrations précédentes (comme prévu).

• $(\text{CO}_3^{2-}) = \frac{K_s}{(\text{Ca}^{2+})}$; A.N. : $(\text{CO}_3^{2-}) = 5.10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ effectivement négligeables

devant les concentrations précédentes (comme prévu) ; infiniment petit qui échappe habituellement aux bilans de RP.

• La réaction de dissolution atteint l'équilibre, vu le déplacement de la réaction ① par la réaction ② et l'excès de $\text{CaCO}_{3(s)}$ indiqué par l'énoncé.



$m_{\text{CaCO}_3} = y M_{\text{CaCO}_3}$; A.N. : $n_{\text{CaCO}_3} = 0,1 \text{ g.L}^{-1}$.

4.5.3. Diverses mesures de la constante d'acidité K_a de l'acide acétique

Les différentes questions peuvent être considérées comme indépendantes ; elle s'articulent autour du thème.

Pour toutes les questions, on prendra l'activité d'une espèce chimique égale à la valeur de sa concentration molaire volumique, exprimée en mol.L^{-1} . On donne $1\text{S} = 1\Omega^{-1}$.

1. A 298 K, les conductivités molaires ioniques, à concentration molaire volumique nulle, en solution aqueuse, pour les différents ions présents dans le milieu réactionnel, et désignés par Λ sont :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{H}^+_{(\text{aq})}} & 34,985.10^{-3} \text{ S.m}^2.\text{mol}^{-1} \\ \Lambda_{\text{CH}_3\text{COOH}^-_{(\text{aq})}} & 4,09.10^{-3} \text{ S.m}^2.\text{mol}^{-1} \\ \Lambda_{\text{OH}^-_{(\text{aq})}} & 19,918.10^{-3} \text{ S.m}^2.\text{mol}^{-1} \\ \Lambda_{\text{Cl}^-_{(\text{aq})}} & 7,634.10^{-3} \text{ S.m}^2.\text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

A la même température, la conductivité de l'eau est $5,5.10^{-6} \text{ S.m}^{-1}$; les conductivités de quelques solutions aqueuses d'acide éthanóïque en fonction de la concentration molaire volumique C sont rassemblées dans le tableau suivant :

χ en S.m^{-1}	52.10^{-3}	16.10^{-3}	$4,8.10^{-3}$
C en mol.m^{-3}	100	10	1

a. La conductivité d'une solution aqueuse contenant différents ions A_i aux concentrations molaires volumiques $[A_i]$ étant données par $\chi = \sum_i \Lambda_i \cdot [A_i]$, justifier,

dans le système international, le choix de la mol.m^{-3} comme unité de concentration molaire volumique.

b. Des résultats expérimentaux précédents, déduire le produit ionique de l'eau, soit K_e , en utilisant l'état des références des chimistes pour lequel les concentrations molaires volumiques sont exprimées en mol.L^{-1} .

c. Les différentes mesures permettent-elles de dégager une valeur cohérente de la constante d'acidité K_a de l'acide éthanóïque de formule CH_3COOH et de son $\text{p}K_a$?

d. Quelle serait la conductivité d'une solution contenant 10^{-2} mole d'acide éthanóïque et 10^{-3} mole d'acide chlorhydrique dans 1 litre d'eau ?

2. En milieu tamponné à $\text{pH} = 6$, la solubilité s de l'acétate d'argent AgCH_3COO est à 298 K, de $4,48.10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. A cette température, le pH d'une solution saturée d'acétate d'argent vaut 8,7. En déduire :

a. Le produit de solubilité de l'acétate d'argent, soit K_s .

b. La constante d'acidité K_a de l'acide acétique.

c. L'allure du graphe donnant $\text{ps} = -\log s$ en fonction du pH . (On indiquera sur ce graphe les domaines de prédominance des espèces Ag^+ , AgCH_3COO , CH_3COOH et CH_3COO^-).

3. L'acide éthanóïque est titré par une solution de soude, de concentration C hélas inconnue.

a. Le virage de la phénolphtaléine, correspondant au point d'équivalence, nécessite l'addition de $v_e = 40 \text{ cm}^3$ de soude. En mesurant le pH , après addition de $v = 16 \text{ cm}^3$ de soude, on a trouvé 4,57. Quelle valeur de K_a déduit-on de cette expérience ?

• acide chlorhydrique, acide éthanóïque, activité, concentration molaire, conductivité équivalente, constante d'acidité, graphes, mesures de constante d'acidité, phénolphtaléine, point d'équivalence, produit de solubilité, solubilité, solution aqueuse

b. Déterminer le pH d'une solution aqueuse contenant par litre $C_0 = 10^{-2}$ mole d'acide éthanoïque et C moles d'acide chlorhydrique dans les cas suivants :

$$C = 10^{-1} ; C = 10^{-3} ; C = 10^{-5}$$

4. Certaines réactions simples de type $B \rightarrow C + D$ sont catalysées par des ions $H^+_{(aq)}$ dont la concentration molaire volumique reste constante au cours de l'expérience. Intéressons-nous à l'une d'elles qui, en solution aqueuse, est du premier ordre cinétique par rapport à B ; la constante de vitesse k étant proportionnelle à la concentration molaire volumique en ions $H^+_{(aq)}$ présents dans la solution.

Pour cela, considérons 2 solutions identiques de B à la même température, acidifiées l'une par $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ d'un acide fort HA' , l'autre par $10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ d'acide éthanoïque que l'on pourra écrire sous la forme HA .

On constate qu'au bout d'un même temps de réaction, les pourcentages en B transformé sont respectivement de 90 pour la solution acidifiée par l'acide fort HA' , et 3 pour la solution acidifiée par l'acide éthanoïque.

En déduire la valeur de K_a pour l'acide éthanoïque à la température de l'expérience.

5. Pour rendre compte de la variation de K_a avec la température, plusieurs expressions ont été proposées ; la plus satisfaisante s'écrit : $R \ln K_a = \frac{\alpha}{T} + \beta + \gamma T$, où les constantes

α , β , γ sont déterminées expérimentalement. R est la constante des gaz parfaits.

En déduire, en fonction de α , β , γ et T , à la température T :

l'enthalpie libre standard de la réaction, soit $\Delta_r G^0(T)$.

l'enthalpie standard de la réaction, soit $\Delta_r H^0(T)$.

l'entropie standard de la réaction, soit $\Delta_r S^0(T)$.

l'augmentation de capacité thermique molaire à pression constante au cours de la réaction, soit $\Delta_r C_p^0$.

ENSAM ; Durée : 2h

Corrigé

1.a. L'équation aux dimensions s'écrit : $[\chi] = [\Lambda][A]$;

l'unité de χ est S.m^{-1} ; l'unité de Λ est $\text{S.m}^2.\text{mol}^{-1} \Rightarrow$ l'unité de A est mol.m^{-3} .

b. $K_e = (H^+)(OH^-)$; $H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$; $\Rightarrow (H^+) = (OH^-) = K_e^{1/2}$.

$$\chi = \Lambda_{H^+}(H^+) + \Lambda_{OH^-}(OH^-) = (\Lambda_{H^+} + \Lambda_{OH^-})\sqrt{K_e} \Rightarrow K_e = \frac{\chi^2}{(\Lambda_{H^+} + \Lambda_{OH^-})^2}.$$

AN : $K_e = 10^{-8} \text{ mol}^2.\text{m}^{-6}$; $K_e = 10^{-14} \text{ mol}^2.\text{l}^{-2}$.

c. $CH_3CO_2H \rightleftharpoons CH_3CO_2^- + H^+$ E.C. ; de bilan de concentration :

$$\begin{array}{ccc} C & 0 & 0 \\ C & h & h \end{array}$$

$$\chi = \Lambda_{H^+}(H^+) + \Lambda_{CH_3CO_2^-}(CH_3CO_2^-) = (\Lambda_{H^+} + \Lambda_{CH_3CO_2^-})(H^+).$$

$$\text{Or, } K_A = \frac{(H^+)(CH_3CO_2^-)}{(CH_3CO_2H)} = \frac{(H^+)^2}{C} \Rightarrow \chi = \sqrt{K_A C}(\Lambda_{H^+} + \Lambda_{CH_3CO_2^-}).$$

$$\Rightarrow K_A = \frac{\chi^2}{C(\Lambda_{H^+} + \Lambda_{CH_3CO_2^-})^2}.$$

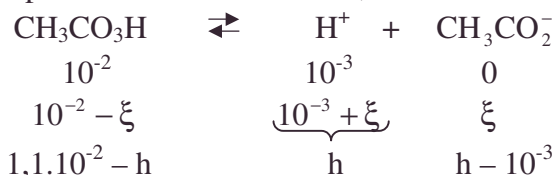
• acide éthanoïque, cinétique, concentration molaire, conductivité équivalente, constante de vitesse, enthalpie libre standard de la réaction, enthalpie standard de la réaction, entropie standard de la réaction, equation aux dimensions, gaz parfait, solution aqueuse.

C	100	10	1
$K_A \cdot 10^{-5}$	1,77	1,68	1,5
pK_A	4,75	4,77	4,82

Les mesures sont cohérentes.

d. $\chi = \Lambda_{H^+} \cdot (H^+) + \Lambda_{Cl^-} \cdot (Cl^-) + \Lambda_{CH_3CO_2^-} (CH_3CO_2^-)$; OH^- est négligé devant H^+ .

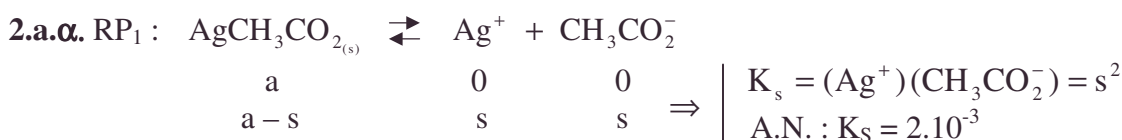
En prenant h comme variable, on a le bilan molaire :



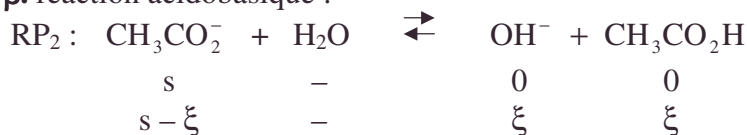
la constante d'équilibre $K_A = \frac{(H^+)(CH_3CO_2^-)}{(CH_3CO_2H)} = \frac{h(h - 10^{-3})}{(1,1 \cdot 10^{-2} - h)}$;

$$\Rightarrow h^2 - 10^{-3}h - 16,8 \cdot 10^{-8} = 0 \Rightarrow h = 1,147 \cdot 10^{-3} \Rightarrow (CH_3CO_2^-) = 0,147 \cdot 10^{-3}.$$

$$\chi = 4,836 \cdot 10^{-5} S \cdot m^{-1}.$$



β. réaction acidobasique :



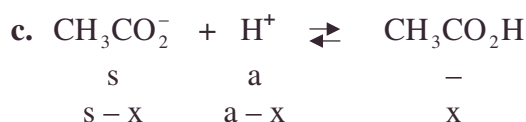
$$\Rightarrow (OH^-) = (CH_3CO_2H) = \frac{K_e}{(H^+)}$$

$\xrightarrow[pH]{\begin{array}{c|c} CH_3CO_2H & CH_3CO_2^- \\ \hline pK_A \end{array}}$

$pH > pK_A + 1 \quad (CH_3CO_2H) \ll (CH_3CO_2^-) \Rightarrow \xi \ll s.$

$$\Rightarrow K_A = \frac{(CH_3CO_2^-)(H^+)}{(CH_3CO_2H)} = \frac{s(H^+)^2}{K_e}.$$

b. AN : $K_A = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ mol.l}^{-1}$; $pK_A = 4,75$.



$$s = (CH_3CO_2^-) + (CH_3CO_2H) = (CH_3CO_2^-) \left[1 + \frac{(H^+)}{K_A} \right] ; \text{ or } (CH_3CO_2^-) = \frac{K_s}{(Ag^+)} = \frac{K_s}{s} ;$$

$$s = \sqrt{K_s \left(1 + \frac{(H^+)}{K_A} \right)} ; \text{ or } \xrightarrow[pH]{\begin{array}{c|c} CH_3CO_2H & CH_3CO_2^- \\ \hline pK_A \end{array}}$$

α. $pH > pK_A + 1$. On néglige (CH_3CO_2H) ; $s = \sqrt{K_s}$;

$ps = \frac{1}{2} pK_s$; A.N. : $ps = 1,35$; à $ps > 1,35$, il n'y a pas de précipité.

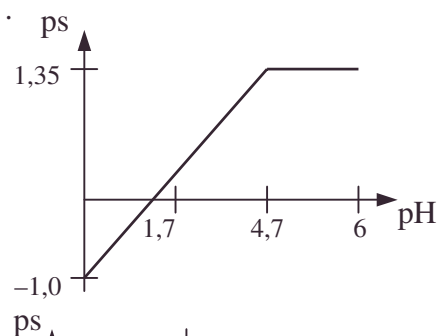
β. $pH < pK_A - 1$. On néglige $(CH_3CO_2^-)$; $s = \sqrt{K_s \frac{(H^+)}{K_A}}$;

Problèmes mixtes

$$ps = -\frac{1}{2} \log \frac{K_s}{K_A} + \frac{1}{2} pH ; \text{ A.N. : } ps = -1,0 + 0,5 pH .$$

A $ps > -1,0 + 0,5 pH$ à pH donné il n'y a pas de précipité.

A $pH = 6$, on vérifie $ps = 1,35$ et $pK_S = 2,70$,
 $K_S = 2.10^{-3}$

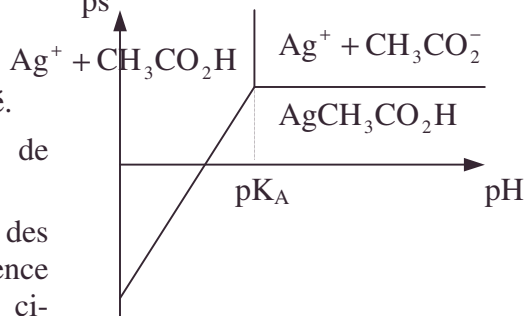


d. Domaine de prédominance :

α. ps élevé, (Ag^+) faible, pas de précipité.

β. ps faible, Ag^+ existe en présence de précipité auquel on affecte la priorité.

γ. Vu les domaines de prédominance des formes acide et basique de CH_3CO_2H en absence de précipité, on parvient au régionnement ci-contre.



3.a. On sait que $pK_A = pH - \log \frac{(CH_3CO_2^-)}{(CH_3CO_2H)}$;

Soit C la concentration de soude ;

$CH_3COOH + OH^- \rightarrow CH_3COO^- + H_2O$ de bilan molaire :

$$\begin{array}{cccc} C_{ve} & C_v & 0 & - \\ C(v_e - v) & 0 & C_v & - \end{array}$$

$$\frac{(CH_3CO_2^-)}{(CH_3CO_2H)} = \frac{C_v}{C(v_e - v)} > 0 ;$$

$$\text{soit } pK_A = pH - \log \frac{v}{v_e - v} .$$

A.N. : $pK_A = 4,746$; $K_A = 1,79.10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

b. Soit $C_0 = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$;



soit $C_0 + C - (H^+) \quad (H^+) \quad (H^+) - C$ en paramétrant avec (H^+) .

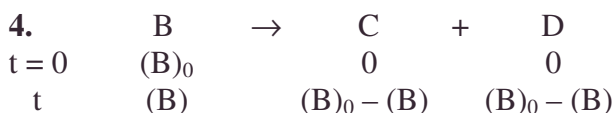
$$\text{Equilibre : } K_A = \frac{(CH_3CO_2^-)}{(CH_3CO_2H)} (H^+) \Rightarrow K_A = \frac{(H^+)((H^+) - C)}{(C_0 + C - (H^+))} ;$$

$\Leftrightarrow (H^+)^2 + (H^+)(K_A - C) - K_A(C_0 + C) = 0$, d'où l'on déduit l'action prédominante de H^+ selon les valeurs de C .

α. $C = 10^{-1}$; $(H^+)^2 - 0,1(H^+) - 1,1.1,79.10^{-6} = 0 \Rightarrow (H^+) = 0,1000$; $pH = 1,00$.

β. $C = 10^{-3}$; $(H^+)^2 - 10^{-3}(H^+) - 1,1.1,79.10^{-7} = 0 \Rightarrow (H^+) = 1,17.10^{-3}$; $pH = 2,93$.

γ. $C = 10^{-5}$; $(H^+)^2 - 0,79.10^{-5}(H^+) - 1,7.10^{-7} = 0 \Rightarrow (H^+) = 4,16.10^{-4}$; $pH = 3,38$.



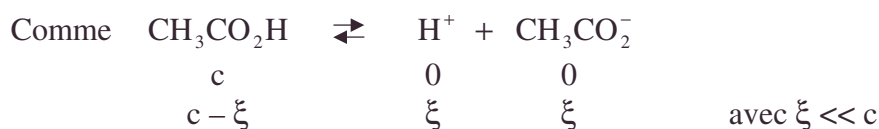
• Domaine de prédominance, graphe, régionnement, RP

$$k = K_1(H^+) ; \frac{-d(B)}{dt} = k(B) \Rightarrow \ln \frac{(B)}{(B)_0} = -K_1 t(H^+).$$

$$\text{a. avec HA}' : \frac{(B)_1}{(B)_0} = 0,1 \Rightarrow K_1 \tau = -\frac{\ln \left(\frac{(B)_1}{(B)_0} \right)}{(H^+)_1} ; (H^+)_1 = 10^{-1}.$$

$$\text{b. avec CH}_3\text{CO}_2\text{H} : (\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}) = 0,1 \text{ et } \frac{(B)_2}{(B)_0} = 0,97 ;$$

$$(H^+)_2 = \frac{-1}{k_1 \tau} \ln \frac{(B)_2}{(B)_0} = (H^+)_1 \frac{\ln \frac{(B)_2}{(B)_0}}{\ln \frac{(B)_1}{(B)_0}}.$$



$$K_A = \frac{(H^+)(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)}{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})} = \frac{(H^+)^2}{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})} = \frac{(H^+)_1^2}{c} \left\{ \frac{\ln \left(\frac{B_2}{B_0} \right)}{\ln \left(\frac{B_1}{B_0} \right)} \right\}^2 ;$$

$$\text{AN : } K_A = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}.$$



$$\text{a. } \Delta_r G^0(T) = -RT \ln K_A = -\alpha - \beta T - \gamma T^2.$$

$$\text{b. } \Delta_r H^0(T) = -T^2 \frac{d}{dT} \left[\frac{\Delta_r G^0}{T} \right] = -\alpha + \gamma T^2.$$

$$\text{c. } \Delta_r S^0 = \frac{-d}{dT} [\Delta_r G^0] = \beta + 2\gamma T.$$

$$\text{d. } \Delta_r C_p^0 = \frac{d}{dT} (\Delta_r H^0) = 2\gamma T.$$

4.5.4. Acide chlorhydrique

1. L'acide chlorhydrique est un acide fort. On donne la constante d'ionisation $K_i = 10^{-14}$ de l'eau à 25° C.

1. Trouver le pH d'une solution de HCl de molarité C.

AN : on calculera le pH correspondant à C = 2, C = 1, C = 0,1 mole/litre.

2. La formule précédente est-elle valable quelle que soit la valeur de C ?

AN : on calculera les pH correspondant à C = 10^{-4} mol.L⁻¹ et C = 10^{-9} mol.L⁻¹.

2. Neutralisation d'une base faible par l'acide chlorhydrique

1. Le pH d'une solution aqueuse d'ammoniac à C = 0,1 mol.L⁻¹ est 11,00. Calculer la constante acido-basique K_A associée à cette solution aqueuse d'ammoniac.

2. On ajoute à 100 cm³ d'une solution aqueuse d'ammoniac à C = 0,1 mol.L⁻¹, x cm³ d'une solution d'acide chlorhydrique à 0,4 mol.L⁻¹.

a. Exprimer les concentrations de NH₃ et de NH₄⁺ en fonction de x.

b. Calculer rapidement x et le pH à l'équivalence et à la demi équivalence.

c. On indique les zones de virages des indicateurs colorés suivants :

• acide chlorhydrique, base faible, demi-équivalence, indicateur coloré, pH, solution aqueuse, tableau, zone de virage

Indicateurs colorés	Zones de virage
Jaune de méthyle	3,1 à 4,0
Rouge de méthyle	4,4 à 6,2
Bleu de thymol	8,0 à 9,6
Jaune d'alizarine	10,0 à 12,0

Quels indicateurs colorés peut-on utiliser pour détecter l'équivalence ? (On pourra utiliser l'allure de la courbe de variation du pH).

3. On ajoute de l'acide chlorhydrique concentré à 1 litre d'une solution où l'on a fait dissoudre 10^{-2} mole de nitrate d'argent AgNO_3 et 10^{-2} mole de nitrate de plomb $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$. On donne les produits de solubilité du chlorure d'argent AgCl soit P_1 et du chlorure de plomb PbCl_2 soit P_2 avec : $pP_1 = 9,8$ et $pP_2 = 4,0$.

1. Quel est le sel qui précipite en premier ?

2. Combien de moles de HCl sont-elles nécessaires pour faire commencer la précipitation du second ?

3. Ces déterminations seraient-elles précises expérimentalement ? Pourrait-on les améliorer ?

4. Qu'advierait-il si on utilisait HCl à $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$?

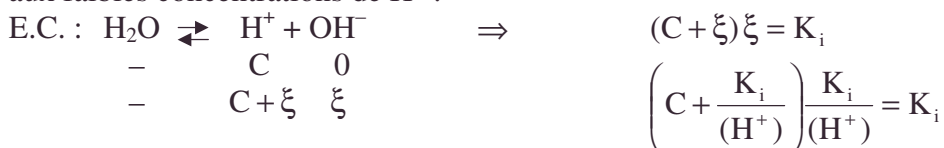
4. Décrire une méthode de dosage de l'ion chlorure.

Centrale ; Durée : 1h

Corrigé



2. Il faut prendre en compte l'équilibre de dissociation de l'eau en plus, importante aux faibles concentrations de H^+ :



$$h = \frac{C + \sqrt{C^2 + 4K_i}}{2} ; h \neq C \text{ si } C^2 \gg 4K_i \Leftrightarrow C \gg 2 \cdot 10^{-7}$$

$$C = 10^{-4} : \text{pH} = 4 ; C = 10^{-9} : h = 1,005 \cdot 10^{-7} \text{ pH} \approx 7 ; \text{pH} = 6,998.$$



C	-	0	0
$C - \xi$	-	ξ	ξ

$\xi \ll C$ car NH_3 est une base faible.

$$K = \frac{(\text{NH}_4^+)(\text{OH}^-)}{(\text{NH}_3)} = \frac{(\text{NH}_4^+)}{(\text{NH}_3)(\text{H}^+)} (\text{H}^+)(\text{OH}^-) = \frac{K_i}{K_A} \Rightarrow (\text{OH}^-)^2 = \frac{K_i C}{K_A}.$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_i + \text{p}K_A + \log C) ; \text{p}K_a = 2\text{pH} - \text{p}K_i - \log C \Rightarrow \text{A.N.} : \text{p}K_A = 9 ; K_A = 10^{-9}.$$



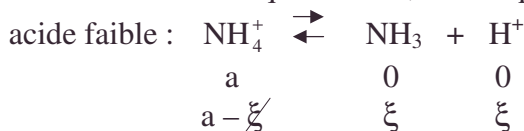
$x < \frac{v}{4}$	Cv	$4Cx$	0
	$C(v - 4x)$	0	$4Cx$
$x > \frac{v}{4}$	0	$C(4x - v)$	Cv

• chlorure d'argent, chlorure de plomb, courbe, dosage, nitrate d'argent, nitrate de plomb, RP, solubilité

$$\Rightarrow x < \frac{v}{4} \quad (\text{NH}_3) = \frac{100 - 4x}{10(100 + x)} ; (\text{NH}_4^+) = \frac{4x}{10(100 + x)} .$$

$$x > \frac{v}{4} \quad \text{NH}_3 \neq 0 \quad \text{NH}_4^+ = \frac{100}{10(100 + x)} .$$

b.α. $x = 25$ à l'équivalence ; c'est le pH de NH_4Cl dissous en NH_4^+ et Cl^- .



$$K_A = \frac{(\text{H}^+)^2}{C} \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_A - \log C) \text{ A.N. : } C = \frac{0,1 \cdot 100}{125} = 0,08 \text{ mol.L}^{-1} ; \text{pH} = 5,05.$$

β. $x = 12,5$ à la demi équivalence ; $\text{pH} = \text{p}K_A = 9$.

c. Le rouge de méthyle est adapté car le pH de l'équivalence appartient à sa zone de virage mais le jaune de méthyle peut donner une valeur approchée de x à 0,4% près car à

$$x = 25,1 \quad (\text{H}^+) = \frac{0,1 \cdot 4 \cdot 0,1}{125,1} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ et } \text{pH} = 3,5 .$$

soit $\text{pH} = 3,5$.

3.1. Le sel le plus insoluble précipite en premier, soit AgCl , il suffit de voir la quantité minimale de HCl à ajouter ; ici : $1,58 \cdot 10^{-8}$ mole pour commencer à précipiter AgCl soit dès la première goutte.

2. Pour précipiter PbCl_2 , il faut en solution $(\text{Cl}^-) = \left(\frac{P_2}{(\text{Pb}^{2+})_0} \right)^{\frac{1}{2}} ;$

A.N. : $(\text{Cl}^-) = 10^{-1}$, alors $(\text{Ag}^+) = 10^{-8,8}$. Tout l'argent a précipité sous forme de AgCl , ce qui a consommé 10^{-2} mole de Ag^+ . Il a fallu verser $10^{-1} + 10^{-2} = 0,11$ mole d'acide chlorhydrique.

3. L'étude des précipitations se fait soit par dosage potentiométrique ou mieux par dosage conductimétrique de précision. On a intérêt à diluer la solution acide pour bien doser à la goutte près (cf. 4.).

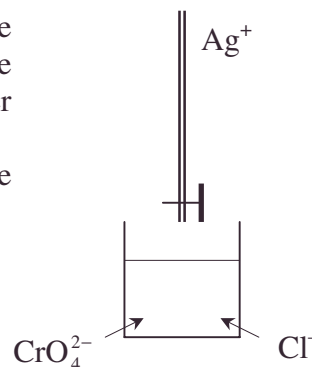
4. Le phénomène de dilution est à considérer : soit x le volume d'acide versé.

$$(\text{Cl}^-) = \frac{0,1x}{1+x} ;$$

$$(\text{Pb}^{++}) = \frac{10^{-2}}{1+x} \text{ or } (\text{Pb}^{++})(\text{Cl}^-)^2 = P_2 ; 10^{-4} x^2 = 10^{-4} (1+x)^3 ;$$

$x = -0,44 \Rightarrow x < 0$ impossibilité de faire précipiter PbCl_2 .

4. Le dosage volumétrique par AgNO_3 se fait en présence d'un peu de K_2CrO_4 (indicateur coloré) car on voit Ag_2CrO_4 précipité rouge à la fin de la précipitation de Cl^- sous forme de AgCl .



4.5.5. L'élément azote en chimie inorganique

L'élément azote en chimie générale

1. Déterminer le degré d'oxydation de l'azote dans les composés suivants:



• acide chlorhydrique, degré d'oxydation, demi-équivalence, dosage, indicateur coloré, jaune de méthyle, précision

2. Synthèse de l'ammoniac

Donner la réaction de formation de l'ammoniac.

A partir du tableau, calculer la température d'inversion de l'équilibre.

Corps	$\Delta_f H^0$ (kJ.mol ⁻¹)	s^0 (J.mol ⁻¹ .K ⁻¹)
H _{2(g)}	—	130,5
N _{2(g)}	—	191,3
NH _{3(g)}	-46,1	192,3

On suppose que les grandeurs thermodynamiques rassemblées dans le tableau sont indépendantes de la température.

Justifier brièvement le signe de $\Delta_r S^0$ de la réaction de formation de l'ammoniac. D'un point de vue thermodynamique, a-t-on intérêt à élever la température de la réaction ? Justifier votre réponse.

3. Propriétés acido-basiques de l'ammoniac

Trouver le pH d'une solution aqueuse d'ammoniac de concentration 0,1 mol.L⁻¹.

On donne, pour le couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$, $pK_a = 9,25$, étudier le dosage de $v_0 = 10$ ml de cette solution par de l'acide chlorhydrique 0,1 mol.L⁻¹.

Trouver en particulier $\text{pH} = f(x)$ si $0 < x < 1$, puis $x > 1$, et calculer le pH pour $x = 1$.

$x = \frac{v}{v_e}$ où v est le volume d'acide ajouté et v_e le volume d'acide ajouté à l'équivalence.

4. Propriétés complexantes de l'ammoniac

Le cuivre a pour numéro atomique $Z = 29$. L'ion cuivrique Cu^{2+} donne avec la molécule NH_3 un complexe tétracoordonné $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$.

La constante de dissociation de ce complexe (en ions Cu^{2+} et molécule NH_3) vaut $K_d = 10^{-12}$ à 25°C, calculer rapidement la concentration en ions cuivriques restant dans une solution qui en contenait initialement 0,005 mol.L⁻¹ et à laquelle on ajoute 1 mole par litre d'ammoniac sans variation notable de volume.

Air ; Durée : 1 h

Corrigé

I.1. Connaisant

DO H = I

DO O = -II,

les règles d'équilibre des charges formelles avec la charge de l'édifice permettent de trouver :

	N ₂	NH ₃	NH ₄ ⁺	NO	NO ₂	HNO ₂	HNO ₃
DO	0	-III	-III	+II	+IV	+III	+V

2.a. $\text{N}_2(\text{g}) + 3 \text{H}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2 \text{NH}_3(\text{g})$.

b. $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 = (2 \Delta_f H_{\text{NH}_3}^0 - 0) - T(2s_{\text{NH}_3}^0 - s_{\text{N}_2}^0 - 3s_{\text{H}_2}^0)$;

$\Delta_r G^0 = -92200 + 198,2T$.

On obtient $T_i = 465,2 \text{ K}$ en faisant $\Delta_r G^0 = 0 \text{ J mol}^{-1}$.

c. $\Delta_r S^0 = -198,2 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \Rightarrow \Delta_r S^0 < 0$ diminution d'entropie (donc diminution de désordre) quand on passe de $\text{N}_2 + 3\text{H}_2$ à 2NH_3 , forme plus condensée d'une seule et même nature gazeuse.

d. D'après la règle de Vant'Hoff, on n'a pas intérêt thermodynamique à élever la température, pour déplacer une réaction réversible exothermique.

3.a. On a une solution de base faible non extrêmement diluée : $\xi \ll a$.

E.C. $\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{OH}^-$ de bilan molaire

$$K = \frac{\overset{a}{\text{NH}_4^+} \overset{0}{\text{OH}^-}}{\overset{a-\xi}{\text{NH}_3}} = \frac{\overset{0}{\text{NH}_4^+} \overset{0}{\text{OH}^-}}{\overset{\xi}{\text{NH}_3} \overset{\xi}{\text{H}^+}} = \frac{K_e}{K_A},$$

$$\Rightarrow (\text{OH}^-)^2 = \frac{K_e}{K_A} c \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_A - \text{pc} + \text{p}K_e); \text{A.N. : pH} = 11,13.$$

b. RP : $\text{NH}_3 + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{NH}_4^+$ de bilan molaire

$$\begin{array}{ccc} c_0 v_0 & c_0 v & 0 \\ c_0 v_0 - \xi' & c_0 v - \xi' & \xi' \end{array}$$

A l'équivalence, on a versé autant d'acide que de base :

$$c_0 v_0 = c_0 v_e \Rightarrow v_e = v_0 \text{ et } x = \frac{v}{v_0}.$$

$$\alpha. x < 1; (\text{NH}_3) = \frac{c_0 v_0 - c_0 v}{v_0 + v};$$

$$(\text{NH}_4^+) = \frac{c_0 v}{c_0 + v}; \text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{(\text{NH}_3)}{(\text{NH}_4^+)} \Rightarrow \text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{1-x}{x}$$

cf. solution tampon.

\beta. $x = 1$;

On a une solution d'acide faible :



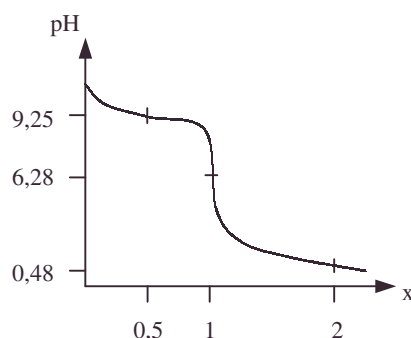
$$\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ a - \xi' & \xi' & \xi' \end{array} \quad \xi' \ll a$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_A + \text{pc}') \text{ avec } c' = (\text{NH}_4^+) = \frac{c_0}{2}; \text{A.N. : pH} = 5,28.$$

\gamma. $x > 1$; on a consommé la quantité de H^+ nécessaire à neutraliser NH_3 , il ne reste que le surplus.

$$(\text{H}^+) = \frac{c_0 v - c_0 v_0}{v_0 + v}; \text{pH} = -\log \frac{x-1}{x+1};$$

AN : $x = 2$; $\text{pH} = 0,48$.



$$\begin{array}{ccccc} t = 0 & 5 \cdot 10^{-3} & 1 & 0 \\ t_{\text{eq}} & \varepsilon & 1 - 20 \cdot 10^{-3} & 5 \cdot 10^{-3} \end{array}$$

$$(\text{Cu}^{2+}) = K_d \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{(\text{NH}_3)^4} = 10^{-12} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-3}}{(0,98)^4} = 5,42 \cdot 10^{-15} \text{ mol.L}^{-1}.$$

4.5.6. Analyse qualitative

Le but de cette partie est, à l'aide d'un certain nombre de données parmi celle fournies ci-dessous, d'identifier le contenu des quatre flacons A, B, C, D. Les quatre récipients contiennent des solutions aqueuses d'ammoniac, d'acide nitrique, d'ions ferreux, d'ions ferriques. A l'aide de tests simples, on a rempli le tableau suivant ; les résultats significatifs des tests se lisent à l'intersection ligne – colonne, les éventuelles élévations de température n'ont pas été notées.

	A	B	C	D
A		précipité vert		précipité rouille
B	précipité vert		changement de couleur dégagement de gaz	
C		changement de couleur dégagement de gaz		
D	précipité rouille			

- Associer A, B, C, D aux solutions en justifiant les phénomènes observés.
- Ecrire les équations chimiques les traduisant.
- Calculer les constantes d'équilibre associées.

Données

$$E^0_{(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+})} = 0,77 \text{ V}$$

$$E^0_{(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe})} = -0,44 \text{ V}$$

$$E^0_{(\text{NH}_3/\text{N}_2)} = 0,09 \text{ V}$$

$$E^0_{(\text{NO}_3^-/\text{NO}_2)} = 0,78 \text{ V}$$

$$E^0_{(\text{NO}_3^-/\text{NO})} = 0,96 \text{ V}$$

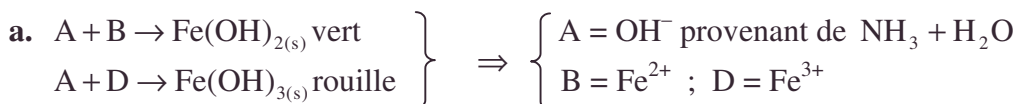
$$\text{pK}_A(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3) = 9,3$$

$$\text{pK}_s(\text{Fe}(\text{OH})_2) = 15$$

$$\text{pK}_s(\text{Fe}(\text{OH})_3) = 37$$

Centrale

Corrigé



par conséquent, C \equiv HNO₃ (complémentarité).



$$K_{AB} = \frac{(\text{NH}_4^+)^2}{(\text{NH}_3)^2 (\text{Fe}^{2+})} = \frac{(\text{NH}_4^+)^2}{(\text{NH}_3)^2 (\text{H}^+)^2} \cdot \frac{(\text{H}^+)^2 (\text{OH}^-)^2}{(\text{Fe}^{2+}) (\text{OH}^-)^2} = \frac{K_e^2}{K_A^2 K_s(\text{Fe}(\text{OH})_2)} ;$$

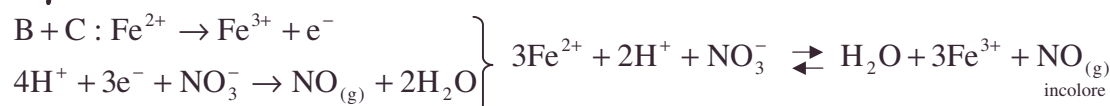
$$\text{AN} : K_{AB} = 4.10^5 \Rightarrow \alpha \text{ est RPQ}$$



$$K_{AD} = \frac{(\text{NH}_4^+)^3}{(\text{NH}_3)^3 (\text{Fe}^{3+})} = \frac{(\text{NH}_4^+)^3}{(\text{NH}_3)^3 (\text{H}^+)^3} \cdot \frac{(\text{H}^+)^3 (\text{OH}^-)^3}{(\text{Fe}^{3+}) (\text{OH}^-)^3} = \frac{K_e^3}{K_A^3 K_s(\text{Fe}(\text{OH})_3)} ;$$

$$\text{AN} : K_{AD} = 7,9.10^2 \Rightarrow \beta \text{ est RPQ}.$$

γ .



car $\text{NO}_3^-/\text{NO}_2$ moins favorisé thermodynamiquement.

$$E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 + \frac{0,059}{3} \log \frac{(\text{Fe}^{3+})^3}{(\text{Fe}^{2+})^3} = E_{\text{NO}_3^-/\text{NO}}^0 - \frac{0,059}{3} \log \frac{P_{\text{NO}} (c^0)^3}{P^0 (H^+)^2 (\text{NO}_3^-)}$$

$$\log \frac{P_{\text{NO}} (\text{Fe}^{3+})^3 (c^0)^3}{P^0 (H^+)^2 (\text{Fe}^{2+})^3 (\text{NO}_3^-)} = \frac{(-E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^0 + E_{\text{NO}_3^-/\text{NO}}^0)^3}{0,059} ; K_{\text{BC}} = 4,6 \cdot 10^9.$$

4.5.7. Précipitation simple de sulfures

1. La solubilité dans l'eau du sulfure d'hydrogène est de 0,1 mole par litre à une température pour laquelle les constantes d'acidité ont les valeurs :

$$K_1 = 2 \cdot 10^{-7} ; K_2 = 10^{-15}$$

Calculer, pour cette température, le pH d'une solution aqueuse saturée en H_2S .

2. Une solution aqueuse est maintenue saturée en H_2S : on admettra que la concentration en H_2S libre dans cette solution est de $C = 0,1$ mole par litre. Par addition d'acide ou de base, il est possible de faire varier le pH de la solution précédente.

a. Montrer que la variation dans cette solution de la concentration en ions S^{2-} en fonction de la concentration en ions H^+ peut être représentée graphiquement d'une façon simple.

b. La solution renferme par litre 0,1 mole de sulfate de manganèse (Mn^{2+}) et 0,1 mole de sulfate de zinc (Zn^{2+}).

Déterminer les valeurs limites du pH telles que les ions Zn^{2+} précipitent seuls.

Produits de solubilité à la température considérée :

- Sulfure de zinc : $P_{s_1} = 10^{-25}$.
- Sulfure de manganèse : $P_{s_2} = 10^{-14}$.

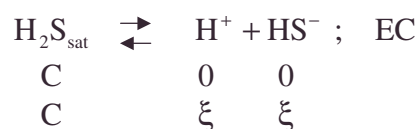
3. On mélange à volumes égaux la solution saturée de H_2S dans l'eau pure et une solution d'ammoniac à $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$. Calculer, en justifiant les approximations nécessaires, le pH de la solution obtenue.

Constante d'acidité du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$: $K_a = 5,5 \cdot 10^{-10}$.

CCP ; Durée : 1h

Corrigé

1. Diagramme de prédominance : $\frac{\text{H}_2\text{S} \mid \text{HS}^-}{pK_1 = 6,7} \rightarrow \text{pH}$



On néglige la 2^{ème} acidité dans le mélange $\text{HS}^- \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{S}^{2-}$.

La constante $K_1 = \frac{(\text{H}^+)(\text{HS}^-)}{(\text{H}_2\text{S})} = \frac{(\text{H}^+)^2}{(\text{H}_2\text{S})}$ est petite ; l'équilibre est peu déplacé. $\xi \ll C$.

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}C) ; \text{pH} = 3,85.$$

Vérification : $\text{pH} < \text{p}K_1 - 1$. On a bien $(\text{H}_2\text{S}) \gg (\text{HS}^-)$ et $(\text{H}_2\text{S}) \gg (\text{H}^+)$.

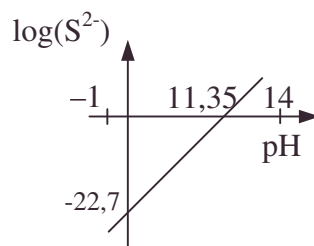
- constante d'acidité, pH, produit de solubilité, solubilité, solution aqueuse, solution saturée de H_2S

2.a. De l'écriture de K_1 et de $K_2 = \frac{(H^+)(S^{2-})}{(HS^-)}$ on

déduit $K_1 K_2 = \frac{(H^+)^2 (S^{2-})}{(H_2S)}$, d'où $(S^{2-}) = \frac{K_1 K_2 C}{(H^+)^2}$,

soit : $\log(S^{2-}) = \log C - pK_1 - pK_2 + 2pH$

AN : $\log(S^{2-}) = 2pH - 22,7$



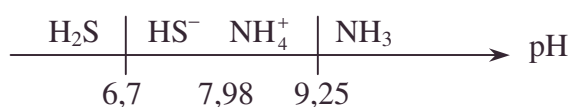
b. En milieu très acide ($pH = -1$) les produits de solubilité ne sont pas atteints. Quand pH croît, (S^{2-}) croît. le premier précipité sera celui dont le produit de solubilité est atteint en premier : c'est-à-dire le plus petit. ZnS précipite en premier dès que $(S^{2-}) = 10^{-24}$, soit $pH = -0,65$ vu le lien $\log(S^{2-}) = 2pH - 22,7$; il reste le seul précipité tant que P_{s_2} n'est pas atteint, soit pour $pH = \frac{1}{2}(\log(S^{2-}) + pK_1 + pK_2 - \log C)$, soit encore : $pH = \frac{1}{2}(pK_1 + pK_2 + pC - pP_{s_2} + p(Mn^{2+})_0)$; AN : $pH = 4,85$.

3. Constante d'équilibre de la réaction :



RP vu le diagramme de prédominance

$$\begin{array}{cccc} \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & 0 & 0 \\ \frac{c}{2} - \xi & \frac{c}{2} - \xi & \xi & \xi \end{array}$$



$$K = \frac{(NH_4^+)}{(NH_3)(H^+)} \frac{(H^+)(HS^-)}{(H_2S)} = \frac{K_1}{K_{NH_4^+/NH_3}} \quad \text{AN : } K = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{5,5 \cdot 10^{-10}} = 364.$$

La constante permet de dire que l'équilibre est très déplacé $\xi \ll \frac{c}{2}$.

Ecrivons la constante $K_1 \cdot K_a = \frac{(HS^-)(H^+)}{H_2S} \cdot \frac{(H^+)(NH_3)}{NH_4^+} = (H^+)^2$.

$pH = \frac{1}{2}(pK_1 + pK_a)$; AN : $pH = 7,98$.

On vérifie facilement que $(H_2S) \ll (HS^-)$ et $(NH_3) \ll (NH_4^+)$.

On a bien fait de négliger la présence de (S^{2-}) ; la présence des ions (OH^-) de l'eau peut aussi être négligée $10^{-7} \ll 10^{-6}$ ce que certains n'apprécient pas ; des calculs plus complets n'apportent rien dans ce cas.

4.5.8. Sulfure de zinc

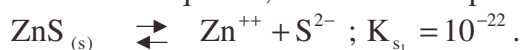
Les gaz seront considérés comme parfaits, avec la constante : $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mole}^{-1}$.

Les potentiels des couples oxydo-réducteurs seront exprimés en volt par rapport à l'électrode normale à hydrogène (E.N.H.) avec : $\frac{RT}{F} \log x = 0,06 \log_{10} x$ (à 25°C).

Le principal minéral de zinc est le sulfure de zinc ZnS .

On s'intéressera dans cette épreuve à quelques propriétés de ZnS en solution aqueuse.

En solution aqueuse, ZnS est un sel peu soluble selon l'équilibre :



1. H₂S est un diacide faible dont les pK_A sont respectivement :



a. Indiquer (brièvement) les domaines de pH dans lesquels prédominent les différentes espèces impliquées dans ces couples acide – base.

b. Dans un litre d'eau, on introduit $C_0 = 10^{-2}$ mole de H₂S.

Calculer la valeur du pH de cette solution.

c. Dans cette solution, on ajoute Na₂S (sel soluble et totalement dissocié).

Ecrire la réaction qui se produit.

Exprimer et calculer la valeur de sa constante d'équilibre.

Quelle quantité de Na₂S faudra-t-il ajouter pour obtenir pH = 7 ?

2. Dans un litre d'une solution tamponnée à pH = 10, on introduit 10^{-2} mole de ZnS_(s).

a. Ecrire l'équilibre de dissolution de ZnS faisant intervenir les espèces majoritaires à ce pH. Calculer la constante correspondante.

b. Quelles sont, à l'équilibre, les concentrations de Zn²⁺, HS⁻, S²⁻ et H₂S ?

3. Dans un litre d'eau pure on introduit $n_0 = 10^{-2}$ mole de ZnS_(s) et on ajoute un acide fort.

a. Expliquer qualitativement l'influence de l'addition de l'acide fort sur la solubilité de ZnS.

b. Pour quelle valeur de pH, la dissolution de ZnS est-elle complète ? Quelle quantité d'acide fort a-t-on alors ajoutée ?

4. La mesure de la solubilité de ZnS dans l'eau pure peut s'effectuer à l'aide d'une électrode d'argent recouverte de sulfure d'argent (électrode (Ag_(s) / Ag₂S_(s))). Ag₂S est un sel très peu soluble selon l'équilibre : $\text{Ag}_2\text{S}_{(s)} \rightleftharpoons 2\text{Ag}^+ + \text{S}^{2-} ; K_{s2} = 10^{-49}$.

Dans un premier temps, on se place dans une solution tamponnée à pH élevé (voisin de 14).

a. Exprimer le potentiel que prend l'électrode (Ag_(s) / Ag₂S_(s)) plongeant dans cette solution en fonction de (S²⁻). On donne E⁰ = 0,8 V.

b. Dans cette solution, on ajoute un excès de ZnS_(s) :

– Montrer que la présence de ZnS_(s) impose la concentration en sulfure de la solution. En conclure que le potentiel de l'électrode (Ag_(s) / Ag₂S_(s)) est relié à la solubilité s₁ de ZnS.

– En présence de ZnS_(s) et à pH voisin de 14 on mesure un potentiel à l'électrode (Ag / Ag₂S) égal à -0,34 v.

Montrer que cette valeur est cohérente avec celle de K_{s1} = 10⁻²².

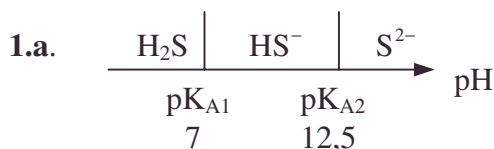
5. On fait varier le pH d'une solution contenant en permanence ZnS_(s) et dans laquelle plonge l'électrode (Ag_(s) / Ag₂S_(s)).

a. Montrer de façon qualitative que le potentiel de l'électrode (Ag_(s) / Ag₂S_(s)) est relié en permanence à la solubilité de ZnS.

• constante d'équilibre, électrode d'argent recouverte de sulfure d'argent, électrode normale à hydrogène, gaz parfait, majoritaire, minéral, pH, potentiel d'électrode, solubilité, solution aqueuse, solution tamponnée, sulfure de zinc, zinc

Problèmes mixtes

b. Tracer la courbe représentant l'évolution du potentiel pris par l'électrode ($\text{Ag}_{(s)} / \text{Ag}_2\text{S}_{(s)}$) en fonction du pH. Pour cela, on montrera que, selon le domaine du pH, la variation du potentiel de l'électrode ($\text{Ag}_{(s)} / \text{Ag}_2\text{S}_{(s)}$) est assimilable à une fonction linéaire du pH (on précisera la valeur de $\frac{\Delta E}{\Delta \text{pH}}$ dans chaque domaine de pH).

ENSAM ; Durée : 2h**Corrigé**

On néglige la 2^{ème} acidité plus faible. Le 1^{er} acide est faible $\Rightarrow \xi \ll \text{C}$.

$$K_{\text{A}1} = \frac{(\text{H}^+)(\text{HS}^-)}{(\text{H}_2\text{S})} = \frac{(\text{H}^+)^2}{\text{C}_0}$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_{\text{A}1} + \text{pC}_0) \text{ AN : pH} = 4,5$$

Vérification : on est bien dans le domaine de prédominance de H_2S : $\text{pH} < \text{pK}_{\text{A}1} - 1$.



La réaction équilibrée demandée est $\text{S}^{2-} + \text{H}_2\text{S} \rightleftharpoons 2\text{HS}^-$ RP₂,

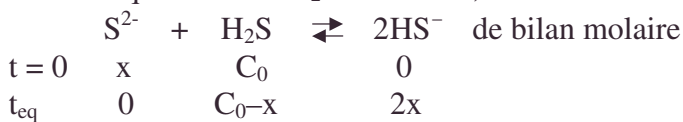
de constante $K = \frac{K_{\text{A}1}}{K_{\text{A}2}}$. A.N. : $K = 3,16 \cdot 10^{-5}$.

β. A pH = 7 (frontière des domaines de prédominance) :

$(\text{H}_2\text{S}) = (\text{HS}^-)$ et $(\text{S}^{2-}) \ll (\text{HS}^-)$ car on est à $\text{pH} < \text{pK}_{\text{A}2} - 1$.

La réaction de transformation de S^{2-} est donc totale.

Soit x la quantité de Na_2S introduite,



La condition $(\text{H}_2\text{S}) = (\text{HS}^-) \Rightarrow \text{C}_0 - x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{\text{C}_0}{3}$; AN : $x = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$.

2.a. pH = 10.

α. RP : $\text{H}_2\text{O} + \text{ZnS}_{(s)} \rightleftharpoons \text{Zn}^{2+} + \text{HS}^- + \text{OH}^-$ car HS^- est l'espèce sulfurée prédominante (de même OH^- prédomine sur H^+).

β. $K_{\text{A}2} = \frac{(\text{S}^{2-})(\text{H}^+)}{(\text{HS}^-)}$; $K_{\text{s}1} = (\text{Zn}^{2+})(\text{S}^{2-})$.

$$K' = (\text{Zn}^{2+})(\text{HS}^-)(\text{OH}^-) = \frac{(\text{Zn}^{2+})(\text{S}^{2-})(\text{HS}^-)(\text{H}^+)(\text{OH}^-)}{(\text{S}^{2-})(\text{H}^+)} = \frac{K_{\text{s}1} K_e}{K_{\text{A}2}} ; .$$

$$AN : K' = 3,16 \cdot 10^{-24}$$

b. La donnée numérique est le pH. Exprimons les inconnues en fonction du pH.

$$(HS^-) = (Zn^{2+}) \Rightarrow (Zn^{2+})^2 = (HS^-)^2 = (Zn^{2+})(HS^-) = \frac{K'}{(OH^-)} = \frac{K'(H^+)}{K_e}.$$

$$(Zn^{2+}) = (HS^-) = \sqrt{\frac{K_{s_1}}{K_{A_2}}}(H^+);$$

on tire (S^{2-}) de (K_{s_1}) et H_2S de K_{A_1} en remplaçant (Zn^{2+}) ou $(HS^-) = (Zn^{2+})(HS^-)$

$$(S^{2-}) = \sqrt{\frac{K_{s_1} K_{A_2}}{(H^+)}}; (H_2S) = \sqrt{\frac{K_{s_1} (H^+)^3}{K_{A_1}^2 K_{A_2}}}.$$

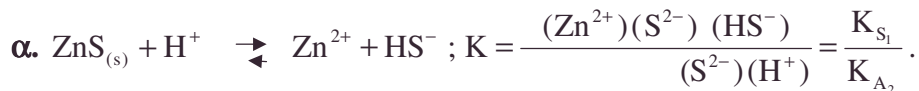
$$AN : (Zn^{2+}) = (HS^-) = 1,78 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}; (S^{2-}) = 5,62 \cdot 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1};$$

$$(H_2S) = 1,78 \cdot 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}.$$



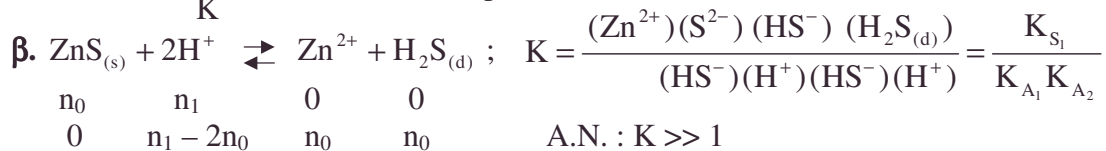
Macroscopiquement, H^+ consomme S^{2-} et déplace l'équilibre de dissolution de ZnS ; de fait, l'attaque est au niveau microscopique.

b. On a deux écritures possibles de description des espèces majoritaires correspondant à une dissolution complète.



Le déplacement complet suppose $(Zn^{2+}) = (HS^-) = 10^{-2}$.

$$\Rightarrow (H^+) = \frac{(Zn^{2+})(HS^-)}{K} = 3,16 \cdot 10^5 \text{ impossible.}$$



$$\begin{array}{cccc} n_0 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 - 2n_0 & n_0 & n_0 \end{array} \quad A.N. : K \gg 1$$

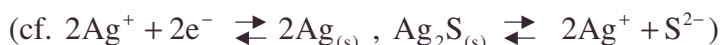
$$(H^+)^2 = \frac{(Zn^{2+})(H_2S_{(d)})}{K} = \frac{(Zn^{2+})(H_2S_{(d)})}{K_{s_1}} \cdot K_{A_1} \cdot K_{A_2}.$$

A.N. : Le déplacement complet suppose $(Zn^{2+}) = (H_2S_d) = 10^{-2} \Rightarrow pH = 0,75$.

$H_2S_{(d)}$ prédominant est l'hypothèse à retenir pour la dissolution complète de n_0 .

$$\gamma. n_{H_{final}^+} = n_1 - 2n_0; n_1 = 2n_0 + n_{H_{final}^+}; A.N. = 2 \cdot 10^{-2} + 0,178 = 0,198 \text{ mol.}$$

La dissolution est complète après ajout de 0,2 mol d'acide fort par litre.



en éliminant l'espèce minoritaire Ag^+ .)

Le potentiel d'électrode est unique mais peut être paramétré différemment.

$$E = E_0 + 0,06 \log(Ag^+) = E_0 + 0,03 \log K_{s_2} - 0,03 \log(S^{2-}) (cf. K_{s_2} = (Ag^+)^2 (S^{2-})).$$

$$E = E'_0 - 0,03 \log(S^{2-}); AN : E'_0 = -0,67 \text{ V.}$$

b.α. ZnS est plus soluble que $Ag_2S \Rightarrow$ la contribution en S^{2-} de Ag_2S est négligeable devant celle de ZnS et $(S^{2-}) = s_1$. (s_1 = solubilité de ZnS).

A pH basique élevé, S^{2-} n'est pas consommé par un autre phénomène (cf. 3.) $K_{s_1} = s_1^2$.

• ajout, diagramme de prépondérance, minoritaire, solubilité

La solubilité de ZnS impose la concentration en sulfure.

$$\beta. E = E'_0 - 0,03 \log(s_1) = E'_0 + 0,15 \text{ pK}_{S_1} ; \text{AN} : E = -0,34 \text{ V pour } \text{pK}_{S_1} = 22.$$

Il y a cohérence parfaite entre théorie et mesure.

5.a. Tant qu'il y a ZnS solide (cf. 3.) : $(S^{2-})_{s_1} = K_{S_1}$ donc d'après 4.a. le potentiel $E = E'_0 + 0,03 \text{ pK}_{S_1} + 0,03 \log s_1$ est donc lié à la solubilité de ZnS.

b. Analyse des domaines de prédominance.

$\alpha.$ $\text{pH} > \text{pK}_{A_2}$; $\text{pH} > 12,5$; S^{2-} est l'espèce majoritaire.

$$E = E'_0 - 0,03 \log(S^{2-}), \text{ indépendant du pH}$$

$$\text{frontière potentiel pH} : E = E'_0 = -0,67 \text{ V.}$$

Si on adopte la convention $(S^{2-}) = 1$ irréaliste mais simple pour tracer la courbe frontière.

$\beta.$ $\text{pK}_{A_1} < \text{pH} < \text{pK}_{A_2}$; $7 < \text{pH} < 12,5$; HS^- est majoritaire, on remplace (S^{2-}) .

$$E = \underbrace{E'_0 + 0,03 \text{pK}_{A_2}}_{E''_0} + 0,03 \log \frac{(H^+)}{(HS^-)} ; \text{A.N.} : E''_0 = 0,295 \text{ V.}$$

$$\text{frontière potentiel pH} : E = E''_0 - 0,03 \text{pH} ; \frac{\Delta E}{\Delta \text{pH}} = -0,03.$$

Si on adopte la convention $(HS^-) = 1$ pour tracer la courbe

$\gamma.$ $\text{pK}_{A_1} > \text{pH}$; $\text{pH} < 7$.

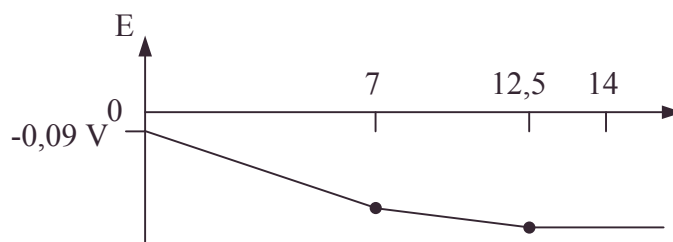
H_2S est l'espèce majoritaire, on remplace (HS^-) ;

$$E = E'_0 + 0,03(\text{pK}_{A_1} + \text{pK}_{A_2}) + 0,03 \log \frac{(H^+)^2}{(H_2S)}.$$

La convention $(H_2S_d) = 1$ donne la courbe frontière potentiel pH :

$$E = E'''_0 - 0,06 \text{pH} ; \frac{\Delta E}{\Delta \text{pH}} = -0,06.$$

$$E'''_0 = E_0 + 0,03 \log K_{S_2} + 0,03 \text{pK}_{A_1} + 0,03 \text{pK}_{A_2} ; \text{AN} : E'''_0 = -0,085 \text{ V.}$$



4.5.9. Travaux pratiques de dosages

Le devoir comporte 4 paragraphes : chacun peut être traité indépendamment des autres. Les paragraphes **I, II, III, IV** concernent des méthodes classiques de dosage en solutions aqueuses, et l'emploi de différents types d'indicateurs de fin de réaction. Chaque étude a pour but de justifier la méthode de dosage.

I. Dosage acido – basique

1. Un indicateur coloré acido-basique de fin de réaction peut être caractérisé par une constante d'équilibre K_i (ou pK_i) : préciser sa signification.

Evaluer le pK_i des indicateurs du tableau 1 ci-dessous.

Tableau 1 : indicateurs acido-basiques.

Nom usuel	Couleur de la forme		Zone de virage
	Acide	Base	
Méthylorange ou Hélianthine	rouge	jaune orange	$3,1 \leq \text{pH} \leq 4,4$
Rouge de méthyle	rouge	jaune	$4,2 \leq \text{pH} \leq 6,2$
Bleu de bromothymol (BBT)	jaune	bleu	$6,0 \leq \text{pH} \leq 7,6$
Phénolphthaléine	incolore	rouge	$8,0 \leq \text{pH} \leq 9,9$

Rappeler le principe et le mode opératoire du dosage d'un acide faible par une base forte, ou l'inverse.

Tableau 2 : constantes d'acidité

Couple acide - base	pK_a
$\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2\text{O}$	
$\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COO}^-$	+ 4,8
$\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3$	+ 9,2
$\text{H}_2\text{O} / \text{OH}^-$	

2. On pourrait envisager, a priori, le dosage de la base de l'un quelconque des couples du tableau II par l'acide de l'un des autres couples (mais un choix s'impose). Discuter brièvement les conditions du choix des réactifs et de l'indicateur. On pourra utiliser l'étude de chaque exemple de dosage en utilisant l'allure générale des courbes de titrage définie par deux ou trois points importants, sans démonstration.

Dans le cas de H_3O^+ et de OH^- (en fait, respectivement des solutions d'acide chlorhydrique et d'hydroxyde de sodium, par exemple) on portera en outre sur cet axe, le pH des solutions $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

3. Comparer très schématiquement (en quelques lignes) les avantages et les inconvénients de l'emploi d'indicateurs colorés par rapport à d'autres méthodes de dosages : pHmétrie, conductimétrie... et relever ce qui peut orienter le choix.

II. Dosage redox

Dosage par le cérium IV ; réactifs : solution acide de sulfate cérique $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$; solution de sulfate de fer II et d'O-phénantroline ferreuse.

Mode opératoire : diluer les 10 ml de la prise d'essai de solution ferreuse par 200 ml d'eau. Ajouter 2 gouttes d'indicateur.

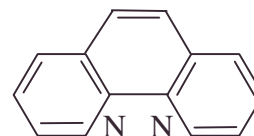
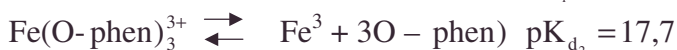
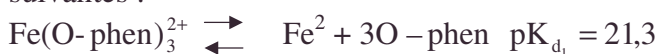
Titrer par la solution cérique jusqu'au virage de l'indicateur (du rouge au bleu pâle).

Potentiel standard d'oxydoréduction :



Indicateur d'oxydoréduction : O – phénantroline ferreuse : complexe du fer (II) avec la 1,10 phénantroline, notée O – phen) : $\text{Fe}^{\text{II}}(\text{O-phen})_3^{2+}$.

Le complexe ferreux est rouge, le complexe ferrique est bleu pâle, les constantes de dissociation des complexes sont les suivantes :



1. Bilan de matière :

Uniquement en faisant des bilans de matière, donner les relations très simples :

- entre les concentrations molaires (Ce^{3+}) et (Fe^{3+}) à chaque stade du dosage ;

- base forte, constante d'équilibre, dosage, indicateur coloré, indicateur d'oxydoréduction, o-phénantroline ferreuse, oxydoréduction, phénantroline, tableau, titrage

- montrer que au point d'équivalence $(\text{Fe}^{2+}) = (\text{Ce}^{4+})$.

2. L'indicateur coloré : potentiel et zone de virage.

Calculer le potentiel d'oxydo-réduction du couple $\text{Fe}(\text{O} - \text{phen})_3^{3+} / \text{Fe}(\text{O} - \text{phen})_3^{2+}$.

Comment pourrait-on définir, sur l'échelle des potentiels d'électrode, l'intervalle de virage de l'indicateur ?

3. Quelques secondes après chaque addition de la solution oxydante à la solution ferreuse, un état d'équilibre s'établit ; montrer qu'alors le potentiel du couple $\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}$ et celui du couple $\text{Ce}^{4+} / \text{Ce}^{3+}$ sont égaux. Exprimer en conséquence de deux façons différentes le potentiel d'oxydo-réduction de la solution, en fonction de la concentration de certains ions. Donner sa valeur quand on a ajouté à la solution ferreuse successivement : le volume moitié du volume équivalent de solution cérique ; exactement le volume équivalent ; le volume double du volume équivalent. Calculer le rapport $(\text{Fe}^{3+})/(\text{Fe}^{2+})$ en chacun de ces points ainsi qu'au point de virage de l'indicateur.

4. Regrouper sur un tableau les résultats précédents ; les reporter sur une courbe de dosage et justifier le principe de la méthode de dosage.

5. Proposer un montage permettant de suivre la variation, au cours du dosage, du potentiel d'une électrode indicatrice par rapport à une électrode de référence. On donnera les indications suffisantes pour la réalisation de l'expérience, sous forme d'un schéma clair par exemple.

III. Dosage par formation d'un précipité

La méthode de Mohr de dosage des ions chlorure

Principe : la méthode repose sur la précipitation de AgCl , par une solution titrée de nitrate d'argent AgNO_3 , en présence d'ions chromate CrO_4^{2-} . La fin de réaction est mise en évidence par l'apparition du précipité rouge de chromate d'argent. On doit opérer en milieu neutre.

L'indicateur est une solution aqueuse de $4,2 \text{ g.L}^{-1}$ de chromate K_2CrO_4 et $0,7 \text{ g.L}^{-1}$ de dichromate $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ($\text{pH} = 7$).

Mode opératoire : à 10 ml de solution environ $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ de chlorure, ajouter environ 20 ml d'eau et quelques gouttes d'indicateur. Faire tomber la solution de nitrate d'argent, goutte à goutte, en agitant, jusqu'à apparition d'une teinte rose due au chromate d'argent. On demande d'analyser ce mode opératoire et de le justifier.

On propose les étapes suivantes :

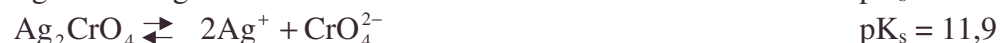
1. Justifier la composition de la solution indicatrice : mélange de chromate et de dichromate de potassium par un calcul approché de CrO_4^{2-} (une dilution de $1/40$ pour l'indicateur coloré sera supposée).

2. Justifier le principe du dosage après avoir calculé la concentration (Ag^+) au moment du virage de l'indicateur. En déduire le pourcentage de Cl^- non dosé par cette méthode.

3. Préciser l'expression "milieu neutre" par les limites inférieure et supérieure, approximatives du pH .

Valeurs numériques

Produits de solubilité



Constantes d'acidité



• chromate, chromate d'argent, courbe, dichromate, dosage, dosage des ions chlorure, électrode de référence, électrode indicatrice, indicateur coloré, Mohr, point d'équivalence, solution aqueuse, tableau, zone de virage



$$pK_2 = 14,6$$

Masses atomiques en g.mol^{-1}

K = 39,1 ; Cr = 52 ; O = 16

IV. Dosage complexométrique

Dosage du magnésium par EDTA

Principe : les ions Mg^{2+} sont dosés par l'acide éthylènediaminetétracétique (EDTA) noté H_4Y .

En milieu légèrement alcalin, on a la réaction $\text{Mg}^{2+} + \text{HY}^{3-} \rightleftharpoons \text{MgY}^{2-} + \text{H}^+$ ①

La fin de réaction est mise en évidence par un indicateur de concentration des ions Mg^{2+} , le noir ériochrome T qui est rouge en présence de Mg^{2+} et bleu en son absence, à $\text{pH} = 10$.

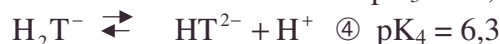
Mode opératoire (simplifié) : à 50 ml de solution de Mg^{2+} environ $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, ajouter 2 à 3 ml de solution tampon ($\text{NH}_3 / \text{NH}_4^+$), quelques gouttes d'indicateur.

Titre par la solution EDTA préalablement étalonnée ($0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ par exemple), jusqu'à disparition de la couleur rouge et apparition d'une teinte bleue.

1. Etude de l'indicateur : le noir ériochrome T sous sa forme anionique notée T^{3-} forme en solution aqueuse avec Mg^{2+} un complexe MgT^- :

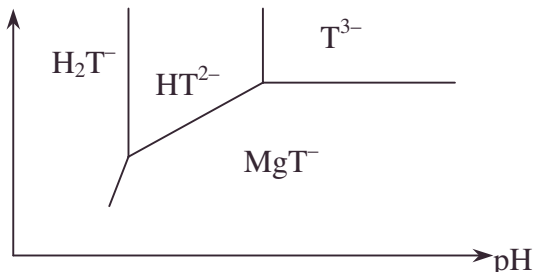


Il participe également aux équilibres acido-basiques :



Le diagramme représentant les domaines de prédominance des diverses espèces, dans le plan (pH , pMg) a l'allure ci-dessous.

pMg



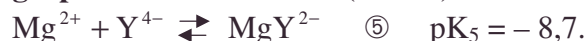
Donner l'équation des courbes et tracer le diagramme.

La couleur des différentes espèces en solution aqueuse est la suivante :

Espèce prédominante	H_2T^-	HT^{2-}	T^{3-}	MgT^-
Solution	rouge	bleue	orange	rouge

Donner sur l'échelle des pH , les limites d'emploi du noir ériochrome comme indicateur de concentration des ions Mg^{2+} et porter, sur le diagramme tracé ci-dessus, les limites de sa zone de virage.

2. Complexation de Mg^{2+} par EDTA : l'ion Y^{4-} (EDTA) forme un complexe selon :



Il participe également à des équilibres acido-basiques. En milieu alcalin, seul est à prendre en compte $\text{HY}^{3-} \rightleftharpoons \text{Y}^{4-} + \text{H}^+$ ⑥ $pK_6 = 10,3$.

Porter sur un second diagramme (pH , pMg) les limites de prédominance des espèces : HY^{3-} , Y^{4-} et MgY^{2-} .

Pour quelle valeur de pMg a-t-on $(\text{HY}^{3-}) = (\text{MgY}^{2-})$ à $\text{pH} = 10$?

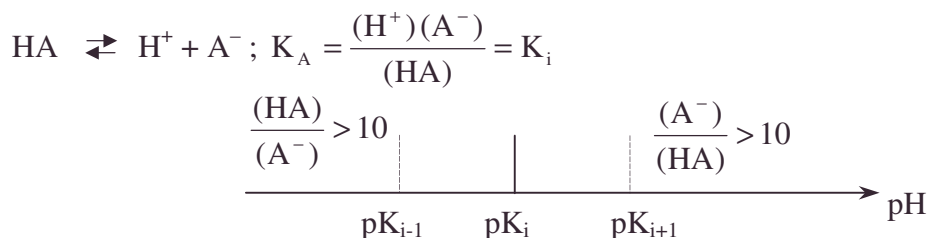
N.B. : Toutes les espèces rencontrées en **IV.2.** donnent des solutions aqueuses incolores.

3. Après avoir calculé les valeurs utiles de pMg , à $pH = 10$, justifier le principe du dosage sur un diagramme $pMg \rightarrow pH$ récapitulatif.

E.N.S. ; Durée : 4h

Corrigé

I.1.a. Un indicateur coloré acido-basique est un couple d'acide - base conjugués dont les formes acide et basique sont de couleurs différentes, permettant de distinguer au moins les domaines de pH où $\frac{(Base)}{(Acide)} > 10$ et $\frac{(Base)}{(Acide)} < 10^{-1}$.



b. pK_i est au milieu de la zone de virage dans ce cas et les autres (par extension et sans théorie supplémentaire précisée).

On en déduit :

Indicateur	pK_i
Hélianthine	3,8
Rouge de méthyle	5,2
BBT	6,8
Phénolphthaléine	9,0

c. Dosage acide faible base forte

- Principe : repérer le saut de pH à l'équivalence (s'il est détecté)

- Mode opératoire : On ajoute quelques gouttes d'indicateur ou une électrode de verre de pH mètre (étalonnée dans la zone du saut de pH à l'équivalence).

L'indicateur aura sa zone de virage dans la zone du saut de pH à l'équivalence ou à une proximité telle que son indication soit acceptable à la goutte près par la soude.

(exemple : la phénolphthaléine est utilisée pour le dosage de l'acide éthanóïque).

Le barreau représenté est un aimant qui tourne sous l'effet d'un champ magnétique tournant.

N.B. : Quand on a versé autant de OH^- que de H^+ on a la formule usuelle des dosages des monoacides $C_A V_A = C_B V_B$.

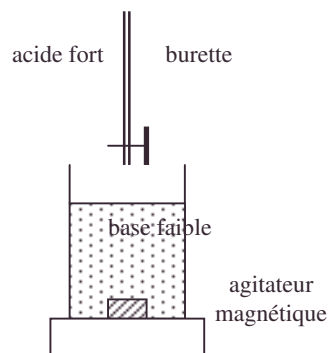
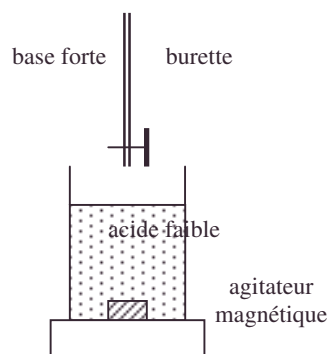
d. Dosage base faible acide fort.

Principe : repérer le saut de pH à l'équivalence (s'il est détectable).

Mode opératoire : on ajoute quelques gouttes d'indicateur ou une électrode de verre de pH mètre (étalonnée dans la zone du saut de pH à l'équivalence).

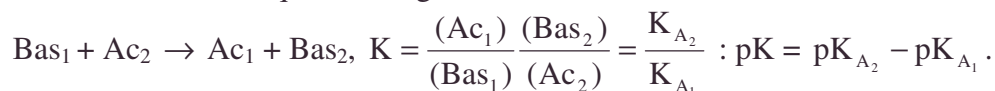
L'indicateur aura sa zone de virage dans la zone de pH à l'équivalence (ou à une proximité telle que son indication soit acceptable, à la goutte près).

Exemple : L'hélianthine est utilisée pour le dosage de NH_3 par l'acide chlorhydrique.



2. Dosage d'une base faible par un acide faible

- Il est nécessaire que le dosage soit total :



La réaction est quasi totale thermodynamiquement si $K_{A_1} \ll K_{A_2}$;

en pratique $\text{pK}_{A_1} - \text{pK}_{A_2} \geq 2$ ou 3 suffit.

Ainsi, CH_3CO_2^- ne peut être dosé par NH_4^+ car $\text{pK}_{A_1} = 4,8$, $\text{pK}_A = 9,2$.

$$\Rightarrow \text{pK}_{A_1} - \text{pK}_{A_2} < 0.$$

Il faudra une cinétique assez rapide par ailleurs.

A l'équivalence, $\text{Bas}_1 + \text{Ac}_2 \rightarrow \text{Ac}_1 + \text{Bas}_2$.



en fait, $\epsilon \quad \epsilon \quad a-\epsilon \quad a-\epsilon$

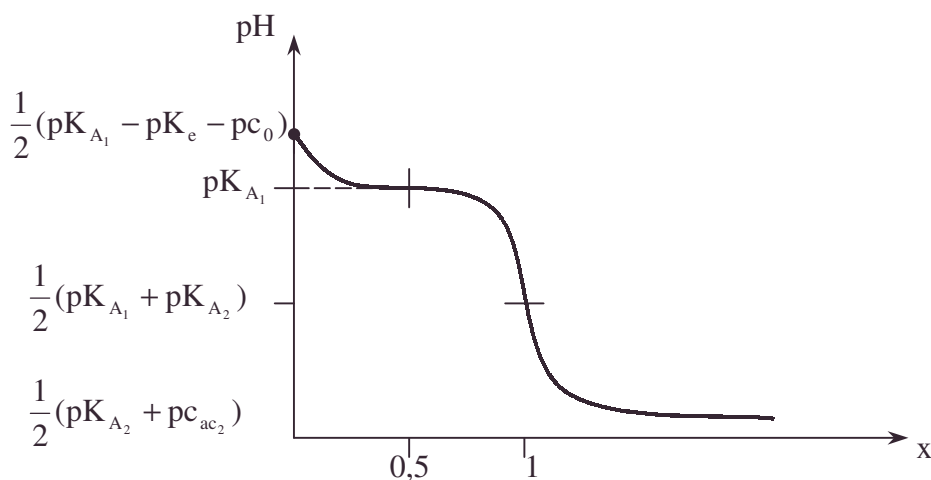
- Si les deux couples acide base sont faibles, (avec $\text{pK}_{A_1} - \text{pK}_{A_2} \geq 3$),

$$K_{A_1} K_{A_2} = \frac{(\text{Bas}_1)(\text{Bas}_2)}{(\text{Ac}_1)(\text{Ac}_2)} (\text{H}^+)^2 = (\text{H}^+)^2 \text{ à l'équivalence ; } \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_{A_1} + \text{pK}_{A_2}).$$

Exemple : titrage de NH_3 par $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$: $\text{pH}_{\text{éq}} = 7,0$.

Le BBT est adapté $\text{pK}_i = 6,8$.

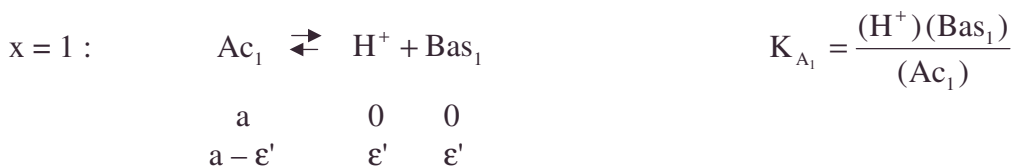
Titration de base faible par un acide faible



Le saut de pH doit être suffisamment visible pour bien déterminer le point d'inflexion d'équivalence.

(cf. détermination informatisée du minimum de $\frac{dpH}{dx}$ en correspondance).

b. Dosage d'une base faible par un acide fort : $\text{Bas}_1 + \text{Ac}_2 \rightarrow \text{Ac}_1 + \text{Bas}_2$.



$$\text{Si } K_{A_1} \ll 1 \quad \epsilon' \ll a ; \text{pH}_{\text{eq}} = \frac{1}{2}(\text{pK}_{A_1} + \text{pc}_{1\text{éq}}).$$

• base faible, BBT, cinétique, dosage, électrode de verre, hélianthine, point d'équivalence, saut, seuil, titrage, zone de virage

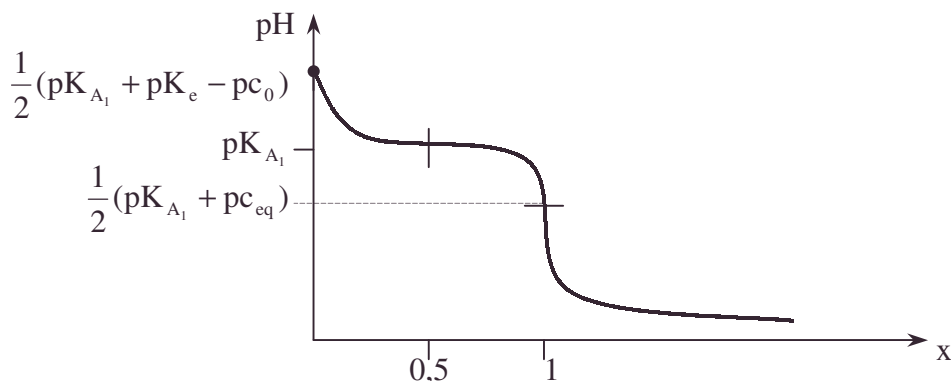
Problèmes mixtes

Encore faut-il que le saut de pH soit suffisamment visible dans tous les cas ; on peut s'assurer en traçant la courbe dérivée $\frac{dpH}{dx}$ en fonction de x que la détermination du

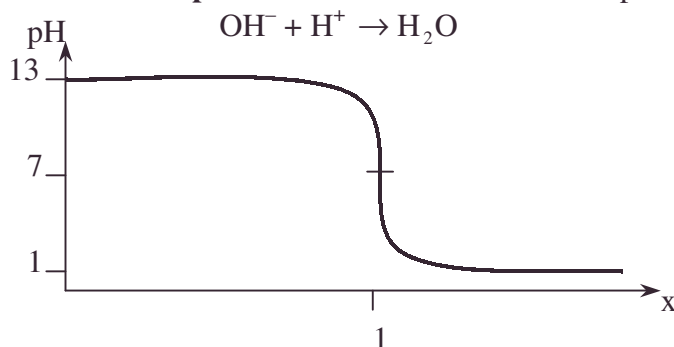
point d'inflexion de l'équivalence est précise ou non.

Exemple : titrage de NH_3 par H^+ $pH_{eq} = 5,1$.

Le rouge de méthyle est adapté à ce dosage.

Titration de base faible par un acide fort

c. Titration de base forte par un acide fort : on connaît depuis longtemps :

**3. Avantages :**

- Méthode peu coûteuse (faible investissement de fonds et de place) (Conductimétrie, pHmètre nécessitent un rangement plus sûr).
- Méthode assez rapide (sauf si les courbes pH-métrique, conductimétrique sont automatisées).

Ennuis :

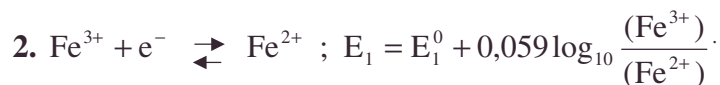
- Imprécision de la mesure du pH au changement de couleur.
- Nécessité de connaître l'adaptation de l'indicateur au cas étudié.

II.1. $Fe^{2+} + Ce^{4+} \longrightarrow Fe^{3+} + Ce^{3+}$; faisons les bilans molaires :

	EI	a	x	0	0
$x < a$	EF	a-x	0	x	x
$x > a$	EF	0	x-a	a	a
$x = a$	EF	ϵ	ϵ	$a-\epsilon$	$a-\epsilon$

$\epsilon \ll 1$

On voit : $\forall x \quad (Fe^{3+}) = (Ce^{3+})$; à l'équivalence : $(Fe^{2+}) = (Ce^{4+})$.



$$K_{d_2} = \frac{(Fe^{3+})(O-phen)^3}{(Fe(O-phen)_3^{3+})} \Rightarrow (Fe^{3+}) = \frac{K_{d_2} (Fe(O-phen)_3^{3+})}{(O-phen)^3}$$

- base faible, base forte, conductimétrie, courbe dérivée, dosage, point d'inflexion, rouge de méthyle, saut, titrage



$$K_{d_1} = \frac{(\text{Fe}^{2+})(\text{O-phen})_3^{3+}}{(\text{Fe(O-phen)}_3^{2+})} \Rightarrow (\text{Fe}^{2+}) = \frac{K_{d_1} (\text{Fe(O-phen)}_3^{2+})}{(\text{O-phen})_3^{3+}}.$$

Remplaçons (Fe^{3+}) et (Fe^{2+}) dans la formule de Nernst.



$$E_1 = E_1^0 + 0,059 \log \frac{K_{d_2} (\text{Fe(O-phen)}_3^{3+})}{K_{d_1} (\text{Fe(O-phen)}_3^{2+})};$$

$$E_1 = \underbrace{E_1^0 - 0,059(\text{p}K_{d_2} - \text{p}K_{d_1})}_{E_0^0} + 0,059 \log \frac{(\text{Fe(O-phen)}_3^{3+})}{(\text{Fe(O-phen)}_3^{2+})}$$

• En présence d'orthophénantroline ferreux, les potentiels mesurés de $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ et de $\text{Fe(O-phen)}_3^{3+}/\text{Fe(O-phen)}_3^{2+}$ sont les mêmes car un potentiel d'électrode n'a qu'une valeur expérimentale.

• Le potentiel standard apparent seul change :

$$E_1^0 = E_1^0 + 0,059(\text{p}K_{d_1} - \text{p}K_{d_2}); \text{A.N.: } E_1^0 = 0,98 \text{ V.}$$

• La frontière entre forme oxydée et forme réduite définie ici par :

$$(\text{Fe(O-phen)}_3^{3+}) = (\text{Fe(O-phen)}_3^{2+}) \text{ est } E_1 = E_1^0.$$

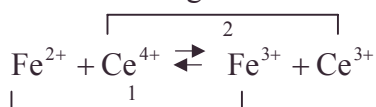
• Si $\frac{(\text{Fe(O-phen)}_3^{3+})}{(\text{Fe(O-phen)}_3^{2+})} = r$ et $\frac{(\text{Fe(O-phen)}_3^{3+})}{(\text{Fe(O-phen)}_3^{2+})} = \frac{1}{r}$ (par exemple $r = 10$)

correspondent à des couleurs différentes,

la zone de virage peut être définie par $E_1^0 - 0,059 \log r, E_1^0 + 0,059 \log r$,

A.N. : la zone de virage est avec $r = 10$: 0,92 V, 1,04V.

3.



Les potentiels de Nernst seront notés E_1, E_2 .

a. $dG = \Delta_r G d\xi$ avec $\Delta_r G = -\mathcal{F}(E_2 - E_1)$. \mathcal{F} correspondant à un transfert d'une mole d'électron libérée par Fe^{2+} et reçue par Ce^{4+} ; ($E_2 > E_1$).

Il y a arrêt de la réaction de transfert quand $E_2 = E_1$.

$$\text{b. } E = E_1 = E_1^0 + 0,059 \log \frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = E_2 = E_2^0 + 0,059 \log \frac{(\text{Ce}^{4+})}{(\text{Ce}^{3+})}.$$



Bilans molaires

α.	E I	a	a/2	0	0
	E II	a/2	0	a/2	a/2

$$\Rightarrow E = E_1 = E_1^0 \text{ car } \frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = 1.$$

β.	E I	a	a	0	0
	E II	0	0	a	a

en fait

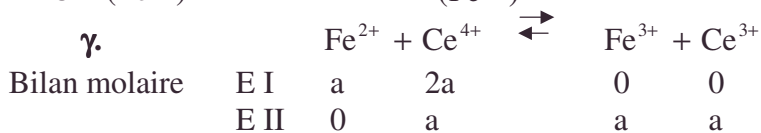
$\varepsilon \quad \varepsilon$

$$\Rightarrow E = E_1 = E_1^0 + 0,059 \log \frac{a}{\varepsilon} = E_2^0 + 0,059 \log \frac{\varepsilon}{a}.$$

• frontière, Nernst, potentiel standard apparent, zone de virage

On tire $0,059 \log \frac{a}{\varepsilon} = \frac{E_2^0 - E_1^0}{2} \Rightarrow E = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2}$; A.N. : $E = 1,23 \text{ V}$

$\Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} = \frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = 10^{\frac{E_2^0 - E_1^0}{0,118}}$; A.N. : $\frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = 7,6 \cdot 10^7$. La transformation est totale.



$E = E_2 = E_2^0 \text{ car } \frac{(\text{Ce}^{4+})}{(\text{Ce}^{3+})}$; or, $E_1 = E_1^0 + 0,059 \log \frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = E_2 = E_2^0$;

$\frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = 10^{\frac{E_2^0 - E_1^0}{0,059}}$ A.N. : $\frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = 5,8 \cdot 10^{15}$.

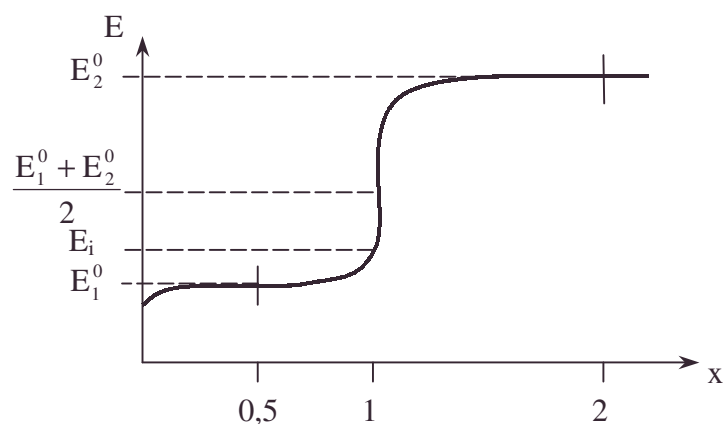
δ. On rappelle que le virage a lieu pour $E = E_i$; A.N.: $E_i = 0,98 \text{ V}$ cf. **II.2.**

$E_i = E_1^0 + 0,059 \log \frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} \Rightarrow \frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = 10^{\frac{E_i - E_1^0}{0,059}}$.

A.N. : $\frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})} = 3,63 \cdot 10^3$. La transformation y est bien totale.

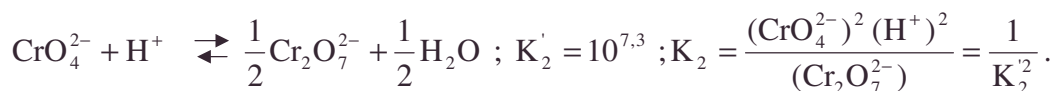
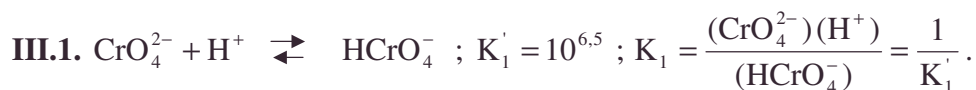
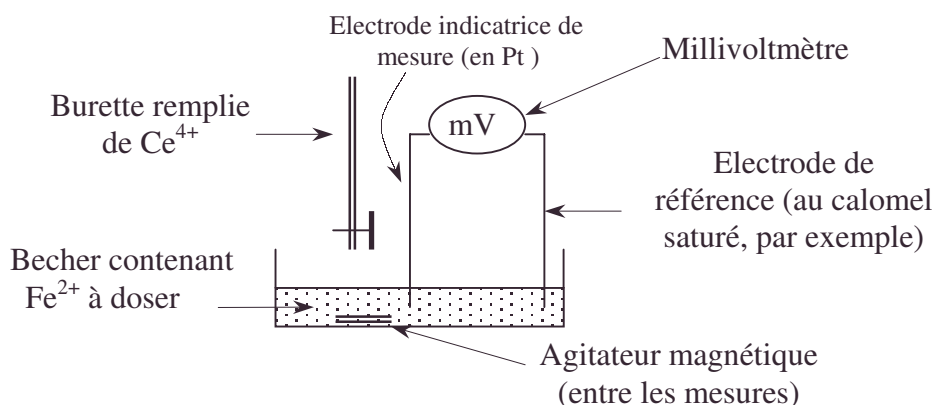
4.

$\begin{array}{c} \diagup \\ x \end{array}$	$x = 0,5$	$x = 1$	$x = 2$	Virage
E	E_1^0	$\frac{E_1^0 + E_2^0}{2}$	E_2^0	E_i
AN	0,77	1,23	1,7	0,98
$\frac{(\text{Fe}^{3+})}{(\text{Fe}^{2+})}$	1	$7,6 \cdot 10^7$	$5,8 \cdot 10^{15}$	$3,6 \cdot 10^3$



- Vu la pente au voisinage de $x = 1$, vu la valeur infinitésimale de $\frac{(\text{Fe}^{2+})}{(\text{Fe}^{3+})}$ pour $E_i, x \neq 1 \Rightarrow$ le virage de l'orthophénantroline ferreuse permet d'accéder à une valeur précise de la quantité de Fe^{2+} à doser.

5. Dosage potentiométrique



2 basicités voisines et distinctes pour CrO_4^{2-} : le calcul doit être fait précisément (surtout au voisinage de $\text{pH} = 7$).

$C_0 = (\text{CrO}_4^{2-})_0 = 2,16 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$; $C_0' = (\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-})_0 = 2,38 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

On suppose une dilution au 1/40 pour l'indicateur in situ.

Ecrivons la conservation de l'élément chrome : l'expression devient en fonction de (H^+) connu et de (CrO_4^{2-}) inconnu.

$$\frac{C_0 + 2C_0'}{40} = (\text{CrO}_4^{2-}) + (\text{HCrO}_4^-) + 2(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) ;$$

$$\frac{C_0 + 2C_0'}{40} = (\text{CrO}_4^{2-}) + \frac{(\text{H}^+)(\text{CrO}_4^{2-})}{K_1} + 2 \frac{(\text{H}^+)^2(\text{CrO}_4^{2-})^2}{K_2} ;$$

A.N. : pour $\text{pH} = 7$, $(\text{H}^+) = 10^{-7} \Rightarrow 6,59 \cdot 10^{-4} = (\text{CrO}_4^{2-}) + (\text{CrO}_4^{2-}) \cdot 0,32 + 7,96 \cdot (\text{CrO}_4^{2-})^2$.

$$7,96x^2 + 1,32x - 6,95 \cdot 10^{-4} = 0 ; (\text{CrO}_4^{2-}) = \frac{-1,32 \pm \sqrt{1,74 + 0,02}}{15,92} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\Rightarrow (\text{HCrO}_4^-) = 1,41 \cdot 10^{-4} ; (\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) = 3,90 \cdot 10^{-5}.$$

Le rapport fini entre les 3 formes permet de rester au voisinage du $\text{pH} = 7$ comme pour une solutions "tampon", soit de ne pas avoir l'inconvénient d'un réactif qui, introduit seul, serait perturbateur des OH^- , H^+ cf. **III.3**.

2. La couleur rouge du chromate d'argent apparaît pour $(\text{Ag}^+)^2 = \frac{K_{\text{SAg}_2\text{CrO}_4}}{(\text{CrO}_4^{2-})}$.

A.N. : $(\text{Ag}^+)_{\text{restant}} = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

Alors, $(\text{Cl}^-) = \frac{K_{\text{SAgCl}}}{(\text{Ag}^+)}$; A.N. : $(\text{Cl}^-)_{\text{restant}} = 1,87 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$.

Son dosage peut être considéré comme total ; les calculs de **III.1**. n'ont pas besoin d'être très précis. La dilution de l'indicateur est plus grande.

$$\left. \begin{array}{l} n_{\text{Cl}^- \text{ restant}} = (\text{Cl}^-) V_{\text{total}} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ mol} \\ n_{\text{Cl}^- \text{ initial}} = 0,1 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-3} \text{ mol} \end{array} \right\} \frac{n_{\text{Cl}^- \text{ restant}}}{n_{\text{Cl}^- \text{ initial}}} = 8 \cdot 10^{-5} = 0,008\%.$$

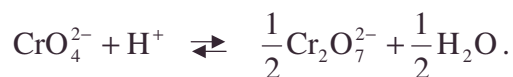
Problèmes mixtes

3.a. Le milieu trop basique engendre une précipitation de Ag_2O blanc. Sa gêne se manifesterait pour le début de la précipitation de Ag_2CrO_4 rouge.

$$(\text{OH}^-) = \frac{K_{\text{SAg}_2\text{O}}}{(\text{Ag}^+)} ; \text{A.N.:} (\text{OH}^-) = \frac{10^{-7,8}}{4,83 \cdot 10^{-5}} = 3,28 \cdot 10^{-4} \Rightarrow (\text{H}^+) = 3,04 \cdot 10^{-11}.$$

$$\text{pH} = 10,53.$$

b. Un milieu trop acide consomme CrO_4^{2-} ;



La relation de conservation de l'élément chrome s'écrit :

$$\frac{C_0 + 2C'_0}{40} = (\text{CrO}_4^{2-}) + (\text{HCrO}_4^-) + 2(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) ;$$

$$\frac{C_0 + 2C'_0}{40} = (\text{CrO}_4^{2-}) + \frac{(\text{H}^+)(\text{CrO}_4^{2-})}{K_1} + 2 \frac{(\text{H}^+)^2 (\text{CrO}_4^{2-})^2}{K_2}.$$

$$(\text{CrO}_4^{2-}) = \frac{(C + 2C')/40}{1 + \frac{(\text{H}^+)}{K_1} + 2 \frac{(\text{H}^+)^2 (\text{CrO}_4^{2-})}{K_2}} \text{ ce qui constitue une meilleure approximation}$$

que précédemment ; l'ancienne valeur servant au dénominateur.

$$\text{d'où } (\text{Ag}^+)^2 = \frac{K_{\text{SAgCrO}_4}}{(\text{CrO}_4^{2-})} = \frac{K_s}{\frac{(C + 2C')}{40} \left(1 + \frac{(\text{H}^+)}{K_1} + 2 \frac{(\text{H}^+)^2 (\text{CrO}_4^{2-})}{K_2} \right)}$$

Une goutte de nitrate d'argent constitue une erreur acceptable pour le retard de précipitation dû au pH.

$$\text{La nouvelle concentration de } (\text{Ag}^+) = 5,35 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{20} \frac{10^{-3} \cdot 0,1}{10^{-3} \cdot 40} = 1,78 \cdot 10^{-4}, \text{ car } 40 \text{ cm}^3$$

est le volume estimé du bécher et une goutte vaut $\frac{1}{20} \text{ cm}^3$.

On en déduit alors (H^+) grâce à l'équation :

$$(\text{Ag}^+)^2 \frac{(C + 2C')}{40 K_s} = 1 + \frac{(\text{H}^+)}{K_1} + 2 \frac{(\text{H}^+)^2 (\text{CrO}_4^{2-})}{K_2}$$

avec $(\text{CrO}_4^{2-}) \approx 4,4 \cdot 10^{-4}$; on fait un calcul approximatif : $(\text{H}^+) = 4,4 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \text{pH} = 5,36$.

Conclusion : $5,36 < \text{pH} < 10,53$ correspond à un milieu qui peut être un peu acide ou basique mais jamais très acide ou très basique. Voilà pourquoi le chimiste prendra un milieu neutre comme appellation acceptable pour l'expérience envisagée.

IV.1. Rappel de la convention de frontière entre 2 formes A et B.

La frontière est tracée pour $(A) = (B)$.

On a aussi :

a. Les deux droites verticales

- pour $\text{pH} = 6,3$: $(\text{H}_2\text{T}^-) = (\text{HT}^{2-})$ cf. pK_4 .
- pour $\text{pH} = 11,5$: $(\text{HT}^{2-}) = (\text{T}^{3-})$ cf. pK_3 .

b. La droite horizontale

- pour $\text{pMg} = 7$: $(\text{T}^{3-}) = (\text{MgT}^-)$ cf. pK_2 .

c. Frontière oblique entre H_2T^{2-} et MgT^- ,
soit l'équilibre $\text{H}_2\text{T}^{2-} + \text{Mg}^{2+} \rightleftharpoons \text{MgT}^- + 2\text{H}^+$.

$$K = \frac{(\text{MgT}^-)(\text{H}^+)^2}{(\text{H}_2\text{T}^{2-})(\text{Mg}^{2+})} = \frac{(\text{MgT}^-)}{(\text{Mg}^{2+})(\text{T}^{3-})} \cdot \frac{(\text{T}^{3-})(\text{H}^+)}{(\text{HT}^{2-})} \cdot \frac{(\text{HT}^{2-})(\text{H}^+)}{(\text{H}_2\text{T}^{2-})}.$$

$$K = K_2 K_3 K_4; \text{A.N. : } K = 10^{-10,8}.$$

A la frontière :

$$(\text{H}_2\text{T}^{2-}) = (\text{MgT}^-) \Rightarrow (\text{Mg}^{2+}) = \frac{(\text{H}^+)^2}{K} \Leftrightarrow \text{pMg} = 2\text{pH} - \text{pK}_2 - \text{pK}_3 - \text{pK}_4.$$

$$\text{pMg} = 2\text{pH} - 10,8.$$

d. Frontière oblique entre HT^{2-} et MgT^- .

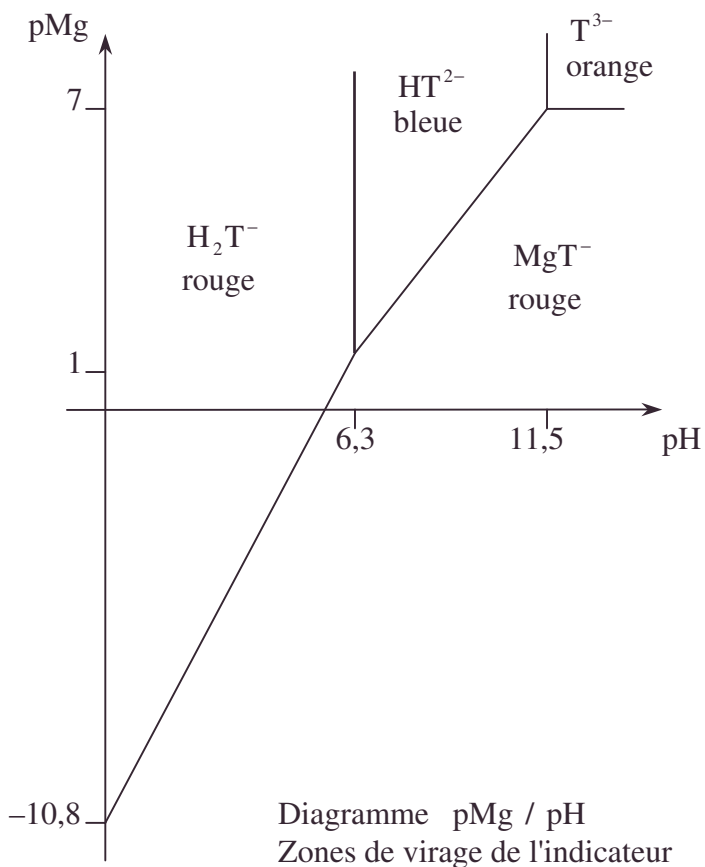
On a l'équilibre : $\text{HT}^{2-} + \text{Mg}^{2+} \rightleftharpoons \text{MgT}^- + \text{H}^+$.

$$K' = \frac{(\text{MgT}^-)(\text{H}^+)}{(\text{HT}^{2-})(\text{Mg}^{2+})} = \frac{(\text{MgT}^-)}{(\text{Mg}^{2+})(\text{T}^{3-})} \cdot \frac{(\text{T}^{3-})(\text{H}^+)}{(\text{HT}^{2-})} = K_2 K_3; \text{A.N. : } \text{pK}' = 4,5.$$

$$\text{A la frontière } (\text{HT}^{2-}) = (\text{MgT}^-) \Rightarrow (\text{Mg}^{2+}) = \frac{(\text{H}^+)}{K'}.$$

$$\text{pMg} = \text{pH} - \text{pK}_2 - \text{pK}_3; \text{A.N. : } \text{pMg} = \text{pH} - 4,5.$$

e. Le virage bien visible du noir ériochrome porte sur le passage du rouge au bleu, soit entre MgT^- et HT^{2-} possible pour $6,3 \leq \text{pH} \leq 11,5$.



On peut vouloir exclure (à 10% près) la présence de H_2T^{2-} ou de T^{3-} (cf. critère classique de couleur), auquel cas les conditions :

- *frontière, noir ériochrome*

Problèmes mixtes

$$\alpha. \frac{(T^{3-})}{(HT^{2-})} < \frac{1}{10} \Rightarrow \text{pH} < \text{pK}_3 - 1, \text{ soit } \text{pH} < 10,5$$

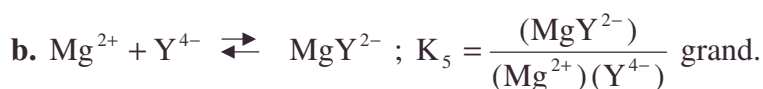
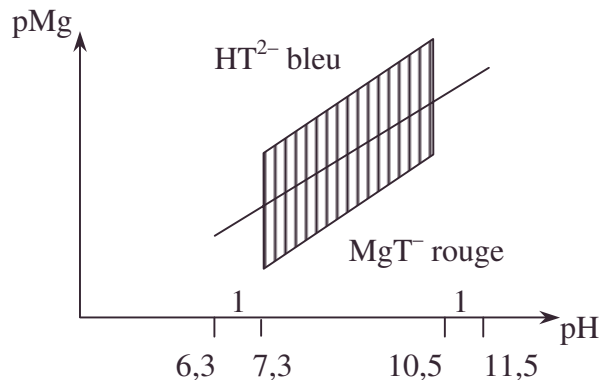
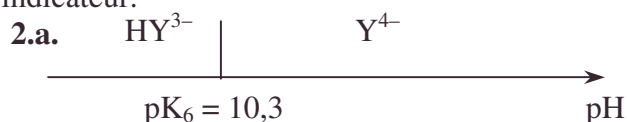
$$\beta. \frac{(H_2T^-)}{(HT^{2-})} < \frac{1}{10} \Rightarrow \text{pH} > \text{pK}_4 + 1, \text{ soit } \text{pH} < 7,3, \text{ ainsi } 7,3 \leq \text{pH} \leq 10,5.$$

On rappelle qu'à pH donné, la condition de virage donne 2 bornes : (A) = 10(B),

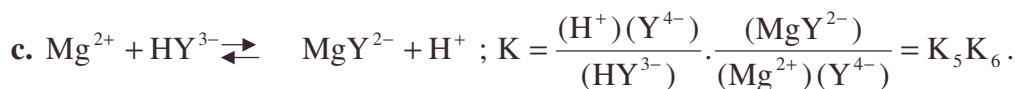
$$(A) = \frac{(B)}{10}, \text{ soit une variation de } \pm 1$$

unité logarithmique par rapport à la condition (A) = (B), vu **IV.1.c.d.**

On a hachuré la zone de virage de l'indicateur.



La condition de frontière : $(\text{MgY}^{2-}) = (\text{Y}^{4-}) \Rightarrow \text{pMg} = -\text{pK}_5 = 8,7$.



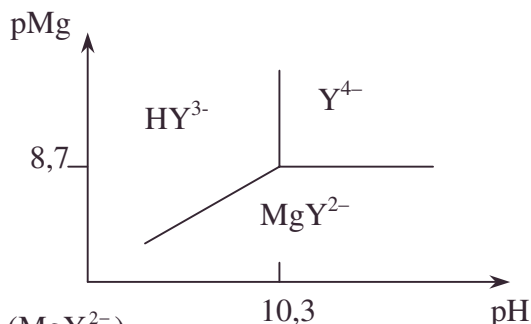
La condition de frontière :

$$(\text{HY}^{3-}) = (\text{MgY}^{2-}) \Rightarrow (\text{Mg}^{2+}) = \frac{(\text{H}^+)}{K_5 K_6}.$$

$$\text{pMg} = \text{pH} - \text{pK}_5 - \text{pK}_6 ; .$$

A.N.: $\text{pMg} = \text{pH} - 1,6$.

D'où le régionnement porté ci-contre.



3. Imaginons $\text{pH} = 10$ assuré par une solution tampon ;

à $\text{pH} = 10$, $\text{pMg} = 8,4$ pour $(\text{HY}^{3-}) = (\text{MgY}^{2-})$. On a la réaction de complexation stable

RPQ	Mg^{2+}	$+$	HY^{3-}	$+$	OH^-	\rightleftharpoons	MgY^{2-}	$+$	H_2O	bilan molaire
E.I.	a		x		-		0		-	
$x < a$	$a-x$		0		-		x		-	
$x = a$	0		0		-		a		-	
on a en fait	ε		ε				$a-\varepsilon$			
$x > a$	0		$x-a$				a			
$x = 2a$	0		a				a			

$$K = \frac{(\text{MgY}^{2-})}{(\text{HY}^{3-})(\text{OH}^-)(\text{Mg}^{2+})} = \frac{(\text{MgY}^{2-})}{(\text{Mg}^{2+})(\text{Y}^{4-})} \cdot \frac{(\text{Y}^{4-})(\text{H}^+)}{(\text{HY}^{3-})} \frac{1}{(\text{H}^+)(\text{OH}^-)}.$$

$$K = \frac{K_5 K_6}{K_e} ; \text{A.N. : } K = 10^{12,4} ; \text{ le dosage est possible.}$$

• A l'équivalence : pour $x = a$: on a versé v ml d' EDTA :

• frontière, régionnement, RPQ, solution tampon

$$(\text{Mg}^{2+}) = \varepsilon = (\text{HY}^{3-}) ; (\text{MgY}^{2-}) = \frac{a}{v} ; (\text{OH}^-) = 10^{-4}.$$

$$(\text{Mg}^{2+})^2 = \frac{a/v}{K \cdot K_0} (\text{H}^+) ; 2\text{pMg} = -\text{p}K_5 - \text{p}K_6 + \text{pH} - \log \frac{a}{v}.$$

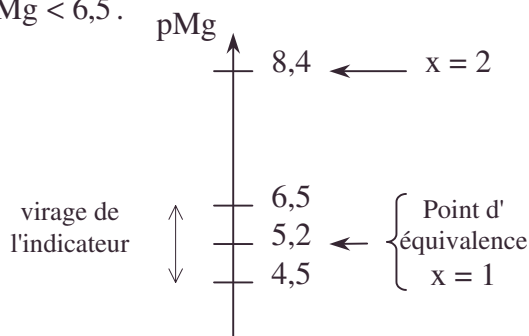
A.N. : on a $v = \frac{50 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} = 5 \text{ cm}^3$; $\text{pMg} = 5,2$.

• Zone de virage du noir ériochrome : on a le point milieu d'après **IV.1.d.** soit :

$$\text{pMg} = \text{pH} - 4,5 = 5,5 \text{ à } \text{pH} = 10, \text{ soit } 4,5 < \text{pMg} < 6,5.$$

$\text{pMg} = 5,2$ appartient à cette zone et justifie l'emploi de l'indicateur coloré à $\text{pH} = 10$

pour le dosage de Mg^{2+} par l'EDTA. On passe bien de la couleur rouge à la couleur bleue.



4.5.10. Dosage argentimétrique

On veut savoir s'il est possible ou non d'effectuer le dosage potentiométrique d'une solution aqueuse d'ions iodure et bromure. Le réactif utilisé est le nitrate d'argent ; l'électrode indicatrice est une électrode d'argent (couple $\text{Ag}^+ / \text{Ag}_{(s)}$).

Les conditions du dosage sont : Température = 298 K ;

$$(\text{Br}^-)_0 = (\text{I}^-)_0 = C_0 = 0,001 \text{ mol.L}^{-1} ; (\text{AgNO}_3) = C = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}.$$

$(\text{Br}^-)_0$ et $(\text{I}^-)_0$ étant respectivement les concentrations en bromure et iodure dans le mélange à doser, (AgNO_3) la concentration de la solution titrante.

On appellera V_0 le volume initial de la solution à analyser.

On donne, à 298 K :

- Le potentiel standard du couple $\text{Ag}^+ / \text{Ag}_{(s)}$: $E_0 \text{Ag}^+ / \text{Ag}_{(s)} = 0,80 \text{ V}$.

- Les produits de solubilité du bromure d'argent et de l'iodure d'argent :

$$\text{AgBr}_{(s)} : K_{s1} = 10^{-12,3} ; \text{AgI}_{(s)} : K_{s2} = 10^{-16,08}.$$

- La valeur du terme $2,303 \frac{RT}{F}$ est égale à 0,06 V.

- On assimilera les activités aux concentrations.

1. Ecrire la demi-réaction redox qui a lieu à l'électrode indicatrice et donner l'expression de son potentiel.

2. Au point équivalent, calculer les concentrations :

a. en ion iodure et ion Ag^+ si on dose une solution d'ions iodure seul, de volume V_0 et de concentration C_0 ,

b. en ion bromure et ion Ag^+ si on a une solution d'ions bromure seul, de volume V_0 et de concentration C_0 .

c. Calculer les potentiels correspondants dans chacun des cas **2.a.** et **2.b.**

3.a. Si l'on considère le mélange d'ions bromure et iodure à doser défini précédemment, quel est, de l'ion bromure ou de l'ion iodure, celui qui précipite le premier ?

• activité, demi-réaction redox, dosage, dosage argentimétrique, dosage potentiométrique, électrode indicatrice, indicateur coloré, noir ériochrome, point équivalent, solubilité, solution aqueuse, solution titrante

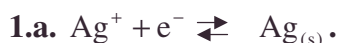
b. Si $V_0 = 100$ ml, calculer le volume équivalent V_e correspondant au dosage du premier halogénure d'argent. On négligera la variation de volume due à l'addition de réactif titrant.

c. Quelle est alors la concentration du premier halogénure restant libre en solution ?

d. Conclusion.

CCP ; Durée : 1h.

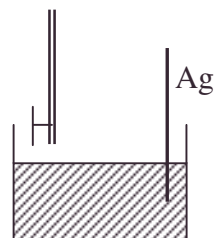
Corrigé



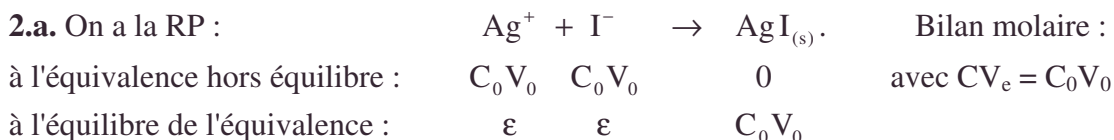
b. La formule de Nernst donne :

$$E = E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}_{(s)}}^0 + 0,06 \log \frac{(\text{Ag}^+)}{c^0}.$$

Burette contenant
 Ag^+ et NO_3^-

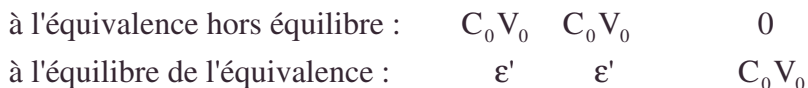
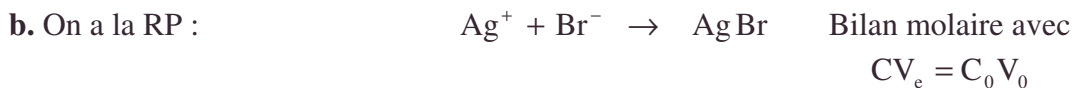


Becher contenant
 I^- et Br^- et leurs cations
volume V_0



$$K_{s_2} = \frac{\varepsilon^2}{V_0^2} = (\text{Ag}^+)^2 = (\text{I}^-)^2 \Rightarrow (\text{Ag}^+) = (\text{I}^-) = K_{s_2}^{1/2}.$$

A.N. : $(\text{Ag}^+) = (\text{I}^-) = 9,1 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$.



$$K_{s_1} = \frac{\varepsilon'^2}{V_0^2} = (\text{Ag}^+)^2 = (\text{Br}^-)^2 \Rightarrow (\text{Br}^-) = (\text{Ag}^+) = K_{s_1}^{1/2}.$$

A.N. : $(\text{Br}^-) = (\text{Ag}^+) = 7,1 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$. On voit les conséquences numériques des valeurs des K_S .

c. En remplaçant (Ag^+) dans la formule de Nernst :

α. $E_a = 0,32 \text{ V}$.

β. $E_b = 0,43 \text{ V}$.

3.a. Le plus insoluble précipite d'abord soit $\text{AgI}_{(s)}$, vu $K_{s_2} < K_{s_1}$.

b. On considère le dosage successif des ions I^- et Br^- ,
vu l'écart $(\text{p}K_{s_2} - \text{p}K_{s_1}) = 4,22$.



$$V_{e_1} = \frac{C_0 V_0}{C}; \text{ A.N. : } V_{e_1} = 1,0 \text{ mL ; on peut négliger la dilution.}$$

$$\beta. K_{s_2} = (I^-)^2 \Rightarrow (I^-) = 9,1 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}. \text{ cf. 2.a.}$$

$$\text{c.}\alpha. (Ag^+) = 9,1 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1} \text{ soit } n_{Ag^+} = 9,1 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1} ; \text{ or } (Br^-) = 10^{-3}.$$

$(Ag^+)(Br^-) = 9,1 \cdot 10^{-12} > 5 \cdot 10^{-13}$; AgBr a précipité, contrairement à l'hypothèse de dosages successifs.

$\beta.$ On devait introduire 10^{-2} mol d'ion Ag^+ ; les 2 précipités coexistent avant le déplacement de la précipitation de $AgI_{(s)}$ supposée seul.

$AgBr_{(s)}$ précipite quand $(Ag^+) = \frac{K_{s_1}}{(Br^-)_0}$; A.N. : $(Ag^+) = 5 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$ c'est à dire à la fin de la précipitation de I^- vu $(I^-) = (Ag^+)$.

$$\text{Soit } n_{Ag^+} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ mol. ; } (I^-) = \frac{K_{s_2}}{(Ag^+)} ; \text{ A.N. : } (I^-) = 1,66 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$n_{I^-} = 1,66 \cdot 10^{-8} \text{ moles.}$$

Il y a un écart dans la quantité théorique à verser en n'ayant que $AgI_{(s)}$ seul mais les écarts des quantités de Ag^+ versées, et de I^- restant sont négligeables pour la concentration C_0 envisagée.

4.5.11. Argentimétrie classique

On se propose d'étudier l'action des ions argent sur les ions chlorures et sur une solution d'ammoniaque. Le produit de solubilité dans l'eau pure du chlorure d'argent $AgCl$ à $25^\circ C$ est $K_1 = 10^{-10} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$, celui du bromure d'argent $AgBr$ dans les mêmes conditions est $K_2 = 10^{-12} \cdot \text{mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$.

1. Calculer la solubilité dans l'eau pure en mole par litre du chlorure d'argent et du bromure d'argent.

2. 100 ml d'une solution contenant $c_0 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ de chlorure de sodium sont traités par x ml d'une solution A renfermant $c_0 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ de nitrate d'argent.

a. Déterminer la valeur de x pour qu'il y ait début de précipitation du chlorure d'argent. Que pensez-vous de cette valeur ?

b. Etablir mathématiquement l'équation de la courbe donnant pAg en fonction de x ; pAg désigne le cologarithme décimal de la concentration en Ag^+ dans la solution soit $pAg = -\log(Ag^+)$.

On distinguera les trois cas suivants : $x < 100 \text{ ml}$; $x = 100 \text{ ml}$; $x > 100 \text{ ml}$.

Les approximations faites seront explicitées.

c. Tracer la courbe $pAg = f(x)$.

d. Que vous rappelle la forme de cette courbe ?

3. Une solution B contenant $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ de bromure de sodium et y mol.L^{-1} de chlorure de sodium est traitée par la solution A de nitrate d'argent à $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

a. Quelle condition doit remplir y pour que le bromure d'argent précipite le premier et seul ?

b. Quelle nouvelle condition doit remplir y pour que le bromure d'argent soit complètement précipité avant le début de précipitation du chlorure d'argent ? On considérera que la précipitation de $AgBr$ est complète lorsque la concentration en ions Br^- dissous dans la solution finale est inférieure ou égale à $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Problèmes mixtes

c. 100 ml de la solution B sont traités par x ml de solution A de nitrate d'argent à $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

Déterminer mathématiquement les équations $p\text{Ag} = f(x)$, x étant inférieur ou égal à 100 (1+10y) ml, y satisfaisant à la condition 3.a.

d. Tracer les courbes $p\text{Ag} = f(x)$ dans les deux cas suivants :

$$y = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \text{ et } y = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$

On prendra une échelle identique à la question 2.c.

e. Que pouvez-vous en déduire sur la possibilité de dosage d'un mélange de chlorure de sodium et de bromure de sodium par le nitrate d'argent, les mesures de pAg étant faites à 0,1 unité près ?

4. Les ions argent réagissent sur l'ammoniaque en formant des ions complexes suivant



La constante d'équilibre désignée par K_3 est égale à $6 \cdot 10^{-8} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$.

D'autre part, la constante K de dissociation de l'ammoniaque selon la réaction



A.N. : $K = 2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

a. Calculer les concentrations des différentes espèces présentes dans une solution contenant initialement par litre 0,1 mole de nitrate d'argent et 1 mole d'ammoniaque.

α. On néglige la dissociation de l'ammoniaque.

β. On tient compte de la dissociation de l'ammoniaque.

b. Vérifier que dans ces conditions l'hydroxyde d'argent ne précipite pas, le produit de solubilité de l'hydroxyde d'argent AgOH est égal à $10^{-8} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$.

5. Quelle est la solubilité dans une solution à 1 mol.L^{-1} d'ammoniaque des composés suivants :

a. chlorure d'argent ?

b. bromure d'argent ?

c. mélange de chlorure d'argent et de bromure d'argent ?

Pourrait-on utiliser l'action de l'ammoniaque sur le chlorure d'argent et le bromure d'argent pour le dosage d'un mélange quelconque de bromure et de chlorure de sodium ?

Autres concours ; Durée : 2h30

Corrigé

1.a. $\text{RP}_a \quad \text{AgCl}_{(s)} \rightleftharpoons \text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$ de bilan molaire par litre

$$\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ a - s_a & s_a & s_a \end{array}$$

$$(\text{Ag}^+)(\text{Cl}^-) = K_1 ; (\text{Ag}^+) = (\text{Cl}^-) = s_a \Rightarrow s_a = \sqrt{K_1} ; \text{AN} : s_a = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

b. $\text{RP}_b \quad \text{AgBr}_{(s)} \rightleftharpoons \text{Ag}^+ + \text{Br}^-$ de bilan molaire par litre

$$\begin{array}{ccc} b & 0 & 0 \\ b - s_b & s_b & s_b \end{array}$$

$$(\text{Ag}^+)(\text{Br}^-) = K_2 ; (\text{Ag}^+) = (\text{Br}^-) = s ; s_b = \sqrt{K_2} ; \text{AN} : s_b = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}.$$

2.a. $\text{RP} : \quad \text{Ag}^+ + \text{Cl}^- \rightleftharpoons \text{AgCl}_{(s)} \quad K = K_1^{-1}$ vu

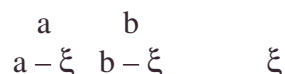
$$(\text{Ag}^+)(\text{Cl}^-) = K_1 ; c_0 = 0,1 \text{ d'où en tenant compte de la dilution :}$$

$$(\text{Cl}^-) = \frac{c_0 \frac{100}{1000}}{100+x} ; (\text{Ag}^+) = \frac{c_0 \frac{x}{100}}{100+x}$$

On simplifie l'équation en x en tenant compte de la faible valeur numérique de K_1 .

$x \ll 100 \Rightarrow c_0^2 x = 100K$; A.N. : $x = 10^{-6} \text{ ml}$; le précipité apparaîtra dès la première goutte vu la très faible valeur de x. On rappelle qu'une goutte a un volume de $5 \cdot 10^{-2} \text{ ml}$.

b.α. $x < 100$; RP : $\text{Ag}^+ + \text{Cl}^- \rightleftharpoons \text{AgCl}_{(s)}$ de bilan molaire par litre



la réaction est quasi totale vu $K : \xi = a$. A.N. : $a = \xi = \frac{x}{1000} \cdot 0,1$; $b = \frac{100}{1000} \cdot 0,1$.

$$(\text{Cl}^-) = \frac{c_0 \frac{100-x}{1000}}{100+x} ; (\text{Ag}^+) = \frac{K_1}{(\text{Cl}^-)} \Rightarrow \text{pAg} = \text{pK}_1 + \log(\text{Cl}^-).$$

$$\text{pAg} = \text{pK}_1 - \text{pc}_0 - \log \frac{100+x}{100-x} ; \text{AN} : \text{pAg} = 9 - \log \frac{100+x}{100-x}.$$

En faisant $\xi = a$, on a négligé (Ag^+) de fait devant (Cl^-) ; plus rigoureusement, on résoudrait une équation du 2^{ème} degré en (Ag^+) mais l'expression de pAg serait compliquée.

β. $x = 100$; $a = b \Rightarrow (\text{Ag}^+) = (\text{Cl}^-) \Rightarrow (\text{Ag}^+)^2 = K_1$.

$\text{pAg} = \frac{1}{2} \text{pK}_1$; AN : $\text{pAg} = 5$; précipitation quasiment terminée.

Les ions chlorure ont une quasi totale absence.

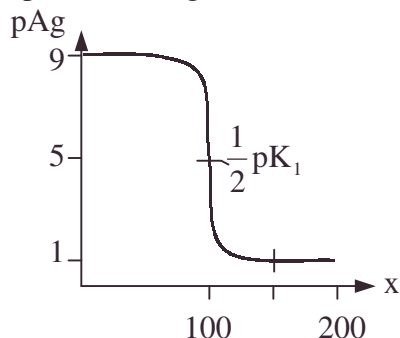
γ. $x > 100$; (Ag^+) est le supplément versé après la précipitation terminée en $x = 100$.

$$(\text{Ag}^+) = \frac{c_0 \frac{x-100}{1000}}{x+100} ; \text{pAg} = \text{pc}_0 + \log \frac{x+100}{x-100} ; \text{AN} : \text{pAg} = 1 + \log \frac{x+100}{x-100}.$$

Justification : pour $x = 100,1$ $\text{pAg} = 4,3$.

On compare pAg_γ à pAg_β : l'approximation $1 \ll 5$ est acceptable à la limite pour $x = 100,1$, soit à 2 gouttes près car une goutte a un volume de 0,05 ml.

c.



d. Cette courbe rappelle le dosage d'une base forte par un acide fort.

3.a. Il faut : $(\text{Ag}^+)(\text{Br}^-) = K_2$ et $(\text{Ag}^+)(\text{Cl}^-) < K_1$ soit $\frac{(\text{Cl}^-)}{(\text{Br}^-)} < \frac{K_1}{K_2}$;

$(\text{Br}^-) = c_0 \Rightarrow y < c_0 \frac{K_1}{K_2}$; AN : $y < 10 \text{ mol.L}^{-1}$. On conçoit la possibilité d'une double précipitation dès le début.

b. Il faut $(\text{Ag}^+)(\text{Br}^-) = K_2$ et $(\text{Ag}^+)(\text{Cl}^-) < K_1$ avec $(\text{Br}^-) = c_1$,
A.N.: $c_1 = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$, mais vu le quasi dosage de Br^- . On conçoit la possibilité d'une double précipitation avant la fin de la première précipitation (cf. **2.** et **3c.**) et donc le volume doublé $(\text{Cl}^-) = \frac{y}{2} \Rightarrow y < 2c_1 \frac{K_1}{K_2}$; AN : $y < 0,20 \text{ mol.L}^{-1}$.

c. Quand AgBr est le seul précipité, le problème est analogue à **2b.** et pour $x < 100$:

$$p\text{Ag} = pK_2 - pc_0 - \log \frac{100+x}{100-x}.$$

$$\text{Quand AgCl commence à précipiter, } (\text{Cl}^-) = \frac{y \cdot \frac{100}{1000}}{\frac{100+x}{1000}} \text{ avec :}$$

$$p\text{Ag} = pK_1 + \log(\text{Cl}^-) = pK_1 - \log \frac{100+x}{100y}.$$

$$\text{Par continuité : } pK_2 - pc_0 - \log \frac{100+x}{100-x} = pK_1 - \log \frac{100+x}{100y} \Rightarrow$$

$$x = 100(1 - y \cdot 10^{pK_1 - pK_2 + pc_0}) \text{ soit } x = 100(1 - 0,1y).$$

$$\text{AN : } y = 10^{-2} ; x = 99,9 \text{ ml} ; p\text{Ag} = 7,70.$$

$$y = 10^{-1} ; x = 99,0 \text{ ml} ; p\text{Ag} = 8,70.$$

On a bien $x < 100$.

$$\text{Conclusion } \alpha. : x < 100(1 - y \cdot 10^{pK_1 - pK_2 + pc_0}) \Rightarrow p\text{Ag} = pK_2 - pc_0 - \log \frac{100+x}{100-x},$$

$$\text{soit } p\text{Ag} = 11 - \log \frac{100+x}{100-x}.$$

La condition $x = 100(1 + 10y)$ correspond à verser autant d'ions Ag^+ que d'ions Br^- et Cl^- réunis $\left(\text{cf. } \frac{100}{1000}(c_0 + y) = \frac{x}{1000}c_0 \right)$, soit une précipitation quasi quantitative des deux.

Conclusion **β.**: $100(1 - 0,1y) < x < 100(1 + 10y)$; on a deux précipités : AgBr et AgCl .

Quantité de Cl^- précipité : quantité initiale – quantité finale ;

$$\text{soit en mole : } \frac{100y}{1000} - \frac{K_1}{(\text{Ag}^+)} \frac{100+x}{1000} ;$$

Quantité de Br^- précipité : quantité initiale – quantité finale ;

$$\text{soit en mole : } \frac{100}{1000}c_0 - \frac{K_2}{(\text{Ag}^+)} \frac{100+x}{1000}.$$

Quantité de Ag^+ en solution :

quantité introduite – quantité de Br^- précipitée – quantité de Cl^- précipitée ;

$$\text{soit en mole : } \frac{c_0 x}{1000} - \frac{100}{1000}(y + c_0) + \frac{K_1 + K_2}{(\text{Ag}^+)} \frac{100 + x}{1000}.$$

$$\text{Ainsi, } (\text{Ag}^+) \frac{(100 + x)}{1000} = \frac{c_0 x}{1000} - \frac{100}{1000}(y + c_0) + \frac{(K_1 + K_2)}{(\text{Ag}^+)} \frac{(100 + x)}{1000}, \text{ en mole,}$$

$$\text{Soit } (\text{Ag}^+) \left[(\text{Ag}^+) + \frac{100(y + c_0) - c_0 x}{100 + x} \right] = K_1 + K_2 ;$$

Comme lors de la précipitation de AgCl , (Ag^+) est petit devant l'autre terme (sauf au voisinage immédiat de $100(y + c_0) - c_0 x = 0$).

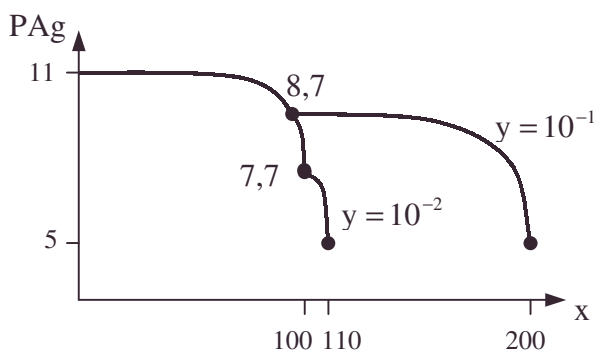
$$(\text{Ag}^+) \left(\frac{100(y + c_0) - c_0 x}{100 + x} \right) = K_1 + K_2 \Rightarrow \text{pAg} = \text{p}(K_1 + K_2) - \log \frac{100 + x}{100(y + c_0) - c_0 x}.$$

$$\text{pAg} = \text{p}(K_1 + K_2) - \text{p}_{c_0} - \log \frac{100 + x}{100 - x + 100 \frac{y}{c_0}} ; \text{AN : } \text{pAg} = 8,996 - \log \frac{100 + x}{100 - x + 1000 y}$$

γ . $x = 100(1 + 10y)$: l'équation complète donne maintenant $(\text{Ag}^+)^2 = K_1 + K_2$.

$$\text{pAg} = \frac{1}{2} \text{p}_{(K_1 + K_2)} ; \text{AN : } \text{pAg} = 4,998.$$

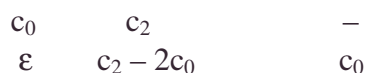
d.



e. On observe un raccordement (au point anguleux d'apparition du second précipité) avec une courbe analogue au dosage d'une base forte par un acide fort.

La méthode informatique de détermination des points anguleux donnera :

$x = 100 + 1000y$, donc y sera bien déterminé car ces deux points sont séparés d'une unité de pAg .



$$(\text{Ag}^+) = K_3 \frac{(\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+)}{(\text{NH}_3)^2} = K_3 \frac{c_0}{(c_2 - 2c_0)^2}$$

$$\text{AN : } (\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+) = 0,1 \text{ mol.L}^{-1} ; (\text{NH}_3) = 0,8 \text{ mol.L}^{-1} : (\text{Ag}^+) = 9,375 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}.$$

β.



$$\frac{\xi_2^2}{c_2 - 2\xi_1 - \xi_2} = K.$$

Problèmes mixtes

On prend $\xi_1 \neq 0,1$ du modèle précédent pour calculer le terme correctif ξ_2 :

$$\xi_2^2 + K\xi_2 + (2\xi_1 - c_2)K = 0 \Rightarrow \xi_2 = 3,99 \cdot 10^{-3}.$$

$$K_3 = \frac{(c_0 - \xi_1)(c_0 - 2\xi_1 - \xi_2)^2}{\xi_1}.$$

$$\xi_1 = 0,100 ; \text{AN : } (\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+) = 0,100 \text{ mol.L}^{-1};$$

$$(\text{NH}_3) = 0,796 \text{ mol.L}^{-1} ; (\text{NH}_4^+) = (\text{OH}^-) = 3,99 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} ;$$

$$(\text{Ag}^+) = 0,947 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1} ; (\text{H}^+) = 0,251 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1} , (\text{NO}_3^-) = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}.$$

b. $(\text{Ag}^+)(\text{OH}^-) = 0,947 \cdot 10^{-8} \cdot 3,99 \cdot 10^{-3} = 3,78 \cdot 10^{-11} < 10^{-8}$; l'hydroxyde d'argent ne précipite pas. La modélisation est satisfaisante.

5.a. Le complexe étant stable, la quasi totalité de Ag^+ est sous forme de $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$:



$$\begin{array}{cccc} s_1 & c_2 & - & - \\ 0 & c_2 - 2s_1 & s_1 & s_1 \end{array}$$

$$\bullet (\text{Ag}^+)(\text{Cl}^-) = K_1 \Rightarrow (\text{Ag}^+) = \frac{K_1}{s_1} ;$$

• On détermine s_1 par :

$$K_3 = \frac{(K_1/s_1)(c_2 - 2s_1)^2}{s_1} \Rightarrow \frac{c_2 - 2s_1}{s_1} = \pm \frac{\sqrt{K_3}}{K_1} \Rightarrow s_1 = \frac{c_2 \sqrt{K_1}}{\pm \sqrt{K_3} + 2\sqrt{K_1}} ;$$

AN : $s_1 = 0,03774 \text{ mol.L}^{-1}$; la solution avec le signe - est impossible.

$$\text{b. De même, } s_2 = \frac{c_2 \sqrt{K_2}}{\sqrt{K_3} + 2\sqrt{K_2}} ; \text{AN : } s_2 = 0,004049 \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{c. } (\text{Cl}^-) = s_1' ; (\text{Br}^-) = s_2' ; K_1 = s_1'(\text{Ag}^+) ; K_2 = s_2'(\text{Ag}^+) \Rightarrow \frac{s_1'}{s_2'} = \frac{K_1}{K_2} \quad \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \frac{s_1'}{K_1} = \frac{s_2'}{K_2} = \frac{s_1' + s_2'}{K_1 + K_2} \text{ vu le théorème sur une suite de rapports égaux.}$$

$$\text{Retenons } (\text{Ag}^+) = \frac{K_1 + K_2}{s_1' + s_2'}.$$

$$(\text{NH}_3) = c_2 - 2(s_1' + s_2') \text{ car } (\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+) = s_1' + s_2' \Rightarrow$$

$$K_3 = \frac{(K_2 + K_1)/(s_1' + s_2')}{(s_1' + s_2')} (c_2 - 2(s_1' + s_2'))^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\text{on trouve } s_1' + s_2' = 0,0489 \Rightarrow s_1' = 0,03899 \text{ mol.L}^{-1} ; s_2' = 0,0003899 \text{ mol.L}^{-1}$$

La solubilité de AgCl est peu modifiée ; la solubilité de AgBr est fortement réduite.

d. On doit pouvoir disposer d'une quantité de NH_3 en excès pour toujours transformer Ag^+ en $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$, alors la mesure des $p\text{Ag}$ est plus grande que dans l'eau, sans NH_3 et améliore la possibilité de dosage par rapport à l'eau avec le critère de visualisation à l'équivalence $\Delta p\text{Ag} = \infty$ ou très grand.

4.5.12. Précipitations du cadmium II

Avertissement : aucune connaissance sur le cadmium et ses propriétés chimiques n'est nécessaire pour traiter ce problème. Les données utiles à sa résolution sont reportées en annexe.

On s'intéresse dans ce problème à divers aspects de la chimie du cadmium. Dans tout le problème, on négligera la dilution et la température est fixée à 298 K.

I. Propriétés générales

1. Sachant que le numéro atomique du cadmium est $Z = 48$, donner la structure électronique du cadmium aux degrés d'oxydation 0 et + II.

2. On introduit $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ de nitrate de cadmium $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$ dans l'eau. Quelle est la valeur du pH de la solution ainsi préparée ? Pour répondre à cette question, on notera que l'ion NO_3^- est la base conjuguée d'un acide fort et on admettra qu'il ne forme pas de complexe avec Cd^{2+} .

3. On ajoute des ions OH^- à la solution précédente. A partir de quelle valeur de pH observe-t-on l'apparition d'un précipité de $\text{Cd}(\text{OH})_2$?

4. Ecrire les demi réactions d'échanges électroniques caractérisant chacun des couples suivants : $\text{Cd}^{2+} / \text{Cd}_{(s)}$ et $\text{Cd}(\text{OH})_{(s)2} / \text{Cd}_{(s)}$. En déduire les équations des droites $E = f(\text{pH})$ correspondantes et tracer le diagramme potentiel – pH en prenant la concentration des espèces dissoutes égale à $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

II. Propriétés du phosphate de cadmium

On s'intéresse ici au titrage d'une solution A contenant de l'acide phosphorique à $c_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et des ions Cd^{2+} à $c_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ (introduits sous forme de nitrate de cadmium (cf. question I.2.) par une solution de soude 1 mol.L^{-1} (cf. figures 1 et 2). On rappelle que l'acide phosphorique est un triacide.

1. Calculer la valeur du pH d'une solution aqueuse ne contenant que de l'acide phosphorique à la concentration $5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. Calculer également la concentration de la forme moléculaire H_3PO_4 et celle des ions phosphate PO_4^{3-} .

2. En utilisant la valeur de la concentration des ions phosphate PO_4^{3-} déterminée ci-dessus, préciser si le phosphate de cadmium $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2$ est un précipité ou non au début du titrage ($V = 0 \text{ ml}$) de la solution A.

3. Calculer la valeur du pH de début de précipitation de $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2$ à mieux de 0,1 unité près. On précisera quelle est alors l'espèce majoritaire de l'acide phosphorique en solution.

4. Calculer la valeur du pH de la solution lorsque 99 % du cadmium a été précipité sous forme de $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2$ par addition de soude à 1 mol.L^{-1} à la solution initiale.

5. En milieu suffisamment alcalin, le cadmium est susceptible d'exister sous forme d'hydroxyde $\text{Cd}(\text{OH})_2$ insoluble. Ecrire la réaction chimique représentant la transformation du phosphate de cadmium en hydroxyde de cadmium. Calculer sa constante d'équilibre.

6.a. Calculer le pH à partir duquel l'hydroxyde de cadmium commence à apparaître au cours du titrage de la solution A par la soude 1 mol.L^{-1} .

b. Pour quelle valeur minimale du pH, le phosphate de cadmium est-il transformé en totalité en hydroxyde de cadmium ?

• acide phosphorique, cadmium, constante d'équilibre, diagramme potentiel-pH, hydroxyde de cadmium, majoritaire, nitrate de cadmium, numéro atomique, phosphate de cadmium, solution aqueuse, structure électronique, titrage

Problèmes mixtes

7. La courbe de titrage calculée sans approximations par une méthode informatique est représentée sur la figure 1, tandis que les variations des concentrations des différentes espèces solubles (autres que H_3O^+ et OH^-) en fonction du volume de la solution de soude ajoutée sont représentées sur la figure 2.

a. Ecrire les réactions chimiques qui ont lieu dans chacune des parties "a" à "e" de la courbe de titrage (figure 1).

b. Identifier à quelles espèces se rapportent les différentes courbes I à V de la figure 2.

Données

Produit ionique de l'eau : $K_i = 10^{-14}$.

Propriétés acido-basiques :



$$K_3 = \frac{(\text{H}_2\text{PO}_4^-)(\text{H}_3\text{O}^+)}{(\text{H}_3\text{PO}_4)} = 10^{-2,0}.$$



$$K_2 = \frac{(\text{HPO}_4^{2-})(\text{H}_3\text{O}^+)}{(\text{H}_2\text{PO}_4^-)} = 10^{-7,0}.$$



$$K_1 = \frac{(\text{PO}_4^{3-})(\text{H}_3\text{O}^+)}{(\text{HPO}_4^{2-})} = 10^{-12,0}.$$



$$K_1' = \frac{(\text{CdOH}^+)(\text{H}_3\text{O}^+)}{(\text{Cd}^{2+})} = 10^{-9,0}.$$



$$K_s = (\text{Cd}^{2+})^3 (\text{PO}_4^{3-})^2 = 10^{-31}.$$



$$K_s' = (\text{Cd}^{2+})(\text{OH}^-)^2 = 10^{-15}.$$

Oxydoréduction : $\text{Cd}^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons \text{Cd}(s)$ $E^0 = -0,40 \text{ V}$

Il est précisé que E^0 est la valeur du potentiel standard à 298 K. Par ailleurs, on adoptera $2,3RT / F = 0,060 \text{ V}$ et on assimilera activités et concentrations.

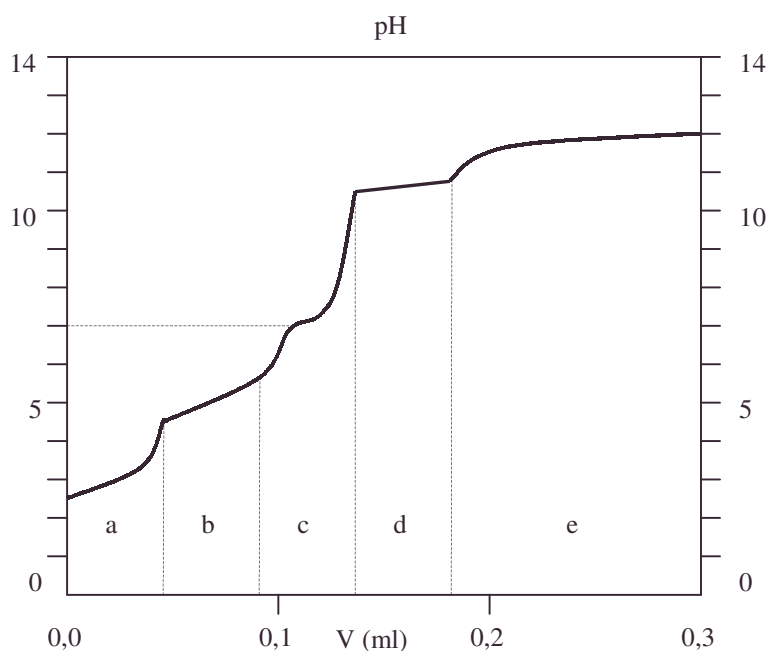


Figure 1 : titrage de 10 ml d'une solution d'acide phosphorique $5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ et d'ions cadmium $\text{Cd}^{2+} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ (introduits sous forme de $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$) par une solution de soude 1 mol.L^{-1} . Variation du pH en fonction du volume (V en ml) de la solution ajoutée. Courbe calculée sans approximation.

• **activité, courbe, produit ionique, sans approximation, titrage**

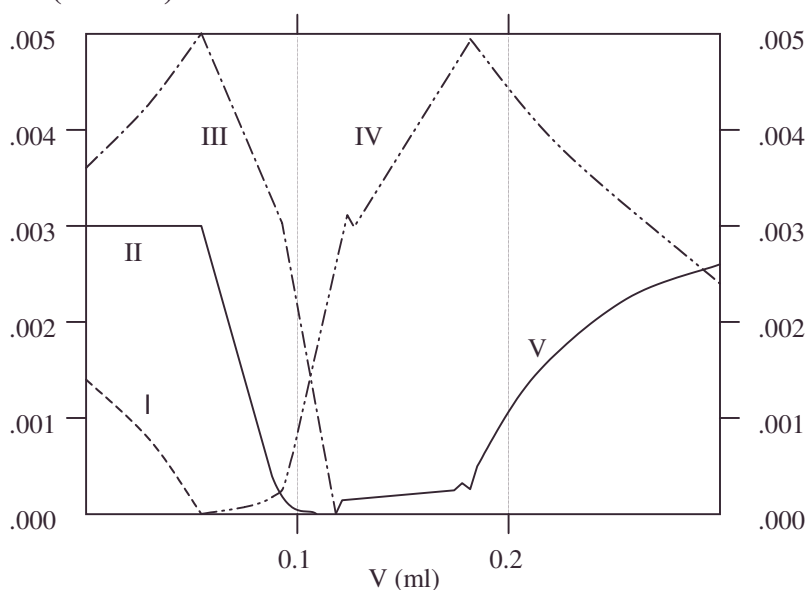
Concentrations (mol.L⁻¹)

Figure 2 : Titrage de 10 ml d'une solution d'acide phosphorique $5 \cdot 10^{-3}$ mol.L⁻¹ et d'ions cadmium $\text{Cd}^{2+} \cdot 3 \cdot 10^{-3}$ mol.L⁻¹ (introduits sous forme de $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$) par une solution de soude 1 mol.L⁻¹. Variation des concentrations des différentes espèces en solution (autres que H_3O^+ et OH^-) en fonction du volume (v en ml) de la solution de soude ajoutée.

ESPCI ; Durée : 2h

Corrigé

1.1. Les règles de remplissage électronique donnent :

a. DO 0 : Cd : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2$.

b. L'ionisation concerne les électrons de n le plus élevé :

DO II : Cd^{2+} : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^0$.

2. Le nitrate de cadmium se dissout complètement : $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2 \rightarrow \text{Cd}^{2+} + 2\text{NO}_3^-$.

L'équilibre prédominant en solution aqueuse est :

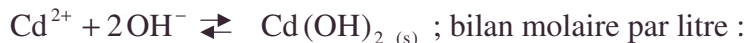


$$\begin{array}{ccc} c_0 & 0 & 0 \\ c_0 - \xi & \xi & \xi ; \end{array}$$

$$K'_1 = 10^{-9} \text{ faible} \Rightarrow \xi \text{ faible, d'où l'équation en } (\text{H}_3\text{O}^+) : K'_1 = \frac{(\text{H}_3\text{O}^+)^2}{c_0}.$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K'_1 + \text{p}c_0) ; \text{AN : pH} = 5,5.$$

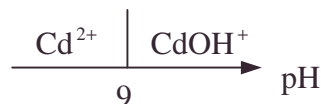
3. Soit l'équilibre supposé prédominant (on néglige CdOH^+) :



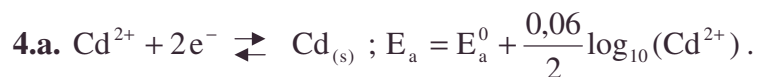
$$\begin{array}{ccc} c_0 & c_1 & 0 \\ c_0 - \xi' & c_1 - 2\xi' & \xi' \\ K'_s = 10^{-15} \text{ très faible} \Rightarrow \xi' \text{ faible.} \end{array}$$

$$K'_s \# c_0 c_1^2 \Rightarrow \text{pH} = \text{p}K_i - \text{p}c_1 = \text{p}K_i - \frac{1}{2}\text{p}K'_s + \frac{1}{2}\text{p}c_0. \text{ AN : pH} = 7,5.$$

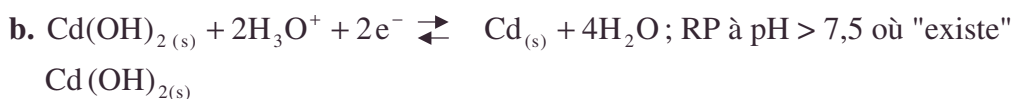
On a négligé CdOH^+ : légitime à pH = 7,5 vu le diagramme de prédominance.



• DO, RP, solution aqueuse



AN : $\text{Cd}^{2+} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} ; E_a = -0,46 \text{ V} .$



$$E_b = E_a = E_a^0 + \frac{0,06}{2} \log \frac{K_s'}{(\text{OH}^-)^2} = E_a - 0,03\text{p}K_s' + 0,06\text{p}K_i - 0,06\text{pH} ,$$

de la forme $E_b = E_b^0 - 0,06\text{pH} .$

AN : $(\text{Cd}^{2+}) = 10^{-2}$ n'intervient pas ; $E_b^0 = 0,01 \text{ V} .$ (Voir graphe ci-après).

(Cd^{2+}) est l'oxydant qui prédomine pour $E > E_a$ à $\text{pH} < 7,5$.

$\text{Cd}(\text{OH})_{2(s)}$ est l'oxydant qui prédomine pour $E > E_b$ à $\text{pH} > 7,5$.

2.1. L'équilibre prédominant est :



c_1	0	0
$c_1 - \xi$	ξ	ξ

$$K_3 = \frac{(\text{H}_2\text{PO}_4^-)(\text{H}_3\text{O}^+)}{(\text{H}_3\text{PO}_4)} = \frac{(\text{H}_3\text{O}^+)^2}{c_1 - (\text{H}_3\text{O}^+)} ;$$

AN : $(\text{H}_3\text{O}^+) = 3,66 \cdot 10^{-3} ; \text{pH} = 2,44$

$$(\text{H}_3\text{PO}_4) = c_0 - (\text{H}_3\text{O}^+) = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} .$$

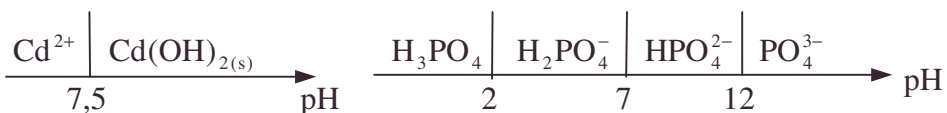
$$\text{Faisons } K_1 K_2 K_3 = \frac{(\text{PO}_4^{3-})(\text{H}_3\text{O}^+)^3}{(\text{H}_3\text{PO}_4)}$$

$$\Rightarrow (\text{PO}_4^{3-}) = (\text{H}_3\text{PO}_4) \frac{K_1 K_2 K_3}{(\text{H}_3\text{O}^+)^3} .$$

AN : $(\text{PO}_4^{3-}) = 2,73 \cdot 10^{-17} \text{ mol.L}^{-1}$

2. $(\text{Cd}^{2+})^3 (\text{PO}_4^{3-})^2 = 2 \cdot 10^{-41} < K_s = 10^{-31}$ montre que $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2$ n'est pas précipité au début du titrage.

3. Le premier point anguleux de la courbe de titrage correspond donc au début de la précipitation de $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2$: $\text{pH} \# 4,5$; or nous avons les diagrammes suivants :



Le pH lu montre que Cd^{2+} est l'espèce prédominante, de même pour H_2PO_4^- au tout début de la précipitation.

$$\Rightarrow (\text{Cd}^{2+}) = c_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow (\text{PO}_4^{3-}) = \frac{K_s^{1/2}}{(\text{Cd}^{2+})^{3/2}} ; \text{AN : } (\text{PO}_4^{3-}) = 1,92 \cdot 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1} ;$$

$$\Rightarrow (\text{H}_2\text{PO}_4^-) = c_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} .$$

$$\text{Or, } K_1 K_2 = \frac{(\text{PO}_4^{3-})(\text{H}_3\text{O}^+)^2}{(\text{H}_2\text{PO}_4^-)} \Rightarrow (\text{H}_3\text{O}^+) = \sqrt{\frac{(\text{H}_2\text{PO}_4^-) K_1 K_2}{(\text{PO}_4^{3-})}} .$$

AN : $(\text{H}_3\text{O}^+) = 1,61 \cdot 10^{-5}$; pH = 4,79 . On a par approximations successives affiné la valeur du pH.

4. Quand 99 % de Cd^{2+} est précipité, il reste $(\text{Cd}^{2+}) = \frac{c_0}{100}$.

AN : $(\text{Cd}^{2+}) = 3 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$. On en déduit :

$$(\text{PO}_4^{3-}) = \frac{K_s^{1/2}}{(\text{Cd}^{2+})^{1/2}} ; \text{AN : } (\text{PO}_4^{3-}) = 1,92 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1} : \text{ tout à fait minoritaire.}$$

Mais comme le pH a augmenté par ajout de soude par rapport à **2.3.**, il faut faire intervenir sans doute l'équilibre de constante K_2 caractérisant la frontière H_2PO_4^- , HPO_4^{2-} .

Vu la nécessité de faire intervenir $(\text{H}_2\text{PO}_4^-)$ et (HPO_4^{2-}) en fonction de l'inconnue à calculer (H_3O^+) , écrivons la conservation de l'élément phosphore compte tenu de la précipitation à 99 % de $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2$:

$$(\cancel{\text{H}_3\text{PO}_4}) + (\text{H}_2\text{PO}_4^-) + (\text{HPO}_4^{2-}) + (\cancel{\text{PO}_4^{3-}}) = c_1 - \frac{2}{3} c_0 \cdot \frac{99}{100} \text{ cf. formule de } \text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2 ;$$

$$\text{AN : } c_1' = c_1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{99}{100} c_0 = 3,02 \cdot 10^{-3} .$$

Et paramétrons en fonction de (H_3O^+) :

$$(\text{HPO}_4^{2-}) = \frac{(\text{PO}_4^{3-})(\text{H}_3\text{O}^+)}{K_1} \Rightarrow (\text{H}_2\text{PO}_4^-) = c_1 - \frac{(\text{PO}_4^{3-})(\text{H}_3\text{O}^+)}{K_1} .$$

$$\text{AN : } (\text{H}_2\text{PO}_4^-) = 3,02 \cdot 10^{-3} - 1,92 \cdot 10^{-3} (\text{H}_3\text{O}^+) .$$

$$(\text{HPO}_4^{2-}) = 1,92 \cdot 10^{-3} (\text{H}_3\text{O}^+) .$$

$$\text{On déduit de } K_2 \text{ l'équation en } (\text{H}_3\text{O}^+) : K_2 = \frac{1,92 \cdot 10^{-3} (\text{H}_3\text{O}^+)^2}{3,02 \cdot 10^{-3} - 1,92 \cdot 10^{-3} (\text{H}_3\text{O}^+)}$$

$$\text{AN : } (\text{H}_3\text{O}^+) = 3,49 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1} ; \text{ pH} = 6,46 . \text{ La méthode s'autoconfirme.}$$

5. Le deuxième point anguleux de la courbe de titrage correspond à l'apparition du précipité de $\text{Cd}(\text{OH})_2$ à pH # 10 ;

l'espèce "phosphatée" prédominante est donc HPO_4^{2-} .

La réaction prédominante demandée s'écrit :



$$K = \frac{(\text{HPO}_4^{2-})^2}{(\text{OH}^-)^4} = \frac{(\text{HPO}_4^{2-})^2 \cdot (\text{PO}_4^{3-})^2 (\text{Cd}^{2+})^3 \cdot (\text{H}_3\text{O}^+)^2 (\text{OH}^-)^2}{(\text{PO}_4^{3-})^2 (\text{H}_3\text{O}^+)^2 (\text{Cd}^{2+})^3 (\text{OH}^-)^6} ;$$

$$K = \frac{1}{K_1^2} \cdot \frac{K_s}{K_s^3} K_i^2 ; \text{ AN : } K = 10^{10} . \text{ On a bien une RPQ.}$$

La réaction est totale quantitativement (une raison cinétique est apparemment absente).

6.a. Au début de la précipitation de $\text{Cd}(\text{OH})_2$, pH # 10 ; l'espèce HPO_4^{2-} prédomine ;

$$(\text{HPO}_4^{2-}) \# c_1 - \frac{2}{3} c_0 \text{ (cf. } \text{Cd}_3(\text{PO}_4)_{2(s)} \text{ rassemblant la quasi totalité du Cd cf. 2.4.) ;}$$

$$\text{AN : } (\text{HPO}_4^{2-}) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} .$$

On tire (OH^-) de K : $(\text{OH}^-) = \frac{(\text{HPO}_4^{2-})^{1/2}}{K^{1/4}}$; $\text{pH} = \text{pK}_i + \frac{1}{2} \log(\text{HPO}_4^{2-}) - \frac{1}{4} \text{pK}$;

AN : $\text{pH} = 10,24$.

b. La fin de la transformation en $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2$ en $\text{Cd}(\text{OH})_2$ est marquée par le troisième point anguleux de la courbe de titrage : $\text{pH} \# 10,5$.

L'espèce (HPO_4^{2-}) prédomine mais aucune forme phosphatée n'est précipitée.

$(\text{HPO}_4^{2-}) = c_1$; A.N. : $(\text{HPO}_4^{2-}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; on se place à la limite de **5.** :

$\text{pH} = \text{pK}_i - \frac{1}{4} \text{pK} + \frac{1}{2} \log(\text{HPO}_4^{2-})$; AN : $\text{pH} = 10,35$.

7.a.a. $\text{H}_3\text{PO}_4 + \text{OH}^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{PO}_4^- + \text{H}_2\text{O}$; cf. $\text{pH} = 2,44$ et $\text{pH} = 4,79$, $V < 0,04 \text{ ml}$.

b. $3\text{Cd}^{2+} + 2\text{H}_2\text{PO}_4^- + 4\text{OH}^- \rightleftharpoons \text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2(\text{s}) + 4\text{H}_2\text{O}$;

vu $\text{pH} = 4,79$ et $\text{pH} = 6,46$, $0,04 < V < 0,09$.

c. Pour $6,46 < \text{pH} < 10,24$, on dose par OH^- , l'espèce acide présente :

$\text{H}_2\text{PO}_4^- + \text{OH}^- \rightarrow \text{HPO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O}$, avec une solution tampon à $\text{pH} = 7$.

On a $0,09 < V < 0,12$.

Les réaction **b.** et **c.** coexistent vu la figure 2 mais l'approximation est acceptable.

d. $\text{Cd}_3(\text{PO}_4)_2(\text{s}) + 4\text{OH}^- + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 3\text{Cd}(\text{OH})_2(\text{s}) + 2\text{HPO}_4^{2-}$,

cf. $\text{pH} = 10,24$ et $\text{pH} = 10,35$. $0,12 < V < 0,18$.

e. $10,35 < \text{pH} < 12$; $\text{HPO}_4^{2-} + \text{OH}^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{PO}_4^{3-}$, réaction qui avait déjà très peu commencé en **d.**, cf. figure 2 pour $0,18 < V < 0,30$.

b. De **b.** et de la figure 2, on déduit :

$\text{I} \equiv \text{H}_3\text{PO}_4$; $\text{II} \equiv \text{Cd}^{2+}$; $\text{III} \equiv \text{H}_2\text{PO}_4^-$; $\text{IV} \equiv \text{HPO}_4^{2-}$; $\text{V} \equiv \text{PO}_4^{3-}$; cf. $3 \cdot 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^{-3}$.
références numériques.

4.5.13. Méthode de l'équilibre prépondérant ou de contrôle

On se propose d'étudier les applications de cette méthode à la détermination de la solubilité des sels peu solubles.

La dissolution d'un sel, de formule générale MX_m , entraîne, au sein de la solution, l'établissement d'un certain nombre d'équilibres simultanés.

A chacun de ces équilibres correspond une constante de la loi d'action de masse.

Ces équilibres sont les suivants :

a. L'équilibre traduisant le caractère amphotère du solvant (de l'eau dans le cas présent)

[a] $2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{OH}^-$. Soit K_e le produit ionique de l'eau.

b. L'équilibre traduisant la dissolution du sel $\text{MX}_{m(\text{s})}$ peu soluble :

[b] $\text{MX}_{m(\text{s})} \rightleftharpoons \text{M}^{m+} + m\text{X}^-$. Soit K_{s_1} le produit de solubilité de ce sel étudié.

L'indice (s) signifie "à l'état solide" et l'indice (aq) [ou l'absence d'indice de notation] "en solution".

Trois cas peuvent généralement se présenter :

1. Premier cas

La dissolution de MX_m entraîne la formation d'un complexe de formule générale MX_t^q , q représentant la charge de la particule complexe.

L'équilibre suivant traduit alors la stabilité de l'espèce MX_t^q .

[c] $MX_t^q \rightleftharpoons M^{m+} + t X^-$. Soit K_c la constante d'instabilité de MX_t^q .

2. Deuxième cas

La dissolution de MX_m conduit, par action sur le solvant, à la formation de particules HX en solution. L'équilibre suivant traduit la force de cet acide HX, conformément à la théorie de Brönsted :

[d] $HX + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + X^-$. Soit K_a la constante d'acidité du couple HX / X^- .

3. Troisième cas

a. La dissolution de MX_m dans l'eau conduit à la formation d'un composé de formule générale $M(OH)_k^{q'}$, soluble, q' représentant la charge de la particule complexe.

L'équilibre suivant traduit la stabilité de ce composé :

[e₁] $M(OH)_k^{q'} \rightleftharpoons M^{m+} + k OH^-$.

Soit K_{c_2} la constante d'instabilité du complexe $M(OH)_k^{q'}$.

b. La dissolution de MX_m dans l'eau conduit à la formation d'un hydroxyde peu soluble de formule générale $M(OH)_{k(s)}$.

L'équilibre suivant traduit la solubilité de cet hydroxyde :

[e₂] $M(OH)_{k(s)} \rightleftharpoons M^{m+} + k OH^-$.

Soit K_{s_2} le produit de solubilité de l'hydroxyde $M(OH)_{k(s)}$.

La méthode envisagée consiste à repérer, dans l'ensemble des équilibres présents dans la solution "l'équilibre de contrôle" (noté EC), c'est-à-dire le schéma réactionnel correspondant à la réaction qui impose les proportions de certaines espèces chimiques.

Les concentrations des produits, dits majoritaires, obtenus selon EC sont, en général, plus importantes que celles des produits, dit minoritaires, qui proviennent des autres équilibres. Ces dernières seront alors, sous réserve de contrôle a posteriori, négligées devant les premières. On dit aussi que EC est "l'équilibre prépondérant" E.P.

Dans l'application de cette méthode, on distingue deux types de substances (ou de particules) :

1. Les espèces chimiques introduites au départ : ce sont, dans le cas présent, essentiellement H_2O et MX_m . On nomme ces substances "réactifs" (notés R).

2. Les produits de décomposition de ces réactifs que l'on nomme "produits" (notés P). Pour comparer les équilibres simultanés présents en solution, afin de déterminer lequel de ces équilibres constitue EC, il est nécessaire d'écrire toujours les schémas réactionnels sous la même forme (notée R-P): Réactif(s) \rightleftharpoons Produit(s).

L'équilibre de contrôle est donc nécessairement écrit sous la forme R-P.

Les équilibres (a) et (b) sont déjà écrits sous la forme R-P.

Dans certains cas, si l'un d'eux satisfait les conditions requises (qui seront précisées plus loin) il pourra constituer EC.

Si (a) ou (b) n'est pas EC, il s'agira alors d'un équilibre "mixte", c'est-à-dire obtenu, suivant les cas, par une combinaison de (a), (b), (c), (d), (e₁) ou (e₂), cette combinaison étant effectuée pour écrire l'équilibre à étudier sous la forme R-P.

Premiers équilibres mixtes**1. Premier cas**

Il y a formation d'un complexe MX_t^q et l'équilibre R-P s'écrit alors :

• Brönsted, complexe, constante d'acidité, constante d'instabilité, E.P, EC, équilibre de contrôle, équilibre prépondérant, minoritaire, produit de solubilité, solubilité, solvant

Problèmes mixtes



2. Deuxième cas

Il y a formation d'acide HX et l'équilibre R-P s'écrit :



3. Troisième cas

a. Il y a formation d'un composé $\text{M}(\text{OH})_k^{q'}$ et l'équilibre R-P s'écrit :



b. Il y a formation d'un hydroxyde peu soluble de formule $\text{M}(\text{OH})_{k(s)}$ et l'équilibre



Ces formulations ne tiennent pas compte des molécules d'eau éventuellement coordonnées à l'ion métallique.

A. On note $pQ = -\log a$.

On appelle K_i la constante de la loi d'action de masse (ou l'expression conventionnelle de la constante) relative à l'équilibre (i) écrit sous la forme R-P.

n_i représente le nombre total de moles de produits solubles formés lorsque la réaction (i) est totale.

1. On considère le cas où [b] est EC.

a. Montrer que $\frac{pK_i}{n_i} = \frac{pK_{s_1}}{m+1} = pX^-$ si $m = 1$, et que $\frac{pK_i}{n_i} = pX^- + A$ si $m > 1$.

b. En général, m est ≤ 8 . Donner les diverses valeurs de A pour m tel que $2 \leq m \leq 8$ et montrer que l'on peut écrire, dans ce cas, avec une approximation

$$\text{acceptable : } \frac{pK_{s_1}}{m+1} = pX^- + 0,1 \text{ où } pX^- = \frac{pK_{s_1}}{m+1} - 0,1.$$

2. On considère, à présent, la possibilité de formation d'un complexe MX_t^q lorsque on dissout jusqu'à saturation, un sel $\text{MX}_{m(s)}$ dans l'eau (premier cas).

a. Ecrire tous les équilibres sous forme R-P relatifs au système.

b. Montrer que EC est l'équilibre qui possède la plus petite valeur de $\frac{pK_i}{n_i}$.

Il n'est pas demandé, pour les autres cas envisagés par la suite, de démontrer à nouveau cette relation qui sera, en fait, toujours vérifiée.

c. Pour savoir si l'équilibre "mixte" envisagé (c'est-à-dire [f]) est EC, il est intéressant de comparer directement K_{s_1} à la constante de stabilité K_c du complexe MX_t^q envisagé.

Montrer que, si l'équilibre mixte est EC, on peut écrire $pK_c > t \cdot \frac{pK_{s_1}}{m+1}$.

d. Montrer que l'on a une relation de ce type lorsqu'on envisage la formation d'un complexe $\text{M}_n\text{X}^{q''}$. (on désignera par K_{c_3} sa constante d'instabilité) et que l'équilibre mixte correspondant, noté f_2 (constante K_{f_2}) est EC (q'' représente la charge du complexe).

3. On considère, à présent, la formation d'acide HX lorsqu'on dissout un sel $\text{MX}_{m(s)}$ dans l'eau, jusqu'à saturation (2ème cas).

a. Ecrire tous les équilibres sous forme R-P relatifs au système.

- b.** Déterminer l'inégalité reliant pK_e, pK_a, pK_{s_1} lorsque l'équilibre mixte est EC .
- 4.** On envisage, enfin, la formation d'un polyhydroxocomplexe soluble de la forme $M(OH)_k^q$ lorsqu'on dissout un sel $MX_{m(s)}$ dans l'eau jusqu'à saturation (3^e cas **a.**).
- a.** Ecrire tous les équilibres sous forme R-P relatifs au système.
- b.** Déterminer l'inégalité reliant pK_e, pK_{e_1} et pK_{s_1} lorsque l'équilibre mixte est EC.
- c.** Montrer que l'on a une relation de ce type lorsque l'on envisage la formation d'un hydroxyde peu soluble de la forme $M(OH)_{k(s)}$ et lorsque l'équilibre mixte est EC.
- B.** Dans la pratique, ces cas ne sont pas toujours aussi distinctement différenciés et l'on rencontre le plus souvent une combinaison des trois cas précédemment envisagés. Les relations définies restent valables pour le repérage de EC qui constitue toujours l'équilibre offrant la plus petite valeur de $\frac{pK_i}{n_i}$.

On se propose d'étudier les solutions saturées de quelques composés ioniques peu solubles. certaines des relations précédentes seront aménagées en fonction de la nature (sel ou hydroxyde) du composé ionique.

Pour chaque cas envisagé, il est demandé :

- a.** Ecrire les schémas des équilibres présents dans la solution. ces équilibres seront écrits sous les formes [a], [b], [c], [d], [e₁], [e₂], [f], [g], [h₁], [h₂], etc.
- b.** A l'aide des relations établies précédemment (**II.A.2.c.,d. – II.A.3.b. – II.A.4.b.**) déterminer et écrire l'équilibre de contrôle.
- c.** Calculer les concentrations des espèces présentes dans la solution à la température T (température à laquelle sont données les valeurs numériques ci-dessous).
- d.** Calculer la solubilité du sel considéré, à la température T.

Les solutions aqueuses saturées des composés ioniques suivants seront ainsi étudiées :

- B.1.** Hydroxyde de magnésium $Mg(OH)_2$.
- B.2.** Hydroxyde de fer $Fe(OH)_2$.
- B.3.** Fluorure de calcium CaF_2 .
- B.4.** Phosphate de calcium $Ca_3(PO_4)_2$.
- B.5.** Carbonate de calcium $CaCO_3$.

Le système liquide – solide n'est pas en contact avec une phase vapeur.

- B.6.** Sulfure de manganèse MnS .

Cet exemple illustre le cas complexe pour lequel l'équilibre de contrôle peut être un "double équilibre mixte", c'est-à-dire un équilibre sous forme R-P faisant intervenir à la fois la formation d'un hydroxyde et celle d'un acide.

On montrera que l'équilibre $MnS_{(s)} + H_2O \rightleftharpoons Mn(OH)_{2(s)} + Mn^{++} + 2HS^-$ est bien l'équilibre de contrôle.

Valeurs numériques (données pour des solutions aqueuses et à la température T considérée) : Produit ionique K_e de l'eau : $pK_e = 14$.

Produit de solubilité K_s des sels.

sel _(s)	pK_{s_1}
CaF ₂	10,4
Ca ₃ (PO ₄) ₂	26,0
CaCO ₃	8,35
MnS	9,6

Hydroxydes _(s)	pK_{s_1} ou pK_{s_2}
Mg(OH) ₂	11,0
Fe(OH) ₂	15,1
Ca(OH) ₂	5,4
Mn(OH) ₂	12,8

Constantes d'instabilité K_c des complexes ou de sels dissous :

Complexe	pK_c
CaF ⁺	1,0
Mg(OH) ⁺	2,6
Fe(OH) ⁺	5,7
Ca(OH) ⁺	1,4
Mn(OH) ⁺	3,4
Mn(OH) ₃ ⁻	7,8

Sel _(aq)	pK_c
CaCO _{3(aq)}	3,2

Constantes d'acidité K_a de quelques couples acide / base conjuguée :

Couple acide / base	pK_a
HF / F ⁻	3,2
H ₂ PO ₄ / H ₂ PO ₄ ⁻	2,13
H ₂ PO ₄ ⁻ / HPO ₄ ²⁻	7,2
HPO ₄ ²⁻ / PO ₄ ³⁻	12,36
* H ₂ CO ₃ / HCO ₃ ⁻	3,58
H ₂ O + CO _{2(aq)} / HCO ₃ ⁻	6,35
HCO ₃ ⁻ / CO ₃ ²⁻	10,33
H ₂ S / HS ⁻	7,02
HS ⁻ / S ²⁻	12,9
CH ₃ COOH / CH ₃ COOH ⁻	4,75

Rappelons les nombres de masse des éléments suivants :

H = 1
C = 12
N = 14
O = 16
Na = 23

* H₂CO₃ s'écrit souvent CO_{2(d)} + H₂O

ENS ; 2h30

Corrigé

A.1.a. Soit [b] $MX_{ns} \rightleftharpoons mX^- + M^{m+}$; on a $(M^{m+}) = \frac{(X^-)}{m}$; or $K_{s_1} = (M^{m+})(X^-)^m$.

Aussi $K_{s_1} = \frac{(X^-)^{m+1}}{m} \Rightarrow pK_{s_1} = (m+1)pX^- + \log m$.

Aussi $\frac{pK_{s_1}}{m+1} = pX^-$ si $m = 1$ et $\frac{pK_{s_1}}{m+1} = pX^- + \frac{\log m}{m+1}$ si $m > 1$. On obtient ce qu'il faut

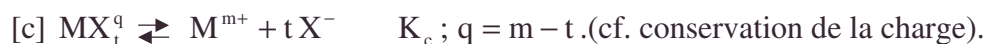
démontrer car on peut écrire $n_i = m + 1$; $pK_i = pK_{s_1}$, et $A = \frac{\log m}{m+1}$.

L'énoncé restreint : $m \leq 8$.

b.

m	2	3	4	5	6	7	8
A	0,100	0,119	0,120	0,116	0,111	0,106	0,100

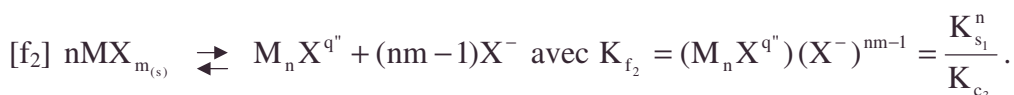
On peut prendre $A = 0,1$ (à 20 % près au pire).



b. L'équilibre de contrôle est celui qui produit le plus de X^{-} ; soit pX^{-} le plus petit, soit $\frac{pK_i}{n_i}$ le plus petit.

c. [f] est EC si $pX_f^{-} < pX_b^{-}$; or pour [b] $pX_b^{-} = \frac{pK_{s_1}}{m+1} - 0,1$ et pour [f] (par analogie formelle avec b) $pX_f^{-} = \frac{pK_f}{m-t+1} - 0,1$. De plus, $K_f = [MX_t^q][X^{-}]^{m-t} = \frac{K_{s_1}}{K_c}$;

ainsi en remplaçant dans $pX_f^{-} < pX_b^{-}$, on trouve : $pK_c > t \frac{pK_{s_1}}{m+1}$.

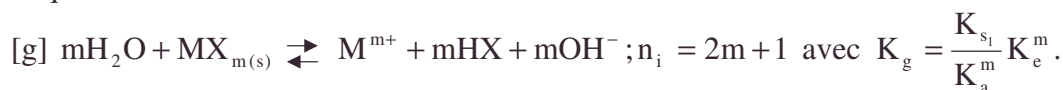


En appliquant la règle $pX_{f_2}^{-} < pX_b^{-}$ avec $pX_b^{-} = \frac{pK_{s_1}}{m+1} - 0,1$ et pour $[f_2]$ par analogie avec [b].

$$pX_{f_2}^{-} = \frac{npK_{s_1} - pK_{c_3}}{nm} - 0,1, \text{ soit pour finir } pK_{c_3} > \frac{n}{m+1} pK_{s_1}.$$



L'équilibre mixte est :



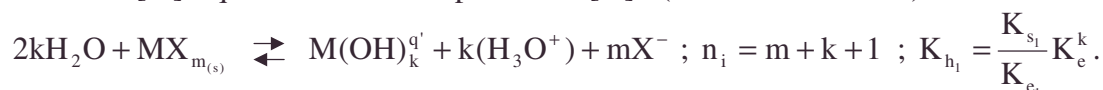
b. On applique formellement la règle donnée : $\frac{pK_i}{n_i}$ le plus petit donne EC :

l'énoncé précise en **A.2.b.** de ne pas démontrer cette relation qui sera, en fait, toujours vérifiée.

$$\frac{pK_g}{2m+1} < \frac{pK_{s_1}}{m+1} \text{ donne : } pK_a > pK_e - \frac{pK_{s_1}}{m+1}.$$



$[h_1]$ Equilibre R-P correspondant à $[e_1]$: (cf. troisième cas **a.**)

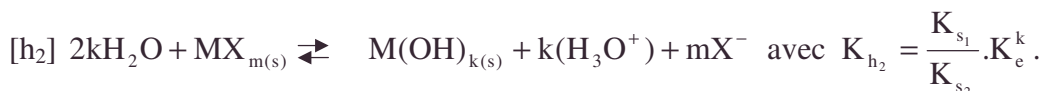


• **EC, équilibre de contrôle, équilibre mixte**

b. On applique formellement la règle : $\frac{pK_i}{n_i}$ le plus petit donne EC.

$$\frac{pK_{h_1}}{m+k+1} < \frac{pK_{s_1}}{m+1} \text{ soit } pK_{e_1} > kpK_e - \frac{k}{m+1} pK_{s_1}.$$

c. On a dans le cas d'un hydroxyde peu soluble :



Si $[h_2]$ est EC, $n_i = m+k$, $\frac{pK_{h_2}}{m+k} < \frac{pK_{s_1}}{m+1}$ soit $pK_{s_2} > kpK_e - \frac{(k-1)}{(m+1)} pK_{s_1}$.

Résumé des critères étudiés en :

A.2.c. $[f]$ EC au lieu de b si $\frac{pK_c}{t} > \frac{pK_{s_1}}{m+1}$.

Soit formation du complexe MX_t^q .

A.2.d. $[f_2]$ EC au lieu de b si $pK_{c_3} > \frac{n}{m+1} pK_{s_1}$.

Soit formation du complexe $\text{M}_n\text{X}^{q''}$.

A.3.b. $[g]$ EC au lieu de b si $pK_a > pK_e - \frac{pK_{s_1}}{m+1}$.

Soit formation de l'acide HX faible.

A.4.b. $[h_1]$ EC au lieu de b si $pK_{c_2} > kpK_{e_1} - \frac{k}{m+1} pK_{s_1}$.

Soit formation du complexe $\text{M(OH)}_k^{q'}$.

A.4.c. $[h_2]$ EC au lieu de b si $pK_{e_1} > kpK_e - \frac{k-1}{m+1} pK_{s_1}$.

Soit formation de l'hydroxyde $\text{M(OH)}_{k(s)}$.

B.1. Etude de $\text{Mg(OH)}_{2(s)}$

a. $[b] \text{ Mg(OH)}_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Mg}^{2+} + 2\text{OH}^- ; pK_{s_1} = 11 ; m = 2 ; \frac{pK_{s_1}}{m+1} = 3,67.$

$[c] \text{ Mg(OH)}^+ \rightleftharpoons \text{Mg}^{2+} + \text{OH}^- ; t = 1 ; pK_c = 2,6 ; \frac{pK_c}{t} = 2,6 < 3,67.$

$[f] \text{ Mg(OH)}_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Mg(OH)}^+ + \text{OH}^- ; n = 1 ; K_f = \frac{K_{s_1}}{K_c} ; pK_f = 8,40.$

b. Vu **A.2.c.** $[f]$ n'est pas EC $[b]$ est EC ou EP.

c. Vu $[b]$ EC $(\text{Mg}^{2+}) = \frac{(\text{OH}^-)}{2} ; K_{s_1} = \frac{(\text{OH}^-)^3}{2}.$

$$\text{A.N. : } (\text{OH}^-) = 2,71 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$(\text{Mg}^{2+}) = 1,36 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$(\text{H}_3\text{O}^+) = 3,68 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1} \text{ cf. } K_e.$$

$$(\text{Mg(OH)}^+) = 1,47 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} \text{ cf. } K_c.$$

d. $s = (\text{Mg}^{2+}) + (\text{Mg}(\text{OH})^+) = 1,51 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$. L'hydroxocomplexe participe à la solubilité.

2. Etude de $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$

a. [b] $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+} + 2\text{OH}^-$; $m = 2$; $\text{pK}_{s_1} = 15,1$; $\frac{\text{pK}_{s_1}}{m+1} = 5,0$.

[c] $\text{Fe}(\text{OH})^+ \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+} + \text{OH}^-$; $t = 1$; $\text{pK}_c = 5,7$; $\frac{\text{pK}_c}{t} = 5,7 > 5,0$ *

[f] $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH}^+) + \text{OH}^-$; .

b. Vu **A.2.c.**, [f] est EC ou EP; on a : $\text{K}_f = \frac{\text{K}_{s_1}}{\text{K}_c} \Rightarrow \text{pK}_f = 9,4$.

c. Vu [f] EC : $(\text{Fe}(\text{OH})^+) = (\text{OH}^-) = \text{K}_g^{1/2}$;

A.N. : $(\text{Fe}(\text{OH})^+) = (\text{OH}^-) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$; $(\text{Fe}^{2+}) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ vu K_{s_1} ;

l'hydroxocomplexe est majoritaire.

$(\text{H}_3\text{O}^+) = 5 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$ vu K_e .

d. $s = (\text{Fe}^{2+}) + (\text{Fe}(\text{OH}^+)) = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

3. Etude de $\text{CaF}_{2(s)}$

a. [b] $\text{CaF}_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + 2\text{F}^-$; $m = 2$; $\text{pK}_{s_1} = 10,4$; $\frac{\text{pK}_{s_1}}{m+1} = 3,47$.

[c] $\text{CaF}^+ \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + \text{F}^-$; $t = 1$; $\text{pK}_c = 1,0$; $\frac{\text{pK}_c}{1} = 1,00 < 3,47$.

[d] $\text{HF} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{F}^-$; $\text{pK}_a = 3,2$; $3,2 < 14 - 3,47$, inégalité contraire à la condition de **A.3.b.**

[e₁] $\text{Ca}(\text{OH})^+ \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + \text{OH}^-$; $k = 1$; $\text{pK}_{c_2} = 1,4$; $1,4 < 14 - 3,47$, inégalité contraire à la condition de **A.4.b.**

[e₂] $\text{Ca}(\text{OH})_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + 2\text{OH}^-$; $k = 2$; $\text{pK}_{s_2} = 5,4$; $5,4 < 2 \cdot 14 - 3,47$. inégalité contraire à la condition de **A.4.c.**

Ecrivons les équilibres de RP

[b] $\text{CaF}_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + 2\text{F}^-$.

[f] $\text{CaF}_{2(s)} \rightleftharpoons \text{CaF}^+ + \text{F}^-$ non EC vu **A.2.c.**

[g] $\text{CaF}_{2(s)} + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + 2\text{HF} + 2\text{OH}^-$ non EC vu **A.3.b.**

[h₁] $\text{CaF}_{2(s)} + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Ca}(\text{OH})^+ + \text{H}_3\text{O}^+ + 2\text{F}^-$ non EC vu **A.4.b.**

[h₂] $\text{CaF}_{2(s)} + 4\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Ca}(\text{OH})_2 + 2\text{H}_3\text{O}^+ + 2\text{F}^-$ non EC vu **A.4.c.**

b. Conclusion : [b] est EC ou EP.

c. Vu [b] EC : $(\text{Ca}^{2+}) = \frac{(\text{F}^-)}{2}$ or $\text{K}_{s_1} = \frac{(\text{F}^-)^3}{2} \Rightarrow$

A.N. : $(\text{F}^-) = 4,30 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$; $(\text{Ca}^{2+}) = 2,15 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$;

$(\text{CaF}^+) = 9,25 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ cf. K_c . Les complexes sont minoritaires.

$(\text{H}_3\text{O}^+) = (\text{OH}^-) = 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ cf. K_e ; $(\text{Ca}(\text{OH})^+) = 5,4 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$ cf. K_c .

$(\text{HF}) = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$ cf. K_a . Présence très faible de l'acide faible.

Pas de précipité de $\text{Ca}(\text{OH})_{2(s)}$ vu $(\text{Ca}^{2+})(\text{OH}^-)^2 < K_{s_2}$.

d. $s = (\text{Ca}^{2+}) + (\text{CaF}^+) + (\text{Ca}(\text{OH})^+) = 2,16 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

4. Etude de $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_{2(s)}$

a. $[\text{b}] \text{Ca}_3(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}^{2+} + 2\text{PO}_4^{2-}$; $\text{p}K_{s_1} = 26$.

Ou encore pour respecter l'énoncé :

$\text{Ca}(\text{PO}_4)_{2/3(s)} \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + \frac{2}{3}\text{PO}_4^{2-}$; $\text{p}K'_{s_1} = \frac{26}{3}$; $m = \frac{2}{3}$; $\frac{\text{p}K'_{s_1}}{m+1} = 5,2$.

$[\text{e}_1] \text{Ca}(\text{OH}^+) \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + \text{OH}^-$; $\text{p}K_{c_2} = 1,4$; $1,4 < 14 - 5,2$.

$[\text{e}_2] \text{Ca}(\text{OH})_{2(s)} \rightleftharpoons \text{Ca}^{2+} + 2\text{OH}^-$; $\text{p}K_{s_2} = 5,4$; $5,4 < 2 \cdot 14 - 5,2$.

$[\text{d}_1] \text{HPO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{PO}_4^{3-} + \text{H}_3\text{O}^+$; $\text{p}K_{a_3} = 12,36 > 14 - 5,2$. *

$[\text{d}_2] \text{H}_2\text{PO}_4^- + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HPO}_4^{2-} + \text{H}_3\text{O}^+$; $\text{p}K_{a_2} = 7,2$.

$[\text{d}_3] \text{H}_3\text{PO}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{PO}_4^- + \text{H}_3\text{O}^+$; $\text{p}K_{a_1} = 2,13$.

$[\text{g}_1] 2\text{H}_2\text{O} + \text{Ca}(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}^{2+} + 2\text{HPO}_4^{2-} + 2\text{OH}^-$;

$\text{p}K_{g_1} = \frac{K_{s_1}}{K_{a_3}^2} \cdot K_e^2$; $\text{p}K_{g_1} = 29,28$.

$[\text{g}_2] 4\text{H}_2\text{O} + \text{Ca}_3(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}^{2+} + 2\text{H}_2\text{PO}_4^- + 4\text{OH}^-$.

$[\text{g}_3] 6\text{H}_2\text{O} + \text{Ca}(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}^{2+} + 2\text{H}_3\text{PO}_4 + 6\text{OH}^-$.

$[\text{h}_1] 6\text{H}_2\text{O} + \text{Ca}_3(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}(\text{OH})^+ + 2\text{PO}_4^{3-} + 3\text{H}_3\text{O}^+$.

$[\text{h}_2] 12\text{H}_2\text{O} + \text{Ca}_3(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}(\text{OH})_{2(s)} + 2\text{PO}_4^{3-} + 6\text{H}_3\text{O}^+$.

$[\text{h}'_1] 4\text{H}_2\text{O} + \text{Ca}_3(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}(\text{OH})^+ + 2\text{HPO}_4^{2-} + \text{H}_3\text{O}^+$.

$[\text{h}'_2] 10\text{H}_2\text{O} + \text{Ca}_3(\text{PO}_4)_{2(s)} \rightleftharpoons 3\text{Ca}(\text{OH})_{2(s)} + 2\text{HPO}_4^{2-} + 4\text{H}_3\text{O}^+$.

On ne continuera pas au delà, vu le diagramme de prédominance des ions phosphates en milieu basique.

b. On trouve par application des règles **A.3.b.**, **A.4.b.**, **A.4.c.** (cf. les 3 inégalités écrites) que : $[\text{g}_1]$ est EC.

c. $[\text{g}_1]$ est EC $\Rightarrow (\text{Ca}^{2+}) = \frac{3}{2}(\text{HPO}_4^{2-}) = \frac{3}{2}(\text{OH}^-)$ vu $K_{g_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 (\text{OH}^-)^7$

A.N. : $(\text{OH}^-) = (\text{HPO}_4^{2-}) = 5,52 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$; .

$(\text{Ca}^{2+}) = 8,27 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$. Pas de précipité de $\text{Ca}(\text{OH})_{2(s)}$.

$(\text{H}_3\text{O}^+) = 1,81 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$.

$(\text{PO}_4^{3-}) = 1,37 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$; cf. K_{A_3} .

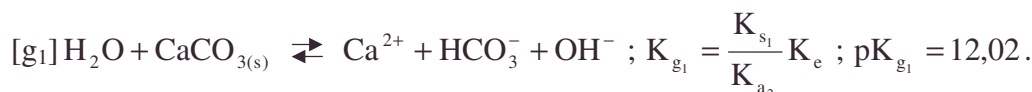
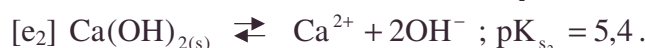
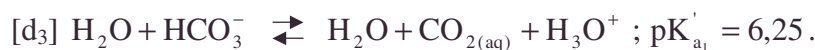
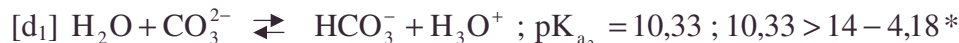
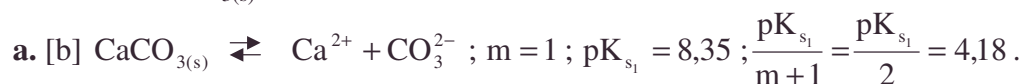
$(\text{H}_2\text{PO}_4^-) = 1,58 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$; cf. K_{A_2} .

$\text{H}_3\text{PO}_4 = 3,87 \cdot 10^{-15} \text{ mol.L}^{-1}$; cf. K_{A_1} .

$(\text{Ca}(\text{OH})^+) = 1,15 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$.

d. $s = (\text{Ca}^{2+}) + (\text{Ca}(\text{OH})^+) = 8,28 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$.

• **diagramme de prédominance, EC**

5. Etude de $\text{CaCO}_{3(s)}$ 

On ne continuera pas vu le diagramme de prédominance des carbonates en milieu basique.

b. Vu $10,33 > 14 - 4,18^*$: [g₁] EC ou EP.

c. [g₁] étant EC $(\text{Ca}^{2+}) = (\text{HCO}_3^-) = (\text{OH}^-) \text{mol.L}^{-1} = \text{K}_{g_1}^{1/2}$.

A.N. : $(\text{OH}^-) = 9,85 \cdot 10^{-5} \text{mol.L}^{-1}$; $(\text{H}_3\text{O}^+) = 1,02 \cdot 10^{-10} \text{mol.L}^{-1}$.

$(\text{Ca}^{2+}) = 9,85 \cdot 10^{-5} \text{mol.L}^{-1}$; $(\text{Ca(OH)}^+) = 2,44 \cdot 10^{-7} \text{mol.L}^{-1}$.

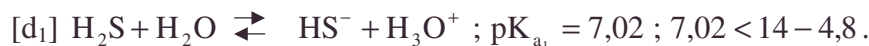
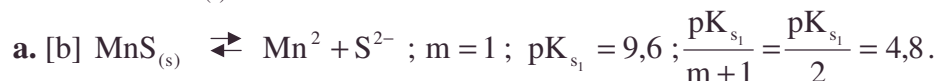
$(\text{HCO}_3^-) = 9,85 \cdot 10^{-5} \text{mol.L}^{-1}$; $(\text{CO}_3^{2-}) = 4,53 \cdot 10^{-5} \text{mol.L}^{-1}$.

$(\text{H}_2\text{CO}_3) = 3,82 \cdot 10^{-11} \text{mol.L}^{-1}$ cf. K_{a_1} ;

$(\text{CO}_{2(aq)}) = 1,79 \cdot 10^{-8} \text{mol.L}^{-1}$ cf. K'_{a_1} .

Il n'y a pas de précipité de $\text{Ca(OH)}_{2(s)}$.

d. $s = (\text{Ca}^{2+}) + (\text{Ca(OH)}^+) = 9,87 \cdot 10^{-5} \text{mol.L}^{-1}$.

6. Etude de $\text{MnS}_{(s)}$ 

• *diagramme de prédominance, EC*

Problèmes mixtes

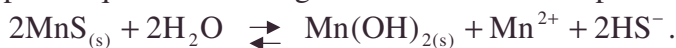


On ne continuera pas vu le diagramme de prépondérance des ions sulfures en milieu basique ; on privilégiera $[g_1]$ devant $[g_2]$ pour la même raison.

b. $12,9 > 14 - 4,8^* \Rightarrow [g_1] \text{ EC}.$

b.bis. Comparons $\frac{pK_i}{n_i}$ pour $[g_1]$ et l'équilibre "mixte double" alliant $[g_1]$ et $[h'_2]$

pour lequel aucune inégalité n'a été établie en particulier.



$$K_i = \frac{K_{s_1}^2}{K_{a_2}^2} \frac{K_e^2}{K_{s_2}} ; pK_i = 8,60 ; n_i = 3 ; \frac{pK_i}{n_i} = \frac{8,60}{3} = 2,87.$$

$$\text{Or, pour } [g_1] : K_{g_1} = \frac{K_{s_1}}{K_{a_2}} K_e ; pK_{g_1} = 10,70 ; \frac{pK_{g_1}}{3} = 3,57.$$

La règle générale permet de conclure que $[g_1]$ n'est pas de fait l'équilibre de contrôle, mais l'équilibre de contrôle est un double équilibre mixte avec précipitation double.



On voit la difficulté de la méthode dans certaines situations.

$$\text{c. } (\text{Mn}^{2+}) = \frac{(\text{HS}^-)}{2} ; K_i = \frac{(\text{HS}^-)^3}{2}.$$

$$\text{A.N. : } (\text{HS}^-) = 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$(\text{Mn}^{2+}) = 8,56 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$(\text{S}^{2-}) = 2,93 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1} \text{ cf. } K_{s_1}.$$

$$(\text{H}_3\text{O}^+) = 7,35 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1} \text{ cf. } K_{a_2}.$$

$$(\text{OH}^-) = 1,36 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$(\text{H}_2\text{S}) = 1,32 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} \text{ cf. } K_{a_1}.$$

$$(\text{Mn}(\text{OH})^+) = 2,92 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} ; \text{cf. } K_{c_2}.$$

$$(\text{Mn}(\text{OH})_3^-) = 1,36 \cdot 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1} ; \text{cf. } K_{c_2}.$$

$$\text{d. } s = (\text{Mn}^{2+}) + (\text{Mn}(\text{OH})^+) + (\text{Mn}(\text{OH})_3^-) = 8,85 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

4.6. Courbes intensité - potentiels

n'appartient pas aux programmes des MPSI, MP, PCSI (PSI et PC), PTSI, PT, BCPST1 et 2, TSI 1 et 2, TPC1

4.6.1. Cathode de mercure pour électrolyser le chlorure de sodium dissous

L'industrie du mercure est en nette régression, en raison de la prise de conscience des trop nombreux rejets en mercure et des diverses intoxications (atmosphère, chaîne alimentaire ...) qui en résultent.

Parmi les nombreuses applications, les deux plus importantes sont :

- les piles au mercure (20% de la production)
- l'utilisation du mercure comme cathode dans la production du dichlore (40% de la production).

Production de dichlore par le procédé de la cathode de mercure

a. On se propose de réaliser l'électrolyse du chlorure de sodium en solution aqueuse. Préciser les deux réactions en compétition à l'anode et les deux réactions en compétition à la cathode. Quel est le bilan de l'électrolyse ? Estimer la tension minimale d'électrolyse, en supposant le bain maintenu en tampon acide ($\text{pH} = 4$, pour éviter la dismutation du chlore), du seul point de vue thermodynamique.

b. Le procédé "dit au mercure" utilise une anode de titane et une cathode en mercure liquide, le fond cathodique étant incliné à 1 %, ce qui permet d'extraire les dépôts cathodiques (cathode dite circulante, le mercure extrait étant ensuite recyclé). D'après les surtensions cinétiques sur titane, données en annexe, tracer les courbes intensité – potentiel à l'anode et en déduire la réaction anodique.

c. Sachant que le mercure forme un amalgame de sodium ce qui ramène le potentiel standard du couple Na^+ / Na , désormais $\text{Na}^+ / \text{Na}(\text{Hg})$ à $-1,70 \text{ V}$ et d'après les surtensions cinétiques sur mercure, tracer les courbes intensité – potentiel à la cathode et déduire la réaction cathodique.

d. Ecrire l'équation bilan de l'électrolyse et montrer graphiquement comment on peut estimer la tension d'électrolyse pour un courant d'intensité i fixée. En donner un ordre de grandeur.

e. L'industriel applique en fait une tension de 3,9 V, pour une densité de courant de 1 A.cm^{-2} . Pourquoi cet excès de tension ? Calculer la masse de sodium amalgamé en 1 heure par une nappe de mercure de section 200 cm^2 .

Annexe : données numériques

• Atomistique

	Na
Numéro atomique	11
Masse molaire atomique (g.mol^{-1})	22,99

Potentiels standard d'oxydoréduction

Couple	$\text{Hg}_2^{2+} / \text{Hg}_{(l)}$	$\text{Hg}^{2+} / \text{Hg}_2^{2+}$	$\text{O}_{2(g)} / \text{H}_2\text{O}$	$\text{H}^+ / \text{H}_{2(g)}$	$\text{Cl}_{2(aq)} / \text{Cl}^-$	$\text{Na}^+ / \text{Na}_{(s)}$
$E^\circ(\text{V})$	0,79	0,91	1,23	0,00	1,40	-2,71

• amalgame de sodium, anode de titane, cathode de mercure, dismutation, électrolyse du chlorure de sodium dissous, ordre de grandeur, production industrielle du chlore, toxicité

Surtections cinétiques

sur anode en titane

	$\text{Cl}_{2(\text{aq})} / \text{Cl}^-$	$\text{O}_{2(\text{g})} / \text{H}_2\text{O}$
$\eta_a \text{ (V)}$	0,1	1,4

sur cathode en mercure

	$\text{H}^+ / \text{H}_{2(\text{g})}$	$\text{Na}^+ / \text{Na(Hg)}$
$\eta_c \text{ (V)}$	-1,6	0,0

• Constantes physiques

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} ; F = 96500 \text{ C} ; \frac{\ln(10) \cdot R \cdot T}{F} = 0,06 \text{ V à } 25^\circ\text{C}.$$

Autres concours ; Durée : 1h30

Corrigé

a.α. Réactions d'oxydation concurrentes à l'anode

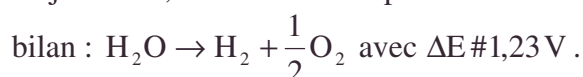


β. Réaction de réduction concurrentes à la cathode



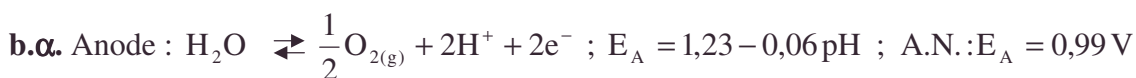
On néglige de fait ($\text{H}_{2(\text{aq})}$).

γ. Vu les données, l'oxydation la plus facile est celle de l'eau ② qui est le composé majoritaire ; la réduction la plus facile est ④ celle de l'eau de fait, on aura la réaction



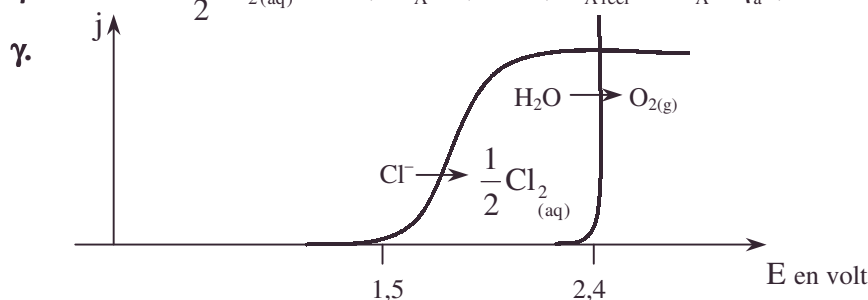
Si on augmente ΔE , les résultats sont plus complexes mais ne correspondent pas à ce qui est souhaité : produire du dichlore presque pur.

Faisons intervenir les surtections :



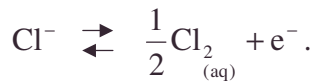
$$\text{en ayant éliminé par convention le terme en } 0,03 \log \left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P^0} \right)^{\frac{1}{2}} ; E_{A \text{ réel}} = E_A + \eta_a ;$$

$$\text{A.N. : } E_{A \text{ réel}} = 2,4 \text{ V}.$$



• courbe, surtension

δ. La réaction anodique à adopter vu l'écart pour produire du dichlore est donc :



Pour éviter la production de dioxygène, on prendra $E < 2,39 \text{ V}$.

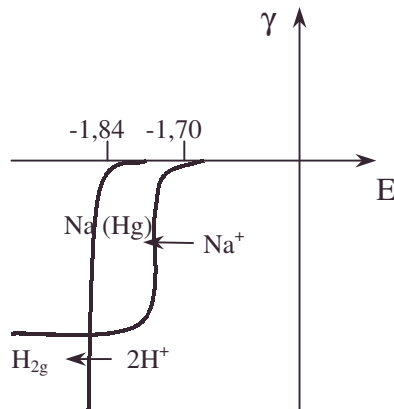
c. Cathode

α. $\text{Na}^+ + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Na(Hg)}$ $E_K = -1,70 \text{ V}$ en éliminant par convention
simplificatrice $0,06 \log \frac{(\text{Na}^+)}{C^0}$

β. $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{H}_{2(\text{g})}$ $E_{K \text{ réel}} = -1,70 \text{ V}$ vu $\eta_K = 0$.
 $E'_K = 0 - 0,06 \cdot 4 = -0,24 \text{ V}$ en éliminant
conventionnellement $0,03 \log \frac{P_{\text{H}_2}}{P^0}$.

$$E'_{K \text{ réel}} = E'_K + \eta'_K ; \text{A.N. : } E'_{K \text{ réel}} = -1,84 \text{ V}.$$

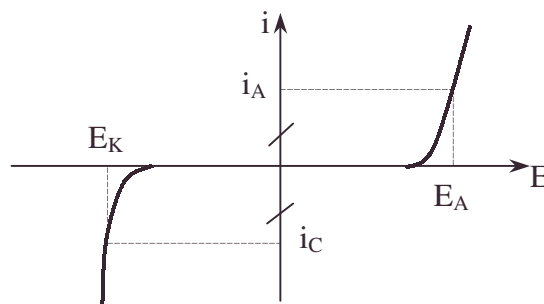
γ.



δ. La réaction anodique à adopter est donc : $\text{Na}^+ + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Na(Hg)}$, et pour éviter la production de dihydrogène, on prendra $E > -1,84 \text{ V}$.

d. $\text{Na}^+ + \text{Cl}^- + \text{Hg} \rightarrow \text{Na(Hg)} + \frac{1}{2} \text{Cl}_{2(\text{aq})}$, avec $E'_{A \text{ réel}} - E'_{K \text{ réel}} > 3,2 \text{ V}$.

Pour la valeur adoptée $E_A - E_K = 3,9 \text{ V}$, on déplace E_A jusqu'à ce qu'on ait $i_A = -i_C$;
on a des valeurs importantes dans l'industrie, vu les pentes. Par exemple, $i = 10000 \text{ A}$.



e. L'excès de tension permet d'augmenter j et donc la production horaire mais il ne faut pas d'excès flagrant car il faut penser aux autres réactions anodique et cathodique écartées par surtension.

$$D = S \cdot j \cdot \frac{M_{\text{Na}}}{F} \cdot 3600 ; \text{A.N. : } D = 171,5 \text{ g/h}.$$

4.6.2. Polarographie : dosage des ions calcium en présence de EDTA

1. Quelques généralités sur les courbes densité de courant-potentiel

Une électrode indicatrice inattaquable (par exemple de platine) est plongée dans une solution contenant un couple Ox/Red échangeant n faradays par mole, aux concentrations respectives (Ox) et (Red), est intégrée à un montage à **trois électrodes**, qui permet l'enregistrement de la courbe intensité – potentiel. Son potentiel E est imposé par rapport à une électrode de référence et le courant qui la traverse est mesuré dans un circuit comportant une électrode auxiliaire. Le courant est conventionnellement pris comme positif si l'électrode indicatrice fonctionne en anode, comme négatif si elle fonctionne en cathode.

L'allure de la courbe expérimentale donnant la densité de courant j ($A.m^{-2}$) en fonction de E est représentée sur la figure 1.

Remarque : on rappelle que dans le cas du tracé de courbes intensité – potentiel à une électrode indicatrice, l'échange d'électrons n'affecte les concentrations des espèces en solution qu'au voisinage immédiat de l'électrode, de telle sorte que les concentrations restent identiques aux concentrations introduites en solution homogène. C'est à cette condition que les tracés peuvent être utilisés à des fins de prévision des phénomènes d'électrolyse, de corrosion ou encore dans ce qui suit pour le suivi d'une réaction de titrage.

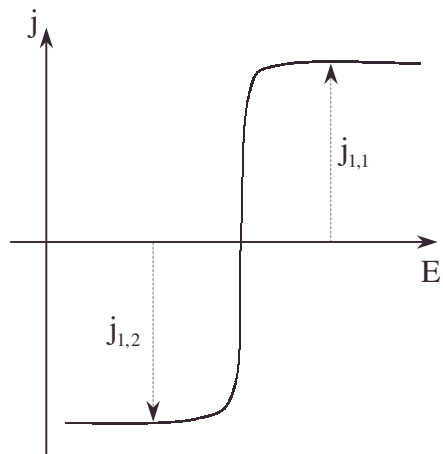


Figure 1.

a. Quel intérêt pratique y-a-t-il à convertir l'intensité du courant mesuré en densité de courant j ?

b. Pourquoi au regard de la courbe expérimentale le système Redox étudié peut-il être considéré comme rapide dans ces conditions opératoires ?

c. A quels phénomènes physiques est reliée l'existence de deux paliers sur la courbe de la figure 1 ? Que peut-on dire de la concentration à l'interface électrode – solution de l'espèce responsable de la limitation de courant ?

d. Quelle serait l'allure de la courbe $j = f(E)$ en présence de l'oxydant seul ? En présence du réducteur seul ?

e. L'équation de la courbe $j = f(E)$ peut, dans le cas d'un système rapide, se mettre sous la forme : $j = \frac{(Red) \exp((1 - \alpha)n\phi) - (Ox) \exp(-\alpha n\phi)}{\frac{\exp((1 - \alpha)n\phi)}{k_{red}} + \frac{\exp(-\alpha n\phi)}{k_{ox}}}$ avec $\phi = \frac{F}{RT}(E - E^0)$ où la

variable est E ; E est le potentiel d'électrode traversée par la densité de courant algébrique j ; E^0 est le potentiel standard du couple Ox/Red qui échange n électrons ; α est un coefficient dit de transfert ; k_{ox} et k_{red} sont les coefficients de diffusion respectivement de l'oxydant et du réducteur ; (Ox) et (Red) sont les concentrations invariables respectives de l'oxydant et du réducteur dans la solution vu la remarque précédente ; on prendra $(RT/F) \ln 10 = 0,06$ V.

Déterminer le potentiel à courant nul en fonction de E^0 et des concentrations (Ox) et (Red). Commenter votre résultat.

f. Donner une expression de $j_{l,ox}$ et $j_{l,red}$ densités de courant limites et les identifier sur la figure 1 (la notation $j_{l,a}$ indique une limitation du courant due à l'espèce a).

• coefficient de diffusion, courbe intensité – potentiel, électrodes auxiliaire de platine, de référence, indicatrice inattaquable, interface électrode – solution, limitation, de courant, montage à 3 électrodes, polarographie, système rapide

g. Déterminer le potentiel de demi-vague $E_{1/2}$, défini comme le potentiel pour lequel $j = \frac{j_{1,1} + j_{1,2}}{2}$. En règle générale, $k_{\text{red}} = k_{\text{ox}}$; que peut-on en conclure ? Quelle différence

y-a-t-il avec un système lent ?

2. Titration des ions Hg(II) par l'EDTA

a. On considère le couple $\text{Hg}_{(\text{aq})}^{2+} / \text{Hg}_{(\text{l})}$ de potentiel standard $E_1^0 = 0,80 \text{ V}$. Interpréter l'allure de la courbe (figure 2) $j = f(E)$ enregistrée pour ce couple à l'aide d'une électrode indicatrice de mercure plongeant dans une solution aqueuse d'ion mercurique Hg^{2+} de concentration $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. Pourquoi n'observe-t-on pas de palier sur la partie droite de la courbe ? Quelle conclusion peut-on tirer de la figure quant à la rapidité du système $\text{Hg}_{(\text{aq})}^{2+} / \text{Hg}_{(\text{l})}$?

b. On ajoute progressivement dans la solution d'ions mercurique, de l'EDTA noté symboliquement Y^{4-} , et dont la formule semi-développée est :

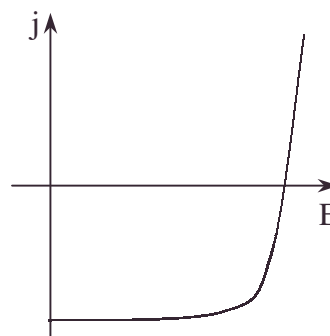
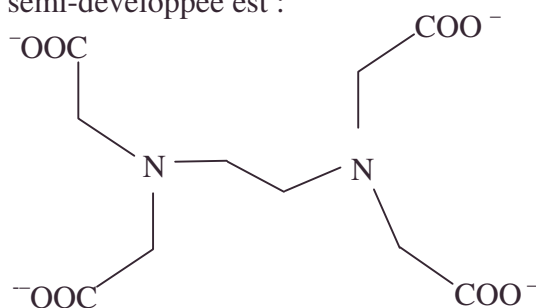


Figure 2.

L'EDTA forme avec l'ion Hg^{2+} un complexe : $\text{Hg}^{2+} + \text{Y}^{4-} = \text{HgY}^{2-}$, de constante de formation $K_1^0 = 10^{22}$.

1. Quels sont les sites de complexation de Y^{4-} ? Pourquoi forme-t-il des complexes très stables avec les cations métalliques hexacoordonnés ?

2. Quelle est qualitativement l'incidence de la complexation :

- sur l'oxydation du mercure, Y^{4-} étant présent à l'interface de la zone réactive proche de l'électrode ?
- sur la réduction des ions mercuriques ?

3. Calculer le potentiel standard E_2^0 du couple $\text{HgY}^{2-} / \text{Hg}_{(\text{l})}$. Indiquer pourquoi, en présence de HgY^{2-} en solution, une électrode de mercure est dite indicatrice de la concentration en Y^{4-} .

c. Soit x le degré d'avancement de la réaction précédente tel que $x = \frac{n_{\text{Y}^{4-}}}{n_{\text{Hg}^{2+}}}$ où $n_{\text{Y}^{4-}}$

représente le nombre de mole d'EDTA ajouté et $n_{\text{Hg}^{2+}}$ le nombre de mole initial d'ion Hg^{2+} . Quelles sont les espèces prédominantes en solution pour $x = 0$; 0,5 ; 1 et $x > 1$?

Interpréter l'allure des courbes de la figure 3 ci-après obtenues pour les différentes valeurs de x . On identifiera les réaction électrochimiques mises en jeu sur les différentes composantes et précisera l'origine des vagues d'oxydation et de réduction successives.

d. Pour suivre le titrage complexométrique, on envisage de mesurer la d.d.p. à courant nul ΔE entre une électrode de référence au calomel, KCl saturé ($E_{\text{ECS}} = 0,24 \text{ V}$) et une électrode indicatrice de mercure. Quelle sera l'allure de la courbe de titrage potentiométrique $\Delta E = f(x)$? On indiquera l'amplitude approximative du saut de potentiel autour du point d'équivalence. On négligera la dilution.

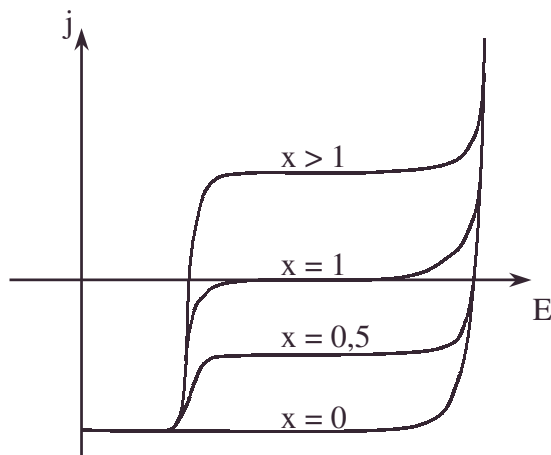


Figure 3

3. Titration des ions Ca^{2+} avec une électrode de mercure indicatrice d'EDTA

A une solution d'ion Ca^{2+} de concentration c_0 , on ajoute une solution d'ion complexe HgY^{2-} de concentration finale $0,2 c_0$ puis à la solution ainsi obtenue on ajoute progressivement une solution titrée d'EDTA concentrée afin de négliger la dilution.

L'EDTA forme avec l'ion Ca^{2+} un complexe : $\text{Ca}^{2+} + \text{Y}^{4-} = \text{CaY}^{2-}$ de constante de formation $K_2^0 = 10^{10}$.

Soit y le degré d'avancement de la réaction précédente tel que $y = \frac{n_{\text{Y}^{4-}}}{n_{\text{Ca}^{2+}}}$ où

$n_{\text{Y}^{4-}}$ représente le nombre d'EDTA ajouté et $n_{\text{Ca}^{2+}}$ le nombre de mole initial d'ion Ca^{2+} .

- a. Quelle est l'incidence de la présence de Ca^{2+} et / ou CaY^{2-} à l'interface électrode – solution :
- sur l'oxydation du mercure ?
 - sur la réduction des ions HgY^{2-} ? Etait-ce prévisible a priori ?

b. Le faisceau de courbes densité de courant – potentiel tracées pour différentes valeurs de y à l'aide d'une électrode indicatrice à mercure est représenté sur la figure 4.

Quelles sont les espèces prédominantes en solution pour $y = 0$; $0,5$; $0,9$; 1 et $y > 1$?

Interpréter l'allure des courbes obtenues :

- en oxydation, en indiquant pour chaque vague la réaction électrochimique mise en jeu et l'origine de la limitation du courant pour les deux vagues successives.

- en réduction, en indiquant pour chaque vague la réaction électrochimique mise en jeu ; quelle interprétation proposez-vous à la première vague de réduction pour $y = 0,9$ sachant que le long de celle-ci, la concentration interfaciale de HgY^{2-} n'est pas nulle ?

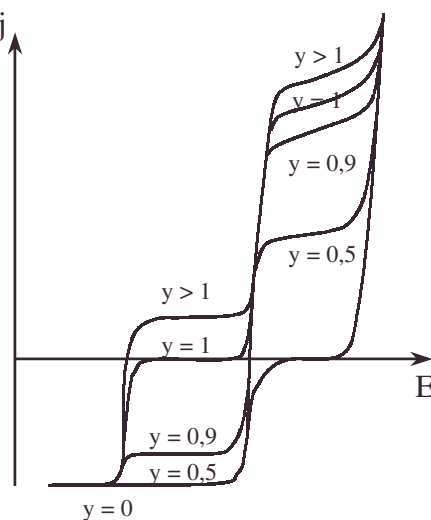


Figure 4

c. On envisage maintenant le suivi du titrage complexométrique par potentiométrie à courant nul entre une électrode de référence au calomel, KCl saturé et une électrode indicatrice de mercure. Quelle sera l'allure de la courbe $\Delta E = f(y)$? On indiquera l'amplitude approximative du saut de potentiel autour du point d'équivalence.

ESPCI ; Durée : 2h

- électrode de mercure indicatrice d'EDTA, réaction électrochimique

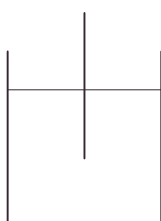
Corrigé

I.1.a. $j = \frac{I}{S}$; cette grandeur est indépendante de la surface de contact avec l'électrolyte de l'électrode particulière utilisée.

b. Le système est rapide car j grand dès qu'on s'écarte de $j = 0$ obtenu pour $E_j = 0$. La vitesse de la réaction est grande si j est grand.

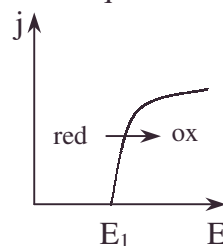
c. On obtient un j limite de saturation ($j_{l,1}$ ou $j_{l,2}$) indépendant de \vec{E} ; le mouvement de diffusion et le mouvement du $a\vec{E}$ s'équilibrent ; les caractéristiques chimiques n'évoluent pas au voisinage des électrodes, en particulier les concentrations des oxydants à la cathode et des réducteurs à l'anode, soient les concentrations des espèces intervenant spécifiquement à chaque électrode ; la valeur de ces concentrations à l'interface électrode – solution est nulle quand on est à la performance limite où tout ce qui arrive est transformé immédiatement sans possibilité d'augmentation.

d. La théorie des courbes intensité potentiel nous rappelle les résultats pour une seule électrode plongeant dans une demi pile . Soit E_1 le potentiel d'équilibre de l'électrode.



α. Si le réducteur est seul, on peut l'oxyder à $E \geq E_1$. Le courant est alors positif car c'est ce qui se passe à une anode. cf. figure 1_α.

β. Si l'oxydant est seul, on peut le réduire si $E \leq E_1$. Le courant est alors négatif car c'est ce qui se passe à une cathode. cf. figure 1_β.

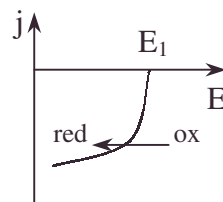
figure 1_α

On a pris le cas d'un système rapide vu le libellé de l'énoncé en **1.e.**

$$\text{e. } j = 0 \Rightarrow \frac{(\text{Ox})}{(\text{Red})} = \exp n\phi = \exp \frac{nF}{RT} (E - E^0) \Rightarrow E_1 = E^0 \text{ et}$$

$$E = E^0 + \frac{RT}{nF} \ln \frac{(\text{Ox})}{(\text{Red})} ; \text{ on retrouve la formule de Nernst, issue de}$$

l'étude thermodynamique quasi statique car $j \neq 0$ quand la vitesse réactionnelle y en est faible).

figure 1_β

f.α. $j_{l,\text{Ox}}$ est le courant limite quand $(\text{Red}) = 0$, le courant dépend de $(\text{Ox})_1$; cf. **1.d.β.**

$$\text{Reportons } (\text{Red}) = 0 \text{ dans l'expression de } j : j_{l,\text{Ox}} = \frac{-(\text{Ox})e^{-\alpha n\phi}}{\frac{e^{(1-\alpha)n\phi}}{k_{\text{red}}} + \frac{e^{-\alpha n\phi}}{k_{\text{ox}}}} = \frac{-(\text{Ox})}{\frac{e^{n\phi}}{k_{\text{red}}} + \frac{1}{k_{\text{ox}}}} < 0.$$

Le régime limite existe dans ce cas quand $F \frac{(E^0 - E)}{RT} \rightarrow \infty$ ou $n\phi \rightarrow -\infty$; $e^{n\phi} \rightarrow 0$.

$$j_{l,\text{Ox}} = -k_{\text{ox}} (\text{Ox}) = j_{l,2} \text{ cf. figure 1.}$$

β. $j_{l,\text{red}}$ est le courant limite quand $(\text{Ox}) = 0$; le courant dépend de (Red) ; cas **d.α.**

Reportons $(\text{Ox}) = 0$ dans l'expression de j :

$$j_{l,\text{red}} = \frac{(\text{Red}) \exp(1 - \alpha) n\phi}{\frac{\exp(1 - \alpha) n\phi}{k_{\text{red}}} + \frac{\exp(-\alpha n\phi)}{k_{\text{ox}}}} = \frac{(\text{Red})}{\frac{1}{k_{\text{red}}} + \frac{\exp(-n\phi)}{k_{\text{ox}}}}.$$

Le régime limite existe dans ce cas quand $F \frac{(E - E^0)}{RT} \rightarrow \infty$ ou $n\phi \rightarrow \infty$; $e^{-n\phi} \rightarrow 0$.

$j_{l,red} = k_{red}(Red) = j_{l,1}$. cf. figure 1.

$$\text{g.}\alpha. \quad 2j_{1/2} = j_{l,1} + j_{l,2} \Leftrightarrow j_{1/2} - j_{l,1} = j_{l,2} - j_{1/2};$$

écrivons :

$$\begin{aligned} j - j_{l,1} &= \frac{(Red) \exp(1 - \alpha)n\phi - (Ox) \exp(-\alpha n\phi)}{\frac{\exp}{k_{red}}(1 - \alpha)n\phi + \frac{\exp}{k_{ox}}(-\alpha n\phi)} - k_{red}(Red); \\ &= - \frac{(k_{ox}(Ox) + k_{red}(Red)) \exp(-\alpha n\phi)}{k_{ox} \left(\frac{\exp}{k_{red}}(1 - \alpha)n\phi + \frac{\exp}{k_{ox}}(-\alpha n\phi) \right)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{puis : } j_{l,2} - j &= -k_{ox}(Ox) - \frac{(Red) \exp(1 - \alpha)n\phi - (Ox) \exp(-\alpha n\phi)}{\frac{\exp}{k_{red}}(1 - \alpha)n\phi + \frac{\exp}{k_{ox}}(-\alpha n\phi)}; \\ &= - \frac{(k_{red}(Red) + k_{ox}(Ox)) \exp(1 - \alpha)n\phi}{k_{red} \left(\frac{\exp}{k_{red}}(1 - \alpha)n\phi + \frac{\exp}{k_{ox}}(-\alpha n\phi) \right)}. \end{aligned}$$

Ecrivons l'égalité des deux expressions ; alors $\phi_{1/2} = \frac{F}{RT} (E_{1/2} - E^0)$;

il reste : $\exp n\phi_{1/2} = \frac{k_{red}}{k_{ox}}$; $E_{1/2} = E^0 + \frac{RT}{nF} \ln \frac{k_{red}}{k_{ox}}$.

\beta. $k_{red} = k_{ox} \Rightarrow E_{1/2} = E^0$; si $Ox + ne^- = Red$, $j_{l,1} = -j_{l,2}$ car pour les cas limites $(Ox) = (Red)$.

\gamma. La pente raide en $E = E^0$ est remplacée par une pente quasi nulle en $E = E^0$ (cf. constante cinétique faible).

2.a.\alpha. Vu **1.d.** La partie $j < 0$ correspond à la réduction $Hg_{(aq)}^{2+} + 2e^- \rightarrow Hg_{(l)}$.

La partie $j > 0$ correspond à l'oxydation $Hg_{(l)} \rightarrow Hg_{(aq)}^{2+} + 2e^-$.

\beta. Vu **1.f.** $j_{l,ox} = -k_{ox}(Ox)$ avec $(Ox) = (Hg^{2+}) = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; cela permet de comprendre le palier présent à gauche.

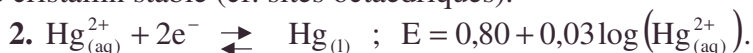
\gamma. $j_{l,red}$ n'a plus son expression en fonction de (Red) car on n'est plus dans le domaine des solutions diluées où l'activité se confond avec la concentration.

On peut penser que sa valeur est très élevée et pas habituellement atteinte avec

$j_{l,red} = k_{red} \text{ activité}_{red}$ et k_{red} très élevé et $\text{activité}_{red} = 1$ pour $Hg_{(l)}$.

\delta. La pente élevée en E_1^0 fait penser à un système rapide vu **1.g.**

b.1. Les 6 doublets disponibles sur Y^{4-} pour former des liaisons covalentes avec les ions métalliques sont sur les 4 O^- et les 2 N . On comprend que l'ion métallique puisse avoir une coordinence 6 avec l'ion Y^{4-} . Cet ordre microscopique est à comparer à un ordre cristallin stable (cf. sites octaédriques).



E diminue quand $(Hg_{(aq)}^{2+})$ diminue, ce que provoque la présence complexante de Y^{4-} .

Conclusion

On aura à considérer la R.P. : $\text{HgY}^{2-} + 2\text{e}^- = \text{Hg}_{(l)} + \text{Y}^{4-}$, où le mercure réducteur est plus facile à oxyder et où HgY^{2-} oxydant faible est plus facile à réduire grâce à la présence de Y^{4-} . (HgY^{2-} agit à la place de Hg^{2+}).

$$3. \text{Vu } K_1^0 = \frac{(\text{HgY}^{2-})}{(\text{Hg}^{2+})(\text{Y}^{4-})}, \text{ on a : } (\text{Hg}^{2+}) = \frac{(\text{HgY}^{2-})}{K_1^0 (\text{Y}^{4-})} \Rightarrow$$

$$E = 0,80 - 0,03 \log K_1^0 + 0,03 \log \frac{(\text{HgY}^{2-})}{(\text{Y}^{4-})} = 0,14 + 0,03 \log \frac{(\text{HgY}^{2-})}{(\text{Y}^{4-})}$$

Si (HgY^{2-}) est connu car en quantité constante par exemple $10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$, l'électrode permet de mesurer (Y^{4-}) d'où le nom d'électrode indicatrice.

c. $\text{Hg}^{2+} + \text{Y}^{4-} \rightleftharpoons \text{HgY}^{2-}$ $K_1^0 \gg 1$; on fait le bilan :

état initial	c_1	xc_1	0	états finaux pour :
$x < 1$	$c_1(1-x)$	0	xc_1	
$x = 1$	0	0	c_1	
$x > 1$	0	$c_1(x-1)$	c_1	

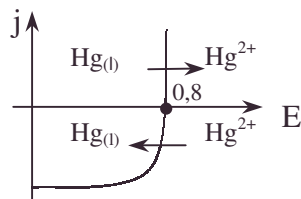
1.α. $x = 0$ Hg^{2+} seule espèce, donc ultra majoritaire ;

β. $x = 0,5$ $(\text{Hg}^{2+}) = (\text{HgY}^{2-})$

γ. $x = 1$ HgY^{2-} espèce ultra majoritaire

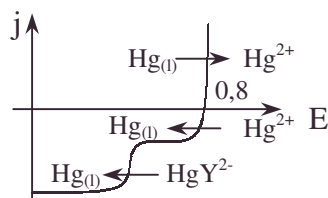
δ. $x > 1$ Hg^{2+} est exclusivement sous forme HgY^{2-} ; il reste Y^{4-} disponible.

2.α. $x = 0$



$$E = 0,8 + 0,03 \log (\text{Hg}^{2+}).$$

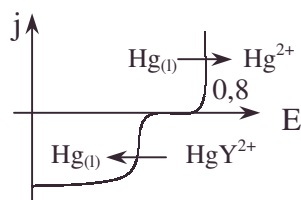
β. $x = 0,5$



- On réduit d'abord (car le plus facilement) HgY^{2-} , puis ensuite Hg^{2+} restant libre.

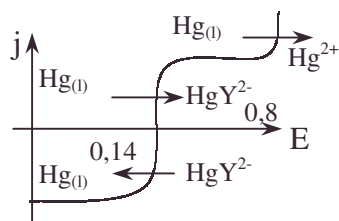
à $x = 0,5$, $(\text{Y}^{4-}) = 0$; Hg s'oxyde en Hg^{2+} sans possibilité d'obtenir HgY^{2-} .

γ. $x = 1$



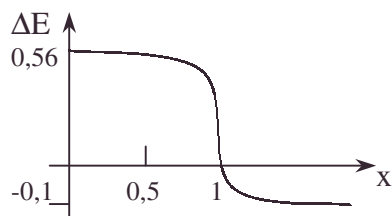
Il n'y a plus de zone de réduction pour Hg^{2+} qui n'existe plus ; $\text{Y}^{4-} = 0$ fait qu'on a l'oxydation. $\text{Hg} \rightarrow \text{Hg}^{2+} + \text{e}^-$ sans possibilité de complexation de Hg^{2+} en HgY^{2-} . On remarquera la conservation du palier entre $0,14 < E < 0,80$.

δ. $x > 1$



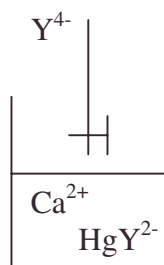
Hg^{2+} est remplacé par HgY^{2-} . Le mercure en présence de Y^{4-} est plus facile à oxyder ; cela se fait plus facilement que l'oxydation $\text{Hg} \rightarrow \text{Hg}^{2+}$ qui se fait à potentiel plus élevé, une fois Y^{4-} totalement consommé par la 1^{ère} phase d'oxydation..

d. $j = 0$;	on lit : $x = 0$	$E = 0,8 \text{ V}$	$\Delta E = 0,56 \text{ V}$
	$x = 0,5$	$E = 0,8 \text{ V}$	$\Delta E = 0,56 \text{ V}$
	$x = 1$	$0,35 < E < 0,6$	Défaut de définition associé à un saut de E (et de ΔE).
	$x > 1$	$E = 0,14 \text{ V}$	$\Delta E = -0,10 \text{ V}$



Le saut de potentiel mesuré est de 0,66 V. Il y a possibilité de titrage complexométrique.

3.a.



Etudions la nouvelle complexation $\text{Ca}^{2+} + \text{Y}^{4-} \rightarrow \text{CaY}^{2-}$ vu $K_2^0 \gg 1$ avec

$K_2^0 = \frac{(\text{CaY}^{2-})}{(\text{Ca}^{2+})(\text{Y}^{4-})}$: la stabilité de ce complexe est moins grande que celle de HgY^{2-} .

RP : $\text{CaY}^{2-} + \text{Hg}^{2+} \rightarrow \text{HgY}^{2-} + \text{Ca}^{2+}$ car $K = \frac{K_1^0}{K_2^0} \gg 1$.

α. Diagramme de prédominance



$pY > 22$ Pas de HgY^{2-} , le couple $\text{Hg}^{2+} / \text{Hg}_{(l)}$ peut être utilisé.

$10 < pY < 22$ Ca^{2+} et HgY^{2-} coexistent sans réagir ; Hg^{2+} est totalement complexé.

$E_{\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}}$ peut être utilisé formellement.

$pY < 10$ CaY^{2-} et HgY^{2-} coexistent passivement ; Ca^{2+} et Hg^{2+} sont totalement complexés.

$E_{\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_{(l)}}$ peut être utilisé formellement.

β. Première conclusion : (Ca^{2+}) n'influence pas l'oxydation de Hg ni la réduction de HgY^{2-} .

γ. Seconde conclusion : la RP : $\text{CaY}^{2-} + \text{Hg}^{2+} \rightarrow \text{HgY}^{2-} + \text{Ca}^{2+}$ est telle que la présence de CaY^{2-} fait encore diminuer le potentiel d'électrode au mercure : Hg est encore plus facilement oxydée et par conséquent son oxydant conjugué HgY^{2-} est encore plus facilement réduit.

δ. On a renforcé par le biais de CaY^{2-} la capacité de Y^{4-} à donner HgY^{2-} , ce n'est donc pas étonnant que l'on ait amplifié le résultat précédemment obtenu en **2.c**.

b. Etat initial $(\text{Ca}^{2+}) = c_0$; $(\text{HgY}^{2-}) = 0,2 c_0$; $(\text{Y}^{4-}) \neq 0$.

• diagramme de prédominance, saut de potentiel

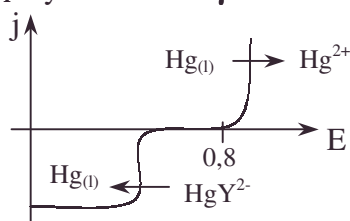
α. Faisons le bilan des espèces prépondérantes, vu l'analyse précédente.

$\text{Ca}^{2+} + \text{Y}^{4-} \rightleftharpoons \text{CaY}^{2-}$				HgY^{2-} (l'apport de Hg^{2+} devant HgY^{2-} est négligeable sauf dans $E_{\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}}$.	
$y = 0$	c_0	yc_0	0	0,2 c_0	
$y = 0,5$	0,5 c_0	0	0,5 c_0	0,2 c_0	
$y = 0,9$	0,1 c_0	0	0,9 c_0	0,2 c_0	
$y = 1$	ε'	ε'	c_0	0,2 c_0	
$y > 1$	0	$c_0(y-1)$	c_0	0,2 c_0	

Ecriture RP du couple redox $\text{HgY}^{2-} + \text{Ca}^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons \text{Hg}_{(l)} + \text{CaY}^{2-}$ tant que $y \leq 1$.

(Remplaçant $\text{Hg}^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons \text{Hg}_{(l)}$).

β₁. $y = 0$ cf. **2.c.γ.**



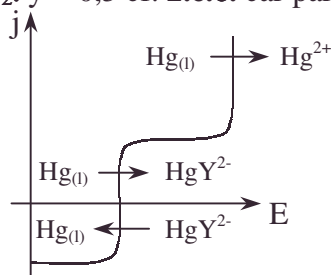
$y = 0 ; \text{Y}^{4-} = 0 ;$

- La partie haute correspond à l'oxydation de Hg en Hg^{2+} non complexable.

- Le palier à $j = 0$ correspond à un système lent correspondant à une attente thermodynamique d'oxydo-réduction en relation avec la complexation stabilisatrice et donc retardatrice de Hg^{2+} . C'est la 1^{ère} vague ici.

- Le palier bas prend en compte $\text{HgY}^{2-} + \text{Ca}^{2+} \rightleftharpoons \text{Hg}_{(l)} + \text{CaY}^{2-}$, équilibre prépondérant déplacé progressivement.

β₂. $y = 0,5$ cf. **2.c.δ.** car par rapport à **2.c.γ.** CaY^{2-} accroît la quantité potentielle de Y^{4-} .



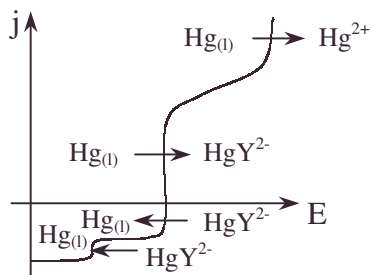
Quand on augmente E, on oxyde Hg d'abord en HgY^{2-} car Y^{2-} a été versé et HgY^{2-} est le complexe le plus stable. Le palier haut correspond à la disparition de HgY^{2-} .

C'est la 1^{ère} vague ici.

Ultérieurement, quand il n'y a plus de Y^{4-} disponible, $\text{Hg}_{(l)} \rightarrow \text{Hg}^{2+} + 2e^-$.

Quand on diminue E, le seul réducteur est Hg vu l'écriture RP.

β₃. $y = 0,9$



- La réserve la plus grande de CaY^{2-} permet d'augmenter le domaine d'existence du domaine $\text{Hg}_{(l)} \rightarrow \text{HgY}^{2-}$.

- La réduction utilise toujours

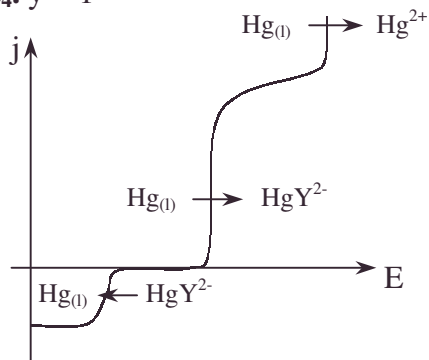


- Mais la faible quantité de Ca^{2+} disponible devant HgY^{2-} à $y = 0,9$ ne permet pas d'effectuer toute la réaction comme précédemment en **β₂**.

- La deuxième phase de E supérieur est donc celle de $\text{HgY}^{2-} + 2e^- \rightleftharpoons \text{Hg}_{(l)} + \text{Y}^{4-}$ comme au **2**.

- Le deuxième palier bas d'attente thermodynamique comporte donc (HgY^{2-}) non nulle (stabilisant et retardateur), caractéristique de cette première vague.

β_4 . $y = 1$

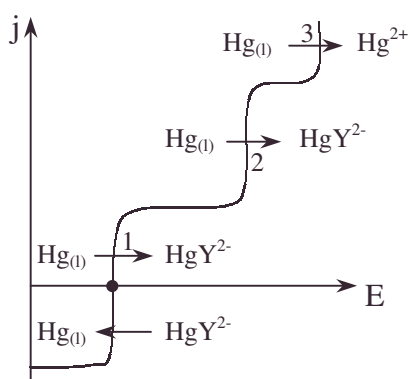


Ca^{2+} n'intervient plus, tout se passe comme pour un système lent ($j = 0$ pour son palier) car toujours complexé.

Le domaine d'existence en j de

$\text{Hg(II)} \rightarrow \text{HgY}^{2-}$ est grand mais toujours limité par l'existence de Y^{4-} disponible de manière finie dans CaY^{2-} .

β_5 . $y > 1$ On retrouve la caractéristique d'un système rapide.



L'oxydation de Hg(II) a 3 phases quand E croît:

1. D'abord :



Elle cesse avec la fin de CaY^{2-} .

2. Puis $\text{Hg(II)} + \text{Y}^{4-} \rightarrow \text{HgY}^{2-} + 2e^-$.

3. Puis $\text{Hg(II)} \rightarrow \text{Hg}^{2+} + 2e^-$, après épuisement des Y^{4-} .

La réduction à $j < 0$ ne peut transformer que HgY^{2-} en Hg(II) .

c. On détecte sur la figure le courant nul : $j = 0$:

$y = 0$: on a une plage pour E correspondant à un saut brusque de E et ΔE à partir de $E = 0,8 \text{ V}$ et $\Delta E = 0,56 \text{ V}$.

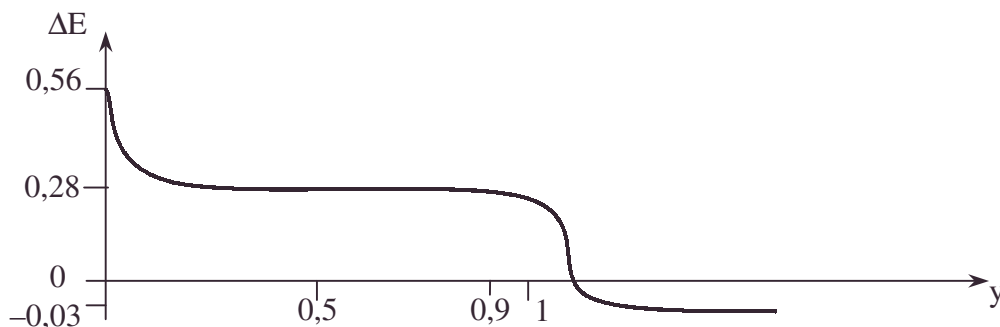
$y = 0,5$: on obtient une valeur qui par rapport à $E = 0,8 \text{ V}$ se trouve par lecture à l'échelle.

approximativement à $E = 0,52 \text{ V} \Rightarrow \Delta E = 0,28 \text{ V}$.

$y = 0,9$: on trouve la même valeur. On a un palier de ΔE .

$y = 1$: on trouve un saut brusque avec E mal déterminé donc pour ΔE de même avec le décalage de $0,24 \text{ V}$ de l'ECS.

$y > 1$: on trouve par lecture à l'échelle approximativement $E = 0,27 \Rightarrow \Delta E = -0,03 \text{ V}$.



L'amplitude du saut de potentiel est donc de $0,3 \text{ V}$.

On conçoit l'utilisation de la polarographie à courant nul pour les dosages complexométriques.

Chapitre 5 : Chimie organique

5.1. Spectroscopies

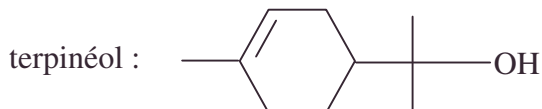
Appartient aux programmes de PC, BCPST2 et TPC1

5.1.1. Spectroscopies IR et RMN du terpinéol

Le terpinéol est une molécule naturelle extraite de l'essence naturelle de pin. Il est utilisé dans l'industrie de la parfumerie pour son agréable odeur de lilas.

On s'intéresse ici à la structure, aux propriétés chimiques et à la synthèse du terpinéol.

I. Etude structurale, spectroscopique et chimique du terpinéol



1. Donner la formule brute du terpinéol.

Etude stéréochimique

2. Représenter en perspective cette molécule sachant que le groupement 2-hydroxypropyle est en position équatoriale.

3. Quel est le seul atome de carbone asymétrique du terpinéol ?

4. Donner la représentation de Cram de la molécule de terpinéol dans sa configuration R (ici, le cycle sera considéré comme plan).

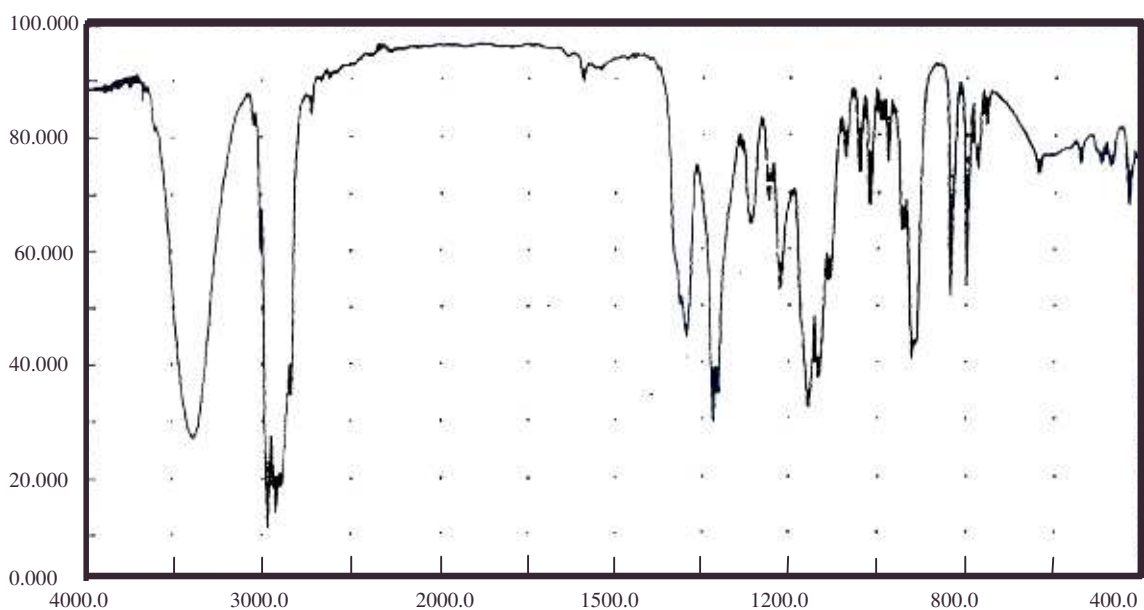
5. L'hydrogénation catalytique du (R)-terpinéol conduit au composé A. A est-il chiral ? Justifier.

6. Montrer que A possède deux diastéréoisomères. Les représenter dans leur conformation la plus stable.

Etudes spectroscopiques IR

Les études qui suivent pourront être menées à l'aide de la table de données figurant en annexe.

7. A l'issue d'une tentative de synthèse du terpinéol, on récupère un produit, chimiquement pur, dont le spectre infrarouge est donné ci-dessous. Montrer que ce spectre est compatible avec la formule du terpinéol.

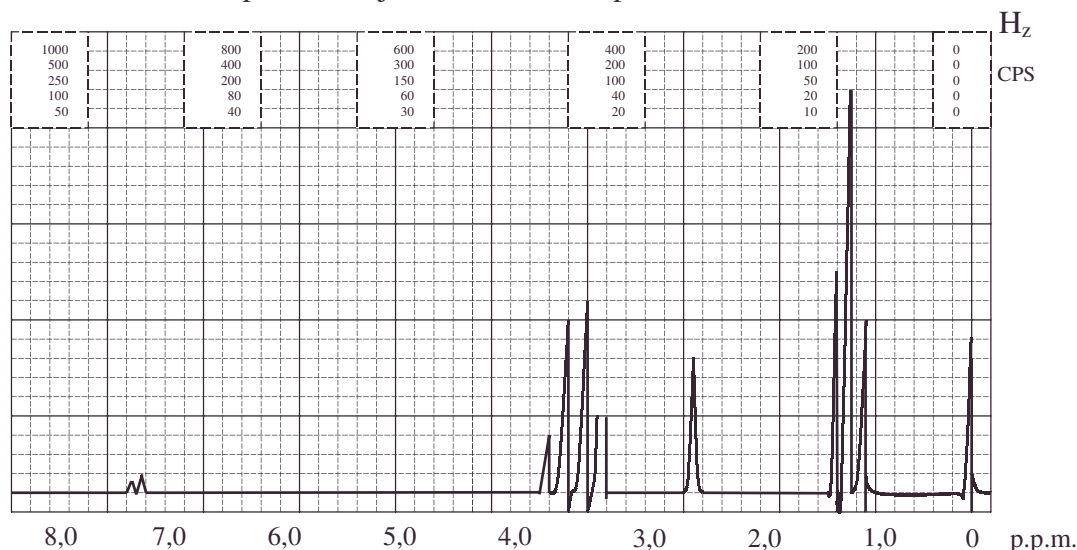


Spectre infrarouge : transmittance (%) en fonction du nombre d'onde (cm^{-1})

Spectroscopie de R.M.N.

• carbone asymétrique, chimie organique, chiralité, conformation, Cram, diastéréoisomérie, hydrogénation catalytique, industrie de la parfumerie, odeur de lilas, parfumerie, position équatoriale, R, spectroscopie IR, stéréochimie, terpinéol

8. Le spectre de R.M.N. de l'éthanol est fourni ci-dessous. Donner la signification des coordonnées (I, δ) du spectre représenté. Interpréter complètement ce spectre en précisant l'attribution des pics, et en justifiant les multiplicités observées.

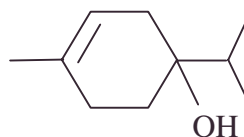


Spectre de R.M.N. de l'éthanol : courbe I (unité arbitraire) - δ (p.p.m.)

9. Le spectre de R.M.N. du terpinéol montre, entre autre, les signaux suivants :
 $\delta = 1,15$ p.p.m. (singulet, 6 H), $\delta = 1,65$ p.p.m. (singulet, 3H), $\delta = 5,4$ p.p.m. (mal résolu, 1H)

Attribuer ces trois signaux aux protons correspondants.

10. A la fin du siècle dernier, la formule (inexacte) suivante a été proposée pour le terpinéol. Quelles différences majeures pourrait-on observer entre le spectre de R.M.N. de cet isomère du terpinéol et celui du terpinéol décrit au 9. ?



Annexe : données spectroscopiques

**Fréquences d'absorption infrarouge
(pour des composés non aromatiques, non conjugués)**

Liaison	Type de composé	Fréquence (cm^{-1})	Intensité
C – H	Alcanes	2850 – 2960	forte
– C – H	Alcènes	3010 – 3100	moyenne
$\equiv\text{C} - \text{H}$	Alcynes	3300	forte
C – C	Alcanes	600 – 1500	faible
C = C	Alcènes	1620 – 1680	forte à très faible
C \equiv C	Alcynes	2100 – 2260	variable
C \equiv N	Nitriles	2200 – 2300	variable
C – O	Alcools, éther-oxydes, acides carboxyliques, esters	1000 – 1300	forte
C = O	Aldéhydes	1720 – 1740	forte
C = O	Cétones	1705 – 1725	forte
C = O	Acides carboxyliques	1700 – 1725	forte
C = O	Esters	1735 – 1750	
O – H	Alcools libres	3590 – 3650	variable, aiguë
O – H	Alcools associés	3200 – 3500	forte, large
O – H	Acides carboxyliques associés	2500 - 3000	variable, large

Déplacements chimiques caractéristiques de RMN

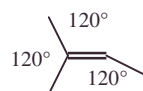
Les atomes d'hydrogène concernés figurent en gras.

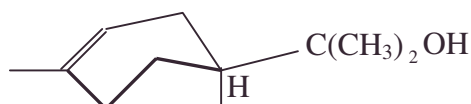
Types d'atomes d'hydrogène	Domaine de déplacement chimique (p.p.m.)
RCH_3 (alkyle primaire)	0,8 – 1,0
R_2CH_2 (alkyle secondaire)	1,2 – 1,4
R_3CH (alkyle tertiaire)	1,4 – 1,7
$\text{R}_3\text{C} = \text{CR}'\text{H}_3$ (H en position allylique)	1,6 – 1,9
RCH_2OH	3,3 – 3,9
RCOCH_3 (cétone)	2,1 – 2,6
RCHO (aldéhyde)	9,5 – 9,6
$\text{R}_2\text{C} = \text{CH}_2$ (alcène terminal)	4,5 – 5,0
$\text{R}_2\text{C} = \text{CHR}'$	5,2 – 5,7
ROH	0,5 – 5,0 (variable)

Mines ; Durée : 1h

Corrigé

I.1. Formule brute $\text{C}_{10}\text{H}_{18}\text{O}$.

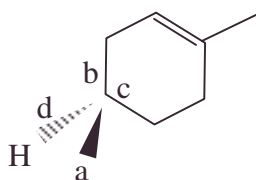
2. Vue perspective : on sait que la partie  est plane et que les autres angles sont de $109^\circ 28'$.



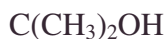
3. Soit C^* le carbone asymétrique (C'est à dire à 4 substituants différents).




4.



Les substituants sont dans l'ordre de priorité $a > b > c > d$.
On a la configuration R.



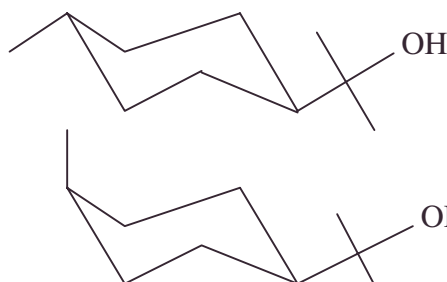
5. A a comme formule  OH achiral car 2 substituants du carbone asymétrique précédemment, sont devenus identiques ;

on conserve le caractère équatorial de $\text{C}(\text{CH}_3)_2\text{OH}$.

6. Diastéréoisomérisation cyclanique : ici formes chaises stables. On a soit :

a. CH_3 en position équatoriale.
2 substituants équatoriaux ; forme la plus stable (forme trans).

b. CH_3 en position axiale
 $\text{C}(\text{CH}_3)_2\text{OH}$ toujours équatorial.



• carbone asymétrique, diastéréoisomérisation cyclanique, forme chaise, ordre de priorité, position axiale, position équatoriale

7. L'absorption IR est :

- | | |
|--|--|
| a. Forte et large à 3400 cm^{-1} | caractérise OH alcool associé cf. alcène |
| b. Très forte à 2900 cm^{-1} | caractérise CH |
| c. Très faible à 1700 cm^{-1} | caractérise C = C |
| d. Accentuée à 1150 cm^{-1} | caractérise C – O |
| e. Variable de 600 à 1450 cm^{-1} | caractérise C – C |

On y trouve une analyse compatible avec le terpinéol pur.

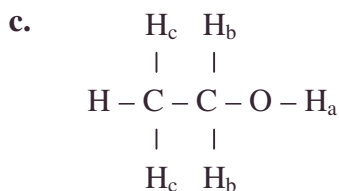
8.a. I est le signal électrique enregistré lors des absorptions des photons permettant une transition de spin nucléaire (de proton, d'un noyau de carbone) entre 2 niveaux d'énergie séparés par $\Delta E = \frac{h\gamma B_0}{2\pi}$ qui par induction crée une variation de flux magnétique.

b. δ s'appelle le déplacement chimique. Il caractérise un écart relatif de fréquence de résonance. L'usage l'exprime en p.p.m. (partie par million) d'où le terme en 10^6 .

$$\delta = \frac{\nu_{\text{pic de résonance}} - \nu_{\text{référence}}}{\nu_{\text{référence}}} \cdot 10^6 \text{ ou encore } \delta = (\sigma_{\text{réf}} - \sigma_{\text{résonance}}) \cdot 10^6 \text{ si on préfère utiliser } \sigma$$

constante d'écran.

On prend comme référence le T.M.S. (tétraméthylsilicium) : $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$ pour lequel $\delta = 0$.



Rappelons la règle des $n + 1$: si un proton H_1 est couplé avec n protons équivalents, portés par un ou plusieurs atomes de carbone immédiatement voisins de celui qui porte le proton H_1 , son signal est un multiplet comportant $(n + 1)$ pics.

Les intensités des pics sont proportionnelles aux coefficients du binôme de Pascal.

α . pic $\delta = 0$; référence T.M.S.

β . pic $\delta = 1, 2$ p.p.m. structure de triplet semble caractériser les protons H_c ayant 2 voisins H_b en α .

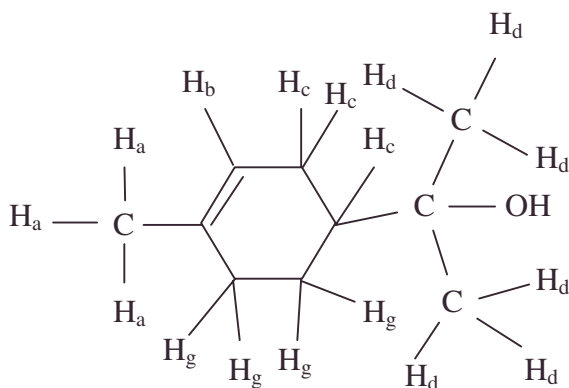
La faible déformation de la structure triplet est due à la proximité du pic suivant.

γ . pic $\delta = 2,6$ p.p.m. structure de singulet dû à H_a ; O bloque apparemment tout couplage.

δ . pic $\delta = 3,7$ p.p.m. structure de quadruplet attribuée à H_b couplé avec 3H_a .

La faible déformation de la structure est due à la proximité du pic précédent.

9.



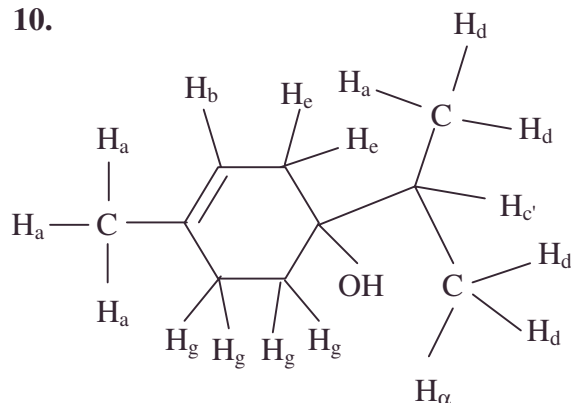
a. Pic $\delta = 1,15$ p.p.m. structure de singulet sans couplage, l'indication 6H fait allusion à la courbe d'intégration caractérisant le nombre d'hydrogènes concernés.

L'absence de couplage apparemment contraire à la règle des $n + 1$ est due à la proximité du pic suivant ($\Delta\delta$ faible).

b. Pic $\delta = 1,65$ p.p.m. structure de singulet sans couplage attribuée aux 3 H_a ; l'absence de couplage est due à la proximité du pic précédent.

c. Pic $\delta = 5,40$ p.p.m. structure mal résolue donc couplage multiple concernant un proton, attribuable à H_b (cf. alcène dans le tableau) (et non à H_c pour lequel la situation plus claire n'est pas conciliable avec la structure mal résolue).

10.



On n'a pas signalé :

- la structure d'heptuplet due à $H_{c'}$ vu le couplage avec $6H_d$;
- la structure de doublet due aux H_d vu le couplage avec $H_{c'}$.

Le spectre R.M.N. plaide pour la structure actuelle mais on n'a pas abordé toutes les subtilités de la R.M.N. dans cette analyse (blindage, effet inductif de O...).

5.1.2. Synthèse historique du terpéneol

Voir page 1779.

5.2. Halogénoalcane

Appartient aux programmes de PCSI (PSI et PC), BCPST1 et TPC1

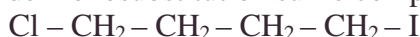
5.2.1. Substitutions nucléophiles

1. A l'aide d'un exemple, expliquer le mécanisme d'une réaction de substitution nucléophile bimoléculaire SN_2 . Définir les termes nucléophile et bimoléculaire et insister sur les conséquences stéréochimiques qui découlent de ce mécanisme.

2. Citer un cas où une réaction SN_2 apparaît cinétiquement du premier ordre.

3. Lors d'une réaction SN_2 , dans quel sens évolue la réactivité du substituant Cl^- , Br^- et I^- ?

4. On réalise une réaction de monosubstitution sur le composé suivant :



Quel est le site qui réagit préférentiellement en présence d'un réactif nucléophile ? Justifier la réponse.

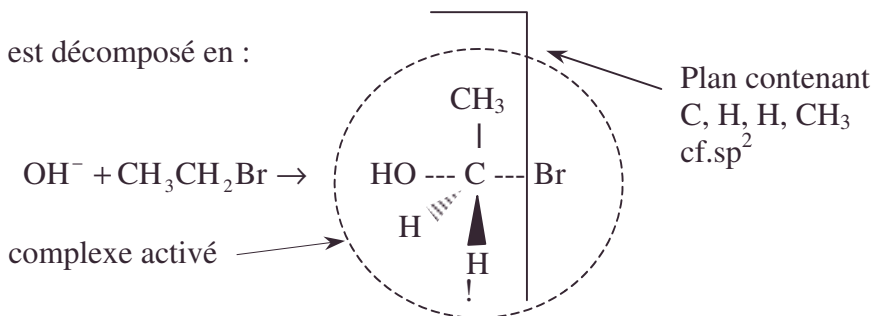
Centrale

Corrigé

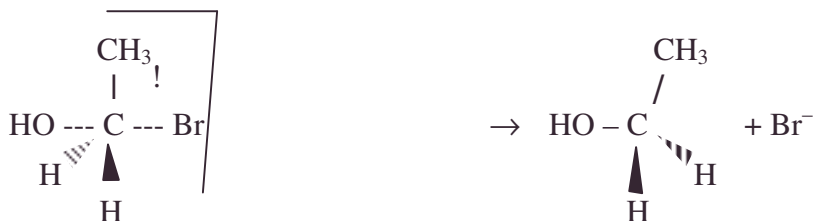
1.A. Soit la réaction bilan $OH^- + CH_3CH_2Br \rightleftharpoons Br^- + CH_3CH_2OH$.

Le mécanisme SN_2 est décomposé en :

a. Etape lente :



b. Etape rapide :



L'étape lente impose sa cinétique : $v = k(OH^-)(CH_3CH_2Br)$, ordre 2 donc.

B.a. Un réactif nucléophile a tendance à créer une liaison en donnant des électrons à une entité qui est plus stable après les avoir reçus ; exemple : OH^- , Cl^- .

b. L'étape lente est bimoléculaire car 2 particules (et 2 seulement) participent au choc (efficacité).

c. L'inversion de Walden entraîne éventuellement la transformation d'un carbone R en S (ou inversement) (Transformation éventuellement suivie par polarimétrie). Il faut naturellement un carbone asymétrique.

2. Il suffit de provoquer une dégénérescence de l'ordre .

Exemple : $H_2O + CH_3CH_2Br \rightarrow CH_3CH_2OH + H^+ + Br^-$;

• bimolécularité, carbone asymétrique, étape lente, halogénoalcane, inversion de Walden, nucléophile, nucléophilie, polarimétrie, SN_2 , substitution nucléophile

$v = k(\text{H}_2\text{O})(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Br})$. Si on opère dans l'eau en excès : $v = K'(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Br})$ avec une constante de vitesse apparente $K' = k(\text{H}_2\text{O})$ car (H_2O) (au sens d'activité) reste constante.

3.a. La réactivité dépend de la polarisabilité, effet cinétique qui l'emporte sur l'électronégativité (soit la polarisation thermodynamique de la liaison CX) si on parle de la réactivité d'un élément substituable ; I est donc plus réactif que Br, qui l'est davantage que Cl.

b. Si on considère le substituant, comme le réactif qui se substitue, sa réactivité dépend de sa nucléophilie, effet cinétique caractérisant sa facilité d'adhésion au carbone central : I^- est plus nucléophile que Br^- qui l'est lui-même davantage que Cl^- .

4. Le carbone porteur de I est le site privilégié (cf. **3.a.**) car le plus chargé + (cf. **3.a.**)

5.2.2. Mécanismes

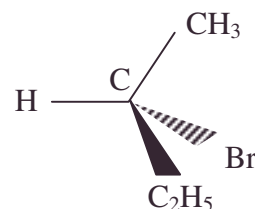
I.a. Soit le composé A : $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CHBr} - \text{CH}_3$.

Nommez-le. Y a-t-il possibilité d'isomérisation dans le composé A ?

b. On considère la représentation suivante du composé A.

A quel énantiomère correspond-elle ?

Justifier votre réponse.



II. On désigne par B l'énantiomère S du composé A.

On traite, à température ambiante, le composé B par une solution aqueuse d'alcool éthylique $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ à 80 % en masse.

L'expérience montre que la réaction suit une cinétique d'ordre 2.

a. De quel type de réaction s'agit-il ? Préciser le mécanisme réactionnel.

b. Identifier le ou les produits de réaction. Que dire de leur stéréochimie ?

III. Le composé B est mis en présence d'une solution d'éthanolate de sodium $\text{C}_2\text{H}_5\text{ONa}$ dans l'alcool éthylique $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$.

Le mélange réactionnel est chauffé modérément.

a. Quel type de réaction favorise-t-on dans ces conditions ? Que devient la vitesse de réaction si la concentration initiale du composé B est doublée ?

b. Donner le mécanisme réactionnel et identifier le produit de réaction C obtenu de façon prépondérante.

IV. On considère le composé D : $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CHI} - \text{CH}_3$. Comparer la réactivité des deux halogénures A et D vis à vis des deux types de réaction mis en évidence dans les questions précédentes. Justifier votre réponse.

Petites mines ; Durée : 1h

Corrigé

I.a.α. 2-bromobutane.

β. Outre les isoméries de chaîne carbonée, de position fonctionnelle il s'agit ici surtout des isomères optiques R ou S (cf. autres questions).

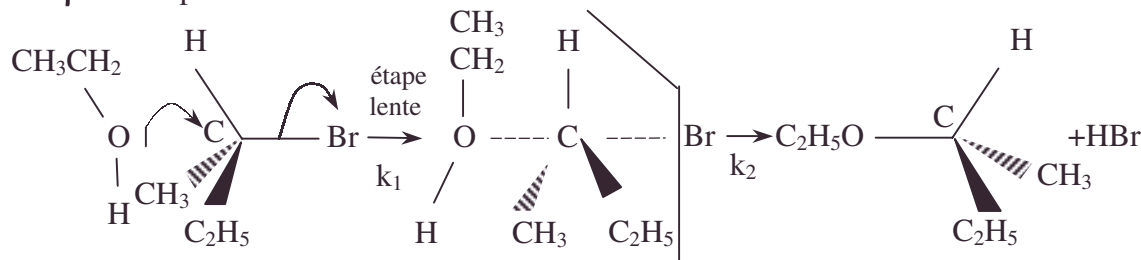
b.α. Il s'agit de l'énantiomère R.

β. Ordre de priorité des substituants : $\text{Br} > \text{C}_2\text{H}_5 > \text{CH}_3 > \text{H}$.

– En regardant (par la droite ici) de sorte que H soit derrière C, on observe Br, C_2H_5 , CH_3 en tournant selon les aiguilles d'une montre : le composé est R.

II.a.α. Il s'agit ici d'une SN2.

β. Exemple de SN2 :



Complexe activé de transition :

Inversion de Walden : on obtient ici un composé R car vu **I.b.** Br est substitué par OC_2H_5 qui ne perturbe pas l'ordre des substituants.

b.α. 2 réactifs nucléophiles H_2O et $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ donneront 2 produits :

- $\text{C}_2\text{H}_5\text{CHOHCH}_3$ butan-2-ol par action de l'eau.
- $\text{C}_2\text{H}_5\text{OCHC}_2\text{H}_5$

| oxyde d'éthyle et de (méthyl) propyle comme décrit en
 CH_3 **II.a.α.** (réaction de Williamson moins vive).

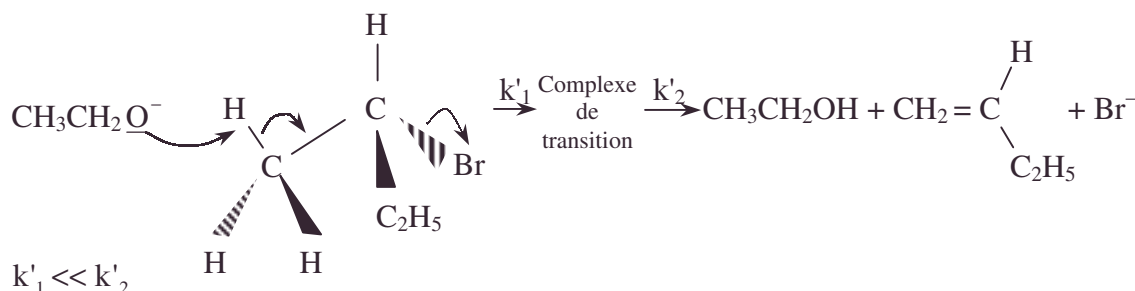
β. On obtient des composés R (cf. **II.a.β.**).

III.a.α. D'une façon analogue à la potasse alcoolique, la solution d'éthanolate de sodium en solution alcoolique favorise E2.

β. E2 est une réaction d'ordre 2 : $v = k_2 (\text{C}_2\text{H}_5\text{O}^-) (\text{R Br})$.

La vitesse est donc doublée si on double la concentration de B sans modifier ($\text{C}_2\text{H}_5\text{O}^-$).

b.α. Mécanisme E2



β. Le produit prépondérant selon la règle de Saitsev (avec contrôle thermodynamique) est le but-2-ène.

IV. RI est plus réactif que RBr car la liaison C – I est plus polarisable.

RI réagit plus rapidement que RBr dans une SN2 ou dans une E2.

5.2.3. Récapitulation

1. Les halogénures d'alkyles sont des agents de synthèse très importants qui n'existent pas à l'état naturel. Préciser la structure de la liaison carbone-halogène ; cette liaison est polaire et cette polarité dépend de la nature de l'halogène, pourquoi ?

La polarisabilité de la liaison carbone-halogène décroît de l'iode au fluor, interpréter ce fait ; que pouvez-vous en déduire quant à la réactivité de ces dérivés halogénés ?

2. Le 2-bromo-3-méthylbutane A présente des stéréoisomères ; à partir de la configuration R, dessiner et préciser la plus stable des conformations possibles.

3. La réaction de l'hydroxyde de sodium sur le dérivé bromé précédent conduit à la substitution de l'atome de brome par le groupe hydroxyle. Ecrire l'équation bilan à partir de A.

- 2-bromo-3-méthylbutane, but-2-ène, butan-2-ol, conformation, contrôle thermodynamique, E2, fluor, inversion de Walden, oxyde d'éthyle et de (méthyl) propyle, potasse alcoolique, R, réactifs nucléophiles, Saitsev, SN2, stéréoisomérisation

Si on admet que cette réaction est d'ordre global deux, déterminer la configuration de l'alcool B, obtenu à partir du dérivé bromé A de configuration R : vous expliquerez le mécanisme de cette réaction et, à l'aide d'un diagramme, son évolution énergétique. On donnera l'état de transition ainsi que le nom du stéréoisomère obtenu.

On fait réagir A du **2.** sur l'hydrogénosulfure HS^- . Quel est le produit obtenu, son nom, sa configuration ?

On fait réagir ce thiol sur l'iode qui augmente d'une unité le D.O. du soufre de la fonction SH du thiol. Ecrire symboliquement la formule du disulfure d'alkyle obtenue. Donner une molécule analogue utile pour l'initiation de substitutions radicalaires.

4. Par chauffage de A en présence d'une base forte, on a élimination d'une molécule d'acide bromhydrique. Nommer tous les produits obtenus. Ces alcènes présentent-ils des configurations différentes ? Quel est l'isomère C le plus stable ?

Peut-on obtenir A par addition d'une molécule d'acide bromhydrique sur C, dans le cas d'une réaction ionique ?

5. L'acide sulfurique à 65 % s'additionne sur C pour former un ester minéral, intermédiaire pour la préparation de l'isoprène. Ecrire la réaction conduisant à cet ester. L'isoprène est un diène substitué conjugué de forme brute C_5H_8 , pouvez-vous prévoir sa formule développée ?

Autres concours ; Durée 1h

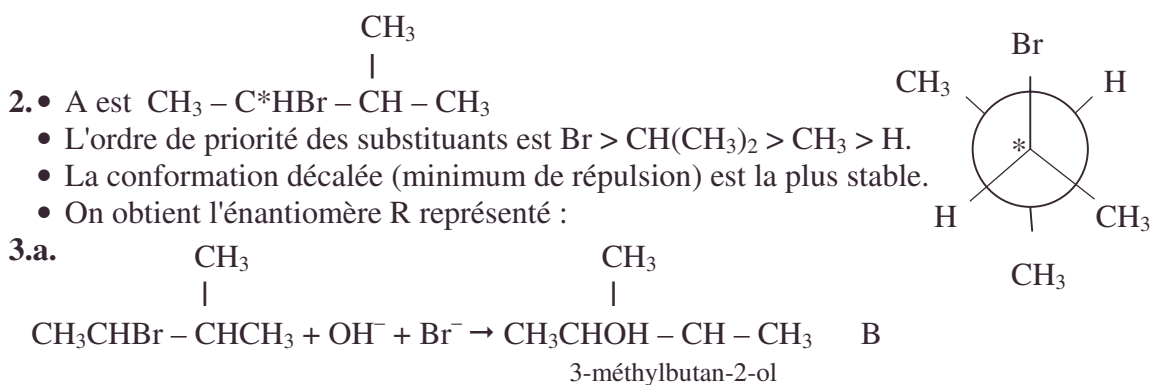
Corrigé

1.a. La liaison CX est une liaison σ (simple) entre un carbone tétraédrique et X.

b. La liaison est polarisée à l'état isolé par la différence d'électronégativité entre C et X ; la polarité dépend de X et augmente de I à F.

c. La polarisabilité augmente au contraire de F à I car le volume de I permet sa déformation sous l'effet d'un champ extérieur et donc la création d'un moment dipolaire induit.

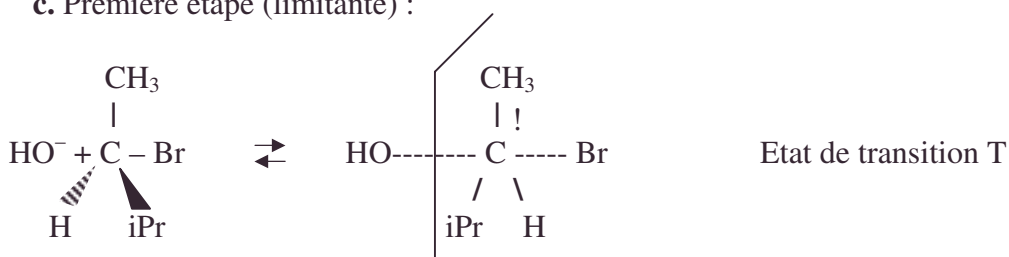
d. La polarisabilité ayant une contribution plus grande au moment dipolaire total que la polarisation naturelle de la molécule isolée, la réactivité de RX augmente de F à I.



b. La cinétique étant d'ordre 2, il s'agit d'une $\text{S}_\text{N}2$ avec inversion de Walden.

L'ordre des priorités étant conservé, on obtient l'énantiomère S du 3-méthylbutan-2-ol.

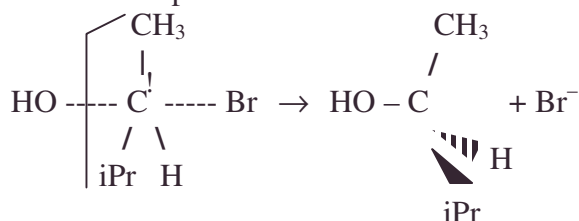
c. Première étape (limitante) :



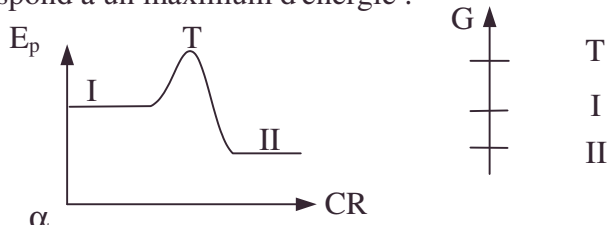
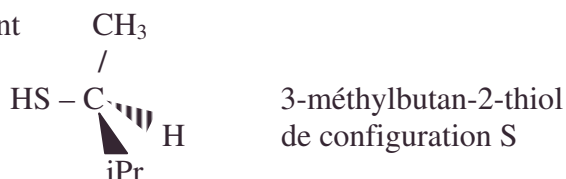
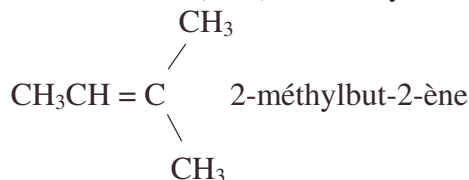
• base forte, bromure de méthyle, conformation décalée, diène conjugué, différence d'électronégativité, disulfure d'alkyle, élimination, énantiomère, isoprène, moment dipolaire induit, thiol, total,

Halogénoalcane

Deuxième étape :



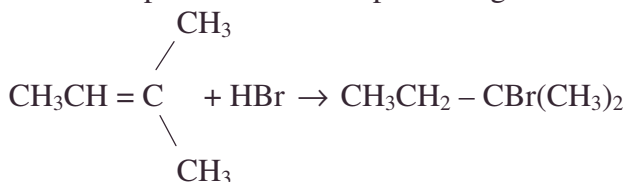
d. L'état de transition T correspond à un maximum d'énergie :

e. Par analogie entre OH^- et SH^- , on obtientg. Le pont disulfure est l'analogue de la liaison peroxyde des peroxydes $\text{R} - \text{O} - \text{O} - \text{R}$ qui permettent l'initiation des substitutions radicalaires.4.a. Le carbone portant Br à 2 carbones voisins portant H, l'élimination de HBr donne soit $\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CH}(\text{CH}_3)_2$ 3-méthylbut-1-ène, soit

b. Quand un carbone d'une liaison double a 2 substituants identiques, on n'a pas de stéréoisomère Z ou E ; il n'y a pas de conformation avec une double liaison.

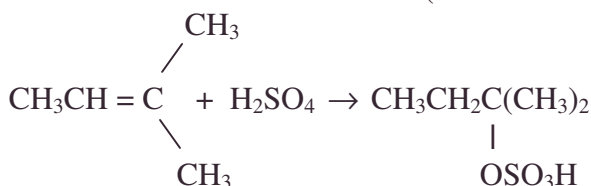
c. L'isomère le plus stable thermodynamiquement est donné par la règle de Saitsev : l'hydrogène est enlevé au carbone qui possède le moins d'hydrogène ; on obtient : le 2-méthylbut-2-ène C.

d. On ne peut obtenir A d'après la règle de Markovnikov qui donne majoritairement :

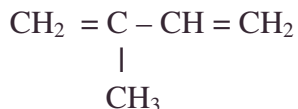


L'élimination de HBr suivie de l'addition de HBr ne redonne pas ici le réactif initial avec un bon rendement.

5.a. On obtient un ester minéral (et non carboxylique).



b. Le diène à doubles liaisons conjuguées (érythrène) issue de cette structure ne peut être que



L'isoprène est le 2-méthylbuta-1,3-diène.

5.2.4. Cinétique des SN

Voir page 1476.

5.2.5. Stéréochimie dynamique d'un dérivé chloré de cycloalcane

Voir page 1705.

5.2.6. Mécanismes de SN

Voir page 1708.

5.2.7. Préparation et dosage d'un organomagnésien

Voir page 1714.

5.2.8. Agent de synthèse organomagnésien

Voir page 1715.

5.2.9. Obtention d'alcènes par déshydrohalogénéation

Voir page 1722.

5.2.10. Le menthol

Voir page 1734.

5.2.11. Synthèse de Williamson d'un éther couronne

Voir page 1738.

5.2.12. Obtention industrielle du MTBE, antidétonant non polluant

Voir page 1741.

5.2.13. Mécanismes et stéréochimie (fonction carbonyle)

Voir page 1758.

5.2.14. Synthèse d'un parfum (fonction carbonyle)

Voir page 1762.

5.2.14. Synthèse historique du terpéneol

Voir page 1779.

5.2.15. Survol 1

Voir page 1795.

5.2.16. Survol 3

Voir page 1798.

5.2.17. Survol 4

Voir page 1799.

5.2.18. Survol 5

Voir page 1802.

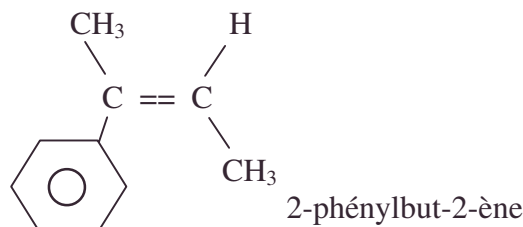
- 2-méthylbut-2-ène, érythrène

5.3. Stéréochimie

Appartient au programme de PCSI (PSI et PC), BCPST et TPC1

5.3.1. Addition de Br₂ sur un alcène

On traite le composé organique suivant :



par du dibrome en milieu solvant.

- Préciser si le composé organique ci-dessus est l'isomère Z ou E.
- Donner le mécanisme de cette réaction.
- Le produit obtenu est-il optiquement actif ? Justifier en donnant éventuellement la configuration des (ou du) composé(s) formé(s).
- Donner tous les stéréoisomères du produit de la réaction en précisant les types d'isomérisation.

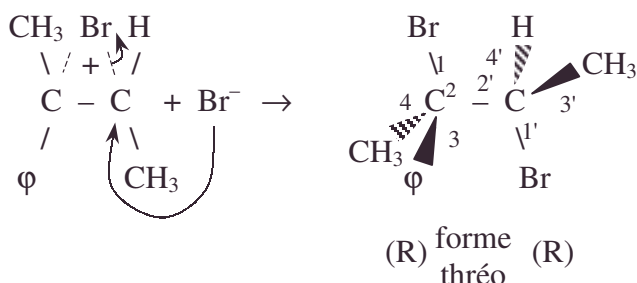
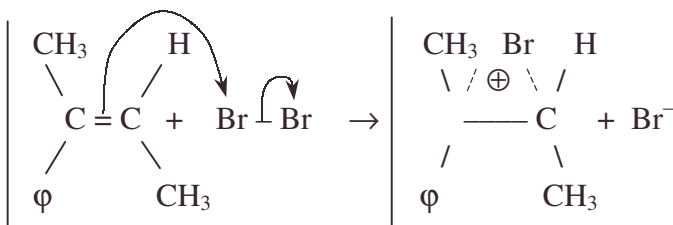
AIR ; Durée : 1h

Corrigé

a. Les 2 composés définis comme prioritaires pour les 2 carbones (C₆H₅ d'une part, CH₃ d'autre part) sont du même côté de l'axe C = C ; le composé est Z.

b. A priori plusieurs variantes sont envisageables. Adoptons le mécanisme avec un ion bromonium ponté sans complexe σ.

On remplacera C₆H₅ par φ.

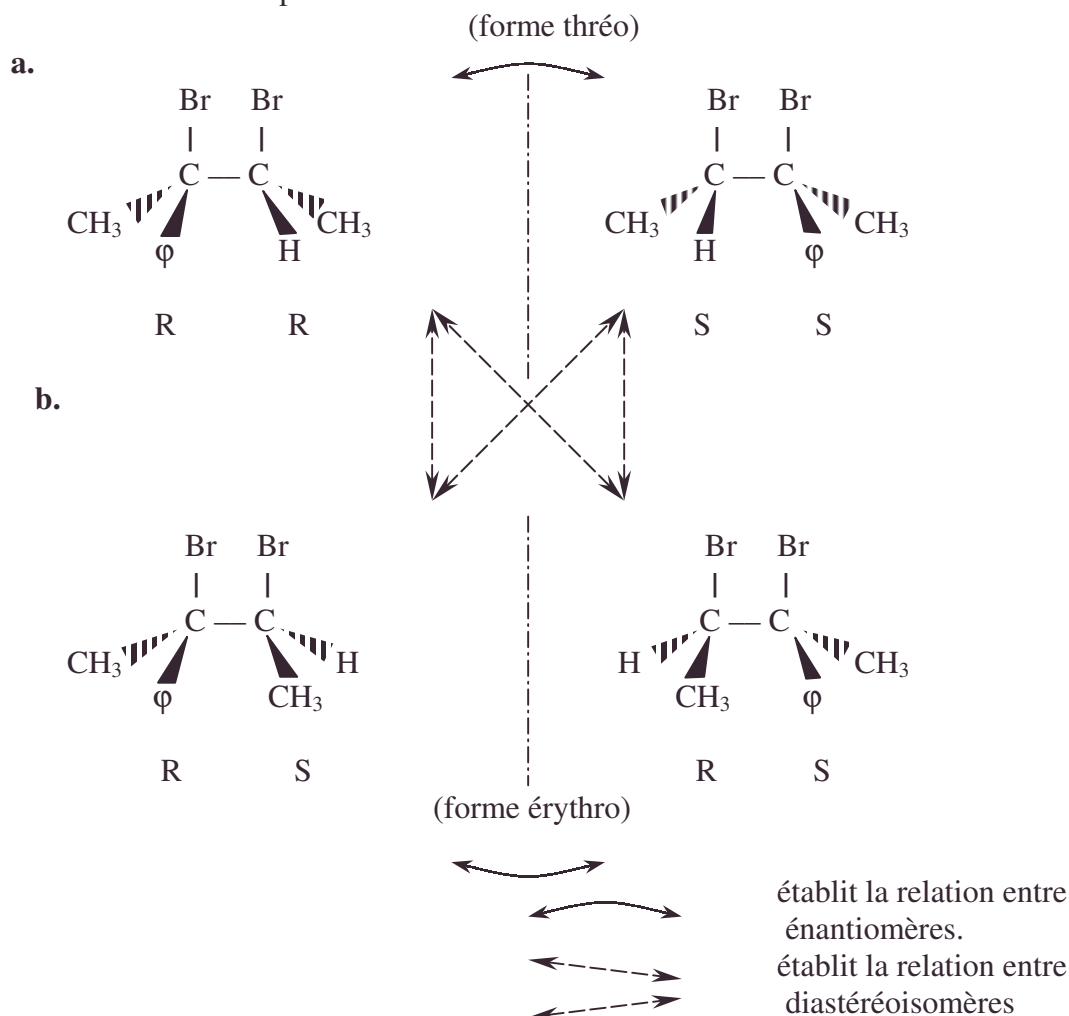


Vu l'encombrement supérieur de φ comparé à CH₃, la deuxième forme (S,S) thréo est obtenue en changeant la première face d'attaque du plan de la molécule de 2-phénylbut-2-ène.

c. La réaction stéréospécifique va donner un racémique des 2 énantiomères, qui n'a pas d'activité optique.

- 2-phénylbut-2-ène, addition, alcène, E, forme thréo, solvant, stéréochimie, stéréoisomère E, stéréoisomère Z, stéréoisomérisation, Z

4. Les 4 stéréoisomères obtenus dans la réaction se divisent en 2 classes de diastéréoisomères comportant chacune 2 énantiomères :



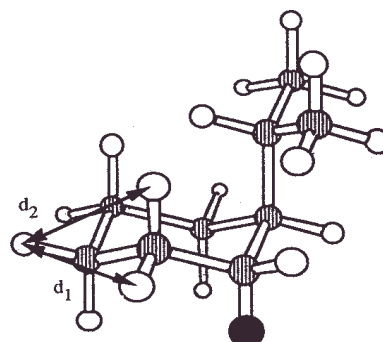
5.3.2. Stéréochimie dynamique d'un dérivé chloré de cycloalcane

1. E₂ : rappeler la signification de E et 2 dans le sigle E₂ ; chaque définition sera accompagnée d'un exemple.

2. On s'intéresse au 1-chloro-2-isopropylcyclohexane dont on donne une représentation dans l'espace ci-contre. le groupe isopropyle sera symbolisé par iPr dans la suite du problème. Dans la représentation utilisée, l'atome de chlore est noir.

a. L'atome de chlore est-il en position axiale ou équatoriale ? Représenter l'autre forme chaise.

b. Comparer les distances d₁ et d₂. Pour justifier la réponse, on pourra utiliser la représentation de Newman.



• 1-chloro-2-isopropylcyclohexane, activité optique, cycloalcane, diastéréoisomère, énantiomère, forme chaise, forme érythro, forme thréo, position axiale, position équatoriale, représentation de Newman

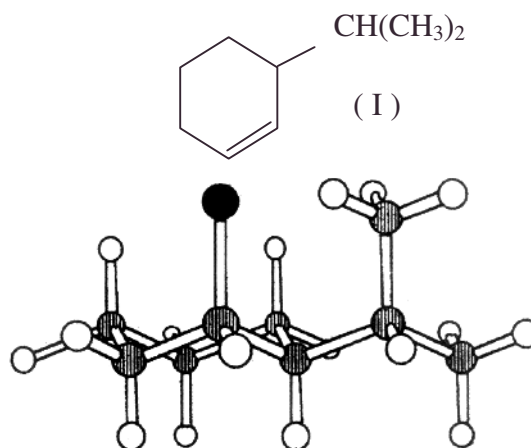
c. Rappeler la règle de Saitsev.

Quel produit prépondérant prévoit-on par l'application de cette règle lors de l'attaque du 1-chloro-2-isopropylcyclohexane par une base forte suivant un mécanisme E_2 ?

d. L'expérience montre que, dans les conditions d'une E_2 , on obtient essentiellement le produit (I) ; expliquer pourquoi.

e. Si on réalise l'action d'une base forte dans les mêmes conditions qu'en d. sur le produit ci-contre, on obtient alors un isomère de (I) ; quel est cet isomère ? Expliquer sa formation.

f. En vous aidant éventuellement de la question 2.d. retrouver quel est le stéréoisomère du 1,2,3,4,3,5,6-hexachlorocyclohexane qui ne subit pas d'élimination E_2 .



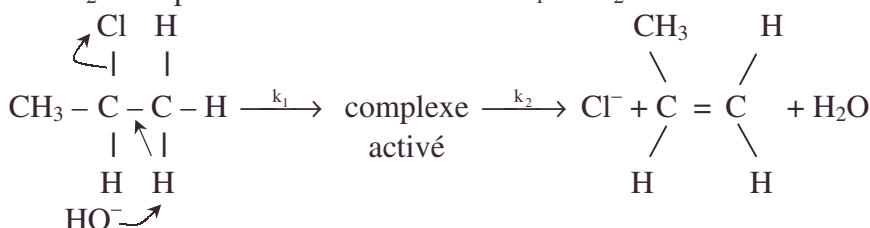
Centrale

Corrigé

1.a. E correspond à l'élimination (expulsion) d'un sous-ensemble stable.

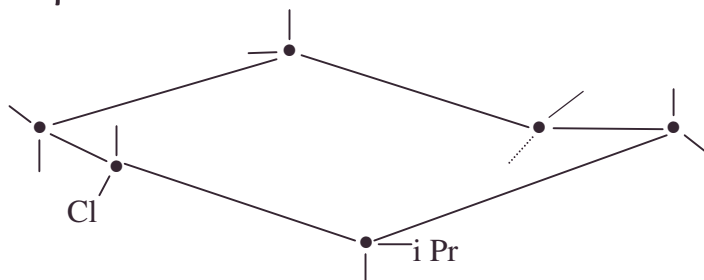
Exemple : $\text{CH}_3\text{CHClCH}_3 + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{CH}_3\text{CH}=\text{CH}_2 + \text{Cl}^-$. Tout se passe comme si HCl avait été extrait car $\text{HCl} + \text{OH}^- \rightarrow \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$.

b. E_2 : l'étape lente est bimoléculaire $k_1 \ll k_2$.



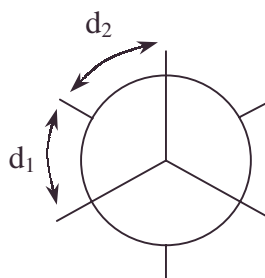
2.a. α . Ici la position de Cl est axiale (cf. axe de la Terre / équateur).

β .



Forme chaise
Cl est alors équatorial.

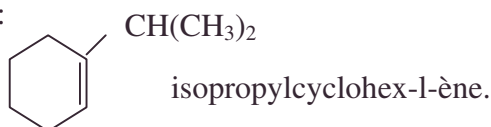
b. L'axe de bout étant formé de 2 carbones portant les hydrogènes concernés. La conformation décalée stable entraîne $d_1 = d_2$.



c. α . Le carbone le plus pauvre en hydrogène (soit le plus substitué) voisin du carbone portant Cl, perd l'hydrogène (régiosélectivité).

• 1,2,3,4,5,6-hexachlorocyclohexane, 1-chloro-2-isopropylcyclohexane, base forte, bimolécularité, conformation décalée stable, E_2 , élimination, étape lente, forme chaise, position axiale

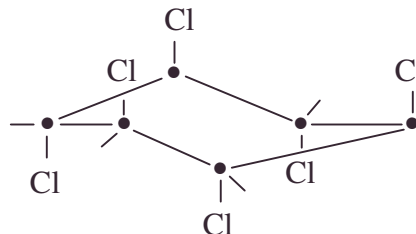
β. On prévoit donc :



d. L'élimination antiparallèle de Cl et de H ne peut se faire car Cl et H (selon Saitsev) sont du "même" côté de l'axe CC ;

e. L'élimination antiparallèle de Cl et de H typique de E2 peut se faire car Cl et H (selon Saitsev) sont de part et d'autre de l'axe CC.

f. Pour que l'élimination E₂ soit impossible, il suffit que tous les chlores soient axiaux et les hydrogènes équatoriaux.

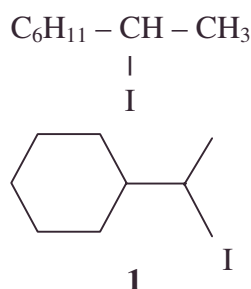


5.3.3. Mécanismes de S.N.

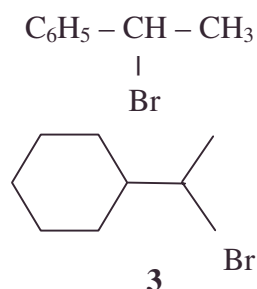
Première partie

On considère les composés :

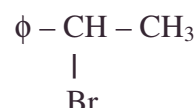
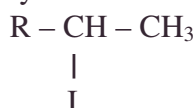
1-cyclohexyl-1-iodoéthane



1-bromo-1-phényléthane



que l'on symbolisera respectivement :



Numéros atomiques : I : Z = 53 ; Br : Z = 35.

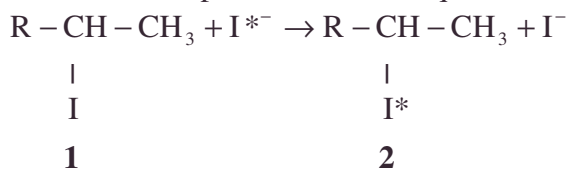
Remarque : la numérotation des composés suit un ordre logique sur l'ensemble des trois parties ; le composé **2** sera considéré dans le deuxième problème.

Représenter, pour les composés **1** et **3**, l'énantiomère de configuration absolue R en projection de Cram.

On adoptera impérativement, pour le centre asymétrique, le graphique suivant :

Deuxième partie

La cinétique de la substitution nucléophile suivante, d'équation :



a été étudiée, à partir de l'énantiomère de configuration R du composé **1**, symbolisé **1R**.

• 1-bromo-1-phényléthane, 1-cyclohexyl-1-iodoéthane, E2, élimination antiparallèle, isopropylcyclohex-1-ène, régiosélectivité, Saitsev

I* représente un isotope radioactif de l'iode.

La réaction est suivie en mesurant le taux d'incorporation de l'iode radioactif dans le produit. En présence d'un large excès d'ion iodure I*⁻ radioactif, la réaction inverse **2**→**1** peut être négligée.

1. Dans le tableau ci-dessous sont donnés les temps de demi réaction pour différentes conditions initiales :

Concentrations initiales (mole.l ⁻¹)		Temps de demi-réaction (minutes)
1R	I* ⁻	
0,010	0,50	862
0,010	1,00	430
0,010	1,50	290

Déduire de ces données l'ordre de la réaction, et calculer la constante de vitesse k₁.
Ecrire le mécanisme de la réaction ; quelle est la configuration absolue du composé **2** obtenu ?

2. Une solution de composé **1R** de concentration a mol.l⁻¹ a un pouvoir rotatoire α.

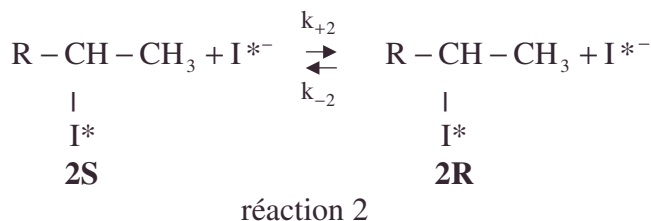
On admettra que le pouvoir rotatoire est proportionnel à la concentration : α = A.a.

Quel sera le pouvoir rotatoire α' d'une solution contenant un mélange de composé **1R** à la concentration a.(1-x) mol.l⁻¹, et de son énantiomère, symbolisé **1S**, à la concentration ax mol.l⁻¹ ?

On rappelle que deux énantiomères ont, à concentration égale, des pouvoirs rotatoires égaux en valeur absolue et de signes opposés, et que cette propriété est additive.

3. Les composés **1** et **2** de même configuration absolue ont des propriétés chimiques identiques, et le même pouvoir rotatoire.

La réaction 1 ci-dessus est accompagnée de la réaction 2 suivante :



où **2R** et **2S** sont les deux énantiomères du composé **2**.

On admettra qu'en présence d'un large excès d'ion iodure radioactif I* les réactions 1 et 2 sont les seules réactions se produisant dans le milieu.

Comme les composés **1** et **2** ont des propriétés chimiques identiques, les constantes de vitesse k₊₂ et k₋₂ sont égales à la constante k₁ de la réaction 1.

– Calculer la constante d'équilibre de la réaction 2.

– En tenant compte des réactions 1 et 2, exprimer la vitesse d'apparition du composé **2S** en fonction de k₁ et des concentrations (**1R**), (**2R**) et (**2S**). On mettra cette expression sous la forme : d(**2S**) / dt = ...

Que peut-on dire des concentrations (**2R**) et (**2S**) au bout d'un temps suffisamment grand pour être considéré comme infini ? Quel est alors le pouvoir rotatoire de la solution ?

4.a. Pour un temps t très court, la réaction équilibrée 2 peut être négligée. Si α est le pouvoir rotatoire de la solution initiale de composé **1R** de concentration (**1R**)₀, quel est le pouvoir rotatoire α_t au bout du temps t, quand une fraction y [y << 1] de composé **1R** a réagi (y = nombre de moles de **1R** transformées / nombre de moles initiales) ?

En comparant ce résultat à celui de la question 2., montrer que la réaction est équivalente à une "racémisation apparente".

• configuration absolue, configuration R, constante de vitesse, Cram, énantiomère, isotope radioactif, loi de Biot, ordre de la réaction, pouvoir rotatoire, R, substitution nucléophile, tableau, temps de demi réaction

b. On nommera vitesse d'échange $v_{\text{éch}}$ la vitesse initiale de la réaction 1 :

$$v_{\text{éch}} = \frac{d(1R)}{dt}. \text{ Exprimer } v_{\text{éch}} \text{ en fonction de } k_1, y \text{ et } (y \ll 1).$$

Exprimer la vitesse de variation du pouvoir rotatoire v_α ($v_\alpha = d\alpha / dt$) en fonction de A (constante de proportionnalité exprimée en 2.), de y et t pour $y \ll 1$.

On nommera vitesse de racémisation apparente v_{rac} le rapport v_α / A .

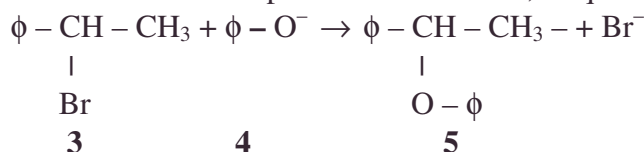
Que pouvez-vous dire de v_{rac} par rapport à $v_{\text{éch}}$?

Ce résultat vous semble-t-il logique ? (Justifier votre réponse).

On rappelle que quel que soit l'isotope mis en jeu la cinétique d'une réaction reste identique.

Troisième partie

La cinétique de la substitution nucléophile de Williamson, d'équation :



a été étudiée, à partir de l'énantiomère de configuration R du composé **3**.

Le nucléophile est l'ion phénate, **4** : $\text{C}_6\text{H}_5 - \text{O}^-$, symbolisé par $\phi - \text{O}^-$.

L'étude cinétique montre que le temps de demi réaction est indépendant des concentrations initiales, et que l'ordre par rapport à l'ion phénate est nul.

- Proposer et écrire un mécanisme, de réaction compatible avec ces observations.
- L'étude cinétique réalisée dans les conditions initiales suivantes :

- solvant polaire
- concentration initiale de **3** : $0,100 \text{ mol.l}^{-1}$
- concentration initiale de **4** : $0,200 \text{ mol.l}^{-1}$

a donné les résultats suivants :

temps (minutes)	concentration de 3 (mol.l^{-1})
0	0,100
33	0,080
100	0,050
140	0,040
240	0,020

Calculer la constante de vitesse.

3. Sachant que le pouvoir rotatoire de la solution initiale $\alpha = + 17^\circ$, quelle est la valeur du pouvoir rotatoire au bout de 100 minutes ?

Quel sera le pouvoir rotatoire final quand **3** aura totalement réagi ?

On admettra la loi de Biot : le pouvoir rotatoire est proportionnel à la concentration du (des) composé(s) optiquement actif(s).

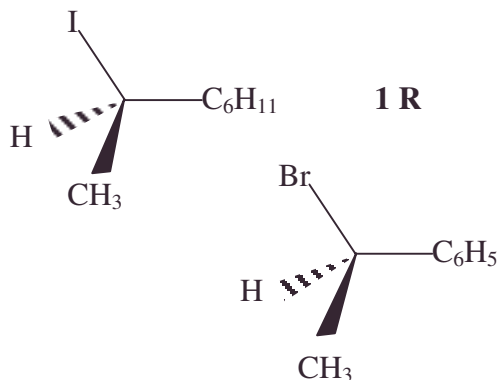
CCP ; Durée : 1h30

Corrigé

I.1. Classement des priorités des substituants

Pour **1** : $I > C_6H_{11} > CH_3 > H$

Pour **3** : $Br > C_6H_5 > CH_3 > H$



II.1.a. I^* est en excès : $(I^{*-}) \# (I^{*-})_0$

Que la réaction soit $SN1$ ou $SN2$, l'ordre partiel en RX est 1.

$$v = -\frac{d(1R)}{dt} = +k'(1R) \text{ avec } k' \text{ constante apparente telle que : } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k'}.$$

Vérifions que $k' = k_1 (I^{*-})$.

$$\frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}} \# \frac{(I^{*-})_2}{(I^{*-})_1} \text{ (cf. 2,005 \# 2)} ; \frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}} \# \frac{(I^{*-})_3}{(I^{*-})_1} \text{ (cf. 2,97 \# 3)}.$$

L'ordre partiel en I^* est 1.

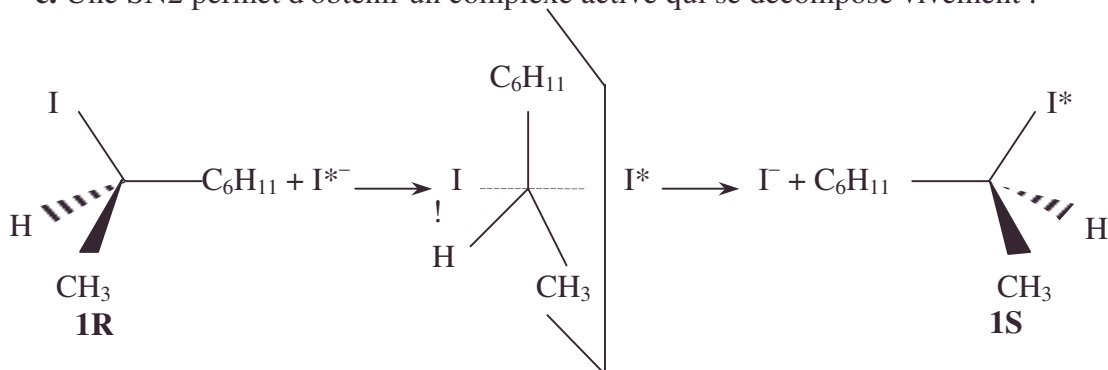
L'ordre global est donc 2 et on a un mécanisme $SN2$.

$$b. k_1 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}(I^{*-})} ;$$

AN : $k_1 = 1,60.10^{-3} \text{ min}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$, vu les 3 valeurs calculables :

$$1,60.10^{-3} ; 1,61.10^{-3} ; 1,59.10^{-3}.$$

c. Une $SN2$ permet d'obtenir un complexe activé qui se décompose vivement :



vu l'inversion de Walden et la conservation des priorités.

Le composé **2** est **1S** comme on le vérifie.

2. Vu la loi d'additivité (approximation linéaire) : $\alpha = Aa(1-x) - Aax = Aa(1-2x)$.

3.a. $v_2 = k_{+2}(I^{*-})(2S) - k_{-2}(I^{*-})(2R) = 0$ à l'équilibre.

$$\Rightarrow k = \frac{(I^{*-})(2R)}{(I^{*-})(2S)} = \frac{k_{+2}}{k_{-2}} ; \text{AN : } k = 1.$$

$$b. v_{app} = +\frac{d(2S)}{dt} = [k_1(I^{*-})(1R) + k_{-2}(I^{*-})(2R) - k_{+2}(I^{*-})(2S)].$$

$$v_{app} = k_1(I^{*-})[(1R) + (2R) - (2S)].$$

La conservation des carbones donne $a = (1R) + (2S) + (2R)$.

$$\frac{d(2S)}{dt} = -k_1(I^{*-})[a - 2(2S)].$$

• additivité des propriétés, complexe activé, inversion de Walden, ordre de priorité, ordre partiel, pouvoir rotatoire, $SN2$

c. $t \rightarrow \infty$; $(1R) \rightarrow 0$; $(2R) = (2S) = \frac{a}{2}$; $\alpha' = 0$

4.a.b. Posons $k'' = k_1(1R)_0(I^{*-})$.

$$V_{\text{éch}} = -k_1(I^{*-})(1R) = -(1R)_0 k_1(I^{*-})(1-y) = -\frac{d((1R)_0 y)}{dt}.$$

$$\frac{dy}{1-y} = k''t \Rightarrow y = 1 - e^{-k''t} (\# k''t) \Rightarrow v_{\text{éch}} = -(1R)_0 k_1(I^{*-})e^{-k_1(I^{*-})(1R)_0 t}.$$

Vu 2., $\alpha_t = \alpha(1-2y) \# \alpha(1-2k''t)$ au début.

Pour $y < \frac{1}{2}$, c'est une racémisation apparente :

$$\alpha_t \rightarrow 0 \quad (y > \frac{1}{2} : \alpha_t < 0 : \text{l'inversion l'emporterait}).$$

$$\alpha_t = A\alpha(1-2y) ;$$

$$v_{\alpha} = \frac{d\alpha_t}{dt} = -2A\alpha \frac{dy}{dt} = -2A(1R)_0 k_1(I^{*-})(1-y) = -2k_1 A (1R)_0 (I^{*-})e^{-k_1(I^{*-})(1R)_0 t}.$$

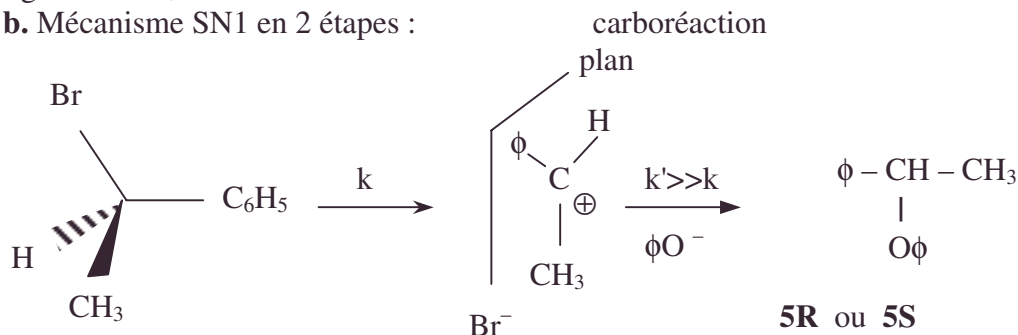
$$v_{\text{rac}} = -2k_1(1R)_0(I^{*-})(1-y) \Rightarrow v_{\text{rac}} = 2v_{\text{éch}}.$$

C'est logique car l'inversion d'effet rotatoire double l'effet de disparition chimique, vu 2.

III.1.a. $T_{1/2}$ est constant \Rightarrow 1er ordre (cf. $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1}$), or l'ordre partiel de ϕO^- est nul ;

l'ordre global est 1, on a une $SN1$.

b. Mécanisme $SN1$ en 2 étapes :



$$\Rightarrow v = k(3R)$$

ϕO^- attaque soit à droite, soit à gauche du plan.

$$2. v = -\frac{d(3R)}{dt} = k(3R) \Rightarrow (3R) = (3R)_0 e^{-kt}.$$

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{(3R)_0}{(3R)}.$$

t	33	100	140	240
k.10 ³ min ⁻¹	6,76	6,93	6,54	7,71

$$\Rightarrow k = 7.10^{-3} \text{ min}^{-1}.$$

3.a. Le pouvoir rotatoire ne provient que du composé initial (vu le racémique des produits) :

$$\alpha_t = A(3R) ; \alpha_0 = A(3R)_0 ; AN : \alpha_0 = 17^\circ.$$

$$\alpha_{100} = \alpha_0 \frac{(3R)_{100}}{(3R)_0} ; AN : \alpha_{100} = 8,5^\circ ;$$

b. $\alpha_{\infty} = 0$

• carbocation, ordre partiel, racémisation, racémisation apparente, $SN1$

5.3.4. Obtention d'alcènes par déshydrohalogénéation

Voir page 1722.

5.3.5. Le menthol

Voir page 1734.

5.3.6. Synthèse de Williamson d'un éther-couronne

Voir page 1738.

5.3.7. Élément azote en chimie organique

Voir page 1748.

5.3.8. Premiers mécanismes de la fonction carbonyle

Voir page 1756.

5.3.9. Mécanismes et stéréochimie

Voir page 1758.

5.2.10. Synthèse d'un parfum

Voir page 1762.

5.2.11. Estérification des acides bicarboxyliques et chiralité

Voir page 1771.

5.2.12. Survol 2

Voir page 1796.

5.2.13. Survol 4

Voir page 1799.

5.2.14. Survol 5

Voir page 1803.

5.4. Organomagnésiens et organométalliques

appartient au programme de PCSI (PC), BCPST2, TPC1

5.4.1. Préparation et dosage des organomagnésiens

1. Comment prépare-t-on un dérivé organomagnésien à partir d'un dérivé monohalogéné d'un alcane ? Vous indiquerez et justifierez de manière détaillée les conditions expérimentales sur un exemple de votre choix.

2. Dosage : on verse progressivement 50 cm³ de solution étherée contenant exactement 10,9 grammes de bromoéthane sur 2,4 grammes de magnésium en copeaux placés dans un ballon, réacteur dans lequel on avait déjà introduit 10 cm³ d'éther anhydre ; on attend environ 1 heure afin de parfaire la réaction. En vue de doser l'organomagnésien obtenu, on prélève 1 cm³ de la solution réactionnelle que l'on verse aussitôt dans un bécher contenant 10 cm³ d'une solution à 0,200 mol.l⁻¹ d'iode dans le benzène. L'iode en excès est dosé par une solution aqueuse à 0,100 mol.l⁻¹ de thiosulfate de sodium ; pour parvenir à décolorer complètement la solution benzénique d'iode, il faut verser 15 cm³ de la solution de thiosulfate de sodium.

a. Ecrire l'équation de réaction du bromure d'éthylmagnésium sur l'iode.

b. Pourquoi utilise-t-on une solution benzénique d'iode et non une solution aqueuse d'iode ?

c. Ecrire l'équation de réaction de l'iode sur les ions thiosulfate (S₂O₃²⁻) sachant que ceux-ci sont transformés en ion tétrathionate S₄O₆²⁻.

d. Calculer le rendement de la préparation en organomagnésien obtenu.

Données des masses molaires en g.mol⁻¹ :

H	C	Mg	Br
1	12	24	80

3. Préciser les conditions expérimentales et les produits obtenus par réaction entre le bromure d'éthylmagnésium et le butanal : on indiquera un schéma illustrant le mécanisme réactionnel de cette transformation.

Centrale

Corrigé

1. CH₃CH₂Br + Mg → CH₃CH₂MgBr.

- On opère dans un tricol muni de son ampoule à brome (pour verser les liquides), d'un agitateur et de son ampoule à desséchant (CaCl₂ anhydre).

- On utilise un solvant anhydre : C₂H₅OC₂H₅ et Mg en copeaux.

- On évitera le contact avec CO₂, O₂, H₂O.

- On verse lentement ensuite CH₃CH₂Br en présence d'un thermostat eau, glace.

- On peut utiliser un catalyseur pour un démarrage plus rapide : dibromoéthane par exemple.

2.a. CH₃CH₂MgBr + I₂ → CH₃CH₂I + MgBrI.

b. On n'utilise pas de solution aqueuse qui réagit avec CH₃CH₂MgBr :

CH₃CH₂MgBr + H₂O → CH₃CH₃ + MgBrOH. De plus, I₂ est peu soluble dans l'eau et beaucoup plus dans le benzène.

c.α. I₂ + 2e⁻ ⇌ 2I⁻.

β. 2S₂O₃²⁻ ⇌ S₄O₆²⁻ + 2e⁻, d'où en additionnant :

γ. 2S₂O₃²⁻ + I₂ → S₄O₆²⁻ + 2I⁻.

• ampoule à brome, bromoéthane, bromure d'éthylmagnésium, butanal, catalyse, dosage, éther anhydre, organomagnésien, réacteur, rendement, solution aqueuse, solution benzénique d'iode, solution réactionnelle, tétrathionate, tricol

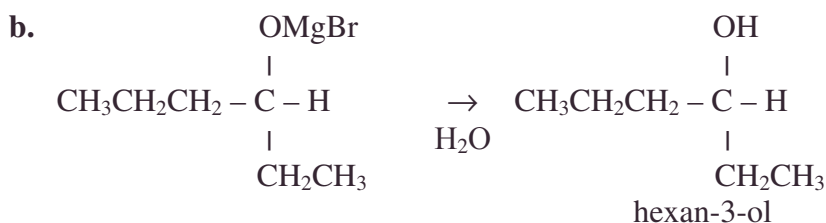
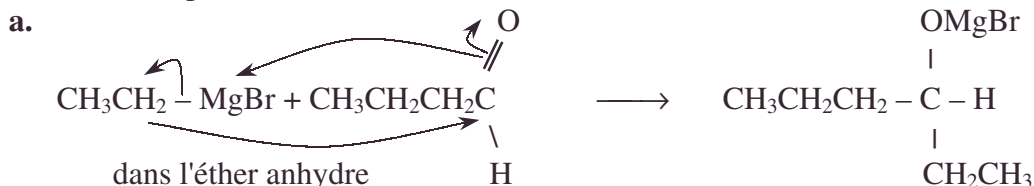
d. • Ecrivons la conservation de l'iode initiale de concentration $(I_2)_0 = 0,2$.

$$\frac{10}{1000}(I_2)_0 = \frac{1}{2} \frac{15}{1000}(S_2O_3^{2-}) + \frac{1}{10000}(RMgBr) \Rightarrow (RMgBr) = 1,25 \text{ mol.l}^{-1}.$$

$$\bullet n_{RMgBr} = \frac{60}{1000}(RMgBr) = 0,075 \text{ mole} ; n_{RBr} = \frac{10,9}{109} = 0,100 \text{ mole}.$$

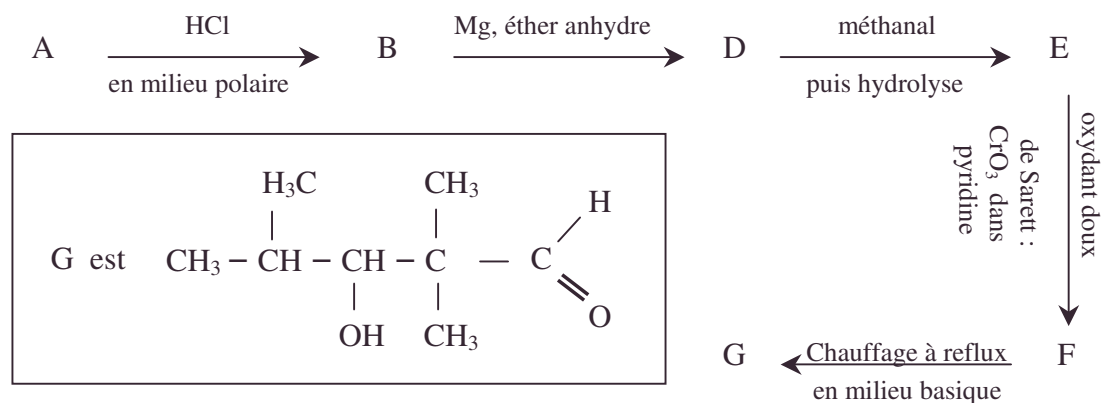
Le rendement $\eta = \frac{n_{RMgBr \text{ effectif}}}{n_{RMgBr \text{ payé}}} = 0,75$.

3. Mécanisme simplifié



5.4.2. Agent de synthèse

On envisage la séquence réactionnelle suivante :



On précise que les composés chimiques indiqués sur les flèches de réaction sont des solvants ou des réactifs.

1. Etude du composé G

a. Donner le nom en nomenclature systématique de G. Citer et décrire une expérience rapide et facile à réaliser permettant de mettre en évidence la fonction carbonyle du composé G ; écrire le bilan de cette réaction.

b. G possède un atome de carbone asymétrique : représenter l'isomère Rectus de la façon la plus simple possible.

2. Identifier chaque espèce chimique A, B, D, E et F et donner son nom en nomenclature systématique.

3. Etude des réactions permettant de passer de A à G

a. $A \rightarrow B$: quelle est la particule qui attaque le composé A ? Pourquoi ?

• 2,2,4-triméthyl-3-hydroxypentanal, carbone asymétrique, carbonyle, éther éthylique, éthoxyéthane, hexan-3-ol, isomère Rectus, nomenclature, rendement, Sarett, solvant

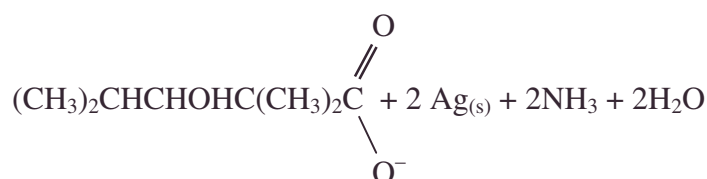
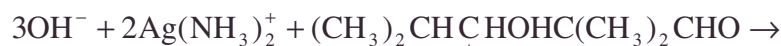
- b.** B → D : quel est le rôle de l'éthoxyéthane (éther éthylique) ?
Citer un autre composé qui pourrait remplacer l'éthoxyéthane.
- c.** D → E : justifier l'orientation de l'attaque du méthanal par le composé D.
- d.** F → G : quel est le rôle de l'ion HO^- dans le passage de F à G ?

Centrale

Corrigé

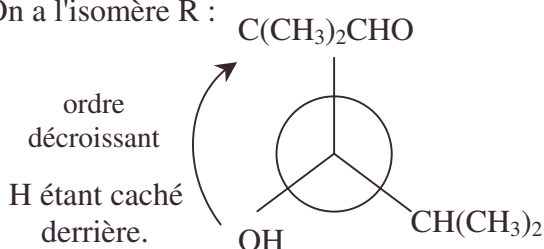
1.a. G est le 2,2,4-triméthyl-3-hydroxypentanal.

L'obtention du miroir d'argent à l'aide du réactif de Tollens $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$ est aisée.



b. Le carbone asymétrique est marqué par *.

On a l'isomère R :



On remarquera l'ordre des priorités décroissantes :



2. Rétrosynthèse simple :

a. G, aldol, est obtenu par l'aldolisation de F aldéhyde ,
donc : F : $(\text{CH}_3)_2\text{CHCHO}$ 2-méthylpropanal.

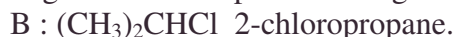
b. F provient de l'oxydation d'un alcool E :



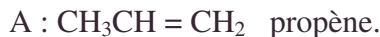
c. Cet alcool primaire a été obtenu par synthèse magnésienne à partir de



d. B est le dérivé monohalogéné servant à produire l'organomagnésien :



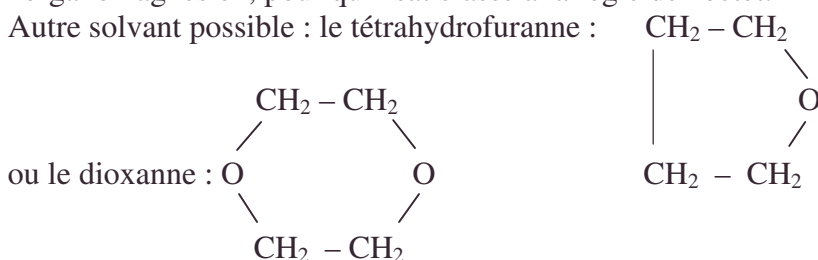
e. B est obtenu par addition de HCl sur un alcène



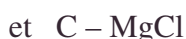
3.a. Attaque électrophile de H^+ sur la double liaison riche en électrons.

b. L'éthoxyéthane stabilise par liaison covalente dative le magnésium de l'organomagnésien, pour qu'il satisfasse à la règle de l'octet.

Autre solvant possible : le tétrahydrofuranne :



c. L'addition se fait par attraction formelle des charges opposées de $\text{C}=\text{O}$



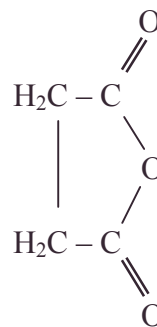
- 2-chloropropane, 2-méthylpropanal, aldolisation, carbanion, carbone asymétrique, chlorure d'isopropylmagnésium, dioxanne, éthoxyéthane, miroir d'argent, R, réactif de Tollens, règle de l'octet, solvant, synthèse magnésienne

d. Il sert à la formation du carbanion nucléophile $(\text{CH}_3)_2\text{CCHO}^-$

(avec départ de l'hydrogène en α selon $\text{H}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$) qui attaquera $\text{C}=\text{O}$.
+ δ - δ

5.4.3. Comparaison avec un organozincique

On rappelle la formule de l'anhydride succinique :



On réalise les réactions suivantes :

toluène (méthylbenzène) + anhydride succinique $\xrightarrow{(\text{AlCl}_3)}$ A (majoritaire).

A + éthanol (en milieu acide) \rightarrow B.

B + bromure d'isopropylzinc (1 mol) \rightarrow C. (hydrolyse acide) \rightarrow D.

Le bromure d'isopropylzinc a les mêmes propriétés que le bromure d'isopropylmagnésium mais ne réagit pas sur le groupe ester.

D est soluble dans une solution basique.

Donner la formule des composés A à D.

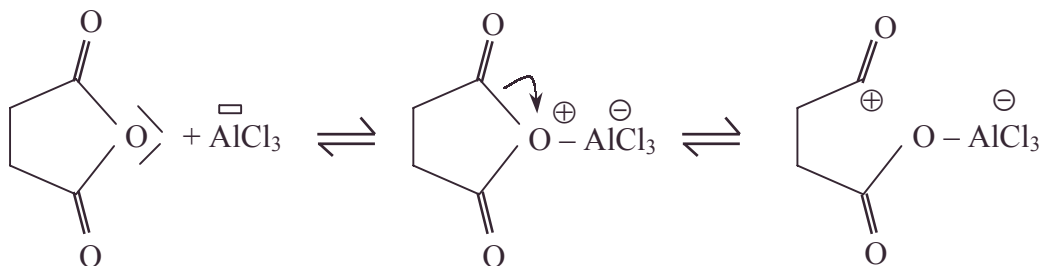
Donner une explication électronique à l'orientation de la réaction sur le toluène.

Quel est l'intérêt de l'estérification dans cette synthèse de l'organozincique ?

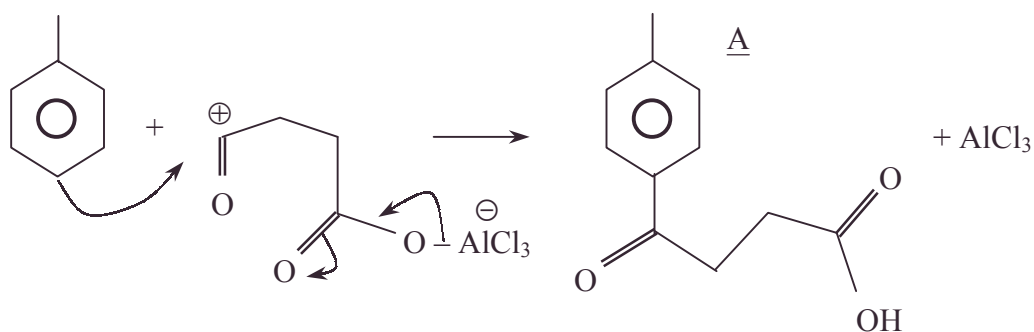
ENSGEES ; Durée : 1h00

Corrigé

1. Formation du carbocation électrophile grâce au catalyseur de Friedel et Craft AlCl_3 .

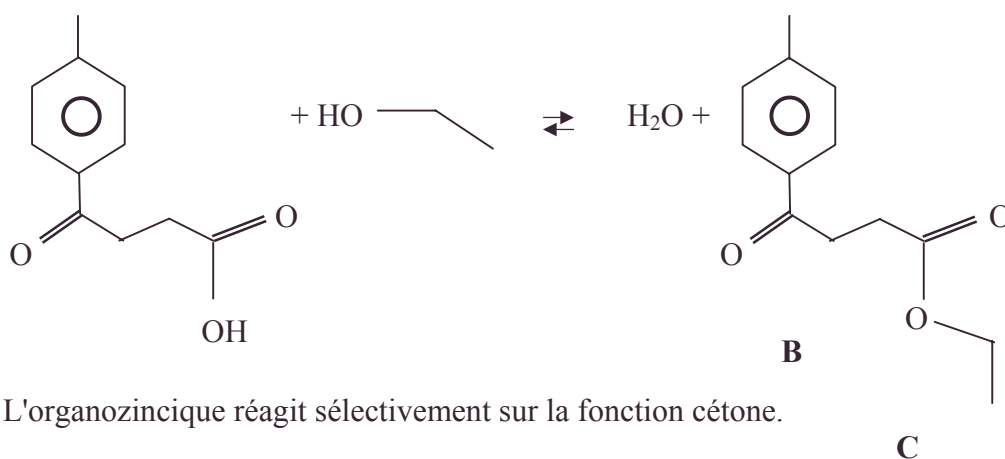


2. Le premier substituant du toluène est le méthyle : vu son effet quantique donneur, la seconde substitution électrophile est activée en ortho et surtout en para vu l'encombrement stérique du toluène.

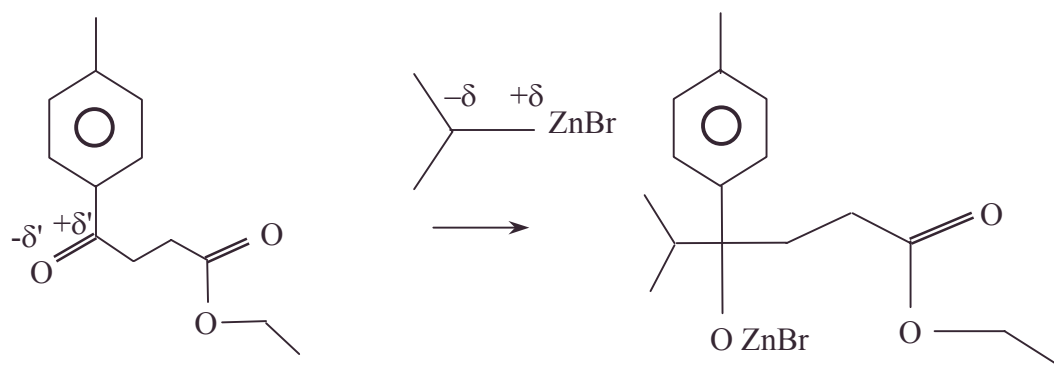


On notera : le transfert de proton du carbone en para sur l'oxygène lié à l'aluminium et la reconstitution du catalyseur.

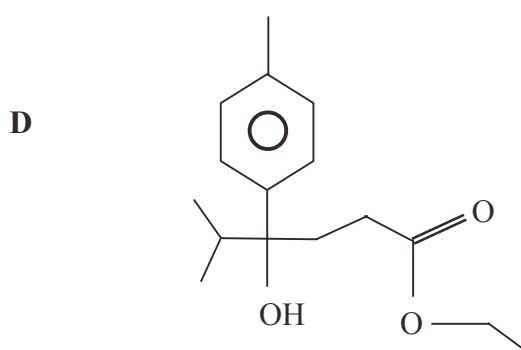
3. Estérification



4. L'organozincique réagit sélectivement sur la fonction cétone.



5. L'hydrolyse acide donne un alcool tertiaire



- alcool tertiaire, catalyse, cétone, estérification, hydrolyse acide, organozincique

6. L'estérification masque la vive réactivité des acides carboxyliques à l'égard de l'organozincique et a permis la formation de la fonction alcool ; la non réactivité de l'organozincique sur la fonction ester a simplifié la réaction, comparativement à l'action du bromure d'isopropylmagnésium qui aurait donné avec la fonction ester une fonction cétone puis une fonction alcool en supplément, ce qui aurait exigé une séparation des produits.

5.4.4. Mécanismes et stéréochimie

Voir page 1758.

5.4.5. Synthèse d'un parfum

Voir page 1762.

5.4.6. Synthèse historique du terpéneol

Voir page 1779.

5.4.7. Alcool à polycondenser

Voir page 1791.

5.4.8. Survol 1

Voir page 1795.

5.4.9. Survol 2

Voir page 1796.

5.4.10. Survol 3

Voir page 1798.

5.4.11. Survol 4

Voir page 1799.

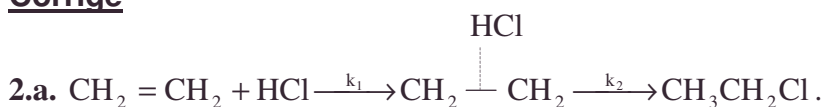
5.5. Alcènes

Au programme de PCSI (PC), BCPST1, PSI, PC, TPC 1 et 2

**5.5.1. Addition de chlorure d'hydrogène
sur l'éthylène**

L'addition du chlorure d'hydrogène sur l'éthylène étant supposée en deux étapes :

- a. Formation lente d'un adduit π (constante de vitesse k_1).
- b. Formation du monochloroéthane (chlorure d'éthyle) C_2H_5Cl .

Décrire brièvement le mécanisme ; en déduire la vitesse de formation de C_2H_5Cl .**Centrale****Corrigé**

- b. $v = k_1(HCl)(C_2H_4)$; l'étape lente conduisant à l'adduit impose sa vitesse.

**5.5.2. Thermodynamique de la
déshydrogénation du propane**

On a relevé sur une table les enthalpies standard $\Delta_f H^0$ et enthalpies libres standard $\Delta_f G^0$ de formation du propane et du propène. (L'état standard pris pour le carbone est l'état solide à 25° C et pour l'hydrogène, l'état gazeux à 25° C sous la pression de 1 bar).

	$\Delta_f H^0$ (kJ.mol ⁻¹)	$\Delta_f G^0$ (kJ.mol ⁻¹)
Propane _(g)	-103,75	-23,467
Propène _(g)	+20,394	+62,658

1. Calculer l'enthalpie de la réaction (sens 1) :



quelle que soit la température.

La réaction (sens 1) est-elle endothermique ou exothermique ?

2. Calculer la température d'inversion de cet équilibre (c'est la température pour laquelle la constante d'équilibre K est égale à l'unité).

3. On veut convertir du propane en propène. Le taux de conversion α à l'équilibre souhaité est de 0,95. A quelle température faut-il effectuer la réaction sous une pression de 1 bar ?

4. On absorbe le propène dans de l'acide sulfurique concentré. Quel est le corps obtenu ? Donner sa formule développée et indiquer la fonction à laquelle il appartient.

On fait alors réagir de l'eau et on obtient un corps correspondant à l'addition d'une molécule d'eau sur le propène. Quel est ce corps ?

Donner sa formule développée et indiquer la fonction à laquelle il appartient.

Dans les calculs on prendra $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.**CCP**

- addition, adduit, alcène, chlorure d'éthyle, chlorure d'hydrogène, constante d'équilibre, constante de vitesse, déshydrogénation, endothermique, étape lente, éthylène, exothermique, monochloroéthane, propane, tables thermodynamiques partielles, taux de conversion

Corrigé

$$1.a. \Delta_r H^0 = \Delta_f H_{\text{propène}}^0 + \Delta_f H_{H_2}^0 - \Delta_f H_{\text{propane}}^0.$$

$$A.N.: \Delta_r H^0 = 20,394 + 0 - (-103,75) = 124,144 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

b. Le sens 1 est endothermique car $\Delta_r H^0 > 0$.

2. à $T = T_i$, $K = 1$ soit $\Delta_r G^0(T) = -RT \ln K = 0$.

Pour trouver $\Delta_r G^0(T)$ on intègre la relation de Gibbs-Helmholtz :

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^0(T)}{T} \right) = -\frac{\Delta_r H^0}{T^2} \text{ avec } \Delta_r H^0 \text{ constant vu l'absence de données sur } \Delta_r C_p^0 \text{ (et}$$

donc supposé petit, on ne peut donc que le prendre nul).

$$\bullet \frac{\Delta_r G^0(T)}{T} - \frac{\Delta_r G^0(298)}{T_{298}} = \Delta_r H^0 \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{298}} \right].$$

$$\text{Or, } \Delta_r G^0(298) = \Delta_f G_{\text{propène}}^0(298) + \Delta_f G_{H_2}^0(298) - \Delta_f G_{\text{propane}}^0(298) ;$$

$$AN : \Delta_r G^0(298) = 62,658 + 0 - (23,467) = 86,125 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

$$\text{Finalement : } T_i = T_{298} \frac{\Delta_r H^0}{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0(298)} ; AN : T_i = 973,0 \text{ K.}$$

$$3. \quad \begin{array}{ccc|c} \text{propane}_{(g)} & \xrightleftharpoons[2]{1} & \text{propène}_{(g)} + H_{2(g)} & \\ \hline t=0 & 1 & 0 & 0 \\ t_{eq} & 1-\alpha & \alpha & \alpha \\ n_T & 1+\alpha & & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} P_{\text{propane}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} P_T ; \\ P_{H_2} = P_{\text{propène}} = \frac{\alpha}{1+\alpha} P_T \\ K = P_{\text{propène}} \cdot p_{H_2} / P^0 \cdot P_{\text{propane}} \\ K = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)} \frac{P_T}{P^0} ; \text{vu } 2., \Delta_r G^0(T) = -RT \ln K = \Delta_r H^0 \left(1 - \frac{T}{T_{298}} \right) + \Delta_r G_{298}^0 \frac{T}{T_{298}}. \end{array}$$

$$T = \frac{\Delta_r H^0}{\frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0}{T_{298}} - R \ln \left(\frac{\alpha^2 P_T}{(1-\alpha^2) P^0} \right)} ; AN : T = 1138,0 \text{ K.}$$

4.a. $CH_3 - CH = CH_2 + H_2SO_4 \rightleftharpoons CH_3 - CH - CH_3$ de nom hydrogénosulfate d'isopropyle.

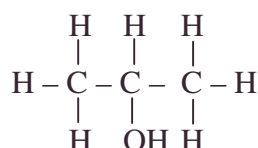


b. On peut l'obtenir aussi par action directe de H_2SO_4 sur $CH_3CHOHCH_3$ selon $CH_3CHCH_3 + H_2SO_4 \rightleftharpoons CH_3CHCH_3 + H_2O$, ester minéral du propan-2-ol.

| | hydrogénosulfate d'isopropyle



d.



On trouve la fonction alcool secondaire.

5.5.3. Obtention d'alcènes par déshydrohalogénéation et déshalogénéation

Le dibromostilbène, noté A, a pour formule

$$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 - \text{CH} - \text{CH} - \text{C}_6\text{H}_5 \\ | \quad | \\ \text{Br} \quad \text{Br} \end{array}$$

Le groupe C_6H_5 représente le radical phényle lié par une liaison simple à un carbone;

(On peut aussi le représenter par  ou tout simplement par ϕ -).

Le bromostilbène, noté B, a pour formule

$$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_5 - \text{C} = \text{CH} - \text{C}_6\text{H}_5 \\ | \\ \text{Br} \end{array}$$

1. Le composé A présente trois stéréoisomères que l'on notera A_1 , A_2 et A_3 ; le composé chimique contenant les molécules A_1 ne présente pas de pouvoir rotatoire ; dans la molécule A_2 , les deux carbones asymétriques ont une configuration Rectus. Représenter A_1 , A_2 et A_3 . On utilisera impérativement la représentation de Newman en conformation décalée.

2. Quel type de stéréoisomérisation présente le composé B ?

3. Le composé chimique contenant uniquement des molécules A_1 , qui ne présente pas de pouvoir rotatoire, est soumis à une réaction de déshydrohalogénéation de molarité 2 (E_2) ; on obtient alors B_1 .

a. Quel réactif peut-on employer pour réaliser cette réaction ?

b. Le fait de chauffer favorise-t-il cette réaction ? Justifier la réponse.

c. Comme il s'agit d'une E_2 , on rappelle que, lors du passage de A_1 à B_1 , la molécule A_1 prend une conformation anti-périplanaire (opposée).

Justifier la stéréochimie de B_1 ainsi que sa notation Z ou E.

4. On réalise la réaction de déshydrohalogénéation (E_2) précédente sur un mélange de A_2 et A_3 ; qu'obtient-on ?

5. En présence de zinc, on peut déshalogéner le composé A, on obtient alors un alcène D dont on sépare deux isomères. On isole l'isomère Z de D et on fait réagir sur lui, d'une part, du brome pur et, d'autre part, de l'acide chlorhydrique.

a. Ecrire le bilan de chaque réaction.

b. Dans chacun des cas, préciser l'entité qui attaque l'alcène D.

c. L'une de ces deux réactions est stéréospécifique, laquelle ? Justifier votre réponse en donnant le mécanisme de la réaction et la structure du produit obtenu.

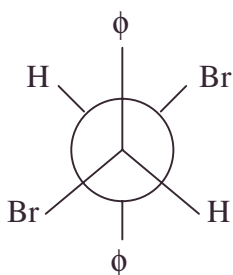
d. L'autre réaction est, en général, non stéréospécifique ; le justifier.

e. Sur le composé obtenu par action de l'acide chlorhydrique sur D, on fait réagir, à froid, une solution d'hydroxyde de sodium. Quel est le produit organique F obtenu et à quel type cette réaction appartient-elle ?

Centrale ; Durée : 1h30

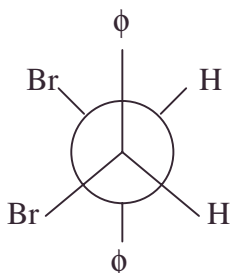
Corrigé

1.a. A₁



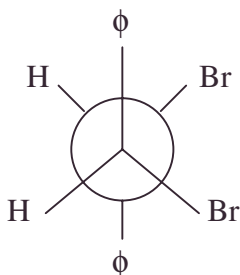
Forme (érythro) symétrique : mésogyre de type R, S.
Seul stéréoisomère (unlike) sans pouvoir rotatoire

b. A₂



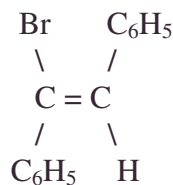
Forme (thréo), stéréoisomère de type R, R(like).

c. A₃

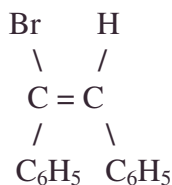


Forme (thréo), stéréoisomère de type S, S (like).

2. On a une stéréoisomérisation éthylénique. L'ordre de priorité donne Br > C₆H₅ > H.



Forme Z



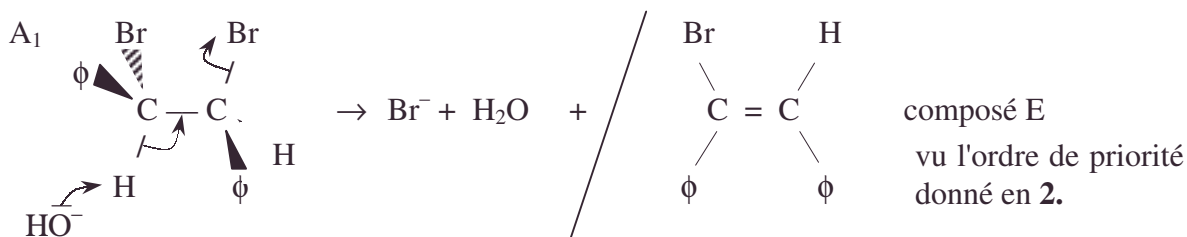
Forme E

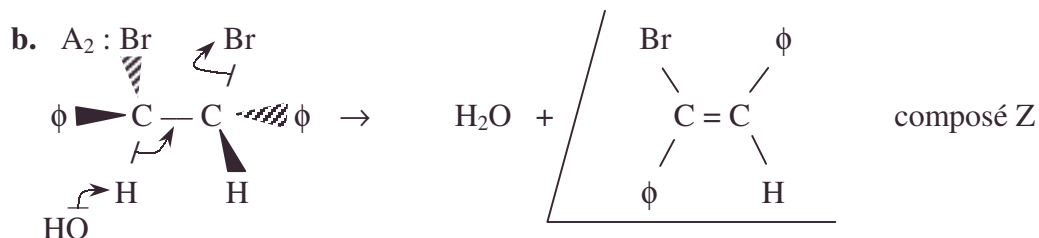
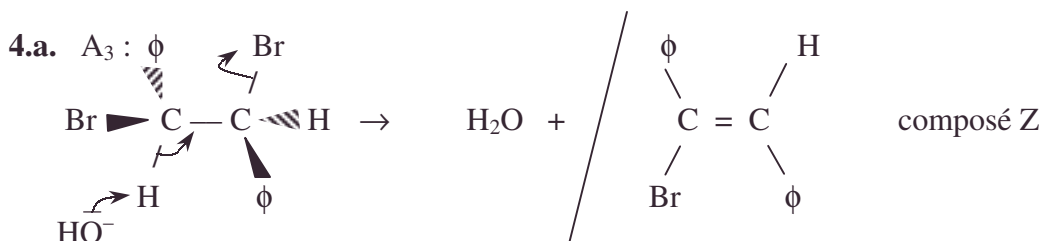
3.a. La potasse alcoolique, par exemple, où la basicité de OH⁻ l'emporte sur sa nucléophilie. De même, l'éthanolate de sodium en solution alcoolique C₂H₅OH.

b. Chauffer permet d'obtenir l'élimination.

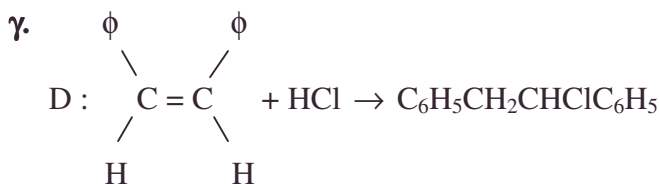
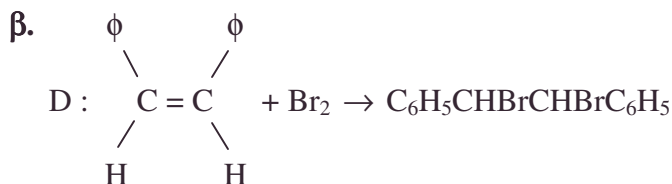
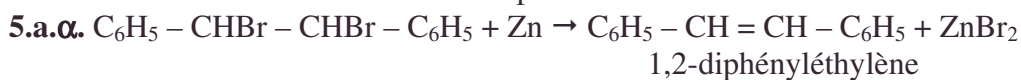
On permet ainsi le contrôle thermodynamique de cette réaction (la basicité est caractérisée thermodynamiquement alors que la nucléophilie est une notion cinétique).

c. Les traits dans le plan de la feuille traduisent l'antiparallélisme :





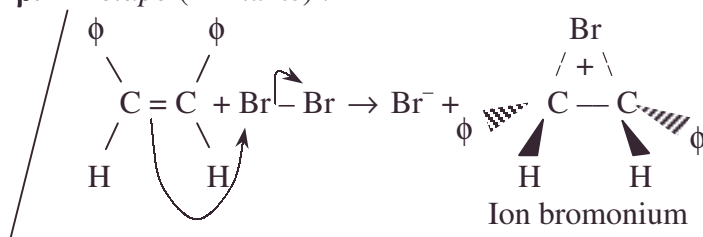
c. Conclusion : on obtient le seul composé Z.



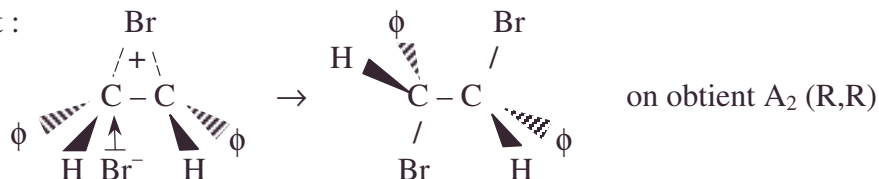
b. Dans la réaction β tout se passe comme si Br^+ attaquait D (cf. **c.**) (cf. complexe π) ; dans la réaction γ tout se passe comme si H^+ attaquait D (cf. **c.**).

c.α. La réaction avec Br_2 est stéréospécifique : on a une transaddition.

β. 1^{ère} étape (limitante) :



2^{ème} étape : Br^- attaque en dessous, indifféremment chacun des 2 carbones, on a soit :

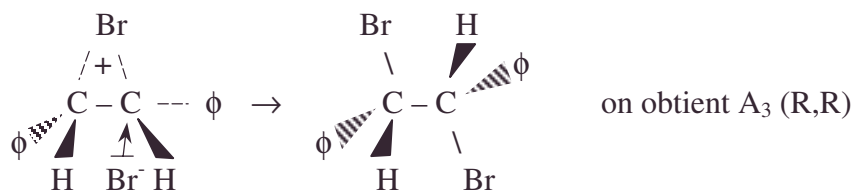


vu l'ordre de priorité $Br > CHBr\phi > \phi$

- bromonium, complexe π , stéréoisomère Z, stéréospécifique, transaddition, Z

Alcènes

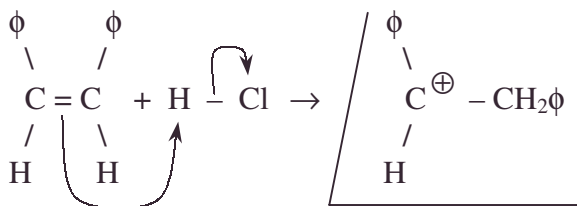
Soit :



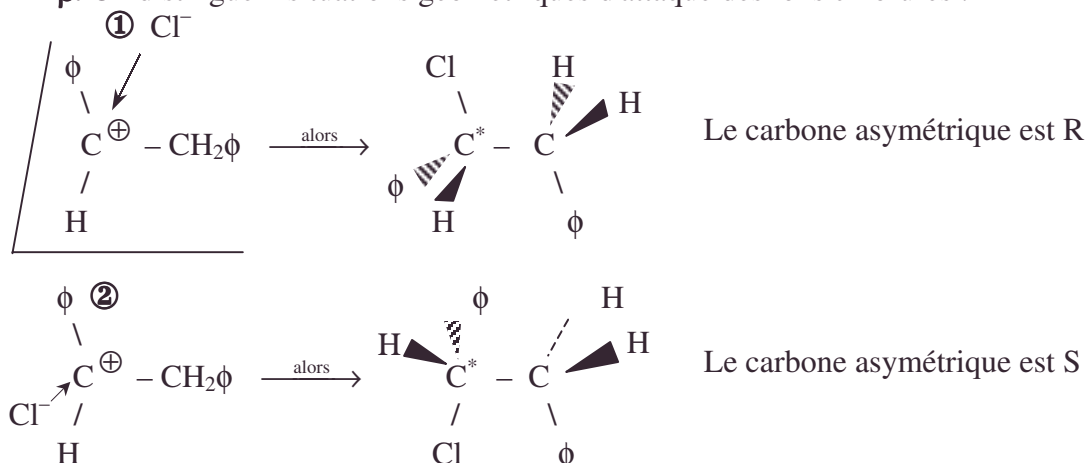
γ . On a un mélange racémique de A_2 et A_3 , inactif optiquement.

d. Quand on n'obtient pas l'adduit π de HCl avec D ("analogue" formellement au bromonium), la réaction est alors non stéréospécifique ; le milieu doit être suffisamment dissociant et solvant ; on obtient un carbocation plan attaqué ensuite indifféremment sur chaque côté.

α . Formation du carbocation stabilisé par mésomérie vu le noyau benzénique immédiatement voisin du déficit d'électron



β . On distingue 2 situations géométriques d'attaque des ions chlorures :

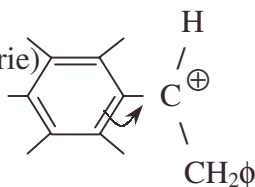


On obtient donc un mélange racémique, inactif optiquement.

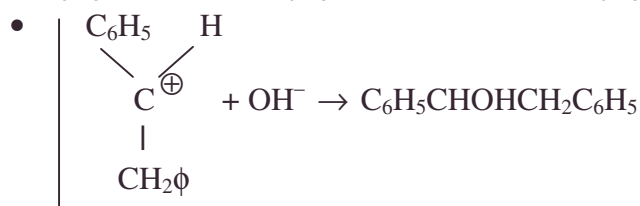
e. α . $C_6H_5CHClCH_2C_6H_5 + OH^- \rightarrow C_6H_5CHOHCH_2C_6H_5$ **F**
1,2-diphényléthanol

β . On a à froid une substitution nucléophile, l'ion intermédiaire plan existe (grâce à la mésomérie)

Le mécanisme est certainement $SN1$.



• $C_6H_5CHCl-CH_2C_6H_5 \xrightarrow{\text{étape limitante}} Cl^- + C_6H_5C^+HCH_2Ph$ carbocation plan



On obtient comme pour **5.d.** un mélange racémique de F ; la réaction n'est pas stéréospécifique.

- carbocation, 1,2-diphényléthanol, dissociant, mésomérie, racémique, $SN1$, solvant

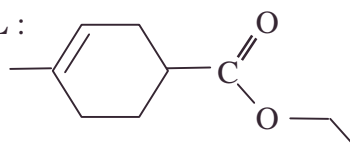
5.5.4. Synthèse de Diels-Adler du terpinéol

Théorie de Hückel

La réaction de Diels-Alder a permis de simplifier considérablement un grand nombre de synthèses, dont celle du terpinéol, de formule



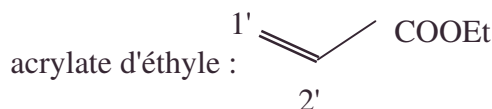
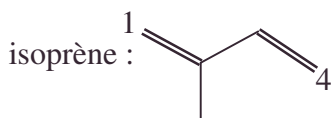
L'étape-clé de la synthèse du terpinéol selon cette voie) est une réaction de Diels-Alder entre deux composés commerciaux conduisant directement à **L** :



Le traitement de **L** par l'iodure de méthylmagnésium dans l'éther anhydre, suivi d'une hydrolyse en milieu faiblement acide, donne le terpinéol.

1. Montrer que la réaction de Diels-Alder entre l'isoprène (2-méthylbuta-1,3-diène) et l'acrylate d'éthyle peut donner a priori deux produits : **L** lui-même ou **L'**, isomère de **L**.

On donnera le mécanisme de cette réaction, "par flèches" symbolisant les transferts électroniques, et dessinant l'isoprène dans la conformation qui convient.



Les numéros indiqués sur les formules ci-dessus seront utiles à la question 3.

2. L'acrylate d'éthyle est un "bon" diénophile : pourquoi ?

3. L'expérience montre que l'isomère **L'** ne se forme pratiquement pas.

Cette régiosélectivité ne peut s'expliquer que par la théorie des orbitales frontières.

Les tableaux ci-dessous fournissent, pour l'isoprène et l'acrylate d'éthyle les énergies des orbitales frontières (plus haute occupée : HO et plus basse vacante : BV) ainsi que les coefficients des orbitales moléculaires π correspondant aux atomes de carbone numérotés 1, 4 (pour l'isoprène) et 1', 2' (pour l'acrylate d'éthyle), pour les orbitales considérées.

Isoprène			Acrylate d'éthyle		
	HO	BV		HO	BV
Energie	$\alpha + 0,570 \beta$	$\alpha - 0,643 \beta$	Energie	$\alpha + \beta$	$\alpha - 0,436 \beta$
Coefficient C1	0,65	0,56	Coefficient C1'	-0,63	0,64
Coefficient C4	-0,55	0,62	Coefficient C2'	-0,54	-0,29

Les notations α et β sont celles de Hückel : α est l'intégrale coulombienne et β est l'intégrale de résonance. Ces deux grandeurs sont négatives.

Indiquer sur un schéma simple quelle est l'interaction frontalière la plus forte entre l'isoprène et l'acrylate d'éthyle.

4. Montrer que cette interaction privilégiée, se produisant d'abord entre les atomes de carbone possédant les coefficients les plus élevés, permet de justifier la régiosélectivité observée. On traduira ces observations sur un schéma clair.

Mines ; Durée : 1h00

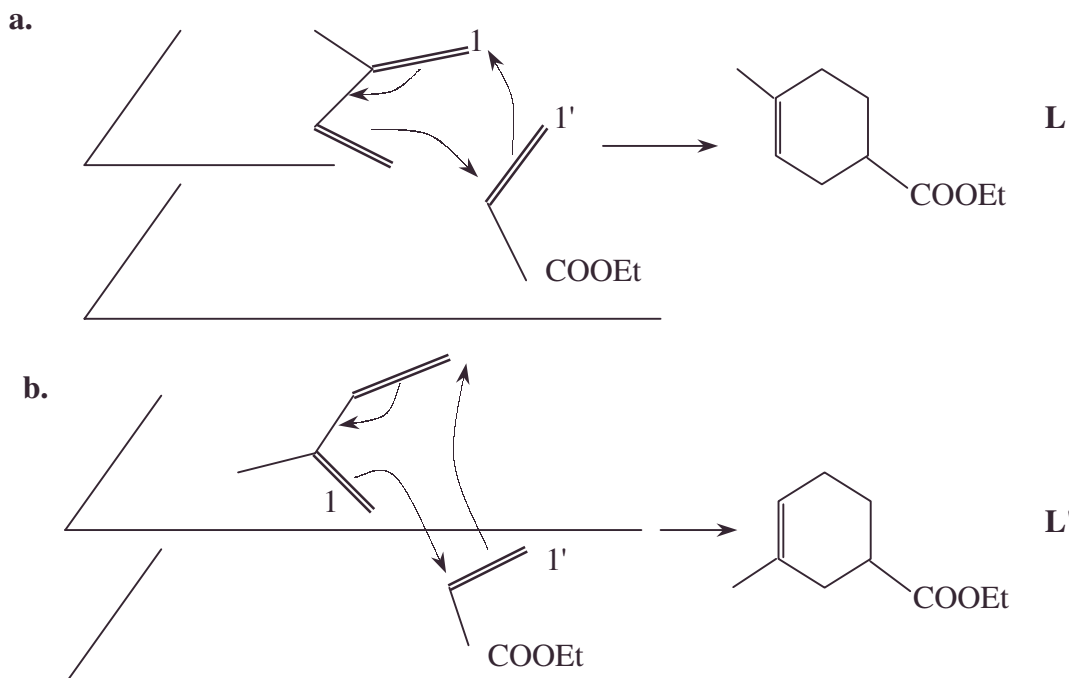
Corrigé

1. Quand le plan de symétrie passant par les carbones de l'isoprène est parallèle à celui de la liaison double de l'acrylate d'éthyle, les cyclo-additions a et b à la stéréochimie d'une syn-addition sont possibles.

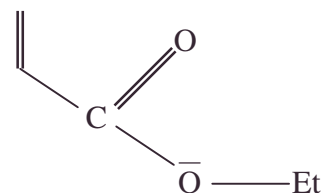
• acrylate d'éthyle, Diels-Adler, diénophile, énergies des orbitales frontières, éther anhydre, Hückel, intégrale coulombienne, intégrale de résonance, iodure de méthylmagnésium, isoprène, orbitales frontières, régiosélectivité

Les deux nouvelles liaisons carbone-carbone se créent simultanément du même côté du plan de chaque molécule (réaction dite supra-supra).

On notera leur caractère stéréosélectif et stéréospécifique



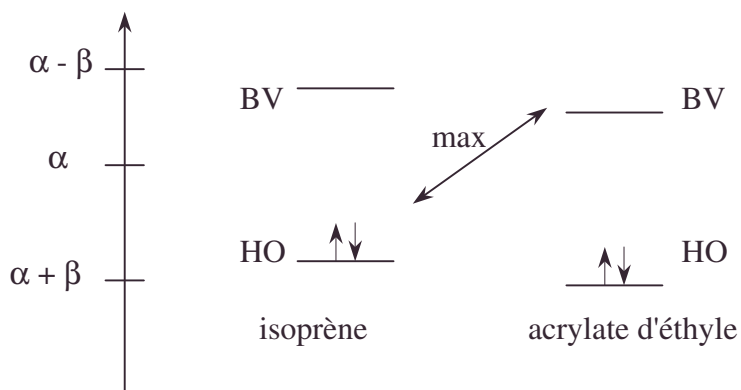
2. Les conjugaisons entrant dans l'acrylate d'éthyle ci-contre ne facilitent pas le schéma donné en 1. a priori, mais les échanges électroniques envisagés avec le diène isoprène donnent finalement une répartition spatiale plus uniforme en accord avec l'augmentation d'entropie, habituel moteur de réaction chimique. On comprend finalement le terme diénophile.



On dit habituellement que l'acrylate d'éthyle est un bon diénophile car le groupement ester est un groupe attracteur agissant sur la double liaison carbone – carbone en diminuant sa densité électronique cf. 3..

3. L'approximation des orbitales frontières le confirme ; nous savons par le théorème de Fukui-Salem que les seules interactions à considérer lors de l'approche des réactifs A et B sont celles entre l'orbitale la plus haute occupée HO de A et l'orbitale la plus basse vacante BV de B, et réciproquement.

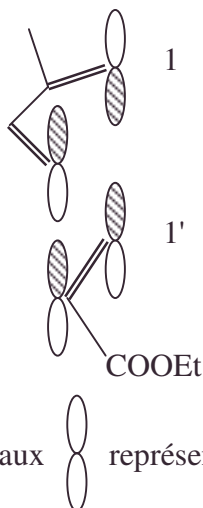
Le problème se simplifie ici : l'isoprène est un diène possédant un groupement méthyle donneur qui relève le niveau d'énergie HO ; l'acrylate d'éthyle qui possède un groupe ester attracteur voit l'abaissement du niveau HO.



L'interaction principale est celle entre HO isoprène – BV acrylate d'éthyle (de plus faible écart énergétique).

La meilleure approche est celle permettant le "recouvrement" maximum des orbitales frontières selon le schéma envisagé en **1**. Dès lors l'acrylate d'éthyle est un "bon" diénophile.

4. La régiosélectivité est expliquée car la liaison σ qui s'établit le plus rapidement est celle qui relie les 2 atomes qui ont les coefficients les plus grands en valeur absolue, (0,65 et 0,64) d'où le recouvrement maximum entre 1 et 1' qui conduit à **L**.(cf. **1**.)



Les fuseaux  représentent les orbitales p des carbones

5.5.5. Profil réactionnel d'une catalyse avec chimisorption

Voir page 1478.

5.5.6. Addition de Br₂ sur un alcène

Voir page 1705.

5.5.7. Le menthol

Voir page 1734.

5.5.8. Premiers mécanismes de la fonction carbonyle

Voir page 1756.

5.5.9. Mécanismes et stéréochimie

Voir page 1758.

5.5.10. Synthèse d'un parfum

Voir page 1762.

5.5.11. Obtention d'un chlorure d'acide

Voir page 1770.

5.5.12. Survol 2

Voir page 1796.

5.5.13. Survol 4

Voir page 1799.

5.5.13. Survol 5

Voir page 1803.

5.6. Benzène

Appartient aux programmes de PC, BCPST2, TPC2

5.6.1. Dérivés du benzène

1. Le benzène traité par le chlorure de méthyle (chlorométhane) en présence de chlorure d'aluminium donne un composé E qui, par action d'une solution sulfo-nitrique concentrée agissant une seule fois sur le cycle benzénique en ortho, conduit majoritairement à F. F est transformé en G par action du fer en milieu chlorhydrique. Enfin, l'oxydation de G par le permanganate de potassium en milieu acide conduit à H.

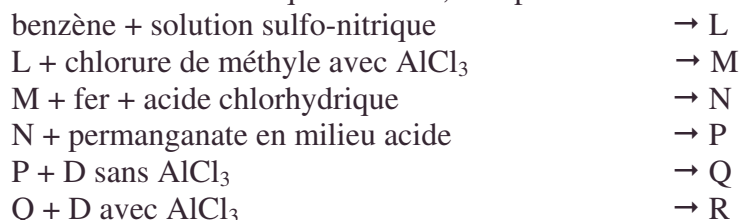
a. Ecrire et équilibrer les équations des réactions correspondantes.

b. Indiquer le nom des composés formés.

2.a. Le composé H réagit en l'absence de catalyseur AlCl_3 avec le composé D, chlorure de butanoyle. Quelle est la formule semi-développée du composé obtenu J ?

b. J est traité à son tour par D, cette fois en présence de chlorure d'aluminium. Quelle est la formule semi-développée du produit obtenu K ?

3.a. Quelle serait la série des réactions et des produits obtenus L, M, etc... si, au lieu de traiter le benzène selon la séquence du 2., on opérerait dans l'ordre suivant :



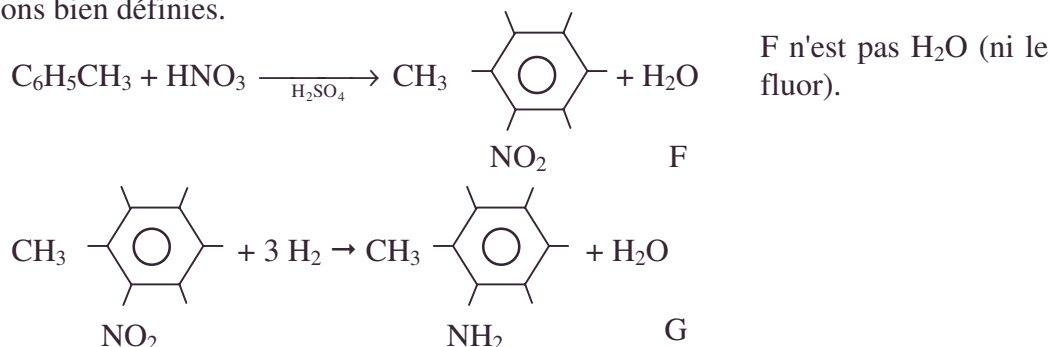
b. Expliquer pourquoi la dernière réaction ne peut pas conduire à un composé R unique ou du moins fortement majoritaire.

CCP ; Durée : 1h00

Corrigé

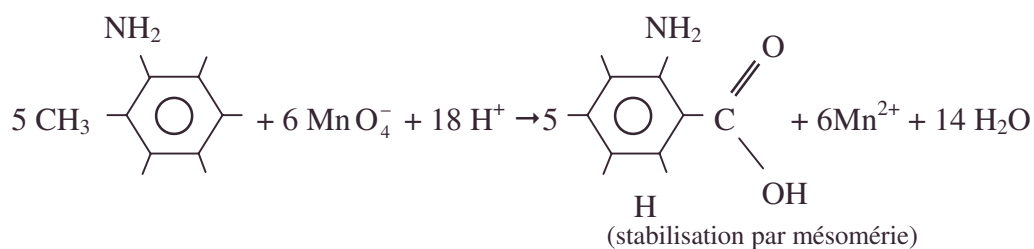


On considérera que la nitration est capable de donner un seul composé dans des conditions bien définies.



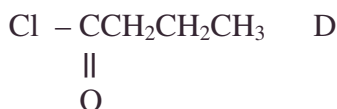
oxydation dégradante de la chaîne carbonée latérale non stabilisée.

- benzène, catalyseur de Friedel et Crafts, chauffage, chlorométhane, chlorure d'aluminium, chlorure de butanoyle, chlorure de méthyle, majoritaire, mononitration, permanganate de potassium, solution sulfo-nitrique, trinitration

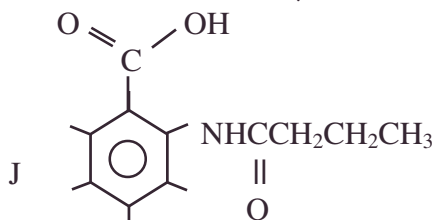


b. E = toluène ; F = orthomononitrotoluène ;
G = orthotoluidine ; H : acide 2-aminobenzoïque.

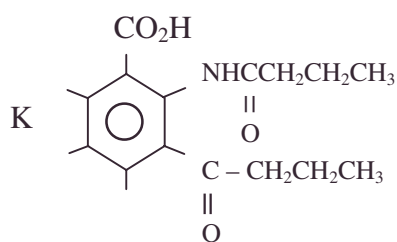
2.a.



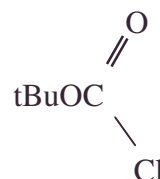
AlCl_3 ne permet pas la réaction du noyau benzénique. Il y a une N-acylation de l'amine pour donner une amide et H^+ et Cl^- .



b. C-acylation de J en présence de AlCl_3 , pour donner une substitution sur le cycle vu les règles d'Holleman si excès de chlorure d'acide.



3. On supposera la fonction amine protégée de l'oxydation proposée par exemple par acylation provisoire par le composé ci-contre :



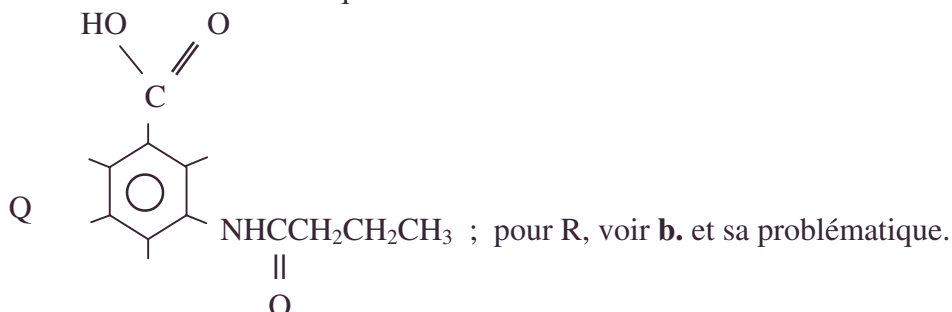
a. On considère seulement la mononitration et on reprend les réactions 2 et 3 : la position ortho est remplacée par la position méta (cf. règles d'Holleman).

L = mononitrobenzène

M = métamononitrotoluène

N = métatoluidine

P = acide 3-aminobenzoïque

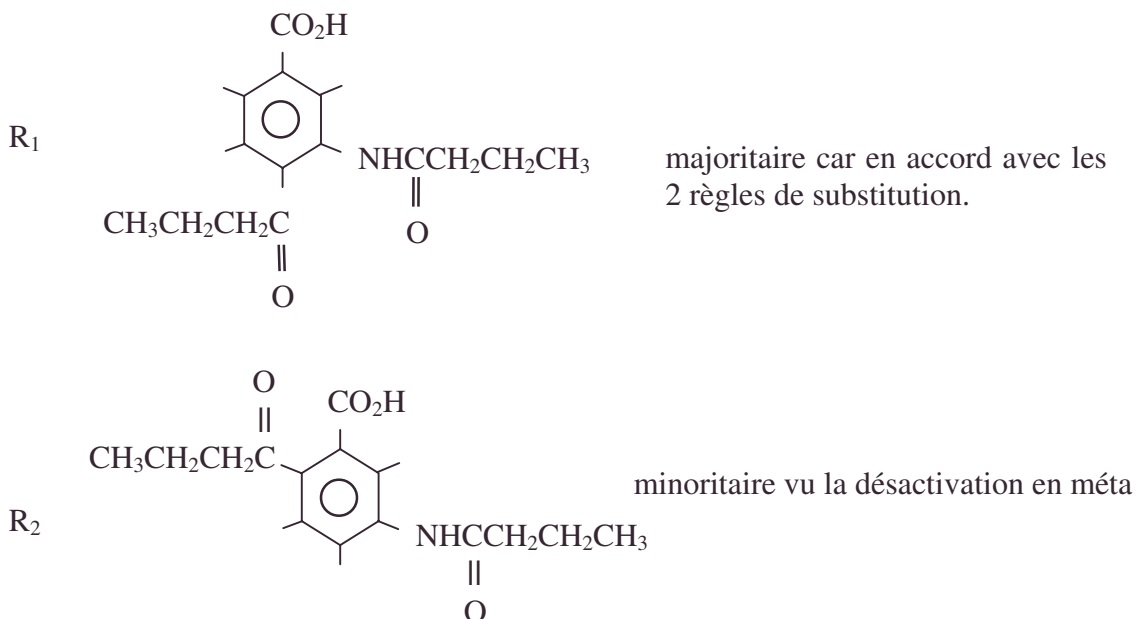


b. • Orientation en méta désactivante de CO_2H .

• Orientations ortho et para activante de l'amide

Ces deux orientations sont contradictoires en position et en facilité, d'où R_1 et R_2 .

• acide 2-aminobenzoïque, acide amino-3-benzoïque, alkylation, amide, amine, aminoacide, chlorure d'acide, métamononitrotoluène, métatoluidine, orthomononitrotoluène, orthotoluidine, protection de fonction, règles d'Holleman, toluène

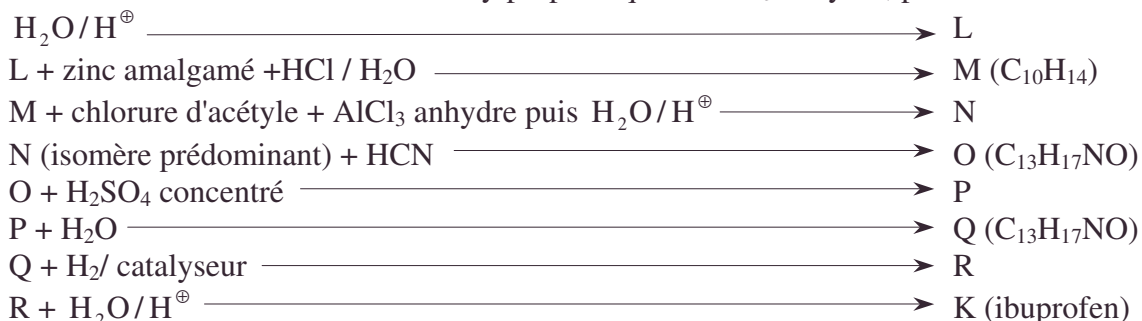


5.6.2. Synthèse d'un médicament anti-inflammatoire : l'ibuprofène

L'ibuprofène (K), C₁₃H₁₈O₂, est un composé doué de propriétés anti-inflammatoires, analgésiques et antipyrétiques.

Il est obtenu à partir du benzène, par la suite de réactions ci-après :

benzène + chlorure de l'acide 2-méthylpropanoïque + AlCl₃ anhydre, puis

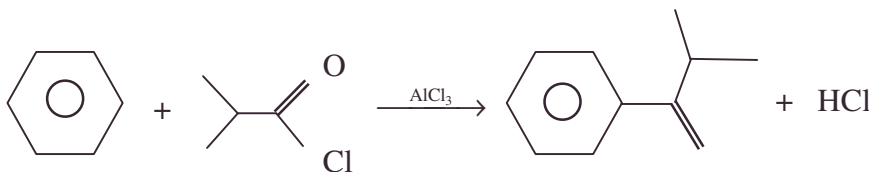


Ecrire les diverses réactions et donner les formules développées des composés K, L,...R.

ENS ; Durée : 1h00

Corrigé

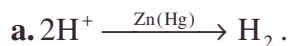
1. Première réaction : acylation de Friedel et Crafts



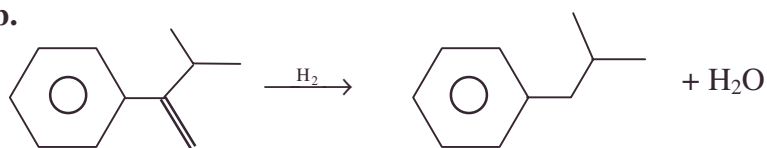
L'eau détruit AlCl₃, catalyseur de Friedel et Crafts afin d'éviter d'autres substitutions.

2. Deuxième réaction : hydrogénation supposée épargner le cycle benzénique vu la suite.

- acide 2-méthylpropanoïque, acylation, analgésique, anti-inflammatoire, antipyrétique, catalyseur de Friedel et Crafts, chlorure d'acétyle, Friedel et Crafts, ibuprofène, isomère prédominant, médicament, méthode de Clemmensen, zinc amalgamé



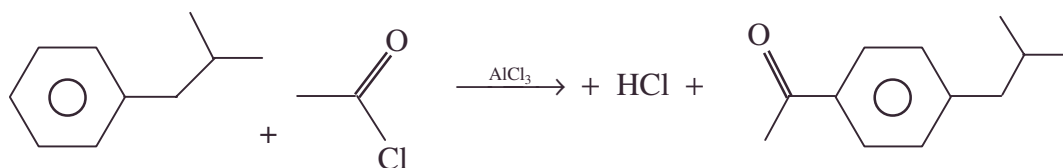
b.



M (de formule $\text{C}_{10}\text{H}_{14}$)

3. Troisième réaction : acylation de Friedel et Crafts.

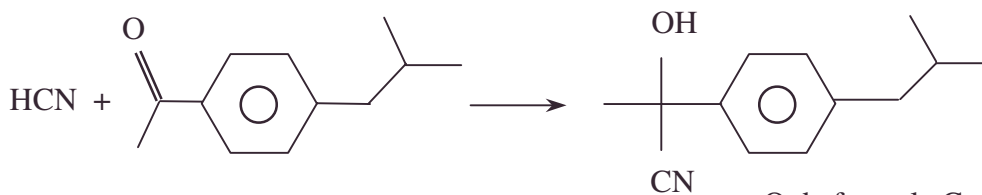
Le premier substituant alkyle active la 2^{ème} substitution en ortho et para (+ I) ;
vu la gêne stérique, la forme para est majoritaire.



N prédominant

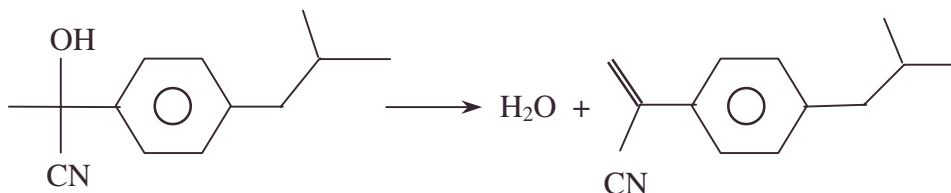
L'eau détruit le catalyseur afin d'éviter d'autres substitutions.

4. Quatrième réaction : HCN réagit sur la fonction carbonyle en milieu acide (CN^- est nucléophile).



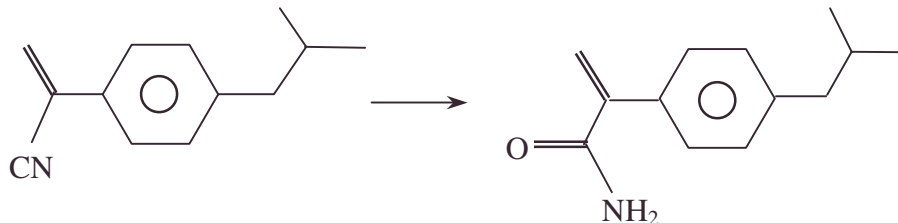
O de formule $\text{C}_{13}\text{H}_{17}\text{NO}$

5. Cinquième réaction : déshydratation en milieu acide de la fonction alcool.



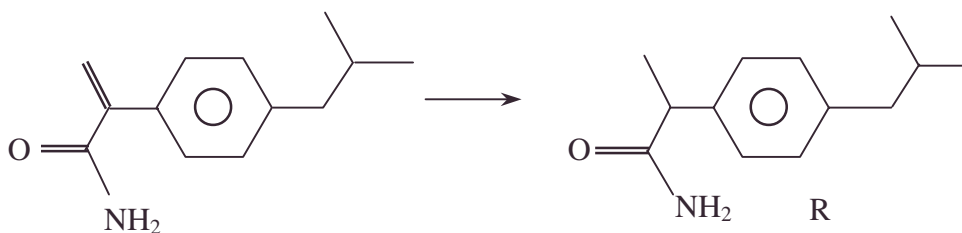
P

6. Sixième réaction : hydratation basique ou acide de la fonction nitrile en fonction amide.



Q de formule $\text{C}_{13}\text{H}_{17}\text{O}$

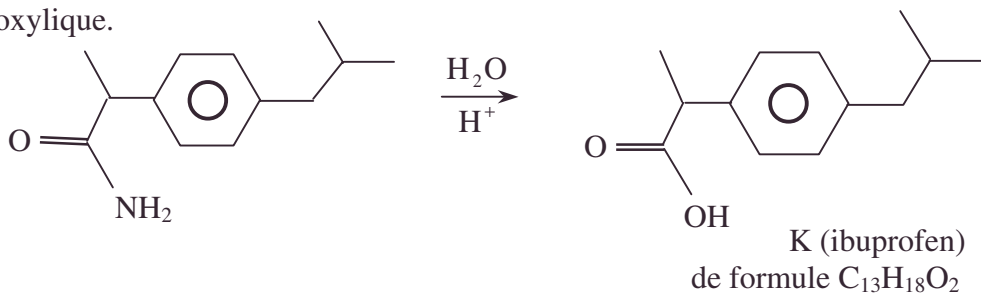
7. Septième réaction : hydrogénation catalytique sélective de l'alcène.



R

• amide, carbonyle, déshydratation, hydratation acide, hydrogénation catalytique, nucléophile, nucléophilie

8. Huitième réaction : hydrolyse basique puis acide de la fonction amide en acide carboxylique.



5.6.3. Comparaison avec un organozincique

Voir page 1717.

5.6.4. L'élément azote en chimie organique

Voir page 1748.

5.6.5. Synthèse d'un antihistaminique : l' antergan

Voir page 1750.

5.6.6. Synthèse d'un colorant : le rouge para

Voir page 1753.

5.6.7. Survol 4

Voir page 1799.

5.6.8. Survol 5

Voir page 1803.

5.7. Alcools

Appartint aux programmes PCSI (PSI et PC), BCPST1, TPC1

5.7.1. Le menthol

Les symboles Me et Et correspondent aux groupements méthyles CH_3 et C_2H_5 .

1. Le schéma topologique ci-contre représente la structure moléculaire du menthol (ou : 2-isopropyl-5-méthylcyclohexan-1-ol), principal constituant de l'essence de menthe poivrée utilisée en parfumerie.

a. Repérer les éventuels atomes asymétriques, et désigner leur configuration absolue. Quel est le nombre total de stéréo-isomères envisageables ?

Réponse à justifier.

b. Quelle est la conformation du cycle dans la structure représentée plus haut ?

Ce type de conformation étant maintenu pour la chaîne fermée, existe-t-il d'autres conformères pour la molécule étudiée ?

Les représenter selon la même perspective. Lequel d'entre tous est-il le plus stable ?

Réponse à justifier.

2. On envisage à partir de l'alcool précédemment décrit, deux séquences de transformations mettant en jeu les mêmes réactifs :

α . Le menthol, réagissant avec le chlorure de thionyle SOCl_2 en solution dans l'éther Et_2O , donne un composé **A**₁ lequel, traité par l'éthoxyde de sodium ou éthanolate de sodium dans l'éthanol, se transforme en hydrocarbure **B**.

β . Lorsque la réaction du menthol avec SOCl_2 a lieu dans la pyridine, solvant toxique, on obtient un produit **A**₂ diastéréo-isomère de **A**₁ et qui, sous l'action de l'éthoxyde de sodium dans l'éthanol, conduit à un mélange contenant 25% de **B** et 75% de **B'**, **B** et **B'** étant deux hydrocarbures.

a. Ecrire : - la formule plane commune aux stéréo-isomères **A**₁, **A**₂.
- les formules planes représentant les produits **B** et **B'**.

b. Représenter les deux stéréo-isomères résultant a priori de l'action de SOCl_2 sur le menthol ; montrer que l'un d'entre eux, sous l'action de l'éthoxyde de sodium, fournit un seul produit tandis que l'autre, dans les mêmes conditions, en donne deux.

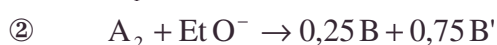
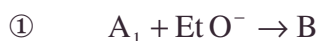
c. En déduire les formules spatiales des composés **A**₁, **A**₂, **B** et **B'**.

d. Justifier la prépondérance de **B'** sur son isomère **B**.

Comment le rapport des quantités de matière $\left(r = \frac{N_{\text{B}'}}{N_{\text{B}}} \right)$ évoluerait-il si l'on utilisait au

lieu de l'éthoxyde de sodium le composé $(\text{Me}_3\text{CO}^-, \text{K}^+)$ en solution dans l'alcool correspondant ?

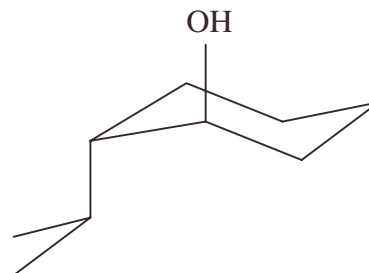
e. L'expérience obtenue dans la pyridine à partir du menthol montre que l'une de ces réactions :



est dans ces conditions donnée deux cents fois plus rapide que l'autre : laquelle et pourquoi ?

3. On obtient par action du potassium sur le menthol un composé ionique **C** ; celui-ci, mis à réagir avec le bromométhane en solution dans le diméthylsulfoxyde Me_2SO conduit à un composé **D**.

• 2-isopropyl-5-méthylcyclohexan-1-ol, chlorure de thionyle, conformation du cycle, conformère, diastéréoisomère, éthanolate, éthoxyde de sodium, menthol, pyridine, stéréoisomérisation, tertibutylate



Alcools

a. Ecrire les formules planes de **C** et **D**.

Quelle est la formule spatiale du dernier produit ?

b. On envisage de préparer **D** – ou tout au moins l'un des stéréo-isomères – par les réactions suivantes :



Le procédé donnera-t-il le résultat espéré ?

4. L'acide tosylique (ou paratoluènesulfonique) $\text{Me}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{SO}_3\text{H}$ (noté Ts-OH) est un acide fort dont le chlorure $\text{Me}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{SO}_2-\text{Cl}$ (noté Ts-Cl) permet d'estérifier le menthol par une réaction totale, rapide, et qui s'accompagne d'une rétention de configuration ; on obtient le composé **E** qui réagit facilement en milieu polaire aprotique avec l'acétate ou l'iodure de sodium, par des réactions du second ordre :



a. Indiquer la nature du mécanisme réactionnel :

en déduire les structures spatiales de **F** et **G**.

b. Ecrire les formules planes des deux produits **F** et **G**.

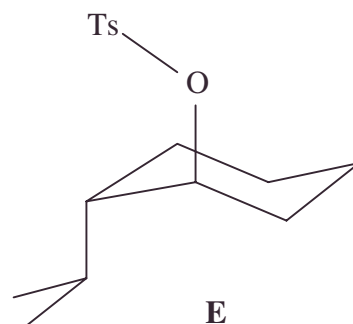
c. Comment obtenir le composé **G'** diastéréo-isomère de **G** et différant de celui-ci par la configuration du carbone fonctionnel ?

5. Le menthol, chauffé en présence d'acide sulfurique à 35%, conduit entre autres à un composé **H** auquel correspondent deux stéréo-isomères, et qui réagit avec le dibrome en solution dans le tétrachlorométhane pour donner le dérivé **I**.

a. Ecrire les formules planes des deux produits.

b. Représenter la structure spatiale de **H** ; quelle relation lie ce composé et son stéréo-isomère **H'** ?

c. Décrire le processus réactionnel en cause lors de l'apparition du produit **I** ; en déduire la structure spatiale du (ou des) stéréo-isomères formés (le cycle carboné sera toujours représenté dans le plan du dessin).



Concours MT ; Durée : 1h30

Corrigé

1.a. On a l'ordre de priorité des substituants (désignés par une lettre indicée).

α. Pour C_1 $\text{O} > \text{C}_2 > \text{C}_6 > \text{H} \Rightarrow \text{C}_1$ est R

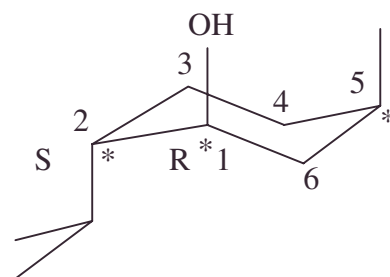
β. Pour C_2 $\text{C}_1 > \text{isopropyle} > \text{C}_3 > \text{H} \Rightarrow \text{C}_2$ est S

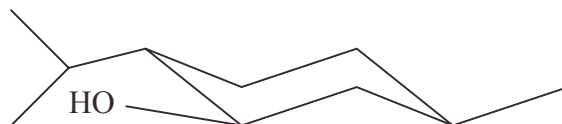
γ. Pour C_5 $\text{C}_6 > \text{C}_4 > \text{CH}_3 > \text{H} \Rightarrow \text{C}_5$ est R

δ. Il y a 3 carbones asymétriques donc $2^3 = 8$ stéréoisomères envisageables : on peut avoir C_1 R ou S ; au carbone C_5 R peut être associé un carbone C_2 R ou S, au carbone C_2 R peut être associé un carbone C_5 R ou S soit $2.2.2 = 8$ au total.

b.α. On a ici la conformation chaise où les 3 substituants d'hydrogène sont en position axiale.

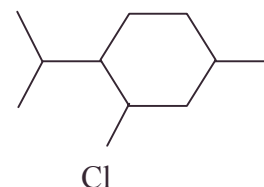
β. Il existe la conformation chaise où les 3 substituants sont en position équatoriale.



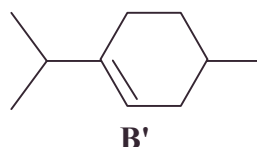
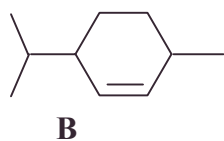


γ . Dans cette dernière conformation, l'éloignement des nuages électroniques des substituants est plus grand : on a un minimum absolu d'énergie potentielle ; la conformation est la plus stable.

2.a.α. **A₁** et **A₂** sont des dérivés monohalogénés obtenus en substituant OH par Cl provenant de SOCl₂ ; ils sont identiques en formule plane.

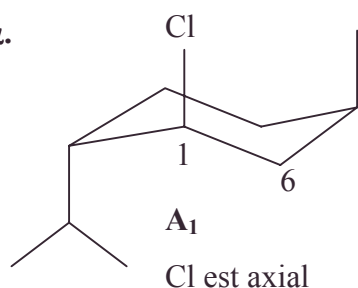


β . Les alcènes différents obtenus par élimination sont :

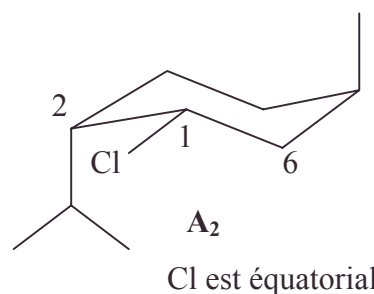


B' majoritaire selon la règle de Saitsev.

b.c.α.



et



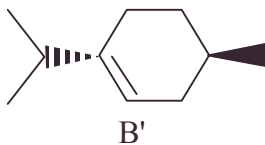
L'élimination de l'hydrogène en C₆ anti de **A₁** donne **B**.

L'élimination anti pour **A₂** peut se faire en C₂ et en C₆ d'où **B'** et **B** respectivement.

β . Lors de la réaction du menthol avec SOCl₂, on voit la rétention de configuration axiale dans **A₁** dans l'éther.

On voit l'inversion de configuration dans **A₂** dans la pyridine pour le substituant de C₁.

d.α.



B' majoritaire d'après la règle de Saitsev

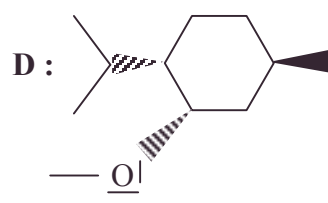
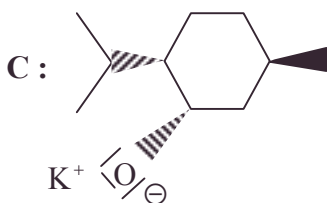
L'ion O^{\oplus} est plus lent et encombré que O^{\ominus} , l'attaque du C₂ encombré sera moindre en importance que celle de C₆ ; le rapport r va diminuer.

e. **A₂** ayant une liaison CCl équatoriale est majoritaire par rapport à **A₁**.

La réaction ② est donc plus rapide.

La cinétique E₂ obéit à $v_2 = k_2(\text{Base})(\text{A}_2)$ plus importante que $v_1 = k_1(\text{Base})(\text{A}_1)$ avec $k_1 \neq k_2$ vu les circonstances égales en dehors de la configuration.

3.a.



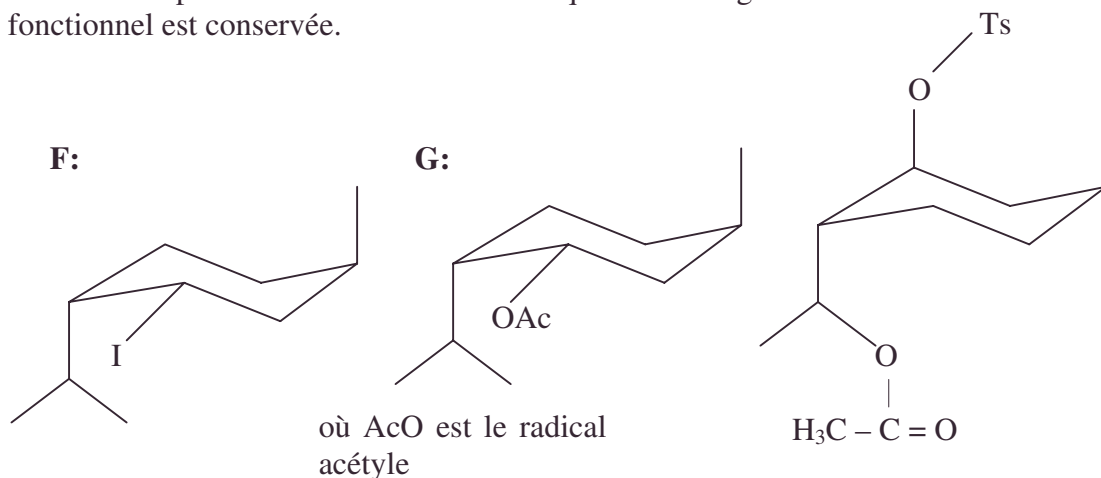
Alcools

b. On aura le produit souhaité

α. si le carbone 1 ne change pas de configuration dans les nouvelles conditions.

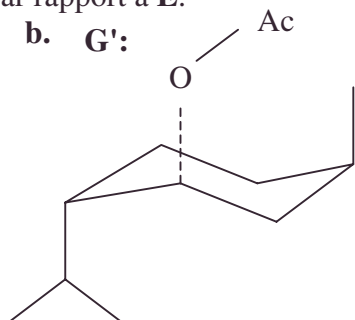
β. si l'élimination n'est pas favorisée.

4.a. Le composé **E** est un ester dans lequel la configuration de l'atome de carbone fonctionnel est conservée.



Le mécanisme probable est la $\text{S}_{\text{N}}2$ vu la nucléophilie affirmée de I^- et de CH_3COO^- et la difficulté d'obtenir un carbocation plan ; elle entraîne une inversion de configuration par rapport à **E**.

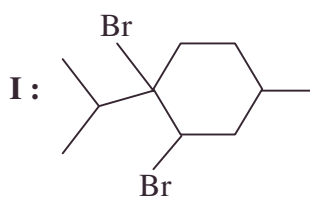
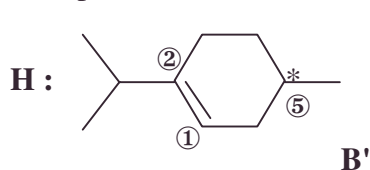
b. G':



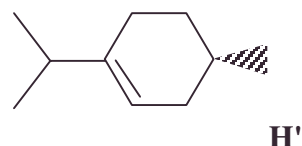
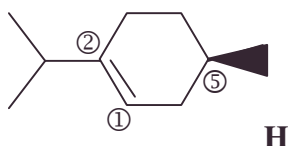
Peut s'obtenir vu **2.β.** par action de SOCl_2 sur le menthol dans la pyridine (qui se fait avec inversion de configuration) suivie de l'action de l'acétate dans un milieu polaire qui se fait avec une inversion de configuration d'où finalement la configuration de **G'** où C_1 est R comme dans le menthol.

5.a. On opère la déshydratation du menthol. On retrouve **B'** comme produit majoritaire a priori et qui possède un carbone asymétrique donc 2 stéréoisomères.

Formules planes :



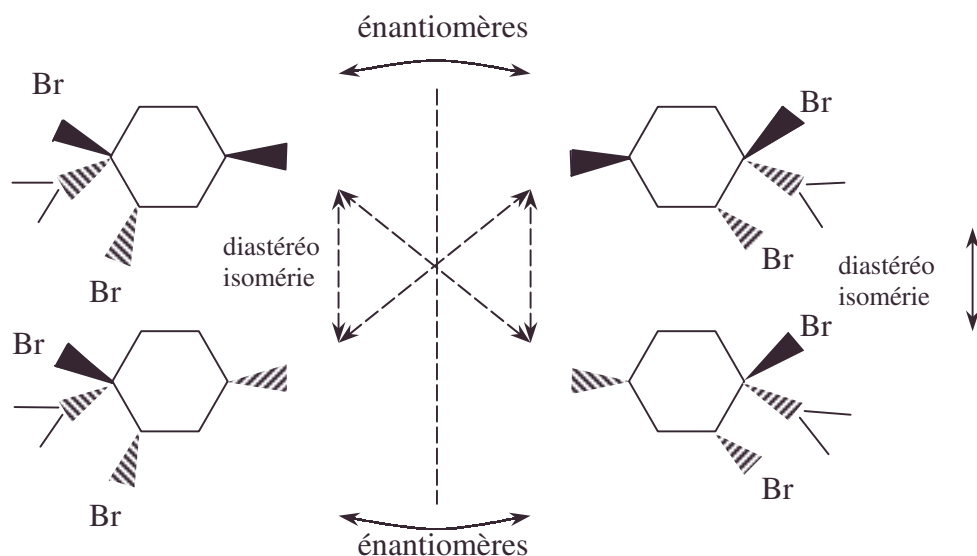
b.



le lien est l'énantiomérisme

c. L'addition de Br_2 sur **H** se fait par l'intermédiaire d'un ion ponté (plan) avec 2^{ème} addition de type anti : si ② est R, ① sera S ; si ② est S, ① sera R, sachant que ⑤ peut être R et S.

On obtient 4 stéréoisomères.



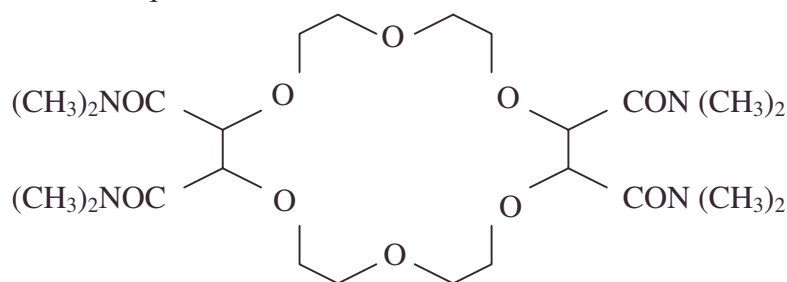
5.7.2. Synthèse de Williamson d'un éther-couronne

Le composé **A** de formule plane :

$$\begin{array}{c}
 \text{O} \quad \quad \quad \text{O} \\
 \parallel \quad 2 \quad 3 \quad \parallel \\
 (\text{CH}_3)_2 \text{NC} - \text{CH} - \text{CH} - \text{CN}(\text{CH}_3)_2 \\
 | \quad | \\
 \text{OH} \quad \text{OH}
 \end{array}$$

où les atomes de carbone 2 et 3 sont de configuration R (rectus), réagit avec le composé **B** de formule : $\text{ICH}_2 - \text{CH}_2 - \text{O} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2\text{I}$, en présence d'éthanolate de thallium TlOC_2H_5 , dans un solvant dipolaire aprotique (le diméthylformamide (DMF) de formule $\text{H} - \text{CO} - \text{N}(\text{CH}_3)_2$).

Proposer un enchaînement synthétique permettant d'obtenir la molécule-couronne suivante : **C**, dont on indiquera la stéréochimie.

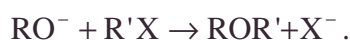


Autres concours – Durée : 1h30

Corrigé

A. Préliminaires

1. Référence d'une synthèse de Williamson : on a une substitution nucléophile :



Quand X est relié à un carbone primaire, on a une $\text{S}_\text{N}2$. Ici le nucléophile réel est l'alcool.

2. **C** correspond à 4 substitutions de ce type entre 2 molécules de diols et 2 molécules de dérivés diodés.

• diméthylformamide, éthanolate de thallium, éther-couronne, rectus, $\text{S}_\text{N}2$, solvant, synthèse de Williamson

Alcools

3. Les produits obtenus par réaction entre A et B ne sont pas tous aussi stables que C dont les symétries permettent un maximum relatif d'entropie (cf. $S = k \ln \Omega$).

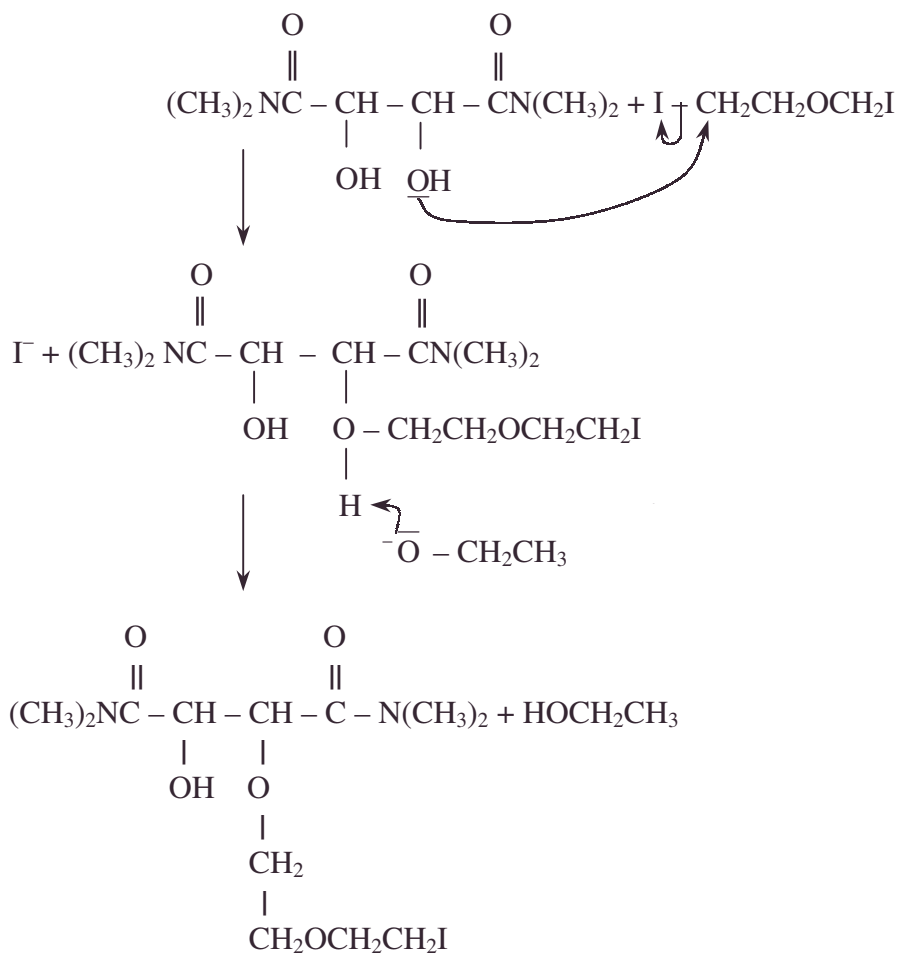
4. Le solvant dipolaire permet la dissolution ionique de TiOC_2H_5 :



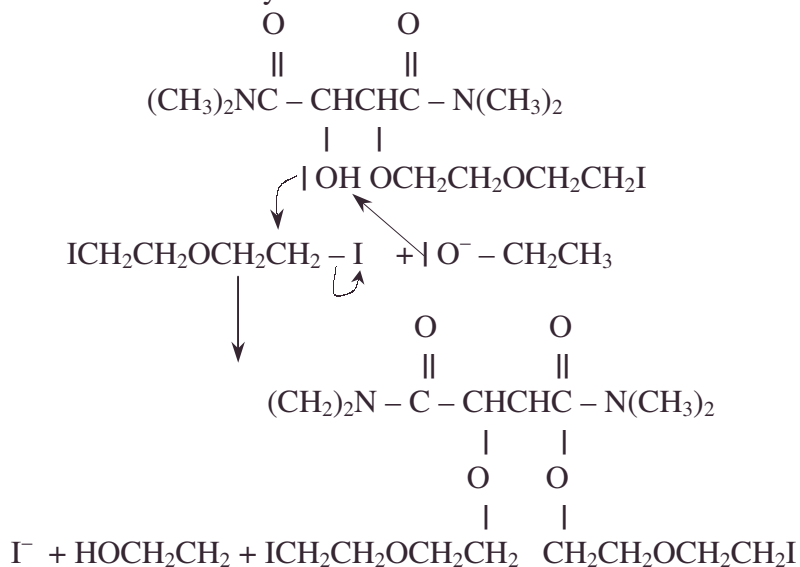
5. On a ensuite une réaction acido-basique : $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{O}^- + \text{H}^+ \rightarrow \text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

B. Etapes de la synthèse

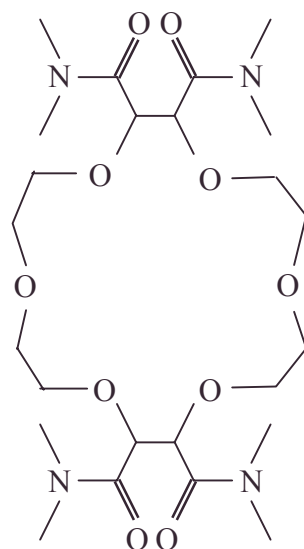
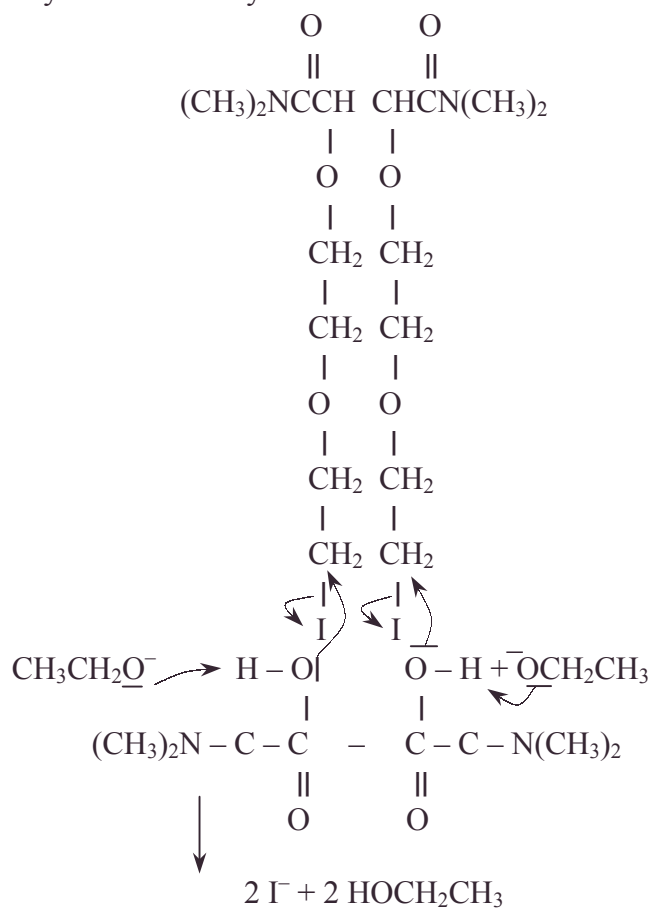
1. Première substitution



2. Seconde substitution "symétrisante"



3. Substitution symétrisante et cyclisante

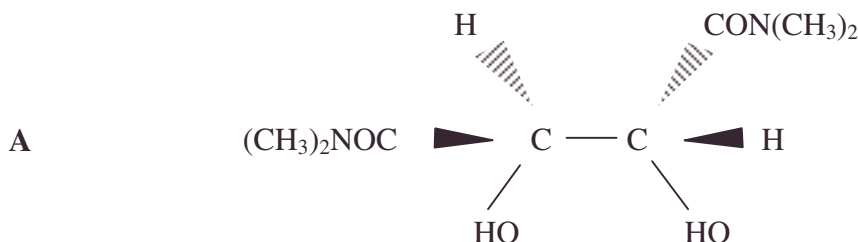


4. Stéréochimie : ordre de priorité des substituants carbonés asymétriques de A.

a > b > c > d avec

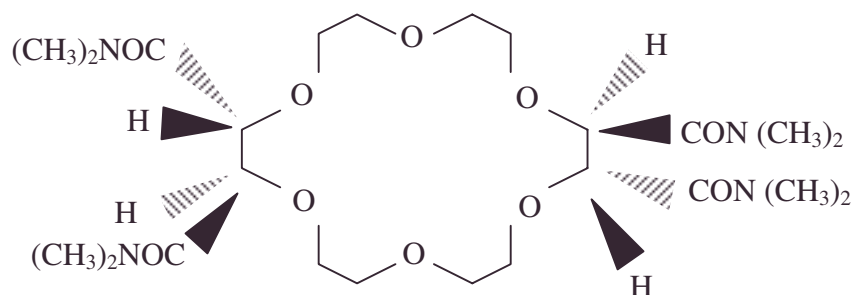
• *cyclisation*

Les configurations absolues des carbones asymétriques 2 et 3 sont R, d'où :



Dans le mécanisme S_N2 , l'inversion de Walden concerne le carbone lié à l'halogène mais pas les autres carbones qui restent inchangés.

Les carbones asymétriques de l'éther couronne restent donc R.



Ce ligand multidentate permet des complexations stabilisantes où la taille de l'ion à complexer a de l'importance par rapport à celle de la "couronne".

5.7.3. Obtention industrielle du MTBE, antidétonant non polluant

Les différentes parties du problème sont largement indépendantes. Certaines valeurs numériques de l'énoncé sont données en S.I. (Système international) .

Les résultats numériques doivent faire apparaître les unités légales.

Le plomb tétraéthyle a été utilisé pour améliorer le pouvoir antidétonant des carburants. La mise au point d'essence sans plomb a été rendue possible par l'addition de tertibutyl-méthyléther ((CH₃)₃C – O – CH₃). On se propose d'étudier dans ce problème différents aspects du processus industriel de fabrication de cet additif.

Première partie – Obtention du MTBE par déshydratation

I.A. Déshydratation du 2-méthyl-propan-2-ol (noté A).

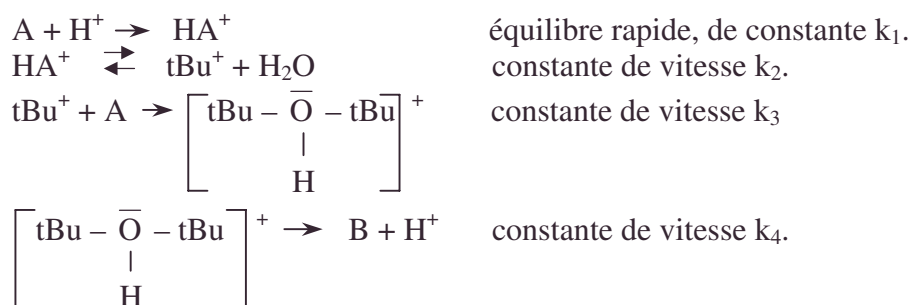
Le chauffage en présence d'acide sulfurique de l'alcool A fournit un mélange de deux composés (B) et (C) de formules respectives C₈H₁₈O et C₄H₈.

1. Donner le schéma réactionnel flèches justificatives des échanges électroniques, expliquant la fixation du proton sur l'alcool (A).

L'acide conjugué de l'alcool sera noté HA⁺.

2. Le mécanisme de formation de (B) peut être résumé par les étapes suivantes où on note tBu le radical (CH₃)₃C.

• acide sulfurique, carbone asymétrique, chauffage, configuration absolue, déshydratation, flèche d'échange électronique, inversion de Walden, ordre de priorité, R, S_N2 , tertibutyl-méthyléther, tétraéthylplomb



- Montrer que ce mécanisme est compatible avec une réaction d'ordre 2.
 - Que devient l'ordre de la réaction si l'on utilise des traces d'acide dans tBuOH pur ?
3. Proposer une suite de réactions élémentaires justifiant la formation de (C). Justifier le fait que (C) soit toujours largement majoritaire.

B. Déshydratation intermoléculaire

Un mélange équimolaire de (A) et de méthanol est chauffé. Il se produit diverses réactions de déshydratation :

- Quel(s) catalyseur(s) peut-on obtenir ?
- Quels composés peut-on obtenir ?
- Justifier par un schéma réactionnel la formation de MTBE.
- Le MTBE est en fait obtenu très minoritairement. Commenter.
- Le chauffage d'un mélange des deux alcools peut-il constituer une méthode intéressante de préparation du MTBE ?

Deuxième partie : obtention du MTBE par la synthèse de Williamson

On mélange deux volumes égaux d'une solution de 2-méthyl-propanolate de sodium (noté tBuONa) 1 mol.L^{-1} et d'une solution d'iodométhane 1 mol.L^{-1} . Ces solutions sont réalisées dans un solvant aprotique convenablement choisi. Le mélange ainsi obtenu sera noté S dans la suite.

II.A. Il est possible de préparer une solution de tBuONa dans tBuOH en introduisant du sodium dans un excès de 2-méthyl-propan-2-ol.

- Quelle réaction explique la formation de tBuONa ?
- Quelle réaction se produirait si la solution obtenue était mélangée à de l'eau ?

B.1. Indiquer quelle réaction se produit dans le mélange S.

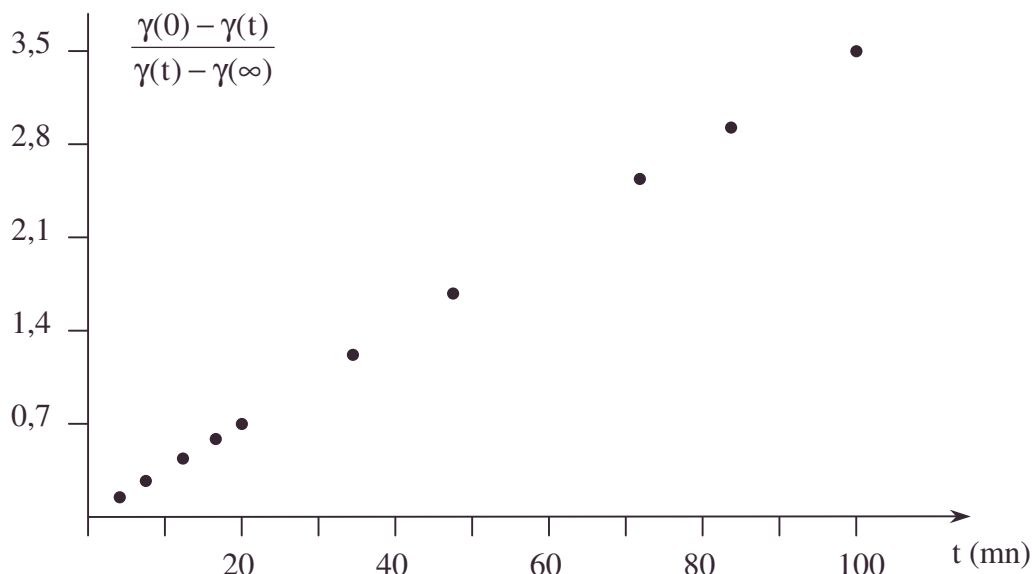
- Préciser le mécanisme (justifier la réponse).

Quelle loi cinétique vérifie probablement cette réaction ?

C. L'évolution au cours du temps de la composition du mélange est suivie grâce à la mesure de la conductivité γ de la solution S. On supposera que cette solution vérifie la loi de Kohlrausch : $\gamma = \sum \lambda_i C_i$.

- Que représentent λ_i et C_i dans la relation précédente ? Quelles sont les unités dans le système international des grandeurs γ , λ_i , C_i ?
- Pourquoi la conductivité de la solution varie-t-elle au cours du temps ?
- Une série de mesures a permis d'établir le graphique ci-dessous, $\gamma(0)$ et $\gamma(\infty)$ désignant respectivement la conductivité de la solution à l'instant initial et au bout d'une durée théorique infinie.

Alcools



Démontrer que ces mesures permettent de vérifier la loi cinétique précédemment admise.

4. Déterminer la valeur de la constante de vitesse et préciser son unité.

D.1. Peut-il exister des réactions parasites ? Si oui, les préciser.

2. La méthode étudiée ci-dessus constitue-t-elle une voie d'accès intéressante au MTBE ?

3. Que donnerait la réaction $\text{CH}_3\text{O}^- + (\text{CH}_3)_3\text{CCl}$?

Troisième partie : obtention industrielle

Le 2-méthyl-propène (isobutène) est obtenu lors du vapocraquage des hydrocarbures. La voie industrielle d'obtention du MTBE utilise l'action du méthanol sur l'isobutène en présence d'acide sulfurique selon la réaction en phase gazeuse.



On pense que l'acide sulfurique protone l'alcène, qui subit ensuite une attaque nucléophile du méthanol.

A. Etude de la réaction

1. Décrire le mécanisme probable de cette réaction.

2. Dans la suite du problème, on supposera que les entropies et enthalpies standard de réaction ne dépendent pas de la température. Calculer l'enthalpie standard de la réaction $\textcircled{1}$ $\Delta_r H^\circ_1$ en utilisant les valeurs suivantes des énergies de liaison en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$:

$D(\text{C}-\text{C}) = 370$; $D(\text{C}=\text{C}) = 620$; $D(\text{O}-\text{H}) = 448$; $D(\text{C}-\text{O}) = 360$; $D(\text{C}-\text{H}) = 413$

3. A 298 K, l'enthalpie libre réactionnelle standard de la réaction $\textcircled{1}$ $\Delta_r G^\circ_1$ à 298 K vaut $-21 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Déterminer l'entropie réactionnelle standard de $\textcircled{1}$ $\Delta_r S^\circ_1$.

4. Calculer l'enthalpie libre standard de la réaction $\textcircled{1}$ à 400 K.

B. Etude du procédé industriel

1. La réaction de synthèse est réalisée industriellement à 400 K, sous une pression de 30 bars et en présence d'un large excès de méthanol.

Dans ces conditions, tous les constituants sont gazeux.

a. Pourquoi opère-t-on sous 30 bars plutôt que sous pression atmosphérique ? Justifier.

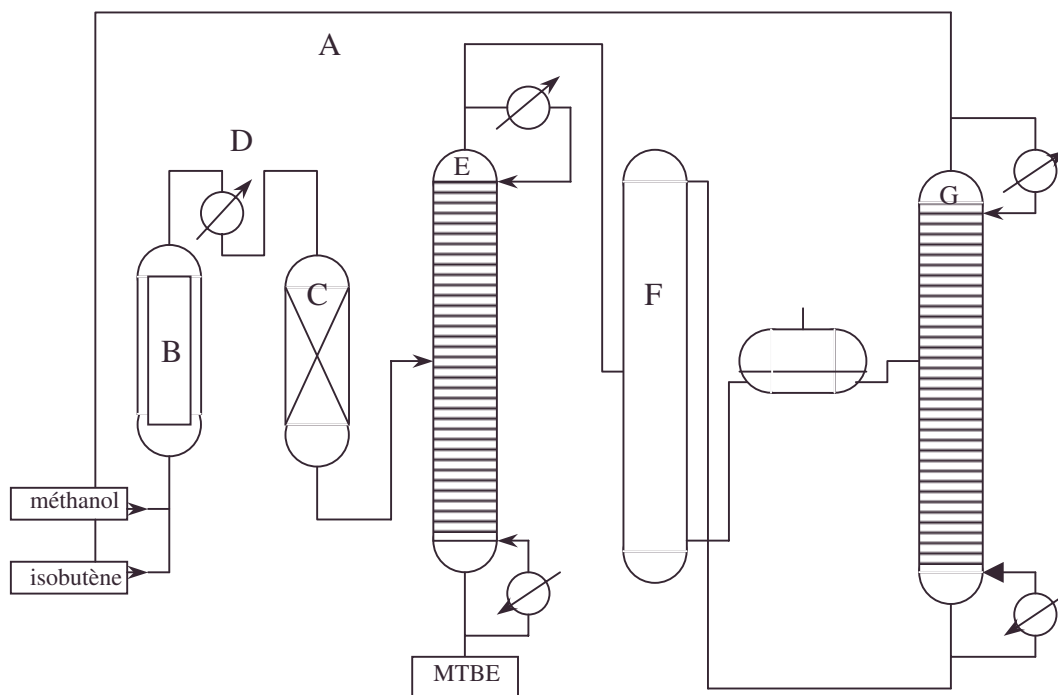
b. Pourquoi opère-t-on à 400 K et non pas à 298 K ? Justifier.

c. Quel est l'intérêt de l'excès de méthanol ?

d. Quelle est, en conséquence, l'impureté principale du MTBE ainsi préparé ? Est-ce gênant pour l'utilisation du MTBE ?

2. Le schéma du processus industriel est donné ci-dessous :

• 2-méthyl-propène, énergie de liaison, enthalpie libre standard de la réaction, enthalpie standard de la réaction, entropie standard de la réaction, isobutène, méthanol, moyenne pression, procédé industriel, protonation, réaction parasite, vapocraquage



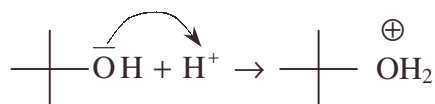
B est le four de synthèse, C un four de finition, D un réfrigérant.

- Pourquoi refroidit-on le mélange de synthèse entre les réacteurs B et C ?
- La partie E représente une colonne à distiller. Pourquoi le MTBE est-il obtenu en bas de la colonne ?
- Quel est le composé majoritaire obtenu en haut de la colonne ?
- Quel est le rôle de la conduite A ?

Centrale ; Durée 2h30

Corrigé

I.A.1. 1ère étape : nucléophilie de l'alcool



pour traduire : $\text{A} + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{HA}^+$

2.a. Introduisons les données de l'énoncé :

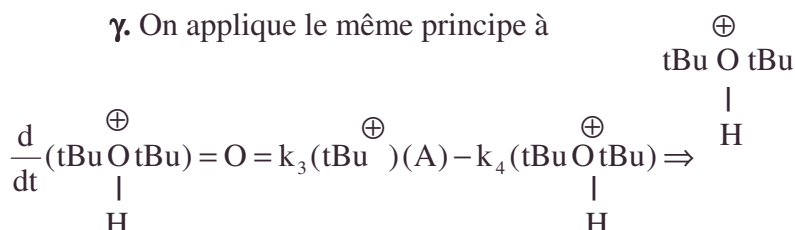
α . On a l'équilibre $\text{A} + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{HA}^+$; $K_1 = \frac{(\text{HA}^+)}{(\text{H})(\text{A})}$.

β . Appliquons le principe de l'état stationnaire à tBu^+ .

$$\frac{d}{dt}(\text{tBu}^+) = 0 = k_2(\text{HA}^+) - k_3(\text{tBu}^+)(\text{A})$$

$$\Rightarrow (\text{tBu}^+) = \frac{k_2(\text{HA}^+)}{k_3(\text{A})} = \frac{k_2 K_1}{k_3}(\text{H}^+)$$

γ . On applique le même principe à



• colonne à distiller, four de finition, four de synthèse, impureté, majoritaire, MTBE, nucléophilie de l'alcool, principe de l'état stationnaire, processus industriel, réacteur

Alcools

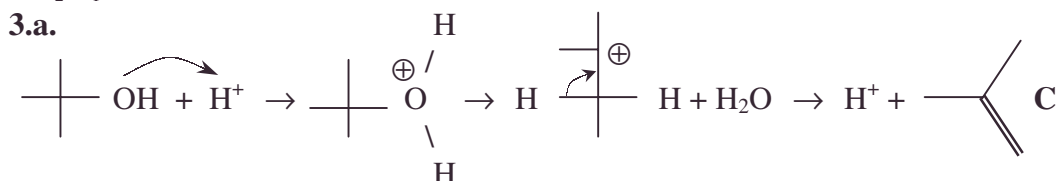
$$(\text{tBuO}^\oplus\text{tBu}) = \frac{k_3}{k_4} (\text{tBu}^\oplus)(\text{A}) = \frac{k_3}{k_4} \frac{k_2 K_1}{k_3} (\text{H}^+)(\text{A}) = \frac{k_2 K_1}{k_4} (\text{H}^+)(\text{A})$$

$$\delta. v = \frac{d(\text{B})}{dt} = k_4 (\text{tBuO}^\oplus\text{tBu}) = k_2 K_1 (\text{H}^+)(\text{A}).$$

On obtient une réaction d'ordre 2 pour l'obtention de B.

b. A est en excès, il y a dégénérescence de l'ordre.

On a $k_2 K_1 (\text{A}) = K$ et $v = K (\text{H}^+)$, réaction d'ordre apparent 1.



b. La cinétique est rapide ;

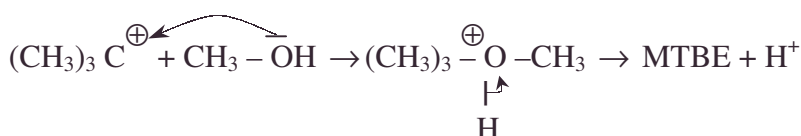
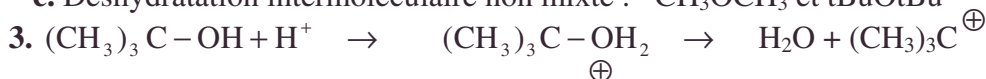
la thermodynamique est favorable : (C) plus stable que (B) car édifice moléculaire plus homogène \Rightarrow (C) majoritaire largement.

B.1. On veut provoquer le départ de OH^- pour obtenir le carbocation \Rightarrow catalyseurs : H^+ venant de H_2SO_4 ou H_3PO_4 ou acides de Lewis tels que : Al_2O_3 ou ThO_2 à chaud.

2.a. Déshydratation intramoléculaire :

b. Déshydratation intermoléculaire mixte : tBuOCH_3 MTBE

c. Déshydratation intermoléculaire non mixte : CH_3OCH_3 et tBuOtBu

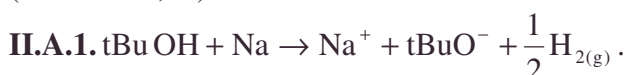


4. Le composé majoritaire est

Il y a plusieurs composés minoritaires dont CH_3OCH_3 très stable.

MTBE est donc très minoritaire.

5. On augmente la vitesse de réaction ; on favorise l'obtention du plus stable : ce n'est donc pas intéressant ici. Rappelons la nécessité de séparer les produits (distillation,...)



2. $\text{tBuO}^- + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{tBuOH} + \text{OH}^-$: tBuO^- est une base forte dans l'eau.

B.1. $\text{tBuO}^- + \text{CH}_3\text{I} \rightarrow \text{I}^- + \text{tBuOCH}_3$.

2.a. Le mécanisme est une $\text{S}_\text{N}2$ car impossibilité dans une $\text{S}_\text{N}1$ d'obtenir CH_3^+ sans conditions particulières de stabilisation.

b. $v = k [\text{tBuO}^-] [\text{CH}_3\text{I}]$; l'étape lente impose sa vitesse.

• acide de Lewis, carbocation, dégénérescence de l'ordre, déshydratation intramoléculaire, majoritaire, minoritaire

C.1.a. γ est la conductivité de la solution.

C_i est la concentration du constituant i .

λ_i est la conductivité équivalente du constituant i . (cf. conductivité formelle d'une solution où $C_i = 1 \text{ mol.m}^{-3}$).

b. γ s'exprime en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, C_i en mol.m^{-3} , λ_i en $\Omega^{-1}\text{m}^2\text{mol}^{-1}$.

2. La conductivité de tBuO^- étant différente de celle de I^- la conductivité ionique de la solution varie au cours du temps du fait de la substitution progressive.

3. $\text{tBuO}^- + \text{CH}_3\text{I} \rightarrow \text{I}^- + \text{MTBE}$ pour un litre de solvant ; on a les bilans :

$t = 0$	0,5	0,5	0	0
t	$0,5 - \xi$	$0,5 - \xi$	ξ	ξ
$t \infty$	0	0	0,5	0,5

$$v = \frac{d\xi}{dt} = k(0,5 - \xi)^2 \Rightarrow \frac{d\xi}{(0,5 - \xi)^2} = kt \Rightarrow \frac{1}{0,5 - \xi} - \frac{1}{0,5} = kt.$$

$$\frac{\xi}{0,5 - \xi} = 0,5kt.$$

$$\gamma(0) = \lambda_{\text{tBuO}^-} \cdot 0,5$$

$$\gamma(\infty) = \lambda_{\text{I}^-} \cdot 0,5$$

$$\gamma(t) = \lambda_{\text{tBuO}^-} (0,5 - \xi) + \lambda_{\text{I}^-} \xi$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma(0) = \lambda_{\text{tBuO}^-} \cdot 0,5 \\ \gamma(\infty) = \lambda_{\text{I}^-} \cdot 0,5 \\ \gamma(t) = \lambda_{\text{tBuO}^-} (0,5 - \xi) + \lambda_{\text{I}^-} \xi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\gamma(0) - \gamma(t)}{\gamma(t) - \gamma(\infty)} = \frac{-\xi(\lambda_{\text{I}^-} - \lambda_{\text{tBuO}^-})}{-(0,5 - \xi)(\lambda_{\text{I}^-} - \lambda_{\text{tBuO}^-})} = \frac{\xi}{0,5 - \xi} \end{array}$$

$$\frac{\gamma(0) - \gamma(t)}{\gamma(t) - \gamma(\infty)} = 0,5kt \text{ est vérifié vu le graphique ; l'ordre 2 est acceptable.}$$

4. $k = 0,070 \text{ mol}^{-1}\text{L min}^{-1}$, vu les unités de l'énoncé.

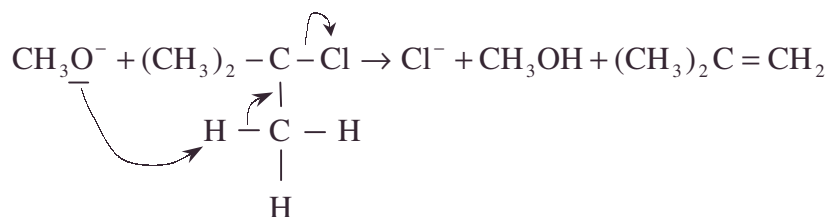
D.1. Vu la question **D.3.**, la concurrence $\text{SN}_2 - \text{E}_2$ n'est pas à craindre ici car CH_3I ne peut pas donner un alcène ; on suppose que le choix du solvant est adapté (à la différence de l'eau solvant $\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{OH}^-$) pour éviter des réactions acidobasiques ou d'autres avec les réactifs nucléophiles-électrophiles.

2. La mesure de k confirme l'acceptabilité de la méthode.

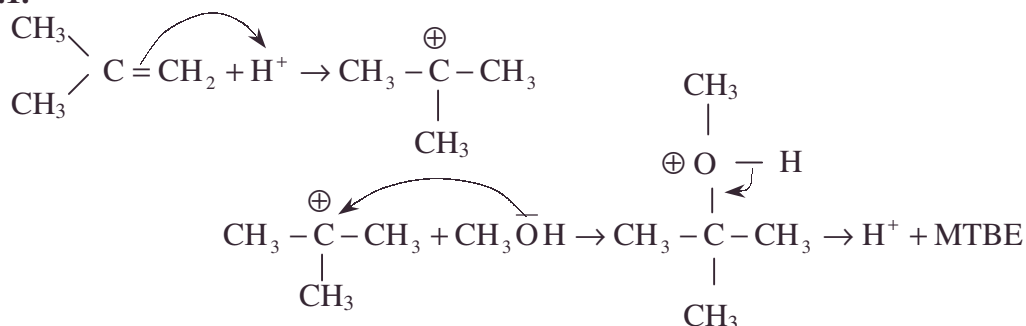
3. On peut envisager la réaction de Williamson :



Mais la basicité de CH_3O^- peut provoquer l'élimination E_2 productrice d'alcène (cf. **D.1.**)



IV.A.1.



$$2. \Delta_r H_1^0 = \Delta_f H_{\text{MTBE}}^0 - \Delta_f H_{\text{isobutène}}^0 - \Delta_f H_{\text{méthanol}}^0$$

• concurrence $\text{SN} - \text{E}$, conductivité équivalente, distillation, E_2 , étape lente, graphe, nucléophile, nucléophilie, séparation, SN_1 , solvant

Alcools

$$\Delta_r H_1^0 = 12D(C-H) - 2D(C-O) - D(O-H) - 3D(C-C) + 8D(O-H) + D(C=C) + 3D(O-H) + D(C-O) + D(O-H)$$

$$\Delta_r H_1^0 = D(C=C) + D(O-H) - (D(C-C) + D(C-O) + D(C-C)).$$

A.N. : $\Delta_r H_1^0 = -75 \text{ kJ.mol}^{-1}$. La réaction est exothermique.

$$3. \Delta_r G_1^0 = \Delta_r H_1^0 - T \Delta_r S_1^0 \Rightarrow \Delta_r S_1^0 = \frac{\Delta_r H_1^0 - \Delta_r G_1^0}{T_{298}}.$$

A.N. : $\Delta_r S_1^0(298) = -181 \text{ J K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

$$4. \Delta_r G_2^0 = \Delta_r H_1^0 - T_2 \Delta_r S_1^0, \text{ vu l'hypothèse de l'énoncé.}$$

A.N. : $\Delta_r G_2^0 = -2,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

B.1.a. La réaction (supposée réversible) en phase gazeuse se faisant avec diminution du nombre de moles gazeuses est favorisée par une pression de 30 bars.

b. La réaction (supposée réversible) est exothermique et n'est pas favorisée par une augmentation de température (four de synthèse) mais il faut prendre en compte la cinétique intervenant dans le rendement horaire.

c. L'excès de méthanol augmente la vitesse de production de MTBE ; elle dilue l'isobutène susceptible de dimérisation dont la vitesse est ainsi diminuée.

d. A chaud $2\text{CH}_3\text{OH} \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{CH}_3\text{OCH}_3$ est possible ; sans réaction avec MTBE, il faut les séparer néanmoins. On considérera ultraminoritaire la polymérisation radicalaire de l'isobutène.

2.a. On joue sur une plus basse température qui favorise le déplacement de l'équilibre par contrôle thermodynamique (partiel) mais seulement sur une partie du parcours, à la fin.

b. En cas de colonne, on recueille le produit pur de température d'évaporation la plus élevée, le plus facile à condenser. C'est donc le cas du MTBE.

c. L'autre composé est sans doute le méthanol en excès ; il est recyclé via F, G, A.

d. A est la conduite qui ramène le méthanol au début du cycle de production.

5.7.4. Mécanismes et stéréochimie

Voir page 1758.

5.7.5. Synthèse d'un parfum

Voir page 1762

5.7.6. Estérification des acides bicarboxyliques et chiralité

Voir page 1771.

5.7.7. Synthèse malonique de l'acide hexanoïque

Voir page 1773.

5.7.8. Synthèse historique du terpèneol

Voir page 1779.

5.7.9. Survol 3

Voir page 1799.

5.7.10. Survol 5

Voir page 1803

• cycle de production, dimérisation, excès, exothermique, isobutène, moyenne pression, recyclage, rendement horaire, séparation, température d'évaporation

5.8. Fonctions azotées

Appartient aux programmes de BCPST1, PC et TPC2

5.8.1. L'élément azote en chimie organique

1. Propriétés basiques des amines : soit le tableau :

Corps	aniline	ammoniac	méthanamine	diméthylamine	triméthylamine
pK _A	4,6	9,2	10,6	10,8	9,8

Justifier les différences de pK_A observées.

2. Propriétés nucléophiles des amines

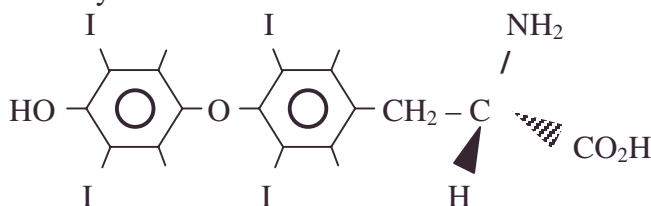
a. On fait réagir la propanamine avec de l'iodométhane en excès. On obtient un sel qui, chauffé en milieu basique en présence de AgOH, conduit à un alcène et à une amine tertiaire. Trouver cet alcène en décrivant la suite des réactions.

b. La propanamine réagit maintenant avec le chlorure d'éthanoyle. Donner l'équation bilan, le mécanisme et le nom des produits de la réaction.

3. Isomérisation

Parmi les composés suivants, trouver ceux qui sont optiquement actifs. Donner les configurations absolues s'il y a lieu.

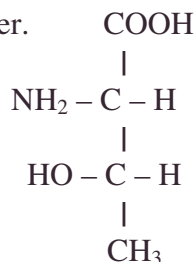
a. La thyroxine :



b. L'imine : $\phi - \text{CH} = \text{N} - \phi$.

Quel est le type d'isomérisation présenté par l'imine ?

c. L'allothréonine : en représentation de Fischer.



Représenter les stéréo-isomères et indiquer leur configuration.

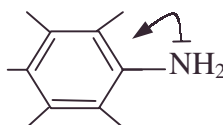
4. Synthèse de composé nitré

Donner les réactions permettant de passer du benzène au méthanitrotoluène. Préciser les mécanismes. On dispose de benzène, d'iodométhane et de tout corps minéral nécessaire.

AIR ; Durée : 2h

Corrigé

II.1. Prenons NH₃ comme référence. Pour l'aniline, on a une basicité diminuée par mésomérie (conjugaison).

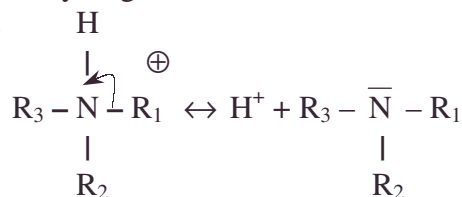


On a l'ordre des basicités :

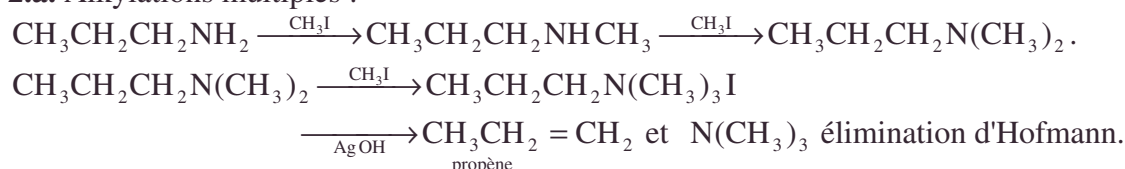
ammoniac > amine primaire > amine secondaire > amine tertiaire...

• allothréonine, amine, aniline, chlorure d'éthanoyle, configuration absolue, conjugaison, hydroxyde d'argent, iodométhane, mésomérie, méthanitrotoluène, nucléophile, nucléophilie de l'azote, propanamine, représentation de Fischer, thyroxine

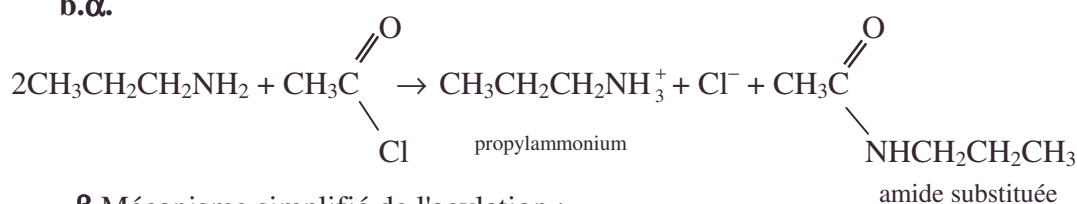
si on considère l'effet inductif donneur des groupes alkyles qui donne de la force à l'acide conjugué : mais à l'état dissous où la taille des espèces joue un rôle, la solvation par établissement des liaisons hydrogènes, intervient et inverse l'ordre théorique de l'état gazeux, d'où l'ordre donné.



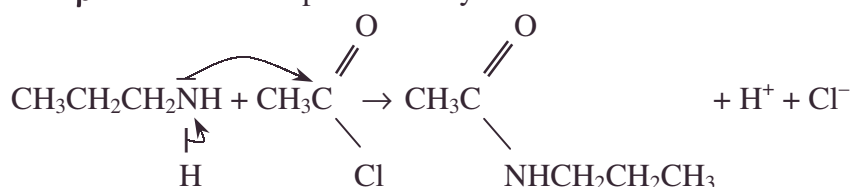
2.a. Alkylations multiples :



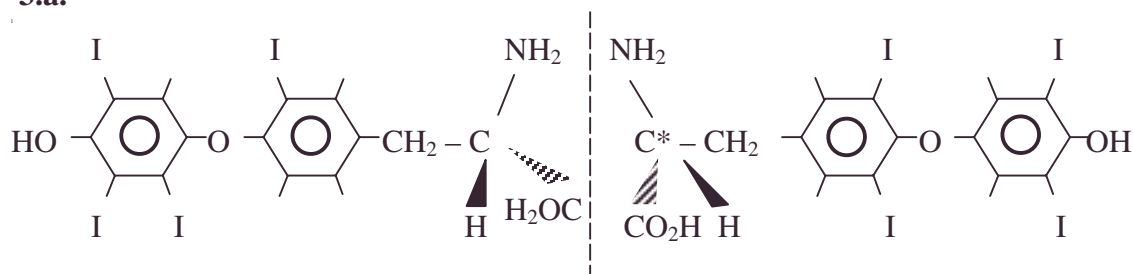
b.α.



β. Mécanisme simplifié de l'acylation :

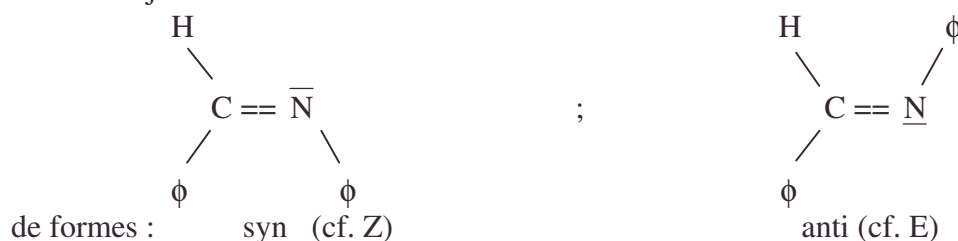


3.a.

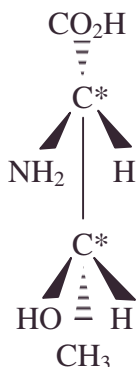


Optiquement actif, C* est S pour la partie à gauche, son énantiomère représenté à droite a un carbone actif C* qui est R.

b. Pas d'activité optique. Isomérisation géométrique des imines. (cf. VSEPR) où le doublet libre de N joue un rôle



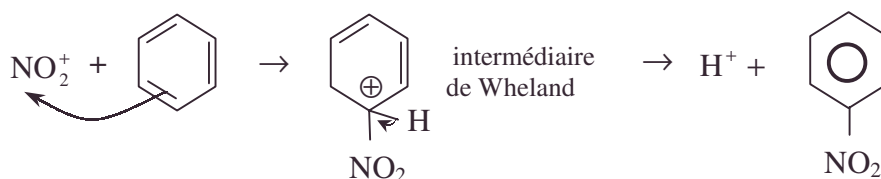
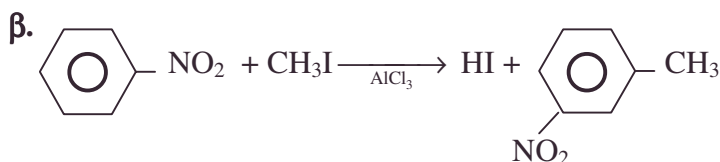
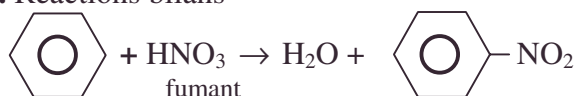
c. Soit l'énantiomère S, S.



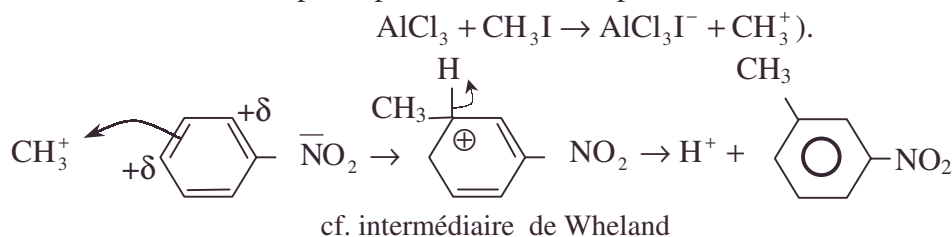
et l'énantiomère R, R (2 diastéréoisomères like)



En réunissant les carbones ad hoc, on a aussi les diastéréoisomères (unlike) RS et SR, énantiomères entre eux.

4.a.α. Réactions bilans

β. Vu l'effet orienteur en méta de NO_2 (cf. Hollemann), adoptons le schéma réactionnel formel (de fait mécanisme concerté plus compliqué car CH_3^+ n'existe pas, il faut considérer un complexe polarisé où tout se passe comme si :



5.8.2. Synthèse d'un antihistaminique : l'antergan

1. Le benzène réagit avec l'acide nitrique concentré en présence d'acide sulfurique concentré pour donner A monosubstitué. Trouver A

A est réduit en aniline B par du fer en présence d'acide chlorhydrique.

2. L'éthylène réagit avec l'acide hypochloreux ClOH pour donner un composé que l'on fait réagir mole à mole avec l'ammoniac. On isole le produit C : $\text{C}_2\text{H}_7\text{ON}$ qui possède une fonction amine.

Une mole de C réagit avec une mole de chlorométhane pour donner D puis avec une seconde mole pour donner E : $\text{C}_4\text{H}_{11}\text{ON}$.

• *acide hypochloreux, amine, aniline, antergan, antihistaminique, benzène, complexe polarisé, diastéréoisomère, énantiomère, fer, Hollemann, R R, RS, S S, SR, Wheland, like, unlike*

a. Trouver C, D et E.

b. On soumet ces trois produits à l'action de l'acide nitreux.

1. Comment obtient-on de l'acide nitreux ?

2. Quelles sont les réactions observées sur les trois produits ?

Donner les équations-bilan. Quel est l'intérêt d'une telle réaction ?

3. Quel est le composé B₁ obtenu par action de l'acide nitreux sur B ? Si on fait réagir B₁ sur CuCN en présence de cyanure de potassium, quel composé obtient-on ? Quel est le type de cette réaction ? Si on fait réagir B₁ sur le phénol en milieu faiblement basique, quel est le composé B₂ obtenu ?

A quelle famille appartient-il ? Quel est l'intérêt industriel de ce type de produit ?

3. Le composé E précédent réagit avec PCl₅ puis mole à mole avec B pour donner F. Trouver F.

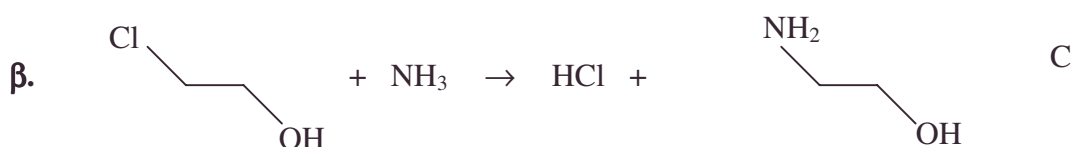
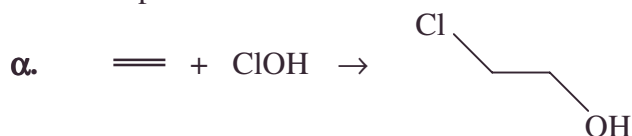
4. F enfin réagit avec le chlorure de benzyle (chlorophénylméthane) pour donner l'antergan C₁₇H₂₂N₂. Donner la formule semi-développée de ce médicament.

Autres concours ; Durée : 2h.

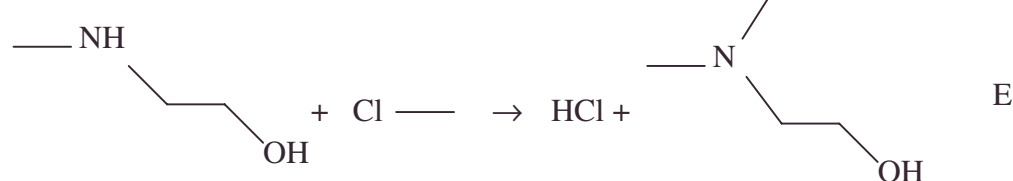
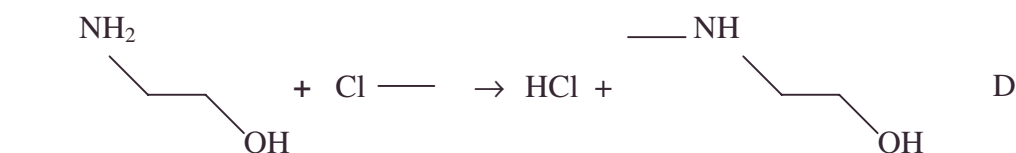
Corrigé



2.a. L'électrophile formel de ClOH est Cl[⊕].

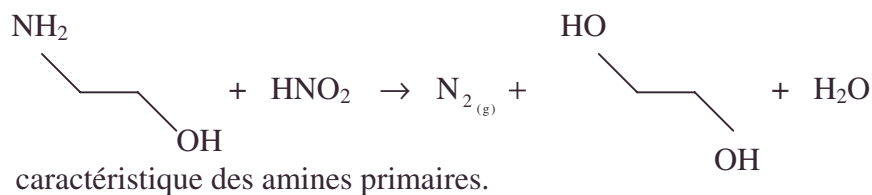


γ.δ. Alkylations multiples

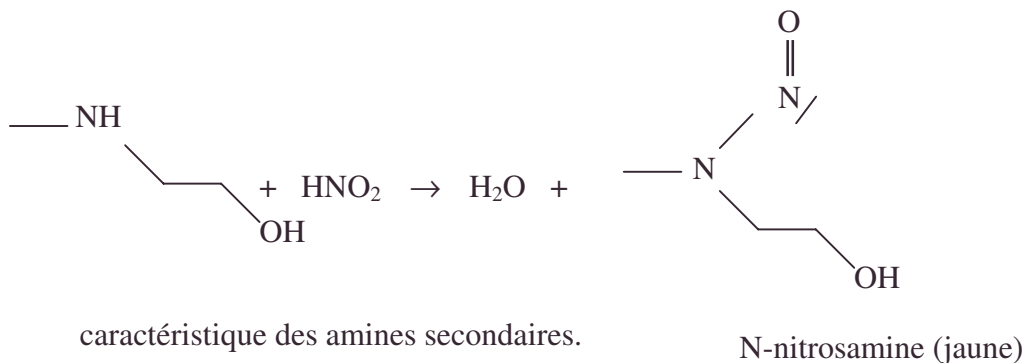


2.b.1. $\text{H}^+ + \text{NO}_2^- \rightarrow \text{HNO}_2$. On suppose disposer de nitrite NO_2^- .

2.α.



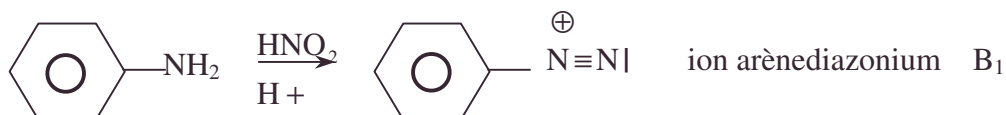
β.



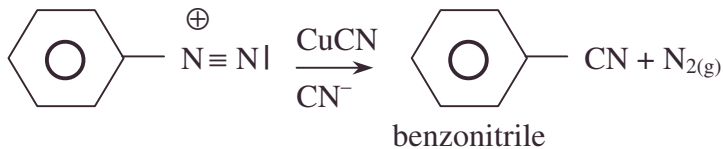
γ. Il ne se passe rien pour les amines tertiaires.

δ. La classe de l'amine est déterminée selon que l'on observe rien, formation d'un liquide jaune ou d'un dégagement gazeux.

3.α.

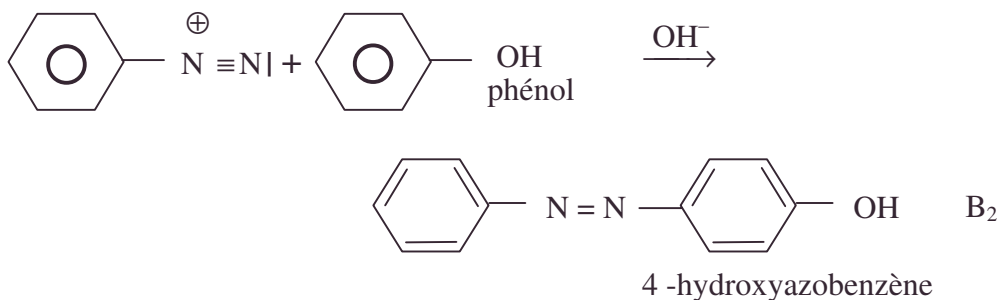


β.



Réaction de Sandmeyer (avec dégagement d'azote).

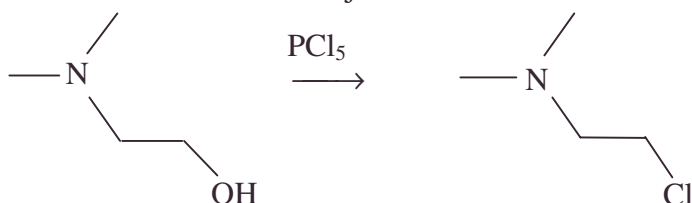
γ. Réaction de couplage diazoïque



Il s'agit d'un diazoïque, utilisé pour certains d'entre eux comme colorants textiles, la couleur étant due à $-\text{N}=\text{N}-$.

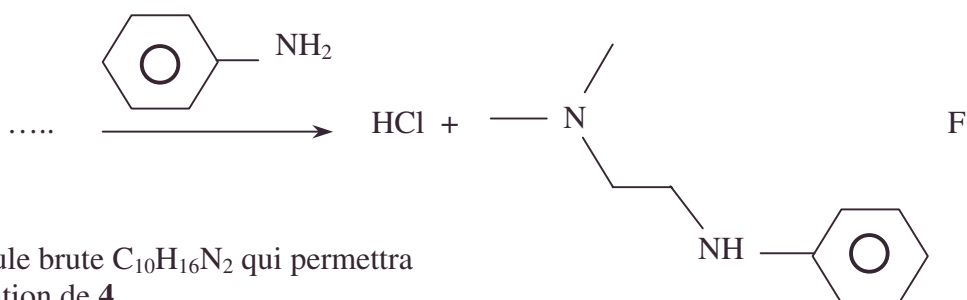
La fonction amine tertiaire ne joue aucun rôle.

3.

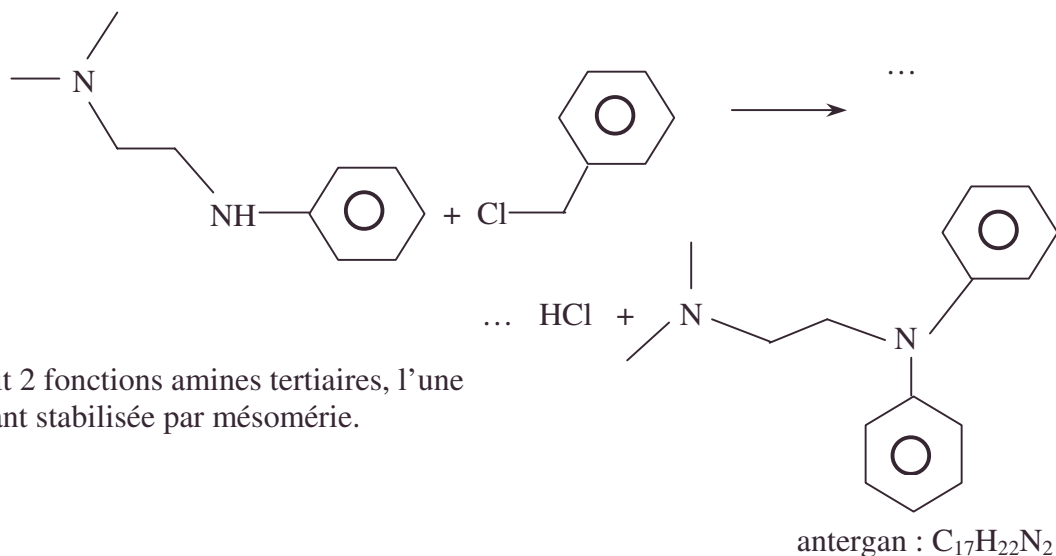


- 4-hydroxyazobenzène, benzonitrile, colorant, dégagement d'azote, diazoïque, nitrosamine, Sandmeyer

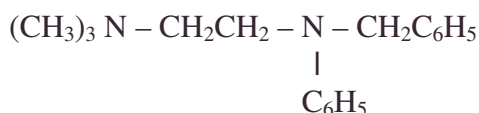
Alkylation de l'aniline qui conservera sa délocalisation électronique.



4.



Soit 2 fonctions amines tertiaires, l'une Etant stabilisée par mésomérie.



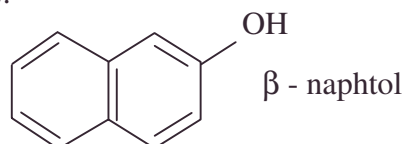
de formule semi-développée.

5.8.3. Synthèse d'un colorant azoïque Le rouge para

Il a été utilisé pour teindre en rouge les torchons de cuisine de nos grand-mères.

1.a. Dans un bécher de 250 cm^3 , on dilue 5 cm^3 d'acide sulfurique concentré dans 50 cm^3 d'eau. On dissout 6 g de 4-nitroaniline. On refroidit dans un bain de glace. Dans un autre bécher, on dissout 3 g de nitrite de sodium dans 15 cm^3 d'eau. On ajoute son contenu à la solution du premier bécher (solution A).

b. Dans un bécher de 250 cm^3 , on place 0,5 g de β -naphtol dans 100 cm^3 d'eau chaude. On ajoute goutte à goutte une solution de soude (hydroxyde de sodium) jusqu'à dissolution complète du β -naphtol (solution B).

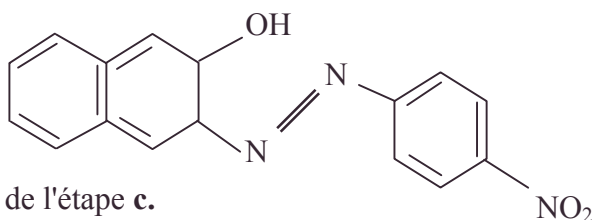


Interpréter cette opération.

c. On ajoute 100 cm^3 d'eau froide à la solution A. On immerge un échantillon de coton dans la solution B, on le retire après 3 minutes et on l'essore, avant de l'immerger dans la solution A. On le retire après quelques minutes, on le lave, on l'essore. Il est rouge.

2.1. Ecrire l'équation de la réaction du nitrite de sodium sur la 4-nitroaniline en milieu sulfurique.

Le rouge para a pour formule :



2.2. Expliquer sa formation lors de l'étape c.

ENS ; Durée : 1 h.

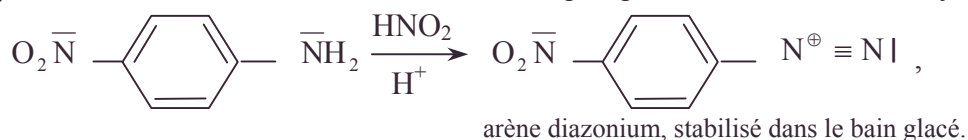
Corrigé

1. O_2N^- — — NH_2^- ; NO_2 diminue par mésomérie la basicité de la fonction amine.

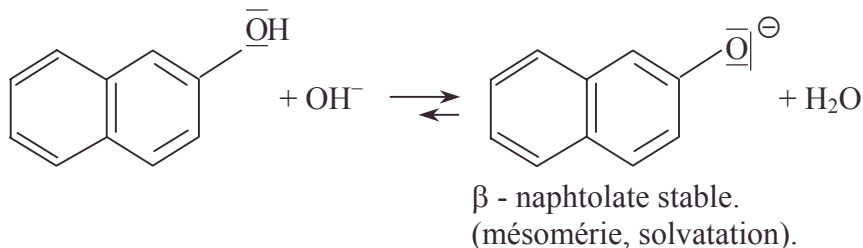
a.α. H_2SO_4 , en présence d'un bain de glace, a sa réactivité par rapport au noyau aromatique ; la protonation de l'arylamine diminue sa stabilité.

β. $\text{NO}_2^- + \text{H}^+ \rightarrow \text{HNO}_2$; cela n'a pas lieu vu l'absence d'acide dans le bécher concerné avant obtention de la solution A.

γ. La solution A voit la formation de HNO_2 qui opère la nitrosation de l'arylamine.

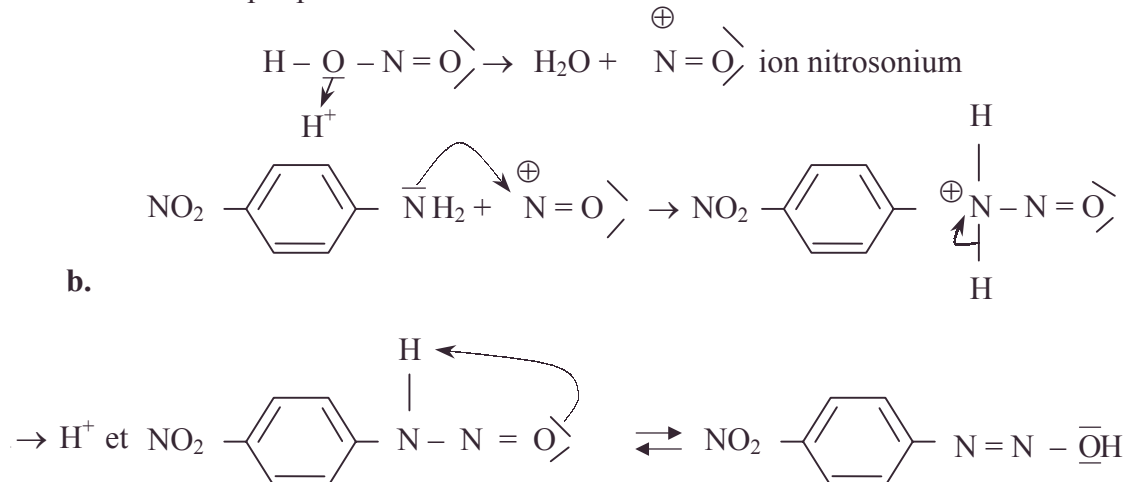


b. L'opération citée dans les conditions de basicité et de température assure la dissolution complète du β-naphtol grâce à la réaction acidobasique (cf. phénol appelé autrefois acide phénique) :

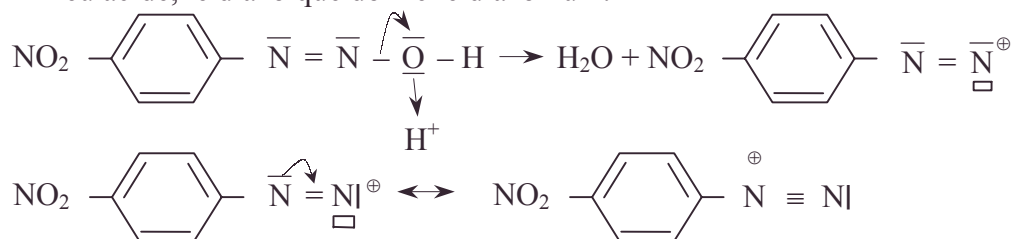


Rappelons la règle de Hollemann qui attribue à $-\text{O}^-$ un effet activant pour une substitution électrophile en ortho ou para (effet + M).

2.1.a. Initiation par protonation de l'acide nitreux :

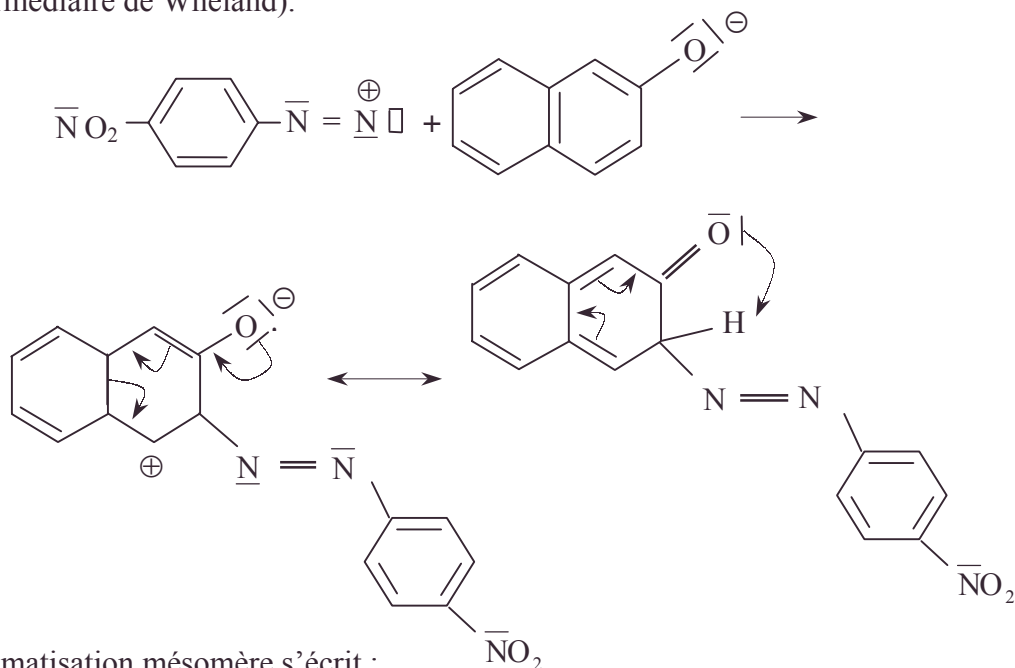


c. En milieu acide, le diazoïque donne le diazonium.

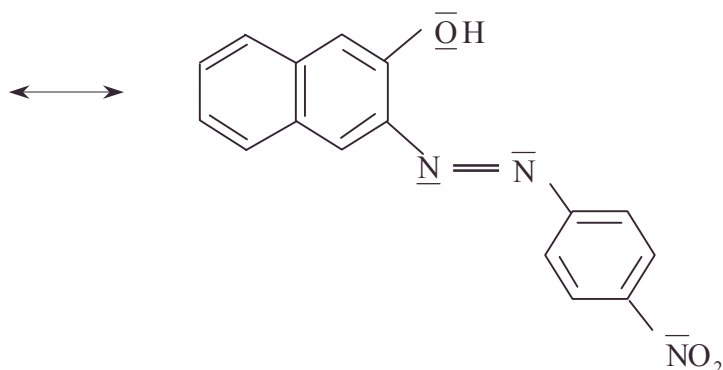


Stabilisation par mésomérie.

2. La substitution en ortho est la seule possible car sans contrainte stérique (cf. intermédiaire de Wheland).



La réaromatisation mésomère s'écrit :



C'est le rouge para, colorant azoïque sans mordant métallique qui s'est formé dans la fibre (stabilisé par mésomérie multiple).

5.8.4. Dérivés du benzène

Voir page 1729.

5.8.5. Synthèse d'un médicament anti-inflammatoire : l'ibuprofène

Voir page 1731.

5.8.6. Synthèse de l'acide barbiturique

Voir page 1776.

5.8.7. Synthèse de l'isocyanate de méthyle et du carbaryle ; exemple d'insecticide

Voir page 1777.

5.8.8. Synthèse historique du terpénoïde

Voir page 1779.

5.8.9. Survol 3

Voir page 1798.

5.8.10. Survol 5

Voir page 1803.

5.8.11. Extraction par solvant - Dosage acidobasique en milieu diphasé

Voir page 1810.

• aromatisation, mésomérie, stabilisation par mésomérie

5.9. Aldéhydes et cétones

appartient aux programmes de BCPST1, PC et TPC2

5.9.1. Premiers mécanismes

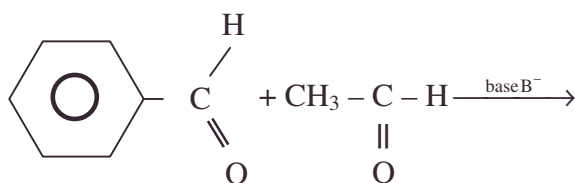
Pour chacune des trois réactions suivantes il est demandé :

- de compléter l'équation bilan en écrivant la (ou les) formule(s) développée(s) plane(s) manquante(s) des produits (ou des réactifs).
- de proposer un mécanisme pour la réaction.
- de préciser l'éventuelle existence énantiomères ou de diastéréoisomères des produits en indiquant s'ils sont obtenus conjointement ou par une voie différente que l'on précisera. Pour chacune des réactions représenter avec clarté un, et un seulement, des énantiomères en précisant les caractères Rectus ou Sinister (R ou S).

a. (Z)-3-méthylpent-2-ène + Br₂ →

b. Propanal + HCN $\xrightarrow{\text{CN}^-}$

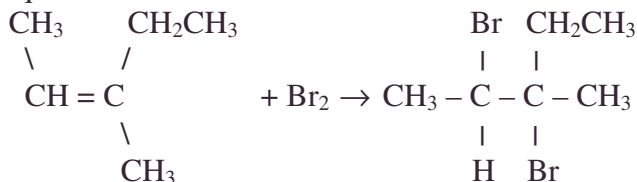
c.



Centrale

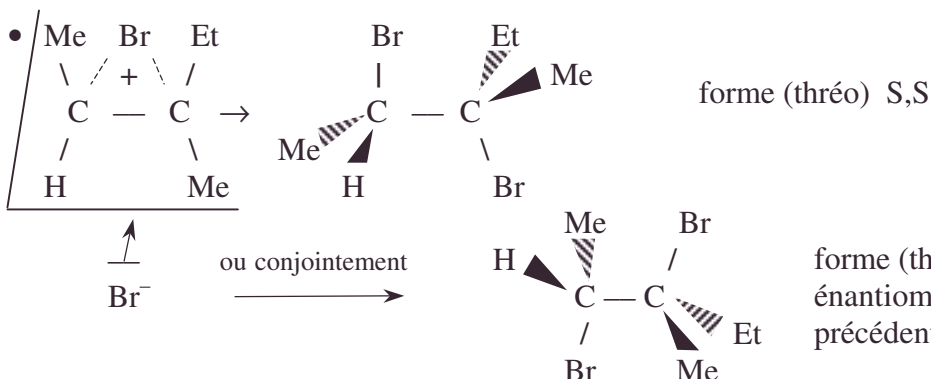
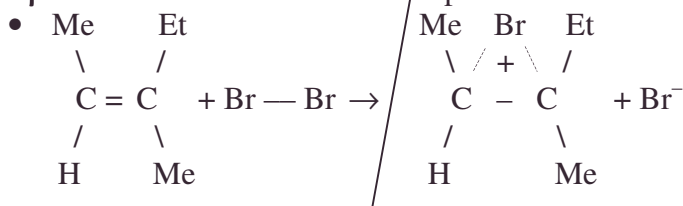
Corrigé

a.α. Equation bilan :



2,3-dibromo-3-méthylpentane

β. Mécanisme d'addition électrophile :



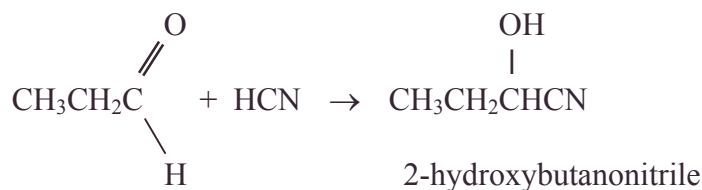
Selon le carbone attaqué par Br⁻.

- (Z)-3-méthylpent-2-ène, 2,3-dibromo-3-méthylpentane, aldéhyde, cétone, diastéréoisomère, énantiomère, propanal, R, S, Sinister

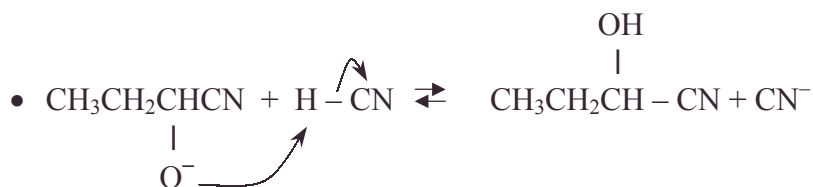
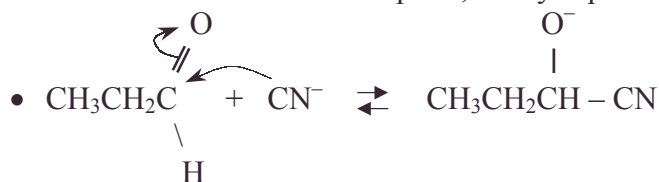
γ. On obtient un mélange racémique (thréo).

Pour obtenir une forme (érythro) diastéréoisomère des précédentes, il suffit de partir de la forme E du 3-méthyl-pent-2-ène.

b.α. Equation bilan :



β. Mécanisme d'addition nucléophile, catalysé par CN^- :

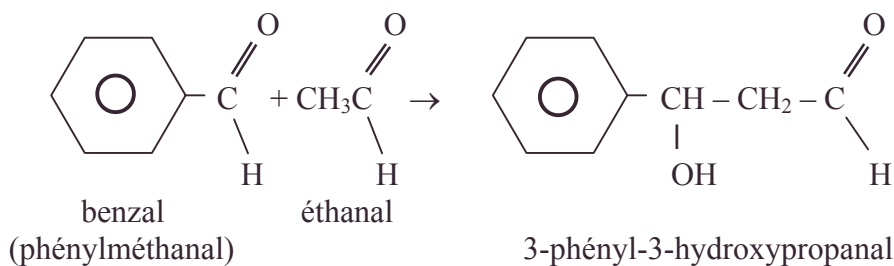


γ. CN^- attaque indifféremment d'un côté ou de l'autre du plan de CH_2-C (cf. hybridation sp^2) : la réaction n'est pas stéréosélective.

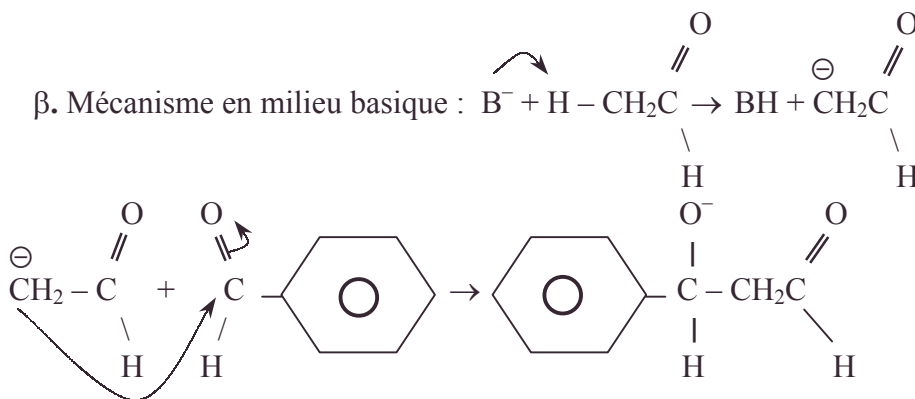
On obtient un mélange racémique des 2 énantiomères.

On représente seulement la forme R : $\text{CH}_3\text{CH}_2-\text{C} \begin{array}{l} \nearrow \text{CN} \\ \searrow \text{OH} \\ \text{H} \end{array}$

c.α. Equation bilan de l'aldolisation :



β. Mécanisme en milieu basique : $\text{B}^- + \text{H}-\text{CH}_2\text{C} \rightarrow \text{BH} + \text{CH}_2\text{C}^-$



- (E)- 3-méthyl-pent-2-ène, (E)-3-méthyl-pent-2-ène, 2-hydroxybutanenitrile, 3-phényl-3-hydroxypropanal, aldolisation, benzal, éthanal, phénylméthanal, racémique, RR, SS, stéréosélectivité

γ. L'attaque de $\text{CH}_2\text{C}(=\text{O})\text{H}$ a lieu indifféremment d'un côté ou de l'autre du plan (cf. sp^2)



Remarque : autres réaction possibles : crotonisation (déshydratation en milieu acide ou basique de l'aldol), réaction de Cannizzaro (dismutation du benzal sans hydrogène en α)

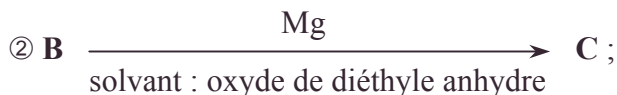
5.9.2. Mécanismes et chiralité

On donne les masses atomiques (g.mol^{-1}) : $\text{H} = 1$; $\text{C} = 12$; $\text{O} = 16$.

Enthalpies standards de dissociation de liaisons, à 25°C (kJ.mol^{-1}) :

$$\Delta_r H_{\text{C-H}}^0 = 414 ; \Delta_r H_{\text{H-Cl}}^0 = 431 ; \Delta_r H_{\text{H-Br}}^0 = 366.$$

On réalise la synthèse suivante :



I. B traité par de la soude à température élevée conduit au 2-méthylpropylène.

Par ailleurs, l'étude cinétique de l'action du cyanure de potassium KCN sur **B** montre que la vitesse de réaction est indépendante de la concentration en ion CN^- .

a. Que peut-on en déduire pour le mécanisme de la réaction de **B** avec le cyanure : nature, molécularité ?

b. Quelle est la formule développée de **B** ? En déduire celle de **A**.

II. A côté du produit **B** obtenu presque exclusivement, la réaction ① fournit aussi une substance très minoritaire **B'**.

a. Rappeler le mécanisme de formation de **B**. Indiquer les conditions opératoires dans lesquelles s'effectue cette réaction en chaîne.

b. Identifier **B'** par sa formule semi-développée.

c. Si l'on effectue la chloration de **A**, et non plus sa bromation, on obtient à 300°C un mélange de deux substances **L** et **L'** en proportions relatives $[\text{L}] / [\text{L}'] = 2$, **L** étant le dérivé primaire. En déduire le rapport x_t / x_p , ou x_t et x_p sont les réactivités respectives,

- 2-méthylpropylène, 3-bromocyclohexanone, Cannizzaro, cyanure de potassium, majoritaire, R, racémique, réaction de Cannizzaro

lors de la chloration d'un atome d'hydrogène selon qu'il est lié à un carbone tertiaire ou à un carbone primaire, en admettant que le pourcentage d'un isomère obtenu au cours de la réaction est proportionnel d'une part au nombre d'atomes concernés et d'autre part à leur réactivité x_t ou x_p . Comparer qualitativement ce résultat à celui de la bromation.

d. Pour expliquer la différence de sélectivité entre chloration et bromation, on se propose d'examiner d'abord la première réaction, notée P_1 , cinétiquement déterminante, apparaissant dans l'étape de propagation de leur mécanisme.

Dans l'hypothèse simplificatrice où l'on assimile l'enthalpie libre G à l'enthalpie H , représenter l'allure du diagramme énergétique de P_1 à 25° C, respectivement pour la chloration et pour la bromation.

On fera figurer sur ces diagrammes l'enthalpie libre standard ΔG^0 de P_1 et son enthalpie libre standard d'activation ΔG^\ddagger sachant que l'enthalpie standard d'activation ΔH^\ddagger associée vaut respectivement 6 kJ.mol⁻¹ pour la chloration et 58 kJ.mol⁻¹ pour la bromation.

e. La méthode utilisée pour obtenir **B** est-elle convenable ? Proposer une autre méthode éventuelle en partant du 2-méthylpropène et en précisant les conditions opératoires.

III. a. Identifier **C**.

b. Faire un schéma de principe du montage expérimental utilisé dans la réaction ②.

c. Pourquoi le solvant doit-il être anhydre ?

IV. a. Indiquer les deux structures envisageables pour **E**.

b. On obtient en fait exclusivement la cyclohex-2-énone ; expliquer et représenter sa formule semi-développée.

c. Ecrire la réaction de Wittig de $\text{CH}_2 = \text{P}(\text{C}_6\text{H}_5)_3$ sur **E**.

d. Traiter le diène obtenu par l'acide trifluoroperacétique. Préciser la formule du polyol obtenu et le nombre de carbones asymétriques.

V.a. Lors du traitement de **D** par OH^- , plusieurs réactions concurrentes de ③ pourraient avoir lieu. L'une d'entre-elles conduit à une substance **E'** de formule brute $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_2$; identifier **E'**.

b. Comment peut-on, en jouant sur les conditions opératoires, favoriser la formation de **E** au détriment de celle de **E'** ?

VI. La réaction ④ de **C** avec **E** conduit, entre autres, à deux produits organiques **F** et **F'**. L'hydrolyse en milieu acide de ceux-ci donne **G** et **G'**.

Les substances **G** et **G'** possèdent la même masse molaire (154 g) et la même composition pondérale (%C = 77,9 ; %H = 11,7 ; %O = 10,4).

Pour les identifier, on les soumet aux tests suivants :

Test 1 : l'action du dihydrogène sur **G**, en présence de nickel de Raney à la pression atmosphérique et à la température ambiante, se fait mole à mole avec formation d'une substance **H**. Traitée dans les mêmes conditions, **G'** ne réagit pas ; cependant dans des conditions de pression et de température plus élevées, elle réagit mole à mole pour donner **I**.

Test 2 : une solution de dibrome dans CCl_4 (tétrachlorométhane) est décolorée par un ajout de **G** en excès, alors qu'aucune réaction n'est observée avec **G'**.

Test 3 : dans l'oxyde de diéthyle anhydre, **G'** réagit avec l'iodure de méthylmagnésium pour donner après hydrolyse, un produit **J**.

a. Déterminer les formules brutes de **G** et **G'**.

b. Identifier le composé **F**, produit classique d'addition de **C** sur **E**. Donner le mécanisme conduisant à sa formation. En déduire la formule semi-développée de son produit d'hydrolyse **G**. Imaginer une autre synthèse de **G** à partir de **E** (sans magnésium).

• acide trifluoroperacétique, cyclohexén-2-one, enthalpie libre standard d'activation, hydrolyse, iodure de méthylmagnésium, nickel de Raney, réactions concurrentes, solvant, tétrachlorométhane, Wittig

c. Vérifier que la formule obtenue pour **G** s'accorde avec les résultats des tests 1 et 2. Identifier **H** et préciser le rôle du nickel de Raney. Les substances **G** et **H** présentent-elles une chiralité ?

VII.a. La substance **G'**, dont on demande de préciser le mécanisme de formation, a la formule semi-développée ci-contre :

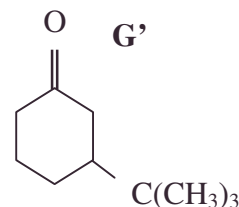
Vérifier l'accord de cette formule avec les 3 tests.

b. Identifier les substance **I** et **J**.

Possèdent-elles des stéréoisomères ?

c. Imaginer une autre synthèse de **G'** à partir de **E**.

d. Donner un protocole de remplacement du test 1 afin d'obtenir **I** à partir de **G'**.



Ecole polytechnique ; Durée : 2h

Corrigé

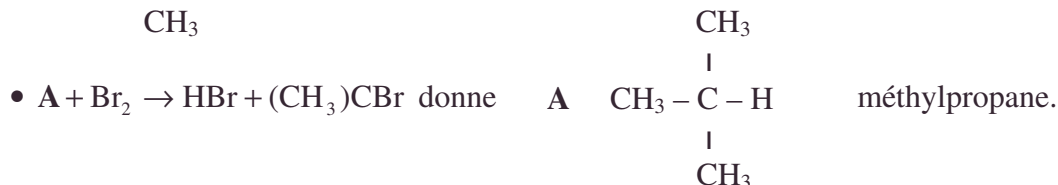
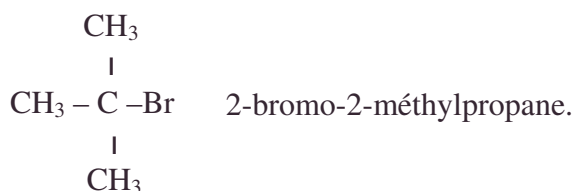
I.a. B est un bromoalcane ou bromure d'alkyle RBr ; $\text{RBr} + \text{CN}^- \rightarrow \text{RCN} + \text{Br}^-$.

Vu les indications de l'énoncé, on a une substitution nucléophile $\text{S}_{\text{N}}1$ de molécularité 1 pour l'étape lente $\text{RBr} \rightarrow \text{R}^+ + \text{Br}^-$ qui impose sa vitesse.

b. • $\text{OH}^- + \text{RBr} \rightarrow (\text{CH}_3)_2\text{CH}=\text{CH}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{Br}^-$.

B peut être $(\text{CH}_3)_3\text{CBr}$ ou $(\text{CH}_3)_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{Br}$.

Vu la $\text{S}_{\text{N}}1$ exclusive de **1.a.**, **B** possède un carbone tertiaire



II.a. On rappelle le mécanisme de la substitution radicalaire (en chaîne) favorisée par photons ou chaleur (les peroxydes peuvent aussi provoquer l'initiation).

Initiation : $\text{Br}_2 \rightarrow 2\text{Br}^\bullet$.

Propagation : $\text{Br}^\bullet + \text{RH} \rightarrow \text{R}^\bullet + \text{HBr}$, étape déterminante.

$\text{R}^\bullet + \text{Br}_2 \rightarrow \text{RBr} + \text{Br}^\bullet$.

Terminaison : $2\text{Br}^\bullet + \text{M} \rightarrow \text{Br}_2 + \text{M}^\bullet$.

$\text{Br}^\bullet + \text{R}^\bullet + \text{M} \rightarrow \text{RBr} + \text{M}^\bullet$.

$2\text{R}^\bullet + \text{M} \rightarrow \text{RR} + \text{M}^\bullet$.

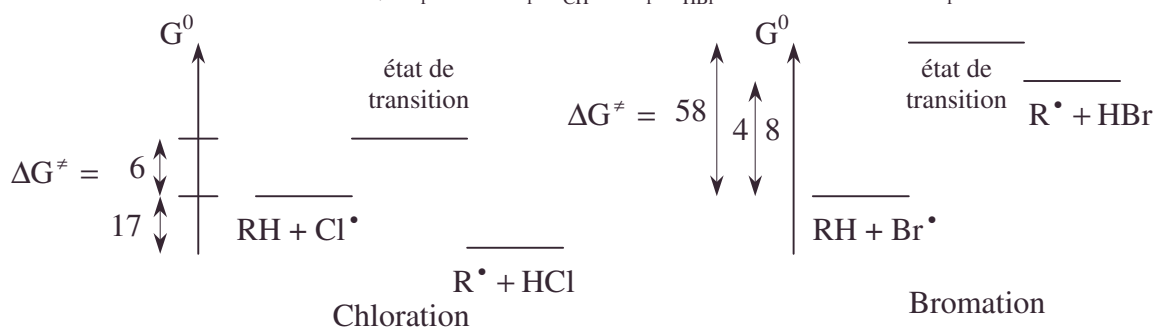
b. Vu **A**, on obtient **B** par le départ de l'hydrogène lié au carbone tertiaire ; au contraire ici, à partir de **A**, on obtient **B'** par le départ d'un hydrogène lié à un carbone primaire, il y en a 9, ce qui donne neuf formes mésomères stabilisantes de ce radical primaire habituellement non considéré ; la production reste très minoritaire.

• 1-bromo-2-méthylpropane, 2-bromo-2-méthylpropane, bromation du méthylpropane, carbone tertiaire, étape déterminante, mécanisme, méthylpropane, molécularité, nickel de Raney, $\text{S}_{\text{N}}1$, stéréoisomérisation, substitution radicalaire



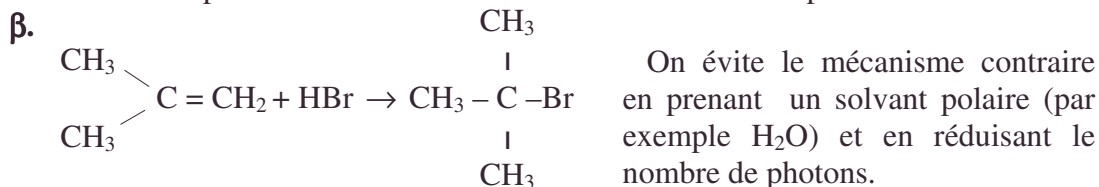
c. $\frac{(L)}{(L')} = \frac{9x_p}{x_t} = 2 \Rightarrow \frac{x_t}{x_p} = 4,5$.

Pour la bromation $(L) \ll (L') \Rightarrow \left(\frac{x_t}{x_p} \right)_{\text{bromation}} \gg \left(\frac{x_t}{x_p} \right)_{\text{chloration}}$.



L'état de transition a une enthalpie libre d'activation importante pour la bromation, qui est plus lente et plus sélective par contrôle cinétique que la chloration. De plus, l'état de transition de la bromation est proche de celui des produits : il est donc sensible à ce qui stabilise R^\bullet (cf. R^\bullet tertiaire) (cf. postulat de Hammond).

e. α . La méthode pour obtenir **B** est convenable car **B** est le seul produit.

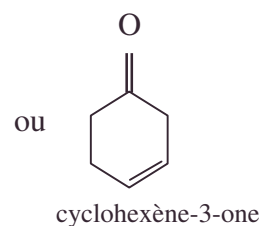
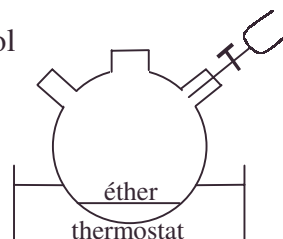
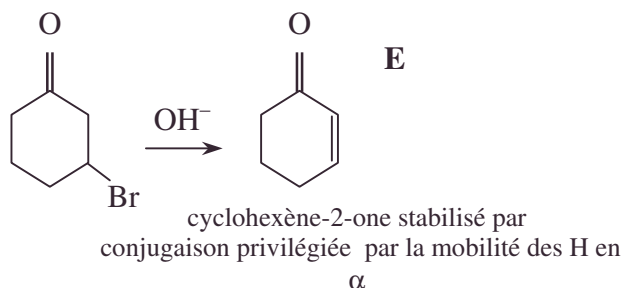


III.a. $\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ | \\ \text{CH}_3 - \text{C} - \text{MgBr} \\ | \\ \text{CH}_3 \end{array}$ bromure de tertiobutylmagnésium.

b. L'éther contient des copeaux de Mg, un agitateur. On peut ajouter une garde à CaCl_2 anhydre.

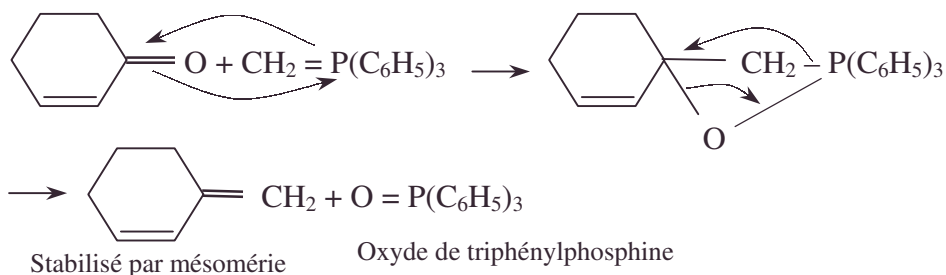


IV.a.,b.

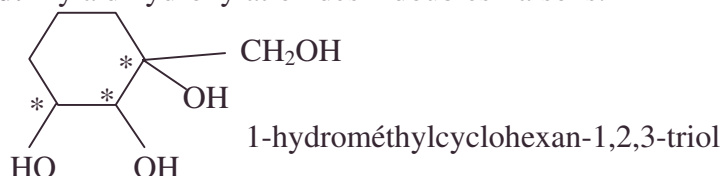


• agitateur, bromure de tertiobutylmagnésium, élimination, état de transition, garde, principe de Hammond, solvant, solvant polaire

c. Schéma réactionnel de la réaction de Wittig



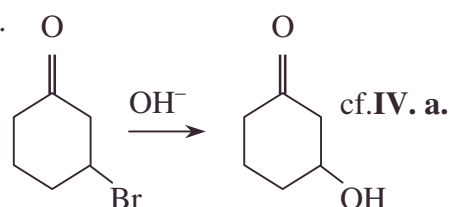
d. Il y a dihydroxylation des 2 doubles liaisons.



Il y a 3 carbones asymétriques marqués par *.

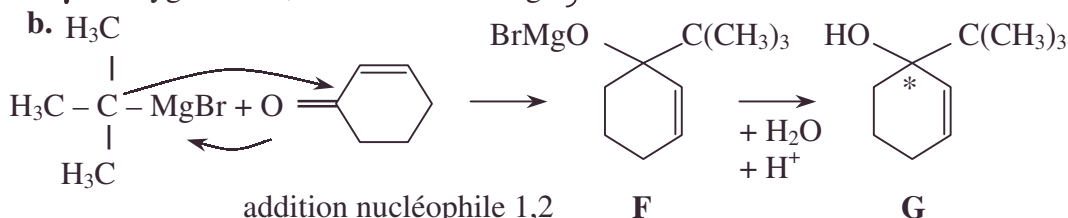
V.a. S_N est une réaction concurrente de l'élimination.

b. L'élimination est favorisée par la température élevée et un solvant réduisant la nucléophilie de OH^- .

VI.a. Composition de **G** et **G'** en masse :

α . en carbone : $0,7798 \times 154 \approx 120$ g.
 β . en hydrogène : $0,1169 \times 154 \approx 18$ g.
 γ . en oxygène : $0,1039 \times 154 \approx 16$ g.

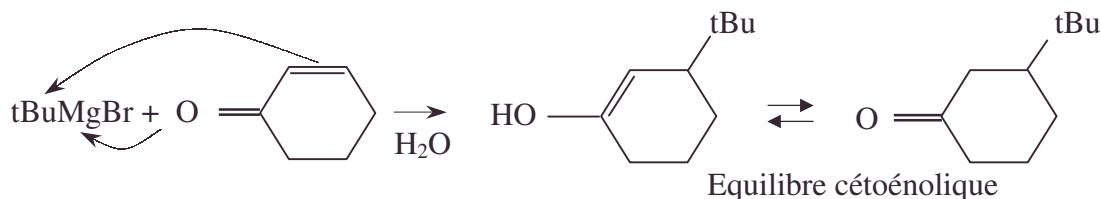
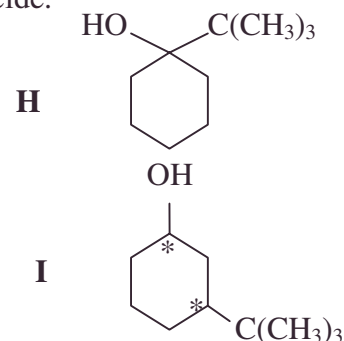
on peut accepter $C_{10}H_{18}O$.



Une autre synthèse organométallique fera agir dans l'éther le tertibutylolithium sur **E** selon une addition nucléophile 1,2, suivie d'une hydrolyse acide.

c. **G** peut être hydrogénée et réagir avec Br_2 (tests 1 et 2) à cause de la liaison double.

Le nickel de Raney est le catalyseur de l'hydrogénation de la double liaison carbone – carbone sans action sur OH \Rightarrow **G** possède un carbone asymétrique noté * ; **H** l'a perdu et n'a plus la chiralité possédée par **G**.

VII.a. α .

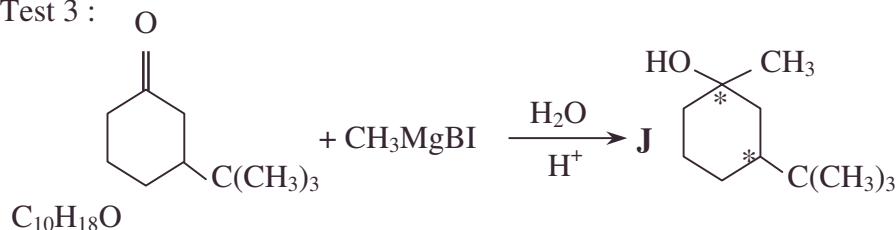
On a finalement une addition nucléophile 1,4.

• addition 1,4, addition 1,2, configuration, diastéréoisomère, énantiomère, hydroxylation, mésomérie, nickel de Raney, oxyde de triphénylphosphine, parfum de synthèse, précurseur, tertibutylolithium, Wittig

β. Test 1 : **G'** ne subit pas facilement l'hydrogénation.
(C = O moins facilement hydrogénée que C = C en présence de Ni Raney).

Test 2 : **G'** ne réagit pas avec Br₂ en milieu non basique.

Test 3 :



b. **I** et **J** possèdent chacun 2 carbones asymétriques et donc possèdent chacun 4 diastéréoisomères (2 couples de 2 énantiomères).

c. L'action de l'organocuprate lithié tBu_2CuLi (nouveau hydrolyse acide) selon une addition nucléophile 1,4 dite de Corey à contrôle frontalier donne **G'** très majoritaire.

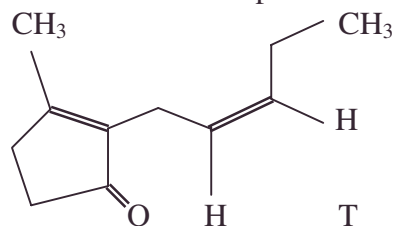
d. On rappelle l'addition nucléophile de $LiAlH_4$ dans l'éther, ou de $NaBH_4$ dans C_2H_5OH sur la fonction carbonyle pour la transformer en alcool après hydrolyse. On peut aussi utiliser le sodium dans l'éthanol ou NH_3 liquide.

5.9.3. Synthèse d'un parfum

A. La cis-jasmone **T** est un intermédiaire important dans le domaine de la parfumerie.

1. Quelles sont les caractéristiques fonctionnelles de la molécule **T** ?

2. Présente-t-elle des formules mésomères ?
Si oui, les préciser.



B. **T** peut admettre comme "précurseur" (passage de **T**₁ à **T** en une seule étape) la molécule **T**₁ :

1.a. Comment réaliser le passage **T**₁ → **T** ?

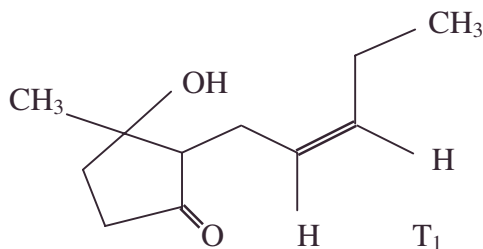
b. Quel mécanisme réactionnel proposez-vous ?

c. Peut-il se former d'après ce mécanisme d'autres composés isomères de **T**₁ ?

2.a. La molécule **T**₁ peut-elle présenter plusieurs configurations ?

b. Si oui, les représenter, en perspective, en précisant les configurations et leur relation d'isomérisation.

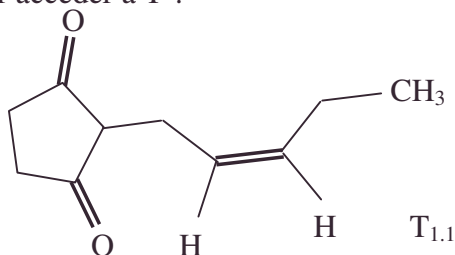
3. Doit-on choisir et isoler l'une d'entre elles pour accéder à **T** ?



C. **T**₁ admet lui-même comme "précurseur" la dione **T**_{1,1}.

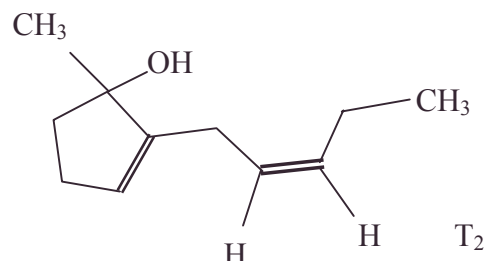
1. La dione **T**_{1,1} peut-elle présenter plusieurs configurations ?

2.a. Les deux fonctions cétones de **T**_{1,1} sont-elles équivalentes ?



• ammoniac liquide, borohydrure de sodium, (Z)-1-bromo-pentène, carbocation, cétone, dicétone éthylénique, double liaison, hydrure d'aluminium et de lithium, insaturation, mésomérisation, organocuprate lithié, stéréoisomère Z

- b.** Comment réaliser le passage $T_{1,1} \rightarrow T_1$?
- D.** $T_{1,1}$ est accessible à partir de la cyclopentane-1,3-dione et du (Z)-1-bromo-pentène B.
1. Est-ce que la cyclopentane-1,3-dione s'énolise facilement ?
 - 2.a. Comment la faire réagir avec le bromopentène B pour accéder à $T_{1,1}$?
 - b. Est-ce-que le dérivé bromé B présente une réactivité particulièrement élevée ?
 - c. Dans la réaction avec la cyclopentanedione, B jouera-t-il le rôle d'un électrophile ou d'un nucléophile ?
- E.** La cis-jasmone T admet comme autre "précurseur" l'alcool T_2 .
1. Le passage $T_2 \rightarrow T$ se fait en milieu aqueux acide en présence de CrO_3 et permet en une seule étape de réaliser les 2 réactions successives conduisant à T, via la formation d'un carbocation mésomère que l'on demande de préciser.
 2. Ecrire ces deux réactions en justifiant les mécanismes proposés.
- F.** Un troisième précurseur T_3 a été proposé pour accéder à T.
- Il s'agit d'une dicétone éthylénique en C_{11} : (Z)-8-undécène-2,5-dione.
1. Quel est le mécanisme de la réaction permettant le passage de T_3 à T ?
 2. Peut-il se former d'autres isomères de T lors de cette cyclisation ?
 - 3.a. Quelle pourrait être la dicétone $T_{3,1}$ insaturée, précurseur de T_3 , qui conduirait de façon univoque à la double liaison Z de T_3 en une étape ?
 - b. Quels seraient le réactif et le catalyseur utilisés ?
 - c. L'insaturation de $T_{3,1}$ présente-t-elle un intérêt en synthèse ?
 4. Donner la nomenclature de $T_{3,1}$.



ESPCI ; Durée : 3h

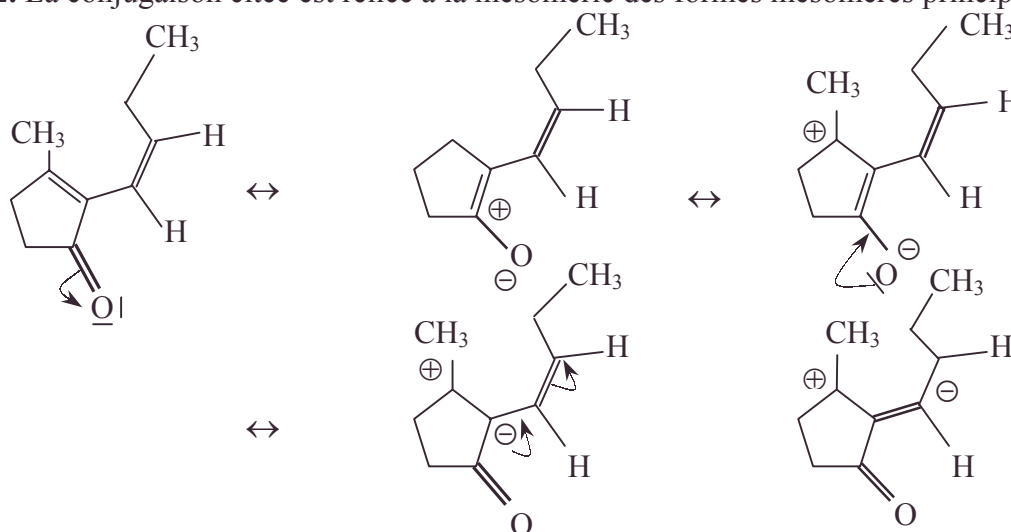
Corrigé

A.1. On trouve : 2 fonctions alcènes, une fonction cétone.

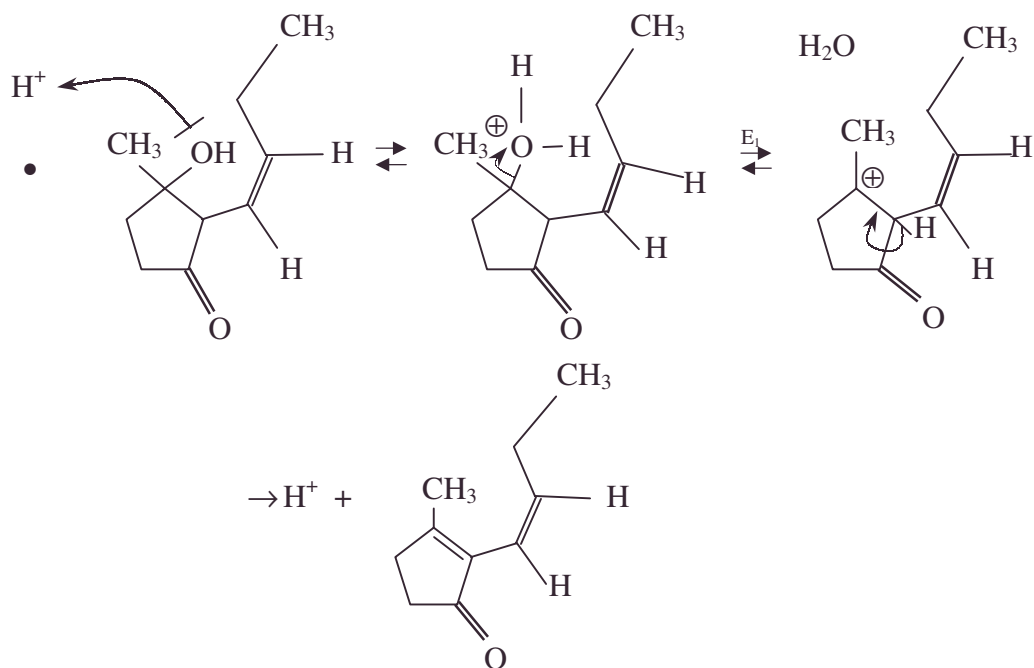
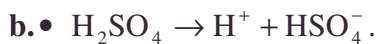
Dans le cycle, les deux doubles liaisons $\text{C}=\text{C}$ et $\text{C}=\text{O}$ sont conjuguées.

Sur la chaîne linéaire, la stéréochimie est Z.

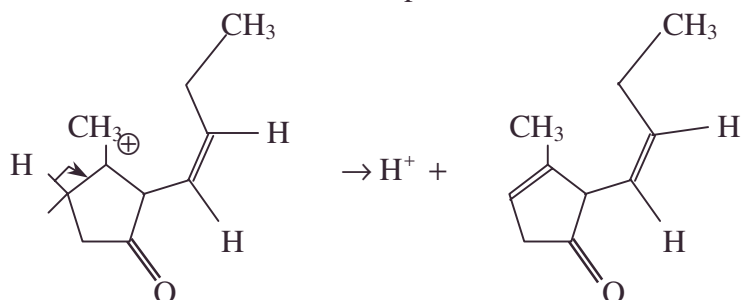
2. La conjugaison citée est reliée à la mésomérie des formes mésomères principales :



B.1.a. La déshydratation de la fonction alcool de T₁ a lieu en présence de H₂SO₄ en élevant modérément la température car l'alcool est tertiaire.

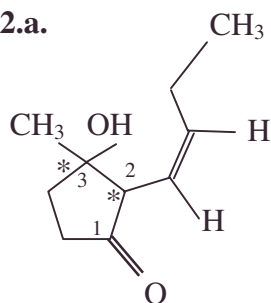


c. Mécanisme concurrent de déprotonation.



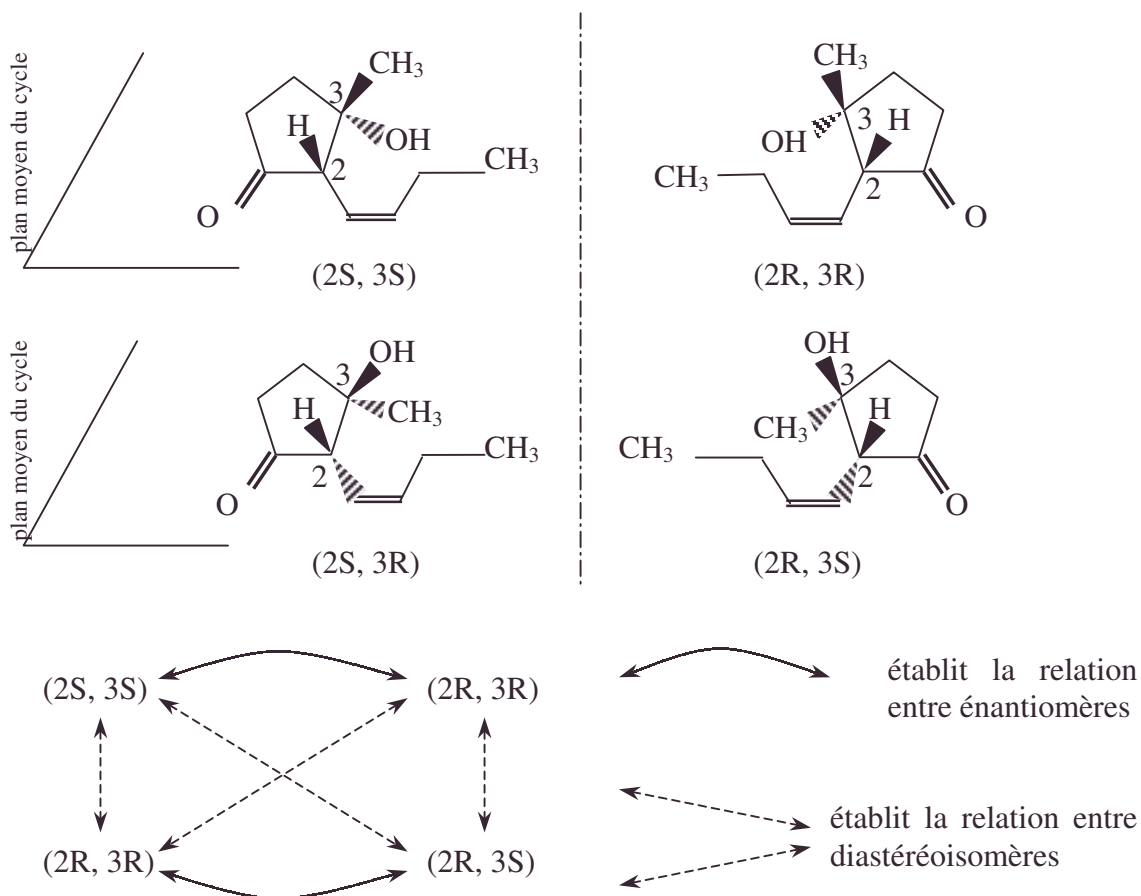
Le composé sans conjugaison formé à basse température contrairement à la règle de Saitsev est très minoritaire.

2.a.



Il y a 2 carbones asymétriques numérotés 2 et 3 donc diastéréoisomérisie, soit 2 couples d'énantiomères.
On a supposé conserver la configuration Z.

b. On utilise les règles de priorité : OH le plus prioritaire, H le moins prioritaire.



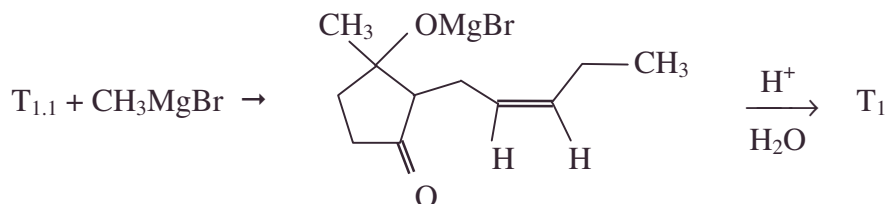
3. T n'a pas de carbone asymétrique.

Il y a départ de OH de C₃ et de H de C₂ ce qui est possible sur chacun des diastéréoisomères. Donc, il n'est pas utile d'isoler une configuration.

C.1. T_{1,1} n'a pas de carbone asymétrique et donc il n'y a pas plusieurs configurations (la configuration Z étant par ailleurs supposée conservée).

2.a. Les 2 fonctions ayant des places symétriques par rapport à la chaîne linéaire sont équivalentes.

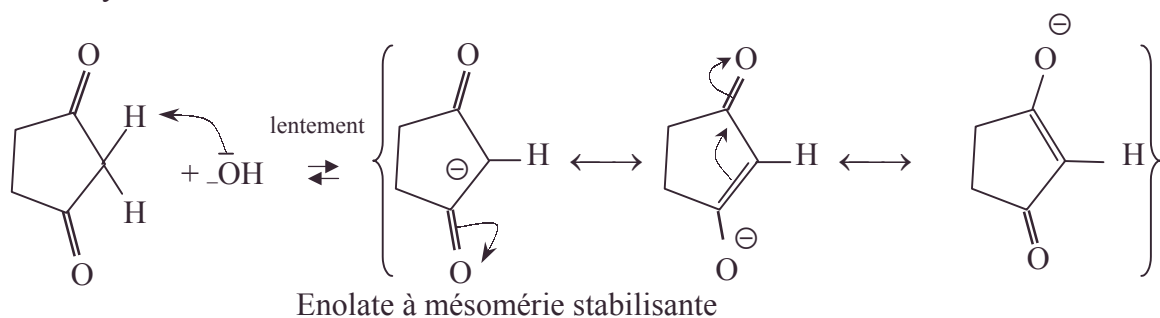
b. Addition du magnésien CH₃MgBr avec excès de T_{1,1}.



D.1.

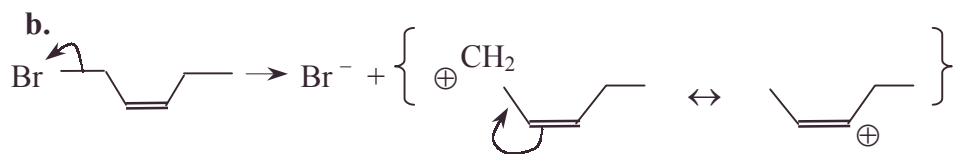
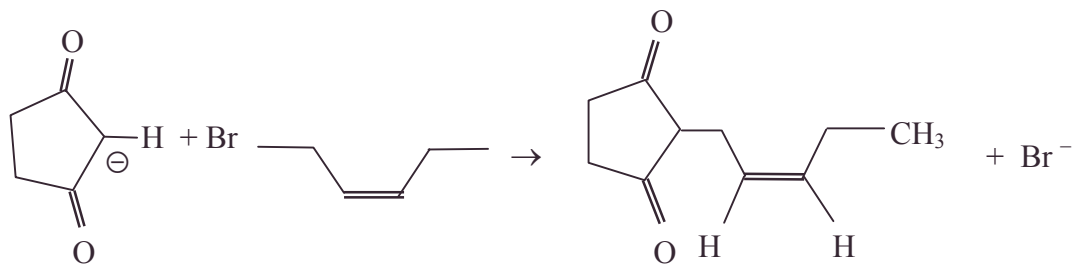


L'énolisation est due à la mobilité des hydrogènes en α . Les hydrogènes du carbone 2 subissent l'effet des 2 fonctions cétones et sont donc les plus mobiles.



En conclusion : l'énolisation se fait.

2.a. L'ion énolate nucléophile dans aldolisation cétoalysation peut donner une substitution nucléophile avec B en solution basique peu concentrée, cf. OH^- . On a une C-alkylation.

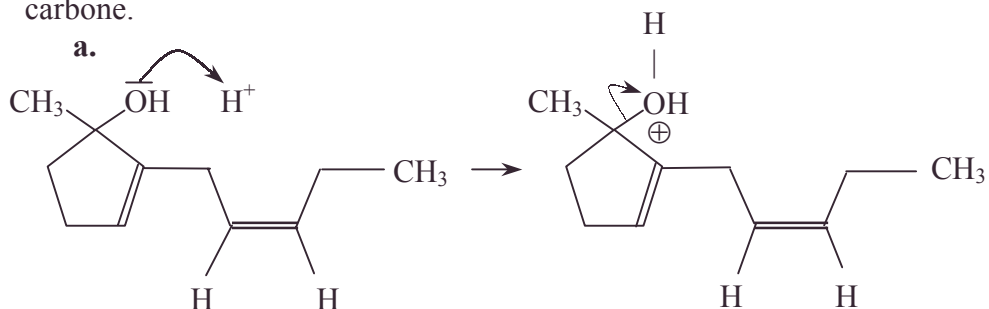


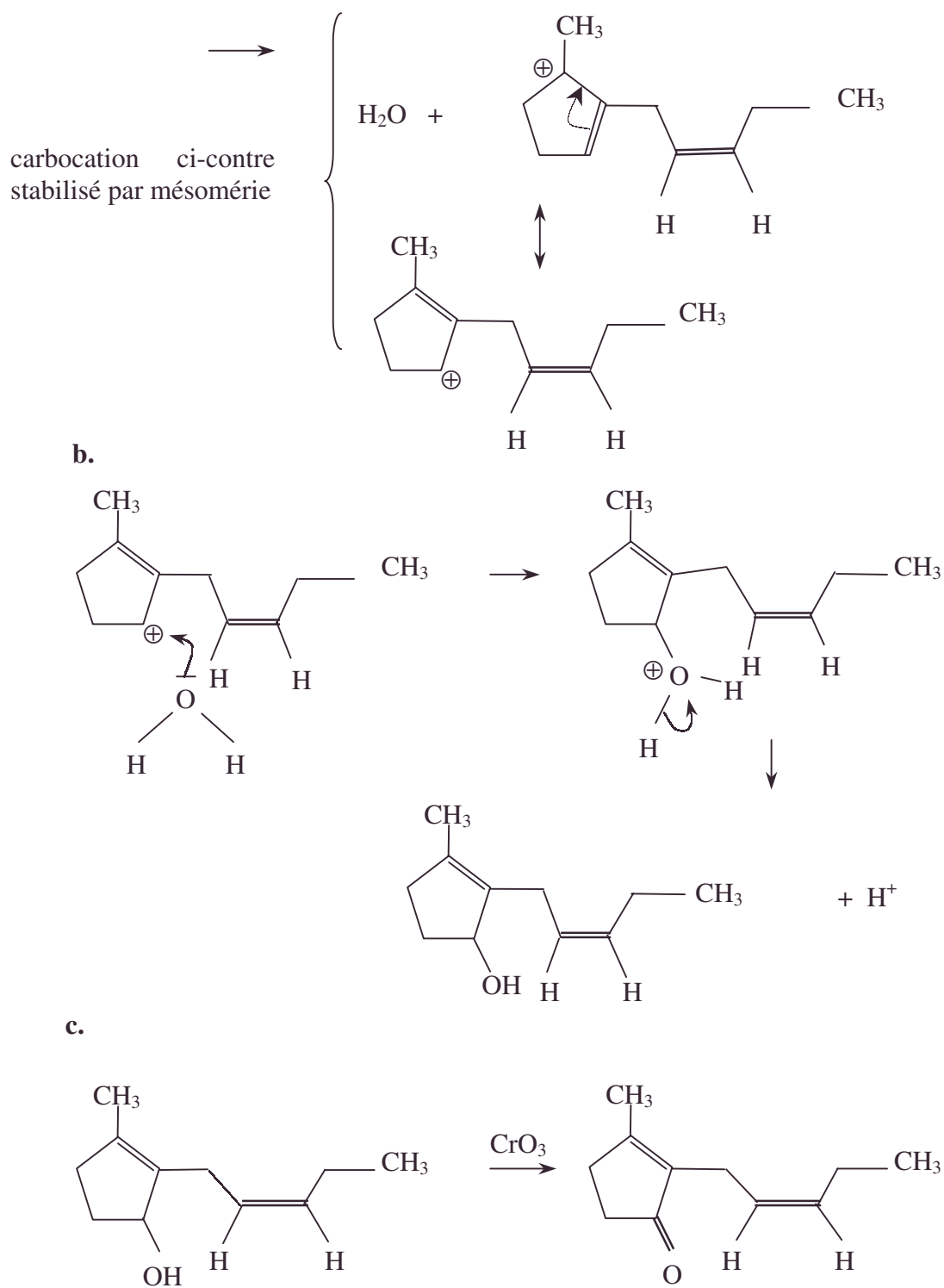
Le carbocation est stabilisé par mésomérie.

Une $\text{S}_{\text{N}}1$ utilisant ce carbocation sera favorisée.

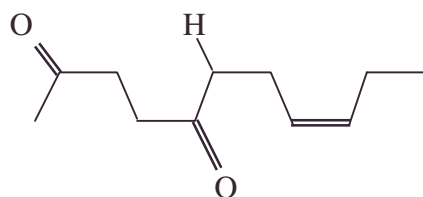
c. Le carbocation est un électrophile.

E.1.2. En une seule opération chimique, on passera de T_2 à T mais il y a plusieurs étapes mécanistiques. On notera que CrO_3 est l'oxydant spécifique de la fonction alcool en cétone, à la différence du permanganate oxydant aussi la double liaison carbone-carbone.





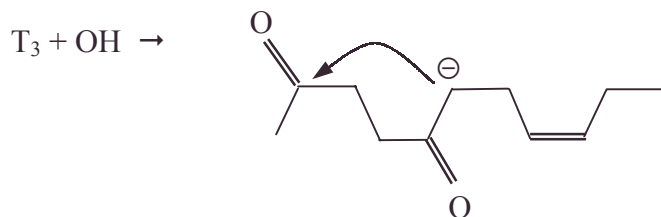
F.1. T₃ est



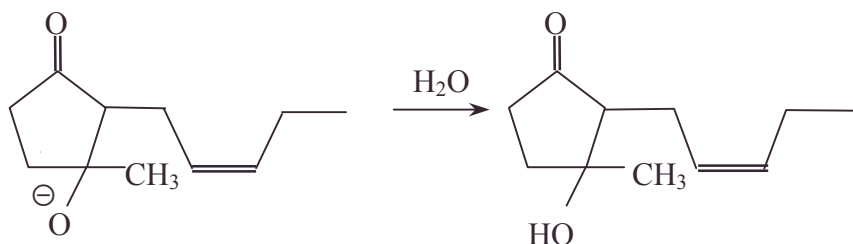
On envisage une cyclisation de Robinson par aldolisation céto-limélation.

- chaîne latérale, cyclisation, déshydratation, double liaison conjuguée, énolate, mésomérie, mobilité des hydrogènes en alpha

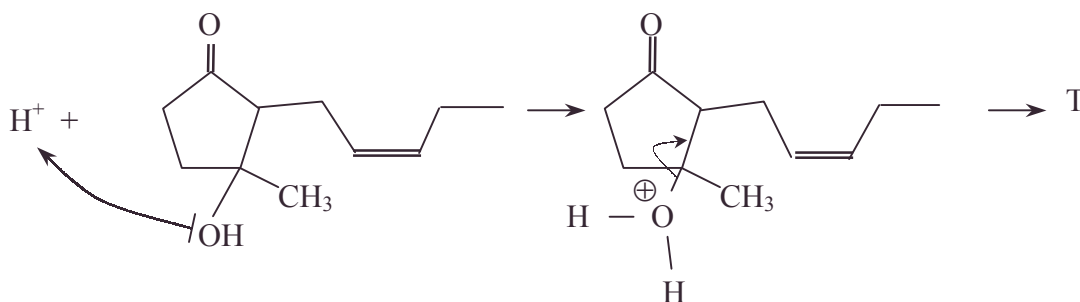
- On aura formation de l'énolate par mobilité du H en α en milieu basique (qui permettra le cycle voulu).



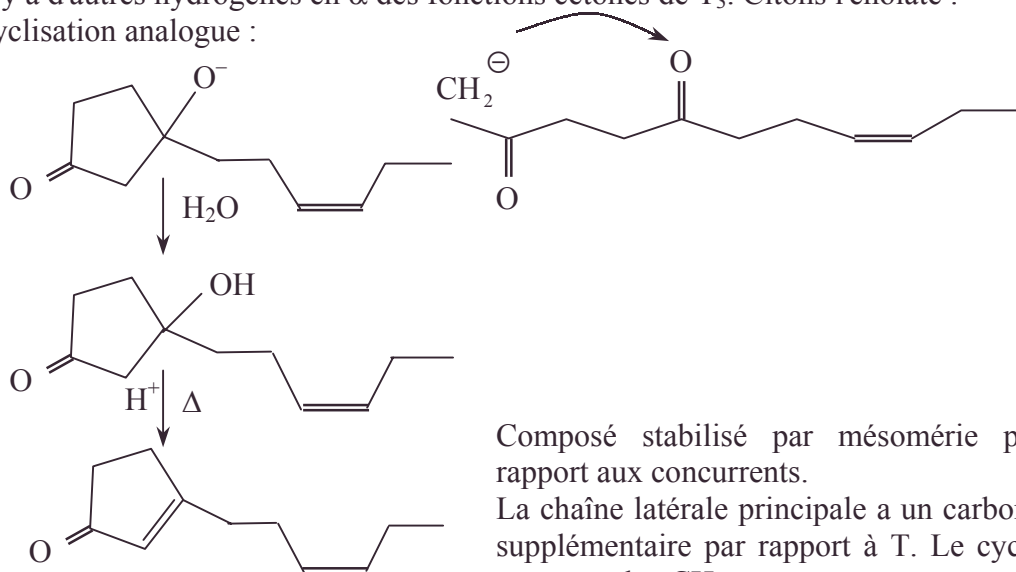
- Puis formation d'un alcoolate et du cycle avant d'obtenir l'alcool :



La déshydratation en milieu acide crée préférentiellement la double liaison $C = C$ conjuguée de $C = O$.

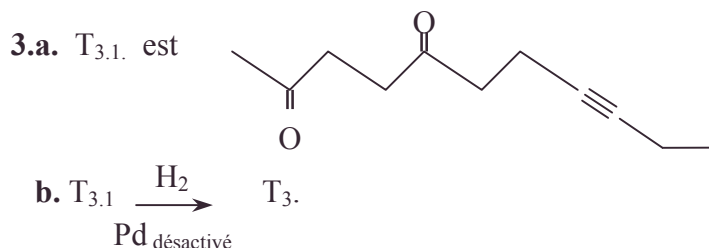


2. Il y a d'autres hydrogènes en α des fonctions cétones de T_3 . Citons l'énolate :
Et la cyclisation analogue :



D'autres possibilités avec des cycles plus petits sont théoriquement possibles.

- *alcyne vrai, alcynure, catalyseur désactivé, palladium, palladium de Lindlar*



Le catalyseur est du palladium désactivé par la quinoléine (sur sulfate de barium) (Palladium de Lindlar).

c. La réactivité de la triple liaison de T_{3,1} est diminuée car il ne s'agit pas d'un alcyne vrai susceptible de donner des alcynures nucléophiles en milieu basique.

4. T_{3,1} est la undec-8-yn-2,5-dione.

5.9.4. Constante de Michaelis en catalyse

Voir page 1479.

5.9.5. Agent de synthèse organomagnésien

Voir page 1714.

5.9.6. Comparaison d'un organomagnésien avec un organozincique

Voir page 1717.

5.9.7. Alcool à polycondenser

Voir page 1791.

5.9.8. Survol 1

Voir page 1795.

5.9.9. Survol 2

Voir page 1796.

5.9.10. Survol 5

Voir page 1803

.

5.10. Acides carboxyliques et dérivés

appartient aux programmes de PC, BCPST2, TPC2

5.10.1. Obtention d'un chlorure d'acide

Le but-1-ène, traité par le bromure d'hydrogène en présence d'un peroxyde organique, donne un corps A. A est transformé par une solution aqueuse diluée d'hydroxyde de sodium en B qui, par oxydation par le dichromate de potassium en milieu acide à 70°, donne C. C réagit avec le chlorure de thionyle SOCl_2 pour donner D.

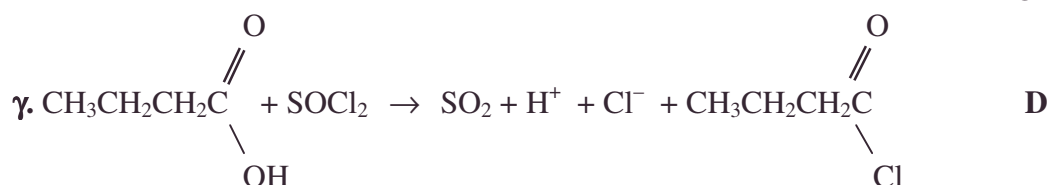
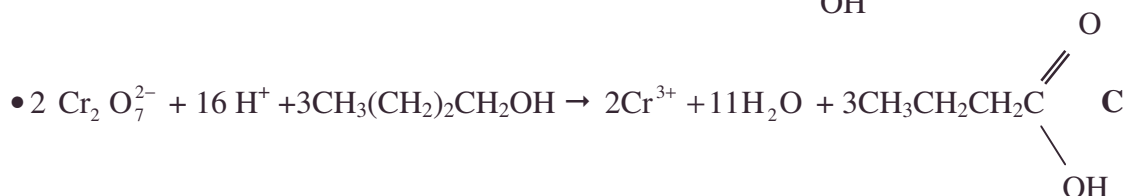
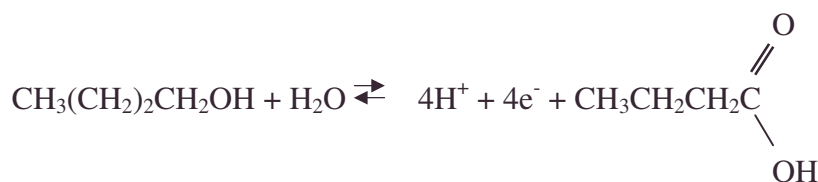
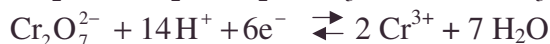
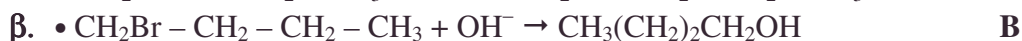
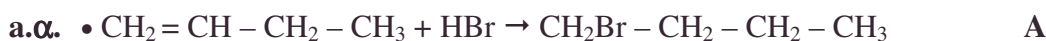
a. Ecrire les équations des réactions correspondantes en donnant les formules semi-développées des composés formés. On équilibrera notamment l'équation de la réaction d'oxydoréduction.

b. Indiquer le nom des composés A, B, C et D.

c. Préciser le mécanisme de formation de A à partir du but-1-ène.

CCP

Corrigé



b. A = 1-bromobutane ; B = butan-1-ol ;

C = acide butanoïque ; D = chlorure de butanoyle

c. Mécanisme radicalaire :

α. initiation : dissociation du peroxyde : $\text{ROOR} \rightarrow 2\text{RO}^\bullet$
création du radical Br^\bullet : $\text{RO}^\bullet + \text{HBr} \rightarrow \text{ROH} + \text{Br}^\bullet$.

β. propagation : par ruptures homolytiques



γ. Rupture : recombinaison de radicaux

• acide butanoïque, acide carboxylique, but-1-ène, chlorure d'acide, chlorure de butanoyle, chlorure de thionyle, dérivé d'acide carboxylique, dichromate de potassium, mécanisme radicalaire, oxydoréduction organique, peroxyde, radical secondaire, recombinaison des radicaux, rupture homolytique

5.10.2. Estérification des acides bicarboxyliques et chiralité

On étudie dans cette partie la stéréochimie d'un diacide de type A symétrique, et de quelques-uns de ses dérivés. Il s'agit de l'acide 2,3-diméthylbutanedioïque F, de formule



Cette formule n'est qu'une représentation semi-développée plane. En fait, plusieurs substances, différant par certaines propriétés, lui sont associées. Parmi elles, deux seulement sont dépourvues de pouvoir rotatoire (en solution) : l'une, F₁, fond à 129° C ; l'autre, F₂, fond à 208°C et se trouve être moins soluble que F₁ dans l'éthanoate d'éthyle, ce qui peut être mis à profit pour les séparer. En outre, on peut dédoubler F₁ en deux inverses optiques (énantiomères) F'₁ et F''₁, fondant à 135°C ; en revanche, F₂ n'est pas dédoublable.

D'autre part, les acides carboxyliques réagissent sur les alcools pour donner des esters selon la réaction : $\text{R} - \text{CO}_2\text{H} + \text{R}' - \text{OH} \rightleftharpoons \text{R} - \text{CO}_2 - \text{R}' + \text{H}_2\text{O}$.

Par sa structure, F peut donc conduire à des monoesters et à des diesters. Ainsi, partant de F₂, on obtient un monoester méthylique G₂, mais cet acide-ester est dédoublable en deux énantiomères G'₂ et G''₂ ; à F'₁, en revanche, correspond un monoester méthylique G'₁ unique. Enfin, en ce qui concerne les diesters :

- en méthylant le carboxyle de G'₁, ou par diestérification méthylique de F'₁, on obtient un diester unique J'₁.

- On appelle J₂, J'₂ et J''₂ les esters diméthyliques obtenus en partant respectivement de F₂, G'₂ et G''₂.

1. Sachant que, dans l'acide F'₁, le deuxième carbone possède la configuration R, et que, pour l'ester G'₂, l'estérification s'est faite sur le groupe carboxyle lié à un carbone de configuration R, on fournira des représentations configurationnelles (au choix, mais clairement précisées) pour chacune des molécules F'₁, F''₁, F₂, G'₁, G'₂, G''₂ et J'₁, en expliquant les faits expérimentaux relatés ci-dessus.

2. Que dire de l'activité optique de J₂, J'₂ et J''₂ ? Quelle relation y a-t-il entre ces trois composés ?

3. Le monoester G' est-il doué de pouvoir rotatoire ?

4.a. Dans le langage de l'isomérisie, comment peut-on qualifier F₁ par rapport à F'₁ et F''₁ ?

b. On considère le produit de monoestérification méthylique qu'on obtiendrait à partir de F₁. Quelles sont les molécules présentes dans ce produit ? En quelles proportions ?

5.a. Donner, en le justifiant, un avis sur les propositions (i) et (ii) suivantes :

- i. La réaction d'estérification méthylique de la question précédente ne distingue pas entre une extrémité R et une extrémité S qu'un diacide convenable peut présenter.

- ii. Dans la même situation, un alcool chiral verrait a priori une différence.

b. Quel est celui des acides F qui permet la vérification expérimentale de la proposition (ii) ?

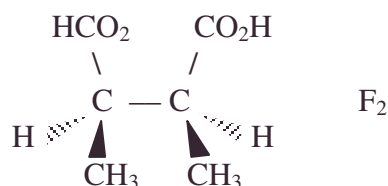
6. Parmi les alcools de formule C_nH_{2n+1}OH, quel est le plus simple (n minimal) des alcools chiraux ?

Ecole Polytechnique ; Durée : 1h

• activité optique, dédoublable, diester, énantiomère, ester, éthanoate d'éthyle, méthylation, monoester, monoester méthylique, pouvoir rotatoire, R, S

Corrigé

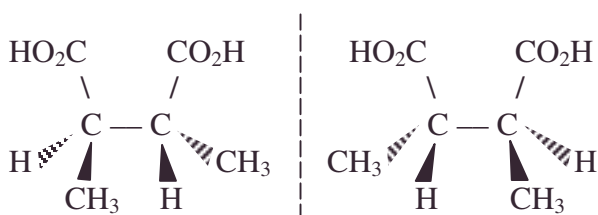
1.α. F₂ est indédouable : forme mésogyre car symétrique (il s'agit d'une forme érythro) ; la forme R,S se confondant avec la forme S,R.



β. F₁ est dédoublable en 2 formes énantiomères (thréo ou like), la forme RR étant chirale de la forme SS.

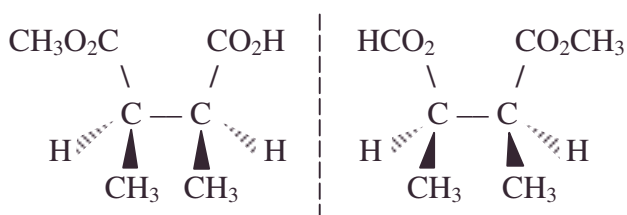
On identifie alors :

F'₁(R,R) et la forme F''₁(S,S)



γ. Les 2 fonctions CO₂H estérifiables de F₂ sont à configuration R ou S pour leur C_α donc 2 énantiomères ,

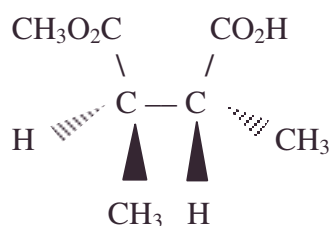
G'₂(R,S) et G''₂(R,S)



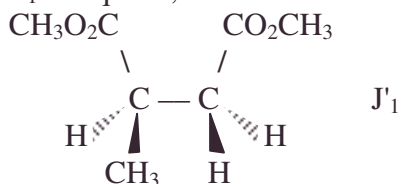
La deuxième estérification ramenant une forme (érythro) mésogyre R,S.

δ. L'estérification de F'₁ effectue une substitution qui ne change pas les priorités, on obtient un seul G'₁ :

G'₁(R,R)



ε. Le même raisonnement conduit à un diester J'₁ unique R,R.



2.a. La forme symétrique (érythro ou unlike) maintenue par diestérification est mésogyre soit aucun pouvoir rotatoire.

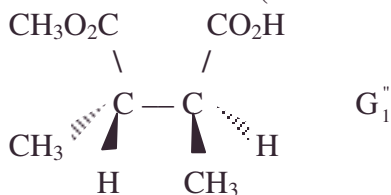
b. Ces 3 isomères non dédoublables s'identifient J₂ = J'₂ = J''₂.

3. G'₁ (de type thréo) possède une molécule chirale non superposable ; il possède un pouvoir rotatoire.

4.a. F₁ est un mélange équimolaire de F'₁ et F''₁ que l'on nomme mélange racémique.

• chiralité, dédoublable, érythro, indédouable, like, mésogyre, non dédoublable, racémique, RR, SS, superposable, unlike

b.α. F'_1 donne G'_1 de forme R,R ; F''_1 donne G''_1 de forme SS : G'_1 et G''_1 constituent deux énantiomères (d'une forme thréo).



β. Les proportions sont 50%, 50%, la théorie cinétique ne semblant favoriser aucune forme.

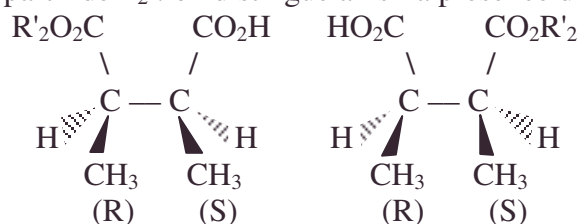
5.a. Notons que le méthanol n'a pas de carbone asymétrique à la différence d'un alcool chiral.

Deux objets chiraux ne peuvent être différenciés que par rapport à un objet chiral de référence. Cette proposition justifie les propositions **i** et **ii**.

b. Vérifions la proposition **ii** : en considérant un alcool $R'OH$ chiral possédant un carbone asymétrique R, soit R'_1OH ou S soit R'_2OH que l'on fait réagir sur F_2 .

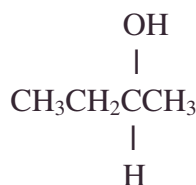
La structure de base RS des C_α subsiste mais un 2^{ème} carbone venant de R' engendre des diastéréoisomères de caractéristiques physiques différentes, d'où une orientation thermodynamique possible pour la réaction, ce qui ferait dire que dans ces circonstances l'alcool fait la différence.

Exemple à partir de F_2 : on distingue ainsi la présence de 1 ou 2 carbones chiraux.



6. $n = 4$, l'alcool chiral le plus simple est le butan-2-ol.

Assemblage sur un carbone asymétrique des 4 plus simples substituants H, OH, CH_3 , CH_2CH_3 .



5.10.3. Synthèse malonique de l'acide hexanoïque

a. Le traitement en milieu acide sulfurique de l'acide malonique (acide propane-dioïque) par de l'éthanol fournit un diester.

Ecrire :

α. L'équation bilan.

β. Donner le mécanisme de la réaction d'estérification.

b. Dans un milieu éthanol, éthanolate de sodium, ce diester donne naissance à un carbanion dont on justifiera la stabilité en écrivant les formules limites de résonance.

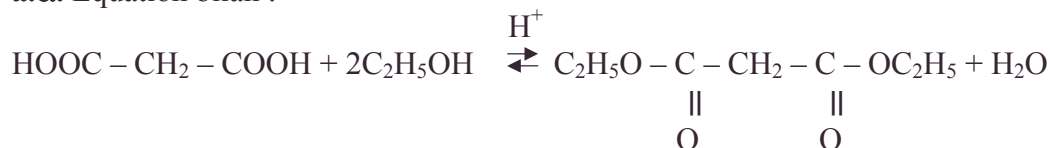
c. L'ion énolate est opposé au 1-bromobutane dans l'éthanol à reflux, puis traité par la potasse alcoolique à 50% à reflux. Le passage en milieu acide permet d'obtenir avec un rendement voisin de 75% un composé de formule brute $C_6H_{12}O_2$ et de $pK_a = 4,88$. Préciser les réactions obtenues et la formule développée du produit final.

Autres concours ; Durée : 1h

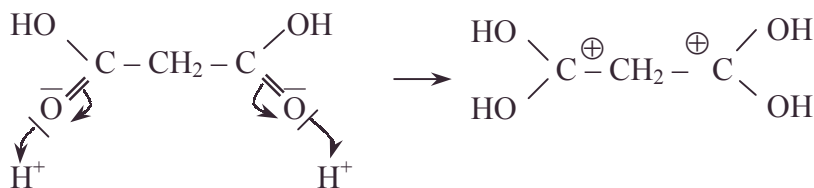
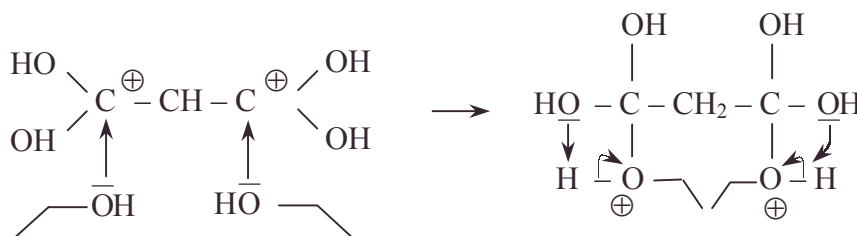
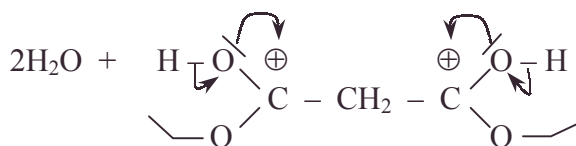
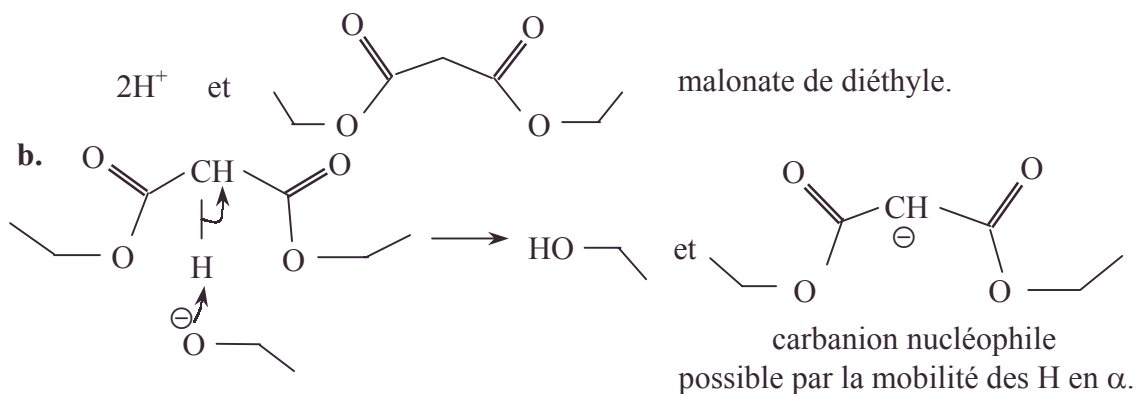
• 1-bromobutane, acide hexanoïque, acide malonique, acide propane-dioïque, alcool chiral, carbanion, chiralité, forme thréo, formules limites de résonance, méthanol, potasse alcoolique, rendement, synthèse malonique, traité à reflux

Corrigé

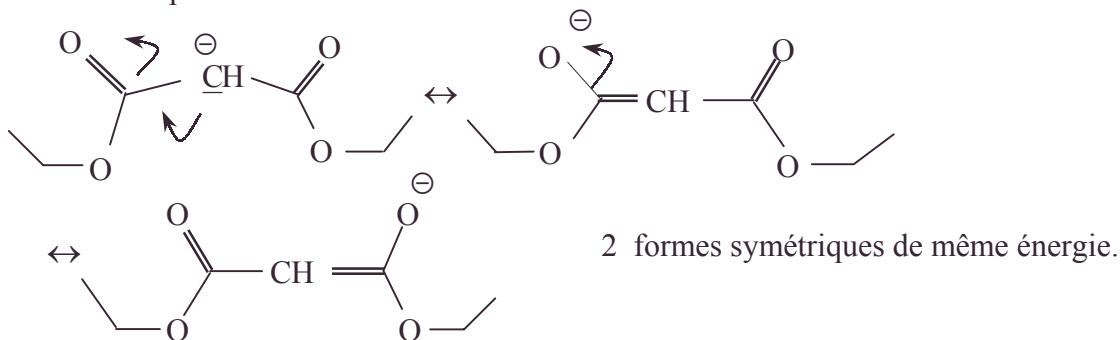
a.α. Equation bilan :



L'estérification protège la fonction acide carboxylique de toute réaction acido-basique directe.

β.1. Protonation des oxygènes**2.** Additions nucléophiles des alcools**3.** Déshydratation**4.** Récupération des protons

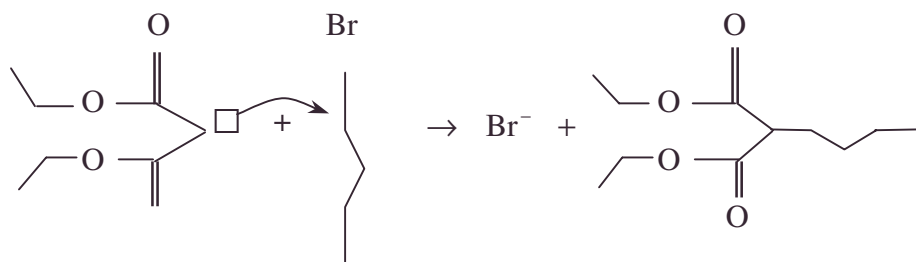
Stabilisation par mésomérie :



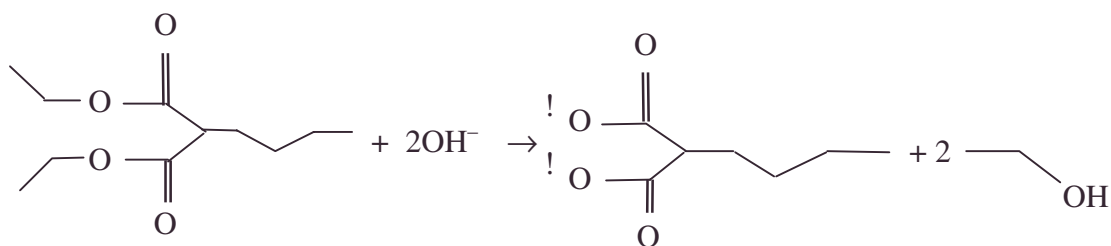
• addition nucléophile de l'alcool, carbanion, déshydratation, malonate de diéthyle, protection de fonction, protonation, stabilisation par mésomérie

c. Synthèse malonique

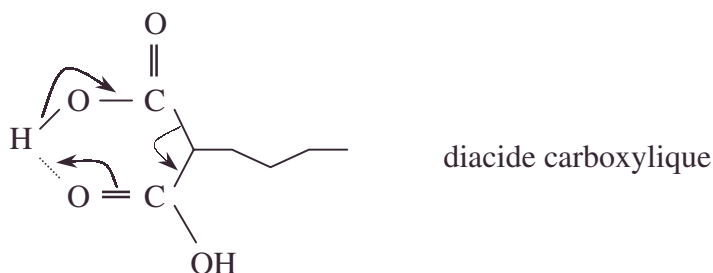
α. Substitution nucléophile SN2 (C-alkylation) cf. **4.b.**



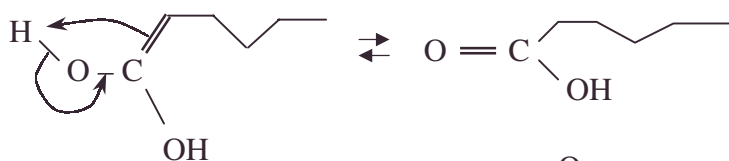
β. Saponification de la fonction ester par le potasse alcoolique



γ. Double protonation (par acidification) avec liaison hydrogène intramoléculaire



δ. Monodécarboxylation du diacide par un mécanisme "concerté" en milieu acide



On obtient l'acide hexanoïque $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{C}(=\text{O})\text{OH}$

5.10.4. Synthèse de l'acide barbiturique

Par condensation de l'urée H_2NCNH_2 (diamide)
et du malonate d'éthyle $\text{C}_2\text{H}_5\text{OOC}-\text{CH}_2-\text{COOC}_2\text{H}_5$ (diester),

- acide hexanoïque, amide, C-alkylation, décarboxylation, diester, liaison hydrogène intramoléculaire, mécanisme concerté, potasse alcoolique, saponification, SN2, synthèse malonique

en présence d'éthanolate de sodium dans l'éthanol, on obtient un composé $C_4H_4O_3N_2$, de structure cyclique, dépourvu de carboxyle mais d'une acidité si manifeste ($pK = 4$) qu'il est connu sous le nom d'acide barbiturique.

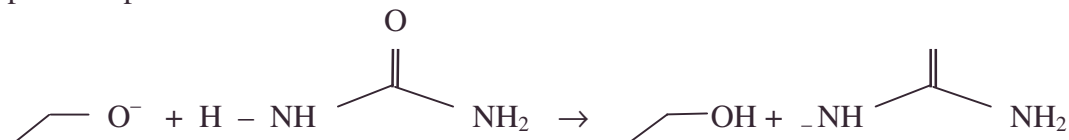
Ecrire le mécanisme de la réaction.

Données : $pK_{urée} = 13$; $pK_{malonate} = 15$.

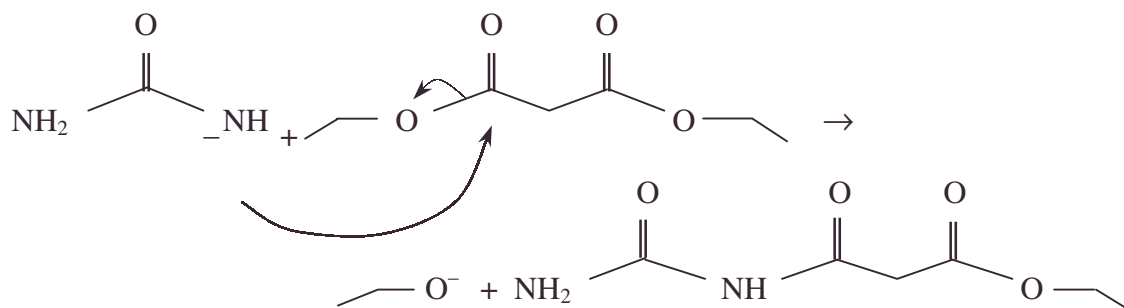
Autres concours

Corrigé

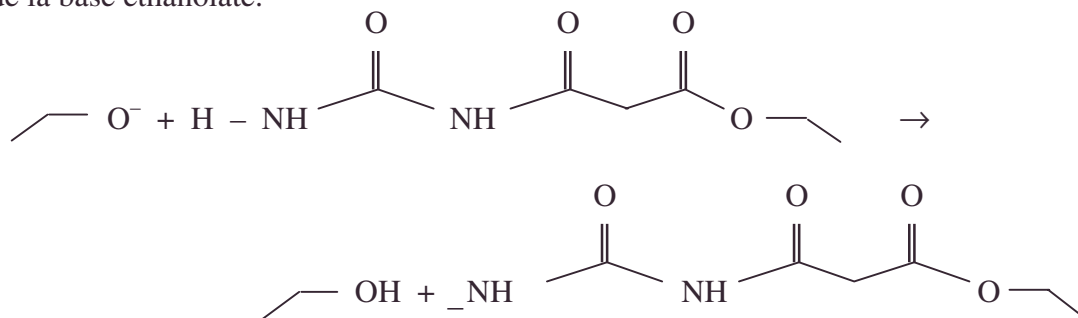
1. Formation d'un anion nucléophile, par réaction de la base la plus forte sur l'acide le plus fort présent dans le solvant.



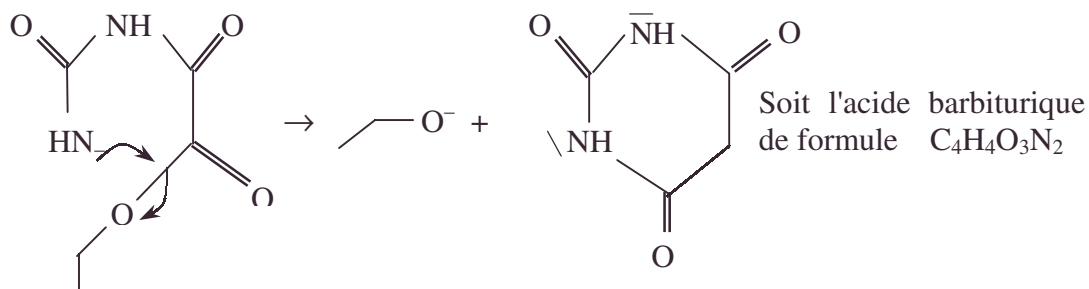
2. Addition du nucléophile sur une fonction ester du malonate d'éthyle suivie ou concomitante d'une élimination de l'éthanolate concurrent.



3. Formation d'un nouvel anion nucléophile par réaction répétée une fois et une seule de la base éthanolate.

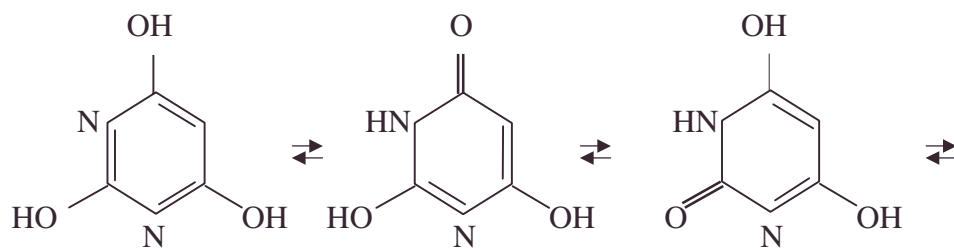


4. Addition interne du nucléophile sur une fonction ester avec cyclisation et élimination

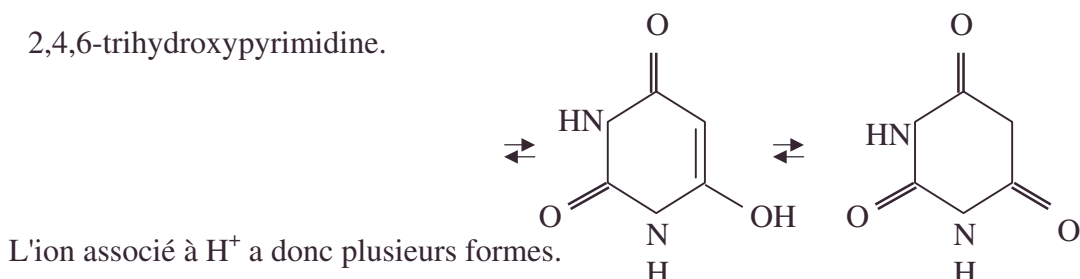


- acide barbiturique, cyclisation, élimination, éthanolate de sodium, malonate de diéthyle, médicament, stabilisation par mésomérie, tautomérie, urée

Structure amide dont la stabilité est assurée par mésomérie et tautométrie.

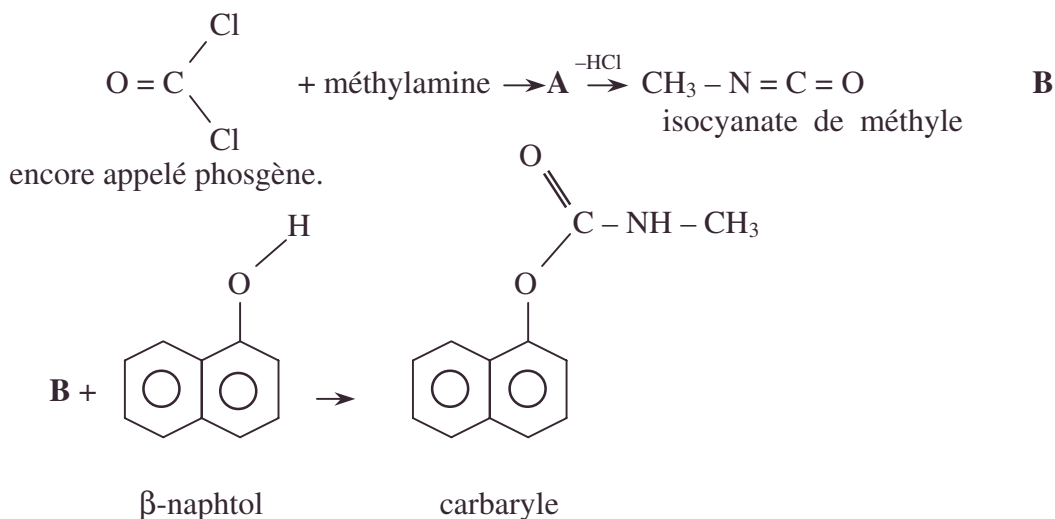


2,4,6-trihydroxypyrimidine.

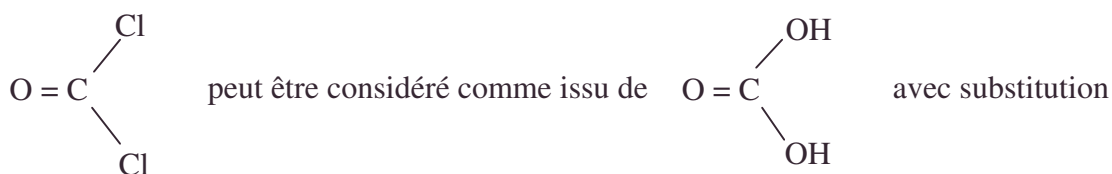


5.10.5. Synthèse de l'isocyanate de méthyle et du carbaryle : exemple d'insecticide

L'isocyanate de méthyle est un intermédiaire de synthèse d'un insecticide très connu, le carbaryle. Les étapes de la synthèse sont indiquées sur le schéma suivant :

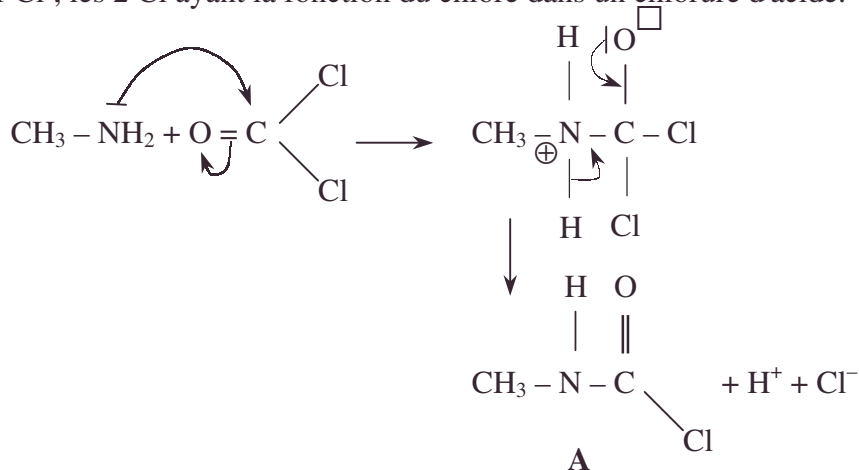


1. En prenant l'acylation des amines comme référence, déterminer la structure de A et expliquer sa formation en proposant un schéma réactionnel.
2. Proposer de même un schéma réactionnel expliquant la formation du carbaryle. Montrer qu'il y a deux sites de protonation lors de cette formation.
3. L'isocyanate de méthyle est très toxique. Comment ce réactif peut-il être qualifié et, pour interpréter sa toxicité, quel type de site cellulaire peut-il être attaqué ?
4. Trouver un mode de formation du carbaryle à partir des mêmes réactifs, qui évite la fabrication de l'isocyanate de méthyle.

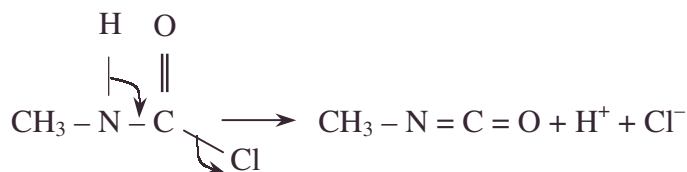
Corrigé

de OH par Cl ; les 2 Cl ayant la fonction du chlore dans un chlorure d'acide.

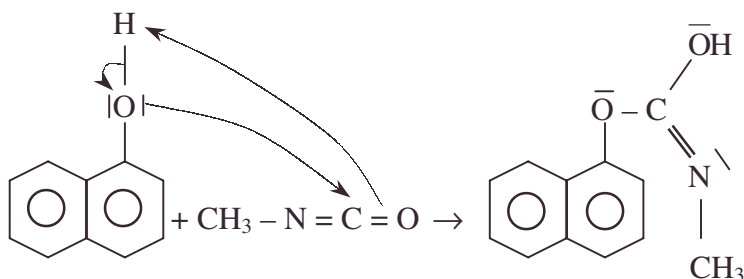
1.



2.

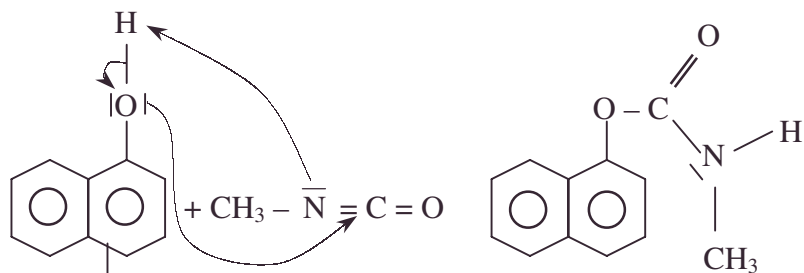


a.



La nucléophilie de la fonction alcool attaque le carbone chargé + (cf. fonction carbonyle) et donne l'analogue d'un hémiacétal.

b. Mais l'azote très électronégatif peut jouer le rôle de l'oxygène.



carbaryle

Cas particulier de carbamate

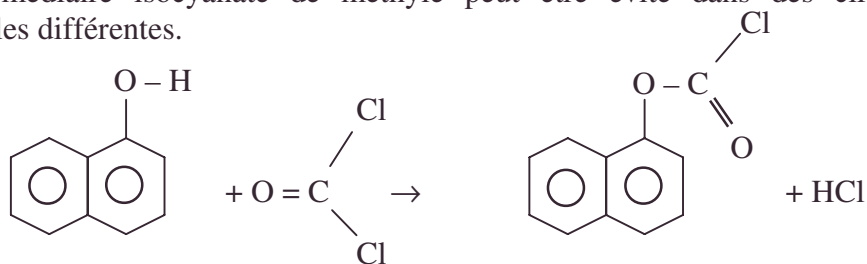
Conclusion : il y a 2 sites de protonation ; la stabilisation par mésomérie vu les doublets séparés par une liaison simple est plus "évidente" en **b.** qu'en **a.** (instabilité de C = N).

• carbamate, chlorure d'acide, hémiacétal, nucléophilie de l'alcool, nucléophilie de l'azote, protonation, stabilisation par mésomérie

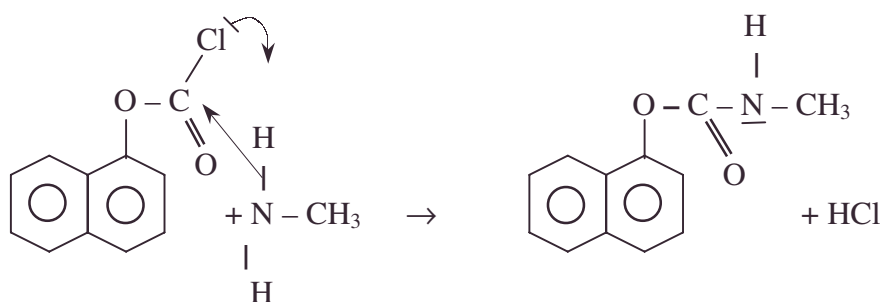
3. Le carbone chargé + réagit avec les sites cellulaires biochimiques nucléophiles. Par exemple : atomes d'azote des acides aminés ou des enzymes, et donc perturbe le fonctionnement biologique jusqu'à l'arrêter.

4. L'intermédiaire isocyanate de méthyle peut être évité dans des circonstances industrielles différentes.

a.



b.



5.10.6. Synthèse historique du terpinéol (Perkin, 1904)

Le terpinéol est une des premières molécules complexes synthétisées. La méthode utilisée par Perkin (1838 – 1907) fait appel à des réactions bien connues à l'époque.

Le composé de départ est **B**, 2-cyanoacétate d'éthyle : $\text{NC-CH}_2\text{-COOEt}$, où Et est le groupement éthyle. **B** est l'acide conjugué d'un carbanion **B'**, écrit $\text{NC-CH}^-\text{-COOEt}$.

Le pKa du couple **B/B'** est environ égal à 12 dans l'eau.

1. Justifier le caractère acide de **B**.

2. Le passage de **B** à **B'** se fait par action sur **B** d'une solution d'éthanolate de sodium EtONa dans l'éthanol.

Pourquoi ne faut-il pas utiliser une solution aqueuse de soude pour effectuer cette transformation ?

3. Le carbanion **B'** réagit avec le 3-iodopropanoate d'éthyle ($\text{I-CH}_2\text{-CH}_2\text{-COOEt}$) dans l'éthanol. On obtient **C** qui traité par l'éthanolate de sodium dans l'éthanol, donne un carbanion **C'**. **C'** réagit à son tour avec le 3-iodopropanoate d'éthyle ; on obtient finalement **D**, de formule brute $\text{C}_{15}\text{H}_{23}\text{O}_6\text{N}$.

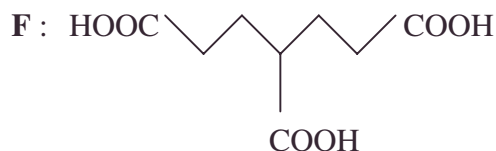
Donner les formules développées de **C** et **D**.

4. Préciser le mécanisme réactionnel du passage de **B'** à **C**.

5. On fait réagir **D** avec des ions OH^- par action d'une solution d'hydroxyde de potassium solide dissous dans l'éthanol pur, appelée "potasse alcoolique", chauffée à reflux ; puis on acidifie le milieu réactionnel.

On obtient un tétraacide carboxylique **E** se décarboxylant aisément à chaud en un triacide **F** donné ci-dessous. Donner la formule développée de **E**.

Quelle est la nature des réactions effectués lors du chauffage à reflux ?



- 2-cyanoacétate d'éthyle, 3-iodopropanoate d'éthyle, acides aminés, carbanion, chauffage à reflux, enzymes, éthanolate de sodium, nitrile, potasse alcoolique, site cellulaire, terpinéol

6. Le composé **F**, chauffé en présence d'anhydride acétique, donne **G**.



Sachant que la réaction $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ produit également du dioxyde de carbone, écrire le bilan de cette réaction.

N.B.: aucune étape réactionnelle n'est demandée.

7. Quel peut être le rôle de l'anhydride acétique ?

8. **G** est traité par un excès d'iodure de méthylmagnésium dans l'éther anhydre.

On observe un dégagement gazeux lors d'une réaction parasite de celle, principale, que l'on souhaite effectuer. Lorsque la réaction principale est terminée, on acidifie prudemment par une solution aqueuse diluée de sulfate d'ammonium.

On isole après extraction un composé **H**, dont le spectre infrarouge montre principalement une bande large vers 3300 cm^{-1} et une bande intense autour de 1720 cm^{-1} .

Sachant que le groupe COOH possède un hydrogène mobile, quelle est la nature du dégagement gazeux observé ?

9. Donner la formule développée du composé **H**.

Interpréter les données du spectre infrarouge.

10. Le traitement de **H** par HBr concentré conduit à **I** : **I** est ensuite chauffé à reflux dans la potasse alcoolique concentrée. Il se forme de manière majoritaire un composé **J**, dont le spectre infrarouge ne montre aucune bande au voisinage de 3300 cm^{-1} .

Après acidification du mélange réactionnel, on isole **K** de formule brute $\text{C}_8\text{H}_{12}\text{O}_2$.

Donner la formule développée de **I**. Quelle est la nature de la réaction $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{I}$?

11. Donner la formule développée de **J**. Il se forme, en même temps que **J**, un composé **J'** très minoritaire. Quel est **J'** ? Pourquoi est-il minoritaire ?

Donner également la formule développée de **K**.

12. Une tentative pour fabriquer **K** à partir de **H**, directement, par chauffage en milieu acide, se solde par un échec. Il se forme, à côté du produit attendu **K**, une grande quantité d'un produit **K'** bicyclique, isomère de **K**.

Quelle est la formule développée de **K'** ?

13. L'action de l'éthanol en présence de traces d'acide fort sur le composé **K** donne **L**. Le spectre infrarouge de **L** présente, entre autres, une bande assez faible vers 1680 cm^{-1} , et une autre plus intense vers 1750 cm^{-1} .

Quelle est la formule de **L** ? Justifier les données des spectres infrarouges de **L**.

14. Donner le mécanisme de la réaction $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$.

15. Enfin, le traitement de **L** par l'iodure de méthylmagnésium dans l'éther anhydre, suivi d'une hydrolyse en milieu faiblement acide, donne le terpinéol.

Donner un schéma mécanistique simple de la réaction $\mathbf{L} \rightarrow \text{terpinéol}$.

16. Pourquoi doit-on absolument éviter d'effectuer l'hydrolyse en milieu trop acide ?

17. Le terpinéol ainsi synthétisé présente-t-il une activité optique ? Justifier.

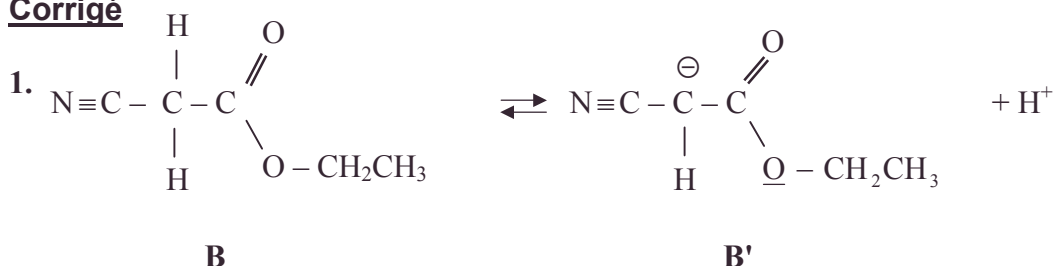
Annexe

Données spectroscopiques

Liaison	Type de composé	Fréquence (cm ⁻¹)	Intensité
C – H	alcane	2858 – 2960	forte
– C – H	alcène	3010 – 3100	moyenne
≡ C – H	alcyne	3300	forte
C – C	alcane	600 – 1500	faible
C = C	alcène	1620 – 1680	forte à très faible
C ≡ C	alcyne	2100 – 2260	variable
C ≡ N	nitrile	2200 – 2300	variable
C – O	alcools, éthers-oxydes, acides carboxyliques, ester	1000 – 1300	forte
C = O	aldéhyde	1720 – 1740	forte
C = O	cétones	1705 – 1725	forte
C = O	acides carboxyliques	1700 – 1725	forte
C = O	esters	1735 – 1750	
O – H	alcools libres	3590 – 3650	variable, aiguë
O – H	alcools associés	3200 – 3500	forte, large
O – H	acides carboxyliques associés	2500 – 3000	variable, large

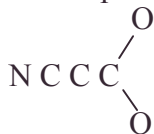
Mines ; Durée : 2h

Corrigé

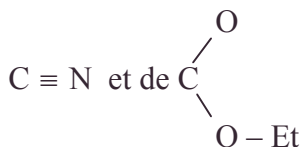


Le carbanion **B'** est stabilisé par mésomérie.

Il y a conjugaison de doublets mobiles séparés par une liaison simple, d'où une délocalisation importante sur la zone

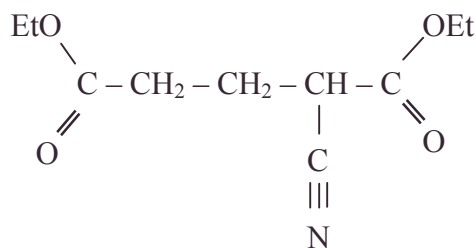


Par conséquent on comprend l'acidité de **B**, aspect thermodynamique de la mobilité des H en α de

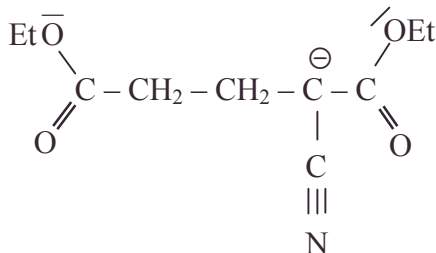


2. On veut éviter la saponification de l'ester classique dans une solution aqueuse de soude, due à la grande nucléophilie de OH⁻ dans l'eau à température ordinaire.

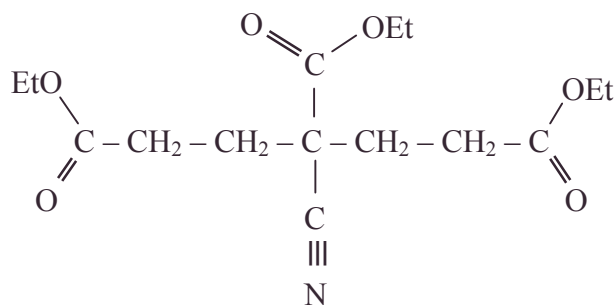
3.a. On opère une substitution nucléophile de I⁻ par B'. On obtient C :



b. Dans le milieu basique la mobilité des H en α permet d'obtenir le carbanion C' (stable par mésomérie).

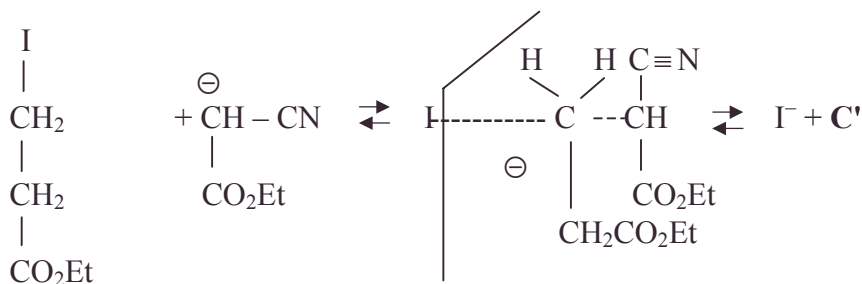


c. On renouvelle la substitution nucléophile de I par C' ; on obtient D :

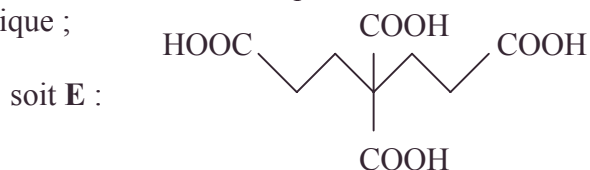


4. Il ne peut s'agir d'une SN1 (en absence de catalyseur) car $\text{EtO} \quad \text{O} \quad \text{C} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2^\ominus$ n'existe pas dans ce solvant.

Il y a passage par un état de transition avec inversion de Walden selon la SN2 :

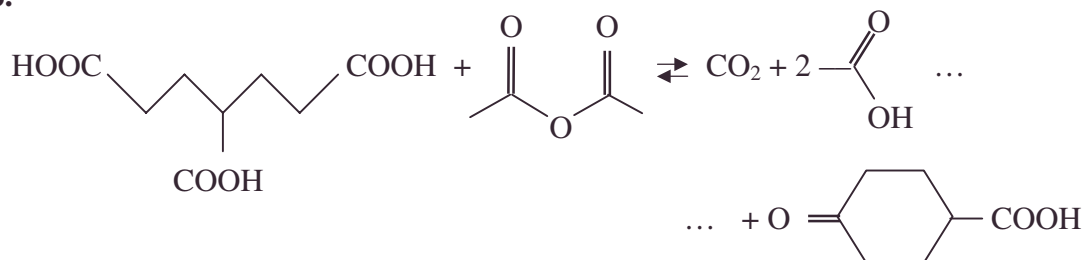


5. Lors du chauffage à reflux, la saponification des 3 fonctions ester les transforme en 3 fonctions carboxylate, qui en milieu acide donnent 3 fonctions acide carboxylique ; on obtient en même temps l'hydratation de la fonction nitrile qui en milieu acide, donne une quatrième fonction acide carboxylique ;



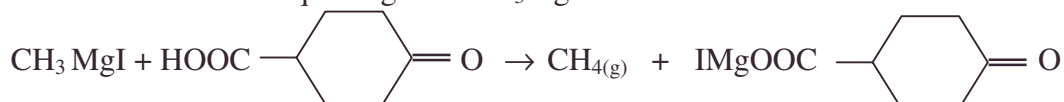
• acide carboxylique, carbanion, carboxylate, chauffage à reflux, état de transition, hydratation, inversion de Walden, nitrile, saponification, SN2, substitution nucléophile

6.



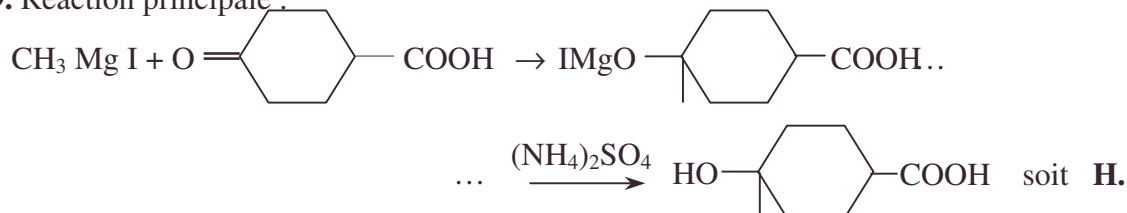
7. L'anhydride se transforme en acide en prélevant une molécule d'eau, permettant la cyclisation, associée à un départ de CO_2 (décarboxylation).

8. **G** a une fonction acide qui réagit sur CH_3MgI .



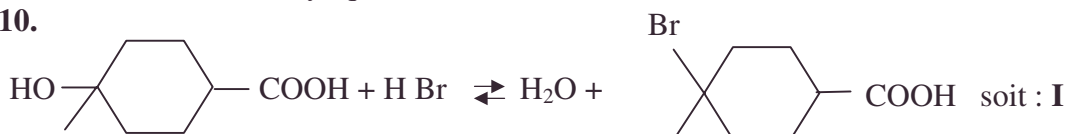
Le méthane (inodore) constitue le dégagement gazeux.

9. Réaction principale :



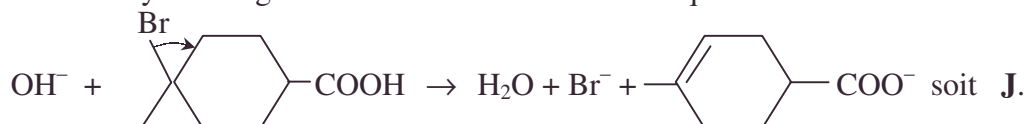
D'après l'annexe, l'alcool tertiaire absorbe vers 3300 cm^{-1} ;
la fonction acide carboxylique absorbe vers 1720 cm^{-1} .

10.



Il s'agit d'une substitution nucléophile, formellement de OH^- par Br^- .

11.a. La déshydrohalogénéisation à chaud en milieu basique s'écrit :



Le composé majoritaire est unique vu la symétrie et suit la règle de Saitsev (chauffage à reflux).

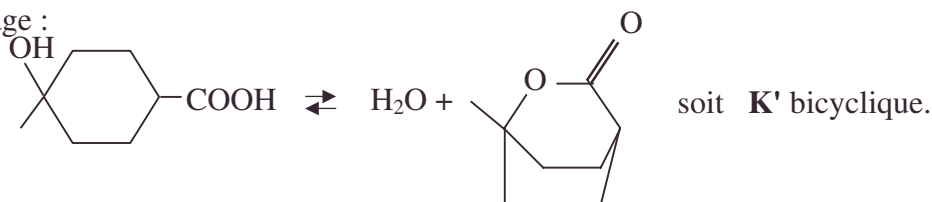


Exception à la règle thermodynamique de Saitsev.

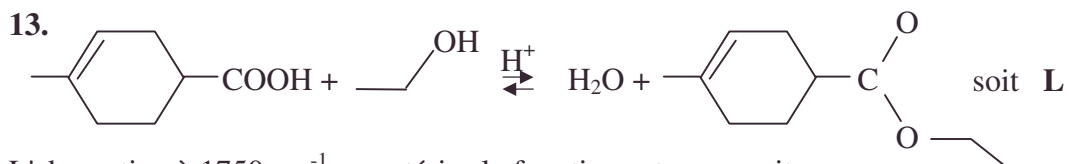


12. **H** possède la fonction alcool et la fonction acide carboxylique.

H peut se déshydrater par une estérification intramoléculaire, favorisée par le chauffage :



• acide carboxylique, alcool tertiaire, anhydride acétique, chauffage à reflux, cyclisation, déshydrohalogénéation, estérification intramoléculaire, minoritaire, règle de Saitsev, substitution nucléophile

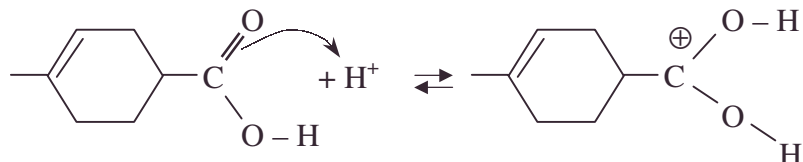


L'absorption à 1750 cm^{-1} caractérise la fonction ester prescrite.

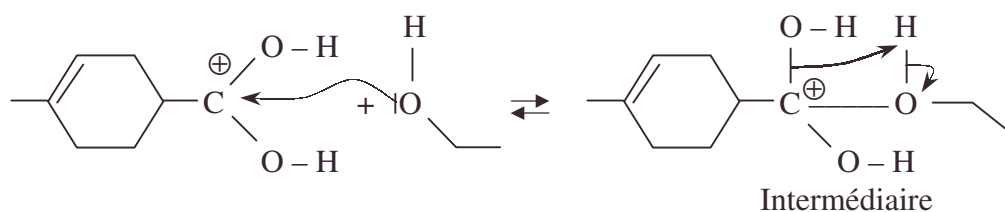
L'absorption à 1680 cm^{-1} caractérise la double liaison $\text{C}=\text{C}$ cf. annexe.

14. Le mécanisme d'estérification d'un alcool primaire est :

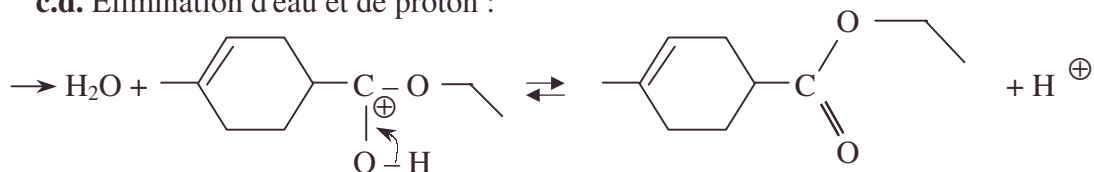
a. Protonation en milieu acide de l'acide carboxylique.



b. Attaque du site électrophile par l'alcool, réactif nucléophile.

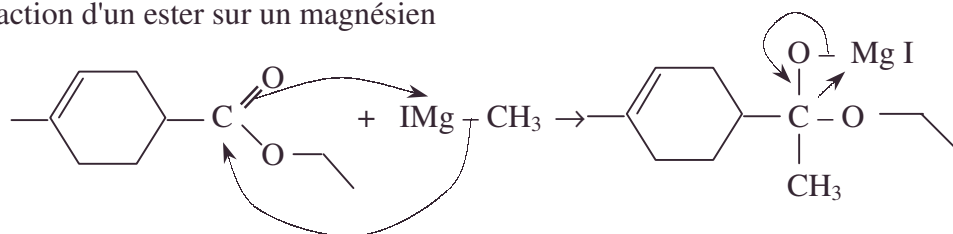


c.d. Elimination d'eau et de proton :

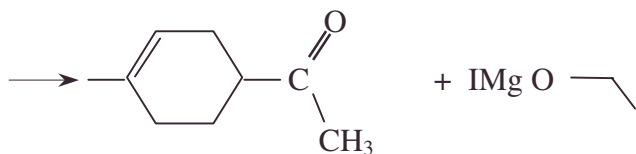


15. Réaction d'un ester sur un magnésien

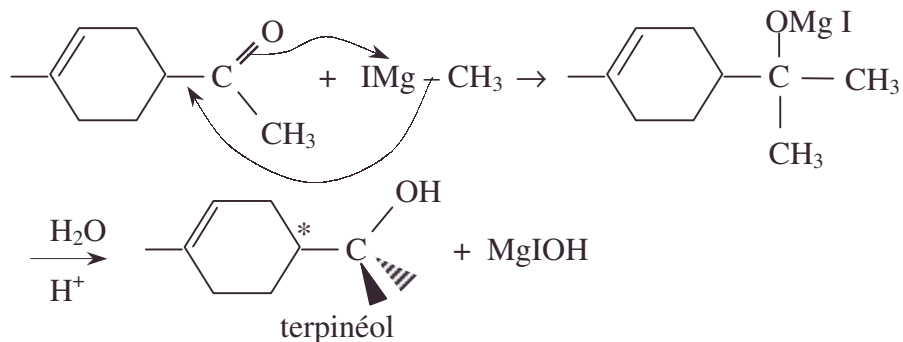
a.



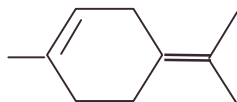
b.



c.



16. Il faut éviter la déshydratation de l'alcool tertiaire en milieu acide qui donnerait majoritairement :



17. Le carbone asymétrique marqué par * provient de la réaction de décarboxylation de E en F à chaud alors qu'il y a dans E, 2 fonctions carboxyliques qui ont l'équiprobabilité du départ. On aura donc un mélange racémique à l'arrivée, soit aucune activité optique.

5.10.7. Comparaison thermodynamique d'acides carboxyliques

appartient aussi aux programmes de MP, PSI, PT, TSI

1. On mesure la conductivité χ (en $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$) de solutions aqueuses d'acide acétique de diverses concentrations molaires c (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) et on en déduit la conductance équivalente Λ définie par $\Lambda = \frac{1000\chi}{c}$. Les mesures à 25°C donnent les résultats suivants : (c en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et Λ en $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{L}$) :

Lorsque c tend vers 0 (dilution infinie), Λ tend vers Λ_0 et on obtient par extrapolation :

$$\Lambda_0 = 390,7 \text{ ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{L}$$

$10^3 c$	Λ
0,028014	210,15
0,11135	127,32
0,2184	96,14
1,02831	47,80

On admet que, pour un électrolyte faible, partiellement ionisé, le coefficient de dissociation α est donné par : $\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_0}$. Pour chacune des mesures du tableau ci-dessus,

calculer la constante d'ionisation K_a de l'acide acétique, puis sa valeur moyenne déduite de ces mesures, et qui est celle qu'on retiendra pour la suite du problème.

2. On réalise ensuite les expériences calorimétriques suivantes :

a. Dans un calorimètre de précision, on neutralise 100 ml d'une solution aqueuse d'acide acétique à 1 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ par 100 ml d'une solution aqueuse de soude à 1 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le vase calorimétrique contient une résistance immergée R de 3,07 ohms. La neutralisation entraîne une augmentation de température $\Delta\theta_1 = 6,564^\circ\text{C}$ (après corrections) qui se développe en 2 minutes environ.

b. On neutralise ensuite dans les mêmes conditions 100 ml d'une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène 1 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ par 100 ml d'une solution aqueuse de soude à 1 $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. L'élévation correspondante de température $\Delta\theta_2 = 6,517^\circ\text{C}$ se fait également en 2 minutes environ.

c. On envoie dans la résistance R immergée dans le mélange précédent (**2.b.**) un courant électrique pendant exactement 43,2 s. La différence de potentiel aux bornes de R demeure constante et égale à 20,0 volts. L'élévation de température qui se développe en 2 minutes environ est $\Delta\theta_3 = 6,560^\circ\text{C}$.

Ces expériences sont réalisées autour de 25°C. Calculer l'enthalpie de dissociation de l'acide acétique $\Delta_r H_a^0$ et à l'aide du résultat de la question 1., son entropie de dissociation $\Delta_r S_a^0$ à 25°C (les enthalpies de dilution seront négligées ; on admettra que les chaleurs massiques des différentes solutions sont égales)

3. On mélange des volumes égaux de solutions aqueuses contenant respectivement 0,001 mole d'acide formique par litre et 0,0005 mole de soude par litre. On mesure à 13°C et 85°C le pH de la solution ainsi partiellement neutralisée. Les moyennes des mesures effectuées sur une série de solutions toutes à demi neutralisées sont les suivantes : pH = 3,751 à 13°C ; pH = 3,755 à 85°C.

Calculer à 25°C :

a. la constante d'ionisation de l'acide formique K_a' ;

b. son enthalpie d'ionisation $\Delta_r H_a^0$ supposée indépendante de la température ;

c. son entropie d'ionisation $\Delta_r S_a^0$.

4. On considère la réaction réversible suivante qui a lieu en solution aqueuse diluée :

$\text{HCOOH} + \text{CH}_3\text{COO}^- \rightleftharpoons \text{HCOO}^- + \text{CH}_3\text{COOH}$, qui traduit la compétition des ions formiate et acétate pour un proton.

a. Calculer la constante d'équilibre K_r de cette réaction à 25°C.

b. Calculer les grandeurs thermodynamiques correspondantes $\Delta_r G_r^0, \Delta_r H_r^0, \Delta_r S_r^0$ à 25°C.

c. On prépare une solution contenant une mole d'acide formique et une mole d'acétate de sodium par litre à 25°C. Dans quelle proportion relative les acides formique et acétique sont-ils présents à l'équilibre ?

d. Quel est le pH de la solution obtenue ?

5. La réaction précédente peut être généralisée à d'autres acides carboxyliques en solution aqueuse : $\text{R} - \text{COOH} + \text{CH}_3\text{COO}^- \rightleftharpoons \text{RCOO}^- + \text{CH}_3 - \text{COOH}$, ce qui permet de comparer la force des acides RCO_2H à celle de l'acide acétique. Le tableau ci-dessous donne à 25°C les fonctions thermodynamiques relatives à cette réaction, et les pK_a pour trois acides carboxyliques.

Acides	Formules	pK_a	$\Delta_r G^0$ kJ	$\Delta_r H^0$ kJ	$T \cdot \Delta_r S^0$ kJ	$\Delta_r S^0$ J.K ⁻¹
benzoïque	$\text{C}_6\text{H}_5 - \text{CO}_2\text{H}$	4,206	- 3,14	2,22	5,36	18,0
isovalérique	$(\text{CH}_3)_2\text{CH} - \text{CH}_2 - \text{CO}_2\text{H}$	4,773	0,12	- 4,65	- 4,77	-16,0
diéthylacétique	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{CH} - \text{CO}_2\text{H}$	4,747	- 0,13	- 8,04	- 7,91	-26,5

a. Classer les acides acétique, formique et benzoïque par ordre croissant de force. ce classement peut-il s'expliquer d'après les structures moléculaires de ces acides ?

b. La contribution à $\Delta_r G^0$ de $\Delta_r H^0$ et de $T \cdot \Delta_r S^0$ confirme-t-elle les explications précédentes (5.a.) ? Commenter votre réponse.

c. Si la force des acides est déterminée par la constante de dissociation et en admettant que les enthalpies des réactions étudiées sont indépendantes de la température, montrer qu'il peut exister pour un couple d'acides donnés une température au-delà de laquelle les forces des acides s'inversent (température d'inversion). Calculer cette température dans les cas du couple acides acétique / isovalérique et du couple acide acétique / diéthylacétique.

Données numériques : $T_K = t^\circ\text{C} + 273,16$; cste des gaz parfaits : $R = 8,3143 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Ecole Polytechnique ; Durée : 2h30

Corrigé

1. $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{CH}_3\text{CO}_2^-$ de bilan de concentration :

$$\begin{array}{ccc} c & 0 & 0 \\ c(1-\alpha) & \alpha c & \alpha c \end{array}$$

$$K_a = \frac{(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)(\text{H}^+)}{(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})} = \frac{\alpha^2 c}{1-\alpha}.$$

$$\text{or, } \alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_0}; K_a = \frac{\Lambda^2 c}{\Lambda_0^2 \left(1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)}.$$

$10^3 c$	Λ	K_a
0,028014	210,15	$1,7539 \cdot 10^{-5}$
0,111350	127,32	$1,7541 \cdot 10^{-5}$
0,218400	96,14	$1,7540 \cdot 10^{-5}$
1,028310	47,80	$1,7538 \cdot 10^{-5}$

$$\Rightarrow \bar{K}_a = 1,75395 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

2.a. Dans le calorimètre a lieu : $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{OH}^- \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^- + \text{H}_2\text{O}$; $\Delta H = Q_p$ car la réaction se fait sous pression constante.

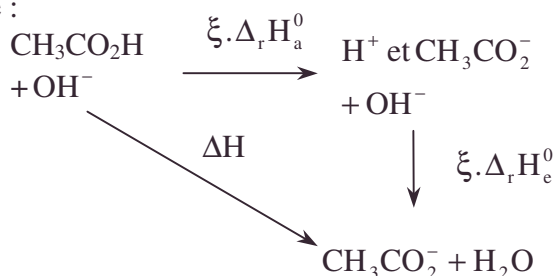
Pour introduire $\Delta_r H_a$, introduisons un cycle :

$$\text{Ainsi, } Q_p = -\xi(\Delta_r H_a^0 + \Delta_r H_e^0) = \mu \Delta\theta_1,$$

μ = capacité calorifique du système.

$$\xi = 0,1 \text{ mol.}$$

$$\Rightarrow \Delta_r H_a^0 = \frac{\Delta_r H_e^0 - \mu \Delta\theta_1}{\xi}$$



b. Dans le calorimètre a lieu : $\text{H}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$, soit $Q_b - \Delta_r H_e^0 = \mu \Delta\theta_2$.

avec le même μ (cf. $v_1 c_1 = v_2 c_2$; $v_1 = v_2 \Rightarrow c_2 = c_1 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$) car il y a égalité des quantités et des chaleurs massiques.

$$\text{c. } Q_c = \tau \frac{U^2}{R} = \mu \Delta\theta_3 \Rightarrow \mu = \frac{\tau U^2}{R \Delta\theta_3}.$$

$$\bullet \Delta_r H_a^0 = \frac{-\tau U^2 (\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)}{R \Delta\theta_3 \xi}; \text{AN : } \Delta_r H_a = -0,4033 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

$$\bullet \Delta_r G_a^0 = \Delta_r H_a^0 - T \Delta_r S_a^0 \Rightarrow \Delta_r S_a^0 = \frac{\Delta_r H_a^0 - \Delta_r G_a^0}{T} \text{ avec } \Delta_r G_a^0 = -RT \ln \frac{K_a}{c^0},$$

avec $c^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$.

$$\Delta_r S_a^0 = \frac{\Delta_r H_a^0}{T_{298}} + R \ln \bar{K}_a; \text{AN : } \Delta_r S_a^0 = -92,40 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

3.a.b. Pour $\text{HCO}_2\text{H} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{HCO}_2^-$; $K'_a = \frac{(\text{H}^+)(\text{HCO}_2^-)}{(\text{HCO}_2\text{H})}$ associé à $\Delta_r H_a^0$.

Expérience : $\text{HCO}_2\text{H} + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{HCO}_2^-$ avec $K = \frac{K'_a}{K_e}$ et $c = 0,001 \text{ mol.L}^{-1}$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Bilan :} & c & \frac{c}{2} & - & 0 & & \\ & \frac{c}{2} & 0 & - & \frac{c}{2} & \Rightarrow & \text{pH} = \text{p}K'_a. \end{array}$$

Intégrons la formule de Van t'Hoff $\frac{d \ln K'_a}{dT} = \frac{\Delta_r H_a^0}{RT^2}$, $\Delta_r H_a^0$ étant supposé constant entre 13 et 85° C.

$$\ln \frac{K'_{A_2}}{K'_{A_1}} = \frac{\Delta_r H_a^0}{R} \left(\frac{1}{T_{286}} - \frac{1}{T_{358}} \right) \Rightarrow \Delta_r H_a^0 = \frac{-T_{358} T_{286}}{T_{358} - T_{286}} \cdot R \cdot 2,3 (\text{pH}_{85} - \text{pH}_{13}) \text{ car}$$

$$2,3 = \ln 10. \text{ AN : } \Delta_r H_a^0 = -108,8 \text{ J.mol}^{-1}.$$

La formule de Van t'Hoff appliquée entre 13° et 25° donne :

$$\ln \frac{K'_a}{K_{A_1}} = \frac{\Delta_r H_a^0}{R} \left[\frac{1}{T_{286}} - \frac{1}{T_{298}} \right] \Rightarrow \text{p}K'_a = \text{p}K_{A_1} - \frac{\Delta_r H_a^0}{2,3R} \frac{(T_{298} - T_{286})}{T_{298} \cdot T_{286}};$$

$$\text{AN : } \text{p}K_{A_1} = 3,751 \text{ vu la mesure ; } \text{p}K'_a = 3,52 ; K'_a = 1,770 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

$$\text{c. } \Delta_r S_a^0 = \frac{\Delta_r H_a^0}{T_{298}} + R \ln K'_a \quad \text{AN : } \Delta_r S_a^0 = -72,19 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$



$$\text{a. } K_r = \frac{(\text{HCO}_2^-)(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H})}{(\text{HCO}_2\text{H})(\text{CH}_3\text{CO}_2^-)} = \frac{K'_a}{K_a} ; \text{AN : } K_r = 10,09.$$

$$\text{b. } \alpha. \Delta_r G^0 = -RT \ln K_r \Rightarrow \Delta_r G^0 = RT \ln \frac{K'_a}{K_a} ; \text{AN : } \Delta_r G^0 = -5,727 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

$$\beta. \Delta_r H^0 = RT^2 \frac{d \ln K_r}{dT} = RT^2 \left[\frac{d \ln K'_a}{dT} - \frac{d \ln K_a}{dT} \right] = \Delta_r H_a^0 - \Delta_r H_a^0 ;$$

$$\text{AN : } \Delta_r H_a = 294,5 \text{ J.mol}^{-1}.$$

$$\gamma. \Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0}{T_{298}} + R \ln K_r = \Delta_r S_a^0 - \Delta_r S_a^0 ; \text{AN : } \Delta_r S_a = 20,21 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

c. Ecrivons les bilans de :

$$\begin{array}{ccc|ccc} \text{HCO}_2\text{H} & \rightleftharpoons & \text{H}^+ + \text{HCO}_2^- & \text{H}^+ + \text{CH}_3\text{CO}_2^- & \rightleftharpoons & \text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} \\ 1 & & 0 & 1 & & 0 \\ 1 - \xi_1 & & \xi_1 - \xi_2 & \xi_1 - \xi_2 & & 1 - \xi_2 \\ & & \xi_1 & & & \xi_2 \end{array}$$

$$K'_a = \frac{\xi_1(\xi_1 - \xi_2)}{1 - \xi_1} ; K_a = \frac{(1 - \xi_2)}{\xi_2} (\xi_1 - \xi_2)$$

$$\text{or, } \xi_1 - \xi_2 \ll 1 \text{ mais } \xi_1 - \xi_2 > 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2.$$

$$K_r = \frac{K'_a}{K_a} = \frac{\xi_1^2}{(1 - \xi_1)^2}.$$

$$\text{Cherchons } x = \frac{1 - \xi_1}{\xi_2} = (\text{HCO}_2\text{H})/(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}).$$

$$K_r = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{A.N. : } x = 0,3148 ;$$

$$\xi_1 = \frac{1}{1+x} ; \text{AN : } \xi_1 = \xi_2 = 0,76 ; 1 - \xi_1 = 1 - \xi_2 = 0,34 .$$

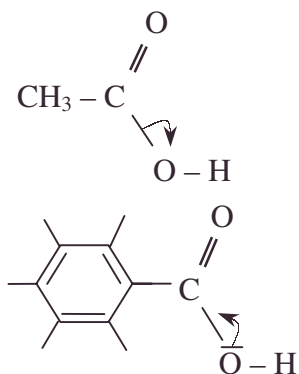
$$\text{d. } K'_a \cdot K_a = (\xi_1 - \xi_2)^2 \frac{\xi_1}{1 - \xi_1} \left(\frac{1 - \xi_1}{\xi_1} \right) = (\xi_1 - \xi_2)^2 = (H^+)^2 \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_a + \text{p}K'_a) ;$$

AN : pH = 4,25. $\xi_1 - \xi_2 = 5,6 \cdot 10^{-5}$: l'approximation est justifiée.

5.a.α. Le classement par ordre croissant d'acidité est acide acétique, acide benzoïque, acide formique vu l'ordre des pK : 4,755 > 4,206 > 3,752.

β. On peut comprendre la comparaison acide formique, acide acétique par l'effet inductif donneur répulsif de CH₃ qui explique la moindre polarisation de la liaison OH dans l'acide acétique vu la plus grande polarisation de C – O.

γ. L'effet mésomère (délocalisation sur l'ensemble des carbones à doublets conjugués) présent dans l'acide benzoïque tend à donner de la liberté à H⁺ ; il permet de comprendre le classement acide acétique - acide benzoïque.



b. $\Delta_r G^0 = 2,3RT (\text{p}K'_a - \text{p}K_a)$ permet les mêmes calculs qu'en 4.

	$\Delta_r H^0$ kJ.mol ⁻¹	$T\Delta_r S^0$ kJ.mol ⁻¹	$\Delta_r G^0$ kJ.mol ⁻¹
acide formique	0,2945	6,022	- 5,73
acide benzoïque	2,22	5,36	- 3,14

Le calcul des $\Delta_r G^0$ confirme l'ordre des acidités

La contribution de $\Delta_r H^0$ dans le cas de l'acide benzoïque explique la plus grosse part de l'écart acide formique – acide benzoïque. Il faut davantage chauffer pour que la réaction de dissociation se déplace vers la droite dans le cas de l'acide benzoïque. On comprend également cinétiquement la plus grande réactivité de la petite molécule d'acide formique, comparée à la grosse molécule d'acide benzoïque avec ses conséquences statistiques thermodynamiques que l'on voit.

c. La formule de Van t'Hoff ou de Gibbs-Helmholtz peut s'écrire aussi :

$$\frac{d \frac{\Delta_r G^0}{T}}{dT} = - \frac{\Delta_r H^0}{T^2} ;$$

elle devient, par intégration :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 + \frac{T}{T_{298}} [\Delta_r G^0(T_{298}) - \Delta_r H^0] .$$

La température d'inversion T_i est pour $\Delta_r G^0(T_i) = 0$, soit $T_i = -T_{298} \frac{\Delta_r H^0}{\Delta_r G^0_{298} - \Delta_r H^0}$.

AN : couple acides acétique / isovalérique : $T_i = 291 \text{ K}$.

couple acides acétique / diéthylacétique : $T_i = 303 \text{ K}$.

L'ordre d'acidité existant à $T = 298 \text{ K}$ s'inverse si $T > T_i > T_{298}$ ou si $T < T_i < T_{298}$.

• *acide benzoïque, délocalisation électronique, doublets conjugués, effet inductif donneur, Gibbs-Helmholtz, pH, pK_A, tableau, température d'inversion*

5.10.8. Cinétique d'une estérification

Voir page 1480.

5.10.9. Acide bicarboxylique 1

Voir page 1571.

5.10.10. Acide bicarboxylique 2

Voir page 1574.

**5.10.11. Comparaison d'un
organomagnésien avec un
organozincique**

Voir page 1717.

5.10.12. Dérivés du benzène

Voir page 1729.

**5.10.13. Synthèse d'un médicament
antiinflammatoire : l'ibuprofen**

Voir page 1731.

5.10.14. Le menthol

Voir page 1734.

**5.10.15. Synthèse de Williamson
d'un éther couronne**

Voir page 1738.

**5.10.16. L'élément azote en chimie
organique**

Voir page 1748.

5.10.17. Survol 3

Voir page 1798.

5.10.18. Survol 5

Voir page 1803.

5.10.19. Survol 6

Voir page 1806.

5.11. Polymérisations et polycondensations

appartient aux programmes de PCSI (PC), TPC1, PSI

5.11.1. Alcool à polycondenser

Le néopentylglycol (2,2-diméthylpropane-1,3-diol) est un composant de synthèse pour la fabrication des polyesters. Nous indiquons ici une préparation :

a. La préparation de l'alcool B', racémique de B 3-méthylbutan-2-ol est faite à partir d'un carbonyle D sur le magnésien du bromure de méthyle. Donner le nom et la formule de D.

Expliquer la réaction permettant d'obtenir B'.

b. La réaction avec des quantités équimolaires de D et de méthanal en présence de substances basiques conduit – après acidification – à un intermédiaire E de formule brute $C_5H_{10}O_2$. Par quel type de réaction obtient-on E ?

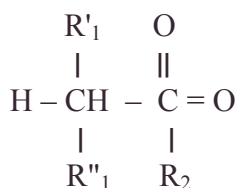
Ecrire les réactions conduisant à E.

c. Comment peut-on convertir E en néopentylglycol ?

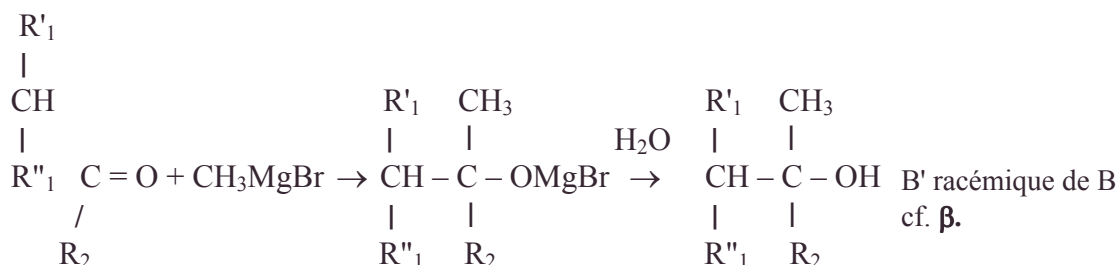
Autres concours ; durée : 1h

Corrigé

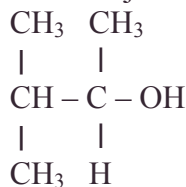
a.α. Recherchons D sous la forme :



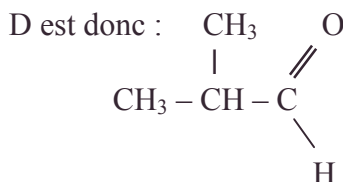
①



On identifie à B déjà trouvé, formulé de manière adéquate :



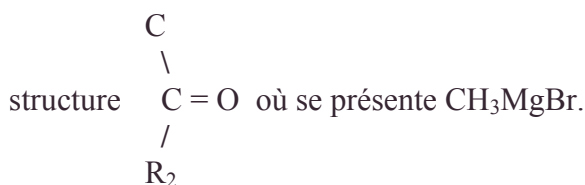
$$\Rightarrow R_2 = H ; R'_1 = R''_1 = CH_3$$



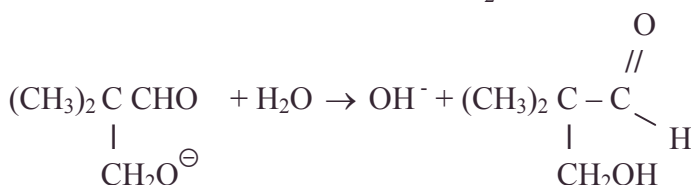
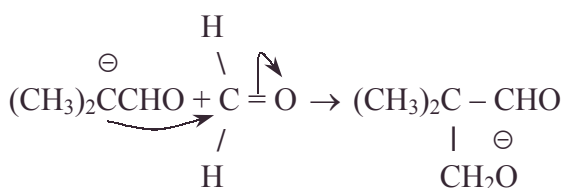
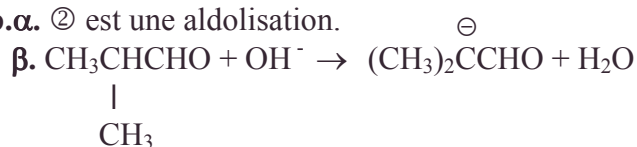
2-méthylpropanal.

β. La réaction ① est une addition nucléophile de CH_3MgBr sur D suivie d'une hydrolyse.

La première étape permet l'obtention de carbones R ou S selon le côté du plan de la

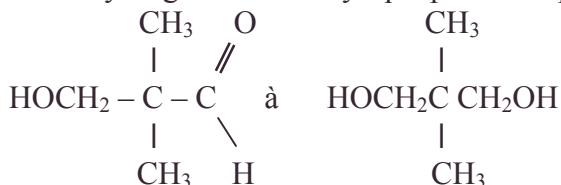


b.α. ② est une aldolisation.



E : 2-hydroxyméthyl-2,2-diméthylpropanal.

c. L'hydrogénation catalytique permet le passage de :



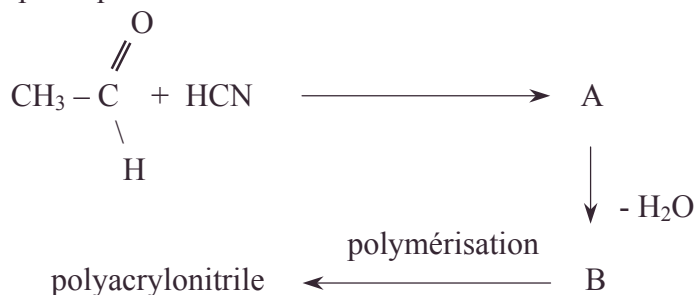
2,2-diméthylpropan-1,3-diol.

Le catalyseur est le nickel de Raney.

L'industrie peut utiliser d'autres processus.

5.11.2. Fabrication du polyacrylonitrile

Les fibres acryliques contiennent au minimum 85 % de polyacrylonitrile dont une synthèse est décrite ci-dessous. Identifiez les différents composés. Connaissez-vous la matière plastique ?



ENSAIT

- aldolisation, fibres acryliques, hydrogénation catalytique, nickel de Raney, polyacrylonitrile

Corrigé

- a. L'attaque de HCN donne : CH_3CHCN 2-hydroxypropanenitrile
 $\quad \quad \quad |$
 $\quad \quad \quad \text{OH}$
- b. A donne par déshydratation : $\text{CH}_2 = \text{CHCN}$
 prop-2-ènonitrile
- c. Le polyacrylonitrile est un mélange (n variés) de : $(\text{CH}_2 - \text{CH})_n$
 $\quad \quad \quad |$
 $\quad \quad \quad \text{CN}$

Il sert pour les textiles (orlon), en copolymérisation, etc.

5.11.3. Copolymérisation Fabrication du caoutchouc

A. En présence d'acide de Lewis, BF_3 , AlCl_3 , le méthylpropylène (ou méthylpropène) peut se polymériser, l'extrémité en croissance étant un carbocation.

Proposer un mécanisme, sachant que des traces d'eau sont nécessaires.

B. Le produit obtenu peut être copolymérisé avec 2% de méthylbuta-1,3-diène.

La structure résultante est tridimensionnelle.

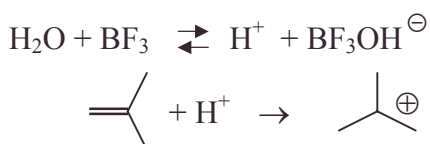
Proposer un motif sachant qu'il n'y a plus de double liaison.

Autres concours**Corrigé**

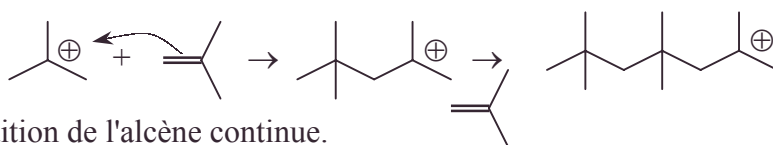
A. On a des réactions en chaîne :

B.

1. Formation du premier carbocation : initiation.

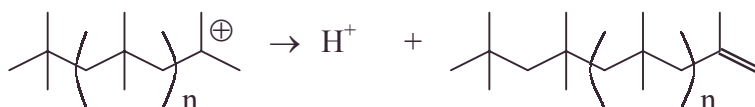


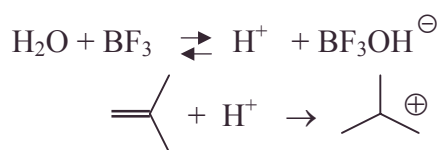
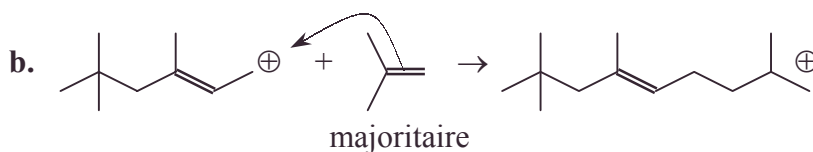
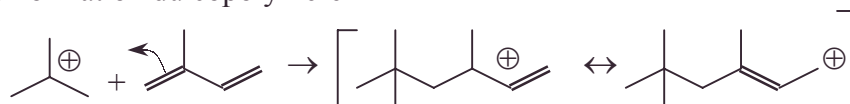
2. Allongement de la chaîne : propagation.



L'addition de l'alcène continue.

3. Obtention du polyisobutène : terminaison

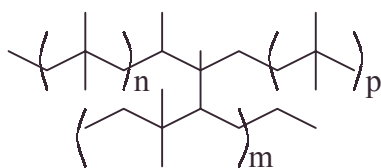


B.1. Formation du premier carbocation :**2. Propagation concurrente****a. Formation du copolymère**

L'addition peut se continuer avec l'alcène majoritaire ou minoritaire. La présence de double liaison permet l'addition d'un carbocation et engendre un édifice tridimensionnel.

c. Départ du proton après réaction de toutes les doubles liaisons.

On obtient le caoutchouc suivant :

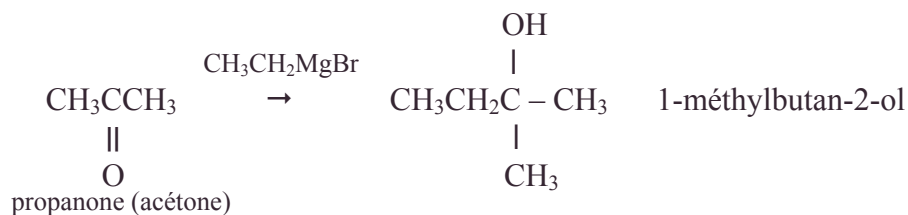
**5.11.4. Survol 3**

Voir page 1798.

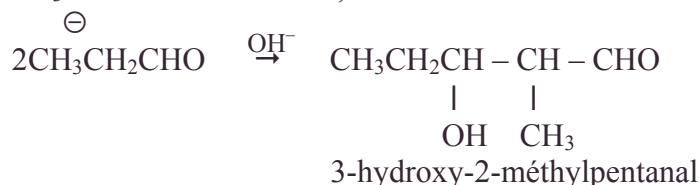
5.11.5. Survol 4

Voir page 1799.

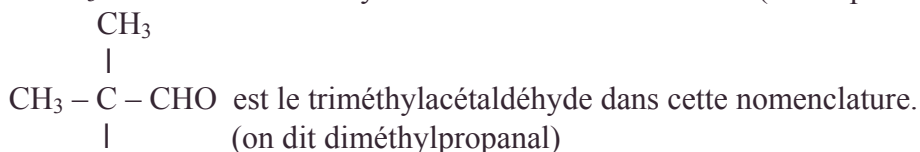
- 2-iodophenylbutane, 2-phénylbutan-2-ol, aldolisation, carbocation, carbocation plan, hydrolyse basique, racémique, SN1, stabilisation par mésomérie, triméthylacétaldéhyde



3.a. vu la mobilité de H_α , CH_3CHCHO s'additionne, et

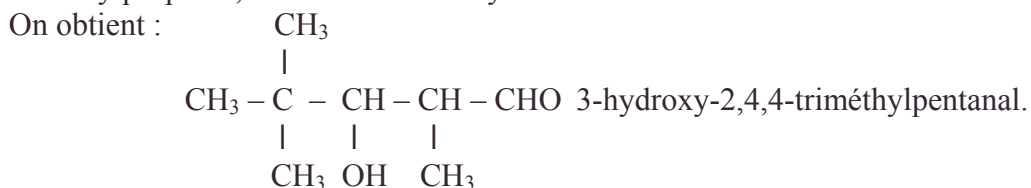


b. CH_3CHO est l'acétaldéhyde en ancienne nomenclature (on dit plutôt éthanal).



Il ne réagit pas car il n'y a pas de H_α .

c. $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CHO}$ donne l'ion $\text{CH}_3\text{CHCHO}^\ominus$ en milieu basique qui attaque le diméthylpropanal, sa fonction carbonyle devenant une fonction alcool.



en plus du 3-hydroxy-2-méthylpentanal obtenu en **3.a.**

5.12.2. Survot 2

1. La combustion complète d'une certaine masse d'un composé organique pur contenant exclusivement du carbone et de l'hydrogène fournit 2,2 g de dioxyde de carbone et 1,08 g d'eau. Quelles sont les formules brutes auxquelles conduit cette analyse ?

Montrer que la tétravalence du carbone permet de donner la formule sans ambiguïté.

La monosubstitution par le chlore fournit un produit unique. Quelle est la formule développée du composé de départ ?

Masses atomiques en g.mol^{-1} : $\text{C} = 12$; $\text{O} = 16$; $\text{H} = 1$.

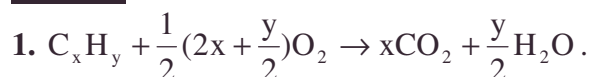
2. Ecrire la réaction du bromure d'isopropylmagnésium sur la propanone acétone. Quel produit obtient-on après hydrolyse ? Le nommer en nomenclature systématique.

3. Mécanisme d'addition du chlore sur le (2Z)-butène. Le composé prépondérant obtenu est-il dédoublable en deux énantiomères ?

4. Addition d'acide bromhydrique sur le but-1-ène. Montrer que selon les conditions expérimentales le composé prépondérant obtenu peut être dédoublable ou non.

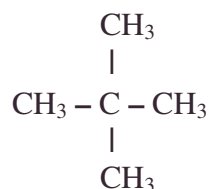
Autres concours ; Durée : 1h

• (Z)-2-butène, 1-méthylbutan-2-ol, 3-hydroxy-2-méthylpentanal, acétone, bromure d'isopropylmagnésium, combustion, dédoublable, diméthylpropanal, formule brute, nomenclature, propanone, tétravalence, triméthylacétaldéhyde

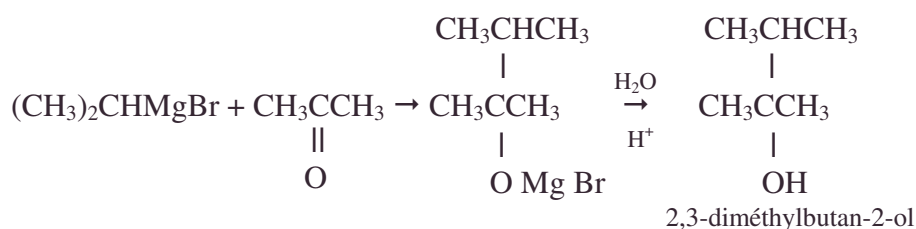
Corrigé

$$m_{CO_2} = 44x ; m_{H_2O} = 9y ; \frac{m_{H_2O}}{m_{CO_2}} = \frac{9y}{44x} = \frac{1,08}{2,2} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2,4 = \frac{12}{5}.$$

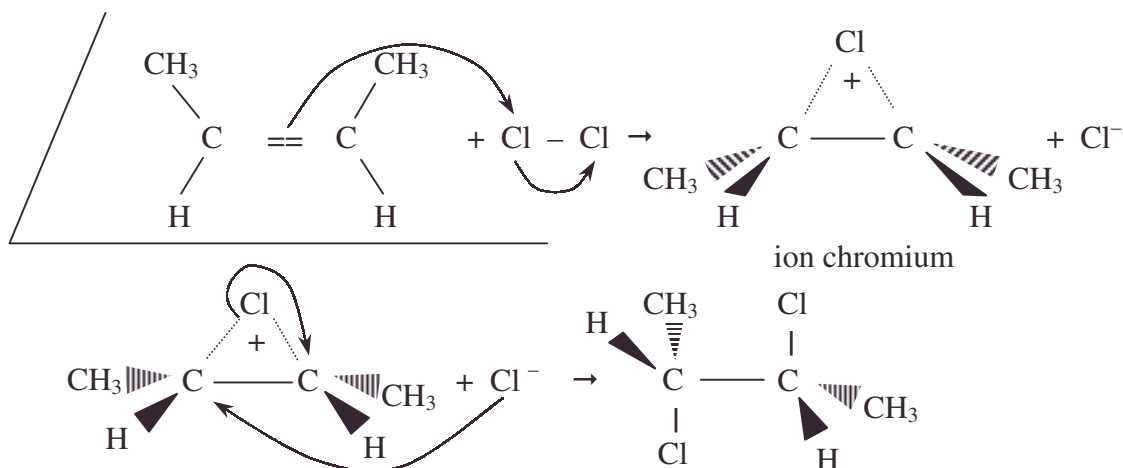
- Les formules brutes acceptables sont : $(C_5H_{12})_n = C_{5n}H_{12n}$.
- L'identification avec la formule des alcanes C_nH_{2n+2} entraîne par résolution $n = 1$ solution unique. On a sans ambiguïté C_5H_{12} .
- Les 12 H doivent jouer le même rôle dans la substitution. L'étude des structures permet d'aboutir à la formule symétrique ci-contre (où $12 = 4 \cdot 3$), qui ne fournit strictement qu'un seul dérivé monochloré.



2.

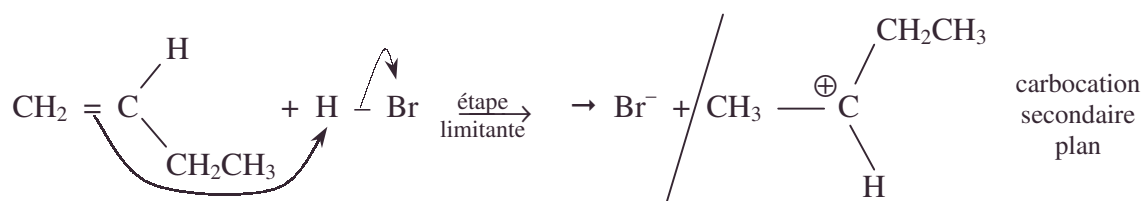


3. Addition électrophile

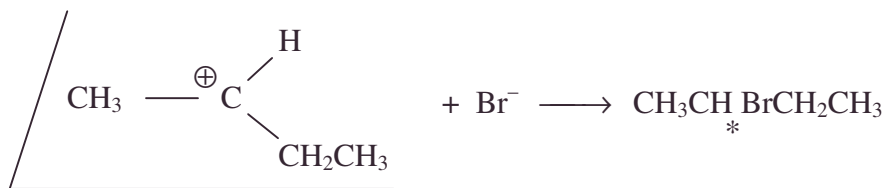


Transaddition, donc non concordance des substituents en vue de Newman. (On a une forme thréo). Selon la position d'attaque du premier chlore par rapport au plan de la double liaison on obtient 2 énantiomères (dont la séparation est possible).

4.a. Mécanisme hétérolytique en l'absence de peroxyde et de photons, adoptons l'hypothèse du mécanisme par carbocation secondaire stable dans le solvant (sinon possibilité d'adduit π concurrent) :



- addition électrophile, adduit, alcane, carbocation, carbocation secondaire, mécanisme hétérolytique, mécanisme homolytique, photon



C* sera R ou S selon la position de Br⁻ par rapport au plan du carbocation. Le mélange racémique obtenu est dédoublable.

b. Mécanisme homolytique en présence de peroxyde ou de photons :

initiation : $\text{R}-\text{O}-\text{O}-\text{R} \rightarrow 2 \text{RO}\cdot$; $\text{RO}\cdot + \text{HBr} \rightarrow \text{ROH} + \text{Br}\cdot$

propagation : $\text{Br}\cdot + \text{CH}_2 = \text{CHCH}_2\text{CH}_3 \rightarrow \text{CH}_2\text{BrCH}\cdot\text{CH}_2\text{CH}_3$ radical secondaire stable

$\text{CH}_2\text{Br}\cdot\text{CHCH}_2\text{CH}_3 + \text{H}-\text{Br} \rightarrow \text{Br}\cdot + \text{CH}_2\text{BrCH}_2\text{CH}_2\text{CH}_3$

Le composé final n'ayant pas de carbone asymétrique n'est pas dédoublable.

5.12.3. Survol 3

1. L'estérification de l'alcool tertiobutylique tBuOH (2-méthylpropan-2-ol) par HCl est répertoriée comme une réaction SN1, car elle s'effectue avec apparition intermédiaire du carbocation tBu⁺, le nucléophile Cl⁻ n'intervenant qu'ultérieurement :

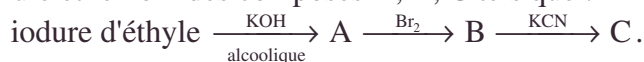


Pourtant cette réaction apparaît expérimentalement d'ordre 2, son équation de vitesse étant de la forme : $V = K (\text{tBuOH}) (\text{HCl})$.

Expliquer cette constatation à l'aide d'un raisonnement mécanistique.

2. Dans des conditions favorables, le 1,6-diaminohexane réagit sur l'acide hexane-dioïque pour donner de l'eau et un composé industriel que l'on nommera.

3. Donner la formule et le nom des composés A, B, C tels que :



Justifier votre affirmation en ce qui concerne A.

4. On peut préparer le 3,4-diméthylpentan-2-ol à partir de 3 composés carbonyles différents, l'un d'entre eux possédant déjà la condensation en carbone demandée. Imaginer les 3 réactions de formation.

Autres concours

Corrigé

A.1. ① $\text{tBuOH} + \text{H}^+ \xrightarrow{\text{lentement}} \text{tBu}^+ + \text{H}_2\text{O}$, puis : ② $\text{tBu}^+ + \text{Cl}^- \xrightarrow{\text{vite}} \text{tBuCl}$; l'étape lente impose sa vitesse ; $v = k (\text{tBuOH}) (\text{H}^+)$.

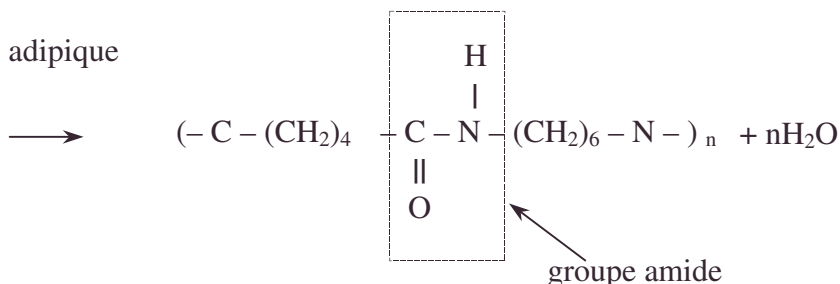
• 2-méthylpropan-2-ol, acide hexan-dioïque ou acide adipique, carbocation, carbone asymétrique, carbonyle, condensation en carbone, estérification, étape lente, nylon

Survol final

2.

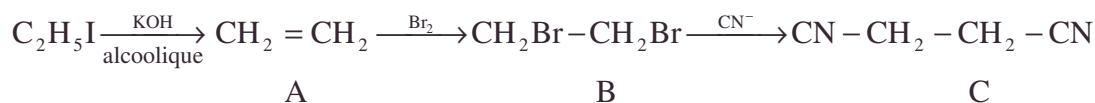


acide adipique



on obtient le nylon ou polyamide-6,6.

3.

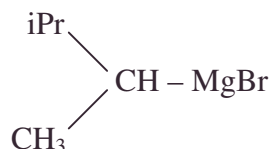


On obtient A par transélimination en milieu basique (en concurrence avec SN).

4.a. Hydrogénation du 3,4-diméthylpentan-2-one qui a la même condensation en C.

b. Addition de CH_3MgBr sur le 2,3-diméthylbutanal qui a la condensation diminuée d'un carbone.

c. Addition d'éthanal sur



qui a la condensation diminuée de deux carbones.

(iPr représente l'isopropyle $(\text{CH}_3)_2\text{CH}$)

5.12.4. Survol 4

1. Synthèse du butadiène (monomère d'une variété de caoutchouc pour pneumatiques)

Imaginer une synthèse du butadiène utilisant les surplus d'alcool éthylique (éthanol).

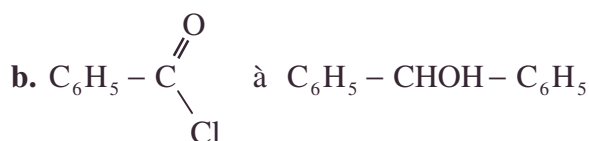
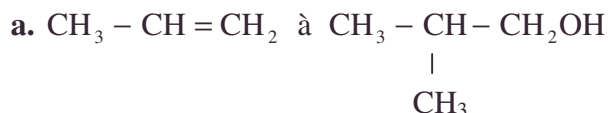
On utilisera l'étape intermédiaire suivante sans préciser le mécanisme :



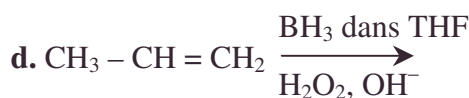
Dans cette synthèse on fabriquera tous les composés intermédiaires à l'exception des composés minéraux.

2. Autres synthèses

En utilisant des composés très courants, trouver l'enchaînement des réactions permettant de passer de :

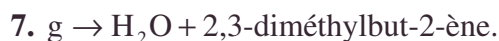
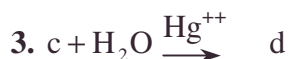
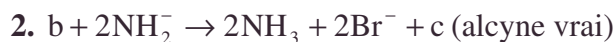


• acétylène, butadiène, caoutchouc, conformation, enchaînement, éthanol, isomérisation, polyamide, transélimination



3. Enchaînements et rétrosynthèses

Trouver les composés désignés par les lettres a, b, ...



4. Stéréoisomérisie des différents isomères géométriques de l'hepta-2,4-diène.

Donner les différentes configurations en représentation plane.

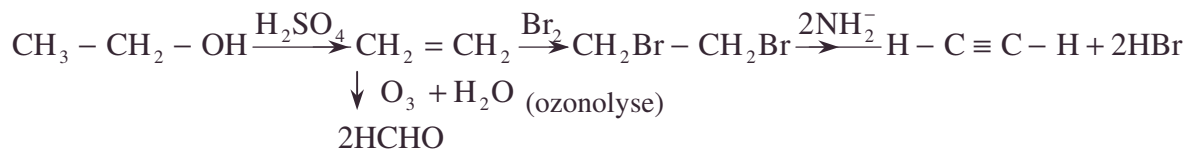
Préciser la configuration la plus stable.

Autres concours ; Durée : 1h

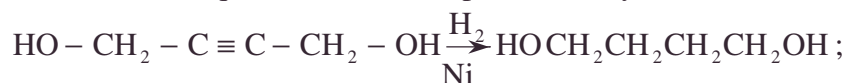
Corrigé

1. Synthèse du butadiène

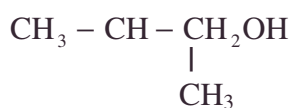
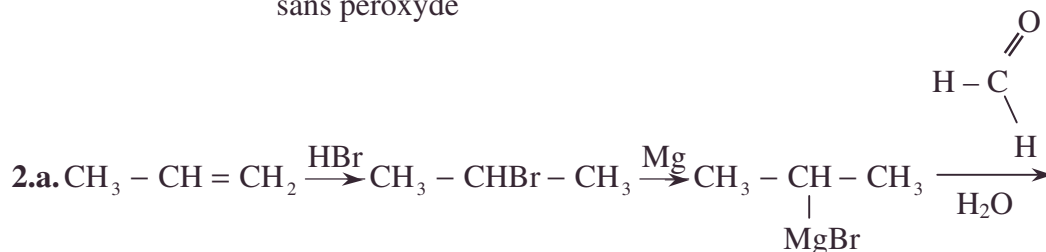
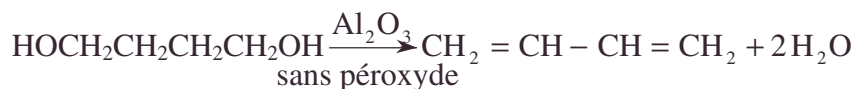
a. Il faut fabriquer l'acétylène et le formaldéhyde.



b. Il faut fabriquer le butadiène à partir du butyn-diol

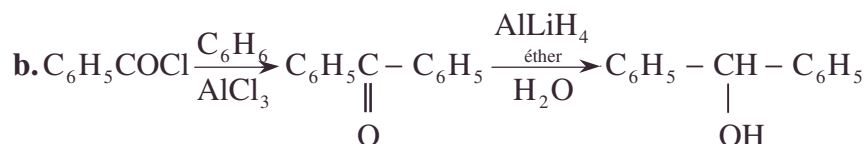


H₂ ne sera pas fabriqué à la manière de Clemmensen, Sabatier ou Raney (H⁺ + Zn) qui conduirait à l'alcane.



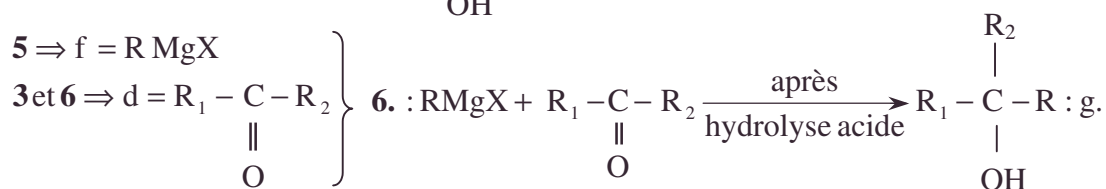
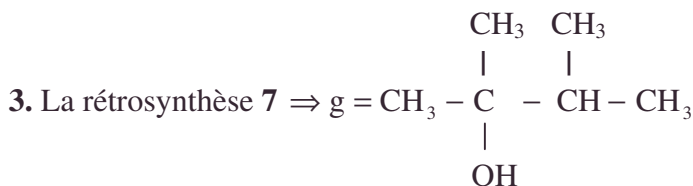
On peut éventuellement obtenir HCHO à partir du propène oxydé par O₃ (ozonolyse).

• acétylène, alcyne vrai, butadiène, butyn-diol, Clemmensen, ozonolyse, propène, THF ou tétrahydrofurane

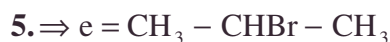
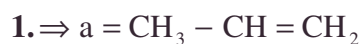
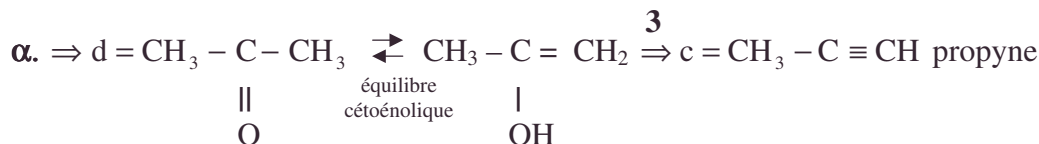


c. $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2 \xrightarrow[\text{Sn}]{\text{H}^+} \text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2 \xrightarrow[\text{HCl}]{\text{NaNO}_2} \text{C}_6\text{H}_5\text{N}_2\text{Cl} \xrightarrow[\text{HBr}]{\text{CuBr}} \text{C}_6\text{H}_5\text{Br} + \text{N}_2 + \text{Cl}^-$ (réaction de Sandmeyer).

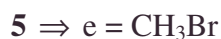
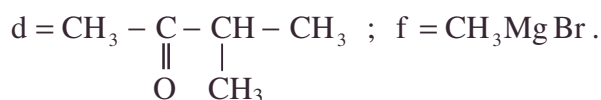
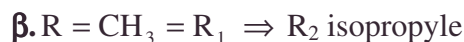
d. L'hydroboration suivie d'oxydation basique est équivalente à une hydratation radicalaire si elle existait ; on obtient donc $\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$, le propanol.



On envisage les diverses possibilités d'identification avec g.

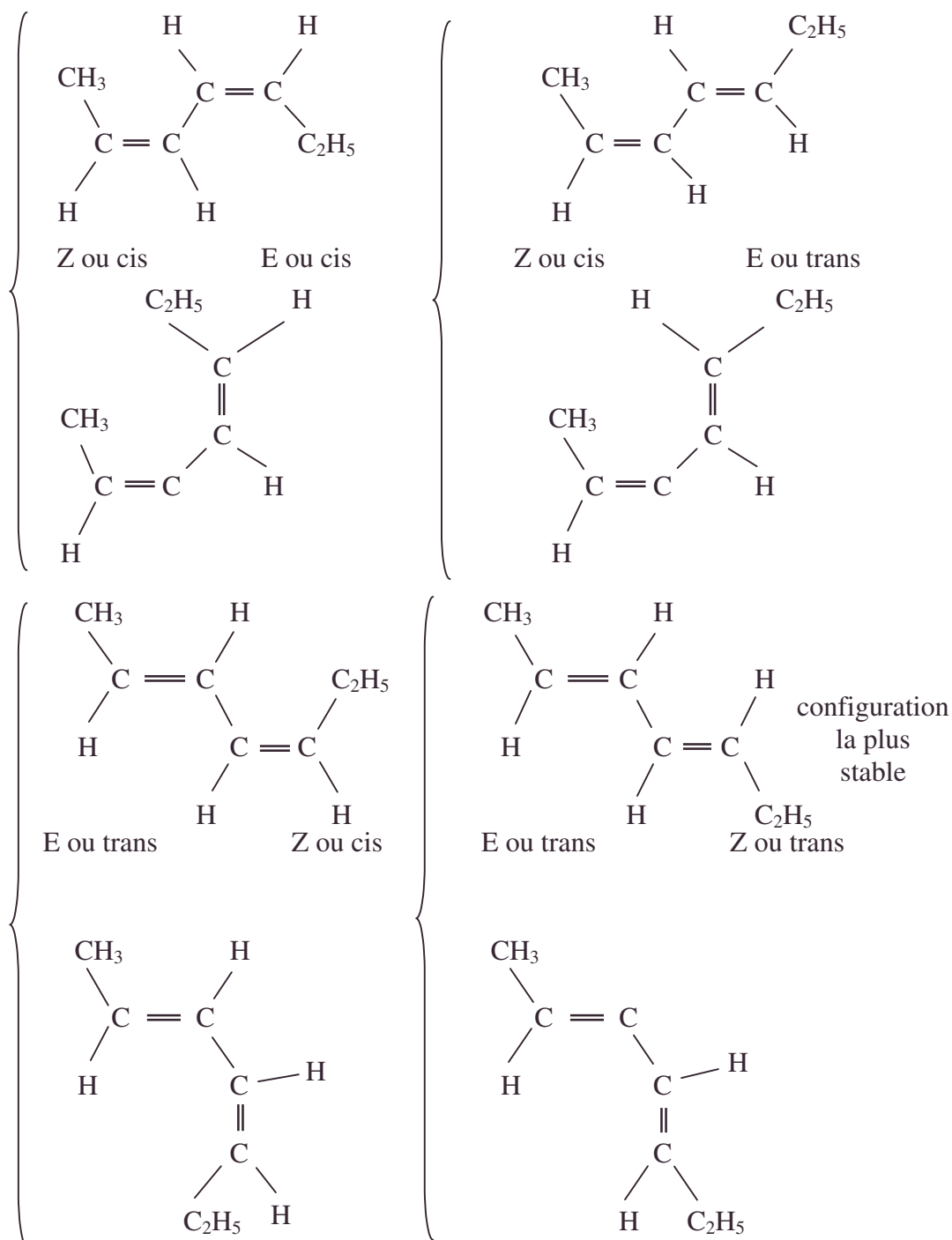


6. permet de retrouver **g**.



On élimine la solution β .

4. On a les différentes conformations :



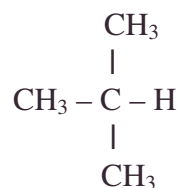
La configuration désignée comme la plus stable est celle de l'éloignement maximum des zones riches en électrons, à savoir les doubles liaisons et les radicaux alkyles.

5.12.5. Survol 5

1. Quel produit spécifique utilise-t-on pour préparer le méthane au laboratoire ?
- 2.a. Quels sont les produits de la réaction du dichlore sur le méthane ?
- b. Cette réaction en chaîne a une phase d'initiation qu'on écrira en précisant les conditions expérimentales.

• *cis, trans, E, Z*

3.a. Quel est le nom de l'espèce représentée par la formule développée ci-contre :



b. Quel(s) produit(s) fournit la réaction de ce composé avec le dibrome ? Justifier brièvement votre réponse.

4.a. Donner la formule développée du propène.

b. Préciser le motif de la chaîne carbonée du polypropène.

c. Donner une utilisation du polypropène obtenu par le procédé Ziegler-Natta et justifier votre réponse.

5. Nommer le produit de la réaction d'addition de HBr sur le propène en absence de peroxyde et dans l'obscurité.

6. Enoncer la règle de Markovnikov.

7. Nommer le produit de la réaction d'addition de HOCl sur l'éthylène.

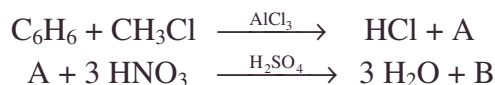
8. Nommer le produit de la réaction d'addition de HBr sur le but-1-ène en présence de peroxyde.

9. Nommer le produit de l'oxydation de l'éthylène par le permanganate de potassium dilué et froid.

10. Nommer le produit de l'addition d'eau sur l'acétylène ; quel est le catalyseur de cette réaction ?

11. L'acétylène donne un précipité rouge caractéristique avec un composé cuivreux. Quel est l'ion réactif ? Quels sont les produits formés ? Quelle précaution expérimentale doit-on prendre à leur égard ?

12. Trouver et nommer les composés A et B des réactions :



13. Quelle est la signification de : "une bombe nucléaire de 1 kt " ?

14. Donner le bilan et le mécanisme de la réaction du dichlore sur le benzène, en présence de chlorure d'aluminium.

15.a. Préciser la structure de la pyridine $\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$. Est-elle toxique ?

b. Quelles sont les propriétés de cette molécule dues à N ?

c. Donner la formule développée du produit de la réaction du chlorure d'hydrogène sur la pyridine.

d. Nommer ce produit.

16. Ecrire et nommer l'ester obtenu par action de l'acide acétique sur :

a. le butan-1-ol ;

b. le butan-2-ol ;

c. le 2-méthylpropan-2-ol.

d. Si le mélange initial acide, alcool est équimolaire, comparer les quantités des esters formés dans les trois cas précédents.

17. On peut obtenir le monochloroéthane par l'une ou l'autre des réactions suivantes, totales ou non selon le cas :

a. $\text{A} + \text{HCl} \rightarrow \text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$.

b. $\text{B} + \text{HCl} \rightarrow \text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl} + \text{H}_2\text{O}$.

c. $\text{C} + \text{SOCl}_2 \rightarrow \text{SO}_2 + \text{HCl} + \text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$.

Trouver A, B, C.

18.a. Comment obtenir $(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{N}$ à partir d'éthylamine et de chloroéthane ?

b. En présence de Ag₂O en milieu aqueux basique, on obtient un composé organique. Lequel ?

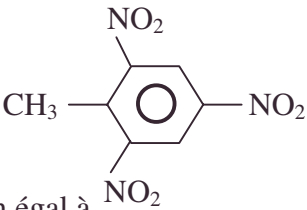
c. Nommer les produits obtenus par chauffage du composé précédent.

• acétylène, benzène, catalyse, chlorure d'aluminium, estérification, éthylène, méthane, oxydation de l'éthylène, permanganate de potassium, phase d'initiation, polypropène, pyridine, réaction en chaîne, règle de Markovnikov, substitutions du méthane, Ziegler-Natta

19. De quelles fonctions est caractéristique le test à la 2,4-DNPH (2,4-dinitrophénylhydrazine). Préciser le procédé de caractérisation.
20. Indiquer par un astérisque le carbone asymétrique éventuel de :
- l'acide mandélique $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHOHCOOH}$
 - l'acide pyruvique CH_3COCOOH
 - l'acide lactique $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$
- d. Quelle est la propriété caractéristique liée à la présence d'un carbone asymétrique ?
- 21.a. Exprimer en fonction des concentrations convenables les deux constantes d'acidité de la glycine $\text{NH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CO}_2\text{H}$ (K_{a1} , K_{a2}).
- Qu'appelle-t-on point isoélectrique ?
 - Exprimer le pH au point isoélectrique à 25°C en fonction de pK_{a1} et pK_{a2} .
- Application numérique : $pK_{a1} = 2,4$; $pK_{a2} = 9,8$.
- Donner rapidement le pH d'une solution aqueuse à $c = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$:
 - $\text{CINH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H}$,
 - $\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CO}_2\text{Na}$,
 - glycine,
 à 25°C .

Capes ; durée : 1h

Corrigé

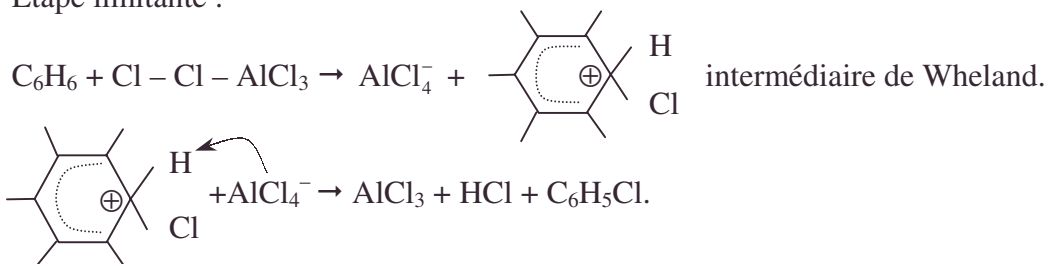
1. Le carbure d'aluminium Al_4C_3 fournit CH_4 par hydrolyse acide :
- $$\text{Al}_4\text{C}_{3(s)} + 12 \text{H}^+ \rightarrow 3 \text{CH}_{4(g)} + 4 \text{Al}_{(aq)}^{3+}.$$
- 2.a. Les produits sont : CH_3Cl ; CH_2Cl_2 ; CHCl_3 ; CCl_4 obtenus par substitution radicalaire successive ; HCl est également produit.
- $\text{Cl}_2 \rightarrow 2 \text{Cl} \cdot$; l'initiation nécessite habituellement photons ou apport thermique.
- 3.a. 2-méthylpropane.
- $\text{CH}_3\text{C}(\text{CH}_3)_2\text{Br}$ nommé 2-bromo-2-méthylpropane. Ce produit unique passe par l'intermédiaire du radical tertiaire t-butyle, stable par comparaison à des radicaux secondaires.
- 4.a. $\text{CH}_3\text{CH} = \text{CH}_2$.
- $-\text{CH}_2\text{CH}(\text{CH}_3)-$
 - Les catalyseurs de Ziegler-Natta permettent la fabrication du polymère isotactique, ce qui autorise le moulage du polypropène.
5. $\text{CH}_3\text{CHBrCH}_3$ nommé 2-bromopropane.
6. Habituellement, le réactif électrophile se fixe sur le carbone le plus riche en hydrogène, le réactif nucléophile se fixant sur le deuxième carbone de la double liaison.
7. $\text{CH}_2\text{ClCH}_2\text{OH}$ appelé 2-chloroéthan-1-ol.
8. $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{Br}$ nommé 1-bromobutane.
9. $\text{HOCH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ nommé éthan-1,2-diol (ou glycol).
10. CH_3CHO nommé éthanal, produit en milieu sulfurique en présence d'ions Hg^{2+} mercuriques à 60°C .
11. L'ion réactif est $\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+$, le diamminecuivre (I) ; le produit est $\text{CuC} \equiv \text{CCu}$, qui est instable à sec. Il faut éviter l'explosion.
12. A est $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$, le toluène ; B est le 2,4,6-trinitrotoluène (T.N.T.).
13. Il s'agit d'une bombe ayant un pouvoir de destruction égal à celui de 1 kt de T.N.T., explosif de référence.
- 
- 1-bromobutane, 2-bromo-2-méthylpropane, 2-bromopropane, 2-chloroéthan-1-ol, 2-méthylpropane, acide lactique, acide mandélique, acide pyruvique, alkylation, carbone asymétrique, carbure d'aluminium, catalyseurs de Ziegler-Natta, diamminecuivre (I), dinitrophénylhydrazine, DNPH, glycine, glycol, ions mercuriques, isotactique, point isoélectrique

Survot final

14. Bilan : $\text{Cl}_2 + \text{C}_6\text{H}_6 \rightleftharpoons \text{HCl} + \text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$.

Mécanisme : $\text{Cl}_2 + \text{AlCl}_3 \rightarrow \text{Cl} - \text{Cl} - \text{AlCl}_3$, complexe polarisé.

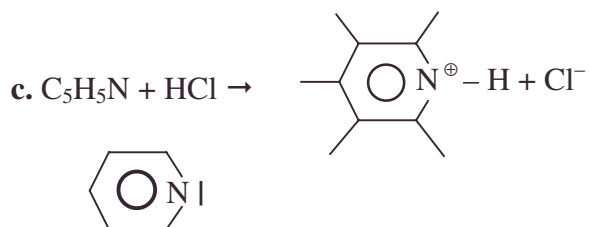
Etape limitante :



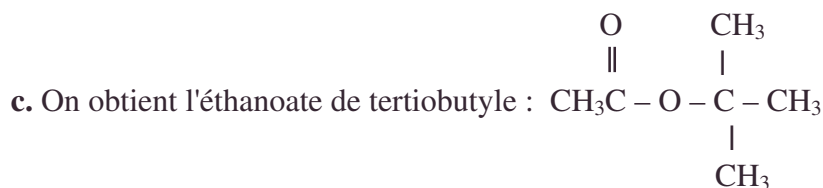
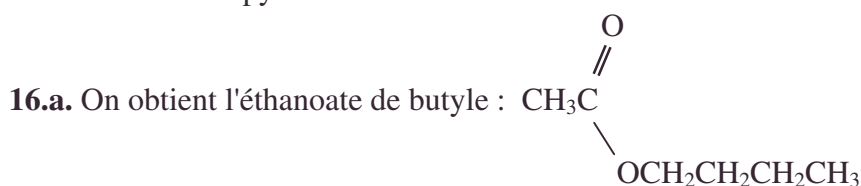
15.a.



b. Ce sont des propriétés basiques et nucléophiles.
C'est un solvant commun en chimie organique.



d. Chlorure de pyridinium.



d. La réaction a produit davantage d'ester que la réaction b, qui en produit davantage que la réaction c.

17. A est l'éthylène ; B est l'éthanol, tout comme C.

18.a. On peut envisager la double éthylation de l'éthylamine par le chloroéthane.

b. Les substitutions successives d'alkylation en présence de Ag_2O permettent l'obtention de l'hydroxyde de tétraéthylammonium $\text{N}(\text{CH}_2\text{CH}_3)_4^+$.

c. La décomposition de l'ammonium quaternaire donne éthylène et triéthylamine $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{N}$.

19. Il s'agit du test caractérisant aldéhydes et cétones. Le précipité rouge ou jaune de 2,4-dinitrophenylhydrazone possède une température de fusion caractéristique de chaque composé, mesurable au banc Kofler.

20.a. $\text{C}_6\text{H}_5\text{C}^*\text{HOHCOOH}$.

b. $\text{CH}_3\text{COCO}_2\text{H}$, sans aucun carbone asymétrique.

c. $\text{CH}_3\text{C}^*\text{HOHCOOH}$.

d. Une molécule possédant un carbone asymétrique unique possède deux stéréoisomères optiques, qui ont des pouvoirs rotatoires opposés.

$$\mathbf{21.a.} \quad K_{a1} = \frac{(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H})(\text{H}^+)}{(^+\text{NH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H})}; K_{a2} = \frac{(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CO}_2^-)(\text{H}^+)}{(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H})}.$$

b. On exprime l'électroneutralité $(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CO}_2^-) = (^+\text{NH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H})$, qui exprime bien l'idée de quantité égale des deux formes électrisées possibles. De fait, le zwitterion ou aphion $^+\text{NH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2^-$ est prépondérant car il y a un échange de proton intra moléculaire statistiquement majoritaire par rapport à l'échange intermoléculaire.

c. En formant le produit $K_{a1}K_{a2}$, on obtient : $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_{a1} + \text{p}K_{a2})$; A.N.: $\text{pH} = 6,1$.

d.α. On a une solution de $^+\text{NH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H}$ acide faible \Rightarrow

$$\text{pH}_1 = \frac{1}{2}(\text{p}K_{a1} + \text{pc}); \text{A.N.: } \text{pH} = 1,7.$$

β. On a une solution de $\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CO}_2^-$ base faible \Rightarrow

$$\text{pH}_2 = \frac{1}{2}(\text{p}K_i + \text{p}K_{a2} - \text{pc}); \text{A.N.: } \text{pH} = 11,4.$$

γ. On a une solution ampholyte, vu les 2 acidités :

$$\text{pH}_3 = \frac{1}{2}(\text{p}K_{a1} + \text{p}K_{a2}); \text{A.N.: } \text{pH} = 6,1.$$

5.12.6. Survol 6

Ecrire toutes les équations des réactions écrites ci-dessous en précisant chaque fois la formule développée et le nom des produits A, B, C... rencontrés et répondre aux questions posées.

1. Synthèse du 2,4,5-triméthylhexan-3-ol

a. On fait réagir le 3-méthylbutanal sur le méthanal en milieu basique dilué, ce qui donne le composé A. Par simple chauffage, A donne lieu à une déshydratation (conduisant à une double liaison carbone-carbone). Le produit B alors obtenu est hydrogéné sans modifier la fonction aldéhyde ce qui donne C. Donner les conditions expérimentales permettant cette hydrogénation. Si l'on avait voulu hydrogéner aussi la double liaison carbone-oxygène, qu'aurait-il fallu changer dans les conditions expérimentales ?

b. Une solution d'acide chlorhydrique réagit à froid sur le propène. Décrire le mécanisme de la réaction, justifier l'orientation de l'addition et donner le nom du composé D obtenu. On prépare ensuite D', l'organomagnésien de D. Préciser les conditions expérimentales.

c. On verse lentement dans la solution magnésienne précédemment obtenue, l'aldéhyde C préparé dans **a**.

Après hydrolyse on obtient l'alcool cherché : le 2,4,5-triméthylhexan-3-ol.

Donner le mécanisme de la réaction de l'organomagnésien sur l'aldéhyde. Représenter en projection de Newman les stéréoisomères du 2,4,5-triméthylhexan-3-ol et préciser la

Survól final

configuration absolue du (ou des) carbone(s) asymétrique(s) en justifiant les affirmations.

2. Pour préparer le 2-chloropropane, on aurait pu envisager une monochloration du propane au lieu d'une addition d'acide chlorhydrique sur le propène. Décrire la réaction alors mise en jeu : réactifs, mécanisme, produit(s). Sachant que, pour un alcane, les vitesses d'attaque des atomes de chlore sur les atomes d'hydrogène fixés sur des carbones primaires, à 300° C, respectivement aux nombres 1,0 ; 3,3 ; 4,4 donner les pourcentages des différents produits monochlorés obtenus dans la chloration du propane à 300°.

Conclusion quant au choix de la meilleure méthode de préparation du 2-chloropropane dans la synthèse précédente ?

3. L'oxydation du 3-méthylbutanal conduit à l'acide isovalérique d'odeur désagréable et de température d'ébullition 176° C. Cet acide est à la base de différentes synthèses organiques. Ecrire la réaction d'oxydation en utilisant comme oxydant le dichromate de potassium en milieu acide, $K_2Cr_2O_7$. Calculer la masse m de dichromate de potassium nécessaire pour oxyder 12 g de 3-méthylbutanal. Sachant que le rendement de l'oxydation est de 85 %, quelle masse d'acide isovalérique recueillera-t-on ?

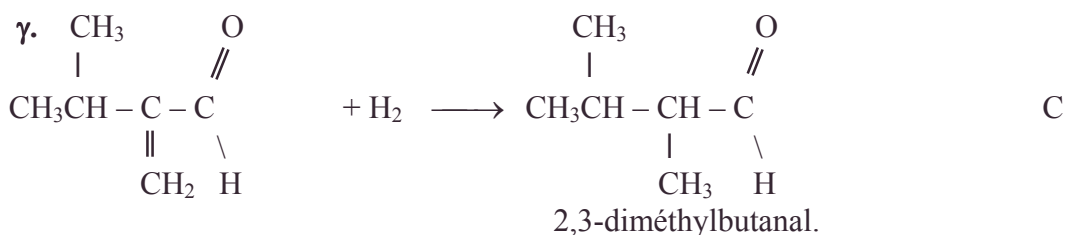
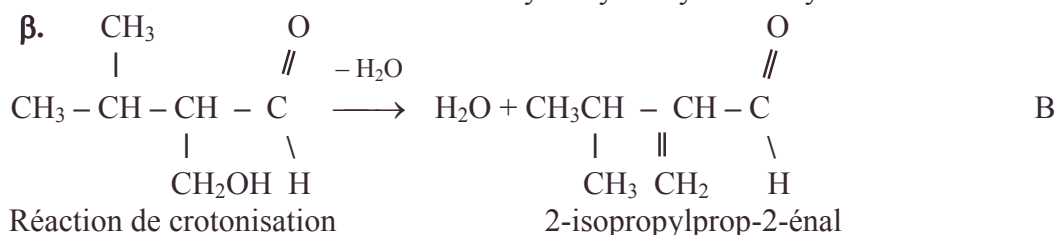
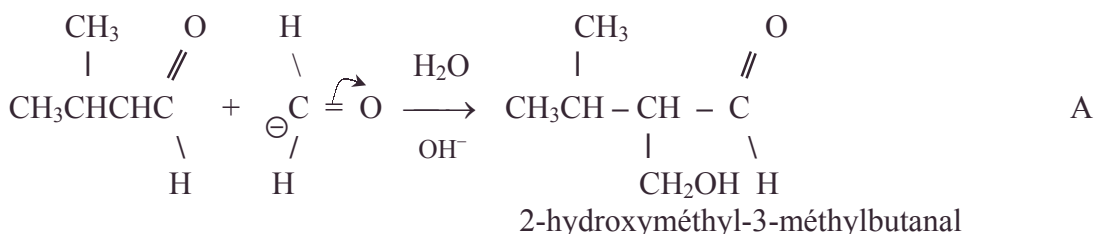
Masses atomiques en $g \cdot mol^{-1}$: H = 1 ; C = 12 ; O = 16 ; K = 39 ; Cr = 52.

L'ion réducteur conjugué de $Cr_2O_7^{2-}$ est Cr^{3+} en milieu acide.

CCP : Durée : 2h

Corrigé

1.a.α. Le méthanal $O = CH_2$ subit l'attaque de l'ion $CH_3CH - CH - C$ $\begin{matrix} CH_3 & & O \\ | & & // \\ CH_3CH - CH - C \\ & \ominus & \backslash \\ & & H \end{matrix}$
énolate nucléophile issu du 3-méthylbutanal



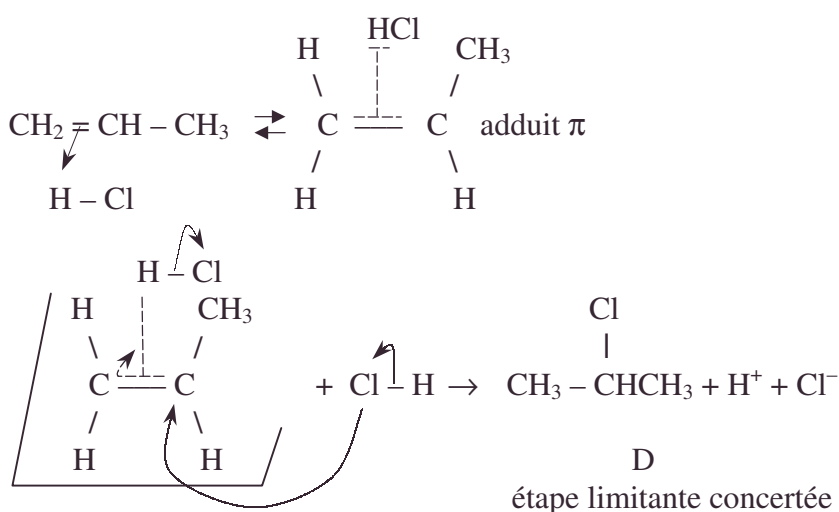
δ. Conditions expérimentales de l'hydrogénation. Il faut savoir que l'hydrogénation de $C=O$ est moins favorisée thermodynamiquement et moins rapide cinétiquement que l'hydrogénation de $C=C$.

- On peut utiliser l'hydrogénation catalytique avec un catalyseur type nickel de Raney.

- Avec plus de savoir-faire, on peut protéger la fonction $C=O$ par acétalisation par un alcool simple puis hydrogéner catalytiquement ; l'hydrolyse transformera l'acétal en fonction carbonyle laissée intacte.

ε. Pour tout hydrogéner, il suffit d'opérer l'hydrogénation catalytique sans précaution, sous plus forte pression ou hydrogéner la fonction aldéhyde au moyen de $AlLiH_4$ dans l'éther. La méthode de Clemmensen (H^+ sur Zn) permet d'obtenir le 2,3-diméthylbutane.

b.α. • théorie de l'adduit π traduisant la loi de vitesse $v = k (\text{propène}) (\text{HCl})^2$:

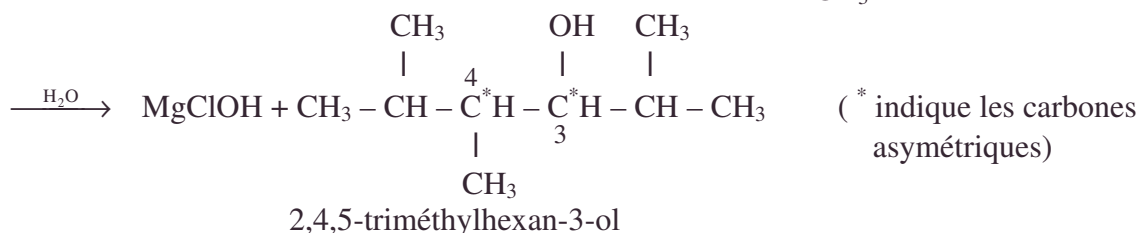
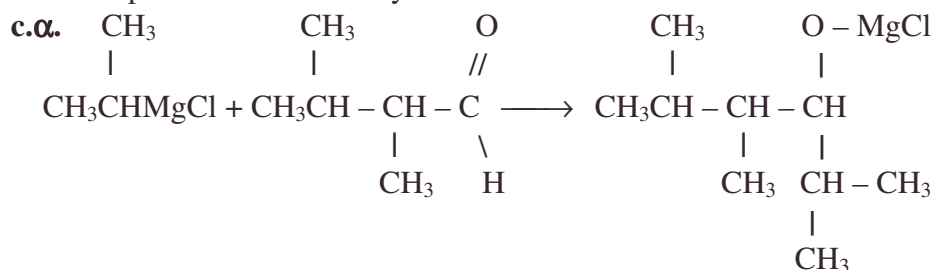


β. On a une addition électrophile obéissant à la règle de Markovnikov.

γ. D est le 2-chloropropane.

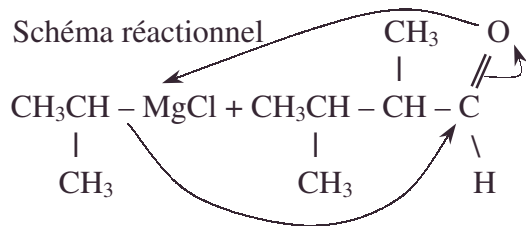
δ. D' est le chlorure d'isopropylmagnésium. (iPr représente l'isopropyle $(CH_3)_2CH$)
 $CH_3CHClCH_3 + Mg \rightarrow (CH_3)_2CCH_3HMgCl$ D'

ε. On opère dans l'éther anhydre dans un tricol.

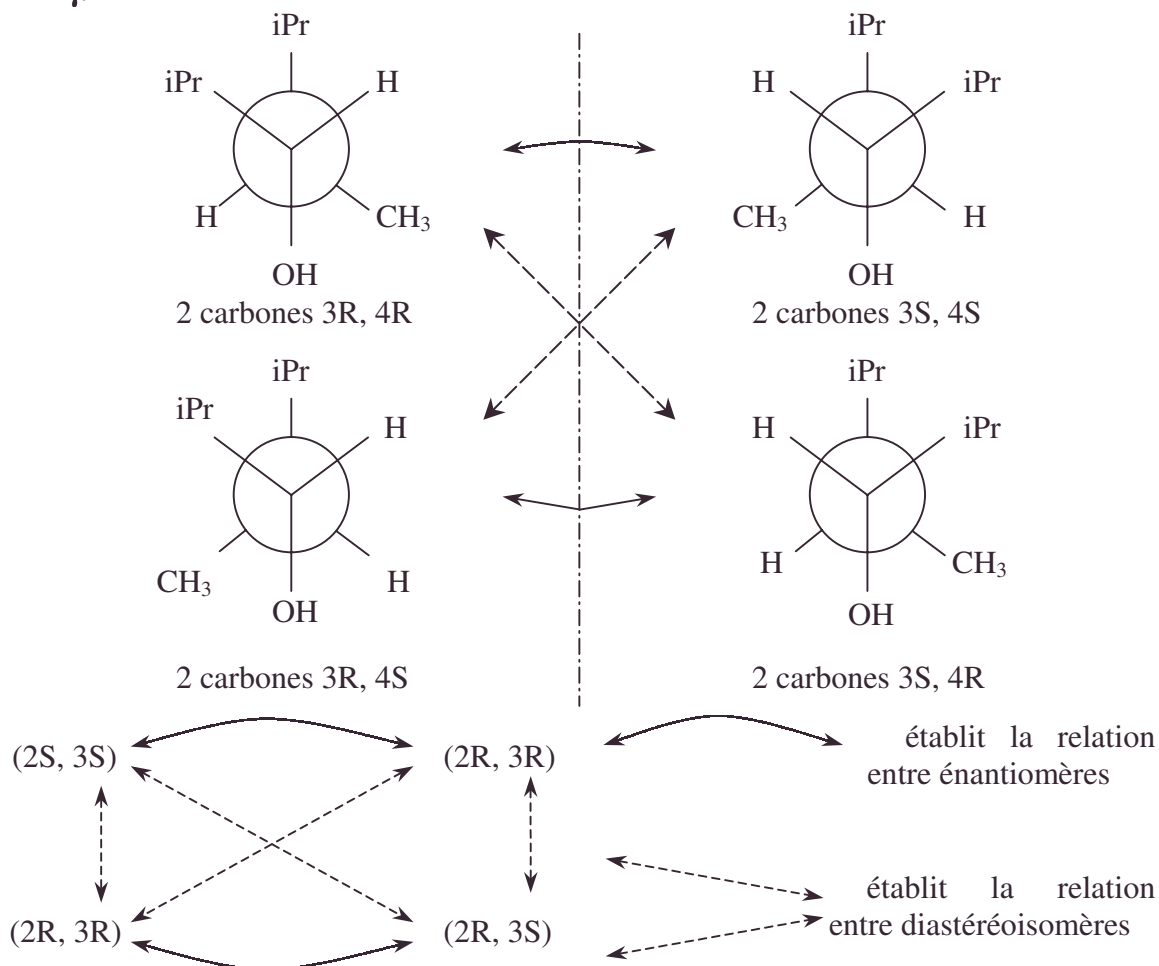


• 2-chloropropane, acétal, acétalisation, addition électrophile, adduit, chlorure d'isopropylmagnésium, éther anhydre, hydrogénation catalytique, hydrure d'aluminium et de lithium, ordre 3, protection d'une fonction, règle de Markovnikov, schéma réactionnel, tricol

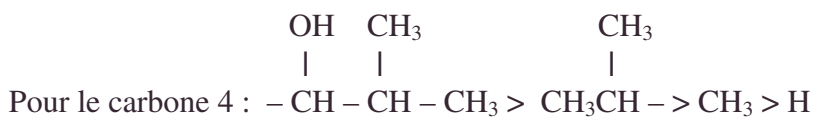
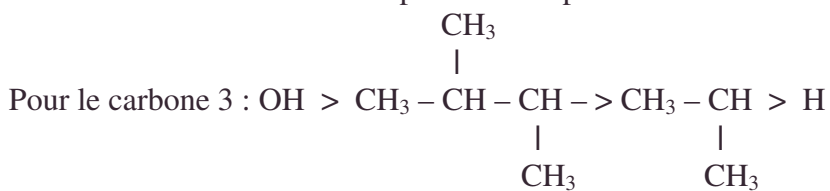
β. Schéma réactionnel



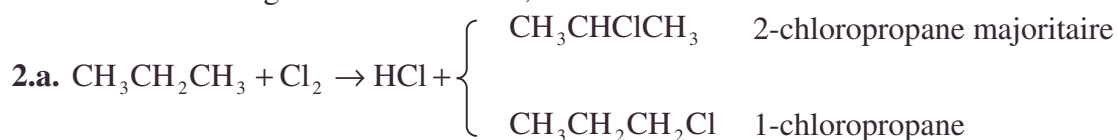
γ.



δ. On classe les substituents par ordre de priorité :



En regardant C cachant le plus petit (ici, H), (a > b > c > d), si on passe de a à b à c selon le sens des aiguilles d'une montre, le carbone est R.



b. Mécanisme radicalaire :

- Initiation photonique : $\text{Cl}_2 \xrightarrow{h\nu} 2\text{Cl}^\bullet$.
- Propagation (par Cl^\bullet) : $\text{Cl}^\bullet + \text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_3 \rightarrow \text{HCl} + \text{CH}_3\text{C}^\bullet\text{HCH}_3$ le plus stable
 $\text{CH}_3\text{C}^\bullet\text{HCH}_3 + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{Cl}^\bullet + \text{CH}_3\text{CHClCH}_3$
- Rupture : $2\text{Cl}^\bullet \rightarrow \text{Cl}_2 \dots$

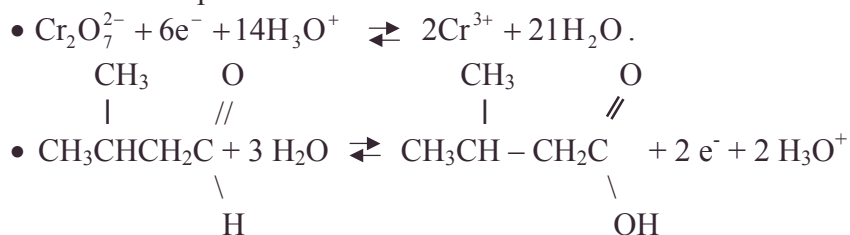
c. Nous distinguerons les 2 hydrogènes fixés sur carbone secondaire, des 6 hydrogènes fixés sur carbone primaire.

D'après la théorie statistique des chocs efficaces :

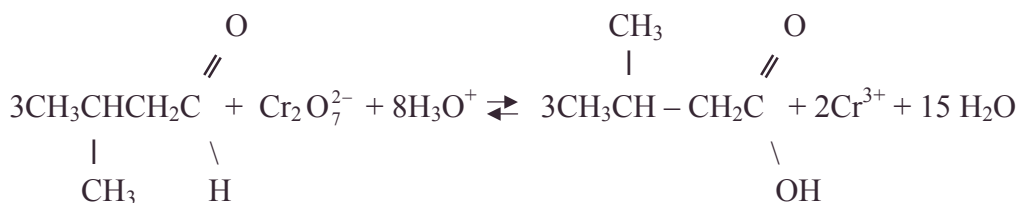
$$\frac{(2\text{-chloropropane})}{(1\text{-chloropropane})} = \frac{2 \int_0^t v_2 dt}{6 \int_0^t v_1 dt} = \frac{2 \cdot 3,3}{6 \cdot 1,0} = 1,1.$$

On en déduit : 47,6 % de 1-chloropropane et 52,4 % de 2-chloropropane :
 vérification : $1,1 = 52,4 / 47,6$.

d. On voit que la substitution radicalaire ne privilégie guère la fabrication du 2-chloropropane. On préférera l'addition de HCl sur le propène, qui obéit à la règle de Markovnikov (taux supérieur à 90 %).

3.a. On a les deux couples :

d'où la réaction :



acide isovalérique

$$\text{b. masse d'acide recueillie : } m_{\text{ac}} = \overbrace{102}^{M_{\text{acide}}} \cdot n_{\text{acide}}, \text{ avec } n_{\text{acide}} = \eta \frac{m_{\text{aldéhyde}}}{M_{\text{aldéhyde}}},$$

$$\text{vu le rendement } \eta = 85 \% ; m_{\text{ac}} = \eta \cdot m_{\text{aldéhyde}} \frac{M_{\text{acide}}}{M_{\text{aldéhyde}}} ;$$

$$\text{AN : } M_{\text{aldéhyde}} = 86 \text{ g.mol}^{-1} ; \eta = 0,85 ; m_{\text{ac}} = 0,85 \cdot 12 \cdot \frac{102}{86} = 12,1 \text{ g.}$$

c. Masse de dichromate de potassium nécessaire :

$$m(\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7) = \frac{n_{\text{ald}}}{3} \cdot M_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7} ; \text{A.N. : } n_{\text{ald}} = \frac{12}{86} ; m(\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7) = 13,7 \text{ g.}$$

5.11.6. Extraction par solvant Dosage acidobasique en milieu diphasé

Les questions 11, 12, 13 peuvent être traitées indépendamment des précédentes.

Dans tout ce qui suit, on suppose que les équilibres sont réalisés à la température ambiante, considérée comme constante. Les volumes des solutions sont considérés comme invariables lors des opérations de dissolution ou d'extraction.

L'oxime Ox considéré est la base électriquement neutre correspondant à un acide faible Ox^+ , et l'équilibre acide-base en solution aqueuse peut s'écrire : $\text{Ox}^+ \rightleftharpoons \text{Ox} + \text{H}^+$.

$\text{pK}_1 = 5,0$.

La formule générale d'un oxime est
$$\begin{array}{c} \text{R}_1 \\ \diagdown \\ \text{C} = \text{N} - \text{OH} \\ \diagup \\ \text{R}_2 \end{array}$$

A un litre d'une solution contenant $c = 0,1$ mol par litre d'acide chlorhydrique, on ajoute 10^{-1} mole d'oxime ; on obtient la solution A.

1. Calculer le pH de cette solution.

2. L'oxime sous forme moléculaire Ox est soluble dans le chloroforme CHCl_3 solvant non miscible à l'eau, alors que son acide conjugué ne l'est pas, le chloroforme ne dissolvant aucun ion. Entre la solution aqueuse A précédente, mise au contact d'un litre de chloroforme, et la phase chloroformique s'établit un équilibre de concentration :

$$\frac{[\text{Ox}]_{\text{CHCl}_3}}{[\text{Ox}]_{\text{H}_2\text{O}}} = 720$$

L'ensemble de ces deux phases au contact constitue le mélange B.

Calculer le pH de la phase aqueuse.

3. Calculer le pH de la phase aqueuse lorsqu'on lui a ajouté $5 \cdot 10^{-2}$ mole de soude.

4. En réalité l'oxime peut aussi se comporter comme un acide en milieu aqueux et la réaction acide-base correspondante peut être représentée par :



De même, seule l'espèce Ox est extractible par le chloroforme. Calculer le pH de la phase aqueuse du mélange B de la 2^{ème} question si on ajoute 10^{-1} mole de soude à la phase aqueuse.

5. Calculer le pH de la phase aqueuse du mélange B de la 2^{ème} question lorsqu'on lui ajoute $1,5 \cdot 10^{-1}$ mole de soude.

6. Même question que précédemment si on ajoute $2 \cdot 10^{-1}$ mole de soude au lieu de $1,5 \cdot 10^{-1}$.

7. Tracer et comparer rapidement les courbes de dosage d'un litre de la solution A en présence et en absence d'un litre de chloroforme.

8. Y a-t-il intérêt à opérer en présence de chloroforme pour doser l'oximate de sodium OxNa par l'acide chlorhydrique ?

9. Si on appelle R le rendement de l'extraction de l'oxime par le chloroforme ;

$$R = \frac{\text{quantité totale extraite}}{\text{quantité totale mise en jeu}}$$
, montrer que si le pH est compris entre 6 et 8,7 la quasi

totalité de l'oxime est extraite dans le chloroforme.

10. L'ensemble de ces calculs permet-il de prévoir une ou plusieurs façons d'extraire l'oxime d'une solution chloroformique ?

11. L'oxime est dissoute à la concentration c_0 dans un volume V d'un solvant S . Si on ajoute un volume V' d'un solvant S' non miscible à S , il se produit une répartition de l'oxime : sa concentration devient c_1 dans S et c'_1 dans S' , conformément à la loi d'équilibre $\frac{c'_1}{c_1} = K$, où K est une constante. On sépare la phase S' , et on recommence de

la même façon cette opération d'extraction. Calculer la concentration c_n dans S obtenue après n opérations, en fonction de c_0 , V , V' et K .

12. Montrer que le volume de solvant manipulé pour réaliser ces n opérations est inférieur à celui qui serait nécessaire pour obtenir le même rendement d'extraction en une seule opération d'extraction.

13. Quelle conclusion peut-on tirer de ce calcul à propos de la mise en œuvre pratique de la technique d'extraction ?

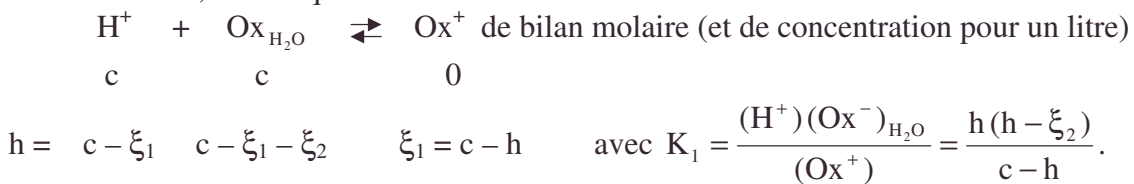
Ecole Polytechnique ; Durée : 2h30

Corrigé

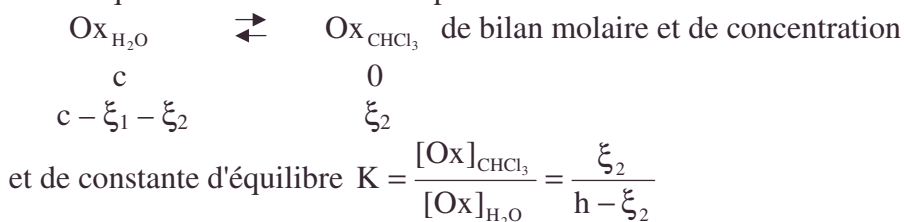
1. RP
$$\begin{array}{ccc} \text{H}^+ & + & \text{Ox} \\ c & & c \\ h & & h \end{array} \rightleftharpoons \begin{array}{c} \text{Ox}^+ \\ 0 \\ c \end{array}$$
 de bilan avec $c = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

$$K_1 = \frac{(\text{H}^+)(\text{Ox})}{(\text{Ox}^+)} = \frac{h^2}{c} \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{pc}) \quad \text{A.N. : } \text{pH} = 3,00.$$

2.a. Dans l'eau, on a l'équilibre



b. L'équilibre de Ox dans les 2 phases s'écrit :

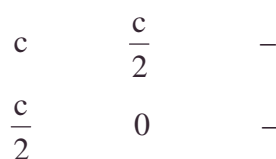


$$\Rightarrow \xi_2 = h \frac{K}{1 + K} \Rightarrow h - \xi_2 = \frac{h}{1 + K} \Rightarrow K_1 = \frac{h^2}{(c - h)(1 + K)} \Rightarrow h^2 + hK_1(1 + K) - K_1c = 0.$$

$$h = \frac{-K_1(1 + K) + \sqrt{K_1^2(1 + K)^2 + 4K_1c}}{2} ; \text{A.N. : } h = 2,32 \cdot 10^{-2} ; \text{pH} = 1,63.$$

3. Considérons :

α. la réaction totale : $\text{H}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$ de bilan



Survol final

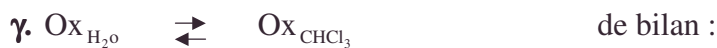
puis les équilibres précédents :



$$\begin{array}{ccc} \frac{c}{2} & c & 0 \end{array}$$

$$h = \frac{c}{2} - \xi_1' \quad c - \xi_1' - \xi_2' \quad \xi_1' = \frac{c}{2} - h$$

$$\text{avec } K_1 = \frac{(\text{H}^+)[\text{Ox}]_{\text{H}_2\text{O}}}{[\text{Ox}^+]} = \frac{h \left(c - \left(\frac{c}{2} - h \right) - \xi_2' \right)}{\frac{c}{2} - h} = \frac{h \left(\frac{c}{2} + h - \xi_2' \right)}{\frac{c}{2} - h}$$



$$\begin{array}{ccc} c & 0 \end{array}$$

$$c - \xi_1' - \xi_2' \quad \xi_2'$$

$$K = \frac{[\text{Ox}]_{\text{CHCl}_3}}{[\text{Ox}]_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\xi_2'}{c - \left(\frac{c}{2} - h \right) - \xi_2'} = \frac{\xi_2'}{\frac{c}{2} + h - \xi_2'}$$

$$\Rightarrow \xi_2' = \left(h + \frac{c}{2} \right) \frac{K}{1+K} \Rightarrow \frac{c}{2} + h - \xi_2' = \frac{\frac{c}{2} + h}{1+K}$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{h \left(h + \frac{c}{2} \right)}{(1+K) \left(\frac{c}{2} - h \right)} \Rightarrow h^2 + h \left(K_1(1+K) + \frac{c}{2} \right) + K_1(1+K) \frac{c}{2} = 0; \text{ A.N. : pH} = 2,24.$$

4. Considérons :



$$\begin{array}{ccc} c & c & - \\ 0 & 0 & - \end{array}$$

β. vu la nouvelle donnée, Ox est un ampholyte :



$$\begin{array}{ccc} c & 0 & 0 \\ c - 2\xi_1'' - \xi_1'' & \xi_1'' & \xi_1'' \end{array}$$

γ. l'équilibre de Ox dans les 2 phases s'écrit :



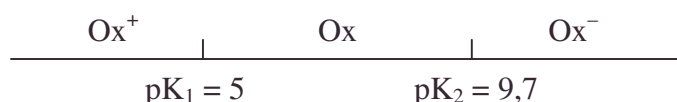
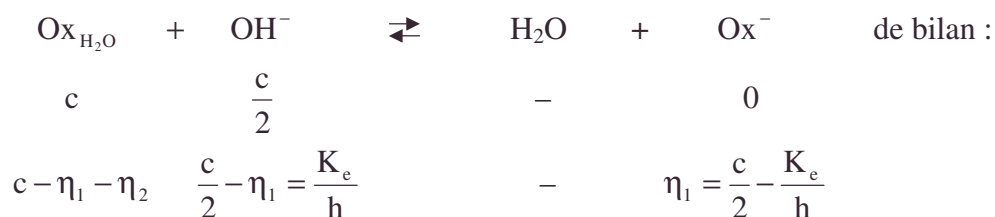
$$\begin{array}{ccc} c & 0 \\ c - 2\xi_1'' - \xi_2'' & \xi_2'' \end{array}$$

δ. Formons $K_1 K_2 = \frac{(\text{H}^+)(\text{Ox})_{\text{H}_2\text{O}}}{(\text{Ox}^+)} \frac{(\text{H}^+)(\text{Ox}^-)}{(\text{Ox})_{\text{H}_2\text{O}}} = (\text{H}^+)^2.$

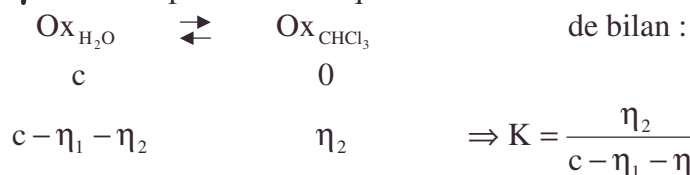
$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}K_2) \quad \text{A.N. : pH} = 7,35.$$

5. Considérons :**α.** la réaction totale : $\text{H}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$ de bilan :

$$\begin{array}{ccc} c & \frac{3}{2}c & - \\ 0 & \frac{c}{2} & - \end{array}$$

β. vu la donnée de K_2 , le diagramme de prédominance est :En présence de la base forte OH^- , l'ampholyte $\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}}$ réagit comme un acide :

cf. équilibre ionique de l'eau

γ. Il ne faut pas oublier l'équilibre de Ox entre les deux phases

$$\Rightarrow \eta_2 = (c - \eta_1) \frac{K}{1 + K} \Rightarrow c - \eta_1 - \eta_2 = \frac{(c - \eta_1)}{1 + K}.$$

On notera l'analogie avec la question 3. en échangeant le rôle de H^+ et OH^- .**δ.** La constante de 5.β. s'écrit : $K' = \frac{(\text{Ox}^-)}{(\text{OH}^-)(\text{Ox})_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{(\text{Ox}^-)(\text{H}^+)}{(\text{Ox})_{\text{H}_2\text{O}} K_e} = \frac{K_2}{K_e}$

$$\text{soit } \frac{\eta_1(1 + K)}{\left(\frac{c}{2} - \eta_1\right)(c - \eta_1)} = \frac{K_2}{K_e} \text{ ou encore } \frac{\left(\frac{c}{2} - \frac{K_e}{h}\right)(1 + K)}{\frac{K_e}{h}\left(\frac{c}{2} + \frac{K_e}{h}\right)} = \frac{K_2}{K_e}.$$

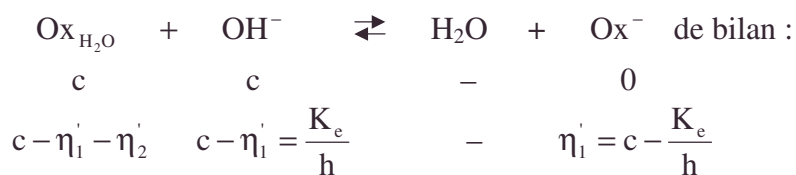
$$\text{On résout en } (\text{OH}^-) = \frac{K_e}{h}; (\text{OH}^-)^2 + (\text{OH}^-) \left(\frac{c}{e} + \frac{K_e}{K_2}(1 + K) \right) - \frac{K_e}{K_2}(1 + K) \frac{c}{2} = 0$$

$$\text{A.N. : } (\text{OH}^-) = 1,75 \cdot 10^{-2}; (\text{H}^+) = 5,7 \cdot 10^{-13}; \text{pH} = 12,24.$$

6. Considérons :**α.** La relation totale $\text{H}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$ de bilan :

$$\begin{array}{ccc} c & 2c & - \\ 0 & c & - \end{array}$$

β. de même que précédemment :



cf. équilibre ionique de l'eau.

γ. $\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}} \rightleftharpoons \text{Ox}_{\text{CHCl}_3}$ de bilan :

$$c - \eta_1' - \eta_2' \quad \eta_2' \Rightarrow K = \frac{\eta_2'}{c - \eta_1' - \eta_2'} \dots \Rightarrow c - \eta_1' - \eta_2' = \frac{c - \eta_1'}{1 + K}$$

$$\delta. K' = \frac{K_2}{K_e} = \frac{(\text{Ox}^-)}{(\text{OH}^-)(\text{Ox})_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\eta_1'(1 + K)}{(c - \eta_1')^2} - \eta_1'^2 \frac{K_2}{K_e} + \eta_1' \left[1 + K + 2c \frac{K_2}{K_e} \right] - c^2 \frac{K_2}{K_e} = 0$$

$$\Rightarrow \eta_1' = \frac{K_e}{2K_2} \left[\left(1 + K + 2c \frac{K_2}{K_e} \right) - \sqrt{\left(1 + K + 2c \frac{K_2}{K_e} \right)^2 - 4c^2 \frac{K_2^2}{K_e^2}} \right]$$

A.N. : $\eta_1' = 0,0553$; $(\text{OH}^-) = 0,0447$; $(\text{H}^+) = 2,24 \cdot 10^{-13}$; pH = 12,65.

7.a. En l'absence de chloroforme :

On dose d'abord l'acide faible Ox^+ de $\text{pK}_{A_1} = 5$, on aura par exemple pour

$n_{\text{NaOH}} = \frac{c}{2}$, pH = pK_{A_1} , puis on dose l'acidité de Ox de $\text{pK}_{A_2} = 9,7$ et on aura pour

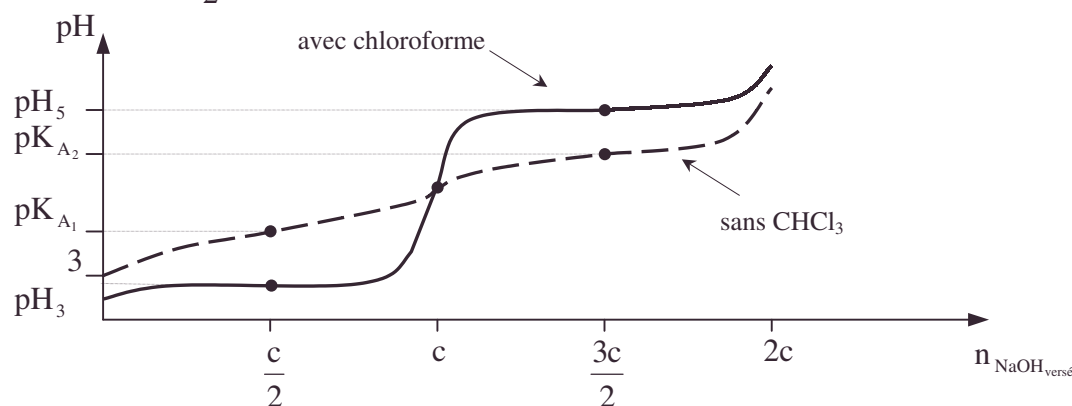
$n_{\text{NaOH}} = \frac{3c}{2}$, pH = pK_{A_2} .

Pour $n_{\text{NaOH}} = c$, on a une solution amphotère : $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_{A_1} + \text{pK}_{A_2})$ point commun aux deux expériences. A.N. : pH = 7,35.

b. En présence de CHCl_3 on a, vu l'effet du solvant qui sépare nettement les 2 acidités et les valeurs déjà calculées pour $n_{\text{NaOH}} = \frac{c}{2}$, pH = 2,24.

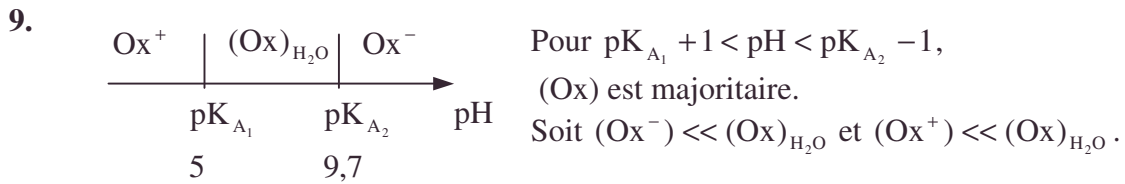
$n_{\text{NaOH}} = c$, pH = 7,35 identique.

$n_{\text{NaOH}} = \frac{3c}{2}$, pH = 12,24.

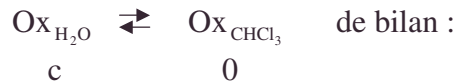


8. La présence de chloroforme renforce la pente et le saut de pH pour c , on a donc intérêt à utiliser CHCl_3 pour doser.

• courbe de dosage acidobasique, saut, solution amphotère



$\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}}$ étant non dissocié permet de ne considérer comme seul équilibre Ox pour les 2 phases



c - ξ ξ soit $K = \frac{\xi}{c - \xi} \Rightarrow \xi = \frac{Kc}{1 + K}$

$R = \frac{Kc}{c} \frac{1}{1 + K} = \frac{K}{1 + K} \neq 1.$

La plus grande partie de Ox est dans le chloroforme.

10. Il s'agit de déplacer l'équilibre $\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}} \rightleftharpoons \text{Ox}_{\text{CHCl}_3}$ en transformant $\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}}$ à par exemple 99 %,

a. soit par $\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}} + \text{OH}^- \rightarrow \text{Ox}^- + \text{H}_2\text{O}$ en ajoutant de la soude à la phase aqueuse pour avoir $\text{pH} > 9,7 + 2$, $\text{pH} = 11,7$ où $(\text{Ox}^-)/(\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}}) = 100$.

b. soit par $\text{H}^+ + \text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}} \rightleftharpoons \text{Ox}^+$ en ajoutant de l'acide à la phase aqueuse pour avoir $\text{pH} < 5 - 2$, $\text{pH} = 3$ où $(\text{Ox}^+)/(\text{Ox}_{\text{H}_2\text{O}}) = 100$.

11. Notons que $K = \frac{c_1}{c_1} = \frac{c_2}{c_2} = \frac{c_n}{c_n}$;

écrivons la conservation de Ox en éliminant $c_n' = Kc_n$:

$$\begin{array}{l} c_0 V = c_1 V + c_1' V' \\ c_1 V = c_2 V + c_2' V' \\ c_2 V = c_3 V + c_3' V' \\ c_{n-1} V = c_n V + c_n' V' \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_0 \frac{V}{V + KV'} \\ c_2 = c_1 \frac{V}{V + V'K'} \\ c_n = c_{n-1} \frac{V}{V + K'V'} \end{array} \right. \Rightarrow \text{d'ou en multipliant membre à membre,}$$

$$c_n = c_0 \left(\frac{V}{V + K'V'} \right)^n$$

12. $R_N = \frac{c_0 - c_N}{c_0} = 1 - \left(\frac{V}{V + K'V'} \right)^N$ en N opérations

$R_1 = 1 - \frac{V}{V + KV''}$ en une opération

$1 + \frac{KV''}{V} = \left(1 + K \frac{V'}{V} \right)^N \Rightarrow$

Soit $V'' = \frac{V}{K} \left[\left(1 + K \frac{V'}{V} \right)^N - 1 \right] = \frac{V}{K} \left[NK \frac{V'}{V} + \dots + K^N \left(\frac{V'}{V} \right)^N \right].$

Développons : $V'' = NV' + \dots \Rightarrow V'' > NV'$.

13. On opérera par extraction multiple dans les conditions de pH que la question 9. a précisées.

Index de chimie

- (E)-3-méthyl-pent-2-ène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1757
(Z)-1-bromopentène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1763
(Z)-2-butène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1796
(Z)-3-méthylpent-2-ène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1756
1,2,3,4,5,6-hexachlorocyclohexane *[voir nomenclature des cyclanes]* p.1707.
1-bromo-1-phenyléthane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1708
1-bromo-2-méthylpropane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1760
1-bromobutane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1773, 1804
1-bromopropane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1476
1-chloro-2-isopropylcyclohexane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1706, 1707
1-cyclohexyl-1-iodoéthane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1708
1-méthylbutan-2-ol *[voir nomenclature des alcools]* , 1796
1,2-dichloroéthane, 1548
1,2-diphényléthanol *[voir nomenclature des alcools]* p.1725.
2-bromo-2-méthylpropane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1760, 1804
2-bromo-2-méthylpropane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1476
2-bromo-3-méthylbutane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1701
2-bromobutane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1700
2-bromopropane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1804
2-chloroéthan-1-ol *[voir nomenclature des alcools]* , 1804
2-chloropropane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1716, 1808
2-cyanoacétate d'éthyle *[voir nomenclature des esters]* , 1779
2-hydroxybutanenitrile *[voir nomenclature des nitriles]* , 1757
2-hydroxypropanenitrile *[voir nomenclature des nitriles]* , 1793
2-iodophenylbutane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* , 1795
2-isopropyl-5-méthylcyclohexan-1-ol *[voir nomenclature des alcools]* , 1734
2-méthylbut-2-ène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1703
2-méthylpropan-2-ol *[voir nomenclature des alcools]* , 1716, 1741, 1798
2-méthylpropanal *[voir nomenclature des aldéhydes]* , 1716, 1791
2-méthylpropane *[voir nomenclature des alcanes]* , 1804
2-méthylpropanolate *[voir nomenclature des alcoolates]* , 1742
2-méthylpropène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1743
2-méthylpropylène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1758
2-phénylbut-2-ène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1705
2-phénylbutan-2-ol *[voir nomenclature des alcools]* , 1795
2,2,4-triméthyl-3-hydroxypentanal *[voir nomenclature des aldéhydes]* p.1715.
2,3-dibromo-3-méthylpentane *[voir nomenclature des halogénoalcanes]* p.1757.
3-bromocyclohexanone *[voir nomenclature des cétones]* , 1758
3-hydroxy-2-méthylpentanal *[voir nomenclature des aldéhydes]* , 1796
3-iodopropanoate d'éthyle *[voir nomenclature des esters]* , 1779
3-méthylbut-1-ène *[voir nomenclature des alcènes]* , 1703
3-méthylbutan-2-ol *[voir nomenclature des alcools]* , 1702, 1703, 1791
3-méthylbutanal *[voir nomenclature des aldéhydes]* , 1807
3-méthylpyridine-N-oxyde *[voir nomenclature des fonctions azotées]* , 1548
3-phényl-3-hydroxypropanal *[voir nomenclature des aldéhydes]* , 1757

4-hydroxyazobenzène [*voir nomenclature des fonctions azotées*] , 1752
4-nitroaniline [*voir nomenclature des composés aromatiques*] , 1753
2,3-dibromo-3-méthylpentane [*voir nomenclature des halogénoalcanes*] p.1757.

A

a-a, 1561
absorption IR, 1697, 1784
accumulateur au plomb, 1617
acétalisation, 1808
 acétal, 1808
acétone [*voir nomenclature des cétones*] , 1796
acétonitrile [*voir nomenclature des nitriles*] , 1548
acétylène [*voir nomenclature des alcynes*] , 1799, 1800, 1803
acide 2-aminobenzoïque [*voir nomenclature des aminoacides carboxyliques*] , 1730
acide 2-méthylpropanoïque [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1731
acide acétique
 acétonitrile, 1548
 acide éthanoïque, 1630, 1631
 tampon acétique, 1600
acide alcool
 nomenclature
 acide D-gluconique, 1479
 acide lactique, 1804
 carbone asymétrique, 1694, 1696, 1699, 1715, 1716, 1735, 1737, 1741, 1798, 1804
acide adipique, 1798
acide amino-3-benzoïque [*voir nomenclature des aminoacides carboxyliques*] , 1730
acide ascorbique, 1565
 cf biochimie
acide barbiturique, 1776
acide benzoïque [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1786, 1789
acide borique, 1560
acide bromhydrique, 1702
acide butanedioïque [*voir nomenclature des acides bicarboxyliques*] , 1575
acide butanoïque [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1770
acide carboxylique, 1770, 1782, 1783
 décarboxylation, 1775, 1785
 protection de fonction, 1774 ,1808
acide cétonique
 acide pyruvique, 1804
acide chlorhydrique, 1627, 1630, 1634, 1636
acide chloroacétique, 1568
acide conjugué d'une base, 1749
 Brönsted, 1672
acide de Lewis, 1745, 1793
acide D-gluconique [*voir nomenclature des acides bicarboxyliques alcools*] , 1479
acide diéthylacétique [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1786
acide éthanoïque [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1630, 1631
acide éthylènediaminetétracétique [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1591, 1648

E.D.T.A., 1591, 1648, 1686

acide fluorhydrique, 1560

acide formique [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1568, 1786

méthanoate, 1611

acide hexan-dioïque ou acide adipique [*voir nomenclature des acides bicarboxyliques*] , 1798

acide hexanoïque [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1773, 1775

acide hypochloreux, 1750

acide isovalérique [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1786, 1807

acide lactique, 1804

acide alcool

cf lactide

acide malonique [*voir nomenclature des acides bicarboxyliques*] , 1773

acide mandélique [*voir nomenclature des acides carboxyliques alcools*] , 1804

acide méthanoïque [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1470, 1611

acide méthoxyacétique [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1564

acide monochloracétique [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1559

acide monochloroéthanoïque [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1562

acide nitreux, 1620, 1751

acide nitrilotriacétique [*voir nomenclature des acides carboxyliques*] , 1593

acide octanedioïque, 1575

acide oxalique, 1575

acide paratoluènesulfonique, 1735

acide phosphorique, 1666

acide propanedioïque, 1773

acide pyruvique, 1804

acide sulfonique, 1735

acide paratoluènesulfonique, 1735

acide tosylique, 1735

hydrogénosulfate d'isopropyle, 1721

cf détergent

acide sulfurique, 1702, 1741

hydrogénosulfate d'isopropyle, 1721

acide paratoluènesulfonique, 1735

acide sulfonique, 1735

acide tosylique, 1735

acide sulfonique, 1735

acide trifluoroperacétique, 1759

acides aminés, 1779

acides bicarboxyliques

acide bicarboxylique, 1571

acide butanedioïque, 1575

acide hexandioïque ou acide adipique, 1798

acide lactique, 1804

acide malonique, 1773

acide octanedioïque, 1575

acide oxalique, 1575

acide propanedioïque, 1773

acide pyruvique, 1804

acides carboxyliques

- acide benzoïque, 1786, 1789
- acide butanoïque, 1770
- acide chloroacétique, 1568
- acide D-gluconique, 1479

- ester, 1771

- acide éthanoïque, 1630, 1631

acides minéraux

- acide bromhydrique, 1702
- acide chlorhydrique, 1627, 1630, 1634, 1636
- acide fluorhydrique, 1560
- acide hypochloreux, 1750
- acide nitreux, 1620, 1751
- acide phosphorique, 1666
- acide sulfurique, 1702, 1741

acidité de l'eau, 1560, 1564

acidobasicité

- Brönsted, 1672

- courbe de dosage acidobasique, 1815

- saut, 1601, 1649, 1650, 1651, 1691, 1693, 1815

- courbe dérivée, 1651

- contrôle, 1554, 1591, 1593, 1674

- mélange de deux acides faibles, 1568

- produit ionique, 1616, 1667, 1671

- tampon, 1593, 1654

couple acido-basique, 1581

- acide conjugué d'une base, 1749

- équilibre acidobasique, 1559

- acide de Lewis, 1745, 1793

- ammoniaque, 1661

- ampholyte, 1597, 1813

- amphotère, 1584, 1586, 1671

- carbonate de calcium, 1515, 1625

- diagramme logarithmique, 1581

- dilution, 1600

- dilution négligeable, 1591

- hélianthine, 1559, 1560, 1650

- mesures de constante d'acidité, 1630

- EC, 1580, 1672, 1673, 1674, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680

- E.P, 1672

- équilibre de contrôle, 1671, 1672, 1674, 1676, 1681

- équilibre mixte, 1673, 1674, 1676

- équilibre mixte double, 1681

- équilibre prépondérant, 1672

- minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783

- monochloracétate de sodium, 1559

- neutralisation, 1568, 1579

- pH, 1559, 1561, 1562, 1564, 1568, 1608, 1625, 1626, 1634, 1637, 1640, 1642, 1789, 1804, 1806, 1811, 1813

pH de virage, 1568
pH-mètre, 1566
phosphate, 1666
 pK_A , 1562, 1566
point d'équivalence, 1564, 1592, 1593, 1597, 1600, 1630, 1647, 1650
point d'inflexion, 1651
réaction prépondérante, 1627
RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600, 1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668, 1678, 1692
RPQ, 1578, 1657
solution amphotère, 1815
solution tampon, 1560, 1561, 1566, 1568, 1571, 1577, 1578, 1579, 1593, 1598, 1600, 1638, 1648, 1657, 1671
solution tamponnée, 1486, 1642
solution titrante, 1658

ACN, 1548

acrylate d'éthyle, 1726, 1727

activité, 1486, 1513, 1553, 1554, 1574, 1610, 1616, 1630, 1658, 1667, 1689, 1700

activité optique, 1706, 1771, 1780

acylation, 1731, 1730, 1471, 1777

additions

addition électrophile, 1797, 1808

addition 1,2, 1762

addition 1,4, 1762

addition, 1705, 1720, 1737

addition nucléophile de l'alcool, 1774

dimérisation, 1470, 1747

additivité des propriétés, 1711

adduit, 1720, 1797, 1808

ordre 3, 1808

alcène, 1705, 1720

adiabatique, 1461

ADM, 1548, 1549

affinité thermodynamique, 1491, 1517, 1520

affinité standard, 1519

perturbation de l'équilibre, 1492, 1493

air, 1462, 1463, 1494, 1501, 1523, 1621, 1623

ajout, 1644

déplacement par ajout, 1515

ajouter de l'oxygène à l'air pour

optimiser la conversion du méthane en hydrogène, 1506

alcane, 1797

méthane, 1474, 1803

nomenclature

2-méthylpropane, 1804

méthylpropane, 1760

propane, 1720, 1721

bromation du méthylpropane, 1760

chaîne latérale, 1768
chaîne linéaire, 1765

alcène, 1705, 1720

adduit, 1720, 1797, 1808

ordre 3, 1808

ion ponté, 1737

propène, 1716, 1721, 1800

bromonium, 1724

double liaison, 1763, 1784

Diels-Adler, 1726

diène conjugué, 1702

diénophile, 1726, 1727

électrophile, 1717, 1766

énergies des orbitales frontières, 1726

théorème de Fukui, 1727

recouvrement, 1728

nomenclature

(E)- 3-méthylpent-2-ène, 1757

(Z)-1-bromo-pentène, 1763

(Z)-3-méthylpent-2-ène, 1756

2-méthylbut-2-ène, 1703

2-méthylpropène, 1743

2-phénylbut-2-ène, 1705

3-méthylbut-1-ène, 1703

isobutène, 1743, 1747

méthylpropylène, 1793

E, 1703, 1705, 1723

effet inductif donneur, 1789

Hückel, 1726

hydrogénation, 1762

nickel de Raney, 1703, 1759, 1760, 1762, 1792

insaturation, 1763

oxydation de l'éthylène, 1803

permanganate de potassium, 1621, 1729, 1803

réaction en chaîne, 1793, 1803

règle de Markovnikov, 1703, 1803, 1808, 1810

recouvrement, 1728

recombinaison de radicaux, 1770

théorème de Fukui, 1727

alcools, 1764

alcool éthylique, 1700

nomenclature

2-chloroéthan-1-ol, 1804

2-isopropyl-5-méthylcyclohexan-1-ol, 1734

2-méthylpropan-2-ol, 1716, 1741, 1798

2-phénylbutan-2-ol, 1795

3-méthylbutan-2-ol, 1702, 1703, 1791

néopentylglycol, 1791

propan-2-ol, 1721

alcool secondaire, 1721
alcool tertiaire, 1718, 1764, 1783
addition nucléophile de l'alcool, 1774
acétalisation, 1808
 acétal, 1808
 hémiacétal, 1778
alcool chiral, 1773
chlorure de thionyle, 1734, 1770
déshydratation, 1732, 1741, 1764, 1768, 1774
déshydratation intermoléculaire, 1742
déshydratation intramoléculaire, 1745
nucléophilie de l'alcool, 1744, 1778, 1784
nucléophilie, 1699, 1732, 1746, 1748, 1766, 1781
permanganate de potassium, 1621, 1729, 1803
phénol, 1751
protonation, 1743, 1754, 1774, 1777, 1778, 1784
règle de Saitsev, 1736, 1765, 1783
Saitsev, 1701, 1703, 1708

alcynes

acétylène, 1799, 1800, 1803
alcyne vrai, 1769, 1800
alcynure, 1769
hydrogénation, 1762
 nickel de Raney, 1703, 1759, 1760, 1762, 1792
hydratation d'un alcyne, 1801
 palladium de Lindlar, 1769

alcynure, 1769

aldéhydes et cétones**nomenclature**

acétone, 1796
 propanone, 1796
3-bromocyclohexanone, 1758
3-hydroxy-2-méthylpentanal, 1796
3-méthylbutanal, 1807
3-phényl-3-hydroxypropanal, 1757
benzal, 1757
diméthylpropanal, 1796
propanal, 1756
propanone, 1796
 acétone, 1796

aldéhyde, 1756

aldolisation, 1703, 1716, 1757, 1766, 1792, 1795
acétalisation, 1808
 acétal, 1808
 hémiacétal, 1778
réactif de Tollens, 1716
réaction de Cannizzaro, 1758
 triméthylacétaldéhyde, 1795, 1796
 diméthylpropanal, 1796

- miroir d'argent, 1716
- hémiacétal, 1778
- mobilité des hydrogènes en alpha, 1766, 1768, 1780
- chlorure de thionyle, 1734, 1770
- cétone**, 1718, 1756, 1763
 - cétolisation, 1766
- hydrogénation**, 1762
 - nickel de Raney, 1703, 1759, 1760, 1762, 1792
 - hydrure d'aluminium et de lithium, 1808
- carbonyle, 1715, 1732, 1798
- énolate, 1766, 1768
- énolisation, 1766
- hydroxylamine, 1577
- DNPH**, 1804
 - dinitrophenylhydrazine, 1804
 - dinitrophenylhydrazone, 1806
 - banc Kofler, 1806
- oxime, 1810
- phénylméthanal, 1757
- protection de fonction, 1774
- protection d'une fonction, 1808
- réactif de Tollens, 1716
- réactifs nucléophiles, 1477, 1701
- alkylation, 1730, 1748, 1750, 1752, 1775, 1804, 1805
- allothréonine, 1748
- aluminium, 1536
- amalgame de sodium, 1682
- amide, 1730, 1732, 1775, 1777
- amidure, 1800
- amine, 1730, 1748, 1750, 1752
 - alkylation, 1804, 1805
 - acide nitreux, 1620, 1751
- aminoacide**, 1730
 - glycine, 1804
 - nomenclature**
 - acide amino-3-benzoïque, 1730
 - acides aminés, 1730, 1779
 - point isoélectrique, 1804, 1806
- aminopolycarboxylate, 1591
- ammoniac, 1496
- ammoniac liquide, 1559
- ammoniaque, 1661
- ammonium quaternaire, 1805
- amphion, 1802
- ampholyte, 1597, 1813
- amphotère, 1584, 1586, 1671
- ampoule à brome, 1714
- analgésique, 1731
- analyse qualitative, 1639

anhydride acétique [*voir nomenclature des anhydrides carboxyliques*] , 1780, 1783
anhydride chromique, 1579
anhydride succinique [*voir nomenclature des anhydrides carboxyliques*] , 1717
aniline, 1748, 1750, 1751

 acide nitreux, 1620, 1751

anode de titane, 1682

antergan, 1750, 1751

antihistaminique, 1750

anti-inflammatoire, 1731

antiparallélisme, 1723

antipyrétique, 1731

approximation d'ELLINGHAM, 1500

arête de la maille élémentaire, 1471

argentimétrie, 1660

argon, 1470, 1515

aromatisation, 1755

arylamine, 1754

atmosphère cimentante, 1553, 1557

atomes et molécules

 argon, 1470, 1515

 béryllium, 1470

 caractère ionique de la liaison, 1470

 différence d'électronégativité, 1702

 dimérisation, 1470, 1747

 dipôles induits, 1471

 distance internucléaire, 1470

 dissociant, 1725

 énergie de liaison, 1469, 1743

énergies des orbitales frontières, 1726

 recouvrement, 1728

 forces de Van der Waals, 1471

 krypton, 1471

 moment dipolaire, 1470

 moment dipolaire induit, 1702

 moment dipolaire total, 1702

 monoxyde d'azote, 1620

 monoxyde de carbone, 1463, 1474

 nombre d'atomes dans une molécule, 1467

 numéro atomique, 1467, 1588, 1637, 1666

 orbitales frontières, 1726

 orbitale p, 1728

 phosphore, 1467, 1670

 polarisabilité, 1700

 recouvrement, 1728

 règle de l'octet, 1716

 règle de Klechkovski, 1467

 règle de stabilité de Sigdwick, 1471

 silicium, 1467

 structure, 1461, 1588

structure électronique, 1467, 1666
structure géométrique, 1470, 1588
tableau périodique, 1467
théorème de Fukui, 1727
VSEPR, 1471, 1588, 1749
augmentation d'entropie, 1727
avancement, 1491, 1497, 1504
avancement sans dimension, 1518
azéotropie, 1541, 1542

B

bain glacé, 1754
banc Kofler, 1806
barbotage du dioxyde de carbone dans une solution aqueuse de soude, 1502
base faible, 1567, 1579, 1634, 1638, 1650, 1651
base forte, 1567, 1591, 1646, 1649, 1651, 1662, 1664, 1702, 1707
basicité, 1754
 base faible, 1567, 1579, 1634, 1638, 1650, 1651
 base forte, 1567, 1591, 1646, 1649, 1651, 1662, 1664, 1702, 1707
 basicité de l'eau, 1565

BBT, 1650
bécher, 1627, 1753
benzal, 1757

benzène

 acylation, 1731
 benzène, 1714, 1729, 1750, 1803
 chlorure d'aluminium, 1729, 1803
 complexe polarisé, 1750, 1805
 électrophile, 1717, 1766
 Friedel et Crafts, 1731
 catalyseur de Friedel et Crafts, 1729, 1731
 Holleman, 1750
 hydrogénation, 1762
 mononitration, 1729
 ortho, 1717
 para, 1717
 règles d'Holleman, 1730
 solution sulfo-nitrique, 1729
 trinitration, 1729
 Wheland, 1750
benzonitrile, 1751
béryllium, 1470
bicycle, 1780
bidentate, 1588
bilan enthalpique, 1509, 1552
bilan entropique, 1509
bilan thermique, 1464

bimolécularité, 1699, 1707

biochimie

acide ascorbique, 1565
acide lactique, 1804
biochimie, 1518
carboxyhémoglobine, 1519
glycine, 1804
hémoglobine, 1518
oxyhémoglobine, 1518
oxygène dissous, 1518
site cellulaire, 1777, 1779
toxicité, 1519, 1682, 1777

Biot, 1710

Borohydrure de sodium, 1736

bromate, 1483, 1486

bromation du méthylpropane, 1760

bromoéthane [voir nomenclature des halogénoalcanes] , 1714, 1735

bromonium, 1724

bromostilbène [voir nomenclature des halogénoalcanes] , 1722

bromure de méthyle, 1702

bromure de tertibutylmagnésium, 1761

bromure d'éthylmagnésium, 1714

bromure d'isopropylmagnésium, 1717, 1796

bromure d'isopropylzinc, 1717

Brönsted, 1672

but-1-ène [voir nomenclature des alcènes] , 1770

but-2-ène [voir nomenclature des alcènes] , 1701

butadiène [voir nomenclature des alcènes] , 1799, 1800

butan-1-ol [voir nomenclature des alcools] , 1480

butan-2ol [voir nomenclature des alcools] , 1701

butanal [voir nomenclature des aldéhydes] , 1714

butynediol [voir nomenclature des alcools] , 1800

C

cadmium, 1666

calcaire, 1626, 1627

calorimétrie, 1785, 1787

Cannizzaro, 1758

diméthylpropanal, 1796

triméthylacétaldéhyde, 1795, 1796

caoutchouc, 1794, 1799

caractère ionique de la liaison, 1470

carbanate, 1778

carbanion, 1716, 1773, 1774, 1779, 1782

carbaryle, 1777

carbocation, 1477, 1712, 1717, 1725, 1737, 1745, 1763, 1766, 1793, 1794, 1795, 1797, 1798

carbocation secondaire, 1797

carbocation plan, 1795

- carbone tertiaire, 1477, 1760
- carbonate de calcium, 1515, 1625
- carbone asymétrique**
 - alcool chiral, 1773
 - activité optique, 1706, 1771, 1780
 - carbone asymétrique, 1694, 1696, 1699, 1715, 1716, 1735, 1737, 1741, 1798, 1804
 - pouvoir rotatoire, 1709, 1771
 - rectus, 1738
 - sinister, 1756
 - vitesse de variation du pouvoir rotatoire, 1710
- carbone tertiaire, 1477, 1760
- carbonyle, 1715, 1732, 1798
- carboxyhémoglobine, 1519
- carboxylate, 1782
- carboxyle, 1574
- carbure d'aluminium, 1537, 1804
- catalyse**, 1703, 1478, 1479, 1483, 1491, 1498, 1714, 1718, 1803
 - catalyseur désactivé, 1769
 - catalyseur de Friedel et Crafts, 1729, 1731
 - complexe polarisé, 1750, 1805
 - catalyseurs de Ziegler–Natta, 1804
 - catalyseur industriel, 1501
 - chimisorption, 1478
 - chlorure d'aluminium, 1729, 1803
 - constante de Michaelis, 1479, 1480
 - nickel de Raney, 1703, 1759, 1760, 1762, 1792 palladium, 1769
 - palladium de Lindlar, 1769
- catalyseur de Friedel et Crafts, 1729, 1731
- catalyseur désactivé, 1769
- catalyseur industriel, 1501
- catalyseurs de Ziegler–Natta, 1804
- cathode de mercure, 1682
 - électrolyse du chlorure de sodium dissous, 1682
- cémentation, 1553
- cérium, 1546
- césium, 1467
- cétolisation, 1766
- cétone, 1718, 1756, 1763
 - cétolisation, 1766
- CFC, 1471, 1472
- chaîne latérale, 1768
- chaîne linéaire, 1765
- chaleur dégagée, 1461
- chaleur latente molaire de fusion, 1549
- chaleur latente molaire de sublimation, 1469
- changement d'état**
 - chaleur latente molaire de sublimation, 1469
 - chaleur latente molaire de fusion, 1549
 - corps pur, 1547

- cristaux liquides, 1543
- graphite, 1553
- phase liquide, 1489
- variété allotropique, 1472, 1553
- chauffage, 1729, 1741, 1742, 1780, 1806
- chauffage à reflux, 1779, 1780, 1782, 1783
- chaux, 1626
- chaux vive, 1515
 - oxyde de calcium, 1515
- chimie minérale**
 - chaux vive, 1515
 - chlorure de plomb, 1635
 - chlorure de potassium, 1471
 - chlorure de sodium, 1471
 - chlorure d'hydrogène, 1470, 1490, 1720
 - coke, 1516, 1528
 - dioxyde de soufre, 1494
 - dioxyde de carbone, 1780
 - oxyde de calcium, 1515
 - silicium, 1467
 - soufre, 1465, 1559
- chimie organique**
 - chimisorption, 1478
 - données spectroscopiques IR, 1781
 - DNPH, 1804
 - dinitrophenylhydrazine, 1804
 - distillation, 1746
 - distillation fractionnée, 1543
 - dinitrophenylhydrazone, 1806
 - dinitrophenylhydrazine, 1804
 - dinitrophenylhydrazine, 1804
 - DNPH, 1804
 - dioxyde de carbone, 1780
 - décarboxylation, 1775, 1785
 - dioxyde de carbone, 1780
 - chauffage, 1729, 1741, 1742, 1780, 1806
 - chauffage à reflux, 1779, 1780, 1782, 1783
 - contrôle thermodynamique, 1701, 1723
 - D-glucose, 1479, 1480
 - diaminoéthane, 1588
 - diastéréoisomère, 1706, 1734, 1735, 1750, 1756, 1762
 - dianion, 1574, 1575
 - encombrement stérique, 1477, 1717
 - énantiomère, 1700, 1702, 1703, 1706, 1709, 1749, 1750, 1756, 1762, 1765, 1771
 - enchaînement, 1799
 - énergie d'activation, 1484, 1485
 - déshydratation, 1732, 1741, 1764, 1768, 1774
 - déshydratation intramoléculaire, 1745
 - déshydrogénation, 1720

déshydrohalogénéation, 1722, 1783
dérivé monohalogéné, 1714
déprotonation, 1574, 1575, 1764, 1794
déplacement chimique, 1697
délocalisation électronique, 1781, 1789
dégénérescence de l'ordre, 1486, 1612, 1700, 1745
dégagement d'azote, 1752
dédoublable, 1771, 1772, 1796
organomagnésien, 1714
volume de solvant pour une extraction, 1811
chimie organique, 1694
condensation en carbone, 1798
formule brute, 1796
impureté, 1744
polarisabilité, 1700, 1702
précurseur, 1762
préparation des réactifs, 1501
protocole, 1589
réaction parasite, 1538, 1743, 1780, 1785
silicium, 1467
soluté, 1548
chimisorption, 1478
chiralité, 1694, 1772, 1773
chloroforme, 1811
chlorométhane [voir nomenclature des halogénoalcanes] , 1729, 1751
chlorophénylméthane [voir nomenclature des halogénoalcanes] , 1751
chlorure d'acide, 1564, 1730, 1770, 1778
 chlorure d'acétylène, 1731
 chlorure de butanoyle, 1729, 1770
 chlorure d'éthanoyle, 1748
chlorure d'acétylène, 1731
chlorure d'aluminium, 1729, 1803
chlorure d'argent, 1635
chlorure de benzyle, 1751
chlorure de butanoyle, 1729, 1770
chlorure de méthyle, 1729
chlorure de plomb, 1635
chlorure de potassium, 1471
chlorure de pyridinium, 1805
chlorure de sodium, 1471
chlorure de thionyle, 1734, 1770
chlorure d'éthanoyle, 1748
chlorure d'éthyle, 1720
chlorure d'hydrogène, 1470, 1490, 1720
chlorure d'isopropylmagnésium, 1716, 1808
chocs efficaces, 1810
chromate, 1608, 1647
chromate d'argent, 1647, 1654
cinétique chimique
 cinétique, 1474, 1578, 1613, 1631, 1650, 1671, 1742

dégénérescence de l'ordre, 1486, 1612, 1700, 1745
énergie d'activation, 1484, 1485
temps de demi-réaction, 1474
chocs efficaces, 1810
constante de vitesse, 1476, 1479, 1481, 1485, 1631, 1700, 1709, 1710, 1720, 1742, 1743
constante de vitesse apparente, 1481
ordre zéro, 1487
ordre partiel, 1476, 1481, 1484, 1485, 1611, 1711, 1712
ordre global apparent, 1485
ordre de la réaction, 1709
ordre 3, 1808
ordre, 1474
ordre de la réaction, 1709
bimolécularité, 1699, 1707
bromate, 1483, 1486
constante de Michaelis, 1479, 1480
molécularité, 1760
schéma réactionnel, 1808
vitascorbol, 1566
vitesse de variation du pouvoir rotatoire, 1710
encombrement stérique, 1477, 1717
énergie d'activation, 1484, 1485
enthalpie libre d'activation, 1477
équilibre rapide, 1481, 1483
profil réactionnel, 1477, 1478
minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783
pouvoir rotatoire, 1709, 1771
principe de l'état stationnaire, 1477, 1744
principe de Bodenstein, 1478
réaction parasite, 1538, 1743, 1780, 1785
réactions concurrentes, 1759
circuit en aval du compresseur, 1503
cis, 1802
Clemmensen, 1800, 1808
coefficient d'activité, 1549
coefficient d'avancement, 1494
coefficient de diffusion, 1685
coefficient de dissociation, 1490, 1496, 1568
coefficient stœchiométrique, 1484, 1610
coke, 1516, 1528
colonne à distiller, 1744
 colonne à plateaux, 1543
colorant, 1752,
 azoïque, 1752
 nitrosation, 1754
 diazotique, 1752
 rouge para, 1753
combustion, 1461, 1796

combustion isobare, 1463
complexe activé, 1477, 1479, 1711
complexe polarisé, 1750, 1805
complexe π
complexes
 stabilité comparée de complexes, 1589
 complexe, 1672
 complexe neutre, 1601
 effet de pince, 1588
 thiocyanate, 1589
 thiocyano-fer (III), 1589
 DETA, 1602
 diéthylènetriamine, 1602
 constante de dissociation de complexe, 1588, 1589, 1637
 constante de formation de complexe, 1589, 1594
 constante de stabilité du complexe, 1673
 constante d'instabilité, 1672
 coordinance 6, 1689
 E.D.T.A., 1591, 1648, 1686
 cyanure de potassium, 1758
 thiosulfate, 1477, 1714
 bidentate, 1588
 tridentate, 1605
 diaminoéthane, 1588
 diagramme pMg-pH, 1648
 diamminecuivre (I), 1804
 E.P, 1672
 EC, 1580, 1672, 1673, 1674, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680
 équilibre de contrôle, 1671, 1672, 1674, 1676, 1681
 équilibre prépondérant, 1672
 équilibre mixte double, 1681
 équilibre mixte, 1673, 1674, 1676
 RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600, 1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668, 1678, 1692
 RPQ, 1578, 1657
 minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783
 orbitales frontières, 1726
 noir ériochrome, 1648, 1649, 1656, 1658
 pH, 1559, 1561, 1562, 1564, 1568, 1608, 1625, 1626, 1634, 1637, 1640, 1642, 1789, 1804, 1806, 1811, 1813
 point d'équivalence, 1564, 1592, 1593, 1597, 1600, 1630, 1647, 1650
 point d'inflexion, 1651
 polarimétrie, 1699
 réaction prépondérante, 1627
 règle de stabilité de Sigdwick, 1471
 solution amphotère, 1815
 solution titrante, 1658
composé défini, 1546
composé interstitiel fer – carbone, 1472

composé non-stœchiométrique, 1522

composés à 2 carbones asymétriques

érythro, 1706, 1772

thréo, 1705, 1706, 1773

diastéréoisomère, 1706, 1734, 1735, 1750, 1756, 1762

RR, 1757, 1772

RS, 1750

SS, 1750

diastéréoisomérie, 1694, 1765

mésogyre, 1772

indédoubable, 1772

racémique, 1703, 1702, 1725, 1757, 1758, 1772, 1785, 1791, 1795

racémisation, 1712

racémisation apparente, 1710, 1712

composés aromatiques

aniline, 1748, 1750, 1751

aromatisation, 1755

arylamine, 1754

benzène, 1714, 1729, 1750, 1803

hydrogénation, 1762

Wheland, 1750

Holleman, 1750

chlorure d'aluminium, 1729, 1803

métatoluidine, 1730

métanitrotoluène, 1748

métamononitrotoluène, 1730

règles d'Holleman, 1730

Friedel et Crafts, 1731

catalyseur de Friedel et Crafts, 1729, 1731

électrophile, 1717, 1766

naphtol, 1753, 1754, 1777

orthomononitrotoluène, 1730

orthotoluidine, 1730

phénate, 1710

phénol, 1751

composés interstitiels fer carbone, 1553

composition en volume, 1511

compresseur, 1503

compromis entre cinétique et thermodynamique pour la production d'ammoniac, 1504

concentration massique, 1559

concentration molaire, 1559, 1611, 1630, 1631

concentration molaire volumique gazeuse, 1475

concurrence SN – E, 1746

condensation en carbone, 1798

condenseur, 1503

conditions normales, 1467

conducteur ionique solide, 1555

conductimétrie, 1651

conductivité équivalente, 1630, 1631, 1746, 1785

configuration, 1762

- configuration absolue, 1709, 1741, 1748
- configuration axiale, 1736
- configuration R, 1709, 1710
- configuration rectus, 1722
- conformation**, 1694, 1701, 1799
 - conformère, 1734
 - conformation du cycle, 1734
 - conformation décalée, 1702, 1707, 1722
 - conformation chaise, 1736
 - conformation anti-périplanaire, 1722
- conjugaison, 1748
 - conjugaison de doublets, 1781
- conservation de l'élément, 1570, 1572, 1590, 1654, 1655, 1670
- constante apparente de vitesse, 1484
- constante d'équilibre, 1462, 1463, 1464, 1484, 1490, 1496, 1497, 1511, 1515, 1516, 1518, 1522, 1528, 1576, 1578, 1579, 1593, 1597, 1603, 1612, 1632, 1639, 1641, 1642, 1646, 1661, 1666, 1671, 1710, 1720
- constante d'équilibre dimensionnée, 1494
- constante d'acidité, 1594, 1630, 1640, 1672
- constante de dissociation de complexe, 1588, 1589, 1637
- constante de formation de complexe, 1589, 1594
- constante de stabilité du complexe, 1673
- constante de Michaelis, 1479, 1480
- constante de vitesse, 1476, 1479, 1481, 1485, 1631, 1700, 1709, 1710, 1720, 1742, 1743
- constante de vitesse apparente, 1481
- constante d'instabilité, 1672
- contrôle, 1554, 1591, 1593, 1674
- contrôle thermodynamique, 1701, 1723
- convergence d'une suite, 1543
- conversion à la vapeur d'eau, 1489, 1502
- conversion du méthane, 1501
- coordinnence 6, 1689
- copolymérisation, 1793, 1794
- Corey, 1763
- corps pur, 1547
- couplage en RMN, 1697
- couple acido-basique, 1581
- couple rédox, 1486, 1610
- courbe de dosage acidobasique, 1815
- courbe de refroidissement de mélange binaire, 1544
- courbe de rosée, 1541, 1542
- courbe d'ébullition, 1541, 1542
- courbe dérivée, 1651
- courbe d'intégration en RMN, 1698
- courbes intensité-potentiel**
 - électrolyse du chlorure de sodium dissous, 1682
 - courbe intensité – potentiel, 1685
 - électrode en plomb, 1617
 - cathode de mercure**, 1682

- amalgame de sodium, 1682
- surtension, 1683
- système lent, 1686
- système rapide, 1685, 1688, 1689
- vague d'oxydation, 1686
- chlorure de sodium, 1471
- coefficient de diffusion, 1685
- plomb, 1616
- polarimétrie, 1699
- production industrielle du chlore, 1682
- réaction électrochimique parasite, 1684
- réaction électrochimique, 1687
- Cram, 1694, 1709
- cristallographie**, 1471
 - composé non-stœchiométrique, 1522
 - non stœchiométrie, 1523
 - coordination 6, 1689
 - structure cubique faces centrées, 1471, 1472
 - structure cristalline, 1471
 - paramètre de maille élémentaire, 1472
 - graphite, 1553
 - hexaèdre, 1471
 - rayon ionique, 1471
 - site interstitiel octaédrique, 1472
 - site octaédrique, 1472
 - énergie réticulaire, 1510
 - variété allotropique, 1472, 1553
 - conducteur ionique solide, 1555
 - nickel, 1502
 - solution solide, 1472, 1553
- cristaux liquides, 1543
- crotonisation, 1808
- cuivre, 1519
- cyanure de potassium, 1758
- cycle de production, 1747
- cycle thermodynamique, 1787
 - graphite, 1553
 - énergie réticulaire, 1510
 - enthalpie libre molaire standard de formation, 1522
- cycles organiques**
 - cyclisation, 1727, 1740, 1767, 1768, 1776, 1783
 - cycloalcane, 1706
 - benzène, 1714, 1729, 1750, 1803
 - exemples
 - cyclohexén-2-one, 1759
 - 1-cyclohexyl-1-iodoéthane, 1708
 - 3-bromocyclohexanone, 1758
- cyclisation, 1727, 1740, 1767, 1768, 1776, 1783
 - bicycle, 1780
- cycloalcane, 1706

cyclohexén-2-one [voir nomenclature des cétones] , 1759

D

DCE, 1548, 1549

débit d'eau passant à travers le réacteur de production d'ammoniac, 1503

débit volumique d'eau, 1507

décarboxylation, 1775, 1785

dédoublable, 1771, 1772, 1796

dégagement d'azote, 1752

dégénérescence de l'ordre, 1486, 1612, 1700, 1745

degré d'oxydation, 1610, 1636

délocalisation électronique, 1781, 1789

demi-équivalence, 1562, 1568, 1578, 1598, 1634, 1636

demi-réaction redox, 1658

densité, 1489

déplacement chimique, 1697

déplacement par ajout, 1515

déprotonation, 1574, 1575, 1764, 1794

dérivé monohalogéné, 1714

dérivés d'acides carboxyliques

nomenclature

2-cyanoacétate d'éthyle, 1779

2-hydroxybutanenitrile, 1757

2-hydroxypropanenitrile, 1793

3-iodopropanoate d'éthyle, 1779

anhydride acétique, 1780, 1783

anhydride succinique, 1717

chlorure d'acétylène, 1731

chlorure de butanoylène, 1729, 1770

acétonitrile, 1548

diméthylformamide, 1738

prop-2-ènonitrile, 1793

monochloracétate de sodium, 1559

estérification, 1480, 1482, 1491, 1717, 1718, 1798, 1803

thermodynamique de la transestérification, 1786

réaction athermique, 1491

saponification, 1775, 1781, 1782

dérivé d'acide carboxylique, 1770

mobilité des hydrogènes en alpha, 1766, 1768, 1780

chlorure de thionyle, 1734, 1770

décarboxylation, 1775, 1785

carboxylate, 1782

carboxyle, 1574

monoester, 1771

monoester méthylique, 1771

nickel de Raney, 1703, 1759, 1760, 1762, 1792

nitrile, 1779, 1782

protonation, 1743, 1754, 1774, 1777, 1778, 1784

urée, 1776

déshydratant, 1543

déshydratation, 1732, 1741, 1764, 1768, 1774
déshydratation intermoléculaire, 1742
déshydrogénation, 1720
déshydrohalogénéation, 1722, 1783
DETA, 1602
détente dans une tuyère, 1504
détermination graphique, 1486
deux équations non linéaires à deux inconnues, 1463
D-glucose, 1479, 1480
diagramme de prédominance, 1583, 1584, 1604, 1625, 1641, 1669, 1679, 1680, 1691, 1813
diagramme de prépondérance, 1604, 1644, 1681
diagramme isobare liquide-vapeur, 1541
diagramme logarithmique, 1581
diagramme pMg-pH, 1648
diagramme potentiel-pH, 1616, 1617, 1621, 1666
diaminoéthane, 1588
diamminecuivre (I), 1804
dianion, 1574, 1575
diastéréoisomère, 1706, 1734, 1735, 1750, 1756, 1762
diastéréoisométrie, 1694, 1765
diastéréoisométrie cyclanique, 1696
diazotique, 1752
diazonium, 1754
dibromostilbène [*voir nomenclature des halogénoalcanes*] , 1722
dicétone éthylénique, 1763
dichloroéthane [*voir nomenclature des halogénoalcanes*] , 1548
dichromate, 1608, 1647
 dichromate de potassium, 1770, 1807
diène conjugué, 1702
diénophile, 1726, 1727
diester, 1771, 1775
diéthylènetriamine, 1602
 DETA, 1602
différence d'électronégativité, 1702
difficulté métallurgique, 1536
diffusion, 1556
dilution, 1600
dilution négligeable, 1591
dimérisation, 1470, 1747
diméthylformamide, 1738
diméthylpropanal [*voir nomenclature des aldéhydes*] , 1796
diméthylsulfoxyde, 1735
dinitrophenylhydrazine, 1804
dinitrophenylhydrazone, 1806
dioxanne, 1716
dioxyde de carbone, 1780
dioxyde de soufre, 1494
dipôles induits, 1471
dismutation, 1530, 1622, 1623, 1682

dissociant, 1725
distance internucléaire, 1470
distillation, 1746
distillation fractionnée, 1543
disulfure d'alkyle, 1702
DNPH, 1804
DO, 1610, 1666, 1668, 1702
domaine de prédominance, 1585, 1617, 1619, 1622, 1633, 1643
données spectroscopiques IR, 1781
dosage, 1560, 1579, 1601, 1612, 1624, 1635, 1636, 1637, 1645, 1646, 1647, 1648, 1649, 1650, 1651, 1654, 1658, 1659, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665, 1714
dosage argentimétrique, 1658
dosage complexométrique, 1589, 1693
dosage des ions chlorure, 1647
dosage potentiométrique, 1654, 1658
dosage quantitatif, 1612, 1613
dosages successifs, 1659, 1660
double équilibre mixte, 1674
double liaison, 1763, 1784
 double liaison conjuguée, 1768
 doublets conjugués, 1789
double liaison conjuguée, 1768
doublet en RMN, 1698
doublets conjugués, 1789
droite de Hendersen, 1563
durcissement, 1553
durée de transit réactionnel, 1503, 1507

E

E, 1703, 1705, 1723, 1802
E.P, 1672
E2, 1701, 1707, 1708, 1722, 1746
eau de pluie, 1627
eau distillée, 1566
eau oxygénée, 1479
EC, 1580, 1672, 1673, 1674, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680
E.D.T.A., 1591, 1648, 1686
effet de pince, 1588
effet inductif donneur, 1789
effet mésomère, 1789
électrode au calomel saturé, 1612
électrode auxiliaire, 1685
électrode d'argent recouverte de sulfure d'argent, 1642
électrode de mercure indicatrice, 1686
 électrode de mercure indicatrice
 d'EDTA, 1687
électrode de mercure indicatrice d'EDTA, 1687
electrode de platine, 1685
électrode de platine, 1555, 1557, 1611
électrode de référence, 1611, 1647, 1685

- électrode de référence au calomel saturé, 1686
- électrode normale à hydrogène, 1613, 1642
- électrode de référence au calomel saturé, 1686
- électrode de verre, 1650
- électrode en plomb, 1617
- électrode indicatrice, 1647, 1658, 1690
- électrode indicatrice de mercure, 1686
- électrode indicatrice inattaquable, 1685
- électrode normale à hydrogène, 1613, 1642
- électrodes**
 - électrode au calomel saturé, 1612
 - électrode auxiliaire, 1685
 - électrode d'argent recouverte de sulfure d'argent, 1642
 - électrode de mercure indicatrice, 1686
 - électrode de mercure indicatrice d'EDTA, 1687
 - électrode de platine, 1685
 - électrode de platine, 1555, 1557, 1611
 - électrode de référence, 1611, 1647, 1685
 - électrode de référence au calomel saturé, 1686
 - anode de titane, 1682
 - électrolyte fort, 1560
 - électrolyse du chlorure de sodium dissous, 1682
 - électrode normale à hydrogène, 1613, 1642
 - électrode indicatrice inattaquable, 1685
 - électrode indicatrice de mercure, 1686
 - électrode indicatrice, 1647, 1658, 1690
 - électrode en plomb, 1617
 - électrode de verre, 1650
- électrolyse du chlorure de sodium dissous, 1682
 - amalgame de sodium, 1682
 - cathode de mercure, 1682
- électrolyte fort, 1560
- électrometallurgie**
 - cyanure de potassium, 1758
 - électrode en plomb, 1617
 - surtension, 1683
 - difficulté métallurgique, 1536
 - minerai, 1465, 1642
 - réaction électrochimique, 1687
 - réaction électrochimique parasite, 1684
- électronégativité, 1700
 - électronégatif, 1467
- électroneutralité, 1570, 1572, 1573, 1626
- électrophile, 1717, 1766
- élimination, 1702, 1703, 1707, 1737, 1761, 1776
 - élimination anti, 1736
 - élimination antiparallèle, 1708
- élimination de la vapeur d'eau qui se condense dans l'eau liquide, 1506
- élimination industrielle de la vapeur d'eau, 1502
- élimination totale du dioxyde de carbone par la soude, 1506

éliminer le monoxyde de carbone, 1502

Ellingham, 1464, 1529, 1537

empois d'amidon, 1611

énantiomères

alcool chiral, 1773

activité optique, 1706, 1771, 1780

isomère R, 1716

énantiomère, 1700, 1702, 1703, 1706, 1709, 1749, 1750, 1756, 1762, 1765, 1771

additivité des propriétés, 1711

S, 1756, 1771

rectus, 1738

pouvoir rotatoire, 1709, 1771

sinister, 1756

énantiométrie, 1700, 1737

mésogyre, 1772

rectus, 1738

enchaînement, 1799

encombrement stérique, 1477, 1717

endothermique, 1512, 1515, 1720, 1721

énergie, 1461, 1697, 1727

énergie cinétique négligeable en génie chimique classique, 1503

énergie d'activation, 1484, 1485

énergie de liaison, 1469, 1743

énergie de liaison covalente, 1469

énergie molaire de liaison, 1468

énergie réticulaire, 1510

énergies des orbitales frontières, 1726

engrais, 1608

énolate, 1766, 1768

énolisation, 1766

enthalpie de formation, 1536

enthalpie molaire de formation, 1496

enthalpie standard de formation, 1462

enthalpie libre, 1497

enthalpie libre d'activation, 1477

enthalpie libre standard d'activation, 1759

enthalpie libre de mélange, 1549

enthalpie libre d'excès, 1549

enthalpie libre molaire standard de formation, 1522

enthalpie libre réactionnelle, 1530

perturbation de l'équilibre, 1492, 1493

enthalpie libre standard de la réaction, 1497, 1513, 1529, 1631, 1743

enthalpie libre standard de formation, 1615

enthalpie standard de la réaction, 1631, 1743

entropie standard de la réaction, 1572, 1631, 1743

entropie standard molaire, 1615

enzyme

enzymes, 1479

glucose oxydase, 1479

équation aux dimensions, 1631
équilibre acidobasique, 1559
équilibre cétoelonique, 1801
équilibre de Boudouard, 1463, 1474, 1511, 1513
équilibre de contrôle, 1671, 1672, 1674, 1676, 1681
équilibre homogène, 1489
équilibre mixte, 1673, 1674, 1676
 équilibre mixte double, 1681
équilibre prépondérant, 1672
équilibre rapide, 1481, 1483
équimolarité, 1561, 1571
 a-a, 1561
érythro, 1772
ester, 1771, 1775
estérification, 1480, 1482, 1491, 1717, 1718, 1798, 1803
estérification intramoléculaire, 1783
étape déterminante, 1477, 1760
étape lente, 1483, 1699, 1707, 1720, 1746, 1798
étape limitante, 1703
état de transition, 1703, 1761, 1782
état d'hybridation, 1470, 1588
état stationnaire, 1478, 479, 1480
éthanal [*voir nomenclature des aldéhydes*] , 1474, 1757, 1804
éthanoate de butyle [*voir nomenclature des esters*] , 1805
éthanoate de sec-butyle [*voir nomenclature des esters*] , 1805
éthanoate de tertibutyle [*voir nomenclature des esters*] , 1805
éthanoate d'éthyle [*voir nomenclature des esters*] , 1771
éthanol [*voir nomenclature des alcools*] , 1717, 1799
 éthanolate, 1723, 1734
 éthoxyde de sodium, 1734
 éthanolate de thallium, 1738
 éthanolate de sodium, 1700, 1776, 1779
éthanolate de sodium [*voir nomenclature des alcoolates*] , 1700, 1776, 1779
éthanolate de thallium [*voir nomenclature des alcoolates*] , 1738
éther
 éther anhydre, 1714, 1726, 1780, 1808
 éther éthylique, 1715
 oxyde d'éthyle et de (méthyl) propyle, 1701
éther-couronne, 1738
éthoxyde de sodium, 1734
éthoxyéthane, 1715, 1716
éthylamine, 1804
éthylène [*voir nomenclature des alcènes*] , 1720, 1803
éthylènediaminetétracétate, 1591
eutectique, 1543, 1544, 1545, 1547
excès, 1482, 1506, 1588, 1599, 1624, 1743, 1747, 1766
excipient, 1566
exothermique, 1465, 1494, 1511, 1620, 1638, 1720, 1747
explosion, 1461, 1804
extraction, 1780, 1810

oxime, 1810
extrapolation, 1480

F

facteur de l'équilibre, 1489, 1490
fer, 1529, 1750
fer carbonyle, 1470
fibres acryliques, 1792
fisher, 1748
flèche d'échange électronique, 1741
fluor, 1467, 1701
fluorure, 1589
fluorure de calcium, 1674
fonction, 1762
fonctions azotées
 nomenclature
 méthylamine, 1559
 méthylammonium, 1559
 propanamine, 1748
 propylammonium, 1749
 amine, 1730, 1748, 1750
 amide, 1730, 1732
 acylation, 1731
 pyridine, 1734, 1736, 1737, 1803
 chlorure de pyridinium, 1805
 ammonium quaternaire, 1805
 nitrosation, 1754
 arylamine, 1754
 diazotique, 1752
 diazonium, 1754
 colorant, 1752, 1753
 méthylation, 1771
force électromotrice de pile, 1611, 1615
forces de Van der Waals, 1471
forme chaise, 1696, 1706, 1707
forme érythro, 1706
forme syn, 1749
 oxime, 1810
forme thréo, 1705, 1706, 1773
formes prédominantes, 1600
formule brute, 1796
formule de Gibbs, 1512, 1520
formules limites de résonance, 1773
four à chaux, 1515, 1516
four de finition, 1744
four de synthèse, 1744
fraction massique, 1559
fraction molaire, 1461, 1489, 1492, 1498, 1546, 1549
 fraction molaire maximale, 1491
Friedel et Crafts, 1731

catalyseur de Friedel et Crafts, 1729, 1731
frontière, 1621, 1622, 1623, 1643, 1645, 1652, 1655, 1656, 1657, 1670

G

galène, 1465
gangue, 1465, 1466
garde, 1761
gaz à l'eau, 1489
gaz de fumée, 1511
gaz inerte, 1515, 1523
gaz parfait, 1461, 1463, 1467, 1475, 1496, 1513, 1522, 1536, 1548, 1620, 1631, 1642
génie chimique, 1500
Gibbs-Helmholtz, 1550, 1721, 1789
glucose oxydase, 1479
glycine, 1804
glycol, 1804
grandeurs molaires partielles, 1548
graphe, 1485, 1491, 1492, 1497, 1498, 1499, 1511, 1512, 1513, 1518, 1519, 1536, 1566, 1574, 1578, 1579, 1581, 1606, 1630, 1633, 1669, 1743, 1746
graphite, 1553
grillage, 1465, 1528

H

halogénoalcanes, 1699
 substitution nucléophile, 1699, 1709, 1710, 1782, 1783
 nucléophile, 1699, 1732, 1746, 1748, 1766, 1781
nomenclature
 1-bromo-1-phenyléthane, 1708
 1-bromo-2-méthylpropane, 1760
 1-bromobutane, 1773, 1804
 1-bromopropane, 1476
 1-chloro-2-isopropylcyclohexane, 1706, 1707
 1-cyclohexyl-1-iodoéthane, 1708
 2-bromo-2-méthylpropane, 1760, 1804
 2-bromo-2-méthylpropane, 1476
 2-bromo-3-méthylbutane, 1701
 2-bromobutane, 1700
 2-bromopropane, 1804
 2-chloropropane, 1716, 1808
 2-iodophenylbutane, 1795
 bromoéthane, 1714, 1735
 bromométhane
 bromostilbène, 1722
 bromure de méthyle, 1702
 monochloroéthane, 1720
 substitution nucléophile, 1699, 1709, 1710, 1782, 1783
 chlorure d'éthyle, 1720
 chlorure de méthyle, 1729

- chlorure de benzyle, 1751
- méthanoate, 1611
- Saitsev, 1701, 1703, 1708
- E2, 1701, 1707, 1708, 1722, 1746
- E, 1703, 1705, 1723
- élimination, 1702, 1703, 1707, 1737, 1761, 1776
- élimination anti, 1736
- élimination antiparallèle, 1708
- phénate, 1710
- polarisabilité, 1700, 1702
- polarisation, 1700
- potasse alcoolique, 1701, 1723, 1773, 1775, 1779
- réactifs nucléophiles, 1477, 1701
- règle de Saitsev, 1736, 1765, 1783
- haut-fourneau, 1522
- hectopascal, 1474
- hélianthine, 1559, 1560, 1650
- hémiacétal, 1778
- hémoglobine, 1518
- heptuplet en RMN, 1698
- hexaèdre, 1471
- hexan-3-ol [*voir nomenclature des alcools*] , 1715
- Hofmann, 1748
- Hollemann, 1750
 - benzène, 1714, 1729, 1750, 1803
- Hückel, 1726
- hydratation, 1782
- hydratation acide, 1732
- hydratation d'un alcyne, 1801
- hydroboration, 1800, 1801
- hydrogénation, 1762
 - Clemmensen, 1800
 - hydrogénation catalytique, 1694, 1732, 1792, 1808
 - zinc amalgamé, 1731
 - nickel de Raney, 1703, 1759, 1760, 1762, 1792
 - hydrure d'aluminium et de lithium, 1808
- hydrure de bore et de sodium** , 1763
- mobilité des hydrogènes en alpha, 1766, 1768, 1780
- hydrogénocarbonate, 1627
- hydrogénosulfate d'isopropyle, 1721
- hydrohénosulfure, 1702
- hydrolyse, 1491, 1564, 1759, 1780
 - hydrolyse acide, 1718, 1733
 - hydrolyse basique, 1795
- hydroxyde**
 - hydroxyde d'argent, 1665, 1748
 - hydroxyde de cadmium, 1666
 - hydroxyde de plomb, 1616
 - hydroxyde de tétraéthylammonium, 1805
- hydroxylamine, 1577

hydroxylation, 1762
hydrure d'aluminium et de lithium, 1808

I

ibuprofen, 1731, 1733
impureté, 1744
indicateur coloré, 1566, 1582, 1587, 1592, 1598, 1634, 1636, 1646, 1647, 1649, 1658
 phénolphtaléine, 1559, 1649
 zone de virage, 1566, 1599, 1634, 1647, 1649, 1650, 1652
 jaune de méthyle, 1636
 hélianthine, 1559, 1560, 1650
 BBT, 1650
 rouge de phénol, 1592
 rouge de méthyle, 1651
 rouge de crésol, 1566, 1568
 pH de virage, 1568
 phénolphtaléine, 1559, 1649
 phtaléine du phénol, 1630
indicateur colorimétrique, 1610
 empois d'amidon, 1611
 noir ériochrome, 1648, 1649, 1656, 1658
indicateur d'oxydoréduction, 1646
 empois d'amidon, 1611
 o-phénantroline ferreuse, 1646
 phénantroline, 1593, 1646
indiscernabilité, 1573, 1577
industrie chimique
 industrie de la parfumerie, 1694
 insecticide, 1777
 ibuprofen, 1731, 1733
 carbaryle, 1777
 synthèse industrielle, 1491
 système diphasé, 1500, 1503, 1504, 1508, 1811
 T.N.T, 1805
 ajouter de l'oxygène à l'air pour optimiser la conversion du méthane en hydrogène, 1506
 adiabatique, 1461
 oxyde de calcium, 1515
 optimisation de la production horaire du réacteur, 1505
 parfum de synthèse, 1762
 chaux, 1626
 calcaire, 1626, 1627
 tétraéthylplomb, 1741
 vapocraquage, 1743
 carbonate de calcium, 1515, 1625
 coke, 1516, 1528
 combustion, 1461, 1796
 combustion isobare, 1463
 coefficient de dissociation, 1490, 1496, 1568
 colorant, 1752, 1753

- rendement, 1703, 1714, 1715, 1773
 - rendement horaire, 1747
- four à chaux, 1515, 1516
- four de finition, 1744
- four de synthèse, 1744
- engrais, 1608
- roche, 1627
- MTBE, 1741, 1744
- optimisation de la production horaire du réacteur, 1505
- procédé industriel, 1743
 - préparation industrielle, 1496
 - processus industriel, 1744
- production industrielle du chlore, 1682
- proportions stœchiométriques, 1492, 1494, 1501
- protocole, 1589
- génie chimique de l'ammoniac**
 - pompes de circulation, 1504
 - recyclage, 1747
 - moyenne pression, 1743, 1747
 - recycler, 1498
 - régime permanent, 1502
 - fraction molaire maximale, 1491
 - ammoniac liquide, 1559
 - ammoniac, 1496
 - éliminer le monoxyde de carbone, 1502
 - élimination industrielle de la vapeur d'eau, 1502
 - barbotage du dioxyde de carbone dans une solution aqueuse de soude, 1502
 - contrôle, 1554, 1591, 1593, 1674
 - risques d'explosion, 1506
 - bilan thermique, 1464
 - circuit en aval du compresseur, 1503
 - durée de transit réactionnel, 1503, 1507
 - catalyseur industriel, 1501
 - génie chimique, 1500
 - pompes de circulation, 1504
 - débit volumique d'eau, 1507
 - débit d'eau passant à travers le réacteur de production d'ammoniac, 1503
 - condenseur, 1503
 - compromis entre cinétique et thermodynamique pour la production d'ammoniac, 1504
 - compresseur, 1503
 - cycle de production, 1747
 - système diphasé, 1500, 1503, 1504, 1508, 1811
 - rendement**, 1703, 1714, 1715, 1773
 - rendement horaire, 1747
- puissance de moteur industriel, 1508
- puissance évacuée par le réfrigérant, 1503
- puissance fournie à la turbine, 1504
- puissance fournie par la pompe, 1504

puissance thermique industrielle, 1508
industrie de la parfumerie, 1694
inflammation, 1461
initiation photonique, 1809
injection, 1516
insaturation, 1763
insecticide, 1777
intégrale coulombienne, 1726
intégrale de résonance, 1726
interface électrode – solution, 1685
interpolation, 1567
inversion de Walden, 1699, 1701, 1703, 1711, 1741, 1782
iodométhane [*voir nomenclature des halogénoalcane*s] , 1742, 1748
iodure de méthylmagnésium, 1726, 1759, 1780
iodure de sodium, 1735
ion cérique, 1612
ion ponté, 1737
ions mercuriques, 1804
isobare, 1462
isobutène [*voir nomenclature des alcène*s] , 1743, 1747
isocyanate de méthyle, 1777
isoler, 1498
isomère prédominant, 1731
isomère R, 1716
isomère rectus, 1715
isomères optiques, 1700
isomérisation, 1700, 1799
isoprène, 1703, 1702, 1726, 1727
isopropylcyclohex-1-ène, 1708
isotactique, 1804
isotope radioactif, 1709

J

jaune de méthyle, 1636

K

Kohlrausch, 1742
krypton, 1471
mobilité des hydrogènes en alpha, 1766, 1768, 1780

L

liaison, 1467, 1469, 1605, 1671, 1695, 1749, 1775,
liaison covalente, 1469
liaison covalente dative, 1605
liaison équatoriale, 1736
liaison hydrogène, 1471, 1749
liaison hydrogène intramoléculaire, 1775

liaisons

- liaison hydrogène intramoléculaire, 1775
- liaison covalente, 1469
- liaison hydrogène, 1471, 1749
 - dimérisation, 1470, 1747
- liaison, 1467, 1695
- énergie de liaison, 1469, 1743
- énergie de liaison covalente, 1469
- énergie molaire de liaison, 1468
- énergie réticulaire, 1510
- énergies des orbitales frontières, 1726
- enthalpie de formation, 1536
- enthalpie molaire de formation, 1496
- enthalpie standard de la réaction, 1631, 1743
- entropie standard de la réaction, 1572, 1631, 1743
- entropie standard molaire, 1615
- règle de l'octet, 1716
- recouvrement, 1728
- monoxyde de carbone, 1463, 1474
- théorème de Fukui, 1727
- orbitales frontières, 1726, 1728
- orbitale p, 1728
- nombre d'atomes dans une molécule, 1467
- polarisabilité, 1700, 1702
- polarisation, 1700
- règle de stabilité de Sigdwick, 1471
- ligand, 1588, 1599, 1601
 - DETA, 1602
 - E.D.T.A., 1591, 1648, 1686
 - thiocyanate, 1589
 - thiosulfate, 1477, 1714
- ligand bidentate, 1588
- like, 1723, 1772, 1749
- limitation de courant, 1685
- liquidus, 1547
- loi d'action de masse, 1671
- loi de Biot, 1709
- loi de Henry, 1502, 1518, 1673, 1674
- loi de modération, 1501
- loi de Van t'Hoff, 1510
- lois de déplacement des équilibres chimiques**, 1491, 1498, 1515
 - air, 1462, 1463, 1494, 1501, 1523, 1621, 1623
 - déprotonation, 1574, 1575, 1764, 1794
 - déplacement par ajout, 1515
 - loi de Van t'Hoff, 1510
- London, 1471

M

magnésien, 1702
magnésium, 1714
majoritaire, 1622, 1625, 1642, 1645, 1666, 1717, 1729, 1736, 1737, 1742, 1744, 1745, 1758
malonate de diéthyle, 1774, 1776
diester, 1771

Matériel

agitateur, 1761
bécher, 1627, 1753
banc Kofler, 1806
ampoule à brome, 1714
tricol, 1714, 1808

mathématiques

convergence d'une suite, 1543
suite de rapports égaux, 1665
détermination graphique, 1486
deux équations non linéaires à deux inconnues, 1463
terme correctif, 1665
parabole, 1526
courbe, 1522, 1525, 1562, 1565, 1566, 1568, 1570, 1576, 1581, 1582, 1583, 1587, 1592, 1593, 1612, 1613, 1616, 1618, 1635, 1638, 1643, 1645, 1647, 1653, 1660, 1662, 1664, 1667, 1669, 1670, 1671, 1683, 1685
sans approximation, 1572, 1573, 1667
résolution numérique, 1463, 1494
représenter, 1491, 1621
optimisation, 1528
ordonnée à l'origine, 1488
pente, 1488
point d'inflexion, 1651
précision, 1592, 1599, 1616, 1617, 1636

matières plastiques

aminopolycarboxylate, 1591
néopentylglycol, 1702, 1791
caoutchouc, 1794, 1799
acrylate d'éthyle, 1726, 1727
nylon, 1798
Ziegler-Natta, 1803
diène conjugué, 1702
diénophile, 1726, 1727
durcissement, 1553
énergies des orbitales frontières, 1726
prop-2-ènonitrile, 1793
phase d'initiation, 1803
polyamide-6,6, 1799
photon, 1797, 1804
polyacrylonitrile, 1792, 1793
polycondensation, 1791
polyester, 1702, 1791
polyisobutène, 1793

polymérisation, 1791
polypropène, 1803
protonation, 1743, 1754, 1774, 1777, 1778, 1784
réaction en chaîne, 1793, 1803

mécanismes

catalyse, 1703, 1478, 1479, 1483, 1491, 1498, 1714, 1718, 1803
mécanisme, 1482, 1483, 1749, 1760, 1762, 1784
mécanisme concerté, 1775
mécanisme hétérolytique, 1797
mécanisme homolytique, 1797
 mécanisme radicalaire, 1770
 rupture homolytique, 1770
mécanisme radicalaire, 1770
 propagation, 1793, 1809
 bromation du méthylpropane, 1760
 mécanisme homolytique, 1797
 rupture, 1810
complexe polarisé, 1750, 1805
adduit, 1720, 1797, 1808
complexe activé, 1477, 1479, 1711
stéréospécifique, 1722, 1724
stéréosélectivité, 1757
stabilisation par mésomérie, 1755, 1774, 1776, 1778, 1781, 1795
régiosélectivité, 1708, 1726, 1728
profil réactionnel, 1477, 1478
effet inductif donneur, 1789
bimolécularité, 1699, 1707
bromation du méthylpropane, 1760
carbanion, 1716, 1773, 1774, 1779, 1782
majoritaire, 1622, 1625, 1642, 1645, 1666, 1717, 1729, 1736, 1737, 1742, 1744, 1745, 1758
constante de Michaelis, 1479, 1480
bromation du méthylpropane, 1760
indiscernabilité, 1573, 1577
molécularité, 1760
schéma réactionnel, 1808
encombrement stérique, 1477, 1717
enthalpie libre d'activation, 1477
équilibre rapide, 1481, 1483
recombinaison de radicaux, 1770
minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783
polarisabilité, 1700, 1702
polarisation, 1700
pouvoir rotatoire, 1709, 1771
principe de Bodenstein, 1478
principe de l'état stationnaire, 1477, 1744
principe de Hammond, 1761
profil réactionnel, 1477, 1478
protonation, 1743, 1754, 1774, 1777, 1778, 1784

- racémisation, 1712
- racémique, 1703, 1702, 1725, 1757, 1758, 1772, 1785, 1791, 1795
- racémisation apparente, 1710, 1712
- réactions concurrentes, 1759
- mélange binaire, 1541
- mélange de deux acides faibles, 1568
- mélange équimolaire, 1491, 1565, 1593, 1611
- mélange eutectique, 1547
- mélange stœchiométrique, 1491
- mélanges binaires**, 1544
 - mélange binaire, 1541
 - liquidus, 1547
 - azéotropie, 1541, 1542
 - cristaux liquides, 1543
 - composés interstitiels fer carbone, 1553
 - mélange eutectique, 1547
 - théorème des moments, 1542
 - composé défini, 1546
 - corps pur, 1547
 - courbe de refroidissement de mélange, 1544
 - courbe de rosée, 1541, 1542
 - courbe d'ébullition, 1541, 1542
 - grandeurs molaires partielles, 1548
 - volume partiel, 1621
 - colonne à distiller, 1744
 - colonne à plateaux, 1543
 - saturation, 1673, 1674
 - règle des moments, 1547
 - diagramme isobare liquide-vapeur, 1541
 - enthalpie libre de mélange, 1549
 - enthalpie libre d'excès, 1549
 - non miscibilité, 1517, 1523, 1530, 1547
 - POM, 1549
 - solidus, 1547
 - solution régulière, 1549
 - solution solide, 1472, 1553
- menthol, 1734, 1735
- mésogyre, 1772
- mésomérie**, 1725, 1748, 1752, 1755, 1762, 1763, 1764, 1766, 1768, 1777
 - stabilisation par mésomérie, 1755, 1774, 1776, 1778, 1781, 1795
 - conjugaison, 1748
 - conjugaison de doublets, 1781
 - benzène, 1714, 1729, 1750, 1803
 - délocalisation électronique, 1781, 1789
 - effet mésomère, 1789
 - formules limites de résonance, 1773
- mesures de constante d'acidité, 1630
- métallurgie**
 - pyrométallurgie**
 - équilibre de Boudouard, 1511, 1513

- composés interstitiels fer carbone, 1553
- aluminium, 1536
- carbure d'aluminium, 1537, 1804
- haut-fourneau, 1522
- grillage, 1465, 1528
- roche, 1627
- mineral, 1465, 1642
- métallurgie, 1522, 1528, 1529
- cémentation, 1553
- alliages ferreux, 1553
- zinc, 1528, 1642, 1722
- Ellingham, 1464, 1500, 1529, 1537
- difficulté métallurgique, 1536
- monoxyde de carbone, 1463, 1474
- moyenne pression, 1743, 1747
- oxyde ferreux, 1522, 1530
- oxyde magnétique, 1530, 1531
- phase liquide, 1489
- métamononitrotoluène, 1730
- métanitrotoluène, 1748
- métatoluidine, 1730
- métaux**
 - cadmium, 1666
 - cuivre, 1519
 - palladium, 1769
 - cémentation, 1553
 - cérium, 1546
 - césium, 1467
 - zinc, 1528, 1642, 1722
 - béryllium, 1470
 - magnésium, 1714
 - nickel, 1502
 - plomb, 1616
 - potassium, 1735
- méthanal, 1702, 1716, 1791
- méthane, 1474, 1803
 - carbure d'aluminium, 1537, 1804
- méthanoate, 1611
- méthanol [*voir nomenclature des alcools*] , 1491, 1742, 1743, 1773
- méthode de Clemmensen, 1731
- méthode des tangentes, 1578
- méthode numérique, 1464
- méthylamine, 1559
- méthylammonium, 1559
- méthylation, 1771
- méthylpropane, 1760
- méthylpropylène [*voir nomenclature des alcènes*] , 1793
- mineral, 1465, 1642
- minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783
- miroir d'argent, 1716

Mohr, 1647
molécularité, 1760
molécule, 1470
moment dipolaire, 1470
moment dipolaire induit, 1702
moment dipolaire total, 1702
monochloracétate de sodium, 1559
monochloroéthane, 1720
monoester, 1771
monoester méthylique, 1771
mononitration, 1729
monoxyde d'azote, 1620
monoxyde de carbone, 1463, 1474
montage à 3 électrodes, 1685
moyenne pression, 1743, 1747
MTBE, 1741, 1744

N

naphtol, 1753, 1754, 1777
néopentylglycol, 1702, 1791
Nernst, 1601, 1610, 1621, 1652, 1659, 1688
neutralisation, 1568, 1579
nickel, 1502
nickel de Raney, 1703, 1759, 1760, 1762, 1792
nitrate d'argent, 1635
nitrate de cadmium, 1666
nitrate de plomb, 1635
nitrile, 1779, 1782
nitrite de sodium, 1621, 1753
nitrosamine, 1752
nitrosation, 1754
 colorant, 1752, 1753
 dégagement d'azote, 1752
 nitrosamine, 1752
 nitrite de sodium, 1621, 1753
noir ériochrome, 1648, 1649, 1656, 1658
nombre d'atomes dans une molécule, 1467
nomenclature, 1715, 1796
non dédoublable, 1772
non miscibilité, 1517, 1523, 1530, 1547
non stœchiométrie, 1523
NTA, 1594
nucléophile, 1699, 1732, 1746, 1748, 1754, 1766, 1778, 1781
nucléophilie de l'alcool, 1744, 1778, 1784
nucléophilie de l'azote, 1748, 1754, 1778
numéro atomique, 1467, 1588, 1637, 1666
nylon, 1798

O

octaédrique, 1472
odeur de lilas, 1694
o-phénantroline ferreuse, 1646
optimisation, 1505, 1528
optimisation de la production horaire du réacteur, 1505
orbitale p, 1728
orbitales frontières, 1726
 recouvrement, 1728
ordonnée à l'origine, 1488
ordre de grandeur, 1488, 1498, 1682
ordre de la réaction, 1474, 1709
 ordre 3, 1808
 ordre zéro, 1487
 ordre global apparent, 1485
 ordre partiel, 1476, 1481, 1484, 1485, 1611, 1711, 1712
ordre de priorité, 1696, 1700, 1702, 1711, 1723, 1735, 1741, 1809
organocuprate, 1763
organomagnésien, 1714
organométallique
 bromure de tertibutylmagnésium, 1761
 bromure d'éthylmagnésium, 1714
 bromure d'isopropylmagnésium, 1717, 1796
 bromure d'isopropylzinc, 1717
 chlorure d'isopropylmagnésium, 1716, 1808
 iodure de méthylmagnésium, 1726, 1759, 1780
 thermostat, 1714
organocuprate lithué, 1763
organomagnésien, 1714
organozincique, 1717, 1718
tertibutyllithium, 1762
tétraéthylplomb, 1741
carbanion, 1716, 1773, 1774, 1779, 1782
alcyne vrai, 1769
déshydratant, 1543
organozincique, 1717, 1718
ortho, 1717
orthomononitrotoluène, 1730
orthotoluidine, 1730
oxime, 1811
 oximate, 1811
oxydant, 1622, 1669
oxydation de l'éthylène, 1803
oxydation organique, 1810
 oxydoréduction organique, 1770
oxyde d'éthyle et de méthylpropyle, 1701
oxyde de calcium, 1515
oxyde de triphénylphosphine, 1762
oxyde ferreux, 1530
oxyde magnétique, 1530, 1531

oxydoréduction, 1610, 1646

oxydoréduction organique, 1579, 1770

dioxyde de carbone, 1780

acide formique, 1568, 1786

oxydation de l'éthylène, 1803

oxydation organique, 1810

pAg, 1662, 1664, 1665

permanganate de potassium, 1621, 1729, 1803

peroxyde d'hydrogène, 1610

phénantroline, 1593, 1646

pile, 1614

potentiel de la solution, 1613

potentiel d'électrode, 1642, 1643

potentiel normal, 1594, 1617, 1621

thiosulfate, 1477, 1714

tétrathionate, 1714

couple rédox, 1486, 1610

eau oxygénée, 1479

pCd, 1593

pMg, 1648, 1649

pont salin, 1612

zircon, 1555

bromate, 1483, 1486

chromate, 1608, 1647

ion cérique, 1612

argentimétrie, 1660

saut de potentiel, 1614

formes prédominantes, 1600

diagramme potentiel-pH, 1616, 1617, 1621, 1666

dichromate, 1608, 1647

dichromate de potassium, 1770, 1807

dilution négligeable, 1591

dilution, 1600

E.P, 1672

EC, 1580, 1672, 1673, 1674, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680

équilibre de contrôle, 1671, 1672, 1674, 1676, 1681

équilibre prépondérant, 1672

équilibre mixte double, 1681

équilibre mixte, 1673, 1674, 1676

RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600, 1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668, 1678, 1692

RPQ, 1578, 1657

régionnement, 1519, 1520, 1523, 1525, 1526, 1530, 1533, 1537, 1539, 1633, 1657

réducteur, 1622

minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783

monoxyde d'azote, 1620

Nernst, 1601, 1610, 1621, 1652, 1659, 1688

hydroxylamine, 1577
nitrite de sodium, 1621, 1753
oxydant, 1622, 1669
oxygène dissous, 1518
peroxyde d'hydrogène, 1610
pFe(III), 1593
pH, 1559, 1561, 1562, 1564, 1568, 1608, 1625, 1626, 1634, 1637, 1640, 1642, 1789, 1804, 1806, 1811, 1813
pile, 1614
pile de concentration, 1557
pont salin, 1612
plomb, 1616
point d'inflexion, 1651
potassium, 1735
potentiels normaux, 1484
potentiels chimiques standards, 1554
potentiel normal de couple rédox, 1612
potentiel d'électrode, 1642, 1643
potentiel de la solution, 1613
potentiel chimique, 1485, 1497, 1499, 1517, 1531, 1532, 1549, 1552, 1553, 1556, 1623
réaction prépondérante, 1627
solution amphotère, 1815
solution sulfonitrique, 1729
solution titrante, 1658
sonde à oxygène, 1554
soufre dissous, 1616, 1617
voltmètre, 1613
oxydoréduction organique, 1770
 anhydride chromique, 1579
oxygène dissous, 1518
oxyhémoglobine, 1518
ozonolyse, 1800

P

pAg, 1662, 1664, 1665
palladium, 1769
palladium de Lindlar, 1769
para, 1717
parabole, 1526
paramètre de maille élémentaire, 1472
paramètre intensif, 1512, 1516, 1525, 1542
parfum de synthèse, 1762
parfumerie, 1694
 parfum de synthèse, 1762
 odeur de lilas, 1694
pCd, 1593
pente, 1488
permanganate de potassium, 1621, 1729, 1803
peroxyde d'hydrogène, 1610

peroxyde, 1703, 1770
perturbation de l'équilibre, 1492, 1493
pFe(III, 1593
pH, 1559, 1561, 1562, 1564, 1568, 1608, 1625, 1626, 1634, 1637, 1640, 1642, 1789, 1804, 1806, 1811, 1813
pH de virage, 1568
phase d'initiation, 1803
phase liquide, 1489
phénantroline, 1593, 1630, 1646
phénate, 1710
phénol, 1751
phénolphtaléine, 1559, 1649
phénylméthanal [*voir nomenclature des aldéhydes*] , 1757
pH-mètre, 1566
phosphate, 1666
phosphate de cadmium, 1666
phosphore, 1467, 1670
photon, 1797, 1804
pile, 1614
 pile de concentration., 1555, 1557
 pont salin, 1612
pile de concentration, 1557
 pile de concentration., 1555
pK_A, 1562, 1566, 1789
plomb, 1616
pMg, 1648, 1649
point anguleux, 1592, 1664, 1669, 1670, 1671
point d'équivalence, 1564, 1592, 1593, 1597, 1600, 1630, 1647, 1650
 point équivalent, 1568, 1658
point d'inflexion, 1651
point isoélectrique, 1804, 1806
polarimétrie, 1699
polarisabilité, 1700, 1702
polarisation, 1700
polarographie, 1685, 1693
polyamide, 1799
polyacrylonitrile, 1792, 1793
polycondensation, 1791
polyester, 1702, 1791
polyisobutène, 1793
polymérisation, 1791
polypropène, 1803
POM, 1549
pompes de circulation, 1504
pont disulfure, 1703
pont salin, 1612
position axiale, 1696, 1706, 1707
position équatoriale, 1694, 1696, 1706
potasse alcoolique, 1701, 1723, 1773, 1775, 1779
potassium, 1735

- potentiel chimique, 1485, 1497, 1499, 1517, 1531, 1532, 1549, 1552, 1553, 1556, 1623
- potentiel de la solution, 1613
- potentiel d'électrode, 1642, 1643
- potentiel normal de couple rédox, 1484, 1612, 1617, 1620, 1621
 - potentiel standard apparent, 1652
- potentiels chimiques standards, 1554
- pouvoir rotatoire, 1709, 1711, 1771
- précipitation**
 - précipitation différentielle, 1619, 1620
 - précipitation, 1618
 - produit de solubilité, 1589, 1594, 1608, 1616, 1625, 1626, 1630, 1640, 1641, 1648, 1660, 1661, 1672
 - chromate d'argent, 1647, 1654
 - chlorure de plomb, 1635
 - chlorure d'argent, 1635
 - Mohr, 1647
 - argentimétrie, 1660
 - E.P, 1672
 - EC, 1580, 1672, 1673, 1674, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680
 - équilibre de contrôle, 1671, 1672, 1674, 1676, 1681
 - équilibre prépondérant, 1672
 - équilibre mixte double, 1681
 - RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600, 1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668, 1678, 1692
 - RPQ, 1578, 1657
 - minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783
 - nitrate d'argent, 1635
 - phosphate de cadmium, 1666
 - point anguleux, 1592, 1664, 1669, 1670, 1671
 - point d'équivalence, 1564, 1592, 1593, 1597, 1600, 1630, 1647, 1650
 - point d'inflexion, 1651
 - réaction prépondérante, 1627
 - solubilité, 1548, 1589, 1608, 1616, 1617, 1627, 1630, 1635, 1640, 1642, 1643, 1644, 1645, 1658, 1660, 1661, 1665, 1671, 1672, 1674
 - solution amphotère, 1815
 - solution saturée, 1549
 - solution titrante, 1658
- précision, 1592, 1599, 1616, 1617, 1636
- précurseur, 1762
- préparation des réactifs, 1501
- préparation industrielle, 1496
- principe de l'état stationnaire, 1477, 1478, 1744
- principe de Bodenstein, 1478
- principe de Hammond, 1761
- procédé industriel, 1743
 - production industrielle du chlore, 1682
 - processus industriel, 1744
- produit de solubilité, 1589, 1594, 1608, 1616, 1625, 1626, 1630, 1640, 1641, 1648,

1660, 1661, 1672
produit ionique, 1616, 1667, 1671
produits pharmaceutiques
 antergan, 1750, 1751
 antihistaminique, 1750
 anti-inflammatoire, 1731
 antipyrétique, 1731
 analgésique, 1731
 vitascorbol, 1566
 ibuprofen, 1731, 1733
 médicament, 1731, 1776
profil réactionnel, 1477, 1478
prop-2-ènonitrile, 1793
propagation, 1793, 1794, 1809
propagation concurrente, 1794
propan-2-ol [*voir nomenclature des alcools*] , 1721
propanal, 1756
propanamine, 1748
propane, 1720, 1721
propanone, 1796
 acétone, 1796
propène [*voir nomenclature des alcènes*] , 1716, 1721, 1800
propyne [*voir nomenclature des alcynes*] , 1801
proportions stœchiométriques, 1492, 1494, 1501
propriété physicochimique, 1556
propylammonium, 1749
protection de fonction, 1730, 1774, 1808
protocole, 1589
protonation, 1743, 1754, 1774, 1777, 1778, 1784
puissance de moteur industriel, 1508
puissance évacuée par le réfrigérant, 1503
puissance fournie à la turbine, 1504
puissance fournie par la pompe, 1504
puissance thermique industrielle, 1508
pyridine, 1734, 1736, 1737, 1803

Q

quadruplet en RMN, 1697

R

R, 1694, 1701, 1702, 1709, 1741, 1749, 1756, 1758, 1771, 1809
RR, 1750
R.P, 1561, 1599, 1600, 1788
R.P.Q, 1599
racémique, 1703, 1702, 1725, 1757, 1758, 1772, 1785, 1791, 1795
racémisation, 1712
racémisation apparente, 1710, 1712
radical secondaire, 1770
rayon ionique, 1471

réacteur

- réacteur réel, 1501
- réacteur à volume constant, 1513
- réacteur, 1475, 1503, 1511, 1714, 1744
- thermodynamique du réacteur, 1503
- débit d'eau passant à travers le réacteur de production d'ammoniac, 1503
- optimisation de la production horaire du réacteur, 1505
- isobare, 1462
- régime permanent, 1502
- optimisation de la production horaire du réacteur, 1505
- volume constant, 1474

réactif de Tollens, 1716

réactifs nucléophiles, 1477, 1701

réaction athermique, 1491

réaction auto-entretenu, 1465, 1466

réaction électrochimique, 1687

réaction électrochimique parasite, 1684

réaction en chaîne, 1793, 1803

réaction gazeuse, 1474

réaction parasite, 1538, 1743, 1780, 1785

réaction prépondérante, 1627

réactions concurrentes, 1759

réactions radicalaires

- initiation, 1793

 - initiation photonique, 1809

- recombinaison de radicaux, 1770

- propagation, 1793, 1809

- propagation concurrente, 1794

- peroxyde d'hydrogène, 1610

- peroxyde, 1770

- phase d'initiation, 1803

- photon, 1797, 1804

- radical secondaire, 1770

- réaction en chaîne, 1793, 1803

- rupture, 1810

recombinaison de radicaux, 1770

recouvrement, 1728

rectus, 1738

recyclage, 1747

recycler, 1498

réducteur, 1622

régime permanent, 1502

régionnement, 1519, 1520, 1523, 1525, 1526, 1530, 1533, 1537, 1539, 1633, 1657

régiosélectivité, 1708, 1726, 1728

règle de Hollemann, 1754

règle de Klechkovski, 1467

règle de l'octet, 1716

règle de Markovnikov, 1703, 1803, 1808, 1810

règle de Saitsev, 1736, 1765, 1783

règle de stabilité de Sigdwick, 1471

règle des moments, 1547
règle des phases, 1511
règles de priorité, 1765
règles d'Hollemann, 1730
relation de Gibbs-Duhem, 1551
rendement, 1703, 1714, 1715, 1773, 1811
rendement de l'extraction, 1811
rendement horaire, 1747
représentation de Fisher, 1747
représentation de Newman, 1706, 1722
résolution numérique, 1494
résolution numérique informatique, 1463*
rétrosynthèse, 1801
risques d'explosion, 1506
Robinson, 1768
roche, 1627
rouge de crésol, 1566, 1568
rouge de méthyle, 1651
rouge de phénol, 1592
rouge para, 1753
RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600, 1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668, 1678, 1692
RPQ, 1578, 1657
RR, 1757, 1772
RS, 1750
rupture de réaction radicalaire, 1810
rupture homolytique, 1770

S

S, 1756, 1771
S S, 1750
Saitsev, 1701, 1703, 1708
Sandmeyer, 1751, 1801
sans approximation, 1572, 1573, 1667
saponification, 1775, 1781, 1782
Sarett, 1715
saturation, 1673, 1674
saut, 1612, 1649, 1650, 1651, 1815
saut de potentiel, 1614, 1691, 1693
schéma réactionnel, 1808
séparation, 1746, 1747
 volume de solvant pour une extraction, 1811
 barbotage du dioxyde de carbone dans une solution aqueuse de soude, 1502
 rendement de l'extraction, 1811
SET, 1585
seuil, 1574, 1576, 1650
silicium, 1467
singulet en RMN, 1695, 1697
sinister, 1756
site cellulaire, 1777, 1779

site interstitiel, 1472
site octaédrique, 1472
SN, 1476

RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600,
1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668,
1678, 1692

SN1, 1477, 1712, 1725, 1746, 1760, 1766, 1795

SN2, 1477, 1699, 1701, 1703, 1711, 1738, 1741, 1775, 1782

solidus, 1547

solubilité, 1548, 1589, 1608, 1616, 1617, 1627, 1630, 1635, 1640, 1642, 1643, 1644,
1645, 1658, 1660, 1661, 1665, 1671, 1672, 1674

soluté, 1548

solutions

solution amphotère, 1815

solution benzénique d'iode, 1714

solution chloroformique, 1811

solution idéale, 1550

solution non diluée, 1491

solution réactionnelle, 1714

solution régulière, 1549

solution saturée, 1549

solution saturée de H₂S, 1640

solution solide, 1472, 1553

solution sulfonitrique, 1729

solution tampon, 1560, 1561, 1566, 1568, 1571, 1577, 1578, 1579, 1593, 1598, 1600,
1638, 1648, 1657, 1671

solution tamponnée, 1486, 1642

solution titrante, 1658

solutions aqueuses

réaction prépondérante, 1627

EC, 1580, 1672, 1673, 1674, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680

dismutation, 1530, 1622, 1623, 1682

DO, 1610

double équilibre mixte, 1674

dosage quantitatif, 1612, 1613

dosages successifs, 1659, 1660

dosage potentiométrique, 1654, 1658

dosage des ions chlorure, 1647

dosage complexométrique, 1589, 1693

dosage argentimétrique, 1658

dosage, 1560, 1579, 1601, 1612, 1624, 1635, 1636, 1637, 1645, 1646, 1647,
1648, 1649, 1650, 1651, 1654, 1658, 1659, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665,
1714

coordination 6, 1689

constante d'instabilité, 1672

solution titrante, 1658

domaine de prédominance, 1585, 1617, 1619, 1622, 1633, 1643

électroneutralité, 1570, 1572, 1573, 1581, 1584, 1626

électrolyse du chlorure de sodium dissous, 1682

diagramme logarithmique, 1581

diagramme de prépondérance, 1604, 1644, 1681
diagramme de prédominance, 1583, 1584, 1604, 1625, 1641, 1669, 1679, 1680, 1691, 1813
diagramme pMg-pH, 1648
diagramme potentiel-pH, 1616, 1617, 1621, 1666
diagramme potentiel-pH, 1616, 1617, 1621, 1666
diaminoéthane, 1588
diamminecuivre (I), 1804
DETA, 1602
zone de virage, 1566, 1599, 1634, 1647, 1649, 1650, 1652
zone de prépondérance, 1629
minoritaire, 1571, 1609, 1612, 1622, 1629, 1644, 1670, 1672, 1742, 1745, 1780, 1783
soufre dissous, 1616, 1617
soluté, 1548
précision, 1592, 1599, 1616, 1617, 1636
point d'inflexion, 1651
point d'équivalence, 1564, 1592, 1593, 1597, 1600, 1630, 1647, 1650
point anguleux, 1592, 1664, 1669, 1670, 1671
formes prédominantes, 1600
ultra majoritaire, 1590, 1690
RPQ, 1578, 1657
RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600, 1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668, 1678, 1692
SET, 1585
couple rédox, 1486, 1610
couple acido-basique, 1581
solution aqueuse, 1559, 1610, 1626, 1630, 1631, 1634, 1637, 1640, 1642, 1647, 1648, 1658, 1666, 1668, 1714
demi-équivalence, 1562, 1568, 1578, 1598, 1634, 1636
degré d'oxydation, 1610, 1636
solution amphotère, 1815
demi-réaction redox, 1658
cyanure de potassium, 1758
courbe intensité – potentiel, 1685
courbe dérivée, 1651
courbe de dosage acidobasique, 1815
courbe, 1562, 1565, 1566, 1568, 1570, 1576, 1581, 1582, 1583, 1587, 1592, 1593, 1612, 1613, 1616, 1618, 1635, 1638, 1643, 1645, 1647, 1653, 1660, 1662, 1664, 1667, 1669, 1670, 1671, 1683, 1685
couple rédox, 1486, 1610
couple acido-basique, 1581
analyse qualitative, 1639
argentimétrie, 1660
dilution, 1600
dilution négligeable, 1591
E.P, 1672
eau distillée, 1566
équilibre de contrôle, 1671, 1672, 1674, 1676, 1681

équilibre mixte, 1673, 1674, 1676
RP, 1560, 1562, 1569, 1570, 1580, 1584, 1585, 1586, 1598, 1599, 1600,
1609, 1619, 1627, 1629, 1632, 1633, 1635, 1638, 1659, 1661, 1665, 1668,
1678, 1692
RPQ, 1578, 1657
nitrate d'argent, 1635
nitrate de cadmium, 1666
nitrate de plomb, 1635
nitrosation, 1754
pH, 1559, 1561, 1562, 1564, 1568, 1608, 1625, 1626, 1634, 1637, 1640,
1642, 1789, 1804, 1806, 1811, 1813
travaux pratiques de dosages, 1645
solvant, 1548, 1552, 1671, 1672, 1705, 1715, 1716, 1735, 1738, 1746, 1759, 1761
 solvant polaire, 1710, 1761
 solvant polaire aprotique, 1735
 solvant non miscible à l'eau, 1811
 solvant aprotique, 1742
 solvant anhydre, 1714
 solvatation, 1510, 1749
 solvatant, 1725
solvants non aqueux
 solvatation, 1510, 1749
 solvatant, 1725
 ammoniac liquide, 1559
 dioxanne, 1716
 diméthylsulfoxyde, 1735
 tétrahydrofuranne, 1716
 solution benzénique, 1714
 pyridine, 1734, 1736, 1737, 1803
 tétrachlorométhane, 1480, 1735, 1759
 chloroforme, 1811
 diméthylformamide, 1738
 diméthylsulfoxyde, 1735
 éthanol
 potasse alcoolique, 1701, 1723, 1773, 1775, 1779
 pyridine, 1734, 1736, 1737, 1803
 soluté, 1548
 solvant, 1548, 1552, 1671, 1672, 1705, 1715, 1716, 1735, 1738, 1746, 1759,
 1761
 solvant anhydre, 1714
 solvant aprotique, 1742
sonde à oxygène, 1554
soufre dissous, 1616, 1617
spectroscopie de R.M.N., 1695
 déplacement chimique, 1697
 structure mal résolue en RMN, 1698
 T.M.S, 1697
 couplage en RMN, 1697
 courbe d'intégration en RMN, 1698
 heptuplet en RMN, 1698

- quadruplet en RMN, 1697
- singulet en RMN, 1695, 1697
- spectroscopie IR, 1694, 1780
 - absorption IR, 1697, 1784
- spectroscopies**
 - spectroscopie IR, 1694, 1780
 - spectroscopie de R.M.N., 1695
- SR, 1750
- SS, 1757, 1772
- stabilisation par mésomérie, 1755, 1774, 1776, 1778, 1781, 1795
- stabilité comparée de complexes, 1589
- stéréochimie**
 - D-glucose, 1479, 1480
 - stéréoisomérisation éthylénique**, 1723
 - stéréoisomère Z, 1703, 1705, 1723, 1724, 1763, 1765
 - stéréoisomère E, 1703, 1705, 1723
 - stéréoisomère Z, 1703, 1705, 1723, 1724, 1763, 1765
 - stéréoisomère E, 1703, 1705, 1723
 - stéréoisomérisation, 1701, 1705, 1722, 1734, 1735, 1760
 - stéréochimie, 1694, 1705
 - configuration**, 1762
 - configuration absolue, 1709, 1741, 1748
 - configuration R, 1709, 1710
 - configuration rectus, 1722
 - conformation, 1694, 1701, 1799
 - conformère, 1734
 - conformation décalée, 1702, 1707, 1722
 - anti-périplanaire, 1722
 - Cram, 1694, 1709
 - diastéréoisomère, 1706, 1734, 1735, 1750, 1756, 1762
 - composés à 2 carbones asymétriques
 - S, 1756, 1771
 - règles de priorité, 1765
 - représentation de Newman, 1706, 1722
 - vitesse de variation du pouvoir
 - rotatoire, 1710
 - forme syn, 1749
 - E, 1703, 1705, 1723
 - rectus, 1738
 - indédouable, 1772
 - non dédoublable, 1772
 - pouvoir rotatoire, 1709, 1771
 - sinister, 1756
- stéréochimie cyclanique**
 - configuration axiale, 1736
 - cycloalcane, 1706
 - configuration axiale, 1736
 - conformation du cycle, 1734
 - conformation chaise, 1736
 - diastéréoisomérisation cyclanique, 1696

menthol, 1734, 1735
 position axiale, 1696, 1706, 1707
 position équatoriale, 1694, 1696, 1706
 rectus, 1738
 sinister, 1756
 stéréoisomère E [*voir nomenclature des alcènes*] , 1703, 1705, 1723
 stéréoisomère Z [*voir nomenclature des alcènes*] , 1703, 1705, 1723, 1724, 1763, 1765
 stéréoisomérisation éthylénique [*voir nomenclature des alcènes*]. , 1723
 stéréosélectivité, 1757
 stéréospécifique, 1722, 1724
 structure cristalline, 1471
 structure cubique faces centrées, 1471, 1472
 structure cubique faces centrées, 1471, 1472
 structure électronique, 1467, 1666
 structure géométrique, 1470, 1588
 structure mal résolue en RMN, 1698
 substitution nucléophile, 1699, 1709, 1710, 1782, 1783
 substitution radicalaire, 1702, 1703, 1760, 1804, 1810
 substitutions du méthane, 1803
substitutions nucléophiles et éliminations
 carbocation, 1477, 1712, 1717, 1725, 1737, 1745, 1763, 1766, 1793, 1794, 1795, 1797, 1798
 carbocation plan, 1795
 carbocation secondaire, 1797
 complexe activé, 1477, 1479, 1711
 concurrence SN – E, 1746
 conformation anti-périplanaire, 1722
 alcynure, 1769
 Saitsev, 1701, 1703, 1708
 E2, 1701, 1707, 1708, 1722, 1746
 élimination antiparallèle, 1708
 élimination anti, 1736
 élimination, 1702, 1703, 1707, 1737, 1761, 1776
 méthanoate, 1611
 nucléophilie, 1699, 1732, 1746, 1748, 1766, 1781
 nucléophilie de l'alcool, 1744, 1778, 1784
 phénate, 1710
 potasse alcoolique, 1701, 1723, 1773, 1775, 1779
 règle de Saitsev, 1736, 1765, 1783
 SN, 1476
 SN1, 1477, 1712, 1725, 1746, 1760, 1766, 1795
 SN2, 1477, 1699, 1701, 1703, 1711, 1738, 1741, 1775, 1782
 suite de rapports égaux, 1665
 sulfate d'ammonium, 1780
 sulfure de manganèse, 1674
 sulfure de plomb, 1465
 sulfure de sodium, 1560
 sulfure de zinc, 1642
 superposable, 1772
 surtension, 1683

synthèse de Diels-Adler, 1726
synthèse de Williamson, 1738
synthèse industrielle du éthanol, 1491
synthèse magnésienne, 1716
synthèse malonique, 1773, 1775
système diphasé, 1500, 1503, 1504, 1508, 1811
système lent, 1686
système rapide, 1685, 1688, 1689

T

T.H.F., 1716, 1800
T.M.S, 1697
T.N.T, 1805
tables thermodynamiques partielles, 1463, 1465, 1469, 1500, 1515, 1519, 1528, 1529, 1536, 1720
tableau, 1475, 1476, 1479, 1481, 1483, 1484, 1485, 1497, 1513, 1524, 1541, 1563, 1577, 1582, 1586, 1587, 1613, 1630, 1634, 1637, 1639, 1646, 1647, 1709, 1786, 1789
tableau périodique, 1467
tampon, 1593, 1654
 tampon acétique, 1600
tautomérie, 1776
taux de conversion, 1501, 1503, 1511, 1512, 1720
taux de transformation, 1464
t-butyle, 1804
température de clarification, 1543
température de flamme, 1461, 1463
température de fusion, 1465
température d'évaporation, 1747
température d'inversion, 1493, 1538, 1637, 1720, 1789
temps de demi réaction, 1474, 1475, 1709, 1710
terme correctif, 1665
terpinéol, 1694, 1695, 1779
tertiobutylate, 1734, 1736
tertiobutyle, 1477, 1742
tertiobutylolithium, 1762
tertiobutyl-méthyléther, 1741
tétrachlorométhane [*voir solvants et nomenclature des halogénoalcanes*] , 1480, 1735, 1759
tétraéthylplomb, 1741
tétrahydrofuranne, 1716, 1800
tétraméthylsilicium, 1697
tétramminecuivre (II), 1588
tétrathionate, 1714
tétravalence, 1796
théorème de Fukui, 1727
théorème des moments, 1542
 règle des moments, 1547
thermochimie, 1461
 chaleur dégagée, 1461
 bilan thermique, 1464

endothermique, 1512, 1515, 1720, 1721
énergie molaire de liaison, 1468
énergie réticulaire, 1510
enthalpie de formation, 1536
réaction athermique, 1491
exothermique, 1465, 1494, 1511, 1620, 1638, 1720, 1747
thermodynamique chimique, 1489
diagramme isobare liquide-vapeur, 1541
déplacements d'équilibre, 1493, 1496
Cp0, 1462
courbe d'ébullition, 1541, 1542
courbe de rosée, 1541, 1542
courbe de refroidissement de mélange binaire, 1544
conversion, 1489
conversion du méthane, 1501
conversion à la vapeur d'eau, 1502
déplacement par ajout, 1515
densité, 1489
cycle thermodynamique, 1787
cuivre, 1519
cristaux liquides, 1543
titre en vapeur, 1504
titre massique, 1541, 1542
titre molaire, 1501, 1513
transition de phase, 1543
thermodynamique de la transestérification, 1786
thermodynamique du réacteur, 1503
thermochimie, 1461
Gibbs-Helmholtz, 1721, 1789
hectopascal, 1474
grillage, 1465, 1528
calorimétrie, 1785, 1787
Van t'Hoff, 1512, 1607, 1638, 1788
variance
variation d'enthalpie libre de la réaction, 1615, 1617
variation de l'entropie massique de la vapeur d'eau, 1504
variété allotropique, 1472, 1553
zircone, 1555
bilan enthalpique, 1509, 1552
bilan entropique, 1509
coefficient d'activité, 1549
coefficient d'avancement, 1494
coefficient de dissociation, 1490, 1496, 1568
coefficient stœchiométrique, 1484, 1610
composition en volume, 1511
concentration massique, 1559
concentration molaire, 1559, 1611, 1630, 1631
concentration volumique molaire gazeuse, 1475
conditions normales, 1467
constante d'équilibre, 1462, 1463, 1464, 1484, 1490, 1496, 1497, 1511,

1515, 1516, 1518, 1522, 1528, 1576, 1578, 1579, 1593, 1597, 1603, 1612, 1632, 1639, 1641, 1642, 1646, 1661, 1666, 1671, 1710, 1720
constante d'équilibre dimensionnée, 1494
relation de Gibbs-Duhem, 1551
rendement, 1703, 1714, 1715, 1773
formule de Gibbs Helmholtz, 1550
fraction massique, 1559
fraction molaire, 1461, 1489, 1492, 1498, 1546, 1549
fraction molaire maximale, 1491
endothermique, 1512, 1515, 1720, 1721
énergie molaire de liaison, 1468
énergie réticulaire, 1510
enthalpie de formation, 1536
enthalpie libre, 1497
enthalpie libre standard de formation, 1615
enthalpie libre standard de la réaction, 1497, 1513, 1529, 1631, 1743
enthalpie standard de formation, 1462
enthalpie standard de la réaction, 1631, 1743
entropie standard de la réaction, 1572, 1631, 1743
entropie standard molaire, 1615
équilibre de Boudouard, 1511, 1513
tables thermodynamiques partielles, 1463, 1465, 1469, 1500, 1515, 1519, 1528, 1529, 1536, 1720
équilibre homogène, 1489
régionnement, 1519, 1520, 1523, 1525, 1526, 1530, 1533, 1537, 1539, 1633, 1657
monoxyde de carbone, 1463, 1474
perturbation de l'équilibre, 1492, 1493
phase liquide, 1489
potentiel chimique, 1485, 1497, 1499, 1517, 1531, 1532, 1549, 1552, 1553, 1556, 1623
potentiels chimiques standards, 1554
proportions stœchiométriques, 1492, 1494, 1501
propriété physicochimique, 1556
réaction athermique, 1491
réaction auto-entretenu, 1465, 1466
réaction gazeuse, 1474
réaction parasite, 1538, 1743, 1780, 1785
solidus, 1547
solution réactionnelle, 1714
solution régulière, 1549
solution saturée, 1549
solution saturée de H_2S , 1640
sonde à oxygène, 1554
variation de l'entropie massique de la vapeur d'eau, 1504
thermostat, 1714
 bain glacé, 1754
thiocyanate, 1589
 thiocyano-fer (III), 1589

thiocyanofere (III), 1589
thiol, 1702
thiosulfate, 1477, 1714
 tétrathionate, 1714
thyroxine, 1748
titrage, 1589, 1646, 1650, 1651, 1666, 1667, 1669, 1670, 1671
 titrage potentiométrique, 1686
 titrage complexométrique, 1592, 1686
 titrage acido-basique, 1591
titre en vapeur, 1504
titre massique, 1541, 1542
titre molaire, 1501, 1513
toluène, 1717, 1730, 1805
torr, 1474
toxicité, 1519, 1682, 1777
traité à reflux, 1773
trans, 1802
transaddition, 1724
transélimination, 1799
transestérification, 1786
 thermodynamique de la transestérification, 1786
transition de phase, 1543
travaux pratiques de dosages, 1645
tricol, 1714, 1808
tridentate, 1605
triméthylacétaldéhyde, 1795, 1796
trinitration, 1729
triplet en RMN, 1697
turbine, 1504

U

ultra majoritaire, 1590, 1690
unité, 1631
unlike, 1723, 1749, 1772
urée, 1776
utilisation d'air pur, 1502

V

vague d'oxydation, 1686
Van t'Hoff, 1512, 1607, 1638, 1788
vapocraquage, 1743
variance
 variance théorique, 1516
 variance pratique, 1512
 variance, 1489, 1490, 1493, 1494, 1516, 1519, 1520, 1522, 1523, 1530,
 1532, 1541
 paramètre intensif, 1512, 1516, 1525, 1542
 règle des phases, 1511
 formule de Gibbs, 1512, 1520

variation d'enthalpie libre de la réaction, 1615, 1617
 perturbation de l'équilibre, 1492, 1493
variation d'entropie de la réaction, 1617
variation de l'entropie massique de la vapeur d'eau, 1504
variation d'enthalpie libre standard de la réaction, 1490
variété allotropique, 1472, 1553
vitascorbol, 1566
vitesse de réaction
 vitesse initiale, 1476
 vitesse d'échange, 1710
 vitesse de variation du pouvoir rotatoire, 1710
voltmètre, 1613
volume constant, 1474
volume de solvant pour une extraction, 1811
volume partiel, 1621
VSEPR, 1471, 1588, 1749

W

Wheland, 1750
Williamson, 1710, 1738
 tertiobutylate, 1734, 1736
 oxyde d'éthyle et de (méthyl) propyle,
 1701
 phénate, 1710
Wittig, 1759, 1762

Z

Z, 1703, 1705, 1723, 1724, 1763, 1765
Ziegler-Natta, 1803
zinc, 1528, 1642, 1722
 zinc amalgamé, 1731
zircone, 1555
zone de prépondérance, 1629
zone de virage, 1566, 1599, 1634, 1647, 1649, 1650, 1652
zwitterion, 1806

Index de physique

- 85 Pégase** [étoile double], 1361
 - étoile double, 101
 - étoile double Capella, 1362
 - étoile double et diffraction, 1378

A

- abaques du transistor
 - en Electronique, 958
- aberrations géométriques
 - en Optique géométrique, 1322, 1328
- absorption** laser, 684, 685
 - Einstein [deuxième coefficient pour l'absorption laser), 685
 - absorption par le verre, 1333
- AC [alternating current], 1025
- accélération**
 - accélération absolue, 259, 260, 262
 - accélération d'entraînement, 57, 177, 179, 241, 337, 338
 - accélération dans le trièdre de Frenet, 372
 - accélération relative, 57, 221
- Coriolis
 - en mécanique des fluides ,431, 432, 433, 435
 - en mécanique du point ,4, 6, 8, 56, 57, 77, 102, 105
 - en mécanique du solide ,270, 316
 - en polaires, 98
 - en automatique ,1078, 1080
 - en mécanique du point ,4, 5, 6, 8, 85
 - en mécanique du solide ,227, 241, 248, 259, 316
 - en mécanique des fluides ,433
- accentuation , voir fonction retard, 1008
- accommodation de l'oeil
 - en Optique géométrique, 1327
- acides nucléiques [ultracentrifugation], 636
 - en Biologie
- acoustique** linéarisée, 1284
- action et réaction** [théorème de l'], 164, 279
- action et réaction pour des couples [théorème de l'], 1125, 1126
 - en Mécanique du solide
 - addition de 2 courbes, 1061
 - somme de diagrammes de Bode asymptotiques, 1162
 - en Electrotechnique
- additionneur, en électronique, 879
 - en Automatique, 1141, 1184
- additivité des grandeurs ou [alors] de leurs variations en physique linéarisée, 325

- adhérence d'un fluide aux parois, 806
- adhérence limite, 264
- adiabatique** réversible ou non, 514, 522, 523, 527, 531, 533, 534, 540, 544, 563, 566, 567, 575, 576, 577, 578, 580, 581, 582, 583, 586, 589, 596, 597, 707
- adiabatique réversible, 510, 514, 522, 523, 524, 525, 527, 542, 563, 576, 577, 579, 585, 587, 589, 590
- admittance [inverse de l'impédance], 716, 721
- aéroglesseur
 - en Transports
 - en Mécanique des fluides, 396, 404
- aéromoteur
 - en Sciences de l'Ingénieur
 - en Mécanique des fluides, 359
- aiguille aimantée [voir milieux magnétiques], 781
 - en Géophysique
 - boussole, 781
- aimant [voir milieux magnétiques], 803, 805, 817, 836
 - aimant permanent [voir milieux magnétiques], 842, 843
 - aimantation [voir milieux magnétiques], 800, 814
 - couronne polaire cylindrique d'aimant, 843
- aimantation** [voir milieux magnétiques], 800, 814
 - aimant [voir milieux magnétiques], 803, 805, 817, 836
 - courbe de première aimantation, 813
 - cycle d'hystérésis, 813, 877
- albédo [effet de serre de la Terre], 696
 - en Géophysique
- algorithme**, 1015
 - algorithme de calculateur, 1160, 1166
 - en Informatique :
- algorithme informatique [filtrage numérique], 890, 894
- alimentation**, 1092, 1178, 1182
 - en Electronique, 850, 866, 909, 942, 950, 1038, 1039
 - alimentation à découpage, 1082, 1085, 1093
 - dans l'Industrie
- allure des lignes de champ magnétique, 1297
- alternateur, 656
 - en Electrotechnique
- amélioration de la visibilité
 - en Optique ondulatoire, 1369
- amélioration de l'asservissement
 - en Automatique, 1130
- amortisseur, 1156
 - en Transports
- Ampère [théorème d']**, 765, 768, 771, 773, 774, 775, 809, 813, 818, 820, 823, 1054, 1059, 1063
- amplificateur**, 960
 - amplificateur non linéaire, 1169
 - amplificateur différentiel, 966
 - amplificateur de puissance, 1129
 - ampli sélectif, 921

- ampli peu sélectif, 921
- ampli de tension, 854, 965, 973, 1128
 - amplificateur de tension réel, 974
 - amplificateur de tension réel, 975
 - amplificateur de la tension de commande, 1077
 - ampli de tension parfait, 974, 975, 982, 1029
- voir amplificateur opérationnel
- amplificateur opérationnel**, 716, 722, 850, 854, 855, 861, 897, 899, 907, 919, 985, 987, 1021, 1024, 1035, 1036, 1038, 1082
 - AO parfait, 850, 914, 939, 966, 1021, 1129
 - AO avec un quadripôle résistif en gamma comme chaîne de retour, 1021
 - AO imparfait, 927
 - modèle d'AO réel, 1022
 - amplificateur opérationnel suiveur, 907
 - AO en régime linéaire, 858, 867, 908, 941, 943
 - amplificateur opérationnel avec fréquence de coupure, 900
 - amplificateur opérationnel saturé, 908, 939, 1084
- amplification** laser, 689, 692, 693, 694
- amplitude** de l'ondulation de courant, 1084
 - valeurs extrêmes du courant, 1084, 1089, 1096
 - en Electrotechnique
- amplitude diffractée par une fente fine de largeur, 1439
- analogie**, 25, 26, 28, 32, 66, 111, 135, 137, 171, 184, 189, 191, 194, 197, 287, 294, 323, 324, 325, 326, 373, 382, 384, 385, 390, 394, 399, 404, 408, 436, 439, 441, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 450, 459, 460, 463, 468, 470, 473, 480, 483, 487, 489, 490, 492, 513, 520, 522, 535, 538, 542, 545, 549, 562, 569, 585, 607, 610, 622, 625, 627, 634, 644, 645, 650, 653, 654, 655, 658, 660, 669, 672, 674, 678, 724, 775, 970, 971, 977, 995, 1000, 1002, 1004, 1060, 1063, 1091, 1160, 1166, 1311
- analogique**, 876, 966, 1035, 1156
 - en électronique
- analyse dimensionnelle, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 63, 67, 69, 71, 74, 120, 180, 189, 194, 388, 392, 403, 439, 441, 442, 446, 447, 470, 472, 480, 481, 490, 500, 555, 626, 627, 629, 634, 637, 648, 665, 670, 673, 675, 676, 677, 679, 683, 704, 705, 706, 735, 736, 737, 739, 782, 787, 800, 844, 847, 864, 882, 988, 991, 1013, 1020, 1299
- analyseur[polariseur], 1457, 1458
- anémomètre, 169
 - en Géophysique
 - en Mécanique des fluides
- angle de divergence asymptotique du faisceau
 - en Ondes électromagnétiques, 1217
- angle de réflexion totale**, 1194, 1198, 1329, 1332
- angle solide**, 613, 697
 - angle solide élémentaire, 689, 695
- angles d'Euler** , 600
 - en Mécanique du solide, 277, 314
- anneaux d'égales inclinaisons**, 1410, 1412
 - rayons angulaires des trois premiers anneaux brillants, 1410
 - rayons des anneaux brillants dans le plan focal de la lentille d'observation, 1425
- année tropique, 111
 - en Astrophysique

antenne, 1245

antenne demi-onde, 1246

antenne réceptrice de radioastronomie, 1435

plans des antennes constamment orthogonaux aux rayons, 1437

antisymétrie, 746, 808

AO [voir amplificateur opérationnel]

AOIL [voir AO idéal et linéaire]

apodisation (diffraction)

en Optique ondulatoire, 1387, 1389

applications industrielles des courants de Foucault, 829

approximation de Gauss, 1366, 1371, 1377, 1379, 1382, 1396

en Optique géométrique, 1323, 1327

Archimède [théorème d'], 30, 98, 413, 482, 521, 632, 639

poussée d'Archimède, 395, 414, 415, 416, 417, 488, 497, 514, 520, 521, 532, 558, 627, 632, 639

argument d'un complexe en Electronique, 721, 886

diagramme de Bode de phase, 891

en Mathématiques

armature interne d'un câble coaxial, 761

ARQS, 441, 475, 477, 489, 666, 673, 677, 830, 837, 1008, 1047, 1176, 1178

articulations rotoïdes, 350

en Sciences de l'Ingénieur

asservissement

asservissement de position, 1079, 1081, 1127

amélioration de l'asservissement, 1130

asservissement avec correcteur, 1127

correcteurs divers [réalisation électronique de, 1174

correcteur, 1127, 1135, 1158, 1166

correction proportionnelle, 1167

correcteur P.I., 1166, 1168

correcteur intégrateur, 1167, 1171

asservissement de diode laser, 1422, 1431

asservissement régulateur de fréquence, 1166

asservissement échantillonné, 1159, 1164

correcteur numérique, 1155, 1159

asservissement analogique, 1157, 1161

correcteur analogique, 1155

système asservi à commande proportionnelle, 1157

en Automatique

association

association d'impédances, 1014

association de lentilles, 1322

association de quadripôles, 852, 896, 905

association des quadripôles, 719

association de condensateurs, 757, 759

astéroïde, 109

asthénosphère, 492, 495, 498, 499

en Géophysique

Astronautique : voir aussi table des matières

Astrophysique : voir aussi table des matières

- astrophysique, 544
- asymptote, 718, 902, 919, 920, 922, 924, 927, 929, 932, 935, 936, 937, 1162
 - asymptote commune, 1030
 - direction asymptotique, 912
 - en Mathématiques
 - diagrammes de Bode asymptotiques, 900, 912, 982, 983, 985, 986, 1011, 1012, 1013, 1018, 1022
 - comportement asymptotique, 932
 - comportements asymptotiques, 927, 929
 - intersection des asymptotes, 920, 931
 - point d'intersection des asymptotes, 718
 - Intersection des asymptotes dans un diagramme de Bode, 986
- atmosphère**
 - atmosphère en optique géométrique, 1335
 - atmosphère sèche, 554
 - atmosphère humide, 554
 - en Thermodynamique, 517
 - en Géophysique
- atome exotique, 71
- aube, 533
- auget, 341, 342, 343, 371
 - auge, 366
- autoinductance** [self], 815
 - coefficient d'auto induction, 776
 - coefficient d'inductance [self], 825
 - self, 778, 820
 - self de lissage, 1088, 1093
- automatique**, 1127
 - automatique linéarisée, 1156
- avion qui atterrit avec la roue avant rigidement liée, 151
 - en Transports
- axe géomagnétique, 784
 - en Géophysique
- axe optique du cristal [biréfringence], 1208
- axoïde, 214

B

- bande atténuée [filtre], 912, 915
- bande énergétique à niveaux multiples [conductivité en physique du solide], 606, 608
- bande passante**, 846, 1159
 - en Electronique, 851, 867, 871, 892, 895, 902, 907, 912, 914, 915, 916, 918, 919, 921, 941, 945, 946
- bande passante du modulateur de lumière, 1216, 1220
- barrage, 328, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 341, 342, 474
 - infiltrations d'eau, 332
- barre de contrôle [de réacteur nucléaire], 656
- barycentre de charges, 741
- barycentre de masse**, 4, 71, 73, 166, 168, 169, 171, 173, 175, 188, 207, 210, 213, 218, 227, 228, 246, 252, 253, 257, 259, 260, 264, 265, 270, 275, 279, 280, 284, 294, 297,

298, 301, 302, 303, 332, 335, 413, 414, 415, 416, 417

basculement électronique

basculement d'AO, 878, 1030, 1031, 1043

basculement du transistor, 1091

basculement mécanique, 210, 212, 218, 330, 332, 932, 939, 1025

base du transistor, 951, 1085, 1092

Beau de Rochas [cycle de]

consommation d'essence, 523

combustion interne [moteur à], 522, 523

en Thermodynamique, 522, 523

Bernoulli [formules de], 329, 331, 342, 345, 346, 347, 352, 356, 357, 360, 363, 373, 386, 389, 393, 395, 402, 405, 407, 409, 438, 439, 442, 450, 451, 458, 459, 461, 467, 470, 476, 477, 566, 579, 581, 1299

Bessel [fonctions de], 191, 199, 203

en Mathématiques

Betz [formule de], 361, 363

bilans systémiques

bilan énergétique, 374, 588, 591, 648, 650, 681, 710, 1075

bilan d'énergie électrique, 956

bilan de puissance, 363, 413, 1069, 1070, 1101, 1139, 1140

bilan en puissance de l'alimentation à découpage, 1085

bilan en puissance électromécanique, 1313

bilan thermique, 587, 644, 652, 654, 665, 669, 671, 675, 678, 680, 682

bilan de charges, 952

bilan de quantité de mouvement, 15, 19, 77, 357, 379, 389, 393

Binet [formule de], 76, 79, 85

Biologie : voir aussi table des matières

Biologie moléculaire [diffusion], 636

Biot et Savart [formule du calcul d'un champ magnétique de], 777, 795, 808

biréfringence, 1207

axe optique du cristal [biréfringence], 1208

construction des normales aux surfaces d'onde dans un milieu biréfringent, 1208, 1211

cristal uniaxe anisotrope, 1208

analyseur[polariseur], 1457, 1458

indice extraordinaire [biréfringence], 1210

lampe biréfringente à faces parallèles[décalage latéral entre les deux rayons polarisés orthogonalement à la sortie de la], 1208

lampe de spath à faces parallèles [biréfringence], 1208

milieu anisotrope, 1207

Black [formule de], 821, 901, 932, 947, 977, 1140, 1141, 1163

blanc d'ordre supérieur

en Optique ondulatoire, 1385

bloc fonctionnel, 1158

bloc O.C.T., 1040

bloc, 926, 1137, 1138, 1139, 1184

bloqueur d'ordre zéro, 1159

bobinage, 1106, 1113

bobine [self], 32, 33, 728, 775, 825, 836, 837, 839, 843, 940, 945, 1074, 1077, 1082, 1096, 1106

- Bohr** [modèle d'atome de], 71, 72
 - constante de Planck réduite, 800
- Boltzmann** [théorie thermodynamique statistique de], 597, 608, 640, 951, 966
 - constante de Boltzmann., 612
 - facteur de Boltzmann, 513, 546
- borne de sortie**, 850
- borne inverseuse**, 850, 897, 989
- borne non inverseuse**, 989
 - borne d'entrée non-inverseuse, 850
 - borne non-inverseuse, 897
- boucle d'asservissement** de la fréquence du radioaltimètre, 1146, 1149
- boucle de vortex
 - en Mécanique des fluides, 441, 446
- boussole, 781
 - aiguille aimantée [voir milieux magnétiques], 781
- branchement d'un quadripôle, 907
- bras [Michelson], 1419
- Brewster (incidence), 1207, 1213
- brillance de la frange centrale quasi constante, 1380
 - intensité lumineuse de la frange centrale quasi constante, 1380
- brin [de rotor], 1131
- brin, 1066
- brouillage**
 - en Optique ondulatoire, 1343, 1346, 1367, 1386, 1442
- bulle
 - en Thermodynamique, 557
- buse
 - en Mécanique des fluides, 397

C

- câble
 - en électricité, 326
 - en Mécanique, 259, 262, 1078
- câble coaxial**, 668, 761, 836
- cage de Faraday, 832
- calibre
 - en Electricité fondamentale, 704, 706
- cannelures**
 - en Optique ondulatoire, 1354, 1457
- capacité calorifique**, 707, 708
- capacité calorifique molaire**, 546
 - capacité calorifique molaire à volume constant, 512
 - capacité calorifique molaire à pression constante, 512
- capacité de condensateur**, 757, 758
 - capacités parasites, 860
- capacité linéique de condensateur**, 745, 746, 747, 1254
 - capacité linéique de ligne bifilaire électrostatique en présence du sol., 745
- capacité d'un conducteur, 31
- capacités calorifiques molaire en fonction de gamma**, 563, 577, 579, 580

- Capella [étoile double], 1362
 - 85 Pégase [étoile double], 1361
 - étoile double, 101
 - étoile double et diffraction, 1378
- capteur**
 - capteur de pression, 486
 - capteur de position, 1157
 - capteur d'accélération, 862
- caractéristique de dipôle**, 881, 943, 964
 - caractéristique inverse, 702
 - caractéristique de transfert V_s (V_e), 874, 941, 1021, 1039
 - caractéristique sans discontinuité de pente, 908, 949
 - caractéristiques d'un transistor, 958
 - caractéristique exponentielle, 966, 970
- caustique
 - en Optique géométrique, 1339
- cavitation
 - en Thermodynamique, 556, 562
- cavité résonante**, 1175
 - en Ondes électromagnétiques, 1226
- ceintures de Van Allen, 783
 - en Géophysique
- célérité du son**, 360, 363, 388, 1278, 1287
- cellule de commutation, 1082, 1084, 1085
 - en Electrotechnique
- cellule de déphasage
 - en Electronique, 853
- cellule d'ultracentrifugation, 638
 - en Biologie
- cellules [cf quadripôles]élémentaires en cascade, 1312
- centrale nucléaire**, 655
- centre de gravité [avec g uniforme], 4, 166, 168, 169, 171, 173, 175, 188, 207, 210, 213, 218, 227, 228, 246, 252, 253, 257, 259, 260, 264, 265, 270, 275, 279, 280, 284, 294, 297, 298, 301, 302, 303, 332, 335, 413, 414, 415, 416, 417
- centre de masse, 4, 166, 168, 169, 171, 173, 175, 188, 207, 210, 213, 218, 227, 228, 246, 252, 253, 257, 259, 260, 264, 265, 270, 275, 279, 280, 284, 294, 297, 298, 301, 302, 303, 332, 335, 413, 414, 415, 416, 417
- centre de poussée**
 - en Mécanique des fluides, 332, 333, 334, 336, 414
- centre d'inertie, 4, 166, 168, 169, 171, 173, 175, 188, 207, 210, 213, 218, 227, 228, 246, 252, 253, 257, 259, 260, 264, 265, 270, 275, 279, 280, 284, 294, 297, 298, 301, 302, 303, 332, 335, 413, 414, 415, 416, 417
- centre instantané de rotation
 - en Cinématique, 261, 263, 303, 304, 305
- centre optique de lentille
 - en Optique géométrique, 1323
- centrifuge**, 12, 13, 222
- centripète**, 8, 27, 28, 29, 36
- cercle oculaire
 - en Optique géométrique, 1326, 1328

- chaîne de retour** de rétroaction, 821, 900, 1129, 1141
- chaîne de télémesure, 862
- chaîne directe** [munie d'une chaîne de retour], 821, 900, 1129, 1133, 1140, 1141
- chaleur latente**, 554, 673
 - chaleur latente massique, 589, 680
- chaleur massique à volume constant, 527
- champ de forces centrales, 2, 5, 96
- champ de moments, 208, 263
- champ de vitesses d'un fluide**
 - champ des vitesses, 324
 - champ des vitesses irrotationnel en acoustique, 1271
 - champ de vitesse en coordonnées eulériennes, 352
- champ d'interférences**, 1342, 1344, 1360
- champ électrique** parallèle à la surface de séparation, 1205
- champ électromoteur**, 838, 846, 1067
- champ électrostatique**, 735
 - champ électrostatique créé par le dipôle, 741
- champ géomagnétique**, 784
- champ magnétique** créé par un dipôle magnétique, 782, 783, 798
- champ magnétique [partie transverse du], 1295
- champ magnétique d'un dipôle magnétique**[formule intrinsèque du], 802
- champ magnétique parallèle à la surface de séparation**, 1205
- champ magnétique résiduel, 818
- champ newtonien**, 60, 63, 71, 96, 110, 112
- champ rémanent**, 818
 - champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire, 774
 - champ magnétique radial, 843, 1127, 1308
 - champ magnétique créé par un long barreau métallique cylindrique, 773
 - champ magnétique créé par 2 câbles infinis parallèles, 767
 - champ magnétique à composante radiale, 1066, 1127
 - champ magnétique en un point de l'axe d'un solénoïde infiniment long, 773
- changement de base, 12, 136
 - en Mathématiques
- changement de fréquence d'une radiation lumineuse après réflexion sur un miroir mobile** [effet Doppler], 1411
- changement d'état**
 - en Thermodynamique, 554, 592, 662
- charge de circuit, 716, 719, 785, 794, 795, 913, 914, 916, 965, 1009, 1118
- charge du condensateur**, 843, 1030
- charge du moteur**, 1097, 1098
- charge électrique
 - charge ponctuelle, 751, 785
 - charge du condensateur, 843, 1030
 - charge totale d'une distribution volumique sphérique, 736
 - charge totale d'une distribution surfacique sphérique, 799
 - charges surfaciques, 748, 754, 757
 - charge d'un conducteur, 716, 719, 745, 751, 794, 795, 913, 914, 916, 965, 1009, 1118
- charge électrotechnique**, 1048, 1049, 1057, 1058, 1082, 1117, 1137, 1138, 1141
- charge infinie en Electronique**, 852, 942, 965

- charge ramenée par un transformateur**, 1052
- charge surfacique**, 748, 754, 757
- châssis, 351
- chaudière, 528
- chemin optique**, 1320, 1335
- cheval vapeur, 524
- choc élastique de photons**, 1189
- chocs de points matériels**
 - choc élastique, 79, 116, 117, 122
 - choc mou, 18, 23
- cinématique**, 116, 122
 - centre instantané de rotation, 261, 263, 303, 304, 305
- cinématique des fluides**, 321
- cinétique**, 1, 4, 5, 32, 48, 60, 88, 109, 116, 117, 407, 434, 440, 445, 462, 469
 - en Mécanique du solide, 247, 252, 253, 254, 286, 305
- circuit de détection
 - en Optique ondulatoire, 1432
- circuit équivalent du modulateur de lumière, 1215
- circuit intégrateur
 - en Optique ondulatoire, 1431
- circuit magnétique**, 813, 814, 815, 1053, 1054
- circuit ouvert, 852, 942, 965
- circuit peu sélectif**, 945
 - filtre passe bande, 847, 911, 996
- circuit résonnant**
 - circuit résonnant série, 721
 - circuit résonnant parallèle, 721
- circuit triphasé**[division en trois parties formellement isolées], 1120
- circuits couplés par mutuelle**, 778, 825, 1106
- cisaillement**, 1292
 - en Sciences de l'Ingénieur
- Clapeyron** [formule pour les changements d'état du premier ordre], 559, 566
- classe B** [fonctionnement particulier en Electronique], 1155, 1175
- cloche
 - en Mécanique du solide, 297, 298, 302
- coalescence, 120
 - en Géophysique
- coefficient d'absorption de photons [cf laser], 685
- coefficient d'absorption des miroirs
 - en Optique ondulatoire, 1447
- coefficient d'affaiblissement dû à la transmission
 - en Ondes électromagnétiques ,1267
- coefficient d'amortissement**
 - coefficient d'amortissement réduit, 1172
 - en Automatique, 1158, 1163
- coefficient d'amortissement d'un filtre**, 969
 - coefficient d'amortissement canonique, 935
 - coefficient d'amortissement du filtre en physique, 972
- coefficient d'amplification** [laser], 689, 692, 693, 694
- coefficient d'amplification en boucle ouverte**

- en Electronique, 913
- coefficient d'auto induction**, 776, 815
 - self, 778, 820
 - self de lissage, 1088, 1093
- coefficient de cohérence partielle, 1345, 1346, 1362, 1365, 1368, 1369, 1412, 1416
 - facteur de visibilité, 1342, 1343, 1360
- coefficient de diffusion**, 633, 637, 673
 - diffusion, 480, 626, 633, 634, 637, 638, 640
- coefficient de dilatation isobare, 494, 1272
- coefficient de frottement**, 205, 206, 207, 210, 212, 218, 237, 252, 253, 264, 266, 269, 303, 309, 334, 351
- coefficient de frottement de traînée**
 - en Mécanique des fluides, 409
- coefficient de Joule-Thomson, 564, 567, 575, 577
- coefficient de qualité**, 1087, 1223
 - coefficient de qualité en charge, 1177
- coefficient de transmission**, 1205, 1206, 1370
- coefficient de réflexion**
 - coefficient de transmission du flux d'énergie électromagnétique, 1218
 - coefficient de réflexion d'une onde de tension, 1177, 1181
 - coefficient de réflexion de la puissance sur le dipôle, 1259
 - coefficient de réflexion sur la charge, 1262
 - coefficient de réflexion complexe sur la charge, 1260
 - coefficient de réflexion en amplitude de l'interface atmosphère – ionosphère, 1248
 - coefficient de réflexion complexe de la surpression, 1283
 - coefficient de réflexion à l'extrémité de la ligne bifilaire, 1255
- coefficient d'inductance [self]**, 776, 815, 825
 - self de lissage, 1088, 1093
 - self, 778, 820
- coefficient d'inductance mutuelle**, 775, 776, 778, 825, 928, 1106
- coefficients de diffusion** de part et d'autre d'une interface, 629
 - diffusion, 480, 626, 633, 634, 637, 638, 640
- coefficients de Lamé, 1288, 1289, 1294
 - en Sciences de l'Ingénieur
- coefficients d'élasticité, 1288
 - en Sciences de l'Ingénieur
- coexistence des différents types d'onde**
 - en Ondes électromagnétiques, 1238
- colatitude**, 787, 804
- collecteur**
 - redressement de la force électromotrice induite, 1127, 1131
 - en Electronique, 951
- collimateur du spectroscope**, 1457
- combustion interne** [moteur à]
 - consommation d'essence, 523
 - consommation de gas oil, 526
 - en Thermodynamique, 522, 523
- commande d'interrupteur** par OCT
 - en Electronique

- en Electrotechnique, 1040
- commande logique de renouvellement des cycles de mesure [numérisation], 1025
- commutateur**, 876, 1035, 1040
- comparaison des compressibilités isentropique et isotherme[formule de Reech], 566
- comparaison numérique, 964
- comparateur**, 862, 877, 879, 903, 1022, 1039, 1040, 1042
- compensatrice
 - en Optique ondulatoire, 1414
- complémentarité des facteurs de transmission
 - en Optique ondulatoire, 1381
- comportement asymptotique**, 927, 929, 932
- composant
 - composant non linéaire, 1178
 - en Electronique, 960
- composante continue de la tension, 882
- composante orthoradiale du champ électrostatique, 741
- composante radiale du champ électrostatique, 735, 741
- composante tangentielle du champ électrostatique, 735
- composition des vecteurs instantanés de rotation
 - en Mécanique du solide, 263, 281, 317, 339
- composition des vitesses, 373, 412
- compresseur**
 - en Thermodynamique, 527, 533, 581, 582, 588, 589, 590, 592
- compressibilité**, 327, 329, 360, 363, 388, 1287
 - en Sciences de l'Ingénieur
- compression, 163, 164, 1293
 - en Sciences de l'Ingénieur
- comptage des impulsions d'horloge transmis à l'afficheur[numérisation], 1025
- Compton** [effet], 122, 123
 - choc élastique de photons, 1189
- condensateur**, 728, 756, 843, 921
- condensateur plan, 25
- condenseur
 - en Thermodynamique, 589, 655
- condition d'accrochage des oscillations[portant sur la matrice admittance du quadripôle oscillateur], 976
- condition d'auto-oscillation, 974
- condition de compatibilité, 1210
 - en Mathématiques
- condition de Lorenz**
 - en Ondes électromagnétiques, 1237
- condition de non-glissement**, 334
 - condition de non-glissement du câble, 165
- condition de Schwarz**, 565, 568, 571
 - en Mathématiques
- condition d'oscillations**, 942, 944, 949, 950, 974, 981
 - condition d'instabilité, 975, 978
 - conditions d' oscillation
 - en Automatique, 1178
 - condition d'oscillation et résistance d'entrée de la chaîne directe, 977

- conditions d'oscillation
 - en Electronique, 979, 980
- mise en équation de la condition d'oscillation, 974
- condition d'oscillation déduite d'une équation
 - différentielle, 977
- condition d'accrochage des oscillations portant sur la matrice admittance d'un quadripôle oscillateur, 976
- condition matricielle d'oscillation en électronique, 980
- condition initiale**
 - en Mécanique du point ,7, 8, 19, 29, 40, 42, 46, 80, 86, 97
 - en Thermodynamique ,631
 - en Ondes mécaniques ,1305
- condition initiale de tension de sortie**
 - en Electronique, 6, 36, 42, 47, 49, 60, 80, 95, 141, 161, 170, 171, 174, 178, 189, 205, 206, 207, 210, 212, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 228, 235, 236, 237, 238, 246, 252, 272, 286, 291, 297, 303, 304, 316, 367, 400, 421, 468, 469, 513, 633, 655, 785, 790, 825, 826, 827, 837, 838, 842, 845, 868, 900, 928, 938, 1084, 1091, 1093, 1098, 1102, 1304,
- condition limite**
 - en Mécanique des fluides ,383, 385, 388, 390, 392, 394, 400, 418, 420, 428, 429, 432, 436, 443, 454, 455, 456, 457, 458, 461, 493, 495, 499, 500, 503
 - en Thermodynamique ,587, 602, 647, 652, 653, 661, 665, 670, 680, 681
 - en Electricité fondamentale ,758, 804, 806, 810, 831
 - en Electronique ,952, 953
 - en Ondes mécaniques ,1304, 1305
 - conditions limites sur le métal parfaitement conducteur, 1238
 - conditions de continuité sur un dioptré [entre deux isolants], 1329
- conductance électrique**[inverse de résistance], 707, 913
 - conductance linéique d'isolement, 1254
- conductance thermique** [inverse de résistance thermique], 650
 - conductance thermique de rayonnement, 650, 654
 - conductance thermique de convection, 650, 654
 - conductance thermique de conduction, 650, 654
- conducteur normalement épais** en électrostatique, 751
- conductivité électrique**, 607, 654
 - conductivité d'un semi conducteur, 609
 - semi-conducteur [silicium], 605
- conductivité thermique**, 646, 647, 650, 661, 669, 672, 673, 674, 680
- configuration afocale**, 1327, 1380
- confinement de particules, 28
- confrontation expérimentale, 696, 708, 748, 776, 777, 784, 787, 793, 800, 825, 829, 837, 1021, 1027, 1028, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1106, 1116, 1122, 1176
 - déterminations expérimentales, 570
- conique**, 84, 86, 96, 101
 - demi petit axe, 110, 112, 839
 - demi grand axe, 91, 109, 110, 111, 456, 839
 - en Mathématiques
- conjugaison optique**[ne modifie pas une différence de marche optique], 1400, 1451
- conjugaison sur le corps des complexes**, 834
 - en Mathématiques

conservation de la charge, 31, 473, 650, 653, 754, 964, 1044, 1117
 conservation locale de la charge, 806

conservation de la masse, 321, 331, 357, 369, 372, 373, 388, 392, 402, 421, 422, 423, 426, 427, 432, 436, 470, 471, 473, 476, 477, 502, 1294
 conservation locale de la masse, 806, 1271
 conservation du débit, 345, 346, 347, 360, 363, 405, 407, 409, 422, 467, 471, 475, 489

conservation de la quantité de mouvement, 4, 5, 23, 74, 78, 116, 131

conservation de l'énergie, 19, 34, 35, 49, 74, 78, 85, 117, 142, 167, 175, 176, 184, 208, 210, 216, 217, 231, 238, 239, 240, 262, 267, 300, 305, 306, 311, 318, 471, 472, 553, 617, 625, 962, 1091, 1102

conservation des paires, 640

conservation du débit, 345, 346, 347, 360, 363, 405, 407, 409, 422, 467, 471, 475, 489

conservation du flux magnétique, 776, 777, 820, 823, 1054, 1059, 1063

conservation du moment cinétique, 4, 74, 117

consigne
 consigne échantillonnée, 1159
 en Automatique, 1138, 1156, 1157, 1184

consommation d'essence, 523
 combustion interne [moteur à], 522, 523
 Beau de Rochas [cycle de], 522, 523

consommation de gas oil, 526
 combustion interne [moteur à], 522, 523
 Diesel [cycle de], 523, 525

constante de Boltzmann, 612
 Boltzmann [théorie thermodynamique statistique de], 640
 facteur de Boltzmann, 513, 546

constante de partage, 629
 diffusion, 480, 626, 633, 634, 637, 638, 640

constante de Planck, 124, 803
 réduite, 800, 803
 Bohr [modèle d'atome de], 71, 72

constante de Stefan, 648, 681

constante de temps
 en Thermodynamique ,629, 630, 631, 632, 639, 684, 686, 689
 en Electronique ,863, 867, 957, 962, 1044
 en Electrotechnique ,1044
 en Automatique ,1044, 1066, 1077, 1094, 1098, 1099, 1128, 1137, 1138, 1172
 constante de temps thermique, 644
 constante de temps électronique, 1011, 1012
 constante de temps de la réponse, 970
 constante de temps d'un phénomène microscopique, 622

constante de torsion d'un cable, 1308

constante d'espace [longueur de référence], 625, 953
 échelle de hauteur, 516
 longueur de référence, 519

constante du mouvement, 88, 110, 112, 786, 839
 en Mécanique

constante sans dimension de finesse de voile, 391

construction des normales aux surfaces d'onde dans un milieu biréfringent, 1208, 1211

- contact optique**, 1419
- continuité de l'intensité d'une bobine**, 930, 932, 933, 935, 937, 1089, 1099, 1102
- continuité de la charge d'un condensateur**, 939, 1030, 1090
- continuité de la ddp aux bornes d'un condensateur**, 1030, 1090, 1091
- continuité de la vitesse de rotation d'un moteur**, 1102
- continuité de l'énergie**, 930, 932, 935
 - continuité de l'énergie du condensateur, 1030
- continuité des champs sur un dioptré** [entre deux isolants], 1329
- continuité du champ électrique tangentiel**, 763, 1190, 1206
 - les conditions aux limites relatives aux champs, 1226
- continuité du champ magnétique normal**, 799, 802, 806
 - les conditions aux limites relatives aux champs, 1226
- continuité du champ magnétique tangentiel**, 767, 808
 - les conditions aux limites relatives aux champs, 1226
- continuité du potentiel électrostatique**, 738, 749, 755, 763
- continuité du potentiel vecteur**, 769, 772, 773, 799, 801
- contraste**, 1345, 1346, 1362, 1365, 1368, 1369, 1412, 1416
 - facteur de visibilité, 1342, 1343, 1360
- contraste du signal électrique** [enregistré dans un Michelson], 1415
- contre réaction**
 - en Electronique, 902
- contribution des termes de pesanteur**
 - en Mécanique des fluides, 352
- contrôle de la fréquence**
 - en Automatique, 1166
- contrôle de température**, 650, 653
 - en Sciences de l'Ingénieur
- convection**, 502
 - en Thermodynamique, 640, 646, 648, 650, 664, 665, 667, 669
- conversion analogique - numérique**, 1424
 - en Informatique
- conversion de puissance**, 1067
 - en Electrotechnique
- convertisseur à l'arrêt**, 1116
 - en Electrotechnique
- convertisseur d'impédance**
 - en Electronique, 909
- convertisseur entraîné par un moteur à pistons**, 1119
 - en Electrotechnique
- convertisseur réversible**, 1105
 - en Electrotechnique
- coordonnées diverses**
 - coordonnées sphériques**, 348, 438, 440, 441, 597, 674, 783, 784, 799, 804
 - formules d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques, 800
 - coordonnées polaires**, 7, 76, 79, 84, 88, 94, 110, 217, 224, 228, 321, 323, 383, 390, 435, 735, 741, 745
 - gradient en coordonnées polaires, 753
 - coordonnées cylindriques**, 321, 324, 381, 447, 748, 757, 762, 777
 - gradient en coordonnées cylindriques, 747, 762
 - divergence en coordonnées cylindriques, 637

- coordonnées cartésiennes**, 327, 438
 - Coordonnées réduites, 100, 137, 289, 391, 399, 407, 497, 535, 538, 546, 551, 575, 578, 700, 753, 828, 843, 844, 912, 914, 922, 969, 1074, 1076
- Copernic, 96, 551
- corde vibrante pesante**
 - en Ondes mécaniques, 1303, 1307
- Coriolis**, 4, 6, 8, 56, 57, 77, 102, 105, 431, 432, 433, 435
 - en Mécanique, 241, 270, 316
 - accélération de Coriolis, 8, 56, 57
 - accélération de Coriolis, 8, 56, 57
- corps noir**, 648, 683, 690, 691, 695, 696, 698
- correcteur**, 1127, 1135, 1158, 1166
 - correction proportionnelle, 1167
 - correcteur P.I., 1166
 - correction proportionnelle et intégrale, 1168
 - correcteur électronique, 1130
 - correcteur numérique, 1155, 1159
 - correcteur intégrateur, 1147, 1163, 1171
 - correction intégrale, 1167
 - correcteur double de fait en automatique, 1154
 - correcteur de laser, 1166
 - correcteur analogique, 1155
 - correcteurs divers [réalisation électronique de], 1174
- corrélateur d'interférences de 2 signaux artificiellement déphasés, 1436
- correspondance entre transformées de Laplace et transformées en z , 1160
- correspondance entre transformées en z et transformées de Laplace, 1165
- cosinus directeurs**, 1207
 - en Mathématiques
- couche de diffusion, 629
 - diffusion, 480, 626, 633, 634, 637, 638, 640
- couche limite**, 629, 630
 - en Mécanique des fluides, 386, 452
- Coulomb, [jauge de], 769
- couplage**, 67, 386
 - en Mécanique, 278, 285, 291, 294, 295, 296, 297, 302
- couplage électromagnétique**, 830
- couple**
 - couple résistant, 189, 265, 268, 1066, 1070
 - couple perturbateur, 1138
 - couple de perturbation, 1143
 - couple moteur, 147, 150, 172, 189, 191, 265, 316, 540, 543, 1066, 1078
 - couple électrostatique, 758, 759
 - couple électromagnétique, 1079
 - couple électromagnétique et dérivée partielle de l'énergie magnétique par rapport à la variable angulaire, 1107, 1119
 - couple des forces magnétiques, 1131
 - couple des forces de gravitation, 76, 82, 277
 - couple de liaison, 318
 - couple de frottement visqueux, 219, 284, 1077
 - couple aérodynamique, 1139

- couple axial dû aux frottements, 581
 - couple de frottement fluide, 1066
 - couple de frottement, 208
 - couple de force d'inertie, 195
 - couple d'Archimède, 416
- en Mécanique du solide, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 246, 248, 250, 251, 276, 280, 281, 307, 308, 310, 311, 312
- en Electrotechnique
- en Mécanique des fluides, 328, 330, 333, 336, 417
- couple de rappel**
 - en Mécanique du solide, 179, 181, 182, 187, 219, 247, 250, 307, 308, 310, 311
 - en Electricité fondamentale, 780
- coupleur électromagnétique
 - en Automatique, 1176, 1179
- courant d'antenne, 1246
- courant de base négligeable dans un transistor, 964, 966, 970
- courant de déplacement**, 830, 831, 1294
 - en Ondes électromagnétiques, 1238
- courant de matière en ultracentrifugation, 637
- courant électrique**
 - courants **triphases**, 1104
 - courant moyen dans la charge, 1085
 - courant d'excitation dans l'inducteur, 1068
 - courant d'excitation indépendante** maintenu constant dans l'inducteur, 1097
 - courant alternatif, 716, 815
 - courant monophasé, 732
 - courant nul dans un moteur**, 1096
 - courants de Foucault**, 813, 829
 - courants de Foucault en haute fréquence, 830
 - applications industrielles des courants de **Foucault**, 829
- courants marins
 - courant marin, 429, 431, 432
 - courant géostrophique, 430
 - courant d'Eckman, 430
 - courant de pente, 431
- courants surfaciques**, 1190, 1238
- courbe d'étalonnage** du pouvoir rotatoire [en fonction de la longueur d'onde]
 - en Optique ondulatoire, 1457
- courbe de première aimantation**, 813
 - aimantation [voir milieux magnétiques], 800, 814
 - équation de la courbe de première aimantation, 813
- courbe de rosée**
 - en Thermodynamique, 593
- courbe de transition de supraconductivité, 571
- courbe échantillonnée ou numérisée, 995
- courbe voir graphe
- courbes de transformées de Fourier d'un signal, 998, 999, 1003, 1008
- courbes isotitres du diagramme de Mollier**, 593

- diagramme de Mollier, 591, 594
- courbes synchronisées**, 1031
- courbure, 864
 - en Mathématiques
- couronne polaire cylindrique d'aimant, 843
 - en Electrotechnique
 - aimant permanent [voir milieux magnétiques], 842, 843
- courroie, 1077
 - en Sciences de l'Ingénieur
- court-circuit**, 716, 719
 - court-circuit de fait, 961, 965
- Cramer** [système de], 42, 196, 290, 296, 300, 313, 428, 496, 694, 980, 1233
 - en Mathématiques
- cristal ayant les symétries du cube effectivement isotrope
 - en Ondes électromagnétiques, 1208
- cristal de silicium dopé, 607
- cristal uniaxe anisotrope
 - en Ondes électromagnétiques, 1208
- critère de séparation de Rayleigh**, 642
 - en Optique ondulatoire, 1380, 1385, 1392, 1396, 1397, 1406, 1409, 1434, 1448, 1454
- cycle de Carnot**, 509
 - cycle de Carnot moteur, 539
- cycle d'hystérésis**, 813, 877
 - cycle d'hystérésis rectangulaire, 817
 - aimantation [voir milieux magnétiques], 800, 814
- cycle moteur**
 - en Thermodynamique, 540
- cycloïde**, 29, 30, 47, 262, 263
 - en Mathématiques
- cylindrée de moteur à combustion interne, 522, 523

D

- Dalembertien, 1239
- Darcy [convection dans les milieux poreux], 479
- DC[direct current], 1025, 1058
 - composante continue de la tension, 882
- débit**
 - débit massique, 342, 352, 353, 362, 376, 474, 586
 - débit volumique, 341, 424, 431, 437, 469, 482, 483, 484, 486, 490, 493, 495
 - débit volumique complexe, 435
 - débit d'énergie cinétique, 370
 - débit de pompe, 541
- décalage vers le rouge par effet Doppler, 115
 - en Astrophysique
- décharge du condensateur**, 859, 1030
- décibel**, 922
 - décibels par décade, 867

décomposition en série de Fourier

décomposition de la transmittance spatiale d'un réseau, 1399

décomposition d'un signal de sortie temporel, 885

défauts de signal corrigés par une fonction retard, 1022

défauts systématiques de filtre passe bas, 913, 916

filtre passe bas, 1006, 1016, 1034, 1184

défilement d'un certain nombre de franges

en Optique ondulatoire, 1420

déformation de lame d'un capteur d'accélération, 864

degré complexe de cohérence spatiale, 1345, 1346, 1362, 1365, 1368, 1369, 1412, 1416

facteur de visibilité, 1342, 1343, 1360

degrés de liberté, 132, 262, 601

démarrage de moteur, 1080

démarrage d'un moteur en charge, 1078

démarrage du laser, 688

demi-largeur

en Optique ondulatoire, 1363, 1379, 1387, 1406, 1409, 1453

démodulation, 857

démodulation d'amplitude simple alternance, 996

démodulateur, 857, 996

démodulateur synchrone, 997

densité de charge

densité linéique de charge, 735, 745

densité surfacique de charge, 736, 741, 743, 751, 762, 765, 782

densité volumique de charge, 735

densité de courant

densité volumique de courant de déplacement, 830

densité de courant volumique, 765, 767, 770, 795, 804, 830

densité de courant surfacique, 775, 794, 795, 799, 800, 801, 804

densité de population d'un état excité, 614

densité d'énergie électrostatique, 757

densité optique, 685

densité spectrale, 991

densité spectrale énergétique par unité de volume, 683

densité spectrale d'un signal apériodique, 992

densité spectrale du mode, 688

densité spectrale de bruit de fond électronique, 1013, 1020

Densité linéique de forces, 211

densité surfacique de forces, 170, 328

densité volumique de l'énergie électromagnétique, 1189, 1191, 1231

densité volumique de puissance en mouvement, 772

densité volumique de puissance transformée, 765

densité volumique d'énergie dans un fluide

densité volumique d'énergie sonore, 1272

densité d'énergie sonore, 1279

densité volumique moyenne d'énergie sonore, 1272

densité volumique d'énergie interne, 1272

densité volumique d'énergie totale du fluide, 1271

densité volumique d'énergie potentielle, 1312

déphasage des deux ondes interférant

- en Optique ondulatoire, 1420
- déphasage entre deux rayons successifs**
 - en Optique ondulatoire, 1448
- déphasage pour un filtre idéal, 914
- déphaseur acoustique, 1286
- déplacement du miroir commandé par un moteur électrique
 - en Optique ondulatoire, 1415
- dérivateur**
 - en Electronique, 932
- dérivation logarithmique**, 556
 - en Mathématiques
- dérivation sous le signe intégrale**, 604
 - en Mathématiques
- dérive d'un point, 26, 28, 29, 30, 99, 102, 391, 396
- dérive marine, 391, 396
- dérivée d'une grandeur dans un repère donné**, 544
- dérivée particulière**, 1294
 - en Mécanique des fluides, 448, 449
- dérivée partielle de l'énergie électrostatique** [à potentiel ou charge constant], 760
- dérivée partielle, 53, 137, 138, 379, 426, 454, 480, 528, 546, 551, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 571, 577, 658, 665, 703
- désaccentuation
 - en Electronique, 1011, 1019
- désaimantation adiabatique[obtention de très basses températures], 562, 564
 - désaimantation adiabatique réversible, 565
- désordre microscopique [cf Boltzmann], 541
- dessouder [jeu sur les potentiels dans les circuits], 1116
- détecteur de crête [avec diode], 857, 859
- détecteur permettant la mesure relative de l'éclairement [cf contraste], 1420
- détecteur potentiométrique proportionnel [cf rétroaction], 1138
- détecteur quadratique, 1179
 - détecteur quadratique adapté, 1179
- détection d'un flanc montant de signal, 1040
- détendeur adiabatique, 582
- détente de Joule-Thomson**, 563, 586, 592
 - Joule-Thomson, 527
- détente fractionnée, 590
- détermination des résistances des circuits d'un moteur, 1068
- déterminations expérimentales**, 123, 570
 - confrontation expérimentale, 696, 708, 748, 776, 777, 784, 787, 793, 800, 825, 829, 837, 1021, 1027, 1028, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1106, 1116, 1122, 1176
- deutérium, 71
- deutéron, 71
- deux étages électroniques successifs**, 871
- développement au premier ordre ou plus**, 10, 17, 18, 24, 35, 37, 46, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 67, 68, 76, 77, 82, 83, 84, 89, 92, 94, 95, 98, 100, 103, 105, 107, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 127, 140, 157, 176, 180, 181, 182, 184, 185, 189, 190, 191, 193, 194, 196, 198, 200, 204, 212, 216, 217, 225, 226, 227, 228, 235,

236, 237, 239, 240, 241, 247, 250, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 282, 283, 284, 285, 289, 290, 291, 294, 298, 299, 300, 305, 309, 311, 312, 316, 317, 320, 338, 384, 388, 392, 393, 394, 404, 414, 415, 416, 422, 425, 426, 427, 428, 441, 443, 454, 455, 459, 461, 463, 469, 470, 471, 475, 478, 497, 500, 501, 502, 504, 505, 516, 518, 539, 540, 542, 543, 545, 546, 547, 549, 551, 552, 554, 556, 557, 559, 560, 561, 575, 600, 606, 608, 612, 613, 614, 616, 618, 619, 620, 623, 624, 638, 647, 651, 662, 675, 693, 704, 705, 721, 722, 723, 735, 737, 738, 740, 745, 746, 748, 751, 756, 757, 758, 770, 776, 777, 780, 782, 787, 792, 796, 823, 828, 831, 835, 844, 857, 859, 860, 864, 869, 889, 926, 930, 944, 950, 952, 954, 955, 957, 960, 963, 988, 990, 995, 1009, 1011, 1014, 1017, 1156, 1177, 1178, 1179, 1181, 1257, 1304, 1357

voir linéarisation

développement en série d'une fonction paire, 749

diagonalisation de matrice, 1290

diagramme de Bode, 867, 871, 891, 895, 900, 915, 920, 922, 924, 930, 931, 932, 969, 972, 988, 989, 1011, 1013, 1017, 1018, 1030, 1131, 1135, 1157, 1162, 1166, 1167, 1168, 1170

diagramme de Bode asymptotique, 900, 912, 982, 983, 985, 986, 1011, 1012, 1013, 1018, 1022, 1149

diagramme de Bode de gain, 716, 887, 888, 891

diagramme de Bode de phase, 891

diagramme de Fresnel, 728, 729, 732, 733, 1107, 1118, 1120

diagramme de Nyquist, 1158, 1163

en Electronique

diagramme polaire de la pression, 440, 444, 445

diagrammes énergétiques des deux cristaux constituant la jonction d'une diode, 608

diagrammes thermodynamiques

diagramme de Clapeyron PV, 509, 527, 539, 566, 578, 580

diagramme de Watt PV, 563

diagramme de Mollier TS, 534, 537, 538, 563, 565, 567, 591, 594

diagramme h T, 583

diagramme vT, 584

diagramme entropie-énergie, 546

en Astrophysique

diagramme force-longueur pour un fil de caoutchouc, 542

diamètre d'objectif

en Optique ondulatoire, 1361

diaphragme

en Optique ondulatoire, 1363, 1399

Diesel [cycle de], 523, 525

consommation de gas oil, 526

combustion interne [moteur à], 522, 523

différence de marche [ou de chemin optique], 1360, 1390, 1392, 1410, 1419, 1420, 1425, 1445, 1450

différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre, 1419

différence de marche supplémentaire introduite par une lame à faces parallèles placée orthogonalement aux rayons, 1352

différence de marche supplémentaire introduite par une lame à faces parallèles sous incidence i, 1353

différence de phase optique, 1415

- retard de phase d'un rayon sur le rayon voisin, 1450
 - différence de marche supplémentaire introduite par une lame à faces parallèles placée orthogonalement aux rayons, 1352
- différence de phase optique**, 1415
 - retard de phase d'un rayon sur le rayon voisin, 1450
- diffraction** [voir diagramme de Huygens-Fresnel]
 - diffraction de pupille rectangulaire ou quelconque, 1370, 1375, 1376,
 - diffraction par une fente, 1348, 1350, 1366, 1383, 1399
 - diffraction d'une fente module les franges d'interférences, 1356, 1386, 1395
 - diffraction par un miroir plan, 1389
- diffusion**, 130, 480, 626, 633, 634, 637, 638, 640
 - diffusion moléculaire des molécules du marqueur, 1409
 - diffusion limite, 629
 - diffusion à travers une membrane, 626
 - coefficient de diffusion, 633, 637, 673
 - coefficients de diffusion de part et d'autre d'une interface, 629
 - constante de partage, 629
 - couche de diffusion, 629
- diffusion thermique**, 664
 - coefficient de diffusion, 633, 637, 673
- diffusivité thermique, 675
- digit [numérisation], 704, 1068
- dilatation, 663, 1292
 - dilatation relative, 1288
- dimension, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 63, 67, 69, 71, 74, 120, 180, 189, 194, 367, 388, 392, 403, 439, 441, 442, 446, 447, 470, 472, 480, 481, 490, 500, 555, 626, 627, 629, 634, 637, 648, 665, 670, 673, 675, 676, 679, 683, 689, 704, 705, 706, 735, 736, 737, 739, 782, 787, 800, 844, 847, 864, 882, 988, 991, 1013, 1020, 1299
 - analyse dimensionnelle, 63, 673, 677
- diminution de désordre**, 618, 623
- diode**, 857, 1082, 1085, 1092
 - diode passante, 858, 859, 892, 1091, 1092, 1094, 1159
 - diode idéale, 857
 - diode de roue libre, 1094
 - diode bloquée puis passante, 1095
 - diode bloquée, 858, 859, 1092, 1094, 1099
 - diode bloquée, 858, 859, 1092, 1094, 1099
 - diode cristalline [diagrammes énergétiques des deux cristaux constituant la jonction d'une], 608
 - photodiode, 1423, 1432
 - diode laser à semi-conducteur**
 - diode laser de longueur d'onde variable avec le courant d'injection, 1421, 1422
 - en Optique ondulatoire, 1420
 - diode passante**, 858, 859, 892, 951, 1091, 1092, 1094, 1159
 - diode Zener**, 702
 - diodes Zener, 1024, 1032
- dioptre**, 1325
 - dioptre non stigmatique sous faible incidence, 1341
 - conditions de continuité sur un dioptre [entre deux isolants], 1329
- dipôle**

- dipôle de commande** [de moteur], 1082, 1084
- dipôle de Thévenin-Norton**
 - dipôle R C, 912
 - dipôle linéaire passif., 716
 - dipole équivalent, 703
 - dipôle de résistance infinie, 852
- dipôle de Thévenin-Norton en alternatif**, 1116
- dipôle électrostatique**, 735, 737, 740, 741, 747, 751, 756, 781, 783, 784, 804
- dipôle magnétique**, 781, 783, 784, 804
- discontinuité de H tangentiel**, 806
- discontinuité du champ magnétique tangentiel**, 775, 802
- discrétisation [numérisation], 1044
- discrétisation du vecteur d'onde [d'une onde de torsion dans un cas fini d'oscillateurs], 1310
- discriminateur , 1147
 - en Automatique, 11467
- dispersion des vitesses[thermodynamique statistique], 612
- distance angulaire des composantes d'une étoile double non symétrique, 1365
- distance angulaire d'une étoile double symétrique, 1363, 1380
- distance d'arrêt
 - en Mécanique du solide, 264, 265
- distance entre les images dans un Pérot-Fabry dérégulé, 1447
- distance équatoriale de la ligne de champ magnétique terrestre, 784
- distance focale, 1320
- distribution gaussienne, 638
- distribution surfacique de force, 170
 - densité surfacique de forces, 328
- divergence en coordonnées cylindriques, 637
- division du front d'onde
 - en Optique ondulatoire, 1450
- Doppler** [effet], 615, 623, 1362, 1410
 - effet Doppler-Fizeau, 1411
- double dérivation
 - en Electronique, 896
- double intégration
 - en Electronique, 896
- droite de charge**[cf dipôle de Thévenin-Norton], 964, 1139
 - droite de charge mécanique d'un moteur à courant continu, 1078
- durée de glissement
 - en Mécanique du solide, 244
- durée des mesures d'un détecteur métrique[durée d'intégration très supérieure à la période du rayonnement reçu], 1435
- durée des temps haut du signal [numérisation], 876
- durée d'une commutation, 1031
- durée totale de l'arrêt à couple constant, 1103
 - en Electrotechnique
- durée totale nécessaire pour obtenir l'arrêt du groupe, 1099
 - en Electrotechnique
- dynamique du solide, 141

dynamo, 1066
dynamo unipolaire, 837

E

EB, 1044
 échantillonneur bloqueur [numérisation], 1040
écart fréquentiel entre les deux pics latéraux[analyse de signal], 1435
échangeur thermique, 655
échantillonnage [numérisation], 890, 993, 994, 995, 1040, 1045, 1159, 1160
échantillonneur bloqueur [numérisation], 1040
 EB, 1044
échantillons, 993
 échantillonnage [numérisation], 890, 994, 995,
 1040, 1045, 1159, 1160
échelle de Beaufort des vents, 391
échelle de hauteur, 516
 constante d'espace[longueur de référence], 625, 953
échelle linéaire, 717
échelle logarithmique, 717
échelon de Heaviside, 902, 926, 928, 929, 1098, 1138
échelon de tension, 902, 926, 928, 929, 1098, 1128, 1138
écho, 78
éclairage cohérent, 1385
éclairage incohérent, 1344
 éclairage incohérent, 1386
écoulement bi-dimensionnel, 498, 499, 501
écoulement hypersonique, 581
écoulement irrotationnel, 462
 potentiel des vitesses, 323, 381, 383, 389, 439, 454, 458, 806, 1271
écoulement isentropique, 1271, 1275
écoulement rampant, 494, 498
écoulement tangentiel à une paroi, 322
écran au champ magnétique, 829, 831
écran placé dans le plan focal d'une lentille, 1347
écriture matricielle d'une loi linéaire, 908
 en Mathématiques
effet d'une rotation continue de l'analyseur, 1458
effet d'une rotation d'angle d'un miroir diffractant, 1390
effet de carène liquide, 413
effet de serre, 695, 696
effet de translation du miroir diffractant, 1390
effet électro-optique, 1212
effet Joule, 707, 771, 773, 775, 780, 816, 822, 830, 838, 944, 950, 962, 1050, 1069,
1097, 1116, 1125, 1182
effet Magnus, 348, 383
effets de bord, 749, 804
effets dissipatifs, 465, 475, 478, 490, 1182
efficacité, 530, 577, 589, 593, 594
 efficacité d'une machine frigorifique à deux compresseurs, 590

- efficacité de la machine de Carnot frigorifique, 590
- effort
 - effort du socle [résistance des matériaux], 163
 - en Sciences de l'Ingénieur
 - effort exercé par le fluide, 345
 - efforts surfaciques normaux [résistance des matériaux], 1292
 - en Sciences de l'Ingénieur
 - efforts surfaciques tangentiels [résistance des matériaux], 1292
 - en Sciences de l'Ingénieur
- égalité de Clausius**
 - en Thermodynamique, 530
 - inégalité de Clausius, 536, 548, 553, 577, 580, 658
- égalité des tensions s'exerçant sur une poulie** ou galet de masse négligeable, 1080
- Einstein [deuxième coefficient pour l'absorption laser], 685
- élargissement temporel de l'impulsion lumineuse à la sortie de la fibre optique, 1330
- électro-aimant, 1073, 1074, 1127
- électrodynamique, 785
- électromètre, 756, 761
- électron de conduction, 605
- électronique de puissance**, 1053
- électrons de valence, 605
- électrostatique, 735
- électrotechnique, 732
- électrovanne, 860, 1157
 - électrovanne commandée numériquement, 1159
- élément neutre de la corrélation, 1001
 - en Mathématiques
- éléments chargés correspondants [électrostatique des conducteurs], 753, 754
- élévation au carré par un multiplicateur, 1033
- éliminer l'ordre supérieur d'un pic brillant en Optique ondulatoire, 1392
- émetteur de transistor**, 951, 1092
- émetteur hyperfréquence, 1175
- émission induite (ou stimulée) du laser, 685
- émission spontanée [cf laser], 684
- énergie cinétique de rotation moyenne [thermodynamique statistique], 601, 605
- énergie cinétique**, 122, 123, 125, 126, 127, 128
 - en Mécanique, 141, 146, 149, 150, 155, 166, 174, 180, 191, 194, 198, 206, 216, 217, 225, 237, 265, 298, 303, 306, 316, 317, 318
- énergie cinétique macroscopique** négligée en thermodynamique, 533, 579, 586, 587, 588
- énergie cinétique massique**
 - en Mécanique des fluides, 400, 405
- énergie cinétique volumique**
 - en Mécanique des fluides, 362
- énergie de masse en relativité**, 124, 127, 131, 132
- énergie de vibration moyenne [thermodynamique statistique], 600, 603
- énergie d'interaction entre deux dipôles magnétiques**, 805
- énergie dissipée par hystérésis**, 814
 - énergie dissipée rapporté à l'unité de volume, 818
- énergie du dipôle dans un champ électrostatique**, 741, 742

- énergie d'un condensateur**, 759
- énergie d'un photon**, 1189, 1192
- énergie d'un signal** [cf Parseval], 992, 1000, 1002
- énergie électromagnétique** traversant une surface par unité de temps, 1270
- énergie électrostatique d'un condensateur**, 757
- énergie électrostatique d'un système**, 736, 795
- énergie électrostatique mutuelle de dipôles**, 744
- énergie fournie au réseau d'alimentation** pendant le freinage [à couple constant] d'un moteur à courant continu, 1099, 1103
- énergie interne**, 527, 529, 556, 563
 - énergie interne volumique, 564
 - énergie interne massique, 563, 1271
- énergie libre**, 539, 541, 546, 664
- énergie magnétique**, 773, 814, 820, 838, 930, 1119
 - énergie magnétostatique, 771
- énergie magnétique d'un système**, 795
- énergie mécanique massique**, 563
- énergie potentielle**, 141, 143, 146, 149, 233
 - énergie potentielle des forces d'inertie, 168, 546
 - énergie potentielle gravitationnelle, 71, 73, 78, 85, 102
 - énergie potentielle d'ultracentrifugation, 640
- énergie potentielle massique**, 400, 405
- énergie sonore** [conservation de l'], 1275
- énergie sonore** [formule de Reynolds pour l'], 1275
- énoncé du principe d'Huygens-Fresnel, 1381
- enroulement primaire d'un transformateur, 1048
- ensemble convertisseur électromécanique + moteur à pistons en régime permanent, 1119
- ensemble de bobines fixées sur un rotor, 1077
- ensemble de modes, 1305
- ensemble tambour-moteur d'un système de levage, 163
- enthalpie**, 529, 556, 563, 579
 - enthalpie molaire, 556
 - enthalpie massique, 563, 583, 584, 585, 588, 591, 1271
- enthalpie libre**, 556, 557, 563, 569, 573
 - enthalpie libre volumique, 564
 - enthalpie libre molaire, 556
- entrefer**, 814, 815, 817, 821, 1066
- entropie**, 527, 529, 539, 556, 563, 585
 - entropie volumique, 567
 - entropie molaire, 558
 - entropie massique, 563, 564, 583, 1271
 - entropie massique d'un mélange, 593
 - entropie massique créée, 564
- enveloppe d'aérostat parfaitement souple, 532
- enveloppe à la famille des paraboles de paramètres m , 1338
 - enveloppe mathématique, 894
 - en Mathématiques
- éolienne, 359, 361, 362, 364, 406
- en Energétique

épaisseur de lame de quartz [pour la loi de Biot], 1457

épaisseur de peau, 831, 836

équateur géomagnétique, 784

en Géophysique

équation approchée de caractéristique du troisième degré, 444, 943

en Mathématiques

équation d'une isobare, 536

équation de Fick de la diffusion, 626, 627, 629, 633, 634, 637

équation de Fick avec recombinaison, 951

Fick[équation de], 129, 134, 480

équation de Fourier de la chaleur, 665, 669, 671, 672, 675

équation de la chaleur, 651, 661

équation de la courbe de première aimantation, 813

courbe de première aimantation, 813

équation de Laplace, 321, 439, 754, 758, 762, 799

équation de Navier-Stokes, 494, 1294

Poiseuille, 481, 482

viscosité, 30, 119, 173, 383, 393, 395, 396, 413, 429, 430, 431, 432, 467, 468, 469, 470, 473, 479, 482, 483, 484, 487, 488, 492, 494, 495, 498, 499, 500, 501, 502

équation de sédimentation [due à la diffusion], 637, 638

équation d'état de Van Der Waals, 575, 576

équation d'état d'un gaz réel, 527

équation d'Euler, 664, 1271, 1294

en Mécanique des fluides, 368, 372, 388, 392, 402, 419, 423, 428, 430, 435, 438, 460, 476

équation différentielle à variables séparées, 840

en Mathématiques

équation différentielle complexe associée, 962

en Mathématiques

équation électrique d'un système électromécanique, 838, 1066, 1079, 1101, 1132

équation polaire, 16, 21, 84, 86, 88, 230

en Mathématiques

équation séculaire des pulsations propres d'oscillateurs couplés, 1311

équations d'Euler, 555, 1284

en Mécanique des fluides, 338, 405, 432, 433, 434, 451, 452, 455, 495, 499, 502

équations de Lagrange en mécanique analytique, 297, 298, 300, 302, 600

cloche, 297, 298, 302

équations de Maxwell, 765, 806

équations d'un cycle d'hystérésis, 813

équations paramétriques de trajectoire, 12, 13, 58

en Mathématiques

équilibre

équilibre d'une roue lestée, 141

statique du système complet, 164

équilibre de l'articulation, 164

en Sciences de l'Ingénieur

équilibre de dipôles électrostatiques, 742

en Mécanique du point ,6, 7, 9, 10, 60, 63, 66, 67, 68, 75, 76, 77, 99, 100, 102,

105, 127
en Mécanique du solide ,142, 143, 168, 180, 181, 182, 184, 185, 187, 189, 190, 191, 193, 194, 196, 199, 206, 207, 209, 219, 220, 223, 226, 232, 233, 234, 247, 253, 254, 256, 257, 259, 269, 272, 276, 283, 284, 286, 294, 295, 298, 302, 303, 304, 306, 307, 308, 309, 310
en Mécanique des fluides ,327, 328, 330, 332, 333, 334, 336, 337, 395, 397, 399, 400, 401, 406, 413, 414, 415, 416, 417, 419, 420, 425, 459, 469, 497, 499, 501, 504
en Thermodynamique ,512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 521, 522, 531, 533, 540, 545, 546, 547, 548, 549, 558, 559, 560, 561, 563, 573, 575, 583, 587, 600, 602, 607, 638, 640, 641, 661, 664, 665, 681, 682, 692, 696
en Electricité fondamentale ,748, 750, 758, 760, 776, 779, 780, 781, 805, 812, 842
en Electronique ,869
équilibre de changement d'état, 592
équilibre de sédimentation [diffusion], 638, 641
équilibre relatif, 637
équilibre hydrostatique, 363
équilibre moléculaire [thermodynamique statistique], 596, 599
équilibre thermodynamique
en Thermodynamique ,557, 558, 559, 596, 608, 664, 684, 691
équilibriste, 252, 253, 254, 256, 257
en Sports
équipotentielle [ligne ou surface], 741, 742
équipotentielle zéro, 742, 745, 747, 750
équivalence de formulation [tout se passe comme si], 719, 1050, 1075, 1117, 1118
équivalence triangle étoile utile en triphasé, 727
erreur [sortie du soustracteur en automatique], 1178
erreur statique, 1144, 1147, 1148, 1158
erreur nulle, 1174
erreur échantillonnée, 1159
erreur dynamique, 1144, 1166
erreur de traînage, 1158
erreur en physique
erreur systématique, 1071
erreur statistique de la mesure de l'altitude, 1169
erreur relative, 976, 980
espace des vitesses [thermodynamique statistique], 597
espace fréquentiel, 994
espace temporel, 994
espace temporel, 994
espace fréquentiel, 994
essai à vide d'un moteur à vitesse constante, 1069
essieux, 351
étalonnage du spectroscope, 1354
état de vapeur saturée, 589
vapeur saturante, 554, 583
état haut de l'AO, 875
état lié [énergie mécanique négative], 19
état supraconducteur, 570, 573

étoile double, 101
 étoile double Capella, 1362
 étoile double et diffraction, 1378
 85 Pégase [étoile double], 1361
 étude du moteur à vide, 1116
 étude cinétique d'une diffusion, 629
étude quadripolaire d'une ligne bifilaire, 1259
 évaporateur
 en Thermodynamique, 589
 évasement brusque
 en Mécanique des fluides, 466
 excédent fractionnaire
 en Optique ondulatoire, 1419
excentricité d'une conique, 76, 83, 84, 88, 89, 110, 111, 114
excentricité après choc, 80
 excitateur d'oscillateurs, 1309
 excitation forcée d'un pendule pesant, 1038
 excitation du clairon, 1285
 excitation du clairon, 1285
 excitation magnétique [cf H], 812
 excitation magnétique coercitive d'annulation de
 l'aimantation, 818
 excursion en fréquence d'une fréquence modulée, 1146, 1166
expression intrinsèque du champ magnétique d'un dipôle magnétique, 783
 extension des performances des télescopes, 1368
 extracteur de racine carrée
 en Electronique, 1026

F

f.é.m., 707
 f.é.m. du générateur de Thévenin, 1036, 1037
 f.é.m. induite, 814, 819, 846, 1049
force électromotrice en triphasé, 1117, 1123
 F.F.T.[fast Fourier transformation], 1308
 facteur de Boltzmann, 513, 546
 Boltzmann [théorie thermodynamique statistique de], 640
 constante de Boltzmann., 612
 facteur de noyau magnétique, 814
facteur de puissance [cosinus du déphasage tension intensité], 732, 882
facteur de qualité [ou de surtension], 722, 816, 822, 851, 855, 907, 941, 1176, 1181
facteur de réflexion de puissance acoustique, 1273
 facteur de réflexion en puissance de l'interface atmosphère-ionosphère, 1248, 1252
 facteur de transmission de l'amplitude optique, 1381
 facteur de transmission de puissance d'une ligne, 1262
facteur de visibilité, 1342, 1343, 1360
 contraste, 1412, 1416
 coefficient de cohérence partielle, 1368
 degré complexe de cohérence spatiale, 1365
 visibilité, 1345, 1346, 1362, 1365, 1369

- faisceau de photons d'un laser[pression de radiation], 1189
- faisceau gaussien d'ondes électromagnétiques, 1212, 1216
- faisceau lumineux à peu près parallèle dans un polarimètre, 1457, 1458
- faisceau lumineux conique convergent des fibres optiques, 1330
- fentes utilisées en optique : rotation de fentes**, 1380, 1382
 - fente source très fine centrée au foyer-objet de la lentille d'éclairage, 1351
 - fente source infiniment fine [pour les miroirs de Fresnel], 1342
 - fentes sources infiniment fines incohérentes [pour les miroirs de Fresnel], 1342
 - fente source unique de largeur réglable [pour les miroirs de Fresnel], 1342
 - fentes utilisées supposées extrêmement fines, 1347
 - fentes d'Young, 1347
 - troisième fente, 1347
 - troisième fente de largeur double, 1347
 - fente source du spectroscope, 1358
 - éclairage des fentes d'Young très fines, 1352
 - amplitude diffractée par une fente finie de largeur l , 1439
- ferrite, 812, 814
- feuilletage [contre les courants de Foucault], 833
- fibre de verre**, 1328
 - fibre optique à saut d'indice, 1330
 - fibres à gradient d'indice, 1330
 - fibre optique [atténuation dans la], 1329
 - fibre optique [angle limite de réflexion totale dans une]
 - fibre optique [angle limite réflexion totale dans une]
- Fick**, 129, 134, 480, 626, 627, 629, 633, 637
- figure de diffraction obtenue dans le plan focal-image de la lentille d'observation, 1351, 1363
- fil de caoutchouc, 539
- fil de torsion, 757
- fil infini électrisé uniformément [en Electrostatique], 745
- fil neutre du triphasé, 727, 1057
- filtres électroniques**
 - filtres idéaux simples**, 995, 1033
 - filtre passe bas**, 1006, 1016, 1034, 1089, 1184
 - filtre passe-bas du premier ordre, 1016
 - forme normalisée d'un filtre passe-bas d'ordre deux, 884
 - filtre passe bas idéal, 997, 998, 1004, 1008
 - filtre passe-bas idéal, 915
 - filtre passe-bas, 880, 912, 968, 971, 1010, 1030, 1150, 1179, 1433
 - défauts systématiques de filtre passe bas, 913, 916
 - filtre passe bande**, 847, 854, 911, 948, 996, 1147, 1181
 - filtre passe bande accordé, 982, 985
 - filtre accordable, 983, 987
 - circuit peu sélectif, 945
 - forme canonique des filtres passe-bande, 854
 - montage très sélectif, 987
 - filtre à selfs et mutuelles, 926
 - filtre

- en Mécanique du point ,40, 47
- en Thermodynamique ,697
- en Electronique ,912
- en Automatique ,1092
- filtrage numérique, 890
- filtre récursif analogique, 1010
- gabarit de filtre, 912
- filtres optiques**
 - filtre
 - en Mécanique du point ,40, 47
 - en Thermodynamique ,697
 - en Electronique ,912
 - en Automatique ,1092
 - filtrage spatial, 1378, 1398
 - filtre optique, 1166, 1168
 - filtre gris, 1380
 - filtre apodisant, 1381, 1388
- finesse du Pérot-Fabry, 1448
- finesse, 1453
- fission nucléaire, 126, 127, 129
- flexion mécanique, 286, 292
 - en Sciences de l'Ingénieur
- fluctuations en physique statistique, 687
- fluorure de baryum [MMC d'un cristal anisotrope], 1289
- flux coupé, 1079, 1131
- flux coupé (par radian), 1308, 1313
- flux de retour et de plongement, 493
 - en Géophysique
- flux lumineux reçu[courant électrique du récepteur proportionnel au], 1414
- flux magnétique**
 - flux magnétique propre, 1118
 - flux magnétique mutuel, 1118, 1124
 - flux magnétique total, 828, 1124
 - flux total d'induction magnétique, 827
 - flux magnétique maximal, 814
 - flux magnétique créé, 1117
 - flux dans une section du circuit magnétique, 1055
 - flux magnétique à travers une section, 814, 1047, 1049
 - flux magnétique sous un pôle, 1127
 - en Electrotechnique
- flux maximum** [loi du], 780
- focalisation de faisceaux de particules**, 38, 45, 50, 53, 55
- fonction d'Airy**
 - en Optique ondulatoire, 1448, 1453, 1455
- fonction de corrélation de deux signaux en théorie du signal, 992
 - fonction d'autocorrélation, 992, 1000
 - fonction d'autocorrélation moyenne, 993
 - en Mathématiques
 - fonction de cohérence d'un corrélateur de radioastronomie, 1438, 1444
- fonction de courant**

- en Mécanique des fluides, 432, 437
- fonction de transfert**, 716, 815, 853, 876, 881, 885, 913, 922, 923, 929, 940, 942, 996, 1004, 1009, 1011, 1012, 1022, 1026, 1083, 1129, 1130, 1131, 1159, 1166, 1167
 - fonction de transfert idéale, 994, 1012
 - fonction de transfert d'un passe bas fonction de la charge ou du montage, 916, 919
 - fonction de transfert de la chaîne directe, 1130
 - fonction de transfert du correcteur, 1168
 - fonction de transfert de la chaîne de retour, 1133
- fonction d'échantillonnage [numérisation], 1001
 - fonction échantillonnée[numérisation], 1001
- fonction échantillonnée[numérisation], 1001
 - fonction d'échantillonnage [numérisation], 1001
- fonction échelon unitaire, 996
 - en Mathématiques
- fonction en escalier, 1016
 - en Mathématiques
- fonction MSR [mean square root][pour voltmètre numérique], 1025, 1033
- fonction retard**, 922, 1008, 1010, 1016
 - fonction retard approchée, 884, 1004
- fonction sinus cardinal**
 - en Optique ondulatoire, 1379, 1403
- fonctionnement à vide du transformateur, 1058
- fonctionnement à vide en triphasé, 1129, 1137, 1138
- fonctionnement linéaire d'un AO, 941
- fonctionner à couple constant, 1099
- force**, 4, 12, 13, 18, 25, 26, 27, 28, 30, 56, 57, 60, 61, 62, 63, 66, 67, 68, 75, 76, 77, 85, 88, 89, 90, 94, 96, 102, 105, 113, 119, 348, 349, 367
 - en Mécanique
- force contre électromotrice**
 - force contre-électromotrice, 1136
 - f.c.é.m. de moteur, 1094
 - f.c.é.m dans l'induit., 1070
- force de Laplace**, 776, 777, 778, 846
 - force de Laplace moyenne en alternatif, 779
- force de Lorentz**, 785
- force de Van der Waals** [voir liaisons en Chimie], 605
- force d'inertie**, 4, 6, 168, 179, 220, 221, 223, 241, 270, 273, 316, 337, 433
 - Coriolis, 4, 6, 8, 56, 57, 77, 102, 105, 270, 316, 431, 432, 433, 435
- force linéique de contact, 211, 215
 - force linéique de tension superficielle, 682
 - tension superficielle, 451, 460, 463, 557, 633, 680, 682
- force magnétique d'interaction dipôle magnétique-milieu supraconducteur, 805
- force magnétomotrice [formule d'Hopkinson], 821, 1054
- force massique**
 - en Mécanique des fluides, 438
- force portante**, 291
 - en Mécanique des fluides, 388, 390, 395, 398, 401, 406
- force propulsive**
 - force propulsive., 383

- en Mécanique des fluides, 377, 384
- force surfacique, 1191
 - en Mécanique des fluides, 430, 432, 465, 482, 493, 495, 497, 498, 500
- force volumique
 - force volumique issue du tenseur des efforts, 1291
 - force volumique de Laplace, 1294
 - en Mécanique des fluides, 349, 433, 442, 449, 451, 499, 502
- forces centrales**, 2, 5, 96
 - champ de forces centrales, 2
- forme canonique des filtres passe-bande**, 854
- forme différentielle canonique** des fonctions d'état de la thermodynamique, 559, 563, 565, 570, 664
- forme locale du théorème d'Ampère**, 808
 - théorème d'Ampère, 1049
- forme normalisée d'un filtre passe-bas d'ordre deux, 884
- formulaire d'analyse vectorielle, 387
- formule de Stokes, 30
- formules de Fresnel sous incidence oblique
 - en Ondes électromagnétiques, 1205
- four à chaleur tournante, 662
- Fourier**, 669
 - série de Fourier, 813, 819, 885, 888, 893, 919, 921, 922, 925, 942, 946, 982, 984, 991, 993, 997, 1001, 1005, 1006, 1034, 1064, 1083, 1088, 1303, 1305
- foyer**, 1323
 - foyers objets et images, 1323
 - foyer image, 1320
- fraction rationnelle, 716
 - en Mathématiques
- franges en optique**
 - franges rectilignes d'égale épaisseur, 1429
 - frange centrale, 1343
 - frange achromatique, 1353, 1358
- frein à poudre, 1068, 1070
 - en Electrotechnique
- frein de Prony
- freinage, 497
 - en Mécanique du solide, 178, 264, 266, 268, 269
- freinage avec récupération**, 1098
 - en Electrotechnique
- Frenet**, 7, 8, 27, 36, 45, 125, 372, 401, 405, 869
- fréquence de coupure**, 881, 969, 1030, 1180, 1231
 - fréquence de coupure du guide d'onde, 1234
- fréquence de coupure ajustable d'un filtrage temporel, 884
- fréquence d'échantillonnage [numérisation], 891
- fréquence d'oscillation**, 975, 1178
 - fréquence réglable, 939
 - fréquence centrale de l'oscillateur, 1180
- fréquence émise à l'équilibre du système régulé
 - en Automatique, 1180
- fréquences propres de la corde**, 1303

Fresnel [méthode de], 728, 729, 732, 733, 1107
diagramme de Fresnel, 1118, 1120
frottement solide, 170, 227, 247, 269, 271, 330
frottement statique, 227
frottement visqueux, 225, 294, 469, 626, 842, 863, 1156
fuites magnétiques, 814, 817
fusée, 15, 16, 20, 23, 75, 77, 78, 97, 374

G

gabarit de filtre, 912
gain, 919, 941, 942, 983
 gain en tension, 973, 988
 gain différentiel, 866
 gain d'un filtre passe-bas idéal, 893
 gain maximum, 887, 982, 983, 985, 986, 1030
 gain fini, 1022
 gain à fréquence nulle, 1180
 gain infini, 968
 gain indépendant, 1036
 gain indépendant de l'AO réel, 1037
 gain en courant
 gain en courant, 952, 955
 gain statique en courant, 952, 954, 955
 gain dynamique en courant, 955
 gain dynamique, 952
 gain de l'amplificateur différentiel, 1038
 gain d'AO avec fréquence de coupure, 1022
 gain d'un système bouclé, 974
 gain critique d'oscillation, 975
 gain d'oscillation, 975
 gain critique d'oscillation modifié, 975
 gain critique, 974
galets, 1078
 en Sciences de l'Ingénieur
gap énergétique [entre bandes d'états du silicium], 610
Gauss [théorème de], 18, 51, 384, 735, 738, 739, 745, 746, 748, 749, 754, 755, 796, 798
Gauss [théorème de]adapté à la gravitation, 338
gaz
 gaz parfait, 509, 511, 512, 513, 515, 516, 518, 580, 595, 596, 601
 gaz réel, 575
 gaz inerte, 559
 gaz diatomique, 525
gel d'un lac, 672, 673
générateur de courant, 721, 775, 813
 générateur de courant parfait, 960
 source de courant, 966, 967
 source de courant commandée par une tension d'entrée, 1430

- source de courant commandée par une vitesse, 837, 840
- source de courant quasi parfaite donc en parallèle sur une conductance négligeable, 1432
- générateur de tension**, 704, 712
 - générateur de tension parfait, 956
 - générateur de Thévenin équivalent, 1035, 1036
 - générateur de tension commandé en tension, 722
 - générateur de tension alternative, 956
 - générateur de tension en dents de scie, 1166
 - source idéale de tension, 940
 - source de tension commandée par une différence de courant, 970
 - générateur de tension électrostatique, 748
- génératrice**, 1101
 - génératrice tachymétrique, 1068, 1138
 - en Electrotechnique
- Géologie : voir aussi table des matières
- glissement**, 205, 206, 208, 211, 212, 215, 218, 219, 227, 234, 237, 238, 243, 244, 253, 254, 256, 258, 264, 269, 270, 273, 312, 330, 351, 355, 482
- glisseur**, 263, 264, 265, 279, 354, 735, 737
- gouverne d'avion
 - en Transports
 - en Automatique, 1138
- gradient, 275, 323, 516, 555, 556, 626, 634, 675, 680, 681, 682
 - gradient d'indice de réfraction, 634
 - gradient en coordonnées cylindriques, 747, 762
 - gradient en coordonnées polaires, 753
- grand axe de conique**, 84, 86, 91, 96, 109, 101, 110, 111
- grandeur dynamique du transistor, 957
- grandeur extensive
 - en Thermodynamique, 556
- grandeur molaire [grandeur intensive]
 - en Thermodynamique, 556
- grandeur statique du transistor, 957
- grandeurs thermodynamiques rapportées à l'unité de masse**, 533, 554, 555, 566, 567, 579, 583, 586, 588, 589, 591, 593, 655, 657
- granulométrie de surface [assure une diffusion de la lumière analogue à la diffraction par une pupille], 1392
- graphe**
 - en Mécanique du point, 6, 14, 33, 34, 36, 49, 51, 61, 64, 65, 70, 117, 118, 120, 121
 - en Mécanique du solide, 150, 152, 171, 173, 180, 181, 182, 183, 185, 187, 189, 190, 193, 201, 247, 249, 271, 284, 288, 291, 292, 304
 - en Mécanique des fluides, 359, 374, 377, 380, 381, 391, 407, 410, 452, 482, 494, 497, 498, 501, 505
 - en Thermodynamique, 516, 519, 529, 537, 539, 546, 551, 552, 557, 558, 560, 562, 564, 566, 569, 570, 571, 572, 573, 595, 600, 602, 612, 613, 614, 615, 616, 619, 622, 630, 632, 634, 643, 644, 645, 651, 654, 663, 667, 669, 670, 671, 673, 676, 677, 685, 688, 689, 695
 - en Electricité fondamentale, 704, 705, 720, 721, 723, 735, 736, 739, 741, 744, 748, 776, 779, 780, 784, 785, 788, 804, 805, 809, 813, 817, 830, 831, 834, 835,

837, 840, 843, 844, 845, 847
 en Electronique, 859, 875, 878, 880, 884, 891, 894, 896, 900, 901, 902, 912,
 914, 919, 922, 923, 924, 926, 927, 928, 929, 933, 934, 936, 939, 940, 941, 942,
 945, 946, 947, 949, 953, 956, 961, 982, 983, 992, 993, 995, 996, 997, 998, 1003,
 1009, 1010, 1012, 1016, 1021, 1023, 1024, 1025, 1027, 1033, 1034, 1039
 en Electrotechnique, 1027, 1033, 1034, 1039
 en Automatique, 1027, 1033, 1034, 1039, 1066, 1069, 1070, 1072, 1073, 1083,
 1084, 1087, 1089, 1090, 1092, 1094, 1095, 1098, 1100, 1103, 1116, 1117, 1119,
 1136, 1138, 1178
 en Ondes mécaniques, 1303, 1311
 en Optique ondulatoire, 1347, 1363, 1391, 1401, 1418, 1436, 1448
 graphique : voir graphe
 gravitation [voir pesanteur], 15, 18, 75, 77, 83, 88, 94, 95, 96, 99, 109, 110, 112, 113
 grossissement angulaire, 1326
guide d'onde, 836, 1238
 guide d'onde rectangulaire, 1231
 guide d'onde [angle d'incidence dans le], 1232
 transversalité d'un champ [imposer techniquement la], 1245
Guldin [théorème de], 178
 gyrateur, 906

H

hacheur, 1082, 1093
 hacheur série, 1096
 hacheur réversible en courant, 1097
 en Electrotechnique
haut-parleur, 842
 haut-parleur associé à un générateur basse
 fréquence, 1281
 haut-parleur aux faibles déplacements
 d'excitation noeud de vitesse de déplacement et
 ventre de surpression, 1285
hélice, 13, 33, 37, 45, 358, 359, 406, 407, 408, 409, 410, 413, 786, 790
 Hopkinson (formule de), 1054
 en Electrotechnique
 Helmholtz, 780
 horloge, 721, 890, 997, 1022, 1025
 houle
 en Mécanique des fluides, 418, 419, 454
 en Géophysique
Huygens [théorème sur les moments d'inertie d'], 175, 213, 289, 301, 305
 Huygens-Fresnel [énoncé du principe d'], 1381 [voir principe de]
 hydraulique, 465
 hystérésis et mécanique, 66, 179, 188, 203

I

identification

- en Mécanique du point ,13, 21, 62, 63, 64, 65, 98, 108
- en Mécanique du solide ,195, 196
- en Mécanique des fluides ,357, 420
- en Thermodynamique ,514, 529, 542, 550, 571, 595, 640, 651
- en Electricité fondamentale ,724, 752, 775, 799, 802, 807, 815, 819, 820, 821, 828, 843, 847
- en Electronique ,856, 901, 907, 911, 915, 944, 948, 965, 971, 988, 990, 1014, 1041
- en Electrotechnique ,1041
- en Automatique ,1041, 1081, 1128, 1163, 1174, 1176

- image électrique [problème équivalent], 750
- image magnétique [problème équivalent], 805

image géométrique, 1402

image géométrique et diffraction, 1371

- image magnétique [problème équivalent], 805
- image électrique [problème équivalent], 750

impédance [électrique], 716, 721, 923, 1168

impédance acoustique, 1283, 1287

- impédance acoustique et déphasage, 1287

- impédance acoustique réduite, 1284

impédance caractéristique

- en Electronique, 914, 917, 921, 923, 1014, 1261
- en Automatique, 1177
- en Ondes électromagnétiques ,1257
- en Ondes mécaniques ,1312

impédance de charge, 1104, 1117, 1118

- en Electrotechnique

impédance de la ligne à l'abscisse x , 1254

impédance de ligne

- impédance vue à l'entrée de la ligne, 1010
- impédance mécanique d'une ligne d'oscillateurs de torsion, 1313
- impédance itérative, 1257

impédance élecomécanique, 847

impédance mécanique de torsion, 1316, 1319

impédance équivalente, 965, 1176

impédance ramenée dans le primaire par un transformateur, 1181

impédance réduite du dipôle, 1260

impédances des quadripôles

- impédance de sortie, 854, 905
 - impédance de sortie nulle, 966, 968, 1020
- impédance d'entrée, 865, 871, 905, 906, 921, 961, 1009, 1068, 1260, 1312
 - impédance d'entrée d'un ampli de tension, 965
 - impédance d'entrée infinie, 904, 966, 968, 1020
- impédance caractéristique du quadripôle, 1009, 1260

imperfection du générateur, 1222

imperfections des bobines, 927

impulsion lumineuse, 1330

impulsion unité, 991

impulsions délivrées par l'horloge, 1025

- impulsions d'horloge comptées en nombres proportionnels aux durées [numérisation], 1027
- incertitude**, 50, 53, 54, 98, 123, 125, 135, 330, 399, 405, 419, 518, 592, 614, 618, 684, 693, 703, 706, 712, 713, 1071, 1184, 1285, 1413
 - incertitude systématique, 706
- incidence oblique, 1205
- inclinaison magnétique, 781, 784
- incompressibilité**, 327, 328, 331, 336, 344, 358, 372, 376, 384, 388, 389, 393, 401, 409, 418, 419, 425, 427, 443, 450, 453, 455, 465, 502
 - incompressibilité de l'air, 413
- indétermination du potentiel vecteur, 768, 1237
- indice extraordinaire [biréfringence], 1210
- inductance**, 815
 - inductance pure, 921, 940
 - inductance propre du bobinage, 1106
 - inductance linéique, 1254
 - self, 778, 820
 - self de lissage, 1088, 1093
- inducteur**, 1105
 - en Electrotechnique
- induit à trois bobines, 1105
 - en Electrotechnique
- inégalité de Clausius**, 536, 548, 553, 577, 580, 658
 - égalité de Clausius, 530
- infiltrations d'eau sous un barrage, 332
- influence de la température de la source lumineuse, 1410
- influence de la largeur des fentes**
 - en Optique ondulatoire, 1363
- influence de la largeur spectrale**
 - en Optique ondulatoire, 1343
- influence ramenée par un réducteur, 1143
- influence totale en Electrostatique**, 753, 754
- informatique et numérisation : voir aussi table des matières
- infrarouge [optique dans le domaine spectral du proche infrarouge], 1362
- ingénierie**, 404, 465, 484, 570
 - ingénierie empirique, 265, 332, 335, 391, 554, 564
- injecteur, 341, 465, 466, 474, 475, 477
- instabilité**
 - en Mécanique du solide ,143, 144, 157, 162
 - en Electricité fondamentale ,750, 761, 789, 840
 - en Electronique ,920
- INT intégrateur, 1038
- intégrale première du mouvement**, 60, 150, 151, 155, 160, 166, 225, 226, 227, 231, 279, 281, 318, 837, 838
- intégrateur électronique**, 825, 877, 930, 932, 1024, 1027, 1033, 1042, 1044, 1130, 1151, 1158, 1171, 1172
- intensité**, 841
 - intensité efficace, 728
 - intensité nominale dans l'inducteur, 1068
 - intensité nominale d'induit, 1068

- intensité maximum dans la base, 1085
- intensité de base négligeable, 971
- intensité d'aimantation**, 803
- intensité de l'onde électromagnétique**[carré du module de son amplitude], 1214
- intensité de vortex, 440, 441
- intensité lumineuse**
 - intensité lumineuse sur l'écran, 1342
 - intensité de l'onde diffractée, 1370
 - intensité lumineuse de la frange centrale quasi constante, 1380
 - intensité lumineuse donnée par un Michelson, 1415
 - intensité diffractée par un miroir, 1389
 - intensité lumineuse observée à l'infini d'un Pérot-Fabry [bien réglé dans la direction définie par l'angle i], 1448
- interaction entre deux dipôles**, 599, 741
- interface de diffusion, cas d'un milieu sous forme de gouttelettes, 630
 - interface entre deux solvants, 629
- interférences**, 1342
 - interférences en lumière blanche, 1353
 - interférences de 2 fentes d'Young modulées par la diffraction d'une fente, 1440
- interféromètre**
 - interféromètre de Michelson, 1412, 1414, 1418, 1419
 - interféromètres, 1410
 - interféromètre de Michelson réglé en teinte plate, 640
 - interféromètre de Pérot-Fabry, 1444
 - interféromètre de Mach-Zender, 1215, 1220
 - interféromètre d'Young à faisceaux séparés, 1354
 - interféromètre à deux télescopes, 1364
 - interféromètre à corrélation, 1436
 - interféromètre à addition constitué de deux antennes identiques, 1436
 - plans des antennes constamment orthogonaux aux rayons, 1437
- interféromètre de Pérot-Fabry**
 - Pérot-Fabry:absence de changement de direction du rayon lumineux lorsqu'il entre ou sort du Pérot-Fabry, 1448
 - en Optique géométrique
 - Pérot-Fabry [évaluation du nombre de rayons qui interfèrent dans un], 1447
 - Pérot-Fabry[réflexions et réfractions parasites négligées dans le], 1446
 - Pérot-Fabry [largeur de frange], 1448
 - Pérot -Fabry et cellule photoélectrique [qui délivre un signal électrique proportionnel au flux lumineux qu'elle reçoit des différentes images]
 - en Optique, 1447
 - constante de Planck réduite, 800
 - Pérot-Fabry [deux lames de verre de coefficient de réflexion élevé dans le], 1446
 - Pérot Fabry à pertes compensées, 1448
- interférométrie stellaire, 1362
- interfrange**, 1344, 1348, 1349, 1360, 1407
 - interfrange, 1344, 1348, 1349, 1356, 1360, 1407
 - interfrange angulaire, 1366
- interpolation linéaire**, 630, 964
- interrupteur**, 939, 956, 1040, 1054, 1084, 1085, 1094

- interrupteur parfait, 1096
- interrupteur commandé, 1056, 1098
 - interrupteur unidirectionnel idéal commandé, 1093
 - interrupteur électronique commandé, 1096
- interrupteurs couplés, 825
- intersection des asymptotes, 920, 931
 - Intersection des asymptotes dans un diagramme de Bode, 986
- intervalle d'incertitude, 1071
- invariant**, 3, 92, 137
 - invariant relativiste, 124, 1192
 - invariant du produit scalaire des champs électrique et magnétique, 1187
 - invariant adiabatique électrodynamique, 786
- inverseur de signe, 1135
- inversion de courant, 1103
 - inversion du courant par un collecteur, 1131
 - en Electrotechnique
- inversion de population [laser], 686, 692, 694
- inversion des bornes de l'amplificateur opérationnel, 900, 919
- ionosphère, 857
 - en Géophysique
 - en Ondes électromagnétiques, 1247
- ions excités [laser et jet d'], 625
- ions moléculaires
 - en Mécanique du point, 25
- irréversibilité**, 526, 534, 567, 576, 577, 578, 580, 587, 592, 633, 634, 679
- isenthalpique**, 527, 529, 567, 576, 577, 589, 590, 592, 593, 594
- isentropique**, 529, 533, 536, 554, 555, 556, 563, 566, 577, 594, 842
- isobare**, 512
- isochore**, 512, 514
- isométrie**, 139
- isotherme**, 512
- isotitre**, 593
- itération
 - itération de retards, 1015
 - en Mathématiques
 - en Mécanique du solide ,225, 230
 - en Thermodynamique ,594

J

- jauge de contrainte [capteur d'accélération], 864
 - en Sciences de l'Ingénieur
- jauge de Coulomb** [en Magnétostatique], 807
- jauge de Lorentz**, 807, 1237
 - en Ondes électromagnétiques
- jet [utilisation d'un]
 - en Mécanique des fluides, 352, 366
- jonction P N [diode], 608
- Joule-Thomson**, 527, 535
 - détente de Joule-Thomson, 592

K

- Kelvin [formule de]
 - formule de Thomson pour les bulles, 558, 561
 - en Thermodynamique, 558, 560, 561
- Kelvin [théorème de]
 - en Mécanique des fluides, 438, 449
- Képler** [lois de], 19, 63, 91, 97, 110, 111, 114

L

- lame biréfringente à faces parallèles[décalage latéral entre les deux rayons polarisés orthogonalement à la sortie de la], 1208
- lame de quartz taillée perpendiculairement à son axe optique [loi de Biot], 1457
- lame de spath** à faces parallèles [biréfringence], 1208
- lame diélectrique**
 - en Ondes électromagnétiques, 1195
- lame semi-réfléchissante**, 1418, 1419
- lame semi-transparente**, 1389
- lampe au néon [oscillations de relaxation], 646
- lampe spectrale** [on l'éteint et on la rallume après refroidissement], 1412
 - faible variation de la longueur d'onde d'émission, 1420
 - lampe à vapeur de mercure, 1414, 1415
 - lampe à vapeur de cadmium, 1391
- Laplace** [équation de], 68, 321, 382, 443, 455, 460
- Laplace** [formule isentropique de], 510, 514, 524, 525, 529, 530, 532, 536, 566, 576, 580, 1277, 1289
- Laplace** [tension superficielle des gouttes et des bulles], 460
- largeur à mi-hauteur des bandes d'énergie, 612, 615, 617, 625
- largeur de raie du laser**, 693
 - largeur d'un mode [laser], 687
- LASER**, 683
 - laser néon-hélium, 1380
 - laser de lecture, 1406
 - laser à impulsions, 1403
 - LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)., 686
 - constante de Planck réduite, 800
 - modes longitudinaux, 1688
 - diode laser à semi-conducteur, 1420
 - diode laser de longueur d'onde variable avec le courant d'injection, 1421
- latitude, 430
 - latitude géomagnétique, 784
 - latitude géographique, 781
- Lenz** [vecteur de]
 - en Mécanique du point, 88
- lévitation
 - lévitation par laser, 1189

- lévitation magnétostatique, 775
- lévitation électrostatique, 747
- liaison unilatérale**, 5
- liaisons**
 - liaison parfaite, 144, 147, 150, 155, 168, 174, 178, 214, 223, 224, 233, 238, 300, 310, 316, 318, 351, 371, 1132
 - liaison rotoïde, 366, 367
 - liaison bilatérale, 5, 6, 316
- libre parcours moyen** [thermodynamique statistique], 129
- ligne bifilaire**, 1010, 1254, 1255
 - ligne fermée sur une impédance de charge, 1254
 - ligne bifilaire infinie électrostatique, 745
 - coefficient de réflexion à l'extrémité de la ligne bifilaire, 1255
- ligne de champ.**, 444, 741, 742, 751, 799, 804, 805, 806, 811, 1049, 1243, 1303
 - lignes de champ magnétique, 768, 770, 784, 1295, 1298
 - lignes de champ d'un dipôle magnétique, 802
 - allure des lignes de champ magnétique, 1297
 - lignes de champ pour $m = 1$, 1238
 - lignes de courant, 323, 324, 326, 346, 347, 356, 359, 360, 371, 372, 382, 384, 385, 401, 430, 432, 433, 437, 439, 441, 444, 448, 449, 452, 466, 500, 504
 - ligne de vortex, 440, 441
- ligne monophasée bifilaire, 732
- ligne neutre dans un moteur électrique, 1127
- limitation de la courbe à l'intervalle de fonctionnement, 1434
- limites, 721
 - limite finie, 151
 - limite, 509, 521, 531, 546, 622, 638, 640
 - limite [calcul de], 660
 - en Mathématiques
- linéarisation**, 61, 63, 66, 76, 95, 111, 113, 146, 148, 161, 162, 195, 203, 239, 241, 250, 282, 294, 300, 303, 305, 306, 311, 339, 419, 478, 519, 556, 603, 934, 1084, 1178, 1181, 1183, 1296, 1406
 - voir développement au premier ordre ou plus
- Lissajoux** [courbes de], 58
 - en Mathématiques
- lithosphère, 492, 495
 - en Géophysique
- loi aux noeuds**, 707, 717, 731, 910, 964, 970, 977, 978, 1063, 1064, 1090, 1091
- loi d'Ohm, 670, 961, 962, 964, 971
 - loi d'Ohm locale, 609, 678
- loi d'action de masse**, 607, 610
- loi de Coulomb**, 71, 209, 215, 217, 219, 221, 223, 255, 257, 268, 273, 306, 309, 312, 334, 351, 737
- loi de Curie** [pour la susceptibilité magnétique d'un milieu paramagnétique], 565, 568
- loi de distribution de Maxwell** [thermodynamique statistique], 595, 615
- loi de Gladstone [indice de réfraction des gaz], 1336
- loi de Hooke [MMC :effort proportionnel à la déformation], 1288, 1293
 - en Sciences de l'Ingénieur
- loi de Képler**, 1408
- loi de Lambert-Beer[absorption], 628

loi de Poiseuille, 469, 481, 482, 483, 484, 489
loi de Stefan, 648, 681, 695, 698, 699
loi de Van t'Hoff, 610
loi de Wien, 683, 690
loi des mailles, 717, 826, 970
lois de Descartes, 1194, 1198, 1329
 lois de Descartes à l'interface de milieux anisotropes, 1208, 1211
 loi de Descartes, 1190, 1332, 1406, 1408
 loi de Descartes dans un milieu d'indice variable, 1336
 surfaces équi-indices, 1335
 loi empirique, 1458, 1460
 London [loi locale de supraconductivité], 804
 longueur de référence, 519
 échelle de hauteur, 516
 longueur d'onde Compton, 800, 803
 longueur d'onde guidée, 1231, 1236
 longueur du réseau, 1398
lumière polarisée, 1457
 luminance énergétique dont le profil spectral est gaussien, 1415
lunette réglée à l'infini, 1326
 lunette astronomique, 1326
 lunette astronomique et diffraction, 1378

M

Mach 1, 551
Machine à champ radial, 1066, 1127
machine de Carnot frigorifique, 590
 machine d'entraînement, 1118
macromolécule, 626, 638, 639, 641, 642
 macropériode, 1310
magnétohydrodynamique [couplage du mouvement et du champ magnétique en], 1299
Magnus [effet], 348
 en Mécanique des fluides, 383
 manche à air [d'aérostaut], 517
 manomètre [capteur de pression], 708
 marée
 en Géophysique
 en Mécanique des fluides, 422, 424, 425, 426, 429
marge de phase, 1155, 1158, 1164,
 en Automatique
 marine
 en Mécanique des fluides, 376
 marquage des écoulements [une frange brillante est matérialisée sous la forme d'un trait opaque de réseau], 1404
 marquage optique des écoulements, 1402
 mascaret
 en Géophysique
 en Mécanique des fluides, 421, 422, 424

- masse [calcul de], 301
- masse, 333, 335, 850, 863, 896, 905, 1036, 1157
- masse apparente, 637
- masse de sécurité électrique, 1128
- masse du véhicule rapportée à une roue
 - en Transports
 - en Automatique, 1156
- masse électronique, 972, 1024, 1035, 1089, 1094, 1122
- masse réduite**, 2, 4, 71, 600
- masse surfacique, 286, 298
- masse virtuelle, 1036, 1037
- masse volumique d'un gaz, 479
- matériau ferromagnétique**, 1053
 - matériau ferromagnétique dur, 817
 - matériau ferromagnétique doux, 817
- matériau magnétique**, 814
 - matériau magnétique linéaire, 817
- matériau magnétique non linéaire**, 813, 1071
- Mathématiques**
 - addition de 2 courbes, 1061
 - somme de diagrammes de Bode asymptotiques, 1162
 - algorithme, 1015
 - algorithme informatique [filtrage numérique], 890, 894
 - coordonnées sphériques, 348, 438, 440, 441, 597, 674, 783, 784, 799, 804
 - formules d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques, 800
 - coordonnées polaires, 7, 76, 79, 84, 88, 94, 110, 217, 224, 228, 321, 323, 383, 390, 435, 735, 741, 745
 - gradient en coordonnées polaires, 753
 - coordonnées cylindriques, 321, 324, 381, 447, 748, 757, 762, 777
 - gradient en coordonnées cylindriques, 747, 762
 - divergence en coordonnées cylindriques, 637
 - coordonnées cartésiennes, 327, 438
 - coordonnées réduites, 100, 137, 289, 391, 399, 407, 497, 535, 538, 546, 551, 575, 578, 700, 753, 828, 843, 844, 912, 914, 922, 969, 1074, 1076
 - cosinus directeurs, 1207
 - correspondance entre transformées de Laplace et transformées en z, 1160
 - correspondance entre transformées en z et transformées de Laplace, 1165
 - angle solide, 613, 697
 - angles d'Euler, 277, 314
 - antisymétrie, 808
 - argument d'un complexe en Electronique, 721, 886
 - asymptote, 718, 900, 902, 912, 919, 920, 922, 924, 927, 929, 932, 935, 936, 937, 982, 983, 985, 986, 1011, 1012, 1013, 1018, 1162
 - comportement asymptotique, 932
 - intersection des asymptotes, 718, 920, 931
 - comportements asymptotiques, 927, 929, 932
 - diagrammes de Bode asymptotiques, 1022
 - Intersection des asymptotes dans un diagramme de Bode, 986
 - direction asymptotique, 912

- asymptote commune, 1030
- barycentre de masse, 4, 166, 168, 169, 171, 173, 175, 188, 207, 210, 213, 218, 227, 228, 246, 252, 253, 257, 259, 260, 264, 265, 270, 275, 279, 280, 284, 294, 297, 298, 301, 302, 303, 332, 335, 413, 414, 415, 416, 417
 - barycentre de charges, 741
- Bessel [fonctions de], 191, 199, 203
- Binet [formule de], 76, 79, 85
- centre instantané de rotation, 261, 263, 303, 304, 305
- changement de base, 12, 136
- cinématique, 116, 122
- colatitude., 787, 804
- condition de compatibilité, 1210
- condition de Schwarz, 565, 568, 571
- condition d'oscillation déduite d'une équation différentielle, 977
- condition d'accrochage des oscillations portant sur la matrice admittance d'un quadripôle oscillateur, 976
- condition matricielle d'oscillation, 980
- condition matricielle d'oscillation sur les complexes
- condition initiale, 7, 8, 19, 29, 40, 42, 46, 80, 86, 97, 631, 1305
- condition limite, 383, 385, 388, 390, 392, 394, 400, 418, 420, 428, 429, 432, 436, 443, 454, 455, 456, 457, 458, 461, 493, 495, 499, 500, 503, 587, 602, 647, 652, 653, 661, 665, 670, 680, 681, 758, 804, 806, 810, 831, 952, 953, 1304, 1305
- conditions de continuité sur un dioptré [entre deux isolants], 1329
- conique, 84, 86, 96, 101
 - excentricité d'une conique, 76, 83, 84, 88, 89, 110, 111, 114
 - demi grand axe, 456, 839
 - demi petit axe, 839
- conjugaison sur le corps des complexes, 834
- courbure, 864
- Cramer (système de), 42, 196, 290, 296, 300, 313, 428, 496, 694, 980, 1233
- cristal ayant les symétries du cube effectivement isotrope, 1208
- cycloïde, 29, 30, 47, 263
- degrés de liberté, 132, 262, 601
- dérivation logarithmique, 556
- dérivation sous le signe intégrale, 604
- dérivée d'une grandeur dans un repère donné, 544
- diagramme de Nyquist, 1158, 1163
- échantillonnage [numérisation], 890, 994, 995, 1040, 1045, 1159, 1160
 - échantillons, 993
- échelon de Heaviside, 902, 1138
- enveloppe mathématique, 894
 - enveloppe à la famille des paraboles de paramètres m , 1338
 - caustique, 1339
- équation approchée de caractéristique du troisième degré, 943
- équation de Laplace, 321, 439, 754, 758, 762, 799
- équation différentielle à variables séparées, 840
- équation différentielle complexe associée, 962
- équation polaire, 16, 21, 84, 86, 88, 230
- équations paramétriques de trajectoires, 12, 58

- équations de Lagrange en mécanique analytique, 297, 298, 300
- espace des vitesses [thermodynamique statistique], 597
- espace fréquentiel, 994
- espace temporel, 994
- F.F.T.[fast Fourier transformation], 1308
- fluctuations en physique statistique, 687
- fonction d'Airy, 1448, 1453, 1455
- fonction d'autocorrélation, 992, 1000
- fonction échantillonnée[numérisation], 1001
- fonction en escalier, 1016
- fonction sinus cardinal, 1403
- forme canonique des filtres passe-bande, 854
- forme différentielle canonique des fonctions
 - d'état de la thermodynamique, 559, 563, 565, 570, 664
- forme normalisée d'un filtre passe-bas d'ordre deux, 884
- formules d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques], 800
- série de Fourier, 813, 819, 885, 888, 893, 919, 921, 922, 925, 942, 946, 982, 984, 991, 993, 997, 1001, 1005, 1006, 1034, 1064, 1083, 1088, 1303, 1305
 - Fourier, 669
- série de produits de convolution, 1001, 1003, 1005, 1006
- discrétisation [numérisation], 1044
- distribution gaussienne, 638
- erreur en physique
- Frenet [formules de], 869
- Fresnel[diagramme de], 1118, 1120
- glisseur, 263, 264, 265, 279, 735, 737
- matrice, 100, 107, 275, 276, 277, 305, 1262, 1287
- matrice de Lorentz, 138
- matrice symétrique, 898, 1266
- matrice en Electronique
 - inversion de matrice, 1261, 1266
 - matrice de transfert, 978, 1261
 - matrice admittance, 896, 904, 906, 911, 976
 - matrice impédance du quadripôle, 1260
- matrice des milieux anisotropes
 - matrice des efforts (ou des contraintes), 1288
 - matrice de déformation d'un milieu anisotrope, 1287
 - matrice diélectrique du cristal anisotrope, 1207
- foyer, 1323
- fraction rationnelle, 716
- Guldin [théorème de], 178
- hélice, 13, 33, 37, 45, 358, 359, 406, 407, 408, 409, 410, 413, 786, 790
- Huygens [théorème sur les moments d'inertie d'], 175, 213, 289, 301, 305
- impulsion unité, 991
- incertitude, 50, 53, 54, 98, 123, 125, 135, 330, 399, 405, 419, 518, 592, 614, 618, 684, 693, 703, 706, 712, 713, 1071, 1184, 1413
- intégrale première du mouvement, 150, 151
- interpolation linéaire, 630
- intervalle d'incertitude, 1071
- invariant, 3, 92, 124

itération, 225, 230, 594
Laplace [équation de], 68, 321, 382, 443, 455, 460
limitation de la courbe à l'intervalle de fonctionnement, 1434
limites, 721
linéarisation, 63, 66, 146, 195, 239, 250, 282, 305, 306, 519, 1084, 1178, 1181, 1183, 1296
Lissajoux [courbes de], 58
maximum, 7, 48, 49, 84, 89, 180, 187, 189, 192, 195, 253, 254, 256, 268, 330, 337, 343, 362, 364, 370, 374, 384, 387, 403, 410, 411, 482, 496, 505, 506, 612, 617, 621, 623, 692, 696, 717, 725, 840, 845, 854, 931, 940, 945, 1075, 1076, 1181
maximale
maximal
méthode complexe, 146, 148, 1120
méthode de Lagrange d'optimisation, 659
méthode de séparation des variables, 1238, 1303
parabole, 26, 40, 47, 81, 87, 451, 488, 1322
paramètre, 49, 72, 88, 120, 127
période, 1043
période spatiale, 1349, 1361, 1416
perturbation [méthodes des], 193, 280, 317, 349, 363, 389, 418, 420, 453, 458, 1156, 1168, 1176, 1296
pôle d'instabilité, 1157, 1164
potentiel retardé, 1249
précession, 109, 111
probabilité, 361, 362, 363, 601, 606, 610, 668, 684, 692
produit de convolution, 999, 1004, 1007
produit de convolution de transformées de Fourier, 1001
produit d'inertie, 290, 294, 317
sinus cardinal [définition], 1379, 1403
solution graphique, 9, 181, 202, 267, 268, 307, 309, 310, 377, 380, 381, 403, 511, 559, 560, 562, 586, 589, 590, 592, 593, 594, 618, 625, 662, 666, 667, 698, 758, 760, 823, 824, 943, 959, 960, 964, 1071, 1072, 1076, 1106, 1120
Stokes (théorème de), 30, 119
théorème de Stokes (Green-Riemann)
suite, 595, 657, 700, 709
symbole de Kronecker, 1311
symétrie, 166, 174, 207, 213, 259, 279, 294, 301, 302, 303, 307, 308, 317, 349, 350, 354, 385, 387, 406, 417, 450, 461, 788, 795, 796, 799, 801, 806, 828, 830, 832, 896, 927, 1035
symétrie ternaire, 1120
symétrie cylindrique, 324, 342, 360, 444, 450, 768, 771, 774
symétrie sphérique, 18, 207, 516, 601, 674, 738
symétrie de la matrice des efforts, 1288
symétrie de la matrice diélectrique du cristal anisotrope, 1207
symétrie des mutuelles [formule de Neumann sur la], 1105
TDF [transformation discrète de Fourier], 1311
théorème de Kutta-Joukowski, 389
théorème de la moyenne, 405, 738
théorème de Parseval, 1001

théorème de Pythagore, 164
 théorème de Shannon, 1006
 théorème du gradient, 794
 théorème sur une suite de rapports égaux., 917
 tire-bouchon à droite, 787
 trace de matrice, 1290
 trajectoire, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 36, 37, 38, 40, 43, 45, 46, 47, 49, 56, 58, 72, 76, 77, 80, 83, 84, 88, 89, 91, 92, 94, 95, 96, 98, 101, 102, 109, 110, 114, 123, 125, 316, 344, 346, 368, 371, 372, 401, 418, 420, 454, 455, 456, 785
 transformation de Laplace, 1136, 1141, 1157
 transformée de Laplace
 transformée de Laplace d'une dérivée, 1162
 transformée de Laplace de l'échelon, 1017
 retard dû à une rampe, 1079
 transformation de Lorentz, 136
 tube de courant, 359, 361, 363, 376, 406, 407, 410, 453, 466
 valeur approchée, 1084
 valeur finale, 922, 926, 930, 956, 957, 961, 1011, 1016, 1164
 valeur finale en utilisant la transformation de Laplace, 1017
 valeur finale d'une suite, 1010, 1015
 valeurs propres, 107, 278, 283, 292, 295, 297
 vecteur instantané de rotation, 282
 vecteurs propres, 1210
 dérivée particulière, 448, 449, 1294
 dérivation logarithmique, 556
 dérivée partielle, 53, 138, 379, 528, 551, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 571, 577, 658, 703
 diagonalisation de matrice, 1290
 développement au premier ordre ou plus, 24, 46, 52, 54, 82, 83, 94, 98, 107, 127, 181, 184, 191, 193, 200, 501, 546, 792, 1257
 ordre
 développement en série d'une fonction paire, 749
 diagonalisation de matrice, 1290
 méthode des perturbations, 955
 minimum, 72, 84, 87, 89, 168, 180, 181, 185, 190, 197, 247, 250, 251, 343, 374, 399, 410, 411, 426, 498, 539, 559, 560, 613, 614, 619, 840, 1343
 moyenne temporelle, 1075
 nombre binaire [numérisation], 1036
 normalisation, 365, 596, 601, 604, 691
 notation complexe, 912, 1016, 1120, 1136
 notation complexe de la moyenne d'un produit, 1264
 notation de l'opération de convolution, 992
 notation scientifique et numérisation, 1033
 opérateur nabla, 438
 opérateur d'inertie, 211, 213, 275, 277
 optimisation, 411, 552, 658, 659, 973, 1141
 orthogonalisation de Schmidt, 1210
 rayon de courbure, 785, 869
 récurrence, 362, 365, 651, 659, 699, 1010, 1015, 1037

- régime linéaire, 897, 942, 948, 949, 987, 1129, 1130
- relation de récurrence, 1309, 1311
- repère principal d'inertie, 275
- repère de représentation, 169
- repère local des coordonnées polaires, 743
- repère barycentrique de la Terre, 275
- rotation de droites, 1409
- rotationnel, 323
- rotationnel en coordonnées sphériques, 793
- rotationnel en coordonnées cylindriques, 325, 768, 794
- rotationnel en coordonnées cartésiennes, 833
- schéma de confluence appliqué à la régulation thermique, 649
- séparation des variables, 454, 480, 500, 647, 651, 661, 758, 801
- séparation des variables en polaires, 799
- matrice**, 100, 107, 136, 137, 275, 276, 277, 305, 1262, 1287
 - matrice symétrique, 898
 - symétrie de la matrice de Lorentz, 138
 - symétrie de la matrice diélectrique du cristal anisotrope, 1207
 - symétrie de la matrice des efforts, 1288
 - symétrie de la matrice des inductances[formule de Neumann sur la], 1105
 - matrice en Electronique
 - matrice impédance du quadripôle, 1260
 - matrice admittance, 896, 904, 906, 911, 976
 - matrice admittance d'un système bouclé, 976, 980
 - matrice admittance d'un quadripôle, 976
 - matrice admittance d'un système quadripolaire bouclé, 980
 - matrice admittance d'un quadripôle en pi, 976, 980
 - matrice admittance d'un transistor, 980
 - matrice de transfert, 978, 1261
 - matrice de transfert en électronique, 975
 - matrice des milieux anisotropes
 - matrice diélectrique du cristal anisotrope, 1207
 - symétrie de la matrice diélectrique du cristal anisotrope, 1207
 - matrice de déformation d'un milieu anisotrope, 1287
 - matrice des déformations selon Kittel, 1287
 - matrice des efforts (ou des contraintes), 1288
 - symétrie de la matrice des efforts, 1288
 - matrice de répartition du répartiteur en automatique, 1179
- maximum**, 7, 48, 49, 54, 84, 89, 180, 187, 189, 192, 195, 253, 254, 256, 265, 266, 268, 276, 284, 309, 320, 330, 337, 339, 343, 362, 364, 370, 374, 379, 383, 384, 387, 403, 407, 408, 410, 411, 459, 460, 462, 482, 483, 493, 496, 501, 505, 506, 509, 512, 518, 522, 548, 564, 612, 617, 621, 623, 637, 655, 656, 657, 680, 682, 684, 692, 696, 717, 725, 776, 821, 823, 837, 840, 843, 845, 851, 854, 865, 867, 931, 940, 945, 1033, 1075, 1076, 1177, 1181, 1215, 1263, 1264
- mécanique des fluides, 321
- mélange biologique, 663
- mélange eutectique gallium indium [liquide réfléchissant]
 - en Optique géométrique, 1321
- mélange idéal**

- en Thermodynamique, 554
- membrane poreuse**, 626
- mesures**
 - mesure d'impédance par un multiplieur, 882
 - mesure d'intensité d'un jet de protons, 31
 - mesure des faibles tensions, 1027
 - mesure des coefficients de Fourier d'un signal de tension, 987
 - mesure de la résistance du circuit induit, 1068
 - mesure rotor bloqué, 1068
 - mesure d'indice de réfraction par interférométrie, 1359
 - mesure de la valeur moyenne de l'éclairement, 1433
 - mesure de distance par une transformation de Fourier, 1418
 - mesure de la largeur angulaire des astres, 1437
 - mesure de l'absorption des lames semi-réfléchissantes, 1452
 - mesure d'impédance acoustique, 1281
 - méthode de zéro, 706, 968
 - méthode voltampèrométrie, 1068
 - microphone mobile relié à un millivoltmètre [mesure acoustique], 1281
 - micromètre [mesure optique], 1351, 1379, 1387
- métal parfait**
 - en Ondes électromagnétiques, 1188
- métallisation d'une surface équipotentielle fermée** [théorème des écrans électriques], 743, 754
- météorite, 76
 - en Astronautique
- méthode complexe**, 146, 148, 1120
 - en Mathématiques
- méthode de Lagrange d'optimisation**, 659
 - en Mathématiques
- méthode de séparation des variables**, 1238, 1303
 - en Mathématiques
- méthode de zéro**, 706, 968
- méthode des perturbations**, 955
 - en Mathématiques
- méthode voltampèrométrie**, 1068
- Michelson** [ses deux sources cohérentes], 1419
- micromètre** [mesure optique], 1351, 1379, 1387
- microphone mobile relié à un millivoltmètre [mesure acoustique], 1281
- MID module inertiel et dissipatif, 1038, 1039
- milieu anisotrope, 1207
- milieu de perméabilité magnétique égale à celle du vide**, 1193
- milieu d'indice variable**, 1193, 1334, 1335
- milieux magnétiques**, 812
- milieux poreux**, 479
- Millman**[théorème de], 707, 709, 718, 725, 854, 856, 858, 862, 871, 877, 879, 880, 881, 885, 897, 907, 916, 920, 923, 932, 970, 971, 972, 985, 989, 990, 1013, 1033, 1037, 1041, 1044, 1132, 1135, 1151, 1174, 1430, 1432
- minimum**, 54, 72, 84, 87, 89, 168, 180, 181, 185, 190, 197, 247, 250, 251, 343, 374, 399, 410, 411, 416, 426, 498, 510, 539, 559, 560, 590, 602, 613, 614, 619, 663, 667, 681, 776, 779, 787, 805, 818, 840, 1078, 1098, 1343

minimum d'intensité, 1098

en Electrotechnique

mirage

en Optique géométrique, 1341

miroirs

miroir sphérique convexe, 1323

petit miroir sphérique secondaire convexe, 1362

miroir sphérique concave, 1323

miroir primaire sphérique concave, 1362

miroir objectif, 1323

miroir liquide, 1320

miroir parabolique, 1323

miroir hyperbolique, 1323

miroirs de Fresnel, 1342, 1380

mm de mercure, 595

mobilité d'un porteur de charge, 607, 609

modèles et modélisation

modèle, 12, 26, 30, 37, 60, 63, 75, 83, 99, 109, 19, 122, 126, 130, 134, 169, 170, 180, 189, 193, 209, 216, 218, 227, 237, 239, 246, 252, 268, 269, 270, 273, 275, 280, 283, 284, 285, 286, 294, 295, 298, 304, 314, 317, 327, 328, 332, 333, 336, 337, 340, 376, 379, 382, 383, 387, 391, 398, 399, 400, 401, 402, 406, 409, 410, 411, 413, 414, 417, 421, 423, 425, 426, 430, 431, 432, 433, 435, 436, 437, 453, 456, 459, 465, 466, 469, 474, 475, 477, 479, 483, 485, 486, 487, 488, 490, 491, 492, 495, 500, 501, 505, 506, 528, 531, 532, 533, 534, 539, 540, 542, 545, 546, 551, 552, 554, 556, 557, 558, 559, 561, 562, 564, 565, 570, 576, 579, 581, 584, 585, 586, 588, 589, 591, 596, 600, 601, 602, 605, 606, 607, 608, 612, 615, 629, 630, 640, 643, 644, 648, 650, 652, 655, 656, 662, 663, 666, 667, 668, 669, 672, 673, 675, 677, 680, 682, 683, 686, 687, 691, 692, 696, 697, 698, 701, 702, 705, 706, 707, 722, 727, 730, 745, 748, 751, 757, 758, 765, 770, 776, 781, 782, 783, 784, 786, 787, 789, 793, 794, 795, 799, 800, 804, 805, 810, 813, 814, 815, 827, 828, 829, 830, 835, 837, 841, 842, 843, 844, 850, 851, 860, 861, 865, 866, 875, 897, 901, 913, 914, 917, 919, 920, 921, 927, 940, 942, 943, 944, 948, 951, 952, 957, 961, 966, 967, 968, 975, 983, 993, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1020, 1021, 1022, 1023, 1029, 1033, 1041, 1047, 1050, 1053, 1054, 1057, 1058, 1066, 1067, 1070, 1071, 1073, 1074, 1078, 1085, 1086, 1092, 1093, 1094, 1096, 1097, 1101, 1102, 1105, 1106, 1107, 1116, 1117, 1119, 1120, 1122, 1124, 1128, 1130, 1136, 1138, 1139, 1156, 1167, 1168, 1174, 1176, 1185, 1294, 1295
modélisation, 2, 515, 600, 627, 638, 640, 646, 783, 873, 1066, 1161, 1176, 1248, 1311

modélisation de la boucle d'asservissement de la fréquence, 1166

modélisation d'un filtre, 969

modèle de multiplieur, 971

modèle d'AO réel, 1022

modélisation en numérique, 1027, 1035

modélisation d'induit, 1068

modèle de l'induit en courant continu, 1072

modèle de l'inducteur, 1069

modèle de l'électron, 799

modes propres

- modes propres de tube de Kundt, 1285
 - modes propres d'oscillateurs couplés, 1309
 - modes propres longitudinaux d'un laser, 1688
- modifications
 - modification de schéma équivalent, 975
 - modification du rapport cyclique, 1023
 - modification de l'amplitude, 1024
 - modification de la période de l'horloge, 1023
 - modification du nombre de cannelures noires par
 - une rotation de l'analyseur, 1458
- modulation et modulateurs**
 - modulation d'amplitude, 989
 - modulation de fréquence, 857, 988, 1173
 - modulation des interférences par la diffraction, 1350
 - modulateur de lumière, 1212
 - modulateur d'Armstrong, 988
 - modulateur, 996, 1179
- module d' Young [MMC], 864**
 - en Sciences de l'Ingénieur
- module de complexe, 721, 829, 831, 837, 843, 845, 846, 886
 - en Mathématiques
- molécules de marqueur photochrome** dissoutes dans le fluide, 1403
- moment des forces électromagnétiques**, 1066, 1077, 1079, 1107, 1119, 1131
 - moment nominal du couple électromagnétique du
 - moteur, 1098
- moment cinétique**, 83, 145, 147, 166, 206, 207, 213, 220, 223, 225, 227, 228, 239, 241, 255, 276, 278, 279, 282, 285, 288, 289, 298, 299, 316, 317, 318, 604, 802
- moment d'inertie**, 83, 150, 166, 169, 173, 174, 175, 177, 178, 180, 181, 188, 205, 207, 211, 213, 236, 246, 252, 255, 259, 264, 279, 284, 285, 287, 289, 294, 298, 301, 302, 303, 308, 314, 316, 317, 319, 546, 550, 781, 1066, 1077, 1098, 1120, 1127, 1136
 - Huygens [théorème sur les moments d'inertie d'], 175, 213, 289, 301, 305
- moment dipolaire**, 601, 735, 741
- moment du vortex, 441
 - boucle de vortex, 441, 446
- moment dynamique**, 145, 246, 248, 253, 278, 316
- moment magnétique**, 777, 780, 781, 782, 794, 796, 800, 803
- moment magnétique de l'électron, 800
- moment nominal du couple électromagnétique du moteur**, 1098
- monocristal semi-conducteur de silicium, 605
- monophasé, 732
- monotherme, 664
- montage auto-oscillateur, 974, 977
- montage dérivateur**, 858
- montage en étoile**, 707, 727
 - montage étoile équilibré, 727
 - montage étoile déséquilibré, 727
- montage intégrateur**, 987
- montage interférentiel** [description générale d'un], 1444
- montage parallèle de quadripôles**, 719

- montage parallèle et série de l'inducteur, 1073, 1075
- montage potentiométrique**, 706, 879, 901, 945, 946, 972, 1081, 1082
- montage redresseur**, 1056
- montage suiveur**, 854, 916
- montage très sélectif**, 987
- montage triangle**, 1104
- moteur**, 509, 522, 523, 524, 526, 527, 533, 540, 541, 542, 544, 582, 590
- moteur à air comprimé, 527
- moteur à champ axial**, 1077
- moteur à courant continu**, 1066
- moteur à courant continu commandé par l'induit**, 1136
- moteur à excitation séparée**, 1093
- moteur à une paire de pôles**, 1127
 - en Electrotechnique
- moteur à une voie d'enroulement par spire**, 1127
- moteur d'Archibald**, 540
- moteur synchrone triphasé**, 1104
- moteurs électriques**
 - moteur à courant continu, 1066
 - moteur à courant continu commandé par l'induit, 1136
 - moteur à excitation séparée, 1093
 - moteur synchrone triphasé, 1104
- moteurs non électriques**
 - moteur, 509, 522, 523, 524, 526, 527, 533, 540, 541, 542, 544, 582, 590
 - moteur à air comprimé, 527
 - moteur d'Archibald, 540
 - combustion interne [moteur à], 522, 523
 - consommation d'essence, 523
 - consommation de gas-oil, 526
 - Stirling [cycle de], 539, 540
 - Beau de Rochas [cycle de], 522, 523
 - Diesel [cycle de], 523, 525
 - Cycle de Carnot, 509
 - cycle moteur, 540
- mousse déphaseuse de sons, 1281
- mouvement autour du centre d'inertie**
 - en Mécanique du solide, 280
- mouvement de dérive, 376, 377
- mouvement de dérive d'un point, 26, 28, 29, 30, 99, 102, 391, 396
- mouvement d'entraînement**, 4, 6, 8, 29, 56, 57, 102, 153
 - accélération d'entraînement, 57, 179, 241, 338
- mouvement irrotationnel**, 321
- mouvement sans frottement**, 5, 56, 58, 59, 66, 166, 177, 188, 205, 206, 207, 218, 224, 226, 236, 246, 268, 279, 303, 309, 350, 366, 430, 431, 466
- mouvement sans pivotement, 260
- moyenne temporelle, 1204, 1225
- moyenueur, 877
- multiplieur, 882, 966, 968, 971, 988, 1007, 1026, 1033, 1034, 1165, 1179, 1184
- multivibrateur instable**, 939
- mutuelle**, 778, 1106

mutuelles variables pendant chaque période, 1106
mutuelle négative, 1107, 1120
mutuelle inductance, 825
circuits couplés par mutuelle, 825
coefficient d'inductance mutuelle, 928
coefficient d'induction mutuelle, 775, 776

N

NA nombre d'Avogadro, 513

Navier-Stokes

en Mécanique des fluides, 494
viscosité, 30, 119, 173, 383, 393, 395, 396, 413, 429, 430, 431, 432, 467, 468,
469, 470, 473, 479, 482, 483, 484, 487, 488, 492, 494, 495, 498, 499, 500, 501,
502
Poiseuille, 481, 482

navigation contre le vent, 406

négliger la pesanteur

en Ondes mécaniques, 1303
négliger les effets de bord du condensateur
en Ondes électromagnétiques, 1214

néolithique, 498

Neumann, 1105

symétrie des mutuelles [formule de Neumann sur
la], 1105

neutre [cf triphasé], 727

neutron, 72, 116, 125, 126, 127, 128, 129, 132, 133

neutronique, 123, 126

neutron, 72, 116, 125, 126, 127, 128, 129, 132,
133

niobiate de lithium [effet électrooptique], 1214

niveau de Fermi [bandes d'états énergétiques], 606

noeud de surpression en Acoustique, 1285

nombre binaire [numérisation], 1036

nombre de cycles par seconde d'un moteur à combustion interne, 525

nombre de franges brillantes du champ d'interférence, 1342

nombre de Mach, 389, 392

nombre de masse d'un élément, 38, 72, 74

nombre de raies noires dues à la lame de quartz [loi de Biot], 1457

nombre de Reynolds

en Mécanique des fluides, 498

nombre de spires de l'enroulement primaire du transformateur, 1053

nombre de spires de l'enroulement secondaire du transformateur, 1053

non glissement, 209, 211, 212, 215, 217, 242, 243

non-glissement de la courroie, 1080

non séparation des étoiles doubles de 85 Pégase, 1362

normalisation

en Mécanique des fluides, 365

en Thermodynamique, 596, 601, 604, 691

notation complexe, 912, 1016, 1120, 1136

- en Mathématiques
- notation complexe** de la moyenne d'un produit, 1264
- notation de l'opération de convolution, 992
 - en Mathématiques
- notation scientifique et numérisation, 1033
- noyau**
 - en Mécanique du point, 116, 119, 125, 126, 127, 128, 129

O

O.P.P.H

- en Ondes électromagnétiques, 1250
- en Astronautique
- objectif**, 1380
- observation de pics de réseaux** d'ordres entiers, 1396
- observation des franges de diffraction** à l'infini, 1378
- obtenir une lumière polarisée** rectilignement, 1208
- obtention d'interférences astronomiques dans le plan focal image de l'objectif, 1359
- océan à deux couches, 431
 - en Géophysique
- OCT**, 1043
 - OCT oscillateur commandé en tension., 1039
- octane** [indice d' - des carburants], 523
 - en Transports
- oculaire**, 1379, 1380
 - oculaire de Huygens, 1323
 - en Optique géométrique, 1323
- Ohm**[loi d'], 730, 778, 826, 838, 846, 855, 908, 910, 939, 964, 970, 971, 977, 978, 1061, 1063, 1067, 1132, 1139
- ohmmètre**, 1068
 - ohmmètre numérique, 704
- onde broglienne**, 803
- onde stationnaire**
 - en Mécanique des fluides ,428, 429, 456
 - en Ondes électromagnétiques ,1191, 1255
- ondes acoustiques**
 - ondes sonores, 1271
 - onde acoustique plane progressive longitudinale, 1277, 1289, 1294
 - ondes magnétohydrodynamiques, 1294
 - onde longitudinale en magnétohydrodynamique, 1302
 - ondes transverses en magnétohydrodynamique, 1300
 - onde transversale, 1289, 1294
 - onde de choc, 422
- ondes électriques**
 - ondes électriques, 1254
 - onde électrique incidente, 1255
 - onde électrique réfléchie, 1255
- ondes électromagnétiques**
 - onde électromagnétique plane progressive harmonique, 1205
 - onde électromagnétique plane monochromatique, 1188

- onde plane polarisée elliptiquement, 1210
 - onde plane progressive monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement, 1193
- onde électromagnétique plane dans un milieu illimité, 1186
- ondes électromagnétiques, 1186
- ondes en phase, 1233
- ondes sphériques, 93
- ondes sphérique, 95
- ondes rayonnées totalement réfléchies par l'ionosphère, 1248
- onde transmise, 1195
- onde réfléchie dans le guide d'onde, 1232
- onde évanescente, 1193, 1329
- ondes électromagnétiques [approximation scalaire des], 1179
 - cf Optique ondulatoire
- ondes métriques, 1435
 - onde métrique plane monochromatique polarisée rectilignement, 1435
- onde électromagnétique tangente à la surface des indices, 1211
- ondes lumineuses**
 - ondes électromagnétiques [approximation scalaire des], 1179
 - onde métrique plane monochromatique polarisée rectilignement, 1435
 - ondes métriques, 1435
 - onde électromagnétique tangente à la surface des indices, 1211
 - ondes ordinaires et extraordinaires, 1211
- ondes mécaniques**
 - ondes mécaniques, 1287, 1303
 - ondes de torsion, 1289, 1293, 1308
- ondulation électrotechnique**
 - ondulation de tension, 1088, 1090
 - ondulation de la vitesse de rotation, 1126
 - ondulation de la tension de sortie, 1083, 1084
 - ondulation de courant, 1089, 1094, 1097, 1099
 - ondulation de courant maximum, 1096
 - amplitude de l'ondulation de courant, 1084
- opérateur d'inertie**, 211, 213, 275, 277
- opérateur nabla**, 438
- opérateurs électriques**
 - opérateur multiplication par une constante, 722, 909
 - opérateur d'ordre 1, 1135
 - opérateur d'ordre 2, 1133
 - opérateur valeur moyenne, 1061, 1064, 1088, 1095, 1097, 1100
 - opérateur bouclé, 1130
 - opération d'asservissement, 1129
- OPPH**
 - en Ondes électromagnétiques, 1243
- optimisation**, 359, 361, 377, 383, 409, 411, 510, 539, 552, 658, 659, 663, 816, 973, 1074, 1138, 1141
- optique géométrique, 1320
- optique ondulatoire, 1342
- orbite circulaire** (mise en), 22
- ordre d'une fonction de transfert, 914

ordre de grandeur, 72, 122, 124, 295, 321, 327, 353, 354, 363, 391, 399, 400, 422, 425, 426, 427, 432, 436, 460, 462, 480, 500, 590, 604, 612, 637, 639, 662, 663, 704, 787, 793, 803, 835, 836, 865, 867, 926, 930, 950, 981, 1083, 1085

ordre d'interférence, 1343, 1347, 1353

origine de position tel que l'ordre d'interférence au foyer image de la lentille est nul., 1414

ordres théoriquement visibles pour un réseau, 1391

ordres des pics visibles, 1397

ordre d'interférences du premier anneau brillant, 1410

ordre d'interférences au centre, 1410

ordre d'interférences, 1410

ordre d'interférence d'un anneau brillant à l'infini, 1419

ordre, 415, 930

orientation du courant de sortie d'un quadripôle, 906

orthogonalisation de Schmidt, 1210

en Mathématiques

oscillateur, 77, 721, 722, 852, 975, 1164, 1178, 1179, 1182, 1184

oscillateur qui servira d'horloge, 1022

oscillateur harmonique, 56, 58, 60, 61, 63, 285, 317, 600

oscillateur en pont de Wien, 974

oscillateur commandé en tension O.C.T., 1039

oscillateur Colpits, 976

oscillateur à transistor, 973

oscillateur à résistance négative, 943

oscillateur à réseau déphaseur, 975

oscillateur à réaction, 940

oscillateur embarqué, 1165

oscillateur à désamortissement, 1176

oscillateur entretenu, 942

oscillations de satellites, 77, 83, 275

oscillations forcées, 146

oscilloscope, 826

oscilloscope bicourbe, 1122

synchronisation d'oscilloscope, 1088

ouverture numérique[fibres optiques], 1330, 1331

P

P.F.D., 1, 7, 8, 18, 19, 23, 33, 34, 36, 40, 41, 57, 59, 62, 63, 64, 65, 68, 69, 77, 79, 81, 85, 112, 147, 165, 179, 213, 214, 223, 228, 230, 232, 235, 241, 242, 243, 251, 265, 266, 271, 295, 306, 309, 312, 314, 330, 333, 335, 336, 337, 338, 342, 343, 373, 407, 423, 532, 627, 781, 790, 812, 838, 844, 847, 868, 1080, 1157, 1161, 1306

paires de chlorure de césium, 638

palier, 1136

en Sciences de l'Ingénieur

palier de changement d'état, 589

parabole, 26, 40, 47, 81, 87, 451, 488, 1322

paramètre, 49, 72, 88, 120, 127

paramètre d'amortissement réduit, 843, 844

paramètre de McIlwain, 784

- parcours du point de fonctionnement lors du freinage, 1099
 - parcours du point de fonctionnement pendant le freinage, 1103
- parois du guide de conductivité finie, 1232
- particule fluide**, 344, 367, 442, 504
- particules de soluté, 636, 637, 638
 - soluté, 638
- pas du réseau**, 1398
- passage du discontinu au continu**, 651
 - passage du discret au continu, 1045
- Pelton, 366
- pendule simple**, 144
- perfusion, 484, 490
- périhélie, 109, 111, 115
- période, 1043
- période d'échantillonnage, 1159, 1160, 1161, 1166
- période spatiale, 1349, 1361, 1416
- périodicité du courant [hâcheurs], 1089
 - en Electrotechnique
- perméabilité de la membrane [diffusion], 627
- perméabilité magnétique relative**, 815
- perte de charge**, 465, 475, 482
 - perte de charge volumique, 465, 466
- pertes énergétiques**, 525, 528, 590, 681
 - pertes Joule, 732
 - pertes fer, 1069
- perturbation** [méthodes des], 110, 115, 193, 317, 389, 418, 420, 458, 1156, 1271, 1296
- pesanteur**, 5, 11, 12, 13, 15, 26, 30, 32, 57, 75, 83, 119
- pesanteur artificielle, 57
- phases**
 - phases, 727
 - phase
 - phase instantanée, 988
 - phase du rayon de référence, 1400
 - phase d'alimentation du moteur, 1095
- photodétecteur**, 1420
 - photomultiplicateur, 1414
 - photodiode source de courant en parallèle sur une conductance négligeable, 1423
 - photodiode polarisée en inverse, 1423, 1432
 - photodiode détectrice de surface utile suffisamment petite pour qu'on puisse
 - considérer qu'elle est uniformément éclairée et qu'elle détecte l'éclairement en un point du montage interférométrique, 1423
- photodiode, 1423, 1432
- photodissociation, 613
- photon**, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 131, 600, 615, 616, 625
- photosphère solaire, 1297
- physique nucléaire**, 122, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133
- physique ondulatoire, 1186
- pilote automatique, 1138
- pivotement

- en Mécanique du solide, 261
- PI [Poiseuille], 498
- plafond d'aérostat, 513
- plan de Fourier**, 1398, 1401
- plan de symétrie**, 808
- plan d'incidence**, 1208
- plan méridien, 1049
- planche à voile, 390
- Planck**, 683, 690, 691, 695
 - corps noir, 683, 695, 696, 698
 - constante de Stefan, 648
 - loi de Stefan, 681
 - loi de Wien, 690
 - loi du déplacement de Wien, 683
- plans des antennes constamment orthogonaux aux rayons, 1437
- plaque tectonique, 492
- Poggendorff, 1344, 1427
- point commun d'embranchement électrique ou noeud intéressant, 707
- point critique**
 - en Thermodynamique, 589, 592
- point de fonctionnement**, 837
 - point de fonctionnement statique, 960
- point de transition[changement d'état], 570
- point d'inflexion, 151
 - en Mathématiques
- point d'intersection des asymptotes, 718
- point double[points objet et image coïncident]
 - en Optique géométrique, 1324
- point source au foyer objet d'une lentille [obtention d'un faisceau parallèle à l'axe], 1347
- points de Lagrange**, 100
- points de Weierstrass [stigmatisme parfait], 1322
- Poiseuille**, 469, 481, 482, 483, 484, 489
 - viscosité, 30, 119, 173, 383, 393, 395, 396, 413, 429, 430, 431, 432, 467, 468, 469, 470, 473, 479, 482, 483, 484, 487, 488, 492, 494, 495, 498, 499, 500, 501, 502
 - visqueux, 170, 181, 413, 481, 482, 483, 490, 499
- polarisation d'onde électromagnétique**
 - polarisation elliptique d'une onde bidimensionnelle, 1198, 1201, 1230
 - polarisation vitreuse, 1212
 - polarisation rotatoire:rotation subie par le plan de polarisation d'une vibration lumineuse, 1457
 - polarisation rotatoire en lumière blanche, 1457
 - polarisation orthogonale au plan de la figure pour le rayon ordinaire, 1211
 - polariseur
 - en Optique ondulatoire, 1457
- polarisation du diélectrique** [champ macroscopique volumique dû aux moments dipôlares orientés par le champ électrique]du diélectrique, 1212
- polariseur**, 1457
- pôle central cylindrique d'aimant, 843

- en Electrotechnique
- pôle d'instabilité**
 - en Automatique, 1157, 1164
- pôles géomagnétiques, 781
 - en Géophysique
- pompage optique** [laser], 686, 1449, 1456
- pompe à chaleur**, 527
- pont de Wheatstone**, 706, 865
- pont diviseur de courant**, 917
- pont diviseur de tension**, 706, 718, 856, 859, 871, 881, 901, 915, 962, 978, 984, 1013, 1027, 1034, 1036, 1037, 1076
- population d'un état d'énergie [laser], 684
- pores, 331, 479, 627, 628
- porosité, 331, 479, 627, 628
- portance**, 291
 - en Mécanique des fluides, 388, 390, 395, 398, 401, 406
- porteurs de charge, 795
- portrait de phase, 121
- position de repos
 - en Automatique, 1157
 - circuit représentatif des grandeurs statiques d'un transistor, 957
- pot de ferrite, 814, 815
- potentiel**
 - potentiels de Lorenz, 1237
 - potentiel des marées, 337, 338
 - potentiel électrostatique, 735
 - potentiel vecteur, 767, 770, 771, 773, 791, 796, 799, 801
 - potentiel vecteur d'un champ magnétique uniforme., 786
 - potentiel vecteur d'un dipôle magnétique, 783, 795, 799, 802
 - potentiel vecteur [indétermination du], 768
 - potentiels de Hertz, 1236
 - potentiel électrique de Hertz, 1237
 - potentiel magnétique de Hertz, 1237
 - potentiel retardé, 1249
 - potentiel thermodynamique, 570
 - potentiel gravitationnel, 101
 - potentiel des vitesses, 323, 381, 383, 389, 439, 454, 458, 806, 1271
 - écoulement irrotationnel, 462
 - mouvement irrotationnel, 321
 - potentiel des vitesses de l'onde acoustique incidente, 1273
 - potentiels des ondes acoustiques réfléchies et transmises., 1273
- potentiomètre**, 861, 915, 916, 1023, 1086, 1129, 1138
- Pouillet [loi de], 780, 828, voir loi d'Ohm
- poulies de moments d'inertie négligeables
 - en Mécanique du solide, 163
- poussée
 - en Mécanique des fluides, 353, 354, 357, 390
- poussée d'Archimède**, 395, 414, 415, 416, 417, 488, 497, 514, 520, 521, 532, 558, 627, 632, 639
 - Archimède** [théorème d'], 30, 98, 413, 482, 521, 632, 639

pouvoir de résolution

- pouvoir de résolution du réseau, 1391
- pouvoir de résolution du réseau à échelettes, 1392
- pouvoir de résolution d'un Pérot-Fabry, 1448
- en Optique ondulatoire, 1396, 1454

pouvoir de résolution angulaire de l'objectif
en Optique géométrique, 1326

pouvoir des pointes, 749

pouvoir rotatoire, 1457

pouvoir rotatoire d'une lame de quartz, 1457

précession, 109, 111

précision, 1071

précision de la mesure, 985

précision de mesure du voltmètre numérique, 1025

précision graphique, 666

précision de la régulation, 1180

premier coefficient d'Einstein (de désexcitation), 684

premier principe de la thermodynamique, 532, 543, 580, 582, 588, 597

pression de radiation, 94, 1188, 1192

pression de vapeur saturante, 557, 559

pression électrostatique, 69, 749, 757, 759, 782, 783

pression exercée par l'onde acoustique, 1273, 1280

pression exercée par l'onde acoustique quand réflexion totale, 1273, 1281

pression magnétostatique, 810

pressuriseur, 656

primaires en étoile, 1057

principe de Fermat, 1408

principe de Huygens-Fresnel, 1355, 1356, 1378, 1381, 1382, 1387, 1392, 1394, 1399, 1401, 1409

principe des ondelettes sphériques, 1382

principe d'exclusion de Pauli, 606

principe du laser, 1456

principe fondamental de la dynamique, 1, 2, 3, 6, 26, 29, 120, 155, 220, 224, 225, 226, 295, 376, 379, 402, 405, 418, 442, 477, 488, 513, 785, 868, 1120, 1288, 1304

prismes à réflexion totale dans les jumelles, 1331

probabilité, 361, 362, 363, 601, 606, 610, 668, 684, 692

probabilité par unité de temps d'absorber un photon, 614

probabilité par unité de temps de dissocier la molécule, 613

Productique Industrielle : voir aussi table des matières

produit de convolution double, 999, 1004, 1006, 1007, 1371, 1377

de deux signaux, 992

de transformées de Fourier, 1001

produit d'inertie, 213, 281, 290, 294, 317

produit gain bande passante, 871, 902, 1029

profil de raie, 684

profil d'indice, 1330

profondeur de pénétration de l'onde transmise [épaisseur de peau], 1195

projections, 166, 167, 174, 178, 179, 207, 210, 218, 224, 227, 246, 247, 248, 255, 265, 270, 295, 299, 301, 306, 307, 350, 371, 381, 389, 399, 451, 466

projections du champ électrostatique, 737

- Prony [frein de], 1068
- propagation unidimensionnelle du son, 1287
- propulsion par réaction, 357
 - propulseur, 353
- protéines [diffusion], 636
 - en Biologie
- protocole expérimental, 825
- pseudo-image trouble car double
 - en Optique géométrique, 1341
- puissances**
 - puissance
 - en Mécanique du solide ,177, 189, 194, 195, 242, 253, 254, 268, 317, 320
 - en Mécanique des fluides ,341, 359, 361, 362, 365, 370, 407, 408, 409, 466, 467, 468, 473, 486, 487, 492
- puissance thermodynamique**
 - puissance du moteur, 544, 582, 591, 594
 - puissance de sortie, 689, 695
- puissance mécanique**
 - puissance cinétique, 359, 362, 364, 474, 475
 - puissance de couple, 316, 319
 - puissance d'un couple résistant, 265
 - puissance d'un couple moteur, 265
 - puissance des forces de frottements, 465
 - puissance de l'action de contact, 263, 304
 - puissance de la résistance de l'air, 265, 287
 - puissance des forces de pesanteur, 265
 - puissance incidente
 - en Mécanique des fluides, 363
- puissance sonore**
 - puissance sonore moyenne, 1272
- puissance électrotechnique
 - puissance nominale, 1068
 - puissance et rapport cyclique, 1100
 - puissance fournie par la source, 1082
 - puissance moyenne absorbée par le réseau utilisateur, 1106
 - puissance électrique totale fournie au convertisseur, 1119
 - puissance moyenne de la source, 1093
 - puissance moyenne dissipée dans la charge, 1082, 1085, 1086, 1182
 - puissance disponible sur l'arbre, 1069
- puissance absorbée totale (induit et inducteur), 1069
 - puissance transmise au rotor, 1069
 - puissance utile sur l'arbre, 1070
 - puissance apparente absorbée par le bobinage, 1116
 - puissance d'induit instantanée, 1119, 1124
- puissance en triphasé montage étoile, 734
- puissance instantanée et puissance moyenne en triphasé (induit seulement), 1125
- puissance en alternatif classique**
 - puissance moyenne fournie par la source, 1086

- puissance électrique moyenne, 962
- puissance active, 909
 - puissance active maximale, 1259
 - puissance active disponibles dans le dipôle, 1260
 - puissance complexe, 1264
- puissance consommée, 1048, 1050
 - puissance dissipée, 846
 - puissance moyenne dissipée, 843
- puissance de l'alimentation d'un AO, 1092
- puissance moyenne des courants de Foucault, 830
 - puissance volumique moyenne dissipée par les courants de Foucault, 830
- puissance réactive disponibles dans le dipôle, 1260

puissance électromagnétique

- puissance émise, 1178
- puissance incidente sur le dipôle, 1259
- puissance absorbée par la cavité, 1177
- puissance moyenne du résonateur, 1177
- puissance moyenne véhiculée par l'onde, 1179
- puissance moyenne sur une période d'un signal périodique, 993, 1001
- puissance spectrale, 1417

puits

- en Mécanique des fluides, 323

pulsations

- pulsation plasma, 1248, 1252
- pulsation libre, 148
- pulsation réduite, 969, 972
- pulsations propres, 827, 852, 1167, 1308
 - pulsation propre d'un filtre, 969, 972
 - pulsation d'oscillation, 976
 - pulsation de cavité fonction de 3 modes indépendants, 1228
 - pulsation propre du Pérot-Fabry système oscillant., 1456
- pulsation porteuse, 857
 - pulsation modulante, 988
 - pulsation instantanée, 988, 991
 - pulsation porteuse élevée, 988
- pulsation de coupure, 927, 1026
 - pulsation de coupure d'AO, 896

pupilles, 1370

- pupille de l'oeil, 1328

Q**quadrature, 1233**

- quadrature retard, 826, 988
- quadrature avance, 826

quadripôle, 716, 850, 896, 900, 905, 906, 973, 982, 1009, 1129, 1130

- quadripôle passif (branchement d'un), 907, 974
- quadripôle équivalent, 974

- quadripôle oscillateur, 976
- quadripôle parfait, 1020
- quadripôle en T, 897
- quadripôle en L inversé, 982
- quadripôle de rétroaction, 974, 976
- quadripôle symétrique, 1260
- quadripôle adapté, 1262, 1267
- quadripôles en cascade, 1263
- quadrivecteur, 122, 123, 124
- qualité de l'horloge, 1025
- quantité d'air admis à chaque cycle d'un moteur à combustion interne, 524
- quantité de chaleur massique**, 589
- quantité de mouvement d'un photon**, 1189
 - invariant relativiste, 1192
- quantité de mouvement et énergie cinétique**[Mécanique rationnelle], 600, 604
- quantité d'électricité transportée par induction, 837, 841
- quartz, 721
 - en Electronique
- quartz piézo-électrique, 721
 - en Electronique

R

- r la constante massique des gaz parfaits, 533
- radiateur d'évacuation, 1086
- radioactivité, 127
- radioaltimètre, 1165
- radiosource, 1435
 - radiosource ponctuelle à spectre discontinu ou continu, 1438
 - radiosource monochromatique incohérente de largeur angulaire, 1437
 - en Astrophysique
 - plans des antennes constamment orthogonaux aux rayons, 1437
- rampe**, 1079, 1171
- rapidité d'un système automatisé**, 1171, 1172, 1173
- rapport cyclique, 876, 997, 1022, 1023, 1032, 1083, 1085, 1089, 1093, 1095, 1096, 1098
- rapport de transformation**, 1176
 - rapport de transformation idéal, 1050
 - rapport de transformation des tensions, 1048
 - rapport de transformation des intensités, 1051
 - rapport de transformation réel, 1050
- Rayleigh**, voir critère de Rayleigh
- rayonnement CN**, 519, 646, 648, 650, 681, 683, 685, 686, 695, 696, 697, 700
 - constante de Stefan, 648
- rayonnement dipolaire**, 1245
- rayonnement d'une antenne**, 1245
- rayons angulaires des trois premiers anneaux brillants, 1410
- rayons auxiliaires** en optique géométrique, 1327
- rayons de cercle
 - rayon de giration, 785

- rayon de courbure, 785, 869
- rayon de braquage, 261
- rayons des anneaux brillants** dans le plan focal de la lentille d'observation, 1425
- rayons lumineux**
 - surface équichemin optique, 1211
 - rayon lumineux portion de sinusöide dans une fibre optique, 1334
 - rayon de référence, 1350, 1370, 1382, 1393, 1400
 - rayon lumineux dans un milieu anisotrope, 1208
 - rayon ordinaire, 1211
 - rayon extraordinaire, 1211
 - rayon extraordinaire tangent en M à la surface des indices, 1211
- rayons paraboliques, 1337, 1338
- réactance**, 723, 882, 917, 918
- réacteur à uranium enrichi, 126, 127, 129, 130, 134, 135, 136, 655
- rebondissement de particules, 786, 787
- récepteur pour ondes métriques [constitué d'un réflecteur et d'un détecteur placé au foyer], 1435
 - en Astrophysique
 - plans des antennes constamment orthogonaux aux rayons, 1437
- récurrance, 362, 365, 651, 659, 699, 1010, 1015, 1037
 - en Mathématiques
- redressement de la force électromotrice induite**, 1127
- réducteur**, 1137, 1138, 1139
- réducteur de poussée**, 353, 357
- réduction du bruit, 1012
 - réduire le bruit de fond d'un signal vidéo, 1010
- Reech, 566
 - comparaison des compressibilités isentropique et isotherme[formule de Reech], 566
- réflecteur, 131
- réflexion totale**, 1193, 1194, 1328
- réflexion totale en acoustique**, 1280
 - réflexion totale de l'énergie sonore, 1273
- refroidissement d'ions, 618
- refroidissement en thermodynamique**, 576
 - par détente adiabatique, 562
- régime linéaire**
 - en Electronique ,897, 942, 948, 949, 987
 - en Automatique ,1129, 1130
- régime stationnaire de phénomènes de transport**, 626, 638, 664
- régime transitoire électromécanique** entre deux régimes permanents, 1077
- régularité des impulsions [numérisation], 1033
- régulation**, 154, 162, 1176, 1184
 - régulateur de Watt, 154
 - régulation cardiaque, 486, 491, 492
 - régulation thermique, 643
 - régulation de fréquence, 1175
 - régulateur, 1180
- relais électriques, 643
- relation de Clapeyron**

- en Thermodynamique, 528, 529, 539, 541, 550, 563, 564, 565, 568, 576
- relation de conjugaison de Newton**
 - en Optique géométrique, 1323
- relation de dispersion**
 - relation de dispersion, 419, 420, 454, 459, 460, 462, 463, 1219, 1251, 1253
 - relation de dispersion du guide d'onde, 1229, 1233, 1243, 1244, 1249
 - relation de dispersion des ondes de torsion, 1309
- relation de Gullstrand**
 - en Optique géométrique, 1323
- relation de Neumann sur la symétrie des mutuelles, 1105
- relation de Parseval, 993, 1001, 1434
 - en Mathématiques
- relation de récurrence, 1309, 1311
 - en Mathématiques
- relations de passage entre deux milieux**
 - les conditions aux limites relatives aux champs, 1228
 - relations de continuité en $x = 0$, 1188
 - continuité du champ électrique tangentiel, 763, 1190, 1206
 - continuité du champ magnétique normal, 799, 802, 806
 - continuité du champ magnétique tangentiel, 767, 799, 808
 - relation de discontinuité du champ H tangentiel, 1190
 - continuité des champs sur un dioptré [entre deux isolants], 1197, 1199, 1201, 1329
 - relations de continuité en acoustique, 1280
- relativité, 75, 88, 101, 109, 111, 112, 115, 122, 124, 126, 127, 140, 793, 803
- réductance, 1054, 1060
 - réductance de l'entrefer, 821
 - réductances équivalentes identiques, 1057
- remontée d'eau [upwelling des courants marins], 431
- rendement**, 127, 341, 342, 343, 359, 361, 362, 364, 366, 370, 371, 406, 407, 408, 409, 412, 413, 509, 523, 524, 528, 530, 532, 534, 540, 541, 543, 544, 591, 656, 657, 658, 733, 734, 1097, 1100, 1103
 - rendement en puissance, 1082, 1086, 1093
 - rendement de Carnot, 540
 - rendement de la ligne, 733
- répartiteur, 1179
- répartition des spires des bobines, 1105
- repères**
 - repère barycentrique de la Terre, 275
 - repère barycentrique, 77, 99, 101, 102, 131, 132, 275, 305, 307, 312, 334, 414
 - repère du centre de masse, 613, 619
 - repère géocentrique, 14
 - repère principal d'inertie, 275
 - repère de représentation, 169
 - repère de projection, 150, 167, 277
 - repère non galiléen, 6
 - repère tournant, 8, 56
 - repère local des coordonnées polaires, 743
- réponse fréquentielle**, 922, 926
- réponse indicielle**, 922, 926, 928, 956, 957, 1010, 1012, 1131, 1138, 1180

représentation

- représentation réelle, 963
- représentation des forces surfaciques, 1291
- représenter, 40, 67
- représentation numérique d'une fonction, 890
 - en Mathématiques
- représentation graphique, 31, 60
 - en Mathématiques
- représentation paramétrique, 260, 262, 263

réseau de caractéristiques du transistor
en Electronique, 960

réseaux électriques

- réseau passif, 718
- réseau haute tension, 656
- réseau électrique équivalent, 961
- réseau déphaseur, 975, 989
- réseau d'alimentation triphasé, 1118
- réseau d'alimentation, 1122
- réseau déphaseur, 853

réseaux optiques

- réseau, 1347
 - réseau par transmission, 1398
- réseau plan., 692
- réseau par réflexion, 1389
 - réseau à échelle, 1392
 - réseau à échelle [son intérêt par rapport au réseau plan par réflexion], 1392
 - réseau constitué par $N=20000$ miroirs identiques, 1390
- réseau de diffraction à profil sinusoïdal, 1404

réserve de puissance d'une automobile, 265, 266, 268

réservoir cryogénique, 860

résistance, 921, 950, 1093, 1106

- résistor, 864, 918, 921, 987
- résistivité, 704, 732
- résistances en série, 670
- résistances en parallèle, 670
- résistance négative, 904, 943, 1178, 1182
- résistance interne, 704, 712, 713
 - résistance interne du générateur équivalent, 1036
- résistance étalon, 968
- résistance équivalente, 1086
 - résistance équivalente du dipôle de Thévenin, 1037
 - résistance équivalente du dipôle de Thévenin, 1037
- résistance d'entrée, 669, 671, 825, 973, 1027
 - résistance d'entrée infinie, 913, 916
 - résistance d'entrée du quadripôle, 1021
 - résistance d'entrée du soustracteur infinie, 882
 - résistance d'entrée du multiplieur infinie, 882
- résistance de sortie, 973, 1027, 1028, 1128, 1129
 - résistance de sortie nulle, 913

- résistance de sortie du quadripôle, 1021, 1022
- résistance de charge infinie, 942
 - résistance de charge, 1085
 - résistance de charge critique, 1021
- résistance de l'inducteur, 1068
- résistance de ligne, 671
 - résistance de fuite, 668, 724, 899
 - résistance linéique, 827, 1254
- résistance critique, 970, 973, 1024, 1027, 1033, 1036
- résistance ajustable, 705
- résistance corrigée, 976, 980
- résistance différentielle, 702
- résistance ramenée dans le primaire, 1051
- résistance de rayonnement d'une antenne demi-onde, 1247
- résistance non reliée[commutation], 1035
- résistance à l'air**, 170, 246, 264, 265, 285, 287, 377, 381
- résistance de rayonnement** d'une antenne demi-onde, 1247
- résistance hydraulique**, 481, 483, 484
- résistance thermique**, 585, 586, 643, 669, 672, 674, 678
- résonance**, 61, 64, 191, 192, 193, 195, 200, 284, 288, 301, 302, 429, 457, 480, 614, 615, 622, 624, 687, 843, 844, 855, 1038, 1075, 1076, 1087, 1182
 - résonance en courant, 1176, 1181
 - résonateur, 1176
 - résonateur de grand facteur de qualité, 1175
 - résonance de marée, 425
- ressort**, 206, 207, 224, 225, 302, 863
 - ressort équivalent, 864
 - ressort spiral, 219, 220, 304, 308
 - ressort pneumatique, 1156
- restauration analogique à partir d'un signal discrétisé, 995, 997
- retard**, 885, 889
 - retard de la réponse, 955
 - retard apporté par la ligne, 1010
- retard dû à une rampe**
 - en Automatique, 1079, 1081
- réticule**, 1379
 - en Optique géométrique
- rétroaction**, 877, 927, 932, 1029, 1170, 1185
 - rétroaction-régulation, 486, 491
 - rétroaction compatible avec le régime linéaire, 1033
- réversibilité électrotechnique**, 1097
 - réversibilité du convertisseur, 1125
- réversibilité thermodynamique**, 530, 585, 655, 656
- revêtement mural d'insonorisation [Acoustique], 1281
- Reynolds** [formule de]
 - en Mécanique des fluides, 342, 466
- rides à la surface du mercure, 1321
- rotation de droites**, 1409
- rotation de fente diffractante**, 1356, 1380, 1384, 1385

rotation de miroir de diffraction, 1390, 1394

rotation de la terre, 429

rotation d'un solide autour d'un axe fixe

en Mécanique du solide, 287

rotation de la terre, 429

rotationnel, 323

rotationnel en coordonnées sphériques, 783, 793

rotationnel en coordonnées cylindriques, 325, 768, 794

rotationnel en coordonnées cartésiennes, 833

rotations d'ouverture diffractante, 1379

rotor, 1066, 1077, 1127

rotor de moteur synchrone triphasé, 1106

roue, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 268, 355, 366, 371

roue lestée, 141

roue de turbine, 366

roue à aubes, 341

roulement sans glissement, 355, 1140

en Mécanique du solide, 141, 143, 209, 210, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 227, 234, 235, 238, 239, 240, 241, 243, 244, 252, 259, 260, 262, 263, 265, 268, 269, 272, 273, 302, 303, 304, 305, 306, 309, 311, 312, 313

rugosité, 173, 465, 488

Rutherford [expérience de diffusion par les noyaux de], 71

S

salinité de l'eau de mer[Océanographie], 431

satellite, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 75, 76, 77, 83, 84, 85, 88, 89, 90, 275, 276, 277, 279, 280, 282

satellite géostationnaire, 75, 76, 77, 89

saturation d'un amplificateur opérationnel, 899, 900, 920, 939, 941, 1041, 1042, 1059, 1060

schéma de confluence appliqué à la régulation thermique, 649

en Mathématiques

schéma équivalent, 721

schéma électrique équivalent à l'ensemble moteur-amplificateur, 1128

schéma électrique équivalent, 1079

schéma équivalent à un transformateur, 1057

schéma équivalent dans le primaire, 1048, 1050

schéma équivalent dans le secondaire, 1048

schéma équivalent de montage, 1022

électronique

schéma équivalent d'un transistor

schéma équivalent d'un transistor, 976

circuit représentatif des grandeurs dynamiques d'un transistor, 957

schéma dynamique du transistor, 963

circuit représentatif des grandeurs statiques d'un transistor, 957

schéma-bloc, 815, 926, 929, 997, 1168

schéma fonctionnel de principe, 899

schéma fonctionnel, 890, 997, 1010, 1011, 1012, 1137, 1138, 1139, 1143, 1157,

1158, 1159, 1163, 1164, 1165, 1180, 1184

Sciences de l'Ingénieur ; voir aussi table des matières

applications industrielles des courants de Foucault, 829

coefficients de Lamé, 1288, 1289

coefficient de Lamé

coefficients d'élasticité, 1288

loi de Hooke [MMC :effort proportionnel à la déformation], 1288, 1293

glisseur, 263, 264, 265, 279, 735, 737

gouverne d'avion, 1138

second principe de la Thermodynamique, 535

second principe, 549

secondaire de transformateur, 1048, 1181

section efficace [Thermodynamique statistique], 23, 126, 127, 128, 129

sécurité du matériel électronique, 1092

self, 778, 820

self de lissage, 1088, 1093

semi-conducteur , 605

conductivité d'un semi conducteur, 609

trou positif dans un semi conducteur, 605

bande énergétique à niveaux multiples [conductivité en physique du solide], 606

largeur à mi-hauteur des bandes d'énergie, 612, 615, 617, 625

jonction P N [diode], 608

silicium [cf cristal du diamant], 704

tirage d'un monocristal de germanium, 680

mobilité d'un porteur de charge, 607, 609

sensibilité, 865

sensibilité aux perturbations, 1180

séparation des variables, 454, 480, 500, 647, 651, 661, 758, 801

séparation des variables en polaires, 799

en Mathématiques

séparation d'étoiles doubles, 1359

séparations

séparation des trois radiations rouges du cadmium, 1392

séparation d'étoile binaire, 1380

séparation des macromolécules biologiques, 636

séparatrice, 1414, 1418, 1419

série, 662

série de Fourier, 813, 819, 869, 876, 885, 888, 891, 893, 919, 921, 922, 925, 942, 946, 948, 982, 984, 991, 993, 997, 1001, 1005, 1006, 1034, 1064, 1083, 1088, 1303, 1305

série de Fourier de la transmittance du réseau, 1402

série de produits de convolution, 1001, 1003, 1005, 1006

servomoteur, 1138

en Electrotechnique

seuils

seuil, 5, 6, 8, 50, 51, 53, 54, 56, 61, 69, 74, 100, 108, 130, 141, 143, 172, 182, 184, 191, 193, 199, 208, 212, 215, 217, 218, 219, 220, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 229, 233, 234, 235, 238, 243, 245, 254, 257, 265, 266, 273, 276, 283, 284, 286, 287, 306, 307, 309, 310, 312, 313, 318, 320, 331, 332, 334, 335, 339, 354, 355, 379, 383, 400, 404, 407, 408, 412, 414, 416, 417, 422, 424, 425, 429, 459,

460, 462, 464, 470, 472, 476, 478, 483, 493, 501, 503, 509, 510, 512, 518, 522, 538, 543, 548, 561, 564, 571, 572, 573, 580, 590, 592, 599, 602, 616, 624, 625, 637, 655, 656, 657, 663, 667, 680, 681, 682, 684, 688, 695, 697, 698, 700, 702, 703, 737, 744, 749, 758, 760, 776, 779, 786, 787, 791, 792, 805, 818, 821, 823, 837, 839, 842, 843, 844, 851, 862, 863, 865, 867, 881, 891, 904, 906, 908, 928, 929, 930, 941, 943, 946, 948, 949, 973, 993, 1028, 1033, 1038, 1078, 1079, 1081, 1083, 1085, 1087, 1092, 1098, 1122, 1134, 1177, 1182, 1215, 1263, 1264
 maximum, 7, 48, 49, 84, 89, 180, 187, 189, 192, 195, 253, 254, 256, 268, 330, 337, 343, 362, 364, 370, 374, 384, 387, 403, 410, 411, 482, 496, 505, 506, 612, 617, 621, 623, 692, 696, 717, 725, 840, 845, 854, 931, 940, 945, 1075, 1076, 1181
 minimum, 72, 84, 87, 89, 168, 180, 181, 185, 190, 197, 247, 250, 251, 343, 374, 399, 410, 411, 426, 498, 539, 559, 560, 613, 614, 619, 840, 1343
 seuil de self, 1094, 1096
 seuil de slew rate, 1021, 1023, 1031
 seuil de stabilité électronique, 900

signal

signal de commande de l'oscillateur, 1180
 signal capté par l'antenne réceptrice, 1165
 signal perturbateur DC, 1168
 signal analogique de sortie, 890
 signal d'erreur, 1158, 1167
 signal dit porte ou créneau, 992
 signaux additionnés après avoir parcouru des
 longueurs égales de câbles de jonction et envoyés dans le détecteur D, 1436

silicium [cf cristal du diamant], 704

conductivité d'un semi conducteur, 609
 bande énergétique à niveaux multiples [conductivité en physique du solide], 606, 615
 largeur à mi-hauteur des bandes d'énergie, 612, 617
 jonction P N [diode], 608
 tirage d'un monocristal de germanium, 680

simulation, 927

simulation de la résonance, 1038

sinus cardinal [définition], 1379**slew rate**, 726, 1021, 1023

slew rate critique, 1031

solénoïde, 773

solénoïde infini, 839

solide déformable [MMC]

en Mécanique du solide, 284

soluté, 638

particules de soluté, 636, 637, 638

solution graphique, 9, 181, 202, 267, 268, 307, 309, 310, 377, 380, 381, 403, 511, 559, 560, 562, 586, 589, 590, 592, 593, 594, 618, 625, 662, 666, 667, 698, 758, 760, 823, 824, 943, 959, 960, 964, 1071, 1072, 1076, 1106, 1120

en Mathématiques

sommateur

en Electronique, 1018

sommateur SOMM

- en Electronique, 1040
- sortie court-circuitée**, 896
- source de liquide, 323
- source de courant**, 966, 967
 - source de courant quasi parfaite donc en parallèle sur une conductance négligeable, 1432
 - source de courant commandée par une vitesse, 837, 840
 - source de courant commandée par une tension d'entrée, 1430
 - générateur de courant, 721, 775, 813
 - générateur de courant parfait, 960
- source idéale de tension**, 940
 - générateur de tension parfait, 956
 - générateur de tension, 704, 712
 - générateur de tension commandé en tension, 722
 - source de tension commandée par une différence de courant, 970
 - générateur de Thévenin équivalent, 1035, 1036
 - générateur de tension alternative, 956
 - générateur de tension en dents de scie, 1166
- sources lumineuses**
 - source supposée parfaitement monochromatique, 1342
 - source ponctuelle, 1419
 - source lumineuse ponctuelle et monochromatique, 1414
 - source étendue, 1410
 - source étendue monochromatique, 1419
 - source étendue monochromatique pour un Pérot-Fabry au parallélisme bien réglé, 1448
 - source lumineuse [influence de la température de la], 1410
 - source à deux raies également intenses, 1343
- soustracteur** [rétroaction], 821, 882, 988, 990, 1018, 1129, 1170, 1173
- soustracteur de fréquence
 - en Automatique, 1176
- spath d'Islande [biréfringence], 1208
- spectre**, 994, 997, 998, 1033
 - spectre visible, 1457
 - spectre en fréquence, 891, 982, 984, 1026, 1424
 - spectre créneau de la lumière émise par la source, 1343
 - spectre discontinu, 998
 - spectre continu, 999
 - spectre borné, 993, 1004
- spectre cannelé**, 1351, 1358
 - spectre cannelé du à la lame de quartz, 1457
- spectre gaussien**, 1414, 1418
- spectrométrie, 48, 117
- sphère aimantée, 799
- sphère chargée en rotation [en magnétostatique], 793
- sphère conductrice [en Electrostatique], 741
- sphère supraconductrice (en Magnétostatique), 803
- spire de Helmholtz**, 33, 35
 - spire circulaire, 783, 794, 800
- Sports** : voir aussi table des matières

- stabilité**, 6, 10, 60, 63, 66, 99, 100, 105, 108, 109, 130, 142, 143, 168, 180, 181, 182, 184, 187, 189, 190, 191, 193, 194, 196, 197, 198, 199, 204, 227, 229, 233, 234, 247, 250, 251, 259, 275, 276, 277, 278, 279, 281, 283, 287, 294, 304, 307, 308, 310, 311, 317, 414, 415, 416, 417, 475, 476, 478, 515, 517, 521, 549, 558, 560, 561, 562, 570, 573, 594, 602, 748, 750, 758, 760, 777, 779, 780, 781, 805, 812, 837, 840, 841, 855, 900, 1157, 1160, 1164
 - stabilité en vitesse de rotation, 162
- station spatiale**, 11, 56, 177
 - en Astronautique
- statique des fluides**, 327, 329, 413, 423, 433, 434, 435, 470, 487, 518, 554, 555
- statique du solide**, 162, 209, 295, 302, 306, 308, 309, 312, 330, 332, 333, 334, 336
- statistique de Fermi-Dirac
 - en Thermodynamique, 606
- stator de moteur synchrone triphasé, 1106
- stigmatisme rigoureux
 - en Optique géométrique, 1320, 1321, 1326
 - points de Weierstrass, 1322
- Stirling** [cycle de]
 - en Thermodynamique, 539, 540
- stockage d'énergie dans le condensateur, 962
- subsonique, 467
- substituant isotopiques [ultracentrifugation], 639
 - en Biologie
- suite, 595, 657, 700, 709
 - en Mathématiques
- sulfate de gadolinium [désaimantation adiabatique], 568
- superposition d'états d'équilibres électrostatiques, 751, 755
- superposition des régimes quasi stationnaires, 827, 952, 957
 - théorème de superposition des régimes quasi permanents, 964, 1116
- supraconductivité, 776, 780, 803
 - en Thermodynamique
- surface de contrôle**, 535
 - en Mécanique des fluides, 324, 342, 357, 360, 387, 399, 402, 405, 407, 453, 465, 477, 499
- surface des indices [milieux anisotropes transparents], 1207, 1209, 1211
- surface équichemin optique**, 1211
 - en Optique ondulatoire
- surface équipotentielle**, 740
- surface libre**
 - en Mécanique des fluides, 327, 329, 331, 337, 338, 339, 341, 342, 344, 347, 368, 414, 417, 418, 419, 420, 422, 425, 430, 431, 448, 451, 453, 454, 56, 470, 484
- surface parfaitement absorbante
 - en Ondes électromagnétiques, 1189
- surface parfaitement réfléchissante
 - en Ondes électromagnétiques, 1189
- surfaces équi-indices
 - en Optique géométrique, 1335
- surpression**, 388, 400, 474, 476, 483, 517, 520, 521, 1281
- suspension pneumatique
 - en Automatique classique et numérique, 1155

Svedberg [ultracentrifugation], 636
 symbole de Kronecker, 1311
 en Mathématiques
symétrie, 166, 174, 207, 213, 259, 279, 294, 301, 302, 303, 307, 308, 317, 349, 350, 354, 385, 387, 406, 417, 450, 461, 758, 766, 771, 788, 790, 795, 796, 799, 801, 806, 807, 828, 830, 832, 835, 896, 927, 1035, 1117
 symétrie cylindrique, 324, 342, 351, 358, 360, 444, 449, 450, 768, 771, 774, 1047
 symétrie sphérique, 18, 207, 516, 601, 674, 738
 symétrie ternaire, 1120
 symétries des causes et symétrie des conséquences, 1190
 symétrie brisée, 2, 5, 470, 473, 545
 symétrie de la matrice des efforts, 1288
 symétrie de la matrice diélectrique du cristal anisotrope, 1207
 symétrie des mutuelles [formule de Neumann sur la], 1105
synchronisation
 synchronisation d'oscilloscope, 1088
 en Electronique, 880, 940
système afocal
 *configuration afocale, 1380
 en Optique géométrique, 1327
 système asservi à commande proportionnelle
 en Automatique, 1157
 système de levage
 en Mécanique du solide, 162
 système diphasé
 en Thermodynamique, 557, 589, 593
systèmes de physique appliquée
 système bouclé, 1131
 en Electronique, 914, 975
 système du premier ordre, 1163, 1166
 système de premier ordre approché, 1157
 système d'ordre 1, 1067
 système du second ordre, 1167
 système d'ordre 2, 1081
 système balai-collecteur, 1066
 système ressort-amortisseur, 1155
 systèmes mis en cascade
 en Automatique, 1166

T

tableau numérique, 377, 380, 445, 490, 520, 560, 561, 589, 592, 632, 847, 889, 894, 925, 978, 1004, 1068, 1069, 1070, 1072, 1164, 1282, 1283, 1285, 1286, 1295, 1457, 1458, 1460
taches d'Airy, 1328
taux de compression, 523, 539
 taux de compression Diesel, 524
 taux de création de neutrons, 129
 taux d'ondulation, 1083, 1084, 1088, 1090

- TDF [transformation discrète de Fourier], 1311
 - transformées de Fourier discrètes, 1311
- teinte uniforme plate**, 1425
- teintes de Newton**, 1386
- télémètre étalonné, 867
 - en Optique géométrique
- télescope du type Cassegrain**
 - en Optique géométrique, 1322
- télescopes identiques couplés, 1364
- température d'équilibre, 696
- température de fin de combustion**, 523, 524
- temps de réponse**, 1136, 1167, 1168, 1171, 1172, 1173
 - temps de réponse pour approcher la valeur permanente à 5 % près, 1131
 - temps de réponse à 5 % d'un système du second ordre, 1167
 - temps de retard dû à la transmission, 1267
 - rampe, 1171
- temps moyen d'impulsion, 837, 841
- tension**, 49, 67
 - tension efficace, 851, 1020
 - tension d'entrée, 857, 858, 867, 904, 919, 1166
 - tension d'entrée créneaux, 919
 - tension électrique d'entrée du détecteur proportionnelle à l'intégrale de la composante E_y du champ électrique reçu à sa surface
 - tension de sortie, 857, 858, 861, 904, 987
 - tension de sortie initiale, 874, 1010
 - tension de sortie d'un multiplieur, 990
 - tension électrique de sortie du détecteur, 1435
 - tension de sortie du microphone, 1283
 - tension de sortie du microphone proportionnelle à la surpression quadratique moyenne, 1285
 - tensions de saturation, 1021, 1022, 1024
 - tension de seuil, 1024, 1093
 - tension de seuil d'une diode jonction, 611
 - tensions redressées, 1168
 - tension redressée monoalternance, 1148, 1152, 1153
 - tension Zéner, 702, 1024
 - tension nominale, 1057
 - tension nominale d'alimentation, 1068
 - tension de référence, 1024
 - tension continue sans partie alternative, 963
 - tension modulée en fréquence, 988
- tension artérielle, 483
- tension de corde**, 163, 1303
- tension superficielle**, 460, 463, 557, 633, 680, 682
 - tension superficielle[formule de Laplace sur gouttes et bulles], 558, 562
 - rides à la surface du mercure, 1321
- terme correctif principal**, 1088
- terme d'amortissement**, 726, 855, 868
- tête-à-queue, 154
- texture discrétisée du récepteur, 1328

théorème de Coulomb [discontinuité du champ électrique normal à la surface d'un conducteur], 749, 754, 758, 759, 763
 théorème de Kutta-Joukowski, 389
 en Mathématiques
théorème de la moyenne, 405, 738
théorème de la puissance cinétique, 149, 165, 242, 256, 258, 267, 319, 361, 465, 466, 472
théorème de la résultante dynamique, 145, 146, 148, 246, 248
théorème de la valeur finale, 1139, 1144, 1159, 1160, 1164, 1185
théorème de la valeur initiale, 1185
théorème de l'action et de la réaction, 3, 178, 248, 331, 354, 363, 379, 406, 410, 471, 737
théorème de l'énergie cinétique, 3, 24, 155, 194, 225, 226, 237, 249, 266, 269, 271, 560
théorème de Malus, 1425
 en Optique géométrique
 théorème de Miller
 en Electronique, 950
théorème de Pythagore, 164
 en Mathématiques
théorème de Shannon, 1006
théorème de Stokes (Green-Riemann), 30, 119, 771
 en Mathématiques
théorème de superposition des régimes quasi permanents, 964, 1116
 superposition des régimes quasi stationnaires, 827, 952, 957
 superposition d'états d'équilibres électrostatiques, 751, 755
théorème de Schwarz, 570
théorème de Thévenin, 870
 Thévenin, 702, 703, 865, 1082, 1086
 Thévenin en alternatif, 957, 1086
théorème des moments, 589, 593
théorème d'Euler, 331, 360, 363, 371, 387, 399, 401, 406, 410, 466, 468, 471, 544, 594
théorème du centre de masse, 151, 158, 159, 168, 207, 255, 257, 270, 272, 371
théorème du gradient, 794
théorème du moment cinétique, 147, 151, 168, 171, 172, 178, 181, 185, 193, 194, 195, 206, 207, 213, 215, 220, 223, 225, 228, 235, 239, 241, 242, 243, 251, 255, 256, 266, 268, 277, 279, 287, 288, 290, 295, 296, 299, 306, 310, 311, 312, 314, 318, 319, 320, 330, 334, 335, 336, 351, 354, 355, 371, 417, 501, 582, 782, 869, 1067, 1080, 1100, 1126, 1132, 1140, 1313, 1314
 théorème du moment dynamique, 246, 248
théorème du mouvement du centre de masse, 151, 158, 159, 168, 207, 255, 257, 270, 272, 371
théorème sur une suite de rapports égaux., 917
 en Mathématiques
théorie cinétique des gaz, 595
théorie classique de l'effet Doppler, 1413
 thermie
 en Thermodynamique, 583
 thermique, 643

- thermistance, 703
- thermodynamique statistique, 595
- thermostat, 643
- tirage d'un monocristal de germanium, 680
- tire-bouchon à droite**, 787
- titre massique**, 554, 555, 588, 592
- titre massique en liquide**, 589
- titre massique en vapeur**, 589
- T.M.C., voir théorème du moment cinétique
- tore**, 11, 13, 56, 177, 775, 813, 817
- Torricelli**, 471, 476
 - torr unité de pression industrielle telle qu'un bar vaut 760 torrs
- torseur**, 166, 246, 254, 260, 263, 265, 276, 279, 417
 - torseur de forces, 265
 - torseur cinétique, 263
 - torseur électrostatique, 757
 - torseur cinématique des vitesses d'un solide, 305
- torsion**, 174, 179, 283, 286, 292, 416
- tourbillon**, 447, 448, 449, 451
 - en Mécanique des fluides
- tout se passe comme si** [équivalence de formulation], 719, 1050, 1075, 1117, 1118, 1395
- trace de matrice, 1290
 - en Mathématiques
- traction**, 76, 163, 164, 494, 1293
- traîneau, 150
- traînée**, 388, 389, 390, 393, 395
 - en Mécanique des fluides
- trajectoire**
 - en Mécanique du point ,11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 36, 37, 38, 40, 43, 45, 46, 47, 49, 56, 58, 72, 76, 77, 80, 83, 84, 88, 89, 91, 92, 94, 95, 96, 98, 101, 102, 109, 110, 114, 123, 125
 - en Mécanique du solide ,316
 - en Mécanique des fluides ,344, 346, 368, 371, 372, 401, 418, 420, 454, 455, 456
 - en Electricité fondamentale ,785
- trajectoire d'un rayon dans une fibre à gradient d'indice, 1330
- transconductance, 896
- transducteur, 861
- transfert thermique**, 643, 662
 - transfert thermique conducto-convectif, 585
- transformateur**, 656, 1047, 1055, 1056, 1221
 - transformateur idéal, 1176
 - transformateur à vide, 1058
 - transformateur de tension, 1215
 - transformateur d'isolement, 1122
 - transformateur triphasé, 1057
 - transformateur triphasé à secondaires en étoile, 1057
 - transformateur triphasé à vide pour chaque enroulement secondaire, 1058
- transformation de Fourier**, 992, 1375, 1376, 1424
 - transformation de Fourier inverse, 992, 999, 1000, 1004, 1005, 1007

- transformation de Fourier d'un produit de convolution, 999
- transformées de Fourier discrètes, 1311
 - TDF [transformation discrète de Fourier], 1311
- transformation de Laplace**, 1136, 1141, 1157, 1160, 1184
 - transformée de Laplace d'une dérivée, 1151, 1161
 - transformée de Laplace de l'échelon, 1017
 - transformées de Laplace et transformées en z , 1160
 - retard dû à une rampe, 1079, 1081
- transformation de Lorentz**, 136
 - transformation de Lorenz du champ électromagnétique, 1253
- transformation élémentaire**
 - transformation infinitésimale, 535
 - en Thermodynamique, 539, 554, 563, 588
- transformation en z , 1160, 1165
 - transformée en z d'un correcteur numérique, 1160, 1165
 - correspondance transformées en z et transformées de Laplace, 1165
- transformation infinitésimale**
 - transformation élémentaire, 539, 554, 563, 588
 - en Thermodynamique, 535
- transformation polytropique**
 - en Thermodynamique, 511, 512, 514, 534, 537
- transformation polytropique**, 511, 512, 514, 534, 537
- transformation quasi statique**, 521, 531, 532
- transistor**, 951, 966, 1082, 1085
 - transistor, 951, 966, 1082, 1085
 - semi-conducteur , 605
 - trou positif dans un semi conducteur, 605
 - conductivité d'un semi conducteur, 609
 - bande énergétique à niveaux multiples [conductivité en physique du solide], 606
 - transistor tripolaire normal., 957
 - transistor passant, 1092
 - transistor bloqué, 1085, 1092, 1093
 - transistors intégrés, 967
 - transistors [supprimer l'influence de la température dans un montage à], 968, 971
 - schéma équivalent d'un transistor, 976
 - circuit représentatif des grandeurs statiques d'un transistor, 957
 - circuit représentatif des grandeurs dynamiques d'un transistor, 957
 - schéma dynamique du transistor, 963
- translation d'ouverture diffractante, 1379
 - translation d'une pupille, 1370
- transmission du signal de la même manière pour toutes les fréquences, 1262
- transmission totale, 1267
 - transmission totale en acoustique, 1280
 - transmission totale de l'énergie sonore, 1273
- transmittance**, 891, 907, 919, 961, 965, 969, 982, 983, 1016, 1087, 1137, 1138, 1139, 1142, 1157, 1158, 1159, 1160
 - transmittance unité, 1020
 - transmittance en amplitude, 1398

- transmittance de référence, 919
- transmittance de Laplace du bloc, 1166
- transmittance du réseau, 1399, 1402, 1407
- transparence**, 697, 1404
 - transparence périodique, 1371
- Transports : voir aussi table des matières
- transvasement**, 537, 592, 593
- transversalité des champs électromagnétiques**, 1207, 1208
 - transversalité d'un champ [imposer techniquement la], 1245
 - guide d'onde, 836
 - guide d'onde rectangulaire, 1231
- travail**
 - en Thermodynamique, 509, 523, 527, 528, 531, 532, 533, 534, 535, 539, 540, 543, 544, 546, 548, 557, 558, 560, 578, 579, 581, 590, 594, 655, 656, 657, 658
 - travail de frottement [des forces de contact], 206, 249
 - travail des forces de pression, 591
 - travail des forces de frottement fluide, 1074
 - travail massique, 588, 589
 - travail volumique, 564, 569
 - travail des forces d'entraînement., 156, 160
 - travail du couple moteur, 540
 - travail de transvasement, 537, 592, 593
- triangulation du signal de sortie**, 1028
- triphasé**
 - montage en étoile, 707
 - montage étoile
 - montage étoile équilibré, 727
 - montage étoile déséquilibré, 727
 - montage triangle, 1104
 - neutre [cf triphasé], 727
 - fil neutre du triphasé, 727, 1057
 - triphasé, 727
- triphasé**, 727
- troisième coefficient d'Einstein (de l'émission induite), 686
- troisième fente d' Young, 1347
 - troisième fente de largeur double, 1347
- troisième principe de la thermodynamique**, 569, 572
- troposphère
 - en Géophysique
 - en Thermodynamique, 516
- trou positif dans un semi conducteur, 605
 - semi-conducteur, 605
 - conductivité d'un semi conducteur, 609
 - bande énergétique à niveaux multiples [conductivité en physique du solide], 606
- tube de courant**, 359, 361, 363, 376, 406, 407, 410, 453, 466
- tube de Kundt**[Acoustique], 1281, 1285
- tube de Pitot**
 - en Mécanique des fluides, 467
- tube de vorticité, 448, 449
- turbine**, 341, 366, 579, 585, 656

turbulence

en Mécanique des fluides, 395, 413, 467

tuyère, 579

type de rétroaction, 875

U

u.m.a., 611, 612

ultracentrifugation, 636, 638, 639

unicité de la solution physique[cf déterminisme], 827

unidimensionnalité, 134, 286, 341, 347, 363, 402, 407, 409, 410, 411, 413, 465, 466, 479, 482, 567, 582, 586, 587, 588, 591, 633, 647, 648, 650, 672, 951

unidirectionnalité, 626

unité, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 67, 69, 71, 74, 120, 180, 189, 194, 388, 392, 403, 439, 441, 442, 446, 447, 470, 472, 480, 481, 490, 500, 555, 626, 627, 629, 634, 637, 648, 665, 670, 675, 676, 679, 704, 705, 706, 735, 736, 737, 739, 782, 787, 800, 844, 864, 882, 988, 991, 1013, 1020, 1299

homogénéité d'une grandeur[analyse dimensionnelle], 683

analyse dimensionnelle, 63, 673, 677, 803

uranium [Physique Nucléaire], 126, 127, 129, 130, 131

en Energétique

V

valeur approchée, 1084

en Mathématiques

valeur finale, 922, 926, 930, 956, 957, 961, 1011, 1016, 1144, 1164

valeur finale en utilisant la transformation de

Laplace, 1017

valeur finale d'une suite, 1010, 1015

valeur initiale, 930, 932, 937

valeur moyenne, 190, 198, 362, 363, 484, 488, 776, 1270

valeur moyenne nulle, 997

valeur moyenne et probabilité, 601

valeur moyenne de la tension du signal, 876, 891

valeur post commutation, 922, 925, 926, 928, 929, 935, 936

valeurs efficaces, 727, 776

valeurs efficaces [calcul de], 1026

valeur efficace du flux magnétique, 1117

valeur efficace de l'intensité, 1097, 1116

tension efficace, 851, 1020

intensité efficace, 728

valeurs extrêmes du courant, 1084, 1089, 1096

en Electrotechnique

valeurs propres, 107, 278, 283, 292, 295, 297, 1210

en Mathématiques

vapeur saturante, 554, 583

état de vapeur saturée, 589

variable continue ou discontinue, 1041

- variance**, 589, 592
- variation d'énergie interne**, 578, 579, 581
- variation d'enthalpie**, 533, 579, 581
 - variation d'enthalpie massique, 592, 594
 - variation d'enthalpie libre molaire, 557
- variation d'entropie**, 534, 536, 539, 541, 546, 547, 552, 553, 569, 571, 576, 577, 580, 674
 - variation d'entropie massique, 587
- variation de la conductivité thermique avec la température, 681
- variation de la longueur d'onde émise par la diode laser proportionnelle à la variation d'intensité, 1421
- variation de l'indice de réfraction du diélectrique quand celui-ci est soumis à un champ électrostatique[effet électro-optique], 1213
- variation de l'ordre d'interférence, 1358
- variation de masse [relativité], 127
- variation d'énergie, 546
 - en Astrophysique
- variation d'enthalpie libre** [changement d'état], 558, 559, 570, 572
- variation du niveau de Fermi [diode cristalline], 608
- variation temporelle du déphasage entre les deux ondes qui interfèrent, 1424
- vecteur de Poynting**, 765, 770
 - vecteur de Poynting du à une antenne demi onde, 1247
 - vecteur de Poynting d'un faisceau gaussien, 1217
 - en Ondes électromagnétiques, 1189, 1191, 1196, 1202, 1224, 1231, 1234, 1242, 1250
- vecteur densité de courant de déplacement**, 1298
- vecteur densité de courant d'énergie sonore**, 1270, 1275
- vecteur densité surfacique de courant**, 1188
- vecteur d'onde de l'onde incidente**
 - en Ondes électromagnétiques, 1188
- vecteur d'onde de l'onde réfléchie**
 - en Ondes électromagnétiques, 1188
- vecteur instantané de rotation**
 - en Mécanique du solide, 282
- vecteur tourbillon**
 - en Mécanique des fluides, 324, 438, 440, 441
- vecteur vitesse complexe**, 436
 - en Mathématiques
- vecteurs propres**, 1210
 - en Mathématiques
- ventilateur de four, 662
- vibreux excitateur de corde vibrante
 - en Ondes mécaniques, 1285
- vidange
 - en Mécanique des fluides, 358, 448, 469
- viscosité**, 30, 119, 173, 383, 393, 395, 396, 413, 429, 430, 431, 432, 467, 468, 469, 470, 473, 479, 482, 483, 484, 487, 488, 489, 492, 494, 495, 498, 499, 500, 501, 502
 - Poiseuille, 481, 482
 - visqueux, 170, 181, 413, 481, 482, 483, 490, 499
- visibilité**, 1345, 1346, 1362, 1365, 1369

- visibilité améliorée, 1368
 - amélioration de la visibilité, 1369
- visibilité des franges avec un spectre créneau, 1411
- contraste, 1412, 1416
- degré complexe de cohérence spatiale, 1365
- coefficient de cohérence partielle, 1368
- facteur de visibilité, 1342, 1343, 1360
- visibilité d'un enregistrement optique opéré avec un Michelson, 1415, 1416
- visualisation**, 667
 - visualiser, 635
 - visualisation des modes, 1306
 - visualisation de la diffraction par un réseau, 1390
 - visualisation de la diffraction, 1375
 - visualisation d'un effet non linéarisé en optique, 1412
- vitesse** [dérivée temporelle d'une grandeur quelconque]
 - vitesse de réaction chimique voir cinétique dans l'index de chimie
 - vitesse aréolaire, 76, 79, 80
 - vitesse (maximale) de balayage de la tension de sortie d'un AO, 1021
 - vitesse de variation d'entropie, 674, 679
- vitesse angulaire**
 - vitesse de rotation instantanée d'un point de la roue, 261, 263
 - vitesse angulaire finale, 1080
 - vitesse de rotation de la terre, 434
 - vitesse angulaire de pivotement, 261, 264
 - vitesse de rotation moyenne et couple moteur, 1119
 - vitesse nominale, 1068
 - vecteur instantané de rotation, 282
- vitesse d'ondes**
 - vitesse de phase, 360, 456, 459, 460, 462, 464, 1121, 1187, 1193, 1195, 1197, 1201, 1214, 1231, 1234, 1236, 1295, 1300
 - rides à la surface du mercure, 1321
 - vitesse de groupe, 459, 462, 1236, 1313
 - vitesse de propagation de l'énergie, 1231, 1236, 1238, 1242, 1270, 1312
 - rides à la surface du mercure, 1321
 - vitesse d'Alfven, 1295
 - vitesse de propagation de l'énergie sonore, 1273
 - vitesse de propagation de l'énergie sonore harmonique, 1279
 - vitesse de phase d'une onde magnétohydrodynamique transverse, 1297
 - vitesse de phase d'une onde magnétohydrodynamique longitudinale, 1297
 - vitesse de propagation d'ondes électriques, 1255, 1257
- vitesse mécanique** [matérielle]
 - vitesse initiale, 151
 - vitesse initiale nulle, 612
 - vitesse moyenne, 363, 432, 483
 - vitesse limite, 8, 31, 34, 119, 246, 247, 251, 254, 265, 266, 626, 637, 640, 641
 - vitesse de glissement, 227, 237, 238, 270, 273
 - vitesse quadratique moyenne, 595, 597
 - vitesse de tirage du cristal, 680, 681, 683
 - vitesse de rupture, 283, 287

vitesse normale nulle sur une paroi, 806
 vitesse débitante, 469
 vitesse hypersonique, 581, 617
 voile, 376, 377, 379, 383, 384, 387, 390, 391, 395
 voile solaire, 93
 voile de Flettner, 383
voltmètre de résistance pratiquement infinie, 982
 voltmètre numérique, 705, 1068
 voltmètre numérique [fiabilité de la mesure d'un], 1025
 voltmètre numérique à double rampe., 1024
volume de contrôle
 en Mécanique des fluides, 368, 370
 volume équipotentiel d'un conducteur électrostatique, 755
volume massique [inverse de la masse volumique], 583, 636, 638, 639
volume molaire [mélanges binaires], 558
vortex, 438, 440, 448
 vortex de Rankine, 448
 vorticité, 448, 452
vorticité, 448, 452

W

weber, 1123
 Weibull [loi de], 362
 wobulation, 1145

Z

Zeeman [effet], 1391, 1397
zone de rayonnement de dipôle rayonnant, 1246, 1249
 zone de transition en ultracentrifugation, 638, 640

Pour terminer l'index d' « un vaste ouvrage » avec humour et pour plagier Hegel, citons Apocalypse 1 :8 : « Je suis l'alpha et l'oméga. »

Εγω ειμι το Αλφα και το Ω

THEMES

SPORTS

Voile
Planche à voile
Ski
Traîneau
Equilibriste sur ballon
Montgolfière

TRANSPORTS

Automobile

Moteur à essence, diesel
Freinage, accélération
Chargement et freinage
Suspension classique
Correcteur d'assiette numérique

Maritime

Aéroglisser
Chargement des pétroliers
Navigation contre le vent
Voile
Voile de Flettner

DOMOTIQUE

Régulation de chauffage
Pompe à chaleur
Frigo
Four de cuisine
Horloge, montre
Haut – parleur

ENVIRONNEMENT NATUREL

Océanographie

Houle
Mascaret
Marée
Courants

Physique du globe

Atmosphère
Bilan thermique terrestre
Modèle magnétique terrestre
Lithosphère
Rebond glaciaire

Biophysique

Circulation sanguine
Ultracentrifugation

AIR ET ESPACE

Fusée
Satellites
Station spatiale
Tuyère, turbine
Voile solaire
Capteur d'accélération
Antenne radar de poursuite,
Guide d'onde
Antenne radio
Commande automatique de
gouverne d'aile d'avion

ASTROPHYSIQUE

Galaxies en rotation
Points de Lagrange
Détekteur à corrélation
Télescopes, Hubble
Périhélie de Mercure

THEMES (suite)

PRODUCTION D'ENERGIE

Centrale nucléaire
Barrage
Bassin de retenue
Auget, turbine
Mesure de haute tension
Eolienne, étude statistique des vents
Magnétohydrodynamique

ENVIRONNEMENT INDUSTRIEL

Moteurs électriques
Cavitation des chaudières
Compresseur
Détendeur
Electrovanne, débits, hydraulique
Automatismes
Régulateur
Courants de Foucault
Triphasé équilibré ou non
Métrologie
Mécanique des milieux continus

ELECTRONIQUE

Analogique

Transistor
A.O.
Filtres
Oscillateurs
Fibre optique

Numérique

Appareil digital
Filtrage
Convertisseur

ENVIRONNEMENT SCIENTIFIQUE

Laser
Supraconductivité
Jets ioniques
Particules
Cavité résonnante
Rayonnements
Spectromètres
Effet Compton
Réacteur nucléaire
Magnétohydrodynamique
Basse température
Tension superficielle
Hystérésis
Ondes évanescentes
Instrument de musique
Polarographie
Atome exotique
Biréfringence

ENVIRONNEMENT CHIMIQUE

Piles
Parfums
Médicaments
Insecticides
Métallurgies
Analyse, séparations, extraction, Ultracentrifugation
Dosage de l'eau
Stéréochimie moléculaire
Pétrole
Productions industrielles : NH_3 , H_2SO_4 , plastiques

PHYSIQUE

1. **Mécanique du point**
 - 1.1. Principe fondamental de la mécanique
 - 1.2. Effets de E et B.
 - 1.3. Oscillateurs mécaniques
 - 1.4. Champ newtonien
 - 1.5. Chocs classiques
 - 1.6. Relativité

2. **Mécanique du solide**
 - 2.1. Introduction classique à la dynamique du solide
 - 2.2. Rotation d'un solide autour d'un axe
 - 2.3. Contact entre solides
 - 2.3.1. "Premiers pas" théoriques
 - 2.3.2. Activités sportives
 - 2.3.3. Véhicules
 - 2.4. Oscillations
 - 2.5. Couplage d'oscillateurs
 - 2.6. Mouvement à deux paramètres de rotation

3. **Mécanique des fluides**
 - 3.1. Cinématique des fluides
 - 3.2. Statique des fluides
 - 3.3. Actions mécaniques
 - 3.3.1. "Premiers pas" théoriques
 - 3.3.2. Applications techniques
 - 3.3.3. Marine
 - 3.3.4. Océanographie physique
 - 3.4. Théorème de Bernoulli
 - 3.5. Effets dissipatifs
 - 3.6. Mécanique des milieux continus

4. **Thermodynamique**
 - 4.1. Gaz parfait
 - 4.2. Les deux principes
 - 4.3. Changement d'état
 - 4.4. Systèmes ouverts
 - 4.5. Thermodynamique statistique
 - 4.6. Diffusion
 - 4.7. Thermique
 - 4.8. Rayonnement du corps noir

5. **Electricité fondamentale**
 - 5.1. Electrocinétique
 - 5.1.1. Courant continu

- 5.1.2. Régime transitoire
- 5.1.3. Courant alternatif
- 5.2. Electrostatique du vide et des milieux
- 5.3. Magnétostatique du vide et des milieux
- 5.4. Phénomènes d'induction
- 5.5. Introduction à la physique du solide

6. Physique appliquée

- 6.1. Electronique
 - 6.1.1. Amplificateur opérationnel
 - 6.1.2. Multiplieur
 - 6.1.3. Rétroaction
 - 6.1.4. Filtres
 - 6.1.5. Oscillateur
 - 6.1.6. Transistor
 - 6.1.7. Théorie du signal
 - 6.1.8. Electronique numérique
- 6.2. Electrotechnique
 - 6.2.1. Transformateur
 - 6.2.2. Moteurs à courant continu
 - 6.2.3. Hacheurs
 - 6.2.4. Courants triphasés
- 6.3. Automatique

7. Physique ondulatoire

- 7.1. Ondes électromagnétiques
- 7.2. Ondes électriques
- 7.3. Acoustique
- 7.4. Ondes mécaniques
- 7.5. Optique
 - 7.5.1. Optique géométrique
 - 7.5.2. Optique ondulatoire
 - 7.5.2.1. Interférences
 - 7.5.2.2. Diffraction
 - 7.5.2.3. Réseaux
 - 7.5.2.4. Interféromètres
 - 7.5.2.5. Lumière polarisée

Chimie

1. Energie et structure

- 1.1. Thermochimie
- 1.2. Liaisons
- 1.3. Cristallographie

- 2. **Cinétique des réactions**
- 3. **Thermodynamique chimique**
 - 3.1. Equilibres homogènes
 - 3.2. Equilibres hétérogènes
 - 3.3. Equilibres hétérogènes de la métallurgie
 - 3.4. Mélanges binaires
- 4. **Solutions aqueuses**
 - 4.1. Equilibres acidobasiques
 - 4.2. Complexes
 - 4.3. Introduction à la précipitation
 - 4.4. Oxydoréduction
 - 4.5. Problèmes mixtes
 - 4.6. Courbes intensité-potentiel
- 5. **Chimie organique**
 - 5.1. Spectroscopies
 - 5.2. Halogénoalcanes
 - 5.3. Stéréochimie
 - 5.4. Organomagnésiens
 - 5.5. Alcènes
 - 5.6. Benzène
 - 5.7. Alcools
 - 5.8. Fonctions azotées
 - 5.9. Aldéhydes et cétones
 - 5.10. Acides carboxyliques et dérivés
 - 5.11. Polymérisations
 - 5.12. Survol final

APPLICATIONS INTERDISCIPLINAIRES

- 1. **Biologie**
- 2. **Géophysique**
- 3. **Astrophysique**
- 4. **Astronautique**
- 5. **Métallurgie**
- 6. **Energétique**
- 7. **Productique**
- 8. **Domotique**
- 9. **Transports**
- 10. **Sports**
- 11. **Technologies**

TABLE DES MATIERES

Physique

1. Mécanique du point

1.1. Principe fondamental de la mécanique

1.1.1.	Invariants masse réduite	1.
1.1.2.	Mouvement d'un point sur un support	5.
1.1.3.	Dans une station spatiale en rotation	11.
1.1.4.	Fusées et satellites dans le champ terrestre	14.
1.1.5.	Voir interaction de dipôles	599.
1.1.6.	Voir capteur d'accélération avec jauge de contrainte	862.

1.2. Effets de E et B.

1.2.1.	Mouvement de particules 1	25.
1.2.1.	Mouvement de particules 2	30.
1.2.3.	Filtre de vitesse	37.
1.2.4.	Spectromètre à électrons	49.
1.2.5.	Voir champ magnétique terrestre	783.
1.2.6.	Voir interaction laser jet d'ions	611.

1.3. Oscillateurs mécaniques

1.3.1.	Oscillations d'inertie dans un repère tournant	56.
1.3.2.	Oscillateur anharmonique, hystérésis	60.
1.3.3.	Résonance électromécanique	67.
1.3.4.	Voir oscillation de satellite géostationnaire	86.
1.3.5.	Voir stabilisation de satellite	275.
1.3.6.	Système à resort	224.

1.4. Champ newtonien

1.4.1.	Atome de Bohr; atome exotique, diffusion de Rutherford	71.
1.4.2.	Satellite géostationnaire	75.
1.4.3.	Vitesse de lancement et excentricité de satellite	83.
1.4.4.	Changement d'excentricité de satellite	88.
1.4.5.	Quelques problèmes de navigation à voile solaire	93.
1.4.6.	Points de Lagrange	99.
1.4.7.	Avance du périhélie de Mercure	109.
1.4.8.	Voir stabilisation de satellite	275.

1.5. Chocs classiques

1.5.1.	Chocs élastiques entre particules	116.
1.5.2.	Croissance des gouttes de pluie par coalescence	119.
1.5.3.	Voir choc d'un satellite géostationnaire et de météorites	75.

1.6. Relativité

1.6.1.	Invariant relativiste, effet Compton	122.
1.6.2.	Diffusion de neutrons dans un réacteur à uranium enrichi	126.
1.6.3.	Transformation du champ électromagnétique dans une transformation de Lorentz	136.
2.	Mécanique du solide	
2.1.	Introduction classique à la dynamique du solide	
2.1.1.	Equilibre d'une roue lestée sur un plan incliné	141.
2.1.2.	Coulisseau vibrant	144.
2.1.3.	Traîneau	149.
2.1.4.	Régulateur de Watt	154.
2.1.5.	Statique et dynamique d'un système de levage	162.
2.1.6.	Voir interaction de dipôles	599.
2.1.7.	Voir barrage parallélépipédique	327.
2.1.8.	Voir barrages prismatique et voûte	331.
2.1.9.	Jouet à réaction	350.
2.2.	Rotation d'un solide autour d'un axe	
2.2.1.	Tige et disque en rotation - oscillation par entraînement	166.
2.2.2.	Anémomètre à jet fin, à jet large	169.
2.2.3.	Oscillations d'une plaque à suspension trifilaire	173.
2.2.4.	Freinage moteur de la rotation d'une station spatiale	177.
2.2.5.	Rotation d'un dipôle dans un champ, stabilité hystérésis	179.
2.2.6.	Pendule pesant	188.
2.2.7.	Voir régulateur de Watt	154.
2.2.8.	Voir interaction entre 2 galaxies	544.
2.2.9.	Voir compresseur à accélération angulaire permanente	581.
2.2.10.	Voir électromètre	757.
2.2.11.	Voir auget, re,dement	366.
2.2.12.	Voir compteurs en électrotechnique	1066.
2.3.	Contact entre solides	
2.3.1.	"Premiers pas" théoriques	
2.3.1.1.	Sphère sur un plan incliné avec ou sans glissement	205.
2.3.1.2.	Roulement et basculement d'un cylindre	210.
2.3.1.3.	Loi de Coulomb dans un repère oscillant	218.
2.3.1.4.	Système à ressorts et disque	224.
2.3.1.5.	Oscillation de tige et de disque	236.
2.3.1.6.	Voir activités sportives	246.
2.3.1.7.	Voir véhicules	259.
2.3.2.	Activités sportives	
2.3.2.1.	Influence de la pente et de la nature de la neige sur les efforts d'un skieur	246.
2.3.2.2.	Equilibriste sur un ballon	252.

2.3.3.	Véhicules	
2.3.3.1.	Roues de véhicule	259.
2.3.3.2.	Freinage et accélération d'une automobile	264.
2.3.3.3.	Freinage et chargement	268.
2.3.3.4.	Voir traîneau	149.
2.3.3.5.	Voir jouet à réaction	350.
2.4.	Oscillations	
2.4.1.	Stabilisation de satellite ; matrice d'inertie	275.
2.4.2.	Flexion et torsion d'une aile d'avion	285.
2.4.3.	Voir suspension automobile classique	294.
2.4.4.	Voir équation de Lagrange ; cloche et battant	297.
2.4.5.	Voir oscillateurs couplés	302.
2.4.6.	Voir cylindre dans coupelle oscillante	308.
2.4.7.	Voir ondes de torsion	1307.
2.5.	Couplage d'oscillateurs	
2.5.1.	Suspension automobile classique	294.
2.5.2.	Equations de Lagrange ; cloche et battant	297.
2.5.3.	Oscillateurs couplés	302.
2.5.4.	Cylindre dans coupelle oscillante	308.
2.5.5.	Voir flexion et torsion d'une aile d'avion	283.
2.5.6.	Voir ondes de torsion	1307.
2.6.	Mouvement à deux paramètres de rotation	
2.6.1.	Antenne de poursuite de missile	315.
3.	Mécanique des fluides	
3.1.	Cinématique des fluides	
3.1.1.	Ecoulement dans un coin	321.
3.1.2.	Champs de gradient de rotationnel	323.
3.1.3.	Voir électrostatique	735.
3.1.4.	Voir magnétostatique	765.
3.2.	Statique des fluides	
3.2.1.	Barrage parallélépipédique	327.
3.2.2.	Barrage prismatique, voûte	331.
3.2.3.	Statique des marées	336.
3.2.4.	Voir atmosphère et ballon 1	511.
3.2.5.	Voir atmosphère et ballon 2	515.
3.3.	Actions mécaniques	
3.3.1.	"Premiers pas" théoriques	
3.3.1.1.	Turbine hydraulique	341.
3.3.2.1.	Vidange	344.

3.3.1.3.	Sphère dans un courant variable : effet Magnus	348.
3.3.1.4.	Voir fusées et satellites	14.
3.3.1.5.	Voir théorème de Bernoulli	438.
3.3.2.	Applications techniques	
3.3.2.1.	Jouet à réaction	350.
3.3.2.2.	Aéromoteur	358.
3.3.2.3.	Eolienne	361.
3.3.2.4.	Auge rendement	366.
3.3.2.5.	Voir anémomètre à jets	169.
3.3.2.6.	Voir fusées et satellites	14.
3.3.2.7.	Voir satellite géostationnaire	75.
3.3.2.8.	Voir turbine hydraulique	341.
3.3.2.9.	Voir vidange	344.
3.3.2.10.	Voir Sphère dans un courant variable - effet Magnus	348.
3.3.2.11.	Voir voile	376.
3.3.2.12.	Voir voile de Flettner	381.
3.3.2.13.	Voir planche à voile	378.
3.3.2.14.	Voir modèles d'aéroglesseur	397.
3.3.2.15.	Voir navigation contre le vent	407.
3.3.2.16.	Voir effet de carène liquide	413.
3.3.3.	Marine	
3.3.3.1.	Théorie de la voile	376.
3.3.3.2.	Superposition d'écoulements : voile de Flettner ; effet Magnus	381.
3.3.3.3.	Planche à voile	387.
3.3.3.4.	Modèles d'aéroglesseur	397.
3.3.3.5.	Navigation contre le vent : bateau à une hélice propulsée par une éolienne	406.
3.3.3.6.	Effet de carène liquide : cause de naufrage d'un car-ferry	413.
3.3.4.	Océanographie physique	
3.3.4.1.	Houle	418.
3.3.4.2.	Mascaret	421.
3.3.4.3.	Résonance de marée	425.
3.3.4.4.	Modèles de courants marins	429.
3.3.4.5.	Voir statique des marées	336.
3.4.	Théorème de Bernoulli	
3.4.1.	Vortex	438.
3.4.2.	Tourbillon dans un fluide parfait	447.
3.4.3.	Houle sur fond horizontal	453.
3.4.4.	Modèles d'onde de surface	458.
3.4.5.	Voir vidange	345.
3.4.6.	Voir aéromoteur	358.
3.4.7.	Voir éolienne	361.
3.4.8.	Voir auget, rendement	366.

3.4.9.	Voir voile de Flettner	381.
3.4.10.	Voir oertes de charge	465.
3.4.11.	Voir oscillations de bassin de retenue	474.
3.4.12.	Voir compresseur à accélération angulaire permanente	581.
3.5.	Effets dissipatifs	
3.5.1.	Pertes de charge régulière et singulière	465.
3.5.2.	Oscillations amorties par viscosité	468.
3.5.3.	Oscillations de bassin de retenue	474.
3.5.4.	Loi de Darcy : exploitation de méthane	479.
3.5.5.	Résistance hydraulique : vaisseaux sanguins	481.
3.5.6.	Lithosphère	492.
3.5.7.	Rebond postglaciaire quaternaire	498.
3.5.8.	Voir flexion et torsion d'une aile d'avion	285.
3.5.9.	Voir navigation contre le vent	407.
3.6.	Mécanique des milieux continus	
3.6.1.	Voir acoustique des milieux continus	1286.
3.6.2.	Voir barrage parallélépipédique	327.
3.6.3.	Voir barrages prismatique et voûte	331.
3.6.4.	Voir lithosphère	492.
3.6.5.	Voir rebond postglaciaire quaternaire	498.
3.6.6.	Voir flexion et torsion couplées d'une aile d'avion	285.
3.6.7.	Voir ondes de torsion	1307.
3.6.8.	Voir capteur d'accélération avec jauge de contrainte	851.
3.6.9.	Voir bulle, tension superficielle, cavitation	556.
3.6.10.	Voir modèles d'ondes de surface	458.
3.6.11.	Voir statique et dynamique d'un système de levage	162.
3.6.12.	Voir antenne de poursuite de missile	315.
3.6.13.	Voir propagation d'ondes dans un milieu anisotrope, biréfringence	1207.
3.6.14.	Voir loi de Darcy pour les milieux poreux	479.
4.	Thermodynamique	
4.1.	Gaz parfait	
4.1.1.	Cycle de Carnot	509.
4.1.2.	Atmosphère et ballon, transformation polytropique	511.
4.1.3.	Atmosphère et aérostats	515.
4.1.4.	Moteurs à combustion interne	522.
4.2.	Les deux principes	
4.2.1.	Pompe à chaleur	527.
4.2.2.	Ballon sonde avec chauffage du gaz	531.
4.2.3.	Compresseurs	533.
4.2.4.	Cycle de Stirling : moteur à fils de caoutchouc	539.
4.2.5.	Interaction entre deux galaxies gazeuses en rotation	544.

4.3.	Changement d'état	
4.3.1.	Atmosphères sèche, humide	554.
4.3.2.	Bulle, tension superficielle, cavitation	556.
4.3.3.	Refroidissement par détente ou désaimantation	563.
4.3.4.	Supraconductivité	569.
4.3.5.	Voir machine frigorifique	588.
4.3.6.	Voir génie chimique d'une unité de production d'ammoniac	1499.
4.3.7.	Voir tirage d'un cristal de germanium	688.
4.3.8.	Voir mélanges binaires	1541.
4.4.	Systèmes ouverts	
4.4.1.	Détente de Joule-Thomson	575.
4.4.2.	Tuyère	577.
4.4.3.	Compresseur à accélération angulaire permanente	581.
4.4.4.	Détendeur adiabatique d'un gazoduc	582.
4.4.5.	Machine frigorifique, diagramme de Mollier	588.
4.4.6.	Voir génie chimique : unité de production d'ammoniac	1499.
4.5.	Thermodynamique statistique	
4.5.1.	Etude cinétique des gaz	595.
4.5.2.	Interaction de dipôles	599.
4.5.3.	Conductivité du silicium	605.
4.5.4.	Interaction laser jet de molécules ou d'atomes ionisés	611.
4.5.5.	Voir principe du laser	683.
4.6.	Diffusion	
4.6.1.	Masse molaire ; membrane poreuse	626.
4.6.2.	Interface benzène, iode	629.
4.6.3.	Diffusion et indice de réfraction (fonction erf)	633.
4.6.4.	Ultracentrifugation	636.
4.6.5.	Voir diffusion des neutrons dans un réacteur à uranium enrichi	126.
4.6.6.	Voir loi de Darcy	479.
4.7.	Thermique	
4.7.1.	Chauffage régulé	643.
4.7.2.	Modélisation des trois types d'échange thermique	646.
4.7.3.	Centrale nucléaire	655.
4.7.4.	Four à chaleur tournante et cuisson d'un soufflé	660.
4.7.5.	Analogie avec une ligne coaxiale résistive	668.
4.7.6.	Equation de Fourier ; gel d'un lac ; résistance thermique	672.
4.7.7.	Voir détendeur adiabatique d'un gazoduc	582.
4.7.8.	Voir tirage d'un monocristal de germanium	680.
4.7.9.	Voir génie chimique d'une unité de production d'ammoniac	1499.
4.8.	Rayonnement du corps noir	

4.8.1.	Tirage d'un monocristal de germanium	680.
4.8.2.	Principe du laser	683.
4.8.3.	Effet de serre sur terre	695.
4.8.4.	Voir modélisation des trois types d'échanges thermiques	646.
4.8.5.	Voir interféromètre de Pérot-Fabry	1444.
4.8.6.	Voir diode laser et mesure interférométrique	1418.

5. Electricité fondamentale

5.1. Electrocinétique

5.1.1. Courant continu

5.1.1.1.	Diode Zéner	702.
5.1.1.2.	Mesure de température par une thermistance	703.
5.1.1.3.	Mesure de capacité calorifique et de coefficient de variation de résistivité avec la température	707.
5.1.1.4.	Voir résistance de ligne électrique	668.
5.1.1.5.	Voir conductivité du silicium	605.

5.1.2. Régime transitoire

5.1.2.1.	Dents de scie	712.
5.1.2.2.	Voir étude progressive du transistor	956.
5.1.2.3.	Voir détecteur de crête	857.
5.1.2.4.	Voir multivibrateur astable	939.
5.1.2.5.	Voir chauffage régulé	643.
5.1.2.6.	Voir modélisation des trois types d'échanges thermiques	646.
5.1.2.7.	Voir traceur de courbes à courroie	1077.
5.1.2.8.	Voir asservissement de position d'un moteur	1127.
5.1.2.9.	Voir asservissement d'une gouverne d'avion	1144.

5.1.3. Courant alternatif

5.1.3.1.	Quadripôle en T	716.
5.1.3.2.	Quartz, oscillateur	721.
5.1.3.3.	Montage en triangle étoile, triphasé, transport d'électricité	727.
5.1.3.4.	Voir résonance électromécanique	66.
5.1.3.5.	Voir résonance électromagnétique	66.
5.1.3.6.	Voir lévitation magnétique	775.
5.1.3.7.	Voir circuits couplés par mutuelle	825.
5.1.3.8.	Voir étude progressive du transistor	956.
5.1.3.9.	Voir haut-parleur B.F., résonance	843.
5.1.3.10.	Voir transformateurs	1047.
5.1.3.11.	Voir courants triphasés	1104.
5.1.3.12.	Voir principe d'un radio-altimètre	1144.
5.1.3.13.	Voir oscillateur d'un émetteur hyperfréquence	1178.

5.2. Electrostatique du vide et des milieux

5.2.1.	Champs, potentiels, énergies	735.
5.2.2.	Dipôles	740.
5.2.3.	Théorème de Gauss ; cylindre infini électrisé	745.
5.2.4.	Lévitatie	748.
5.2.5.	Images électriques	750.
5.2.6.	Electromètre	757.
5.2.7.	Câble coaxial avec diélectrique	762.
5.2.8.	Voir interaction de dipôles	599.
5.2.9.	Voir résonance électromécanique	66.
5.3.	Magnétostatique du vide et des milieux	
5.3.1.	Champ créé par une plaque épaisse	765.
5.3.2.	Champ magnétique créé par deux câbles infinis parallèles	767.
5.3.3.	Potentiel vecteur, énergie de deux câbles infinis parallèles	770.
5.3.4.	Solénoïde	773.
5.3.5.	Lévitatie	775.
5.3.6.	Dipôle magnétique, aiguille aimantée	781.
5.3.7.	Champ magnétique terrestre	783.
5.3.8.	Champs créés par une sphère chargée en rotation	794.
5.3.9.	Moment magnétique d'une sphère, sphère aimantée, modèle de l'électron	799.
5.3.10.	Sphère supraconductrice	803.
5.3.11.	Milieux magnétiques ; self en ferrite	812.
5.3.12.	Voir vortex	438.
5.3.13.	Voir tourbillon dans un fluide parfait	447.
5.3.14.	Voir effets pelliculaires	827.
5.3.15.	Voir refroidissement par désaimantation adiabatique	563.
5.3.16.	Voir supraconductivité	569.
5.3.17.	Voir mouvement de particules 2	30.
5.3.16.	Voir tourbillon dans un tube parfait	447.
5.3.17.	Voir effets pelliculaires	827.
5.4.	Phénomènes d'induction	
5.4.1.	Circuits couplés par mutuelle	825.
5.4.2.	Effet pelliculaire	827.
5.4.3.	Courants de Foucault, épaisseur de peau dans une plaque de cuivre	829.
5.4.4.	Dynamo unipolaire : source de courant commandée par une vitesse	836.
5.4.5.	Haut parleur BF, résonance	842.
5.4.6.	Voir résonance électromécanique	66.
5.4.7.	Voir ondes de torsion (FFT)	1307.
5.5.	Introduction à la physique du solide	
5.5.1.	Voir câble coaxial avec diélectrique	762.
5.5.2.	Voir milieux magnétiques ; self en ferrite	812.
5.5.3.	Voir courants de Foucault, épaisseur de peau dans une plaque de cuivre	829.
5.5.4.	Voir sphère supraconductrice	803.
5.5.5.	Voir supraconductivité	569.

5.5.6.	Voir conductivité du silicium	605.
5.5.7.	Voir cristallographie	1471.
5.5.8.	Voir mécanique des milieux continus	507.
5.5.9.	Voir propagation dans un milieu anisotrope biréfringent	1207.
5.5.10.	Voir pouvoir rotatoire du quartz	1457.
5.5.11.	Voir ondes de torsion	1307.
5.5.12.	Voir principe du laser	683.
5.5.13.	Voir diffusion par une membrane poreuse	626.
5.5.14.	Voir loi de Darcy	479.

6. Physique appliquée

6.1. Electronique

6.1.1. Amplificateur opérationnel

6.1.1.1.	Montages classique	850.
6.1.1.2.	Détecteur de crête ; démodulateur de fréquence	857.
6.1.1.3.	Commande d'électrovanne	860.
6.1.1.4.	Capteur d'accélération à jauge de contrainte	862.
6.1.1.5.	Voir multiplieur	874.
6.1.1.6.	Voir rétroaction	896.
6.1.1.7.	Voir filtres	912.
6.1.1.8.	Voir oscillateurs	939.
6.1.1.9.	Voir modulation de fréquence	987.
6.1.1.10.	Voir voltmètre numérique	1021.
6.1.1.11.	Voir asservissement de position d'un moteur	1127.

6.1.2. Multiplieur

6.1.2.1.	Multiplieur à impulsion variable	874.
6.1.2.2.	Mesure d'impédance	882.
6.1.2.3.	Filtrage temporel	884.
6.1.2.4.	Filtrage numérique	890.
6.1.2.5.	Voir multiplieur à transistor	966.
6.1.2.6.	Voir page 1038.oir modulation de fréquence	987.
6.1.2.7.	Voir étude fréquentielle d'un signal	991.
6.1.2.8.	Voir voltmètre numérique	1021.
6.1.2.9.	Voir simulation de la résonance d'un pendule pesant	1038.
6.1.2.10.	Voir régulation de fréquence d'un émetteur hyperfréquence	1175.

6.1.3. Rétroaction

6.1.3.1.	Double intégration, double dérivation	896.
6.1.3.2.	Stabilité	899.
6.1.3.3.	Résistance négative ; gyrateur	904.
6.1.3.4.	Voir oscillateur sinusoïdal	940.
6.1.3.5.	Oscillateur à transistors	973.
6.1.3.6.	Automatique	1127.

6.1.4.	Filtres	
6.1.4.1.	Gabarit passe bas	912.
6.1.4.2.	Filtre passe bande ; série de Fourier	919.
6.1.4.3.	Filtre à self	921.
6.1.4.4.	Filtre à self et mutuelle	926.
6.1.4.5.	Voir filtrage temporel	884.
6.1.4.6.	Voir filtrage numérique	890.
6.1.4.7.	Voir analyse harmonique	982.
6.1.4.8.	Voir modulation de fréquence	987.
6.1.4.9.	Voir étude fréquentielle d'un signal	991.
6.1.4.10.	Voir fonction retard	1008.
6.1.5.	Oscillateur	
6.1.5.1.	Multivibrateur astable	939.
6.1.5.2.	Oscillateur sinusoïdal	940.
6.1.5.3.	Voir montages classiques d'A.O.	850.
6.1.5.4.	Voir oscillateurs à transistor	973.
6.1.5.5.	Voir voltmètre électronique	1021.
6.1.5.6.	Voir oscillateur d'un émetteur hyperfréquence	1178.
6.1.6.	Transistor	
6.1.6.1.	Diffusion et transistor	951.
6.1.6.2.	Etude progressive du transistor	956.
6.1.6.3.	Transistors : multiplieur	966.
6.1.6.4.	Oscillateurs à transistors	973.
6.1.6.5.	Voir hacheurs	1082.
6.1.7.	Théorie du signal	
6.1.7.1.	Analyse harmonique	982.
6.1.7.2.	Modulation de fréquence	987.
6.1.7.3.	Etude fréquentielle d'un signal, échantillonnage, démodulation	991.
6.1.7.4.	Fonction retard, réalisation, application	1008.
6.1.7.5.	Voir mesure de distance par transformation de Fourier	1418.
6.1.7.6.	Voir détection de radiosource ; corrélation	1435.
6.1.8.	Electronique numérique	
6.1.8.1.	Voltmètre numérique	1021.
6.1.8.2.	Convertisseur analogique numérique	1035.
6.1.8.3.	Entretien d'un pendule pesant ; oscillateur commandé en tension ; échantillonneur-bloqueur	1038.
6.1.8.4.	Voir multiplieur à impulsions variables	874.
6.1.8.5.	Voir filtrage temporel	884.
6.1.8.6.	Voir filtrage numérique	890.
6.1.8.7.	Voir multivibrateur astable	939.
6.1.8.8.	Voir électronique du hacheur	1082.
6.1.8.9.	Voir suspension à correcteur numérique, transformation en Z	1150.

6.2.	Electrotechnique	
6.2.1.	Transformateur	
6.2.1.1.	Transformateur réel	1047.
6.2.1.2.	Transformateur à carcasse magnétique saturable	1053.
6.1.2.3.	Voir modulation de lumière, effet électrooptique, faisceau gaussien	1212.
6.1.2.4.	Voir régulateur de fréquence d'un émetteur hyperfréquence	1175.
6.2.2.	Moteurs à courant continu	
6.2.2.1.	Moteur et dynamo	1066.
6.2.2.2.	Etude expérimentale d'un moteur	1068.
6.2.2.3.	Pompe à métal fondu d'échangeur de centrale nucléaire	1073.
6.2.2.4.	Traceur de courbe à courroie	1077.
6.2.3.	Hacheurs	
6.2.3.1.	Electronique du hacheur	1082.
6.2.3.2.	Hacheur série à 3 diodes	1093.
6.2.3.3.	Hacheur (série, réversible) et moteur	1098.
6.2.4.	Courants triphasés	
6.2.4.1.	Principe du moteur synchrone triphasé	1104.
6.2.4.2.	Convertisseur réversible	1113.
6.2.4.3.	Voir montage triangle étoile, triphasé, transport d'électricité	727.
6.2.4.4.	Voir transport d'électricité en triphasé	732.
6.2.4.5.	Voir transformateur à carcasse magnétique saturable	1053.
6.3.	Automatique	
6.3.1.	Asservissement de position d'un moteur avec correcteur	1127.
6.3.2.	Réducteur, asservissement d'une gouverne d'avion	1136.
6.3.3.	Radioaltimètre	1144.
6.3.4.	Suspension pneumatique à correcteur analogique ou numérique ; transformation en Z	1155.
6.3.5.	Correcteur de laser	1166.
6.3.6.	Régulation de fréquence d'un émetteur hyperfréquence	1175.
6.3.7.	Voir diode laser et mesure de distance interférométrique	1418.
6.3.8.	Voir fonction retard	1008.
6.3.9.	Voir traceur de courbe par courroie	1077.
6.3.10.	Voir vaisseaux sanguins	481.
7.	Physique ondulatoire	
7.1.	Ondes électromagnétiques	
7.1.1.	Modèle de l'onde électromagnétique plane	1186.
7.1.2.	Pression de radiation	1188.
7.1.3.	Ondes évanescentes	1193.
7.1.4.	Formules de Fresnel sous incidence oblique	1205.

7.1.5.	Propagation d'onde dans un milieu anisotrope, biréfringence	1207.
7.1.6.	Modulateur de lumière ; effet électrooptique ; faisceau gaussien	1212.
7.1.7.	Cavité résonnante parallélépipédique	1226.
7.1.8.	Guide d'onde rectangulaire	1231.
7.1.9.	Potentiels de Hertz et application spéciale au guide d'onde	1236.
7.1.10.	Un système de communication à rayonnement dipolaire	1245.
7.1.11.	Voir transformation du champ électromagnétique dans un changement de base de Lorentz	136.
7.1.12.	Voir ondes électriques	1254.
7.1.13.	Voir analogie acoustique-ondes électromagnétiques	1269.
7.1.12.	Voir détection de radiosource	1435.
7.1.13.	Boir interféromètre de Pérot-Fabry	1444.
7.2.	Ondes électriques	
7.2.1.	Ligne bifilaire	1254.
7.2.2.	Etude quadripolaire d'une ligne bifilaire	1259.
7.2.3.	Voir fonction retard	1008.
7.2.4.	Voir ondes de torsion	1307.
7.2.5.	Voir résonateur d'un émetteur hyperfréquence	1176.
7.3.	Acoustique	
7.3.1.	Analogie acoustique - ondes électromagnétiques	1269.
7.3.2.	Onde sonore dans un tube de Kundt ; mousse déphaseuse	1280.
7.3.3.	Acoustique des milieux continus	1286.
7.3.4.	Ondes magnétohydrodynamiques	1294.
7.4.	Ondes mécaniques	
7.4.1.	Corde vibrante pesante et série de Fourier	1304.
7.4.2.	Ondes de torsion (FFT)	1307.
7.5.	Optique	
7.5.1.	Optique géométrique	
7.5.1.1.	Miroir liquide	1321.
7.5.1.2.	Télescope Cassegrain	1323.
7.5.1.3.	Lunette astronomique	1327.
7.5.1.4.	Fibre optique, guidage optique	1329.
7.5.1.5.	Atmosphère : milieu d'indice variable	1336.
7.5.1.6.	Voir lentilles et miroirs d'optique ondulatoire	1343.
7.5.2.	Optique ondulatoire	
7.5.2.1.	Interférences	
7.5.1.2.1.	Miroirs de Fresnel	1342.
7.5.1.2.2.	Fentes d'Young	1347.
7.5.2.1.3.	Frangé achromatique, spectre cannelé obtenus avec les fentes d'Young	1351.
7.5.2.1.4.	Séparation d'étoiles doubles	1359.

7.5.2.1.5.	Interférométrie stellaire	1362.
7.5.2.2.	Diffraction	
7.5.2.2.1.	Diffraction de pupilles	1370.
7.5.2.2.2.	Fentes, lunette astronomique, étoile double	1378.
7.5.2.3.	Réseaux	
7.5.2.3.1.	Réseaux par réflexion	1389.
7.5.2.3.2.	Filtrage spatial	1398.
7.5.2.3.3.	Marquage optique des écoulements	1402.
7.5.2.3.4.	Voir principe d'un laser	683.
7.5.2.3.5.	Voir interféromètre de Pérot-Fabry	1414.
7.5.2.4.	Interféromètres	
7.5.2.4.1.	Anneaux d'égale inclinaison, influence de la température d'une source lumineuse	1410.
7.5.2.4.2.	Michelson, détection d'enveloppe, spectrométrie de Fourier	1414.
7.5.2.4.3.	Michelson : mesure de distance par transformation de Fourier	1418.
7.5.2.4.4.	Détection de radiosource ; corrélation	1435.
7.5.2.4.5.	Interféromètre de Pérot-Fabry	1444.
7.5.2.4.6.	Voir modulateur de lumière (Interféromètre de Mach-Zender)	1212.
7.5.2.4.7.	Voir principe du laser	
7.5.2.5.	Lumière polarisée	
7.5.2.5.1.	Pouvoir rotatoire du quartz	1456.
7.5.2.5.2.	Voir propagations d'ondes dans un milieu anisotrope, biréfringence	1207.

TABLE DES MATIERES

Chimie

1. Energie et structure

1.1. Thermochimie

1.1.1.	Température et pression d'explosion à volume constant	1461.
1.1.2.	Température de flamme de CO	1461.
1.1.3.	Combustion de CO	1463.
1.1.4.	Grillage de PbS avec gangue	1465.

1.2. Liaisons

1.2.1.	Tableau périodique	1468.
1.2.2.	Nombre d'atomes de la molécule de phosphore	1468.
1.2.3.	H ₂ O	1469.
1.2.4.	Energies de liaison covalente	1469.

1.2.5.	Molécules	1471.
1.2.6.	Voir interaction de dipôles	599.
1.2.7.	Voir Synthèse de Diels-Adler du terpinéol -Théorie de Hueckel)	1726.
1.3.	Cristallographie	
1.3.1.	Cristal de chlorure de potassium	1472.
1.3.2.	Composés interstitiels fer carbone	1472.
1.3.3.	Voir tirage d'un monocristal de germanium	680.
1.3.4.	Voir conductivité du silicium	605.
2.	Cinétique des réactions	
2.1.	Ordre d'une décomposition gazeuse	1474.
2.2.	Suivi de pression totale	1474.
2.3.	Cinétique des SN	1476.
2.4.	Substitution nucléophile inorganique	1477.
2.5.	Profil réactionnel d'une catalyse avec chimisorption	1478.
2.6.	Constante de Michaelis en catalyse	1479.
2.7.	Cinétique d'une estérification	1480.
2.8.	Oxydoréduction $\text{BrO}^- + \text{Br}^-$	1483.
2.9.	Voir S.N.	1476.
2.10.	Voir $\text{HCl} + \text{C}_2\text{H}_4$	1562.
2.11.	Voir obtention industrielle du MTBE, antidétonant non polluant	1741.
3.	Thermodynamique chimique	
3.1.	Equilibres homogènes	
3.1.1.	Fraction molaire et densité	1489.
3.1.2.	Variance de la conversion du gaz à l'eau	1489.
3.1.3.	Décomposition du chlorure d'hydrogène	1490.
3.1.4.	Solution non diluée	1491.
3.1.5.	Synthèse industrielle du méthanol	1491.
3.1.6.	Préparation industrielle de SO_3	1493.
3.1.7.	Préparation industrielle de NH_3	1496.
3.1.8.	Génie chimique de la fabrication de NH_3	1500.
3.1.9.	Voir thermodynamique de la déshydrogénation du propane	1720.
3.1.10.	Voir comparaison thermodynamique d'acides carboxyliques	1785.
3.2.	Equilibres hétérogènes	
3.2.1.	Obtention d'un solide à partir de deux gaz	1510.
3.2.2.	Equilibre de Boudouard 1	1511.
3.2.3.	Equilibre de Boudouard 2	1513.
3.2.4.	Four à chaux ; déplacements par ajouts	1514.
3.2.5.	Four à chaux en présence de coke	1515.
3.2.6.	$\text{MgCO}_3 + \text{CaO}$	1516.
3.2.7.	Biochimie du sang	1517.

3.2.8.	Action du dichlore sur le cuivre	1519.
3.3.	Equilibres hétérogènes de la métallurgie	
3.3.1.	Réduction des oxydes de fer dans un haut fourneau	1522.
3.3.2.	Métallurgie du zinc en présence de coke	1528.
3.3.3.	Utilisation du diagramme d'Ellingham pour la métallurgie du fer	1530.
3.3.4.	Utilisation de diagramme pour les ennuis métallurgiques de l'aluminium	1537.
3.4.	Mélanges binaires	
3.4.1.	Azéotrope de HNO_3	1541.
3.4.2.	Diagramme binaire de cristaux liquides	1543.
3.4.3.	Diagramme binaire Al-Ce	1546.
3.4.4.	Grandeurs molaires partielles du POM	1548.
3.4.5.	Thermodynamique de composés interstitiels fer-carbone	1553.
4.	Solutions aqueuses	
4.1.	Equilibres acidobasiques	
4.1.1.	Premiers pas	1559.
4.1.2.	pH d'un mélange, méthode RP	1561.
4.1.3.	Dissociation de l'acide monochloroacétique en fonction du pH	1562.
4.1.4.	Etude de l'acide monochloroacétique	1563.
4.1.5.	Dosage de l'acide méthoxyacétique	1564.
4.1.6.	Dosage de l'acide ascorbique	1566.
4.1.7.	Dosage d'un mélange de deux acides faibles	1569.
4.1.8.	Acide bicarboxylique 1	1572.
4.1.9.	Acide bicarboxylique 2	1574.
4.1.10.	Dosage d'une solution tampon à l'hydroxylamine	1577.
4.1.11.	Dosage de CrO_3 par la soude	1579.
4.1.12.	Diagrammes logarithmiques	1581.
4.1.13.	Voir comparaison thermodynamique d'acides carboxyliques	1785.
4.1.14.	Voir extraction par solvant ; dosage acidobasique diphasé	1810.
4.2.	Complexes	
4.2.1.	Complexes du cuivre II	1588.
4.2.2.	Complexe : stabilité comparée ; dosage complexométrique	1589.
4.2.3.	Le ligand EDTA	1591.
4.2.4.	Le ligand DETA	1601.
4.3.	Introduction à la précipitation	
4.3.1.	Solubilité de l'orthophosphate de calcium (engrais soluble)	1608.
4.3.2.	Acidité d'un ion dissout	1608.
4.4.	Oxydoréduction	
4.4.1.	Premiers pas	1610.
4.4.2.	Oxydation du méthanoate par le brome	1611.

4.4.3.	Dosage des ions ferreux par les ions cériques	1612.
4.4.4.	Etude thermodynamique de piles	1614.
4.4.5.	Diagramme potentiel - pH du plomb	1616.
4.4.6.	Diagramme potentiel - pH de l'azote	1620.
4.4.7.	Voir dosage d'organomagnésiens	1714.
4.5.	Problèmes mixtes	
4.5.1.	L'eau calcaire	1625.
4.5.2.	Dissolution du calcaire par l'eau de pluie	1626.
4.5.3.	Diverses mesures de constante d'acidité de l'acide acétique	1630.
4.5.4.	Acide chlorhydrique	1634.
4.5.5.	L'élément azote en chimie inorganique	1636.
4.5.6.	Analyse qualitative	1639.
4.5.7.	Précipitation (simple) de sulfures	1640.
4.5.8.	Sulfure de zinc	1642.
4.5.9.	Travaux pratiques de dosage	1645.
4.5.10.	Dosage argentimétrique	1658.
4.5.11.	Argentimétrie classique	1660.
4.5.12.	Précipitation du cadmium II	1666.
4.5.13.	Méthode de l'équilibre prépondérant ou de contrôle	1671.
4.6.	Courbes intensité-potentiel	
4.6.1.	Cathode de mercure pour électrolyser le chlorure de sodium dissous	1682.
4.6.2.	Polarographie : dosage des ions calcium en présence de EDTA	1685.
5.	Chimie organique	
5.1.	Spectroscopies	
5.1.1.	Spectroscopies infrarouge et RMN du terpinéol	1694.
5.2.	Halogénoalcanes	
5.2.1.	Substitutions nucléophiles	1699.
5.2.2.	Mécanismes	1700.
5.2.3.	Récapitulation	1701.
5.2.4.	Voir stéréochimie dynamique d'un dérivé chloré de cycloalcane	1705.
5.2.5.	Voir mécanismes de substitution nucléophiles	1700.
5.2.6.	Voir obtention d'alcènes par déshydrohalogénéation	1720.
5.3.	Stéréochimie	
5.3.1.	Addition de Br ₂ sur un alcène	1705.
5.3.2.	Stéréochimie dynamique d'un dérivé chloré de cycloalcane	1706.
5.3.3.	Mécanismes	1708.
5.3.4.	Voir obtention d'alcènes par déshydrohalogénéation	1720.
5.3.5.	Voir le menthol	1734.
5.3.6.	Voir obtention industrielle de MTBE, antidétonant non polluant	1741.
5.3.7.	Voir élément azote en chimie organique	1746.

5.3.8.	Voir mécanismes et chiralité	1765.
5.3.9.	Voir estérification des acides bicarboxyliques et chiralité	1769.
5.4.	Organomagnésiens	
5.4.1.	Préparation et dosage	1714.
5.4.2.	Agent de synthèse	1715.
5.4.3.	Comparaison avec un organozincique	1717.
5.4.4.	Voir mécanismes et chiralité	1766.
5.5.	Alcènes	
5.5.1.	Addition de chlorure d'hydrogène sur l'éthylène	1720.
5.5.2.	Déshydrogénisation du propane	1720.
5.5.3.	Mécanismes de déshydrohalogénéation	1722.
5.5.4.	Synthèse de Diels-Adler du terpinéol, théorie de Huckel	1726.
5.5.5.	Voir addition de Br ₂ sur un alcène	1705.
5.5.6.	Voir premiers mécanismes	1756.
5.6.	Benzène	
5.6.1.	Dérivés du benzène	1729.
5.6.2.	Synthèse de médicament : l'ibuprofène	1731.
5.6.3.	Voir comparaison avec un organozincique	1717.
5.6.4.	Voir l'élément azote en chimie organique	1746.
5.6.5.	Voir synthèse d'un antihistaminique : l'antergan	1750.
5.6.6.	Voir synthèse d'un colorant : le rouge para	1753.
5.7.	Alcools	
5.7.1.	Le menthol	1734.
5.7.2.	Synthèse de Williamson d'un éther couronne	1738.
5.7.3.	Obtention industrielle du MTBE, antidétonant non polluant	1741.
5.8.	Fonctions azotées	
5.8.1.	L'élément azote en chimie organique	1748.
5.8.2.	Synthèse d'un antihistaminique : l'antergan	1750.
5.8.3.	Synthèse d'un colorant : le rouge para	1753.
5.9.	Aldéhydes et cétones	
5.9.1.	Premiers mécanismes	1756.
5.9.2.	Mécanismes et stéréochimie	1758.
5.9.3.	Synthèse d'un parfum	1762.
5.9.4.	Voir agent de synthèse	
5.10.	Acides carboxyliques et dérivés	
5.10.1.	Obtention d'un chlorure d'acide	1770.
5.10.2.	Estérification des acides bicarboxyliques	1771.
5.10.3.	Synthèse malonique de l'acide hexanoïque	1773.
5.10.4.	Synthèse de l'acide barbiturique	1776.

5.10.5.	Synthèse de l'isocyanate de méthyle et du carbaryle (insecticide)	1777.
5.10.6.	Synthèse historique du terpinéol	1779.
5.10.7.	Comparaison thermodynamique d'acides carboxyliques	1785.
5.10.8.	Voir acide bicarboxylique 1	1571.
5.10.9.	Voir acide bicarboxylique 2	1574.
5.10.10.	Voir comparaison avec un organozincique	1717.
5.11.	Polymérisations	
5.11.1.	Alcool à polycondenser	1791.
5.11.2.	Fabrication du polyacrylonitrile	1792.
5.11.3.	Copolymérisation : fabrication du caoutchouc	1793.
5.12.	Survol final	
5.12.1.	Survol 1	1795.
5.12.2.	Survol 2	1796.
5.12.3.	Survol 3	1798.
5.12.4.	Survol 4	1799.
5.12.5.	Survol 5	1803.
5.12.6.	Survol 6	1806.
5.12.7.	Extraction par solvant	1810.

TABLE DES MATIERES

APPLICATIONS INTERDISCIPLINAIRES

1.	Biologie	
1.1.	Biochimie du sang	1518
1.2.	Résistances hydrauliques ; vaisseaux sanguins	481
1.3.	Masse molaire ; membrane poreuse	626
1.4.	Ultracentrifugation	636
2.	Géophysique	
2.1.	Lithosphère	492
2.2.	Rebond postglaciaire quaternaire	498
2.3.	Loi de Darcy : exploitation de gaz naturel	479
2.4.	Equation de Fourier : gel d'un lac, résistance thermique	672
2.5.	Atmosphère et ballon	511
2.6.	Atmosphère et aérostat	525
2.7.	Ballon sonde avec chauffage au gaz	531
2.8.	Croissance des gouttes de pluie par coalescence	119
2.9.	Dissolution du calcaire par l'eau de pluie	1626
2.10.	Atmosphère : milieu d'indice variable	1335
2.11.	Système de communication à rayonnement dipolaire	1245

2.12.	Bilan thermique de la Terre ; effet de serre	695
2.13.	Etude statistique des vents	361
2.14.	Océanographie physique	418
2.15.	Dipôle magnétique terrestre, boussole	781
2.16.	Champ magnétique terrestre	783
2.17.	Satellite géostationnaire	75
3.	Astrophysique	
3.1.	Points de Lagrange	99
3.2.	Quelques problèmes de navigation à voile solaire	93
3.3.	Avance du périhélie de Mercure	109
3.4.	Interaction entre deux galaxies gazeuses en rotation	544
3.5.	Miroir liquide de télescope	1320
3.6.	Télescope Cassegrain	1322
3.7.	Séparation d'étoiles doubles	1359
3.8.	Interférométrie stellaire	1362
3.9.	Détection de radiosources ; corrélation	1435
4.	Astronautique	
4.1.	Flexion et torsion d'une aile d'avion	285
4.2.	Réducteur, asservissement d'une gouverne d'avion	1136
4.3.	Vitesse de lancement et excentricité de satellite	83
4.4.	Changement d'excentricité de satellite	88
4.5.	Stabilisation de satellite	275
4.6.	Antenne de poursuite de missile	315
4.7.	Régulateur de fréquence d'un émetteur radar hyperfréquence	1175
5.	Métallurgie	
5.1.	Réduction des oxydes de fer dans un haut fourneau	1522
5.2.	Utilisation du diagramme d'Ellingham pour la métallurgie du fer	1529
5.3.	Composés interstitiels du fer	1553
5.4.	Métallurgie du zinc en présence de coke	1528
5.5.	Utilisation de diagramme pour les ennuis métallurgiques de l'aluminium	1536
5.6.	Grillage du minerai de plomb	1465
6.	Energétique	
6.1.	Centrale nucléaire	655
6.2.	Diffusion de neutrons	126
6.3.	Magnétohydrodynamique	1294
6.4.	Barrage parallélépipédique	327
6.5.	Barrages prismatique, voûte	331
6.6.	Oscillations de bassin de retenue	474
6.7.	Pertes de charge régulière et singulière	465
6.8.	Turbine hydraulique	341
6.8.	Auget, rendement de turbine	366
6.10.	Eolienne	361

6.11.	Aéromoteur	358
7.	Productique	
7.1.	Tirage d'un monocristal de germanium	680
7.2.	Synthèse d'un anti-inflammatoire : l' ibuprofen	1731
7.3.	Le menthol	1734
7.4.	Synthèse de médicament antihistaminique ; l' antergan	1750
7.5.	Synthèse de médicament : barbiturique	1776
7.6.	Synthèse de parfum	1762
7.7.	Synthèse de colorant : le rouge para	1753
7.8.	Synthèse de l'isocyanate de méthyle et du carbaryle ; insecticide	1777
7.9.	Production de MTBE (essence sans plomb)	1741
7.10.	Synthèse industrielle du méthanol	1491
7.11.	Préparation industrielle du trioxyde de soufre	1493
7.12.	Synthèse de l'ammoniac	1496
7.13.	Génie chimique de production d'ammoniac	1499
7.14.	Production électrochimique de dichlore par cathode de mercure	1682
7.15.	Polymérisations	1791
8.	Domotique	
8.1.	Chauffage régulé	643
8.2.	Pompe à chaleur	527
8.3.	Four à chaleur tournante	660
8.4.	Haut parleur	842
9.	Transports	
9.1.	Moteurs à combustion interne	522
9.2.	Freinage et accélération de véhicule	264
9.3.	Déplacement du chargement au freinage	268
9.4.	Suspension classique	294
9.5.	Correcteur d'assiette numérique	1155
10.	Sports	
10.1.	Ski	246
10.2.	Voile	376
10.3.	Planche à voile	387
10.4.	Equilibriste sur ballon	252
10.5.	Stabilisation de montgolfière	515
11.	Technologie	
11.1.	Electrotechnique	1047
11.2.	Automatique	1127
11.3.	Compresseurs	533
11.4.	Détendeur de gazoduc	582
11.5.	Système de levage	162
11.6.	Régulateur de Watt	154
11.7.	Machine frigorifique	588

11.8.	Capteur d'accélération avec jauge de contrainte	862
11.9.	Mécanique des milieux continus (résistance des matériaux)	508

INDEX GENERAL

INDEX GENERAL DE CHIMIE	55 pages
INDEX GENERAL DE PHYSIQUE	83 pages

Les indications de programme soumises à des modifications ministérielles périodiques doivent être vérifiées par l'utilisateur de temps en temps.